

1 Треугольники

1.1 Признаки равенства треугольников

1. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK . Найдите AB , если $BC = 12$.
2. Прямая, проведенная через вершину A треугольника ABC перпендикулярно его медиане BD , делит эту медиану пополам. Найдите отношение сторон AB и AC .
3. Стороны равностороннего треугольника делятся точками K, L, M в одном и том же отношении (считая по часовой стрелке). Докажите, что треугольник KLM также равносторонний.
4. Докажите, что в равных треугольниках соответствующие медианы равны.
5. Докажите, что в равных треугольниках соответствующие биссектрисы равны.
6. Докажите, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, является также медианой и высотой.
7. Медиана треугольника является также его высотой. Докажите, что такой треугольник равнобедренный.
8. В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M на расстояние, равное AM . Найдите расстояние от полученной точки до вершин B и C , если $AB = 7$, $AC = 11$.
9. Биссектриса треугольника является его медианой. Докажите, что треугольник равнобедренный.
10. Докажите признаки равенства прямоугольных треугольников:
 - а) по двум катетам;
 - б) по катету и гипотенузе;
 - в) по катету и прилежащему острому углу;
 - г) по гипотенузе и острому углу.
11. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку есть геометрическое место точек, равноудаленных от концов этого отрезка.
12. Две различные окружности пересекаются в точках A и B . Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, делит отрезок AB пополам и перпендикулярна ему.
13. Две различные окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает отрезок AB в точке K . Докажите, что треугольники O_1KA и O_1KB равны.
14. Докажите признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу.
15. Докажите, что в равных треугольниках соответствующие высоты равны между собой.
16. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку является его осью симметрии.
17. Докажите, что диагонали четырехугольника с равными сторонами взаимно перпендикулярны.
18. Точки M и N — середины равных сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P . Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку MN проходит через точку P .
19. Две высоты треугольника равны между собой. Докажите, что треугольник равнобедренный.
20. Высоты треугольника ABC , проведенные из вершин B и C , пересекаются в точке M . Известно, что $BM = CM$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
21. Найдите геометрическое место внутренних точек угла, равноудаленных от его сторон.
22. Докажите, что биссектриса угла является его осью симметрии.
23. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC , пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB , если $BM = 8$, $KC = 1$.
24. Через данную точку проведите прямую, пересекающую две данные прямые под равными углами.

25. Площадь прямоугольника равна 24. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах сторон прямоугольника.
26. Средняя линия треугольника разбивает его на треугольник и четырехугольник. Какую часть составляет площадь полученного треугольника от площади исходного?
27. Докажите, что медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.
28. Точки, делящие сторону треугольника на n равных частей, соединены отрезками с противоположной вершиной. Докажите, что при этом треугольник также разделился на n равновеликих частей.
29. Пусть M — точка на стороне AB треугольника ABC , причем $AM : MB = m : n$. Докажите, что площадь треугольника CAM относится к площади треугольника CBM как $m : n$.
30. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями равна половине произведения диагоналей.
31. На сторонах AB и AC треугольника ABC , площадь которого равна 50, взяты соответственно точки M и K так, что $AM : MB = 1 : 5$, а $AK : KC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника AMK .
32. Вершины одного квадрата расположены на сторонах другого и делят эти стороны в отношении $1 : 2$, считая по часовой стрелке. Найдите отношение площадей квадратов.
- 755 Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° , а гипотенуза равна 8. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла.
- 758 Угол треугольника равен сумме двух других углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.
- 759 Медиана, проведенная в треугольнике ABC из угла A , равна половине стороны, к которой проведена. Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.
- 760 Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник может быть только прямоугольным.
- 761 Докажите, что внешний угол треугольника равен сумме двух углов, не смежных с ним.
- 809 Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий напротив угла 30° , равен половине гипотенузы. ?
- 810 Катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы. Докажите, что угол, противолежащий этому катету, равен 30° . ?
- 811 Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° . Докажите, что высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, делят его на три равные части. ?
- 812 В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30° . Докажите, что в этом треугольнике отрезок перпендикуляра, проведенного к гипотенузе через его середину до пересечения с катетом, вдвое меньше большего катета. ?
- 813 Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1. Один из острых углов равен 15° . Найдите длину гипотенузы. ?
- 814 Две различные окружности пересекаются в точках A и B . Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, делит отрезок AB пополам и перпендикулярна ему. ?
- 815 Две окружности пересекаются в точках A и B , AM и AN — диаметры окружностей. Докажите, что точки M , N , B лежат на одной прямой. ?

816 На продолжениях гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC за точки A и B соответственно взяты точки K и M , причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите $\angle MCK$.

?

817 В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M , причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите $\angle MCK$.

45

818 На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL . Докажите, что треугольник AKL правильный.

1.2 Параллельность

1.3 Окружность