# 15/22 물리학 I

Taejoon Whang

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

March 06, 2025

# 서문

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et.

# Contents

# 1. 역학과 에너지

물리학 I을 펴면 가장 먼저 맞이하게 되는 단원이다. 아이러니하게도 물리학 I 범위 중 가장 어려운 부분이며 가장 연습이 많이 필요한 부분이다.

항상 명심할 내용은 하나 밖에 없다. 공식에 압도되지 말고, 상식적, 직관적으로 접근해라. 이 책은 특히 역학에서, 물리 이론과 주입식 문제 풀이의 괴리를 좁히는데 초점을 두었다.

문제를 풀 때 가져야할 mindset은 아래와 같다.

- 외우기 어려운 공식은 외우지 않는다. 어차피 기본 개념들로부터 도출된 것이다. 공식 대입, 무조건적 그래프 그리기보다 역학적 사고력을 기르자.
- 물리는 시간에 따른 변화를 주목한다. 항상 눈에 보이지 않지만 가장 중요한 것이 시간이다.
- 문자를 줄이는 것이 좋지만, 방법이 없다면 만드는 것도 주저하지 마라. 다만 비율만 알아도 되는 경우에는 임의의 미지수는 정말 임의의 상수값으로 설정해도 무관하다.
- 문제를 풀 때는 먼저 상황을 이해한다. 그 다음 내가 구하고자 하는 것을 본다. 그리고 필요한 것을 생각하며 풀이를 시작한다.

## 1.1. 여러 가지 운동

단원 이름은 여러 가지 운동이지만, 사실상 가장 중요한 것은 등가속도 직선 운동이다. 들어가기 전에 간단히 다른 운동들에 대해 짚고 넘어가자.

(⋯)

### 1.1.1. 등가속도 직선 운동

물리학 I에서는 직선 운동 이외에 운동은 다루지 않는다.

먼저, 등가속도 운동 이외에도 적용되는 공식들을 보자. 이것들은 사실상 당연한 것들이다.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1.1}$$

속도는 변위를 시간으로 나눈 것이다. 더욱 직관적인 형태는 아래와 같다.

$$s = vt \tag{1.2}$$

1초에 3 m 간다면 4초 후에는 몇 m를 갈까? 당연히 12 m이다. 1초에 $v$ m 갔다면 $t$ 초 후에는 몇 m를 갈까? $vt$ m이 되는 것이다.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{1.3}$$

마찬가지다. $v = at$ 꼴로 바꾸어 생각해 보면, 1초에 속도가 3 m/s 가 늘면 4초 뒤에는 속도가 몇 m/s가 되어 있을까?

사실 여기서 $a$와 $v$는 일정 시간($\Delta s$) 동안의 변화량이다. 순간적인 값들은 미소 시간에 대해 미분을 통해 나타낸다. 굳이 지금 알 필요는 없고 그냥 상식 정도이다.

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} \tag{1.4}$$

이제 등가속도 직선 운동에서만 성립하는 식들에 대해 알아보자. 먼저 가장 중요한 **평균 속력**이다.

$$\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2} \tag{1.5}$$

가속도가 일정하므로, 중간의 모든 속력을 무시하고 처음 속력($v_0$)과 나중 속력($v$)의 평균만 구하면 된다. 또, 이 값은 **시간이 절반일 때 물체의 실제 속력**과도 같다.

보통 등가속도 직선 운동에는 공식이 세 개가 있다고 말한다. 그 중 변위 공식은 아래와 같다.

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.6}$$

이것은 변위를 바로 알아낼 수 있다는 부분에서 좋아보이지만 사실 살짝 멍청하고 물리적으로 야매스러운 공식이다. 뉴턴은 변위를 다음과 같이 나타내었다.

$$a = \ddot{s} \Longleftrightarrow a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.7}$$

미적분학을 가르치지 않고 먼저 물리를 가르치니 어쩔 수 없이 저런 더러운 식이 나오게 되는 것이다. 사실 저 식은 평균 속도로 쉽게 유도가 가능하다.

처음 속력을 $v_0$, 나중 속력을 $v$라고 하면 변위는 아래와 같다.

$$s = \overline{v}t = \frac{v_0 + v}{2}t = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2}t = \left(v_0 + \frac{at}{2}\right)t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.8}$$

변위를 구할 때는 $\frac{v_0+v}{2}$ 꼴이 훨씬 낫다. 이것도 그냥 결론일 뿐이므로 외우지 말자. **변위는 평균 속력으로 몇 초간 갔느냐의 상식적인 문제이다.**

하지만 마지막 공식은 외워줄 필요가 있다. 사실 일과 에너지의 관계를 따지면 이 역시 공식도 아니다. 하지만 지금은 외워두자. 이 공식은 시간이 빠진 형태로 아래와 같다.

$$2as = \Delta v^2 = v^2 - v_0^2 \tag{1.9}$$

시간을 모를 때 요긴하게 사용할 수 있다. 하지만 시간을 안다면 대부분의 경우에서 평균 속력으로 구하는 것이 훨씬 빠르다.

**Theorem 1.1.1 (등가속도 운동의 공식)**

1. 변위 공식

$$s = vt \tag{1.10}$$

2. 가속도 공식

$$v = v_0 + at \tag{1.11}$$

3. 평균 속력

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} \tag{1.12}$$

3. 가속도 변위 공식

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.13}$$

4. 일과 에너지 공식

$$2as = v^2 - v_0^2 \tag{1.14}$$

### 1.1.2. 상대 속도

상대 속도란 각 물체 간 상대적인 속도이다. 예를 들어 $v_A = 10$이고 $v_B$는 5라면 A가 측정한 B의 상대속도 $v_{AB}$는 $-5$이다. A 입장에서는 자신은 정지해 있고, B는 뒤쪽으로 5 m/s로 가고 있는 것으로 보일 것이기 때문이다.

만약 이 운동이 학교 운동장에서 일어났다면 A도 자신이 움직이고 있다는 것을 주변 배경의 이동으로 알 수 있다. 하지만 배경이 운동장이 아니라 아무 것도 없는 진공 상태의 우주 한 가운데라면? 자기가 운동 중인건지 B가 운동 중인건지 둘 다 운동 중인건지 알 수가 없다. 이 때 우리는 이러한 현상을 “물리적으로 동일하다”고 할 수 있다.

*Problem.* 40 m 높이의 절벽 위에서 공 A를 가만히 놓아 자유낙하 시켰다. 그와 동시에 절벽 아래에서 공 B를 연직 위 방향으로 8 m/s로 던졌다. 그러자 A와 B가 $t$ 초 후 충돌했다. $t$의 값은?

주목할 점은 이 문제에서는 중력 가속도를 제공하지 않았다. 임의로 $g$로 놓고 풀어도 문제가 없기 때문이기도 하지만, 애초에 고려할 필요가 없기 때문이다. 같은 가속도를 받고 있을 때, 그 가속도는 무시해도 충돌 시간과 상대 속도는 일정하다.

그러므로, B 입장에서 A는 그대로 정지해 있고, B는 8 m/s의 일정한 속력으로 날아가 A에 충돌하므로 시간은 5초가 걸리게 된다.

이를 정리하면 다음과 같다.

**Theorem 1.1.2 (상대 속도)**

물체 A와 B에 대해 A가 측정한 B의 상대 속도는 다음과 같다.

$$v_{AB} = v_B - v_A \tag{1.15}$$

만약 A와 B가 같은 힘의 성분을 받고 있다면, 즉 가속도가 같다면 아래가 성립한다.

- 상대 속도는 계속 일정하다.
- 상대 속도는 두 물체가 멀어지거나 가까워지는 간격을 의미한다.

두 물체의 가속도가 다를 때도, 조건이 맞다면 “상대 가속도”를 사용하여 시간을 구해 내는데 사용할 수 있다.

## 1.2. 뉴턴 운동 법칙

### 1.2.1. 운동 방정식

**힘은 물체의 운동 상태나 모양을 변화시키는 원인이다.** 물리학I에서 모양의 변화는 다루지 않으므로 이는 순전히 운동 상태를 변화시키는 원인이 된다. 우리는 힘에 대한 매우 유명한 공식을 알고 있다.

$$F = ma \Longleftrightarrow a = \frac{F}{m} \tag{1.16}$$

힘은 질량과 가속도의 곱이다. **힘의 효과는 가속도로 나타나 물체의 운동을 변화시킨다.** 물리는 변화에 주목하는 학문으로, 이 가속도에 초점을 둔다. 다만, 질량에 따라 힘의 효과가 달라진다.

### 1.2.2. 관성의 법칙

**관성이란 물체가 원래의 운동 상태를 유지하려고 하는 성질**이다. 움직이던 물체는 계속 움직이기 쉽고, 정지해 있던 물체는 계속 정지해 있기 쉽다. 관성은 질량에 비

례한다. 관성은 합력이 0일 때 ($\Sigma F = 0$) 직관적으로 나타난다. 가해지는 힘이 없다면, 정지해 있던 물체는 계속 정지해 있고, 운동하던 물체는 계속 운동한다. 이 관점에서 보면 **정지 상태와 등속 운동 상태는 모두 합력이 0인, 물리학적으로 같은 상태**라고 볼 수 있다.

### 1.2.3. 작용과 반작용의 법칙

한 물체가 다른 물체에 힘을 가하면(작용, action), 힘을 받은 물체도 크기는 같고 방향은 반대인 힘(반작용, reaction)을 힘을 준 물체에게 작용한다.

$$F_{BA} = -F_{AB} \tag{1.17}$$

B가 A로 인해 받은 힘은 A가 B로 인해 받은 힘의 크기와 방향은 반대이고 크기는 같다. 다만, **질량이 작은 물체가 질량이 큰 물체보다 힘의 영향(가속도)를 더 많이 받는다**. 이는 합력이 0이 아닐 때($\Sigma F \neq 0$) 나타난다.

책상 위에 놓인 사과는 지구 중심으로 중력을 받는다. 즉, 지구가 사과를 지구 중심 방향으로 끌어 당기고 있다. 그런데, 사과도 지구를 같은 힘으로 사과의 중심 방향으로 끌어당긴다. 하지만 지구가 사과에게 끌려가지 않는 이유는 지구의 질량이 사과의 질량과 비교할 수 없을 정도로 크기 때문이다.

### 1.2.4. 힘의 평형

이 때, 사과는 지구에게 힘을 받고 있음에도 책상을 뚫고 아래로 움직이지 않는다. 왜냐하면 책상이 사과를 같은 힘으로 떠받치고 있기 때문이다. 이러한 힘을 수직항력(normal force, $N$)이라고 한다. 수직항력은 힘을 받는 면의 수직으로 작용하는 힘이다. 이처럼 여러 힘이 각자 작용하여 합력이 0이 될 경우, 이 상태를 힘의 평형을 이룬다고 한다.

사과가 중력으로 인해 책상을 누르는 힘과 책상이 사과를 떠받치는 수직항력은 작용 반작용 관계이다. 주의할 점은, 사과가 받는 중력과 책상이 사과를 떠받치는 수직항력은 힘의 크기가 같을 뿐이지, 작용 반작용 관계가 아니다.

**Theorem 1.2.1 (뉴턴 운동 법칙)**

1. **뉴턴 운동 방정식**: 힘의 효과는 가속도로 나타나고, 질량에 따라 그 정도가 달라진다.

$$F = ma \tag{1.18}$$

2. **관성의 법칙** ($\Sigma F = 0$): 물체는 본래 운동 상태를 유지하고자 하는 성질을 갖는다.
3. **작용 반작용의 법칙** ($\Sigma F \neq 0$): 물체에 힘을 가하면 크기는 같고 방향은 반대인 힘이 돌아온다.

$$F_{BA} = -F_{AB} \tag{1.19}$$

### 1.2.5. 힘 관련 문제 풀이

그 많은 물리학I 문제는 사실 이 두개로 나눌 수 있다.

#### 1.2.5.1. 밀기 유형

힘을 받은 물체가 옆에 접촉한 다른 물체를 미는 것이다. 이때 다음이 성립한다.

이웃하여 놓인 물체 $A, B, C$가 있고 그 질량을 각각 $m_A, m_B, m_C$라고 하자. 물체 세 개가 동시에 힘을 받도록 밀면, 이때 각 물체에 작용하는 합력의 비는 $m_A : m_B : m_C$이다. 즉, 물체는 질량만큼 힘을 나누어 갖는다.

예를 들어, 질량이 각각 4 kg, 10 kg, 5 kg인 물체 $A, B, C$가 이웃하여 차례로 놓여 있을 때, 모든 물체가 동시에 힘을 받도록 C를 38 N의 힘으로 밀면, 각 물체가 받는 힘의 크기는 8 N, 20 N, 10 N 이다. 이는 간단한 검산으로 확인할 수 있다.

38N의 힘 중 $C$에게 효과가 10 N밖에 나타나지 않았다는 것은, 나머지 28 N은 $A$와 $B$가 $C$에 반발하는 힘이라는 것이다. 작용 반작용에 의해 $B$는 28 N으로 밀렸지만 효과가 20 N밖에 나타나지 않았다는 것은, $A$가 $B$에 반발하는 힘이 8 N이라는 것이다. 작용 반작용에 의해 $A$는 8 N의 힘을 받아 저항 없이 이동한다.

#### 1.2.5.2. 끌기 유형

끌기는 두 개 이상의 물체 간에 실이 연결되어 있고, 물체가 특정 방향으로 힘을 받아 서로를 끄는 상황의 유형이다.

도르래를와 빗면 등을 이용해 구조를 더욱 복잡하게 만들곤 하지만, 결국은 평면 위에 놓인 물체들이 서로를 당기는, 일종의 줄다리기 상황과 같다는 것을 이해하자.

한 가지 볼 것은 실의 장력(tension, $T$)이다. 장력이란 실이 물체를 당기는 힘이다.

장력은 끄는 물체의 운동에서 온다. 질량이 각각 2 kg, 3 kg인 물체 A, B가 실로 연결되어 있을 때, B를 15 N으로 끌면 전체 가속도는 3 m/s² 이다. A에 작용하는 합력은 6 N, B에 작용하는 합력은 9 N이고, A가 받는 힘은 (중력, 수직항력, 마찰력 제외) 장력밖에 없으므로 실의 장력이 6 N이 된다. 이것은 B가 A를 당기는 힘이고, 작용 반작용에 따라 A도 B를 6 N으로 당기고 있다. 그렇기 때문에 B에 15 N의 힘을 주었지만 9 N의 효과밖에 나타나지 않는 것이다. 여기서 주의할 점은 끄는 물체든 끌리는 물체든 자신이 받는 합력은 (전체 가속도) × (자신의 질량) 이라는 것이다. 즉, 비례배분 또는 내분을 통해 장력도 구할 수 있다. 다만 그냥 구하는 것보다 계산이 복잡할 수 있을 뿐이다. 또 하나 알 수 있는 것은, **밀기 문제와 끌기 문제는 본질적으로 똑같다. 실은 끌기 문제를 밀기 문제처럼 만들 수 있도록 힘을 전달하는 매개체일 뿐이다**.

물리 I에서는 실의 질량을 0이라고 가정하기 때문에, **실의 모든 부분에서 장력의 크기는 같다. 즉, 실이 물체 A와 B를 연결하고 있다면, 물체 A와 실의 연결점과 물체 B와 실의 연결점에서 장력은 같다.** 모든 점에서 장력이 같으므로 실에는 탄성이 없다. 말하자면 팽팽한 상태이다. 즉, 실이 아니라 질량이 없는 얇은 막대기 같은 것이라고 생각하는 편이 낫다. 하지만 어떨 때는 돌연 실의 일반적인 특성(끊어진다던가, 팽팽하지 않아지면서 장력이 사라진다거나…)을 갖기도 한다.

## 1.3. 운동량과 충격량

## 1.4. 역학적 에너지

에너지란 일을 할 수 있는 능력이다. 에너지에는 정말 수많은 종류가 있는데, 이 단원에서는 역학적 에너지(mechanical energy)[1] 를 다룬다. 역학적 에너지는 운동에너지[2] (kinetic energy)와 위치 에너지[3] (potential energy)의 합으로, 보존력[4] 장에서는 그 크기가 일정하다.

결론부터 말하자면, 에너지는 힘과 사고의 원리가 같다. 차이가 있다면 힘은 벡터로 방향이 있으나, 에너지는 스칼라로 방향이 없다.

[1]수식 표기는 딱히 정해진 것이 없다. 보통 $E$로 쓰나, 명확성이 필요한 경우 $E_{\mathrm{mechanical}}$,, $E_{\mathrm{m}}$ 등등 알아서 쓰도록 한다.

[2]수식 표기는 $E_{\mathrm{k}}, K, T, KE$ 등을 사용한다. 열역학 단원에서는 온도와의 구별을 위해 $K$로 표기하도록 하겠다.

[3]수식 표기는 $E_{\mathrm{p}}, U, V, PE$ 등을 사용한다. 열역학 단원에서는 부피와 구분하기 위해 $U$로 표기하도록 하겠다. 이 때, 내부 에너지 $U$와도 구별할 필요가 있다.
필자는 위치 에너지라는 표현이 조금 더 마음에 든다. 15 개정은 퍼텐셜 에너지가 정식 용어이나, 22 개정에서는 다시 위치 에너지로 바뀌었다. 정말 이상한 일이다. 그냥 잠재 에너지 정도로 하면 안 되나?

[4]한 일이 이동 경로와 무관하고 변위에만 영향을 받는 힘이다.

## 1.5. 열역학

열역학은 기본적으로 일과 에너지와 일맥상통한다. 즉, 똑같이 생각하면 된다. 하지만, 기존의 일과 에너지에 열이라는 새로운 부분이 끼게 된다.

### 1.5.1. 온도

온도는 뜨겁고 차가운 정도를 나타낸다. 우리는 이 개념에 매우 익숙하다. 하지만 우리가 느끼는 온도는 매우 주관적이다. 예를 들어, 한쪽 발은 양탄자 바닥에, 다른 발은 대리석 바닥에 올려놓게 되면, 두 바닥의 온도는 실제로 같지만 우리는 대리석 바닥이 더 차다고 느끼게 된다. 이는 대리석 바닥이 양탄자 바닥보다 열을 더 빨리 빼앗아 가기 때문이다. 그러므로 기준이 되는 양이 필요하다.

온도의 단위로는 일상에서 사용하는 °C와 미국 놈들이 사용하는 °F, 그리고 과학에서 사용하는 절대 온도 K가 있다. 절대 온도는 샤를의 법칙에 따라 기체의 부피가 0이 되는 온도, 즉 기체 분자의 진동이 아예 없는 온도를 0 K으로 잡은 단위이다.

샤를의 법칙에 따라 온도는 부피에 비례하고, 정의에 따라 운동 에너지에 비례한다.

$$T \propto V, T \propto \overline{K} \propto \sqrt{v} \tag{1.20}$$

온도는 등한시할 수 있는 물리량이지만, 사실 열역학에서 가장 중요한 물리량 중 하나이다.

### 1.5.2. 열

열은 물체의 온도와 상태를 변화시키는 요인이다. 한 예로 물체가 상태 변화를 할 때는 받은 열을 상태 변화에 사용하기 때문에 온도가 변하지 않는다. 에너지의 일종이므로 열에너지라고도 한다.

**열은 온도가 높은 물체에서 낮은 물체로 저절로 이동한다.** 고온의 물체에서 저온의 열체로 이동한 열에너지의 양을 열량이라고 한다. 즉, **열의 정의의 전제는 고온에서 저온으로 이동하는 온도의 차이**이다.

우리는 중학교 때 얼핏 아래 공식을 배운 적이 있다.

$$Q = cm\,\Delta T \tag{1.21}$$

$Q$는 열량, $c$는 비열, $\Delta T$는 온도 변화량이다. 즉, 열은 온도를 변화시킨다.

온도가 다른 두 물체 사이에서 열의 이동이 계속되어, 어느 순간 열과 전자기 복사에 의한 에너지를 교환하지 않을 때 이를 **열평형 상태**(thermal equilibrium)이라고 한다.

**Note**

열평형 상태에서 에너지의 이동은 계속 있지만, 열의 이동은 없다고 보는 것이 엄밀하다.

### 1.5.3. 열역학 제 0법칙

**Theorem 1.5.1 (열역학 제 0법칙)**

두 물체 A와 B가 각각 따로 물체 C와 열평형 상태에 있다면 A와 B도 서로 열평형 상태에 있다.

이는 당연하게 들리고 실험으로도 쉽게 증명할 수 있지만, 우리에게 온도를 정의할 수 있게 해준다. 열평형 상태에 있는 물체는 온도가 같다는 것의 논리적 근거가 된다.

### 1.5.4. 기체가 하는 일

**Definition 1.5.2 (압력)**

단위 면적 $A$에 수직으로 작용하는 힘 $F$의 크기이다.

$$P = \frac{|F|}{A} \quad [N/\mathrm{m}^2 = \mathrm{Pa}] \tag{1.22}$$

기체는 압력이 모든 방향으로 일정하므로, 방향이 없는 스칼라 양이다.

구체적인 논리 전개를 하기 전에, 기체의 각 입자에 대해 사소하고 현실적인 것을 고려하기 시작하면 곤란한 문제들이 생긴다. 예를 들어, 기체 분자끼리 충돌하는 상황을 생각해 보자. 분자는 다른 분자와 충돌해서 다른 분자에 일을 하여 에너지가 감소한다. 그런데 기체 분자의 충돌이 온도라면 충돌로 인해 온도, 즉 에너지가 증가하게 된다. 이런 문제를 일단 생각하지 않기 위해 이상 기체(ideal gas)의 개념을 도입하도록 하자.

**Definition 1.5.3 (이상 기체)**

이상 기체의 조건은 아래와 같다.

1. 기체 분자는 점입자로, 그 부피를 무시한다.
2. 충돌 과정에서 에너지 손실은 없다. 즉, 모든 충돌은 탄성 충돌이다.
3. 퍼텐셜 에너지가 없다. 즉, $E = K$이다.

> 실제 기체는 특히 압력이 낮거나 온도가 높거나 밀도가 작으면 이상 기체처럼 행동한다.

**기체의 상태는 압력, 부피, 온도 세 개로 표현할 수 있다.** 이를 표현하기 위해, 우리는 보일의 법칙과 샤를의 법칙을 통해 새로운 원리를 이끌어낼 수 있다.

**Theorem 1.5.4 (보일의 법칙)**

온도가 일정할 때, 압력과 부피는 반비례한다.

$$PV = \text{const.} \qquad \text{where } T = \text{const.} \tag{1.23}$$

$$P_1V_1 = P_2V_2 \tag{1.24}$$

**Theorem 1.5.5 (샤를의 법칙)**

압력이 일정할 때, 부피와 온도는 비례한다.

$$\frac{V}{T} = \text{const.} \qquad \text{where } P = \text{const.} \tag{1.25}$$

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V}{T} \tag{1.26}$$

Theorem 1.5.4° 과 Theorem 1.5.5° 로부터 우리는 아래의 비례식을 만들 수 있다.

$$\begin{gathered} V \propto \frac{1}{P}, V \propto T \\ \therefore V \propto \frac{T}{P}, PV \propto T \end{gathered} \tag{1.27}$$

**Theorem 1.5.6 (보일-샤를 법칙)**

$$\frac{PV}{T} = R \qquad \text{where } R = 8.31[\text{J/mol} \cdot \text{K}] \tag{1.28}$$

$R$은 기체 상수

이로써 다음을 이끌어낼 수 있다.

**Theorem 1.5.7 (이상 기체 상태 방정식)**

$$PV = nRT = NkT \qquad \text{where } k = \frac{R}{N_A} \tag{1.29}$$

$n$은 분자의 몰 수, $N$은 분자 수, $R$은 기체 상수, $k$는 볼츠만 상수

**Theorem 1.5.8 (열역학 제 3법칙)**

기체는 부피가 0일 수 없으므로 절대온도 0도가 될 수 없다.

기체는 하나의 물체가 아니라 여러 분자가 따로 운동하는 것이기 때문에, 분자들 각각의 힘을 합쳐 생각해 일을 받는 단면적에 작용하는 압력으로 표현한다. 그러므로 식은 다음과 같다[5].

$$\begin{aligned} W &= Fs \\ F &= PA \\ \therefore W &= PAs = P\,\Delta V \end{aligned} \tag{1.30}$$

즉, 기체가 한 일은 $W = P\Delta V$이다. 그런데, 앞서 $T \propto PV$라고 했으므로 **온도는 일에 비례한다.** 하지만, 더욱 결론적으로, **일은 부피 변화량에 비례한다.**

즉,

$$\Delta V = 0 \implies W = 0 \tag{1.31}$$

이에 따라 압력 - 부피 그래프에서 한 일의 양은 아랫부분의 면적과 같다. 즉, 다음과 같다.

$$W = P(V_2 - V_1) = P\,\Delta V \qquad \text{where } P = \text{const.} \tag{1.32}$$

교육과정 외지만, 일반적으로

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,\mathrm{d}V \tag{1.33}$$

[5]기체가 외부에 일을 하는 주체라고 생각하면 $W = P\,\Delta V$지만, 기체가 일을 받는 대상이라고 생각하면 $W = -P\,\Delta V$이다. 즉, 각종 식에서 일의 부호가 아는 것과 다르다면 이는 관점의 차이이다. 현 교육과정에서는 전자의 관점으로 본다.

### 1.5.5. 열역학 제 1법칙

**Theorem 1.5.9 (열역학 제 1법칙)**

$$Q = \Delta U + W \tag{1.34}$$

$Q$는 열량으로, 계가 얻은 열의 양을 말한다. $\Delta U$는 내부 에너지의 변화량, 즉 기체가 얻은 에너지이다. $W$는 기체가 한 일의 양이다. 즉, 이 식은 열역학에서의 에너지 보존 법칙을 뜻한다.

"먹고($+Q$), 운동하고($+W$), 남은 만큼 살찐다($+\Delta U$)."

식을 좀 더 뜯어보자. 내부 에너지란 전체 기체의 운동 에너지의 평균이다.

아래는 우리나라 물리 교육과정에서 다루는 식이다.

$$\begin{aligned} U &= N\overline{K} = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT \\ W &= P\,\Delta V \longrightarrow Q = \frac{5}{2}P\,\Delta V \propto T \end{aligned} \tag{1.35}$$

여기서 $K$는 운동 에너지, $T$는 온도, $N$은 분자 수, $n$은 분자의 mol 수, $R$은 기체 상수이다.

**ⓘ 왜 $U = \frac{3}{2}nRT$인가?**

$U = \frac{3}{2}nRT$에 대한 내용은 물리 II에 처음 나온다. 이것을 계산하는 문제는 교육과정 끝까지 나오지 않아 현 교육과정에서 중요하지는 않지만, 이유를 알고자 한다면 조금 복잡하다.

먼저 볼츠만 분포(Boltzmann distribution)에 대해 알아야 한다.

**Theorem 1.5.10 (볼츠만 분포)**

어떤 에너지 $\varepsilon_i$를 가진 상태의 점유 확률은 아래와 같다.

$$p_i \propto e^{-\varepsilon_i/kT} \tag{1.36}$$

여기서 $p_i$는 계가 상태 $i$에 있을 확률, $k$는 볼츠만 상수, $T$는 온도이다.

즉, 에너지가 클수록 확률이 작다.

이 확률 분포에 따라 평균 에너지를 적분하면 아래와 같다.
($p_i$ 표기를 $P(E)$ 표기로 바꾸어 직관적으로 표현했다. $P(E)$는 계가 $E$의 에너지를 가지고 있을 확률이다.)

$$\langle E\rangle = \int_0^\infty E \cdot P(E)\,\mathrm{d}E \tag{1.37}$$

그런데, 이상 기체의 경우 각 기체 분자가 한 차원($x$)에 대해 가지는 운동 에너지는 아래와 같다.

$$E_x = \frac{1}{2}mv_x^2 \tag{1.38}$$

이제 이 에너지에 대한 볼츠만 분포를 정의하면,

$$P(E_x) \propto \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}mv_x^2}{kT}\right) \tag{1.39}$$

이건 가우스 분포이므로 정규화하면

$$P(E_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) \tag{1.40}$$

이에 대한 기댓값은

$$\langle E_x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}mv_x^2 \cdot P(E_x)\,\mathrm{d}E_x \tag{1.41}$$

이것은 가우스 적분이므로

$$\langle E\rangle = \frac{1}{2}kT \tag{1.42}$$

이것은 에너지 등분배 정리(Equipartition Theorem)에서 온다.

**Theorem 1.5.11 (에너지 등분배 정리)**

계의 해밀토니언(Hamiltonian)이 위치의 제곱항과 운동량의 제곱항으로만 표현(quadratic form)된다고 할 때,

$$\mathcal{H} = \sum_k A_k p_k^2 + \sum_k B_k x_k^2 \tag{1.43}$$

이 계의 평균 에너지는 다음과 같다.

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} f k T \tag{1.44}$$

이때 $f$는 $\mathcal{H}$에서 0이 아닌 위치나 운동량의 제곱의 개수(non-zero $A_k$ and $B_k$), 즉 자유도(degree of freedom)이다.

기체 분자는 3차원 공간($x, y, z$)에 대해 자유도가 있으므로 한 분자의 병진 운동에 대해서 해밀토니언은

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} m \left( v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right) \tag{1.45}$$

각 성분마다 평균 에너지가 $\frac{1}{2}kT$이므로 한 분자당 평균 에너지는 $\frac{3}{2}kT$이다.

단원자 분자(예: He)의 경우 병진 운동에 대한 자유도만 가진다.

그러므로 분자가 $n$ 개 ($n = \frac{N}{N_\mathrm{A}}$) 있을 때 전체 내부 에너지는 다음과 같다.

$$U = \frac{3}{2} N k T = \frac{3}{2} n R T \qquad \because R = N_\mathrm{A} k \tag{1.46}$$

이때, $k$는 볼츠만 상수이다.

이를 포괄적으로 표현하면 다음과 같다.

$n$개의 분자로 이루어진 단원자 분자 이상 기체의 해밀토니언은

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m} = \sum_{k=1}^{3n} \frac{p_k^2}{2m} \tag{1.47}$$

여기서 $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$, $\mathbf{p}_i$는 $n$개 중 $i$ 번째 입자의 운동량, 1개 분자 당 3개의 운동량을 가지므로 $p_k$는 $k$ 번째 좌표에서 분자의 운동량이다.

따라서 자유도 $f = 3n$이므로 이상 기체의 평균 에너지는 아래와 같이 된다.

$$U = \frac{3}{2} n k T \tag{1.48}$$

하지만 다원자 분자의 경우에는 병진 운동 외에 회전 운동, 진동 운동도 자유도에 영향을 준다. 회전 운동 또한 $x, y, z$ 축에 대해 자유도를 가진다. 병진 운동이 $1/2\ mv^2$으로 표현된다면, 회전 운동은 $1/2\ I\omega^2$으로 표현된다.

이때, 관성모멘트 $I = mr^2$이고 각속도 $\omega = \dot{\theta} = \frac{v}{r}$이므로 사실상 회전 운동에 대한 에너지는 $\frac{p^2}{2m}$과 수학적으로 같다.

또는, 회전에 대한 일반화 운동량 $p_\theta$는 아래와 같으므로,

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I\omega = L \tag{1.49}$$

결론을 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\omega = \frac{L}{I} = \frac{rp}{I} \tag{1.50}$$

이를 1/2 $I\omega^2$에 대입하면

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{L}{I}\right)^2 = \frac{L^2}{2I} = \frac{r^2p^2}{2mr^2} = \frac{p^2}{2m} \tag{1.51}$$

마지막으로, 진동 운동은 단진동(harmonic oscillator)으로 표현되는데, 해밀토니언의 정의[6]에 따라 아래와 같다.

$$\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad \left(\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\right) \tag{1.52}$$

$\mathcal{L}$은 라그랑지언이다.

그러므로 병진, 회전, 진동 모두 이차항으로 표현되어 자유도에 영향을 준다. 예를 들어 $H_2$ 기체의 내부 에너지를 구하려면, 병진 운동에 대한 자유도는 각 축에 대해 한 개씩 3, 조랭이떡 모양이므로 회전 운동에 대한 자유도는 $z$ 축을 제외한 2이고, 고온이 아니라는 가정 하에 진동 운동에 대한 자유도는 0 이므로 총 자유도는 5이다. 그러므로 내부 에너지는

$$U = \frac{5}{2}nkT \tag{1.53}$$

#### 1.5.6. 열역학 과정

### 1.6. 특수 상대성 이론

[6]라그랑지언 $L(q_i, \dot{q}_i, t)$에서 $p_i$를 매개변수로 인정하여 르장드르 변환 한 것

# 2. 물질과 전자기장

# 3. 파동과 정보통신