

Занятие №1

- 1** Докажите, что в равных треугольниках соответствующие медианы равны.
- 2** Периметр прямоугольника равен 42, а площадь 98. Найдите большую сторону прямоугольника.
- 3** Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.
- 4** Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой AC . Образовавшиеся при этом три угла с вершиной B относятся как $3 : 10 : 5$. Найдите углы треугольника ABC .
- 5** Углы треугольника относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите отношение внешних углов треугольника.
- 6** Внешние углы треугольника ABC при вершинах A и C равны 115° и 140° . Прямая, параллельная прямой AC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N . Найдите углы треугольника BMN .
- 7** Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке M . При этом $BM = AB$, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle CAM = 15^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .
- 8** Дан треугольник с периметром, равным 24. Найдите периметр треугольника с вершинами в серединах сторон данного.
- 9** Острые углы прямоугольного треугольника равны 81° и 9° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.
- 10** В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M , причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите $\angle MCK$.

Занятие №2

1 Упростить выражение:

1) $\frac{a-1}{2a+2} + \frac{a+1}{3-3a} + \frac{5a^3-1}{3a^2-3}$

2) $\left(\frac{2}{a-2} - \frac{8}{a^2-4} + \frac{-1}{a+2} \right) \cdot (a^2+4a+4)$

2 Докажите, что если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

3 Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

4 Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник является прямоугольным.

5 Докажите обратное, что если треугольник прямоугольный и вписан в окружность, то гипотенуза будет являться диаметром окружности.

6 Докажите, что окружность, построенная на стороне равностороннего треугольника как на диаметре, проходит через середины двух других сторон треугольника.

7 Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° . Докажите, что высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, делят прямой угол на три равные части.

8 На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$ (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки), P – середина KD . Докажите, что $CP \perp AB$.

Домашняя работа №1

1 Упростить выражение:

1) $\left(x + \frac{3 - x^2}{x + 1}\right) : \frac{x + 3}{1 - x^2}$

2) $\left(\frac{2}{a - 2} - \frac{8}{a^2 - 4} + \frac{-1}{a + 2}\right) \cdot (a^2 + 4a + 4)$

2 Вычислить:

1) $\frac{(4\sqrt{7} + \sqrt{32})^2}{18 + 2\sqrt{56}}$

2) $\frac{5^{-5} \cdot 25^{10}}{125^3}$

3 Докажите, что в равных треугольниках соответствующие биссектрисы равны.

4 На продолжениях гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC за точки A и B соответственно взяты точки K и M , причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол $МКК$.

5 Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.

6 На стороне AB квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник ABM . Найдите угол DMC .

Занятие №3

- 1** Докажите следующие свойства окружности:
- 1) диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам;
 - 2) диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде;
 - 3) хорды, удаленные от центра окружности на равные расстояния, равны.
- 2** Через точку A окружности с центром O проведены диаметр AB и хорда AC . Докажите, что угол BAC вдвое меньше угла BOC (без использования свойств центральных и вписанных углов).
- 3** Найдите угол между радиусами OA и OB , если расстояние от центра O окружности до хорды AB вдвое меньше AB .
- 4** Даны две concentric окружности и пересекающая их прямая. Докажите, что отрезки этой прямой, заключенные между окружностями, равны.
- 5** Прямая, проходящая через общую точку A двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках B и C соответственно. Расстояние между проекциями центров окружностей на эту прямую равно 12. Найдите BC , если известно, что точка A лежит на отрезке BC .
- 6** Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.
- 7** На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$ (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки), P – середина KD . Докажите, что $CP \perp AB$.
- 8** Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1, один из острых углов равен 15° . Найдите гипотенузу.
- 9** В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M , причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите $\angle MCK$.

Занятие №4

- 1** Внутренние углы треугольника ABC относятся как $10 : 5 : 3$. Найдите внутренние и внешние углы треугольника ABC и вычислите разницу самого наибольшего и наименьшего внешних углов.
- 2** В треугольнике ABC углы B и C равны 30 и 40 соответственно. Сторону AB продлили за вершину A и из этой вершины провели высоту и биссектрису внешнего угла. Найдите угол между высотой и биссектрисой.
- 3** Две параллельные прямые пересечены третьей. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов.
- 4** Угол между радиусами OA и OB окружности равен 60° . Найдите хорду AB , если радиус окружности равен 12 .
- 5** Дана окружность с центром O . На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC , равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (D – точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$.
- 6** В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M на расстояние, равное AM . Найдите расстояние от полученной точки до вершин B и C , если $AB = 7$, $AC = 11$.
- 7** Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной 10 , проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.
- 8** Решить уравнение:

1) $2x^4 + 3x^3 + 16x = -24$

2) $(x + 3)^3 = 100(x + 3)$

- 1

Через точку на окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.
- 2

Найдите угол между радиусами OA и OB , если расстояние от центра O окружности до хорды AB вдвое меньше OA .
- 3

На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K . Найдите CK , если $AC = 2$ и $\angle A = 30^\circ$.
- 4

Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что треугольник равнобедренный.
- 5

Продолжения равных хорд AB и CD окружности соответственно за точки B и C пересекаются в точке P . Докажите, что треугольники APD и BPC равнобедренные.
- 6

На стороне AB квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник ABM . Найдите угол DMC .
- 7

В треугольнике ABC угол $\angle B = 80$. Найдите угол между высотами проведенными из двух других углов.
- 8

Решить уравнение:

1) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$

2) $(x + 7)^3 = 25(x + 7)$

Занятие №5

- 1** Докажите, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.
- 2** Через точку M проведены две касательные MA и MB к окружности (A и B – точки касания). Докажите, что $MA = MB$.
- 3** Расстояние от точки M до центра O окружности равно диаметру. Через точку M проведены две прямые, касающиеся окружности в точках A и B . Найдите углы треугольника AOB .
- 4** Точки A и B лежат на окружности. Касательные к окружности, проведенные через эти точки, пересекаются в точке C . Найдите углы треугольника ABC , если $AB = AC$.
- 5** В прямой угол вписана окружность радиуса 12, касающаяся сторон угла в точках A и B . Через некоторую точку на меньшей дуге AB окружности проведена касательная, отсекающая от данного угла треугольник. Найдите его периметр.
- 6** Прямая касается окружности с центром O в точке A . Точка C на этой прямой и точка D на окружности расположены по одну сторону от прямой OA . Докажите, что угол CAD вдвое меньше угла AOD .
- 7** Вычислить:

$$\frac{6 \cdot 2^8 - 9 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^{12}}{4 \cdot 2^{10} + 4 \cdot 2^{12} - 8 \cdot 2^{11}}$$

- 8** Решить уравнение:

$$\frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{4x + 2}{3x - 2}$$

Занятие №6

- 1** Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на его биссектрисе.
- 2** Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC . В треугольник ABD и ACD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 . Докажите, что отрезок O_1O_2 виден из точки D под прямым углом.
- 3** К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной, равной 8, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 4** Прямая, параллельная хорде AB , касается окружности в точке C . Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- 5** Две прямые, пересекающиеся в точке C , касаются окружности в точках A и B . Известно, что $\angle ACB = 120^\circ$. Докажите, что сумма отрезков AC и BC равна отрезку OC .
- 6** Пусть r – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c . Докажите, что $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.
- 7** Найти значение выражения $47a - 7b + 38$, если $\frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 7$

Домашняя работа №3

- 1** Хорда большей из двух концентрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.
- 2** Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C . Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.
- 3** К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной 4, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 4** Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.

Подготовка к проверочной работе

- 1** Чему равен угол между биссектрисами двух смежных углов?
- 2** Чему равен угол между биссектрисами двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых? Докажите это.
- 3** Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.
- 4** Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, параллельна основанию.
- 5** Докажите, что если в треугольнике один угол равен сумме двух других, то такой треугольник прямоугольный.
- 6** Докажите, что если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то такой треугольник прямоугольный.
- 7** Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник прямоугольный.
- 8** Сформулируйте теорему об угле в 30° в прямоугольном треугольнике. Сформулируйте обратную теорему.
- 9** Сформулируйте теорему о диаметре, перпендикулярном хорде.
- 10** Сформулируйте теорему о диаметре, проходящем через середину хорды.
- 11** Где лежит центр вписанной в треугольник окружности?
- 12** Сформулируйте теорему о двух касательных, проведенных из одной точки к окружности.
- 13** Чему равна сумма всех внешних углов треугольника?
- 14** Докажите, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.
- 15** В треугольнике ABC обе стороны AB и BC равны 15. Чему равна сторона AC , если $\angle BAC = 60^\circ$?
- 16** В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 50$ и $\angle B = 80$. Найдите сторону BC , если $AC = 10$ и $P_{ABC} = 40$.
- 17** Угол между биссектрисами двух углов треугольника равен 120° . Чему равен третий угол треугольника?
- 18** Угол треугольника равен 50° . Найдите угол между высотами, проведенными из двух других углов.
- 19** В треугольнике ABC угол $\angle B = 60^\circ$. Найдите угол между биссектрисами двух других внешних углов.
- 20** Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.
- 21** Продолжения равных хорд AB и CD окружности соответственно за точки B и C пересекаются в точке P . Докажите, что треугольники APD и BPC равнобедренные.

- 22** Хорда большей из двух concentрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.
- 23** Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C . Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.
- 24** К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной 4, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 25** Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.
- 26** В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M на расстояние, равное AM . Найдите расстояние от полученной точки до вершин B и C , если $AB = 5$, $AC = 12$.
- 27** Дана окружность с центром O . На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC , равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (D – точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$.
- 28** Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной 10, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.

Проверочная работа**Вариант 1**

- 1** 1) Чему равен угол между биссектрисами двух смежных углов?
2) Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.
3) Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, параллельна основанию.
4) Докажите, что если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то такой треугольник прямоугольный.
5) Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник прямоугольный.
6) Сформулируйте теорему об угле в 30° в прямоугольном треугольнике. Сформулируйте обратную теорему.
7) Сформулируйте теорему о диаметре, проходящем через середину хорды.
8) Где лежит центр вписанной в треугольник окружности?
- 2** В треугольнике ABC обе стороны AB и BC равны 15. Чему равна сторона AC , если $\angle BAC = 60^\circ$?
- 3** В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 50$ и $\angle B = 80$. Найдите сторону BC , если $AC = 16$ и $P_{ABC} = 40$.
- 4** Угол между биссектрисами двух углов треугольника равен 100° . Чему равен третий угол треугольника?
- 5** Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.
- 6** Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C . Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.
- 7** В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M на расстояние, равное AM . Найдите расстояние от полученной точки до вершин B и C , если $AB = 5$, $AC = 12$.
- 8** К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной 4, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

Проверочная работа**Вариант 2**

- 1** 1) Чему равен угол между биссектрисами двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых?
- 2) Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.
- 3) Докажите, что если в треугольнике один угол равен сумме двух других, то такое треугольник прямоугольный.
- 4) Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник прямоугольный.
- 5) Сформулируйте теорему об угле в 30° в прямоугольном треугольнике. Сформулируйте обратную теорему.
- 6) Сформулируйте теорему о диаметре, перпендикулярном хорде.
- 7) Сформулируйте теорему о двух касательных, проведенных из одной точки к окружности.
- 2** В треугольнике ABC обе стороны AB и BC равны 30. Чему равна сторона AC , если $\angle BAC = 60^\circ$?
- 3** В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 50$ и $\angle B = 80$. Найдите сторону BC , если $AC = 20$ и $P_{ABC} = 50$.
- 4** Угол треугольника равен 80° . Найдите угол между высотами, проведенными из двух других углов.
- 5** Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.
- 6** Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C . Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.
- 7** В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M на расстояние, равное AM . Найдите расстояние от полученной точки до вершин B и C , если $AB = 5$, $AC = 12$.
- 8** Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной 10, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.