두 삼각함수의 교점의 개수

20731 황태준

2025학년도 2학년 1학기 수학 I 심화탐구

May 30, 2025

Contents

1. 발상

중간고사를 준비하며 공부를 하다가 이런 문제를 마주쳤습니다.

26. $0 \le x \le \pi$ 일 때, 2 이상의 자연수 n 에 대하여
두 곡선 $y = \sin x$ 와 $y = \sin(nx)$ 의 교점의 개수를 a_n 이라 하자.
$a_3 + a_5$ 의 값을 구하시오. [4점]

Figure 1.1: 2019년 3월 교육청 학력평가 수학 가형 26번

분명 어려운 문제는 아니지만, 사실상 효율적으로 푸는 방법은 그냥 세 개의 그래프 $y = \sin x, y = \sin 3x, y = \sin 5x$ 를 모두 그려서 교점 개수를 세는 것입니다.

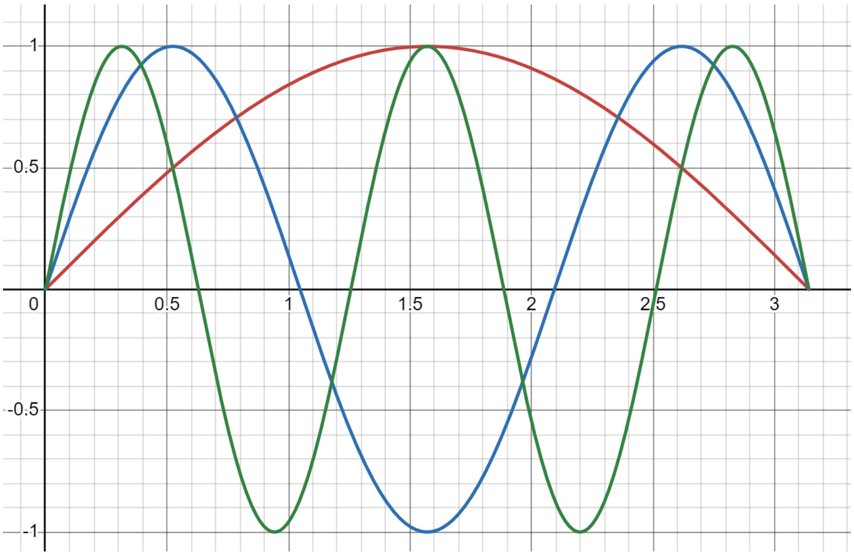

Figure 1.2: 그래핑 계산기로 그린 세 함수의 그래프[1]

그런데 이것은 오직 이 문제를 푸는 방법일 뿐이지, 만약 문제에서 $a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ 처럼 값을 더 여러 개를 구하라고 했거나, a_{2019}처럼[2] 무식하게 큰 값을 구하라고 했다면 단순히 그래프를 푸는 방법으로는 해결하지 못했을 겁니다.

그렇게 되면 슬슬 규칙성을 파악해야겠다는 생각이 듭니다. 여전히, 가장 빠른 방법은 한 5개에서 10개까지 해보고 일반항을 때려 맞추는 것일 겁니다. 어쨌든 수학에서 유추는 중요한 부분을 차지하니, 저는 시도를 해보았으나 부합하는 식을 직관적으로 맞추기는 어려워서, 생성형 AI한테도 한 번 시켜봤었습니다.

하지만 일단, 앞으로의 수식 표현을 일반화하기 위해 아래와 같이 정의하겠습니다.

[1]붉은색: $y = \sin x$, 푸른색: $y = 3\sin x$, 녹색: $y = 5\sin x$
[2]그 해 년도를 구해야 하는 값에 넣는 문제가 꽤 많은 것 같습니다.

Definition 1.1

아래 방정식

$$\sin x = \sin nx \qquad \text{where} \quad n \geq 2, n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

의 실근에 대해 앞으로 아래와 같이 약속하자.

$$\mathrm{S} := \{x \mid \sin x = \sin nx, n \geq 2, n \in \mathbb{N}\} \tag{1.2}$$

$$|\mathrm{S}| =: s_n \tag{1.3}$$

ChatGPT, Gemini, Sonnet 등 여러 군데에 시켜봤는데, AI들이 내놓은 식들을 모아보면 공통적으로 이 정도입니다[3].

$$s_n = \begin{cases} n & (n\text{은 짝수}, n > 2) \\ n+1 & (n\text{은 홀수}) \end{cases} \tag{1.4}$$

$$s_n = 2n - 2 \quad (n \geq 2) \tag{1.5}$$

문제에서 요구하는 3과 5만 넣어봐도 성립하지 않는다는 것을 알 수 있습니다. 아직까지는 얘들도 멍청한가봅니다.

이렇게 되면 더욱 가만히 있을 수 없어서 근거 없는 유추가 아니라, 정말로 유도를 해보기로 마음먹었습니다.

[3]놀라울 정도로 일관됩니다.

2. 해의 일반항 유도

2.1. 해의 조건

먼저 주어진 방정식은

$$\sin x = \sin nx \qquad \text{where} \quad n \geq 2, n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

이 식이 성립하려면 경우는 아래 둘 중 하나이고, 생각할 수 있는 다른 경우는 사인 곡선의 주기성과 대칭성에 의해 모두 동치입니다.

$$x = nx + 2k\pi \quad \text{or} \quad x = -nx + (2k+1)\pi \qquad \text{where} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

여기서 쓸모는 없겠지만, 편안함을 위해 이 두 경우를 하나의 식으로 표현해 보면 아래와 같습니다.

$$x = (-1)^k nx + k\pi \quad \text{where} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

혹시 나중에 문제 풀 때 써먹을 수 있을지도 모르니 일단 이것으로 부터 얻은 일반적인 결론부터 정리하고 넘어가겠습니다.

Theorem 2.1.1

아래 방정식

$$\sin\theta = \sin\varphi \tag{2.4}$$

에 대해 그 해의 조건은 아래와 같다.

$$\theta = (-1)^k \varphi + k\pi \quad \text{where} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.5}$$

2.2. 해의 개수 구하기

돌아와서, 개수를 구하기 위해서는 어차피 경우를 나누어 생각해야 할 것 같습니다.

2.2.1. 첫번째 경우

$x = nx + 2k\pi$를 변형해서 x를 구해 봅시다. 앞으로 계속 $k \in \mathbb{Z}$라고 하고 이 조건은 생략하겠습니다.

$$x - nx = 2k\pi \tag{2.6}$$

그런데 n이 뒤에 오는게 불편하니까 조건을 $x = nx - 2k\pi$로 변형한 뒤 계속합시다.

$$\begin{aligned} nx - x &= 2k\pi \\ (n-1)x &= 2k\pi \\ x &= \frac{2k\pi}{n-1} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$0 \le x \le \pi$이므로

$$0 \le \frac{2k\pi}{n-1} \le \pi \tag{2.8}$$

이때 $n \ge 2$이므로 $n-1>0$입니다. k에 대해서 정리하면

$$0 \le k \le \frac{n-1}{2} \tag{2.9}$$

이때 k는 정수이므로 k의 값은 다음과 같습니다.

$$k = 0, 1, 2, ..., \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \tag{2.10}$$

그러므로 이 경우 해의 개수는

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \tag{2.11}$$

2.2.2. 두번째 경우

$x = -nx + (2k+1)\pi$를 x에 대해서 정리하면

$$\begin{aligned} x + nx &= (2k+1)\pi \\ (1+n)x &= (2k+1)\pi \\ x &= \frac{(2k+1)\pi}{n+1} \end{aligned} \tag{2.12}$$

따라서

$$0 \le \frac{(2k+1)\pi}{n+1} \le \pi \Longrightarrow 0 \le 2k+1 \le n+1 \tag{2.13}$$

이 때 $2k+1$의 값들은

$$2k+1 = 1, 3, 5, ..., n, n+1 \tag{2.14}$$

이것의 개수는

$$\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor \tag{2.15}$$

그러므로 가능한 k의 값들은

$$k = 0, 1, 2, ..., \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \tag{2.16}$$

따라서 가능한 k의 개수는

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \tag{2.17}$$

2.2.3. 두 경우에서 해의 개수

먼저 교점 개수가 될 수 있는 후보를 s_n^*로 놓겠습니다. 또, 첫번째 조건에 해당하는 집합을 A, 두번째 조건에 해당하는 집합을 B라고 하겠습니다.

앞서 구해놓은 두 경우에 대한 해의 개수를 다시 봅시다.

$$\begin{aligned} |\mathrm{A}| &= \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \\ |\mathrm{B}| &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} s_n^* &= |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| \\ &= \left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right) \\ &= \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \end{aligned} \tag{2.19}$$

이 때, 앞서 구한 두 경우에 대해 각각 n이 홀수일 때와 짝수일 때로 구분해 바닥(floor) 기호를 벗길 수 있습니다.

먼저 n이 짝수일 때, 바닥 값들이 아래와 같으므로

$$\begin{aligned} |\mathrm{A}| &= \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1 \\ |\mathrm{B}| &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2} \end{aligned} \tag{2.20}$$

해의 개수는

$$s_n^* = \frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{2} + 2 = n + 1 \tag{2.21}$$

또, n이 홀수일 때, 바닥 값들이 아래와 같으므로

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$$
$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2} \tag{2.22}$$

해의 개수는

$$s_n^* = \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + 2 = n + 1 \tag{2.23}$$

식 (2.21) 와 식 (2.23) 에 의해 아래를 얻습니다.

$$s_n^* = n + 1 \tag{2.24}$$

2.2.4. 중복된 해의 처리

그런데 위 두 경우를 모두 만족하는 해들이 존재할 수 있습니다. 즉, 주기성과 대칭성을 모두 만족하는 해를 의미하는데, 이는 두 곡선이 접하는 부분에서 생기게 됩니다.

아까 전 Figure 1.2 에서도 $y = 5\sin x$(녹색 곡선)과 $y = \sin x$(붉은색 곡선)이 접하면서 곡선이 주기 내에서 한 번 진동할 때 교점이 둘이 아니라 하나가 생기는 것을 확인할 수 있습니다.

즉 포함배제 원리에 따라

$$|\mathrm{S}| = s_n^* - |\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| \tag{2.25}$$

아아까 전에 구해놨던 두 경우의 조건을 다시 봅시다.

$$\mathrm{A} = \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{2k\pi}{n-1} \right\}$$
$$\mathrm{B} = \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{(2k+1)\pi}{n+1} \right\} \tag{2.26}$$

따라서 $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$를 구하려면 아래 방정식을 풉니다.

$$x = \frac{2k_1\pi}{n-1} = \frac{(2k_2+1)\pi}{n+1} \qquad \text{where} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \tag{2.27}$$

$x \neq 0$이라고 가정하고 양변에 $(n-1)(n+1)/\pi$를 곱하면

$$2k_1(n+1) = (2k_2+1)(n-1) \tag{2.28}$$

즉 짝수와 $n+1$의 곱이 홀수와 $n-1$의 곱과 같아야 한다는 것입니다.

ⓘ 시행착오

처음에 아래처럼 전개했다가 정수론의 늪에 빠졌습니다.

$$\begin{aligned} &2k_1 n + 2k_1 = 2k_2 n - 2k_2 + n - 1 \\ &(2k_1 - 2k_2 - 1)n = -(2k_1 + 2k_2 + 1) \\ &n = -\frac{2k_1 + 2k_2 + 1}{2k_1 - 2k_2 - 1} \end{aligned} \tag{2.29}$$

결국 저 상태에서 어떤 조작을 가해도 풀리지 않길래 컴퓨터의 힘을 빌려서 무차별 대입을 하는 파이썬(Python) 코드를 짠 후 100까지 돌려봤습니다[4].

```
# find_intersection.py

def find_solutions(n_max=100):
  results = []
  for n in range(2, n_max + 1):
      # 2k1(n+1) = (2k2 + 1)(n-1)
      # 위를 k1에 대해 정리한 식에 무차별 대입
      # k1 = ((2k2 + 1)(n - 1)) / (2(n + 1))

      for k2 in range(-n, n + 1):
          lhs = 2 * (n + 1)
          rhs = (2 * k2 + 1) * (n - 1)
          if rhs % lhs == 0: # 정수이면
              k1 = rhs // lhs
              results.append((n, k1, k2))
              break # 결과에 등록
  return results # 전체 결과 배열 반환

# 출력
for n, k1, k2 in find_solutions(100): # 100까지만 해보자
  print(f"n = {n}, k1 = {k1}, k2 = {k2}")
```

출력 결과는 아래와 같았습니다.

```
n = 5, k1 = -3, k2 = -5
n = 9, k1 = -6, k2 = -8
n = 13, k1 = -9, k2 = -11
n = 17, k1 = -12, k2 = -14
n = 21, k1 = -15, k2 = -17
n = 25, k1 = -18, k2 = -20
n = 29, k1 = -21, k2 = -23
n = 33, k1 = -24, k2 = -26
n = 37, k1 = -27, k2 = -29
```

[4]현재 콜라츠 추측은 이런 식으로 컴퓨터를 이용해 2^{68}까지 참임을 보였다고 합니다.

> ```
> n = 41, k1 = -30, k2 = -32
> n = 45, k1 = -33, k2 = -35
> n = 49, k1 = -36, k2 = -38
> n = 53, k1 = -39, k2 = -41
> n = 57, k1 = -42, k2 = -44
> n = 61, k1 = -45, k2 = -47
> n = 65, k1 = -48, k2 = -50
> n = 69, k1 = -51, k2 = -53
> n = 73, k1 = -54, k2 = -56
> n = 69, k1 = -51, k2 = -53
> n = 73, k1 = -54, k2 = -56
> n = 77, k1 = -57, k2 = -59
> n = 81, k1 = -60, k2 = -62
> n = 85, k1 = -63, k2 = -65
> n = 69, k1 = -51, k2 = -53
> n = 73, k1 = -54, k2 = -56
> n = 77, k1 = -57, k2 = -59
> n = 81, k1 = -60, k2 = -62
> n = 69, k1 = -51, k2 = -53
> n = 73, k1 = -54, k2 = -56
> n = 77, k1 = -57, k2 = -59
> n = 69, k1 = -51, k2 = -53
> n = 73, k1 = -54, k2 = -56
> n = 73, k1 = -54, k2 = -56
> n = 77, k1 = -57, k2 = -59
> n = 81, k1 = -60, k2 = -62
> n = 85, k1 = -63, k2 = -65
> n = 89, k1 = -66, k2 = -68
> n = 93, k1 = -69, k2 = -71
> n = 97, k1 = -72, k2 = -74
> ```
>
> $n = 4k + 1$의 꼴임을 알게 되었습니다. 이를 토대로 증명 방식을 바꿔보기로 했습니다.

식을 적당히 정리해서 아래와 같이 만들었습니다.

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{2k_2+1}{2k_1} \tag{2.30}$$

수많은 (k_1, k_2)의 조합이 있을 수 있지만, 우리는 n을 원하므로 유일한 (k_1, k_2)를 알아냄으로써 중복을 방지하기 위해 유리수의 정의에 입각해 우변을 기약분수라고 하겠습니다.

좌변 분수의 약분을 고려하기 위해 최소공배수를 따지겠습니다. 유클리드 호제법(互除法)에 따라 아래가 성립합니다.

$$\begin{aligned}\gcd(n+1, n-1) &= \gcd(n+1-(n-1), n-1) \\ &= \gcd(2, n-1)\end{aligned} \tag{2.31}$$

이를 통해 홀짝에 따라 자명하게 다음을 알 수 있습니다.

$$\gcd(n+1, n-1) = \begin{cases} 1 & (n\text{이 짝수}) \\ 2 & (n\text{이 홀수}) \end{cases} \tag{2.32}$$

이제 n이 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어 생각하겠습니다.

먼저, n이 짝수라면, $n-1$은 홀수인데, $2k_1$은 짝수입니다. 이때 식 (2.32) 에 의해 좌변의 분수도 기약분수이므로 양변이 절대로 일치하지 않아 이 경우는 불가능합니다.

n이 홀수라면 $n+1$, $n-1$은 짝수입니다. 좌변 분수를 기약분수로 만들기 위해 분모와 분자를 최대공배수인 2로 나누겠습니다.

$$\frac{(n+1)/2}{(n-1)/2} = \frac{2k_2+1}{2k_1} \tag{2.33}$$

이것이 성립하려면 좌변 분수의 분모는 짝수, 분자는 홀수가 되어야 합니다. 분모를 전개하면 아래와 같고,

$$\begin{aligned} &\frac{n-1}{2} \equiv 0 \pmod 2 \\ &n-1 \equiv 0 \pmod 4 \\ &\therefore \quad n \equiv 1 \pmod 4 \end{aligned} \tag{2.34}$$

분자는 아래와 같습니다.

$$\begin{aligned} &\frac{n+1}{2} \equiv 1 \pmod 2 \\ &n+1 \equiv 2 \pmod 4 \\ &\therefore \quad n \equiv 4 \pmod 1 \end{aligned} \tag{2.35}$$

분모, 분자 모두 성립하는 조건은 아래와 같습니다.

$$n \equiv 1 \pmod 4 \tag{2.36}$$

이제 다시 큰 그림으로 돌아가겠습니다. $0 \leq x \leq \pi$의 범위에서 $y = \sin x$에서 $\sin x = 1$이 되는 경우는 $x = \pi/2$ 한 군데밖에 없고, 겹치는 근은 주기성과 대칭성을 동시에 만족해야 하기 때문에, 한 개밖에 없습니다.

그러므로 아래가 성립합니다.

$$|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| = 1 \tag{2.37}$$

2.3. 일반항

이상의 내용에 따라 다음 결론을 얻습니다.

$$s_n = n + 1 - \delta_1^{n \bmod 4} \tag{2.38}$$

이때 δ는 크로네커 델타(Kronecker delta)입니다.

Theorem 2.3.1

아래 방정식

$$\sin x = \sin nx \qquad \text{where} \quad n \geq 2, n \in \mathbb{N} \tag{2.39}$$

의 실근의 개수 s_n은 아래와 같다.

$$s_n = n + 1 - \delta_1^{n \bmod 4} \tag{2.40}$$

[5] QED

[5]한 번 해보고 싶었습니다.

3. 추후 탐구 계획

일반적인 범위 $r_1\pi \leq x \leq r_2\pi$ 방정식

$$\sin n_1 x = \sin n_2 x \qquad \text{where} \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

의 실근의 개수를 구하는 것을 다음 목표로 설정하면 재미있을 것 같습니다. 예상되는 추가 고려 사항은…

1. 범위에 따라서 주기와 함께 잘리는 부분도 고려해야하므로 훨씬 복잡해질 것입니다.
2. 중복되는 해의 조건과 개수도 달라질 것입니다.
3. 아까 구해놨던 Theorem 2.1.1 가 유용하게 작용할 것 같습니다.

여기서부터는 더 하는 것이 의미가 있나 싶기도 하고 생각보다 많이 어려워질지도 모르겠지만 시도해볼 계획입니다.

감사합니다.