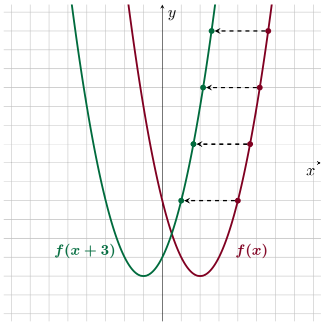
# Преобразования графиков функций

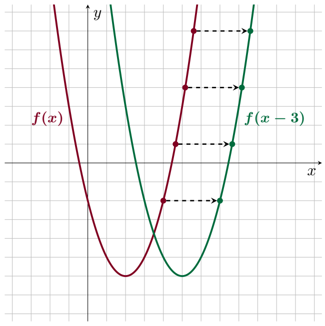
1. **Смещение графика функции по горизонтали $[y = f(x + c)]$**

   Если к аргументу функции $y = f(x)$ прибавить число $c$, то график функции $y = f(x)$ сместится по горизонтали.

   а) **Если $c > 0$**, то график $f(x)$ сместится **влево** на $c$:

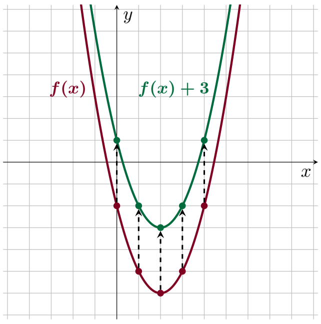
   б) **Если $c < 0$**, то график $f(x)$ сместится **вправо** на $|c|$:

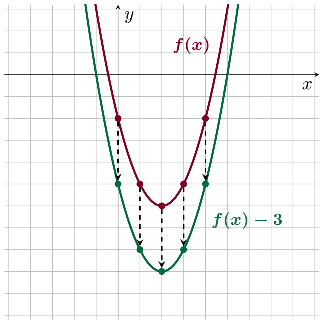
2. **Смещение графика функции по вертикали $[y = f(x) + c]$**

   Если к функции $y = f(x)$ прибавить число $c$, то график функции $y = f(x)$ сместится по вертикали.

   а) Если $c > 0$, то график $f(x)$ сместится **вверх** на $c$:

   б) Если $c < 0$, то график $f(x)$ сместится **вниз** на $|c|$:

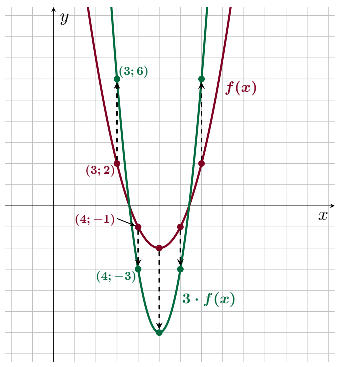
3. **Растяжение или сжатие графика по вертикали $[y = c \cdot f(x)]$**

   Если всю функцию $y = f(x)$ умножить на число $c$, то график функции $y = f(x)$ может растянуться, сжаться или отразиться относительно оси $X$ в зависимости от значения $c$. Рассмотрим каждый случай отдельно.

   Сразу обратим внимание, что точки, которые называют нули функции (точки, у которых $y = 0$), в любом случае не меняют своего положения.

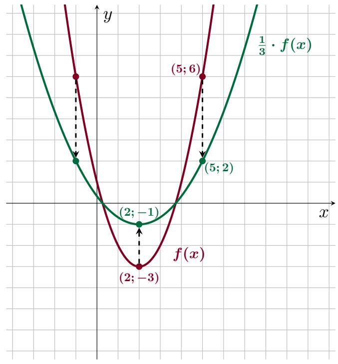
   а) **Если $c > 1$**, то график функции **растянется от оси $X$**.

   Игрековые координаты всех точек графика изменятся в $c$ раз. Это означает, что точки графика, у которых $y > 0$, сместятся в $c$ раз вверх, а точки с отрицательными значениями по игреку сместятся в $c$ раз вниз.

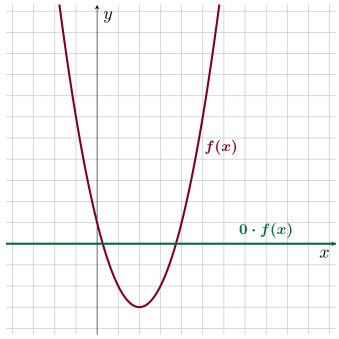
б) **Если $0 < c < 1$**, то график функции **сожмется к оси $X$**.

В этом случае точки графика, у которых $y > 0$, сместятся в $\frac{1}{c}$ раза вниз, а те, у которых $y < 0$, сместятся в $\frac{1}{c}$ раза вверх.



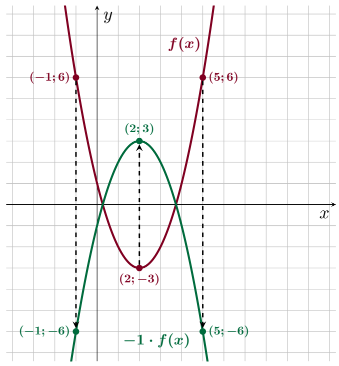

в) **Если $c = 0$**, то уравнение функции **превратится в уравнение $y = 0$**.

Очевидно, что при умножении всего выражения $f(x)$ на 0 в результате получим 0 и уравнение функции будет $y = 0 \cdot f(x) = 0$, то есть $y = 0$. Вспомним, что график функции вида $y = a$, где $a$ — число, это прямая линия, параллельная оси $X$ и пересекающая ось $Y$ в значении $a$. В нашем случае получим прямую, проходящую по оси $X$.



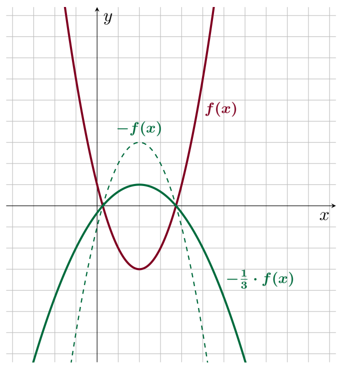

г) **Если $c = -1$**, то график функции **отразится относительно оси $X$**.

В этом случае игрековые координаты всех точек графика функции изменятся на противоположные.



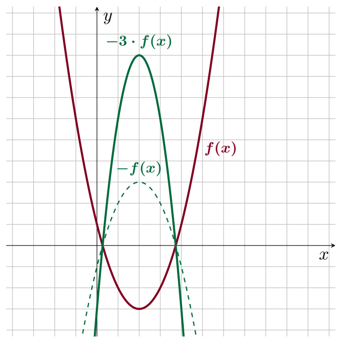

д) **Если $-1 < c < 0$**, то график функции **отразится относительно оси $X$** и **сожмется к оси $X$** в $\frac{1}{|c|}$ раз.

Такое преобразование удобно делать в два приема: сначала отражаем график относительно оси $X$ график, а потом сжимаем к оси $X$.




е) **Если $c < -1$**, то график функции **отразится относительно оси $X$** и **растянется от оси $X$** в $|c|$ раз.

Это преобразование делаем также в два приема: сначала отражаем график относительно оси $X$ график, а потом растягиваем от оси $X$.



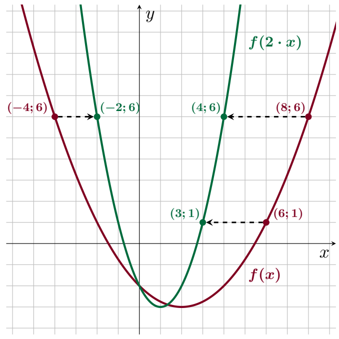
4. **Растяжение от или сжатие к оси $Y$ $[y = f(c \cdot x)]$**

Если аргумент функции $y = f(x)$ умножить на число $c$, то график функции $y = f(x)$ может растянуться, сжаться или отразиться относительно оси $Y$ в зависимости от значения $c$. Также как и в предыдущем пункте рассмотрим каждый случай отдельно.

В этом случае стоит отметить, что точка пересечения графика с осью $Y$ не меняет своего положения.

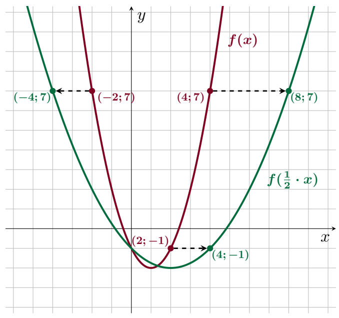
а) **Если $c > 1$**, то график функции **сожмется к оси $Y$**.

Иксовые координаты всех точек графика изменятся в $c$ раз. То есть точки графика, у которых $x > 0$, сместятся в $c$ раз влево, а точки, у которых $x < 0$, сместятся в $c$ раз вправо.




б) **Если $0 < c < 1$**, то график функции **растянется от оси $Y$**.

Точки графика, у которых $x > 0$, сместятся в $\frac{1}{c}$ раза влево, а точки, у которых $x < 0$, сместятся в $\frac{1}{c}$ раз вправо.

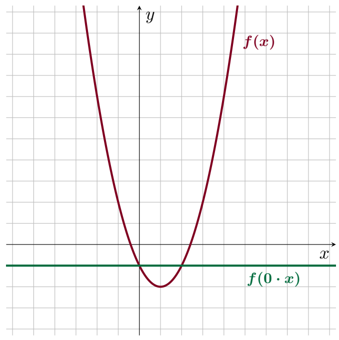



в) **Если $c = 0$**, то график функции **превратится в уравнение $y = a$**, где $a$ — точка, в которой график пересекает ось $Y$.

Рассмотрим пример, представленный на рисунке справа. График функции $f(x)$ задан выражением $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Умножим аргумент функции на 0:

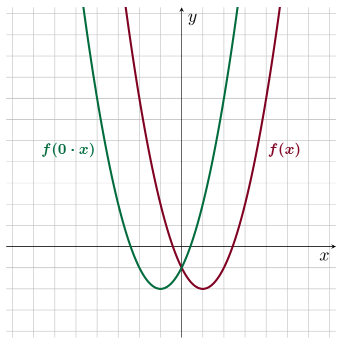
$$f(0 \cdot x) = (0 \cdot x)^2 - 2(0 \cdot x) - 1 = 0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = 0 - 0 - 1 = -1$$

То есть $f(0 \cdot x) = -1$. Графиком такой функции является прямая линия, параллельная оси $X$, пересекающая ось $Y$ в точке $-1$.



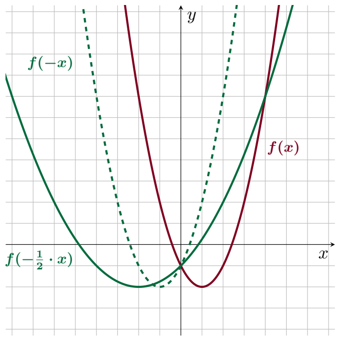

г) **Если $c = -1$**, то график функции **отразится относительно оси $Y$**.

В этом случае иксовые координаты всех точек графика функции изменятся на противоположные.



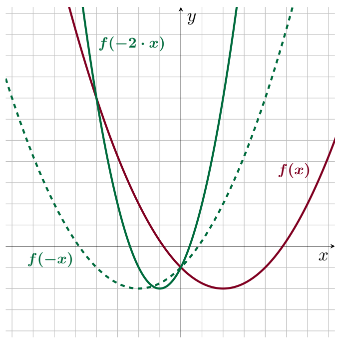
д) **Если $-1 < c < 0$**, то график функции **отразится относительно оси $Y$** и **растянется от оси $Y$** в $\frac{1}{|c|}$ раз.

Это преобразование делаем также в два приема: сначала отражаем график относительно оси $Y$, а потом растягиваем от оси $Y$.




е) **Если $c < -1$**, то график функции **отразится относительно оси $Y$** и **сожмется к оси $Y$** в $|c|$ раз.

Это преобразование делаем снова в два приема: сначала отражаем график относительно оси $Y$, а потом сжимаем к оси $Y$.




5. **Отражение части графика относительно оси $X$ [$y = |f(x)|$]**

Если всю функцию $y = f(x)$ взять по модулю, то часть графика функции $y = f(x)$, которая расположена ниже оси $X$, отразится относительно оси $X$.

Исходный график $y = f(x)$

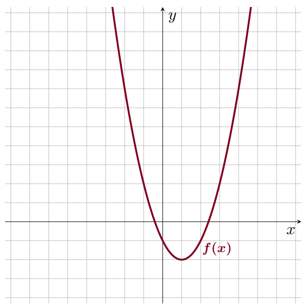
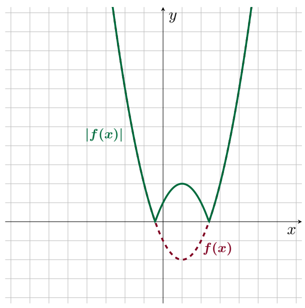



График функции $y = |f(x)|$




6. **Отражение части графика относительно оси $Y$ [$y = f(|x|)$]**

Если аргумент функции $y = f(x)$ взять по модулю, то часть графика функции $y = f(x)$, которая расположена левее оси $Y$, сотрется, а правая часть отразится относительно оси $Y$.

Исходный график $y = f(x)$

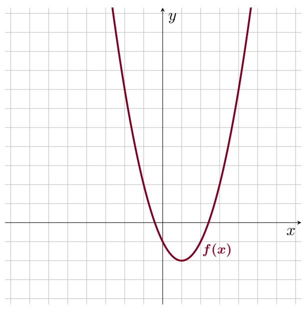



График функции $y = f(|x|)$