1 Введение

1.1 Геометрия

Наука, рассматривающая свойства геометрических фигур, называется **геометрией**, что в переводе с греческого языка означает **землемерие**. Возможно такое название этой науке было дано потому, что в древнее время главной целью геометрии было измерение расстояний и площадей на земной поверхности.

1.2 Геометрические фигуры

Опр. Часть пространства, ограниченная со всех сторон, называется **геометрическим телом**.

Опр. Геометрическое тело отделяется от окружающего пространства **поверхностью**.

Опр. Часть поверхности отделяется от смежной части **линией**.

Опр. Часть линии отделяется от смежной части **точкой**.

Геометрические фигуры могут перемещаться в пространстве, не подвергаясь никаким изменениям. Две геометрические фигуры называются **равными**, если перемещением одной из них в пространстве её можно совместить со второй фигурой так, что обе фигуры совместятся во всех своих частях.

1.3 Плоскость.

Из различных поверхностей наиболее знакомая нам есть плоская поверхность, или просто плоскость, представление о которой даёт нам, например, поверхность хорошего оконного стекла или поверхность спокойной воды в пруде.

Укажем следующее *свойство плоскости*: *Всякую часть плоскости можно наложить всеми её точками на другое место этой или другой плоскости, причём накладываемую часть можно предварительно перевернуть другой стороной.*

1.4 Прямая линия

Самой простой линией является прямая. Представление о прямой линии, или просто о прямой, всем хорошо знакомо. Представление о ней даёт туго натянутая нить или луч света, выходящий из малого отверстия. С этим представлением согласуется следующее основное свойство прямой.

Свойство прямой: Через всякие две точки пространства можно провести прямую и притом только одну.

Из этого свойства следует:

Если две прямые наложены одна на другую так, что какие-нибудь две точки одной прямой совпадают с двумя точками другой прямой, то эти прямые сливаются и во всех остальных точках (потому что в противном случае через две точки можно было бы провести две различные прямые, что невозможно).

По той же причине *две прямые могут пересечься только в одной точке.*

Прямая линия может лежать на плоскости. При этом плоскость обладает следующим свойством.

Свойство плоскости: Если на плоскости взять какие-нибудь две точки и провести через них прямую линию, то все точки этой прямой будут находиться в этой плоскости.

1.5 Луч и отрезок

Опр. Если прямую представляют продолженной в обе стороны бесконечно, то её называют **бесконечной** (или **неограниченной**) прямой.

Прямую обозначают обыкновенно двумя большими буквами, поставленными у двух каких-либо её точек. Так, говорят: «прямая AB» или «BA».

Опр. Часть прямой, ограниченная с обеих сторон, называется **отрезком**. Отрезок обыкновенно обозначается двумя буквами, поставленными у его концов. Иногда прямую или отрезок обозначают и одной буквой (малой); например, говорят: «прямая a, отрезок b».

Иногда рассматривают прямую, ограниченную только с одной стороны, например в точке E. О такой прямой говорят, что она исходит из точки E; её называют **лучом** или **полупрямой**.

Опр. **Луч (полупрямая)** — прямая, ограниченная только с одной стороны.

1.6 Равенство и неравенство отрезков

Опр. *Два отрезка равны, если они могут быть наложены один на другой так, что их концы совпадут.*

1.7 Сумма отрезков

Суммой нескольких данных отрезков AB, CD, $EF, \ldots$ называется такой отрезок, который получится следующим образом. На какой-нибудь прямой берём произвольную точку M и откладываем от неё отрезок MN, равный AB, затем от точки N в том же направлении откладываем отрезок NP, равный CD, и отрезок PQ, равный EF. Тогда отрезок MQ и будет суммой отрезков AB, CD и EF (которые по отношению к этой сумме называются слагаемыми). Подобным образом можно получить сумму какого угодно числа отрезков.

Сумма отрезков обладает всеми свойствами суммы чисел; так, она не зависит от порядка слагаемых (переместительный закон) и не изменяется, если некоторые слагаемые будут заменены их суммой (сочетательный закон). Так:

$$AB + CD + EF = AB + EF + CD = EF + CD + AB = \ldots$$

и

$$AB + CD + EF = AB + (CD + EF) = CD + (AB + EF) = \ldots$$

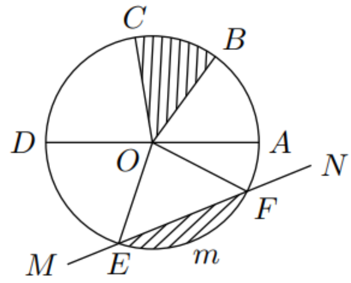
1.8 Действия над отрезками

Из понятия о сумме выводятся понятия о разности отрезков, умножении и делении отрезков на число. Так, разность отрезков AB и CD (если $AB > CD$) есть такой третий отрезок, сумма которого с CD равна AB; произведение отрезка AB на число 3 есть сумма трёх отрезков, из которых каждый равен AB; частное от деления отрезка AB на число 3 есть третья часть AB и так далее.

Если данные отрезки измерены какой-нибудь линейной единицей (например, сантиметром), и длины их выражены соответствующими числами, то длина суммы отрезков выразится суммой чисел, измеряющих эти отрезки, разность выразится разностью чисел и т. д.

1.9 Окружность

Если дадим циркулю произвольный раствор и, поставив одну его ножку остриём в какую-нибудь точку O плоскости, станем вращать циркуль вокруг этой точки, то другая его ножка, снабжённая карандашом или пером, прикасающимся к плоскости, опишет на плоскости непрерывную линию, все точки которой одинаково удалены от точки O. Эта линия называется **окружностью**, и точка O — её **центром**. Отрезки OA, OB, $OC, \ldots$, соединяющие центр с какими-нибудь точками окружности, называются **радиусами**. Все радиусы одной окружности равны между собой.



Окружности, описанные одинаковыми радиусами, равны, так как они при совмещении их центров совмещаются всеми своими точками. Прямая, проходящая через какие-нибудь две точки окружности, называется **секущей**.

Отрезок (EF), соединяющий две какие-нибудь точки окружности, называется **хордой**.

Всякая хорда (AD), проходящая через центр, называется **диаметром**. Диаметр равен сумме двух радиусов, и потому все диаметры одной окружности равны между собой. Какая-нибудь часть окружности (например, EmF) называется **дугой**.

О хорде (EF), соединяющей концы какой-нибудь дуги, говорят, что она **стягивает** эту дугу.

Дуга обозначается иногда знаком $\smile$; например, вместо «дуга EmF» пишут «$\smile EmF$». Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом**[1].

Часть круга, заключённая между двумя радиусами, называется **сектором**, а часть, отсекаемая от круга какой-нибудь секущей (часть EmF), называется **сегментом**.

1.10 Равенство и неравенство дуг

Две дуги одной и той же окружности (или равных окружностей) равны между собой, если они могут быть совмещены так, что их концы совпадут. Допустим, например, что мы накладываем дугу AB на дугу CD так, чтобы точка A совпала с точкой C и дуга AB пошла по дуге CD; если при этом концы B и D совпадут, то совпадут и все промежуточные точки этих дуг, так как они находятся на одинаковом расстоянии от центра, значит, $\smile AB = \smile CD$; если же B и D не совпадут, то дуги не равны, причём та считается меньше, которая составит часть другой.

1.11 Сумма дуг

Суммой нескольких данных дуг одинакового радиуса называется такая дуга того же радиуса, которая составлена из частей, соответственно равных данным дугам. Так, если от произвольной точки M окружности отложим часть MN, равную AB, и затем от точки N в том же направлении отложим часть NP, равную CD, то дуга MP будет суммой дуг AB и CD. Подобно этому можно составить сумму трёх и более дуг.

При сложении дуг одинакового радиуса их сумма может не уместиться на одной окружности, одна из дуг может частично покрыть другую. В таком случае суммой дуг будет являться дуга, бо́льшая целой окружности.

Сумма дуг, как и сумма отрезков, обладает свойствами **переместительным** и **сочетательным**.

Из понятия о сумме дуг выводятся понятия о разности дуг, умножении и делении дуги на число, так же как и для отрезков.

[1]Иногда слово «круг» употребляют в том же смысле, как и окружность. Но этого следует избегать, так как употребление одного и того же термина для разных понятий может приводить к ошибкам.

Практика

1. На прямой последовательно откладываются точки A, B, C, D, E и F, причем $AB = BC = CD = DE = EF$. Найдите отношения длин отрезков $AD : DF$, $AC : AF$, $BD : CF$
2. Точка M — середина отрезка AB, а точка N — середина отрезка MB. Найдите отношения $AM : MN$, $BN : AM$ и $MN : AB$.
3. Точка K отрезка AB, равного 12, расположена на 5 ближе к A, чем к B. Найдите AK и BK.
4. На прямой выбраны четыре точки A, B, CD, причем $AB = 1, BC = 2, CD = 4$. Чему может быть равно AD? Укажите все возможные варианты.
5. На линейке отмечены три деления: 0, 2 и 5. Как отложить с ее помощью отрезок длиной 6?
6. Точка B лежит на отрезке AC длиной 5. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и BC.
7. Даны точки A и B. Где на прямой AB расположены точки, расстояние от которых до точки A больше, чем до точки B?
8. Один из двух смежных углов на 30° больше другого. Найдите эти углы.
9. Докажите, что биссектрисы двух смежных углов перпендикулярны.