Assignments Lecture 2.2

Vũ Lê Mai

April 2020

P2.5

- Với ma trận n x n $S = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ và $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$ ta được kết quả là ma trận Sx được scale thành $\begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ ... \\ \lambda_n x_n \end{bmatrix}$

P2.6

- Với ma trận m x n A được chia thành q phần theo hàng và s phần theo cột và ma trận n x p B được chia thành s phần theo hàng và r phần theo cột.Khi đó tích nhân ma trận giữa các block $C_{qr} = \sum_{i=1}^{s} A_{qi} B_{ir}$.
- Với column view thì $r = 1$.
- Với row view thì $q = 1$.

P2.9

- - Với $x \in N(A)$ ta có: $Ax = 0 => A^T Ax = 0 => x \in N(A^T A)$.
    Do đó $N(A) \subseteq N(A^T A)$ (1)
  - Với $x \in N(A^T A)$ ta có: $A^T Ax = 0 => x^T A^T Ax = 0$
    $=> (Ax)^T (Ax) = 0 => (Ax) = 0$. Do đó $N(A^T A) \subseteq N(A)$ (2)
  - Từ (1) và (2) ta có $N(A) = N(A^T A)$ nên $rank(A) = rank(A^T A)$ (I).
- Từ (I) suy ra:
  $rank(A^T) = rank(A^{TT} A^T)$ hay $rank(A^T) = rank(AA^T)$.
  Mà $rank(A) = rank(A^T)$ nên $rank(A) = rank(AA^T)$ II.
- Từ (I) và (II) ta có $rank(A) = rank(AA^T) = rank(A^T A)$ (đpcm).

P2.10

- $(ABC)^{-1} = [A(BC)]^{-1} = (BC)^{-1}A^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ (đpcm).
- $(A^{-1})^T A^T = I => (A^{-1})^T A^T (A^T)^{-1} = I(A^T)^{-1} => (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ (đpcm).

P2.11

- Với column view $Col(PQ) \subseteq ColP$ và với row view $Row(PQ) \subseteq RowQ$ nên $rank(PQ) \leq rank(P)$ (1) và $rank(PQ) \leq rank(Q)$. Suy ra $rank(PQ) \leq min(rank(P), rank(Q))$ (2).
- Từ (I) ở bài P2.9 và (1) ta có $rank(A) = rank(A^T A) \leq rank(A^T)$ và tương tự với A^T ta có $rank(A^T) = rank(AA^T) \leq rank(A)$. Suy ra $rank(A) = rank(A^T)$ (3).
- Từ (2) và (3) ta có $rank(A) = rank(A^T) \leq min(m, n)$ (đpcm).