# 線性聯立方程式與高斯消去法

魏澤人

國立東華大學 應用數學系

# 線性聯立方程式

## 定義

**System of Linear Equation**

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

# 線性聯立方程式

## 範例

$$
\begin{aligned}
5x + 7y - 3z &= 6 \\
4x - 8y + 5z &= 2
\end{aligned}
$$

## 範例

$$
\begin{aligned}
6x + y &= 2 \\
4x - 3y &= 7 \\
7x - 2y &= 1
\end{aligned}
$$

# 正常的聯立方程式

## 範例

$$
\begin{aligned}
5x + 7y - 3z + 6w &= 6 \\
4x - 8y + 5z + 2w &= 2 \\
1x - 2y + 3z + 2w &= 5 \\
3x - 2y + 1z + 2w &= 1
\end{aligned}
$$

# 線性聯立方程式

## 範例

$$
\begin{aligned}
5x + 7y - 3z + 6w &= 6 \\
5x + 7y - 3z + 6w &= 2 \\
5x + 7y - 3z + 6w &= 5 \\
5x + 7y - 3z + 6w &= 5
\end{aligned}
$$

# 線性聯立方程式

## 範例

$$
\begin{aligned}
5x + 7y - 3z + 6w &= 6 \\
4x - 8y + 5z + 2w &= 2 \\
1x - 2y + 3z + 2w &= 5 \\
3x - 2y + 1z + 2w &= 1
\end{aligned}
$$

# 簡化符號/概念

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

# 內容

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

# 寫成

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

# 空間

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

# 有解

## 範例

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

有解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 定義

有解時，稱此系統 **consistent**

# 無解

## 範例

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

無解

## 定義

無解時，稱此系統 **inconsistent**

# 齊次

**定義**

有解時，稱$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 此系統為 **Homogeneous**

**定義**

有解時，稱 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 此系統為 **Homogeneous**

**問題**

Homogeneous 時一定有解嗎？
Homogeneous 時一定 consistent 嗎?

# 等價

**定義**

若對於所有 $\mathbf{x}$, 有 $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 此稱此兩方程組 **Equivalent.**

**問題**

請舉例一些 Equivalent 的方程組

# 無聊的例子

## 範例

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

# 無聊的例子

**範例**

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

# 無聊的例子

**範例**

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

# 比較不無聊的例子

## 範例

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

# 比較不無聊的例子

## 範例

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

# 基本列運算

- Type 1: $T_{i,j}$ 交換 $i, j$ 兩列
- Type 2: $D_i\,(m)$ 把第 $i$ 列乘上 $m$ 倍
- Type 3: $L_{i,j}\,(m)$ 把第 $j$ 列乘上 $m$ 倍之後加進去第 $i$ 列

# 基本列運算

- Type 1: $T_{i,j}$ 交換 $i, j$ 兩列
- Type 2: $D_i(m)$ 把第 $i$ 列乘上 $m$ 倍
- Type 3: $L_{i,j}(m)$ 把第 $j$ 列乘上 $m$ 倍之後加進去第 $i$ 列

**問題**

- $T_{i,j}A\mathbf{x} = T_{i,j}\mathbf{b}$ 是否和 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivalent
- $D_i(m)A\mathbf{x} = D_i(m)\mathbf{b}$ 是否和 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivalent
- $T_{i,j}(m)A\mathbf{x} = T_{i,j}(m)\mathbf{b}$ 是否和 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivalent

# 基本列運算

- Type 1: $T_{i,j}$ 交換 $i, j$ 兩列
- Type 2: $D_i\,(m)$ 把第 $i$ 列乘上 $m$ 倍 ($m \neq 0$)
- Type 3: $L_{i,j}\,(m)$ 把第 $j$ 列乘上 $m$ 倍之後加進去第 $i$ 列

## 問題

- $T_{i,j}A\mathbf{x} = T_{i,j}\mathbf{b}$ 是否和 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivalent
- $D_i\,(m)\,A\mathbf{x} = D_i\,(m)\,\mathbf{b}$ 是否和 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivalent
- $T_{i,j}\,(m)\,A\mathbf{x} = T_{i,j}\,(m)\,\mathbf{b}$ 是否和 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivalent

# 基本列運算

- Type 1: $T_{i,j}$ 交換 $i, j$ 兩列
- Type 2: $D_i\left(m\right)$ 把第 $i$ 列乘上 $m$ 倍
- Type 3: $L_{i,j}\left(m\right)$ 把第 $j$ 列乘上 $m$ 倍之後加進去第 $i$ 列 ($i \neq j$)

## 問題

- $T_{i,j}A\mathbf{x} = T_{i,j}\mathbf{b}$ 是否和 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivalent
- $D_i\left(m\right)A\mathbf{x} = D_i\left(m\right)\mathbf{b}$ 是否和 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivalent
- $T_{i,j}\left(m\right)A\mathbf{x} = T_{i,j}\left(m\right)\mathbf{b}$ 是否和 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivalent

策略: 利用基本列運算來簡化方程組

$$E_5 E_4 \cdots E_2 E_1 A\mathbf{x} = E_5 E_4 \cdots E_2 E_1 \mathbf{b}$$

會和

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

有相同解。
其中 $E_k$ 是基本列運算。

# 兩個問題

- 目標是什麼？

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- 要如何達成目標？
- 一定能達到目標嗎？

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

所以 $E(A|\mathbf{b}) = (EA|E\mathbf{b})$

# 實際計算

解

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & = 2 \end{cases}$$

# 最簡單形式的定義

## 定義

符合下面三個性質的舉證，被稱為 **row echelon form**

- 全部都是 0 的列在最下面
- 每列第一個非零項， 而在上面列的第一個非零項還要靠右邊。

# 最簡單形式的定義

## 定義

符合下面三個性質的舉證，被稱為 **row echelon form**

- 全部都是 0 的列在最下面
- 每列第一個非零項， 而在上面列的第一個非零項還要靠右邊。

## 問題

這個定義是什麼意思？

# 最簡單形式的定義

**定義**

符合下面三個性質的舉證，被稱為 **Reduced row echelon form**

- 全部都是 0 的列在最下面
- 每列的第一個非零的項，是該行唯一的非零項
- 每列的第一個非零項都是 1，而且比上面的列的第一個非零項還要靠右邊。

# 最簡單形式的定義

## 定義

符合下面三個性質的舉證，被稱為 **Reduced row echelon form**

- 全部都是 0 的列在最下面
- 每列的第一個非零的項，是該行唯一的非零項
- 每列的第一個非零項都是 1，而且比上面的列的第一個非零項還要靠右邊。

## 問題

Reduced row echelon form 一定是 row echelon form 嗎？
舉一個是 row echelon form 但不是 reduced echelon form 的例子。
舉一個 reduced echelon form 的例子。