

Занятие №1

- 1** Докажите, что в равных треугольниках соответствующие медианы равны.
- 2** Периметр прямоугольника равен 42, а площадь 98. Найдите большую сторону прямоугольника.
- 3** Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.
- 4** Внешние углы треугольника ABC при вершинах A и C равны 115° и 140° . Прямая, параллельная прямой AC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N . Найдите углы треугольника BMN .
- 5** Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой AC . Образовавшиеся при этом три угла с вершиной B относятся как $3 : 10 : 5$. Найдите углы треугольника ABC .
- 6** Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке M . При этом $BM = AB$, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle CAM = 15^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .
- 7** Дан треугольник с периметром, равным 24. Найдите периметр треугольника с вершинами в серединах сторон данного.
- 8** Острые углы прямоугольного треугольника равны 81° и 9° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.
- 9** В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M , причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите $\angle MCK$.
- 10** Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC , пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB , если $BM = 8$, $KC = 1$.

Занятие №2

1 Найти значение выражения:

$$61a - 11b + 50, \quad \text{если } \frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9.$$

2 Докажите, что если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

3 Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

4 Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник является прямоугольным.

5 Докажите обратное, что если треугольник прямоугольный и вписан в окружность, то гипотенуза будет являться диаметром окружности.

6 Докажите, что окружность, построенная на стороне равностороннего треугольника как на диаметре, проходит через середины двух других сторон треугольника.

7 Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° . Докажите, что высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, делят прямой угол на три равные части.

8 На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$ (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки), P – середина KD . Докажите, что $CP \perp AB$.

Домашняя работа №1

1 Упростить выражение:

$$\left(\frac{1}{x+2} + \frac{5}{x^2-x-6} + \frac{2x}{x-3} \right) \cdot \frac{x}{2x+1} - \frac{x-9}{2(3-x)}$$

2 Найти значение выражения:

$$\frac{a}{b}, \quad \text{если} \quad \frac{2a+5b}{5a+2b} = 1.$$

3 Упростить выражение:

$$(2\sqrt{5} - \sqrt{15})(\sqrt{15} + 2\sqrt{5}) - (\sqrt{10} - 5\sqrt{2})^2$$

4 Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° , а гипотенуза равна 8. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла.

5 Докажите, что высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, вдвое меньше гипотенузы.

6 Биссектрисы двух углов треугольника пересекаются под углом 110° . Найдите третий угол треугольника.

Занятие №3

- 1** Докажите следующие свойства окружности:
- 1) диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам;
 - 2) диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде;
 - 3) окружность симметрична относительно каждого своего диаметра;
 - 4) дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны;
 - 5) хорды, удаленные от центра окружности на равные расстояния, равны.
- 2** Через точку A окружности с центром O проведены диаметр AB и хорда AC . Докажите, что угол BAC вдвое меньше угла BOC .
- 3** Найдите угол между радиусами OA и OB , если расстояние от центра O окружности до хорды AB вдвое меньше AB .
- 4** Даны две концентрические окружности и пересекающая их прямая. Докажите, что отрезки этой прямой, заключенные между окружностями, равны.
- 5** Прямая, проходящая через общую точку A двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках B и C соответственно. Расстояние между проекциями центров окружностей на эту прямую равно 12. Найдите BC , если известно, что точка A лежит на отрезке BC .
- 6** Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

Занятие №4

- 1** Угол между радиусами OA и OB окружности равен 60° . Найдите хорду AB , если радиус окружности равен R .
- 2** Дана окружность с центром O . На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC , равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (D – точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$.
- 3** Равные хорды окружности с центром O пересекаются в точке M . Докажите, что MO – биссектриса угла между ними.
- 4** Продолжения хорд AB и CD окружности с диаметром AD пересекаются под углом 25° . Найдите острый угол между хордами AC и BD .
- 5** Докажите, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC , точки B и C , а также точка пересечения биссектрис внешних углов с вершинами B и C лежат на одной окружности.

Домашняя работа №2

- 1** Упростить выражение:

$$1 : \left(\frac{a}{a-b} + \frac{4a^2b - ab^2}{b^3 - a^3} + \frac{b^2}{a^2 + ab + b^2} \right) - \frac{-3ab}{(a-b)^2}$$

- 2** Упростить и найти значение выражения:

$$\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + 4x \right) \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right), \quad \text{если } x = 5\frac{1}{3}$$

- 3** Через точку на окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

- 4** Найдите угол между радиусами OA и OB , если расстояние от центра O окружности до хорды AB вдвое меньше OA .

- 5** Найдите угол между радиусами OA и OB , если расстояние от центра O окружности до хорды AB вдвое меньше OA .

- 6** На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K . Найдите CK , если $AC = 2$ и $\angle A = 30^\circ$.

- 7** Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

- 8** Продолжения равных хорд AB и CD окружности соответственно за точки B и C пересекаются в точке P . Докажите, что треугольники APD и BPC равнобедренные.