

Занятие 08.05

1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = 64, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 289. \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$$a \in \{-28\} \cup (-24; -8] \cup [8; 24) \cup \{28\}$$

2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 5|x| - 12|y| = 5, \\ x^2 + y^2 - 28x + 196 - a^2 = 0. \end{cases}$$

имеет два или три различных решения.

$$a \in \{5\} \cup [13; 15]$$

3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3|x - 2a| + 2|y - a| = 6, \\ xy - x - 2y + 2 = 0. \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

$$a \in \{2; \frac{1}{4}; \frac{1}{7}; 0\}$$

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - xy + y^2)(x^2 - 36) \geq 0, \\ |x - 2 + y| + |x - 2 - y| \leq a. \end{cases}$$

$$a \in [4; 8)$$

5. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$

- а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

$$30^\circ$$

6. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

- а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .

$$\arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$$

7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Точка M — середина ребра A_1C_1 , а точка O — точка пересечения диагоналей боковой грани ABB_1A_1 .

- Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, являющегося сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью AMB , лежит на отрезке OC_1 .
- Найдите угол между прямой OC_1 и плоскостью AMB .

$$\arcsin \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$$

8. В правильной треугольной призме ${}_1B_1C_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро ${}_1$ равно 3. На ребре отмечена точка так, что ${}_1 = 1$. Точки ${}_1$ и L — середины рёбер ${}_1$ и ${}_1$ соответственно. Плоскость α параллельна прямой ${}_1$ и содержит точки ${}_1$ и L .

- Докажите, что прямая перпендикулярна плоскости α .
- Найдите расстояние от точки ${}_1$ до плоскости α .

$$\frac{3}{4}$$

9. Длина диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 3. На луче $A_1 C$ отмечена точка P так, что $A_1 P = 4$.

- Докажите, что $PBDC_1$ — правильный тетраэдр.
- Найдите длину отрезка AP .

$$\sqrt{11}$$

10. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $SA = 7$. Точка M лежит на ребре BC , причем $BM = 1$, точка K лежит на ребре SC , причем $SK = 4$.

- Докажите, что плоскость MKD перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- Найдите объем пирамиды $CDKM$.

$$\frac{9\sqrt{11}}{7}$$