拓扑空间关系描述理论研究现状与发展

吴建新,方 裕*,陈 斌
(北京大学地球与空间科学学院,北京 100871)

摘要:空间关系研究是空间信息科学的基础,而拓扑空间关系是空间关系的重点与难点,其描述理论一直是研究的热点。该文就这一理论做一综述,阐述'交互模型'(即'区域连接演算')的基本原理,并介绍其在空间信息科学界基本的理论问题,即该描述理论对应的数学模型包括拓扑学和代数两方面;揭示'交叉模型'(即'九交模型')所用的拓扑学思想,并叙述其历史发展过程。对连接这两种模型的Mereotopology理论,阐述其概念与基本原理,指出拓扑空间关系描述理论是一个各模型有严密逻辑关联的统一体,以求对现有描述理论做出改进。

关键词:拓扑空间关系;区域连接演算;Mereotopology;九交模型
中图分类号:P208 文献标识码:A 文章编号:1672-0504(2005)03-0001-04

空间关系是指空间对象之间具有空间特性的关系。按从基础到应用的顺序,空间关系的研究可分为空间关系的语义问题、空间关系描述、空间关系表达、基于空间关系的查询分析等。

空间关系描述的基本任务是,在空间关系语义研究成果的基础上,对区分出的不同空间关系以数学或逻辑的方法给出形式化描述,为构造空间查询语言和空间分析提供形式化工具。描述准则有:完备性,指空间关系描述结果能包含目标间所有可能的定性关系;严密性,要求所推出的关系实际存在且正确;唯一性,要求所有关系是互斥的;通用性,指描述方法能处理各种形状的目标和各类关系[1]。

在空间关系描述中研究得最深入、最广泛的是拓扑空间关系描述理论,这主要是由于拓扑空间关系在空间关系中占据重要地位。目前主要有两种方法描述拓扑空间关系:1)交互方法,即运用空间对象的整体来区分与定义空间关系,其代表是'区域连接演算',本文介绍其渊源、基本原理及对应的数学模型;2)交叉方法,即将空间对象分解为几个部分,通过比较两个对象各组成部分的交来判定空间关系,GIS界周知的'九交模型'是其代表,但'九交模型'隐含着较深的拓扑学理论,本文主要阐述其拓扑学思想与该模型的发展过程。连接这两种模型、起桥梁作用的是Mereotopology理论。

1 区域连接演算及相关理论

区域连接演算(Region-Connection Calculus,RCC)是英国Leeds大学Cohn等针对定性空间推理(Qualitative Spatial Reasoning,QSR)问题在前人的基础上提出的。QSR关注用定性而非定量的方式对空间对象进行表达与推理,它的基础是'部分'(part-of)和'连接'(connection或contact)关系。RCC的理论渊源可以上溯到研究'part-of'关系的Mereology(整分论)[2],其最直接的基础是由Clark奠定的[3,4]。

1.1 RCC的基本原理[5]

RCC以空间中的区域为对象,而不是几何学中的无维度的点,用'连接'来表达空间对象间的基本关系。在这个理论体系中,'连接'关系($C(x,y)$,x与y连接)占据重要地位。从拓扑的角度讲,$C(x,y)$意味着区域x和y的拓扑闭包有公共点[6]。它首先满足两条基本公理:

$$\forall x[C(x,x)] \tag{1}$$

$$\forall x \forall y[C(x,y) \rightarrow C(y,x)] \tag{2}$$

公理(1)反映'连接'的自反性,公理(2)反映传递性。利用$C(x,y)$可以定义其它的二元关系:$DC(x,y)$,x和y不连接;$P(x,y)$,x是y的一部分;$PP(x,y)$,x是y的真部分;$x=y$,x与y相等;$O(x,y)$,x与y相交;$DR(x,y)$,x和y相离;$PO(x,y)$,x和y部分相交;$EC(x,y)$,x和y外部相交;$TPP(x,y)$,x是y相切的真部分;$NTPP(x,y)$,x是y不相切的真部分等,试举两例予以说明:

$$DC(x,y) \equiv \neg C(x,y) \tag{3}$$

$$P(x,y) \equiv \forall z[C(z,x) \rightarrow C(z,y)] \tag{4}$$

在这些空间关系中,PO,TPP,NTPP,=,$NTPP^{-1}$,TPP^{-1},EC,DC组成'互不相交且完全分割'的基本关系集(符号上的'-1'代表反身),故最早的RCC又被称为RCC8[7]。其它的空间关系可利用类似定理的

收稿日期:2005-03-30; 修订日期:2005-04-26
基金项目:国家'863'高技术研究发展计划基金资助项目(2002AA131020)
作者简介:吴建新(1979-),男,硕士研究生,从事空间关系描述模型等研究。*通迅作者 E-mail:csfang@pku.edu.cn

形式由它们推出，如：

$$\forall xy[PP(x,y)\to\exists z[P(z,y)\wedge\neg O(z,x)]] \tag{5}$$

该理论进一步定义了对区域的 3 种操作，即涉及两个区域的和、交与一个区域的补，如两个区域和的定义为：

$$sum(x,y)\equiv\iota y\{\forall z\{C(z,y)\leftrightarrow[C(z,x)\vee C(z,y)]\}\} \tag{6}$$

做出这些基本定义后，RCC 理论还提出关于这些操作的规则，即该理论的公理，除已举出的两条外，还有 6 条，如从区域和的定义便可直接推出的公理：

$$\forall x,y,z[C(z,sum(x,y))\equiv C(z,x)\vee C(z,y)] \tag{7}$$

RCC 的基本原理就是这样。该理论还增加了 CON(x) 谓词来确认区域 x 是否连通，CONV(x) 来确定区域是否凸，这些谓词可以随着描述问题的复杂程度而增减，但都可以通过上述关系和操作来定义，如：

$$CON(x)\equiv\forall yz[sum(y,z)=x\to C(y,z)] \tag{8}$$

在增加了这些谓词后，RCC 的表达能力得到增强，基本的拓扑空间关系集也得到扩展，如增加 CONV(x) 后可得到 23 种关系。

1.2 RCC 对应的模型

在 RCC 理论提出后，为了深入理解它，很多学者进一步研究其公理系统对应的模型[8]，主要有以下几方面成果。1996 年 Gotts 对 RCC 与拓扑学的联系进行初步研究[8]，即 RCC 中的‘区域’对应于连通的 T3 空间① 中的非空正则闭集合，“连接”关系对应为 $C(x,y)\equiv x\cap y\neq\Phi$，3 个二元运算也有相应对应，这样 RCC 中的公理都可在 T3 空间中被满足。以下三方面是研究 RCC 所具有的代数结构。

Stell 与 Worboys 提出 RCC 具有特殊的 Heyting 代数结构[9]。RCC 中的 C(x,y) 对应 $\neg x\vee\neg y\neq 1$，其中“$\neg$”代表 Heyting 代数中的‘伪余’运算，x、y 是对象集 $R=\{a\in A\mid\neg\neg a=a, a\neq 0\}$ 中的元素，对应于 RCC 中区域，而 A 是完备、正规、连通的 Heyting 代数。RCC 中的 3 种运算也有如下对应：

$$sum(x,y)=\neg\neg(x\vee y),\ prod(x,y)=x\wedge y,\ comp(x)=\neg x \tag{9}$$

在做出这些基本对应后，RCC 中其它拓扑关系被用一条定理对应到集合 R 中元素在 Heyting 代数中运算的结果。而 RCC 中 8 条公理也在 Stell 的报告[10] 中给出在对应的 Heyting 代数 A 中成立的证明。值得注意的是，完备的 Heyting 代数对应于拓扑空间中的开集族，其偏序即是集合的包含关系，这是‘无点拓扑学’的出发点[11,12]，因此有上面的结果也是很自然的。

除以上结果外，Stell 在布尔代数的基础上增加了一个二元算符 C(x,y)，其中 $x,y\in A$，构造了布尔连接代数〈A；C〉。在一定的公理保证下，按照与上述 Heyting 代数相似的研究思路，证明了 RCC 对应有布尔连接代数结构[13]。

需要指出的是，在上述具有一定创新性的构造布尔连接代数过程中，Stell 依据的是较成熟的数学理论，而他的这种构造也可看作是从布尔代数发展来的‘带算符的布尔代数’[14,15] 的一个特例，而后者又被 Tarski 等进一步发展、完善为‘关系代数’[16]（综述见文献[17]、[18]）。既然 RCC 对应有布尔连接代数结构，当然可以在更抽象的‘关系代数’中研究 RCC，这项工作在文献[19]、[20] 中已经开展。

2 Mereotopology

在 GIS 界公认的拓扑空间关系描述方法为‘交互方法’RCC 和‘交叉方法’(即‘九交模型’)，但从逻辑连贯性的角度讲，这之间还有融合 Mereology 和 Topology 的 Mereotopology，这一理论不被熟知，可能是由于其研究者多来自哲学领域，把它作为研究‘空间本体’的工具。

Mereotopology 是关于‘部分’和‘边界’的理论。相对于传统的 Mereology 与 RCC 只用一个基本算符，如 C(x,y)，Smith 介绍的系统[21] 有两个二元基本算符：P(part) 和 IP(interior part)，分别代表‘是任何种类的部分’与‘在内部且是部分’，并分别满足一些公理。其它的空间关系（如交、相离等）可由它们定义，这一点与 RCC 的方法是相同的，除此以外，一些拓扑概念（如边界、拓扑闭包等）也可以由这两个基本算符定义，如拓扑闭包的定义为：

$$cl(x)\equiv x\cup\sigma y(yBx) \tag{10}$$

即 x 的拓扑闭包是 x 及其所有边界的并。这样通过增加一个算符加强了 Mereotopology 表达拓扑关系的能力，但更直接的方法是 GIS 界通用的‘交叉方法’。

3 交叉模型

在 GIS 界‘九交模型’已被熟知，其代表的交叉方法也好掌握。为了对该方法有深入的理解，为针对现有模型的问题而做的进一步研究奠定基础，笔者首先指出‘九交模型’中隐含的拓扑思想，然后按照时间顺序，并兼顾平行的研究进展，对使用交叉方

① 此处的拓扑空间 S 是 T3 的，是指对所有点 $p\in S$ 和任意开集 G，$p\in G$，存在开集 H，$p\in H$，使得 $H^c\subset G$。这种定义又被称为正则空间，那时的 T3 空间指空间是正则的且为 T1。

法的‘交叉模型’的演化与发展过程做一综述。

3.1 九交模型中隐含的拓扑思想

首先介绍一些“九交模型”中用到的拓扑概念[22]:设X、Y是拓扑空间,则称映射$f:X\to Y$是一个同胚,它是一对一的连续满映射,并且有连续的逆映射。如果这样的映射存在,则称X同胚于Y,或X拓扑等价于Y。

求证两个空间拓扑等价,将涉及怎样造出两个空间之间具体的同胚,所用的技巧随问题的不同而各异;两个空间拓扑不等价,则可用同胚保持的不变量又称拓扑不变量来检验。

设R代表所有空间对象组成的集合,(R,R)代表两个空间对象间所有可能的拓扑空间关系,利用“拓扑不变量”则可对(R,R)进行划分,划分结果除满足‘互不相交且完全划分’外,还应随着考察对象复杂程度的增加而更细致。

设$a,b,c,d\in R$,考虑a与b,c与d间的拓扑空间关系(a,b)、$(c,d)\in(R,R)$,设a与b,c与d分别组成图形$a*b$、$c*d$,存在一个映射$f:a*b\to c*d$,则可把$a*b$组成部分a,b的边界、内部、外部的相交结果当作一个“拓扑不变量”,与$c*d$中c、d的相比,若不相等,则$a*b$所具有的拓扑空间关系与$c*d$的不相等,即有$(a,b)\neq(c,d)$。即使上面选的这个“拓扑不变量”相等,也不能说两者的拓扑空间关系完全相等,只能说相对于这种‘拓扑不变量’所进行的划分相等,因为“拓扑不变量’只是检验拓扑空间不同胚的度量。

明确了上述观点,就不会为‘九交模型’并不能表达所有人们直观所见的空间对象间的拓扑空间关系而感到困惑,但由于其具有简单、易操作等优点,还是取得了很广泛的应用。

3.2 “交叉模型’的演化

在文献[23]中,Egenhofer在前人利用空间对象包含的点组成的集合之间的关系和加入对象的边界与内部概念以进一步细化对象间的拓扑关系的基础上,首先给出点集拓扑学上对拓扑、开集、内部、闭包、边界等的严格定义,随后建立描述处于拓扑空间中的两个集合拓扑空间关系的模型,即两对象边界与内部相互交集组成的四元组。该模型所用的‘拓扑不变量”是集合相交后的空或非空性质,对两集合可得出16种结果。他进一步考虑拓扑空间是联通的,集合是空间中非空的真子集即空间区域,且满足:区域内部连通,区域内部的闭包等于该区域。

由于加入了这些约束,研究对象被限制在比较简单的面状体上,它不能有孤立点且只能有一个部分。针对这种情况,四交模型只能有9种有意义的结果,这些四元组对应的语义概念也被提出来,这种研究也可推广到多维的情况。

文献[23]巩固了利用‘交叉模型’研究空间关系的基础,开创了这种研究的新局面。笔者以对有洞区域的拓扑关系研究[24]为例,说明这种四交模型的应用。对平面上有洞区域拓扑关系的研究,Egenhofer基于四交模型的概念,把有洞区域分为区域整体和其包含的洞,然后用四交模型给出这些组成部分两两组合后的关系[24]。

随着四交模型应用的扩展,人们开始对其进行更深入的研究。Clementini为四交模型加上相交维数这个不变量[25],定义了相接、在内部、穿越、覆盖、相离5种空间关系,并证明了CBM(Calculus – Based Method)方法的良定义性和完备性,随后用穷举点、线、面基于维数扩展的四交模型的各种四元组取值和其相应的这5种关系的表达,证明了这5种关系足以表达基于维数扩展的四交模型能够表达的关系。在四交模型基础上,文献[26]加上两对象外部的相交关系,建立了九交模型,同时给出简单对象间可能的九交关系。

综合以上两方面成果,文献[27]为了描述更复杂的空间对象及其拓扑关系,针对即使四交模型给出的四元组相同,实际存在的两种空间关系却不同的情况,在四交模型的基础上讨论增加更多的拓扑不变量,如相交部分的维数与个数及排列顺序、对象外部的相交情况,并指出为了区分更精细的空间关系,这些新引进的‘拓扑不变量’都是需要的。

之后,Clementini集成其提出的CBM模型与Egenhofer的研究结果,比较以往的拓扑模型(即四交、九交、基于维数扩展的四交模型和CBM),给出它们分别所能表达的空间对象间(即点、线、面)的拓扑关系数,并进一步利用穷举法证明CBM和基于维数扩展的九交模型(DE + 9IM)等价[28]。

可以认为到这一步,“交叉模型’的基础理论基本建立,以后的工作是用这种方法研究更复杂对象间更细致的关系。如Clementini首先对平面上复杂几何对象(不连通并带洞的面、闭曲线和自相交的折线集、多点集)进行定义,明确其边界、内部等的含义,然后利用CBM对这些对象间的拓扑关系进行描述,并证明这5种关系具有互斥性,即两个对象间具有一种关系便不能再有其它的关系[29]。至此研究成果都总结在

OGC 于 1999 年的报告②中,它不仅对平面上的复杂几何体给出定义,并在 DE + 9IM 的基础上结合 CBM 的语义表达,给出 5 种拓扑关系。

“九交模型”的进一步发展包括 V9I[30],文献[30]中提出基于 Voronoi 图的混合方法,用空间对象的 Voronoi 区域作为其外部,对原模型进行了改进。

参考文献:

[1] 陈军,赵仁亮. GIS 空间关系的基本问题与研究进展[J]. 测绘学报,1999,28(2):95 - 102.

[2] SIMONS P. Parts:A Study in Ontology[M]. Oxford:Clarendon Press,1987.

[3] CLARK B L. A calculus of individuals based on‘connection’[J]. Notre Dame Journal of Formal Logic,1981,22(3):204 - 218.

[4] CLARK B L. Individuals and points[J]. Notre Dame Journal of Formal Logic,1985,26(1):61 - 75.

[5] COHN A G,BENNETT B,GOODAY J,et al. Qualitative spatial representation and reasoning with the region connection calculus[J]. Geoinformatica,1997,1(3):275 - 316.

[6] COHN A G,VARZI A. Modes of connection:a taxonomy of qualitative topological relations[A]. FREKSA C,MARK D M. Sqatial Information Theory - Cognitive and Computational Foundations of Geographic Information Science[C]. Berlin:Springer - Verlag,1999. 299 - 314.

[7] CUI Z,COHN A G,RANDELL D A. Qualitative and topological relationships in spatial databases[A]. ABEL D,OOI B C. Advances in Spatial Databases[C]. Berlin:Springer Verlag,1993. 293 - 315.

[8] GOTTS N M. An Axiomatic Approach to Topology for Spatial Information Systems[R]. School of Computer Studies,University of Leeds,1996.

[9] STELL J G,WORBOYS M F. The algebraic structure of sets of regions[A]. HIRTLE S C,FRANK A U. Spatial Information Theory,Proc. International Conference,COSIT '97[C]. Berlin:Springer - Vertrag,1997. 163 - 174.

[10] STELL J G. A Lattice Theoretic Account of Spatial Regions[R]. Keele University,Department of Computer Science,1997.

[11] JOHNSTONE P T. Stone Spaces[M]. Cambridge:Cambridge University Press,1982. 39 - 76.

[12] VICKERS S. Topology via Logic[M]. Cambridge:Cambridge University Press,1989. 12 - 38

[13] STELL J G. Boolean connection algebras:a new approach to the region - connection calculus[J]. Artificial Intelligence,2000,122(1 - 2):111 - 136.

[14] JONSSON B,TARSKI A. Boolean algebras with operators(Part I)[J]. American Journal of Mathematics,1951,73(4):891 - 939.

[15] JONNSON B,TARSKI A. Boolean algebras with operators[J]. American Journal of Mathematics,1952,74(1):127 - 162.

[16] TARSKI A. On the calculus of relations[J]. The Journal of Symbolic Logic,1941,6(3):73 - 89.

[17] MADDUX R D. The origin of relation algebras in the development and axiomatization of the calculus of relations[J]. Studia Logica,1991,50:421 - 455.

[18] HIRSCH R,HODKINSON I. Relation Algebras by Games[M]. Amsterdam,Boston,North Holland:ElseVier,2002. 23 - 212.

[19] DÜNTSCH I,WANG H,STEPHEN M. Relations algebras in qualitative spatial reasoning[J]. Fundamenta Informaticae,1999,39(3):229 - 248.

[20] DÜNTSCH I,WANG H. A relation algebraic approach to the region connection calculus[J]. Theoretical Computer Science,2001,255(1):63 - 83.

[21] SMITH B. Mereotopology:a theory of parts and boundaries[J]. Data & Knowledge Engineering,1996,20:287 - 303.

[22] 阿姆斯特朗(Armstrong M A). 孙以丰(译). 基础拓扑学[M]. 北京:北京大学出版社,1991. 13 - 21.

[23] EGENHOFER M J,FRANZOSA R D. Point - set topological spatial relations[J]. International Journal for Geographical Information Systems,1991,5(2):161 - 174.

[24] EGENHOFER M J,CLEMENTINI E,FELICE P D. Topological relations between regions with holes[J]. International Journal of Geographic Information Systems,1994,8(2):129 - 144.

[25] CLEMENTINI E,FELICE P D,OOSTEROM P V. A small set of format topological relationships suitable for end - user interaction[A]. ABEL D,OOI B C. Adavances in Spatial Databases[C]. Pisa:Springer Verlag,1993. 277 - 295.

[26] EGENHOFER M J,HERRING J. Categorizing Binary Topological Relations Between Regions,Lines,and Points in Geographic Databases[R]. NCGIA Technical Report 94 - 1,1994.

[27] EGENHOFER M J,FRANZOSA R D. On the equivalence of topological relations[J]. International Journal of Geographic Information Systems,1994,8(6):133 - 152.

[28] CLEMENTINI E,FELICE P D. A comparison of methods for representing topological relationships[J]. Information Sciences,1995,3(3):149 - 178.

[29] CLEMENTINI E,FELICE P D. A model for representing topological relationships between complex geometric features in spatial databases[J]. Information Sciences,1996,90(1 - 4):121 - 136.

[30] CHEN J,LI C M,LI Z L,et al. Improving 9 - Intersection Model by replacing the complement with Voronoi Region[A]. Proceedings of Inter. Workshop on Dynamic of Multi - dimensional GIS[C]. Hong Kong,1997.

The Development and Current State of Topological Spatial Relation Describing Theory

WU Jian - xin,FANG Yu,CHEN Bin

(*School of Earth and Space Sciences,Peking University,Beijing 100871,China*)

Abstract:Topological spatial relation is important and difficult in the research of spatial relation,which is the basis of Spatial Information Science,and its describing theories are of great interests for researchers. This paper reviews this research area. For Region - Connection Calculus,its principles and mathematical models,including topological and algebraic,will be explained. As for 9 - Intersection Model,the authors try to discover the model's underlying topological ideas,and trace its historical development. For Mereotopology,which connects the above two widely recognized describing models,its concepts and principles will also be explained,in order to help the readers realize that the topological spatial relation describing theory is a whole,whose parts are strongly logically interwoven. This paper aims to lay foundations for this research area's further improvement.

Key words:topological spatial relation;RCC;Mereotopology;9 - Intersection Model

② OpenGIS Simple Features Specification For SQL Revision 1.1. OpenGIS Project Document 99 - 049,1999.