

BA 模型的三种扩展^①

陈 禹, 宗 晓, 郝 杰, 许 彦

(中国人民大学信息学院, 北京 100872)

摘要: 无标度网络的发现, 使人类对于复杂网络的认识进入了一个新的天地. BA 模型是对于这种新认识的第一个抽象模型. 由于考虑了系统的成长性和连接的择优性, BA 模型给人们带来了许多启发. 但是 BA 模型的两个基本假定, 对于解释许多现实中的现象来说过于简单, 与现实的网络还有较大的距离. 所以, 作者试图对 BA 模型进行扩展, 即根据现实中的网络, 增添某些假定, 并通过计算机模拟进行观察, 以便进一步探索复杂网络系统的规律. 对 BA 模型的扩充考虑了 3 个因素: 择优选择的成本; 边的重新连接; 网络的初始状态. 实验结果表明, 在考虑了这些因素之后, BA 模型的基本结论并没有变化, 它们的影响在于演化过程的某些方面, 例如在某些极端条件下的演变趋势等.

关键词: 无标度网络; BA 模型; 择优选择的成本; 初始状态

中图分类号: N945.12

文献标识码: A

文章编号: 1000-5781(2005)02-0120-08

Three extensions for B-A model

CHEN Yu, ZONG Xiao, HAO Jie, XU Yan

(Information School, Renmin University of China, Beijing 100872, China)

Abstract: The discovery of scale free network has opened new horizon for our understanding on complex system. The BA model is the first formal explanation for this understanding. Considering the growing and optimal connection, BA model provided a lot of enlightenment for us. However, the two basic assumptions in BA model are still too simple for explaining many real phenomena, there are quite far distance to real networks. In this paper, we try to expand BA model. Based on some real networks, we add some assumptions, and use computer simulation for observation. We have considered three factors: Cost of optimal selection, Re-connection of edges, initial state of the networks. Our results indicate that the basic feature and rules in scale free network are the same, but these factors still have some influence on the growing process, for instance, the evolvement in some extreme situation.

Key words: scale free network; BA model; cost for optimal connection; initial state

0 引言——无标度网络和 BA 模型

上世纪末, Albert 等在对互联网的研究中发现了无标度网络(scale-free network)^[1], 开辟了人类对于复杂网络系统认识的新天地. 他们发现, 互联网实际上是由少数高连结性的页面组织起来

的, 80% 以上页面的连结数不到 4 个. 然而只占节点总数不到万分之一的极少数节点, 却有 1 000 个以上的连结. 这种网页的连接分布遵循所谓的“幂次定律”: 任何一个节点拥有 k 条连接的概率, 与 $1/k$ 成正比. 这就是无标度网络.

其后几年中, 各行各业的研究者们在许多不

① 收稿日期: 2004-10-31; 修订日期: 2004-12-20.

基金项目: 国家自然科学基金重大资助项目(79990582).

同的领域中,都发现了无标度网络.从生态系统到人际关系,从食物链到代谢系统,处处可以看到无标度网络^[2~4].

为什么随机模型与实际不相符合呢? Albert等在深入分析了ER模型之后,发现问题在于“成长性”和“择优连接”这两种机制,提出了BA模型,从理论上解释了无标度网络的现象.有关BA模型的详细情况和进一步探讨见文献[3,5].

经过对各种不同类型网络的研究,发现BA模型虽然比较准确地把握了现实世界中网络最基本的特点,较好地解释了无标度网络的形成机制,但是它对于现实的情况过于简化.为了对现实的复杂网络进行更深入的分析,还需要对BA模型进行扩充,使它更加符合实际.换言之,应当考虑更多的相关因素,更全面地、更切合实际地反映现实.目前,作者考虑了3个方面的因素:

A)进行择优连接时的搜索成本和建立新连接的成本.这一想法来自经济系统.当一个网站进行搜索和建立新的链接时均需要成本,这会影响到其行为,以至形成的拓扑结构.

B)在发展过程中,有些连接会发生变化,即有些连接被撤消,同时又增加一些新的连接.正像在市场经济中,企业之间的供销关系并非一成不变,而总是处在不断的变化之中.

C)网络初始状态的影响. BA模型对于网络的初始状态简单地假定从零开始,这不符合客观的许多情况.需要在不同的初始状态下,对于系统的演化过程进行模拟和观察.

1 考虑择优时的搜寻成本和建立连接的成本(模型1)

1.1 理论假定

在BA模型中,每当有一个新节点进入网络时,它会在所有的已存在节点中选择,即它的“择优”是基于全局信息的.在实际中,因为获取全局信息的成本过于高昂,基于全局信息的“择优”往往不现实.因此,应该对此进行修正.另外BA模型还有一个隐含的条件:每个新节点可以拥有的连接数 m 是固定不变的,而且小于起始网络的节点个数 m_0 .从经济意义说,这实际上是一个建立连接的成本问题. BA模型中假设的每次新增连接数目固定且较少,表现的只是在较高成本约束下的情况.但是实际情况要复杂得多.如果建立连接的成本很高,例如每个节点只能有一条连接,那么

在完全择优的情况下,新节点基本上都会和那个拥有最多连接数的节点相连,最后会形成一个星形网络;如果建立连接的成本很低,那么新进入的节点就可以和网络中已有的很多节点建立连接,推想一种极端的情况,如果建立连接的成本为零,那么新节点可以和所有的节点建立连接,整个网络就会成为全连通网络,而无法形成无标度网络.

下面根据以上讨论对BA模型扩展.

1.2 模型概述

作者所构建的模型基本上按照BA模型的步骤运行,只是在择优的时候限定了范围.每次运行之前,要求输入3个变量:最终网络的规模,每个新节点择优时可搜寻的范围以及初始网络的规模.具体步骤如下:

1)根据设定的初始网络规模,建立一个初始网络.此处与BA模型不同的是,BA模型的初始网络中,节点是相互孤立的,而本模型则是将初始网络设置为一个随机网络,也就是每个节点会随机地与其他一些节点建立连接.

2)每个时间间隔向网络中增加一个节点,这个节点会被随机地分配一个在网络中的位置,它将从此展开择优的搜索(程序中使用数组来记录网络中现有节点的连接数,数组的下标就是该节点的位置,所以随机为每个新节点分配的位置就是在零和现有网络规模之间的随机数)

3)根据事先确定好的搜寻范围,新节点开始局部的搜索,并据此择优连接.此处,新节点选择与节点 i 连接的概率和BA模型是一样的,取决于节点 i 的连通度 k_i ,即

$$\pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum k_j}$$

4)在网络成长到预先设定的规模之后,模拟终止.将网络情况进行统计,统计结果导入Microsoft Excel进行进一步的分析和绘制图表.

1.3 实验结果分析

在进行结果分析之前,先约定实验名称的含义.在下面的分析中,会使用一些图表,其名称一般由3组数字组成,例如10 000-20-3,它们代表的含义分别是模拟运行的步数(即会向初始网络中添加的节点数),搜寻范围以及初始网络规模(即初始网络所含的节点数). 10 000-20-3指的就是这样一次实验:初始网络拥有3个节点,新节

点择优的搜寻范围是 20, 网络最终发展到 10 003 个(初始有 3 个, 添加 10 000 个)节点。

根据实验的结果, 从择优时的搜寻成本和建立连接的成本两方面得到两个相关的结论:

结论 1 无标度网络的形成与择优选择时所使用的信息量无关。

这就是说, 即使因为获得全局信息的成本太高而无法依据完全信息择优时, 只要在局部仍是择优连接, 网络依然会成长为无标度网络。

从图 1 和图 2 可以得出这个结论。如图所示, 基于局部信息的择优, 扩展模型的模拟结果说明也可以形成无标度网络。可以看到, 无标度网络具有一种整体与局部的自相似性, 这是一种分形特性。显现了整体与局部的自相似性。

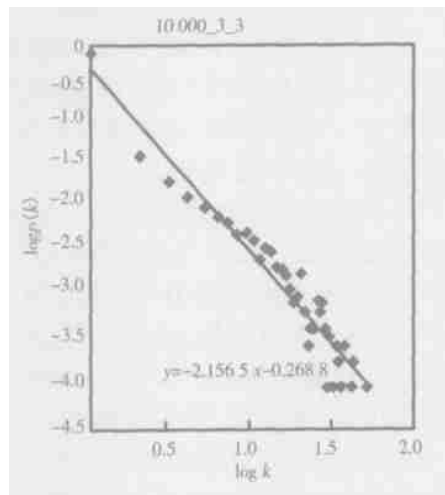


图 1 基于局部信息择优的网络成长结果

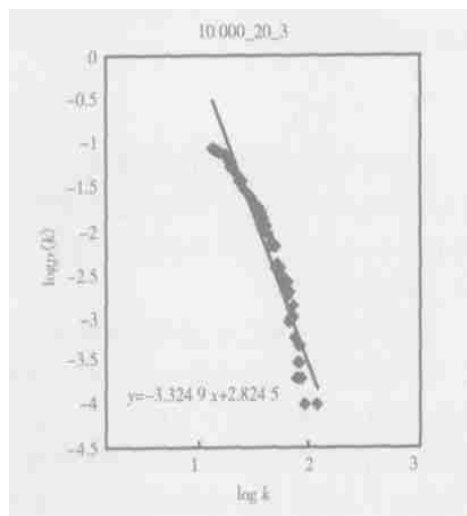


图 2 基于局部信息择优的网络成长结果

此外, 还可以看到, 当搜寻范围较小时, 趋势

线的倾斜程度比搜寻范围较大时平缓, 即 γ 值偏小。可以这样解释这一现象: 因为采用了局部择优的算法, 所以当搜寻范围较小时, 随着网络的成长, 每次可以搜寻的范围相对整个网络而言就越来越小, 那么这种局部的择优, 会使得局部里相对“优”的节点(它们在整个网络里可能并不算是最优的)获得更多的连接, 这就导致这些拥有中等连接数量的节点比全局择优时要多, 同时也使得最大连接数量和最小连接数量之间差异(即贫富差距)没有那么大, 所以曲线自然会平缓一些。但是网络的整体趋势还是会发展成为无标度网络。

结论 2 无标度网络的形成依赖于成长和择优连接两点特性, 但是一定的连接成本也是其必要条件之一。

如上所述, BA 模型假设每个新节点进入时, 增加的连接数量是一个定值, 而且它和最终的网络规模相比是极小的。这意味着新加入的节点连向别的节点的成本比较高, 所以每次只能建立有限数量的连接。但是如果连接成本比较低, 每次可以建立很多连接, 情况又如何呢? 模拟程序在每一个新节点被引入时, 它可以创建的连接数量是不定的, 而是一个在 1 到整个搜寻空间大小之间的随机数。例如当搜寻范围设为 1 000 时, 它会搜索 2 001 个节点, 所以可能建立的连接数在区间 $[1, 2\ 001]$ 内。

笔者做了多组实验, 发现当搜寻范围较小时, 每个新节点进入网络后, 所创建的连接数量基本稳定。例如当搜寻范围为 20 时, 几乎每一个时间间隔进入的新节点所创建的连接都是 10 条; 搜寻范围为 50 时, 则为 70 条。但是如果搜寻范围较大, 例如 5 000, 这种情况下每一个时间间隔进入的新节点所创建的连接就不再是一个定值, 而是随着网络规模的成长动态增加, 均匀地从 1 条增长到 9 700 条。

如图 3 和图 4 所示, 实验 10 000-1 000-3 和 10 000-5 000-3 没有形成所期望的图形。根据事后统计, 发现当搜寻范围为 1 000 时, 理论上每个节点可能创建的连接数量在区间 $[1, 2\ 001]$ 内, 实际模拟当中新节点的连接数从 1 均匀增长到 1 970; 同样, 当搜寻范围为 5 000 时, 理论上每个节点可能创建的连接数量在区间 $[1, 10\ 001]$ 内, 实际模拟当中新节点的连接数从 1 均匀增长到 9 700。

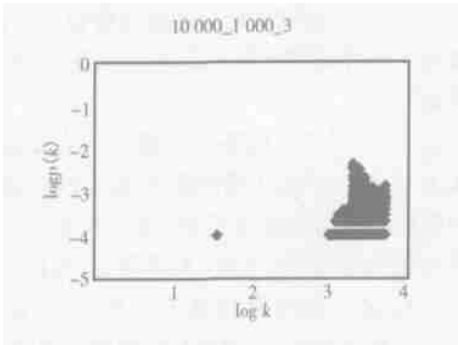


图 3 基于局部信息择优的网络成长结果

因为这两次实验的网络最终规模都是 10 003, 所以当新节点所能创建的连接数量随着网络的成长而增加时, 如果连接数量最大增至 1 970, 整个分布呈现出均匀分布的情况(图 3); 如果连接数量最大可以增至 9 700, 意味着每个新进入的节点几乎可以和每一个已存在的节点连接, 这样导致网络呈现出与传统无标度网络相反的情况(图 4), 它依然是无标度网络, 只不过网络内的情形却是拥有连接数量越多的节点越多, 仅有很少的节点具有很少的连接. 这些节点是网络发展初期, 在概率挑选中被淘汰的, 从此进一步失去了被选中的机会, 因而无法获得更多的连接.

进行这样的讨论是基于经济生活中的实际现象: 随着现代信息技术的发展和普及, 通信成本

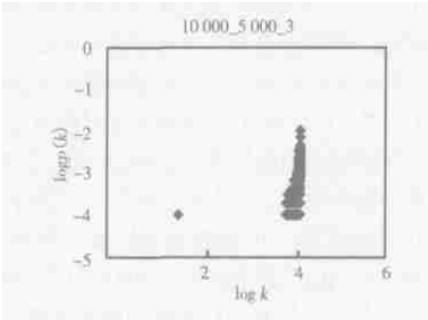


图 4 基于局部信息择优的网络成长结果

急剧下降. 笔者希望探讨这对于网络结构的影响.

由图 3、图 4 可知, 每次可以新增的连接数量与网络规模之间的比例会影响网络结构. 当限定每次可以新增的连接数量时, 随着网络规模的增大, 网络的拓扑结构会有一个演化过程. 观察图 5, 这是一组实验的结果图——横轴代表连接数量, 纵轴代表拥有相应连接数量的节点数量(这组实验中网络初始规模都是 50, 每次搜寻范围均为 20, 根据事后统计, 每个新节点的连接数量几乎都是 10). 由图 5 可知, 当网络规模较小时, 分布情况接近如正态分布, 随着网络规模的扩张, 两极分化的现象越来越明显, 大量节点只拥有很少的连接数量, 而只有极少节点拥有很多的连接数量, 幂律分布的情况逐渐显现.

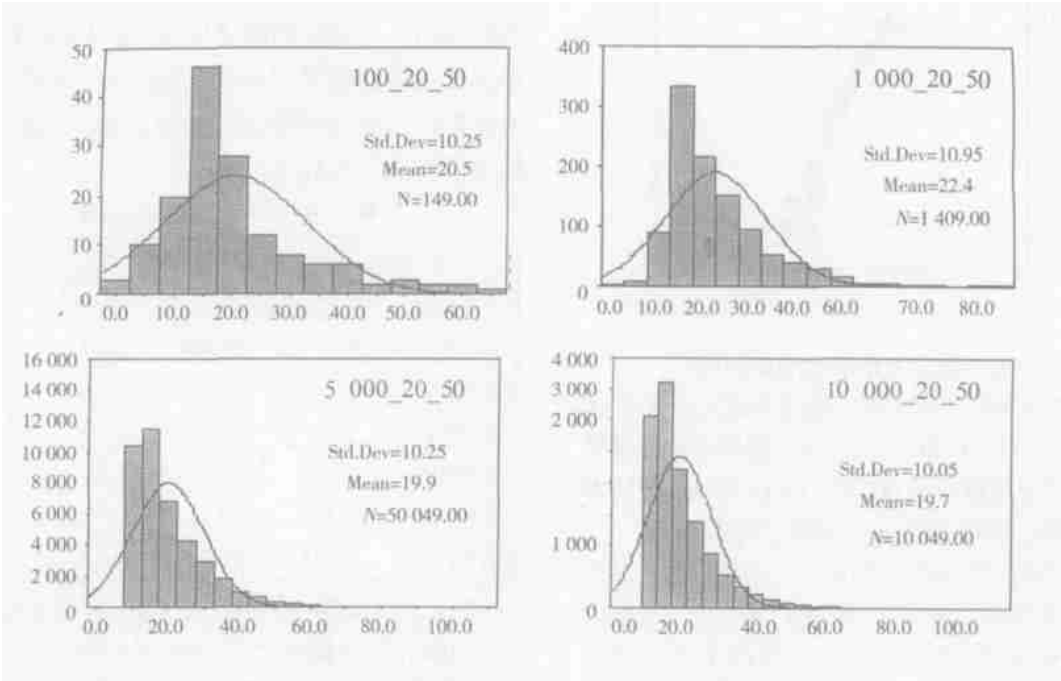


图 5 部分表现网络成长情况的实验结果

可见,当每次新增连接数固定时,随着规模的增长,网络拓扑结构渐渐从一个近似正态分布的情况转向了幂律分布.从中可以知晓,连接数量和网络规模必须达到一定比例之后,网络才能显现出无标度性,而连接数量正是由创建连接的成本所决定的.

在实验中发现,当搜索范围为 20(即每个新节点几乎都创建约 10 条连接)时,如果网络规模达到新节点创建连接数的大约 300 倍(即 3 000 个节点)时,此时最接近 BA 模型生成的网络, γ 值接近于 3(见图 6,图 7).

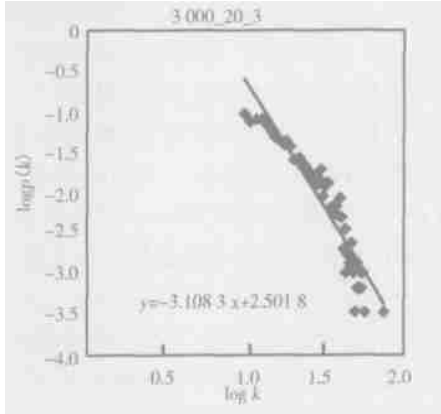


图 6 基于局部信息择优的网络成长结果

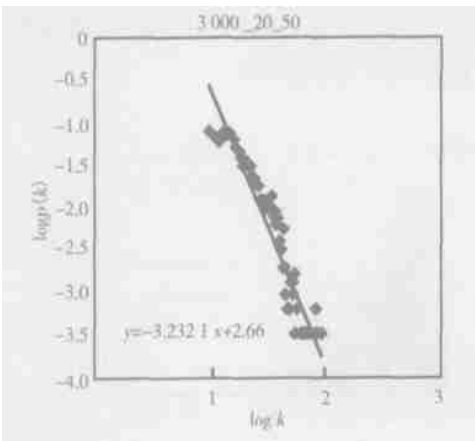


图 7 基于局部信息择优的网络成长结果

在两次实验中,网络初始规模和最终规模之比虽然分别是 1/1 000 和 1/60,但是只要网络最终规模是每次新增连接数量的 300 倍(3 000/10)时,网络的拓扑结构都比较好地符合 BA 模型的结果.

综上所述,可以得出结论:一定的建立连接的成本也是无标度网络得以形成的条件之一.假设连接成本很低,那么后进入节点和网络中已有节点的连接数量就会很大,如果这种连接数量随着网络规模一起动态成长,那就无法形成无标度网

络.只有当每次新增的连接数量比较稳定时,网络按照择优的方式扩张到一定规模以后,才能显现出无标度性.

最后,可以将这两条结论都归结为与连接成本相关的规律.结论 1 指的是在择优之前,为了更好地择优而付出的搜寻成本,这一成本是为了创建更合意的连接而付出的,将其称为“连接的搜寻成本”.结论 2 指的是在择优之后,已经选定了“优”的目标之情况下,期望与之创建连接的成本,将其称为“连接的建立成本”.那么,结论就是:“连接的搜寻成本”相对而言不是非常重要,即使不花费那么大的搜寻成本,只要在局部择优后,“连接的建立成本”可接受,能如愿地和局部的“优”的节点建立连接,当网络发展到一定规模后(网络规模与每次新创建的连接数量达到一定比例),网络依然可以显现出无标度性.

1.4 实际意义

从实验中得出的这些结论,在现实中有十分明显的具体含义.例如在表 1 中看到,美国的航空网与高速公路网的拓扑结构是不同的.其原因就是成本问题.它们的搜寻范围是一样的(美国国内),但是建立两个城市之间的直通航线的成本却相对低得多,只要航空公司预计可以赢利,就能够创建甚至是横贯全美的长距离线路(例如从西雅图到纽约).在这样的网络中,因为成本较低,所以基于择优的连接是可实现的,而且网络规模相对每次新引入的连接数量来说也足够大,由此美国航空网形成了无标度网络.

表 1 实际网络的 Scale Free 现象

所研究的网络	网络规模	γ_{out}	γ_{in}
万维网 ^[5]	325 729	2.45	2.1
互联网路由器层 ^[1]	150 000	2.4	2.4
电影演员合作 ^[6]	212 250	2.3	2.3
数学家合作 ^[7]	70 975	2.5	2.5
电话网 ^[8]	533 106	2.1	2.1
文献引用 ^[9]	783 339		3
语言 ^[10]	460 902	2.7	2.7

注: γ_{out} 为出边幂律分布指数; γ_{in} 为入边幂律分布指数.

由此,作者提出十分有意义的猜测——连接的创建成本会影响到无标度网络幂律分布曲线的倾斜程度.

2 加入“连接变更”现象后的网络演化情况(模型2)

2.1 理论假定

作者的第2个模型考虑了网络在演化过程中连接的变更情况. 在BA模型中, 只考虑了点和边不断增加的情况, 这种“只增不减”或者说“只生不死”的假设, 是对现实的过度简化, 实际情况要复杂得多. 这些情况可以抽象为两种网络行为: “边的重连”和“去除节点”. 当把这两种行为加入网络之后, 会不会导致网络演化出一些新的性质呢? 第2个模型就是由此出发建立的.

2.2 模型概述

作者就此设计了计算机模拟程序, 以观察网络的演化规律. 具体的模拟步骤如下:

1) 从初始 m_0 个节点开始, 每一个时间间隔, 引入一个新的节点, 并使之与 m ($m \leq m_0$) 个已存在的节点相连接.

2) 新节点以择优连接的方式与已存在的节点连接: 新节点选择与节点 i 连接的概率和BA模型是一样的, 取决于节点 i 的连通度 k_i , 即

$$\pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum k_j}$$

3) 所有已进入网络的节点, 每 n ($n \geq 1$) 个时间间隔会遇到危机, 它的连通度变动公式为“ $k_i = k_i \times \text{危机的影响程度}$ ”. 此时, 指向该节点的节点断开与它的连接, 重新在网络当中择优连接.

所以, 该模型除BA模型原有的参数之外, 还增加了两个重要的参数: 危机来临的周期(n 个时间间隔)和危机的影响程度.

2.3 实验结果分析

如图8所示, 周期越短, 分布曲线越陡峭, γ 值越大, 集散节点拥有的连接数相对较少. 可见当危机越频繁时, 两极分化的情况越严重. 可以这样解释观测结果: 在频繁的危机当中, 只有那些具有巨大优势的节点才能立于“不败之地”, 在每次危机过后, 它们依然是相对的优势节点, 可以在重新择优连接的过程中再次被选中, 保持或恢复其优势地位. 而那些具有一般优势的节点, 因为危机而无法巩固自己的优势, 所以不能成长壮大起来. 这就导致两极分化越来越严重. 显然这是实际的市

场竞争情况的形象反映.

另外, 如图9所示, 不同危机影响程度的分布曲线区别不大. 只是随着影响程度的加大, 分布得相对分散. 这是因为如果每次危机的破坏力很大, 网络就面临一次重新排序的过程, 很多节点又回到同一水平开始竞争, 所以连接的分布会比较分散.

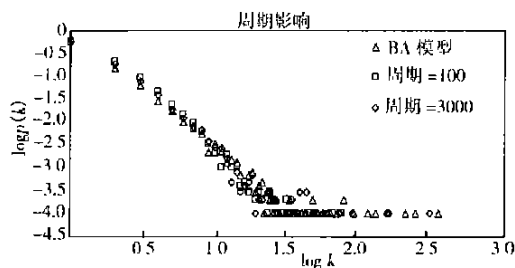


图8 不同危机来临周期的分布曲线

注: 网络规模都是 10 000, 危机的影响程度为 0.7

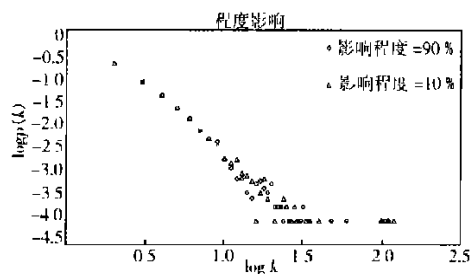


图9 不同危机影响程度的分布曲线

注: 网络规模都是 10 000, 周期都是 1 000 个时间间隔

2.4 结论

模型2的主要启发在于, 危机和跳跃对于网络演化过程是有一定影响的, 这主要在于危机发生的频率和周期, 危机发生越频繁, 两极分化的程度越显著. 而危机影响程度的影响则不那么明显. 这个规律可以用于解释信息产业发展过程中的一些与以前的产业不同的现象.

3 网络初始状况对于无标度网络的影响(模型3)

3.1 理论假定

模型3对于演化的初始状态进行了修改. 在BA模型中, 初始状态只有节点而没有任何连接. 所以这些初始节点的优势并不明显. 但是如果这些节点一开始是存在一些连接的, 它们的连通状况会对网络有何影响呢? 作者为此设计了第3个模型, 以观察网络初始状态对于无标度网络的

影响。

3.2 模型概述

在这个实验中,完全沿用了BA模型的算法.唯一的区别在于将初始网络设置成全连通的网络,其实验名称用网络的最终规模、初始网络规模、每个新节点引入的连接数3个参数表示.例如“50 000-20-1”表示初始网络为20个节点,每次增加一个,最终达到50 000个.为了和原有的BA模型对比,在名称前面加上“BA-full”以表示区别。

3.3 实验结果分析(模型3)

如图10所示,当初始网络的规模很小(如5个节点)时,初始网络是否连通作用不明显,但是随着初始网络规模的增加,在曲线右下部渐渐突现出一个连接数目众多的独立尾部.考察尾部中的节点,发现全部来自初始网络.这说明当网络最终规模和初始规模的比例没有达到一定程度时,全连通的初始网络将会因为其先入优势,而成长为网络的核心.通过图11可以看得更为明显,BA模型的曲线在右下部没有形成很大的尾部,而当初始节点全连通之后,几乎都形成了一个三角形的密集区域,它们都是由初始节点构成的网络核心.只是随着网络规模的扩大,其地位(拥有的连接数占网络所有连接数的比率)渐渐下降。

此外,实验结果还说明这个“独立尾部”的形成和新引入节点允许的连接数量也有一定的关系.如图12所示,如果每个新增节点只可以引入30条连接时,分布比较平均,而如果可以建立1条连接,则“独立尾部”将十分明显.这也很容易理解,当新节点可以引入较多的连接数量时,那些非初始节点也就有更大的机会获得连接,从而不容易形成连接数特别大的集团。

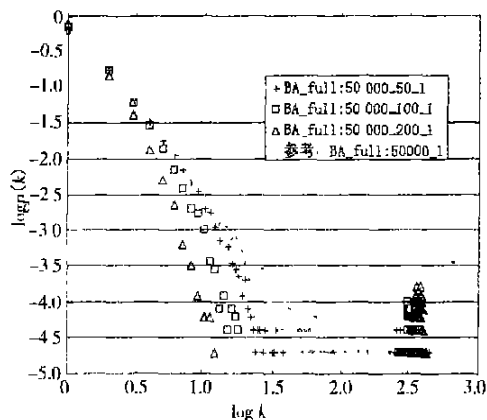


图10 初始全连通网络的规模对最终网络的影响

注:在最终网络规模一定(50 000个节点)的情况下,随着初始全连通网络结点个数的增加(从5到100),网络幂律分布曲线的斜率 γ 值有增大($\gamma > 3$)的趋势;并且,在模型的尾部逐渐分化出一个连接数 k 很大($10^{2.5}$ 左右)的簇。

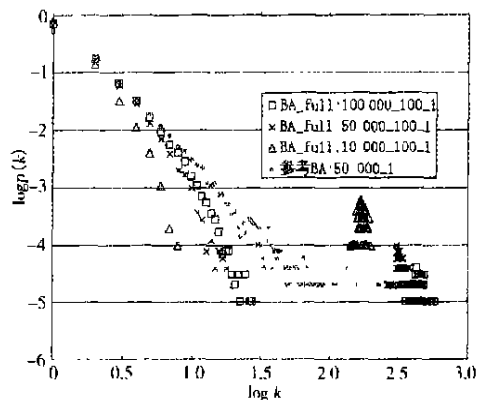


图11 具有初始全连通网络的演化

注:当初始全连通网络的规模相同(100个节点),但是最终网络的规模不同时,网络幂律分布曲线的斜率 γ 有所变化:当网络最终规模为10 000个节点时, γ 最大;随着网络规模的增大, γ 减小;但是,当网络规模为50 000和60 000时,曲线已经基本重合,且斜率 $\gamma > 3$ 。

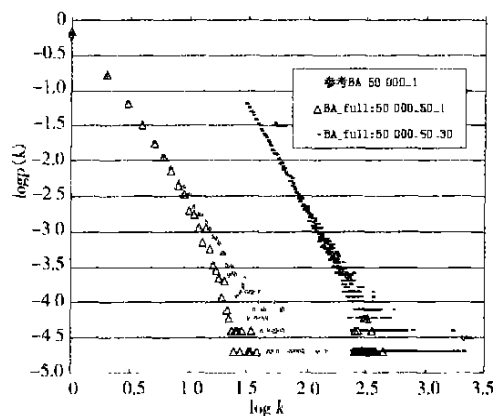


图12 “独立尾部”与新节点连接数量的关系

注:当每个新节点连接个数为30时(BA_full:50 000_50_30),网络没有演化出明显的“独立尾部”;但是当新节点的连接个数为1时(BA_full:50 000_50_1),网络演化得到的“独立尾部”非常明显。

3.4 结论

初步的结果表明,从一个只有初始结点且没有初始边的状态出发,与从一个全连通图出发,演化的情况有原则差别.主要的区别在于集散网点的集中程度.当然,这是两种极端的情况.实际情况应当介于两者之间。

在现实世界中,这就相当于政府提供的初始条件对于市场发展的引导作用.如果掌握了其中

的规律,那么,只要提供必要的初始网络条件,系统就能够按照其自身发展的规律成长,达到引导市场、四两拨千斤的作用。

4 关于进一步研究的考虑

中国人民大学经济科学实验室对于无标度网络的研究工作还只是刚刚起步,许多相关的假设还有待进一步的研究与证实。根据前一段的工作,对于进一步的研究有以下两点考虑。

1)以实证研究为推动力。对于无标度网络这样的研究方向,首先应该把实证研究放在第1位。Barabási等人在研究互联网页面的情况时,发现了无标度网络,其本身就表明了这样的特点。

今天,更应从实证领域寻找各种复杂系统结构的拓扑特性,应该充分利用信息技术带来的强大的处理和计算能力,广泛开展针对各种系统结构的调查统计,只有在此基础上进行更进一步的建模分析,才具有实际意义,而不仅仅是数学游戏。中国人民大学经济科学实验室的研究重点将是社会和经济领域的实际问题。

2)重视计算机建模的作用。用计算机做更大规模的模型。从复杂网络理论的起源可以明显看

出,这类问题涉及社会学、生物学、生命科学、物理、化学、地理科学等诸多学科,尤其是和人、人的行为、人的思维、人的心理有密切关系,其中有很多非理性和无法量化的因素存在,因此,对于这类系统,用纯粹的数学模型进行研究是不可能的,需要借助其它的建模方法,这其中,计算机模型就有很大的作用。

计算机模型不需要形成很精确的数学公式,也不需要使用很复杂的推导求解方法,只是根据系统的元素和它们的交互行为设计出计算机程序,然后运行以观测所模拟的系统的演化情况。数学模型可以转化为计算机模型,即使对于那些无法建立数学模型的系统,特别是社会经济系统,也可以建立计算机模型来进行研究。对于那些无法用真实的实验来检验的复杂系统,计算机模型则往往是唯一实际可用的实验手段。计算机模型着力于借用它的强大运算能力来模拟并演化系统的行为,它专注于描述系统结构(元素以及元素之间的交互关系),并且有充分的能力来描述系统结构。所以,计算机模型对于研究系统的结构,具有重大的意义。

本文所介绍的3种对BA模型进行扩充的模型都是在微机上做模拟,规模还比较小,有待进一步改善。

参考文献:

- [1] Albert R, Jeong H, Barabási A L. Diameter of the World-Wide Web[J]. *Nature*, 1999, 401: 130—131.
- [2] 车宏安, 顾基发. 无标度网络及其系统科学意义[J]. *系统工程理论与实践*, 2004, 24: 11—16.
- [3] 吴金闪, 狄增如. 从统计物理学看复杂网络研究[J]. *物理学进展*, 2004, 24: 18—46.
- [4] Barabási A L, Bonabeau E. Scale-free networks[J]. *Scientific American*, May 2003, 50—59.
- [5] Barabási A L, Albert R, Jeong H. Mean-field theory for scale-free random networks[J]. *Physica A*, 1999, 272: 173—187.
- [6] Govindan R, Tangmunanunkit H. Heuristics for Internet Map Discovery[C]. *Proceedings of IEEE INFOCOM 2000*, Tel Aviv, Israel (IEEE, Piscataway, N. J.), 2000, 3: 1371—1380.
- [7] Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks[J]. *Science*, 1999, 286: 509—512.
- [8] Barabási A L, Jeonga H, Neda Z, *et al.* Evolution of the social network of scientific collaborations[J]. *Physica A*, 2002, 311: 590—614.
- [9] Aiello W, Chung F, Lu L. A Random Graph Model for Massive Graphs[C]. *Proceedings of the 32nd ACM Symposium on the Theory of Computing (ACM, New York)*, 2000, 171—180.
- [10] Redner S. How popular is your paper? An empirical study of the citation distribution[J]. *Eur. Phys. J. B*, 1998, 4: 131—134.

作者简介:

陈禹(1944—),男,江苏人,博士生导师,研究方向:计算机应用,系统理论;
宗骁(1981—),女,北京人,硕士生,研究方向:系统理论,经济建模;
郝杰(1979—),男,北京人,硕士,研究方向:计算机应用,系统理论;
许彦(1981—),女,江苏人,硕士生,研究方向:计算机应用,系统理论。