

**Занятие №1**

- 1** Докажите, что в равных треугольниках соответствующие медианы равны.
- 2** Периметр прямоугольника равен 42, а площадь 98. Найдите большую сторону прямоугольника.
- 3** Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.
- 4** Через вершину  $B$  треугольника  $ABC$  проведена прямая, параллельная прямой  $AC$ . Образовавшиеся при этом три угла с вершиной  $B$  относятся как 3 : 10 : 5. Найдите углы треугольника  $ABC$ .
- 5** Углы треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите отношение внешних углов треугольника.
- 6** Внешние углы треугольника  $ABC$  при вершинах  $A$  и  $C$  равны  $115^\circ$  и  $140^\circ$ . Прямая, параллельная прямой  $AC$ , пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ . Найдите углы треугольника  $BMN$ .
- 7** Прямая, проходящая через вершину  $A$  треугольника  $ABC$ , пересекает сторону  $BC$  в точке  $M$ . При этом  $BM = AB$ ,  $\angle BAM = 35^\circ$ ,  $\angle CAM = 15^\circ$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .
- 8** Дан треугольник с периметром, равным 24. Найдите периметр треугольника с вершинами в серединах сторон данного.
- 9** Острые углы прямоугольного треугольника равны  $81^\circ$  и  $9^\circ$ . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.
- 10** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на гипотенузе  $AB$  взяты точки  $K$  и  $M$ , причем  $AK = AC$  и  $BM = BC$ . Найдите  $\angle MCK$ .

**Занятие №2**

- 1** Упростить выражение:
- 1)  $\frac{a-1}{2a+2} + \frac{a+1}{3-3a} + \frac{5a^3-1}{3a^2-3}$                       2)  $\left(\frac{2}{a-2} - \frac{8}{a^2-4} + \frac{-1}{a+2}\right) \cdot (a^2+4a+4)$
- 2** Докажите, что если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.
- 3** Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.
- 4** Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник является прямоугольным.
- 5** Докажите обратное, что если треугольник прямоугольный и вписан в окружность, то гипотенуза будет являться диаметром окружности.
- 6** Докажите, что окружность, построенная на стороне равностороннего треугольника как на диаметре, проходит через середины двух других сторон треугольника.
- 7** Острый угол прямоугольного треугольника равен  $30^\circ$ . Докажите, что высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, делят прямой угол на три равные части.
- 8** На катетах  $AC$  и  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  вне его построены квадраты  $ACDE$  и  $CBFK$  (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки),  $P$  – середина  $KD$ . Докажите, что  $CP \perp AB$ .

**Домашняя работа №1**

**1** Упростить выражение:

1)  $\left(x + \frac{3 - x^2}{x + 1}\right) : \frac{x + 3}{1 - x^2}$

2)  $\left(\frac{2}{a - 2} - \frac{8}{a^2 - 4} + \frac{-1}{a + 2}\right) \cdot (a^2 + 4a + 4)$

**2** Вычислить:

1)  $\frac{(4\sqrt{7} + \sqrt{32})^2}{18 + 2\sqrt{56}}$

2)  $\frac{5^{-5} \cdot 25^{10}}{125^3}$

**3** Докажите, что в равных треугольниках соответствующие биссектрисы равны.

**4** На продолжениях гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  за точки  $A$  и  $B$  соответственно взяты точки  $K$  и  $M$ , причем  $AK = AC$  и  $BM = BC$ . Найдите угол  $MCK$ .

**5** Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.

**6** На стороне  $AB$  квадрата  $ABCD$  построен равносторонний треугольник  $ABM$ . Найдите угол  $DMC$ .

**Занятие №3**

- 1** Докажите следующие свойства окружности:
- 1) диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам;
  - 2) диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде;
  - 3) хорды, удаленные от центра окружности на равные расстояния, равны.
- 2** Через точку  $A$  окружности с центром  $O$  проведены диаметр  $AB$  и хорда  $AC$ . Докажите, что угол  $BAC$  вдвое меньше угла  $BOC$  (без использования свойств центральных и вписанных углов).
- 3** Найдите угол между радиусами  $OA$  и  $OB$ , если расстояние от центра  $O$  окружности до хорды  $AB$  вдвое меньше  $AB$ .
- 4** Даны две концентрические окружности и пересекающая их прямая. Докажите, что отрезки этой прямой, заключенные между окружностями, равны.
- 5** Прямая, проходящая через общую точку  $A$  двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках  $B$  и  $C$  соответственно. Расстояние между проекциями центров окружностей на эту прямую равно 12. Найдите  $BC$ , если известно, что точка  $A$  лежит на отрезке  $BC$ .
- 6** Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.
- 7** На катетах  $AC$  и  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  вне его построены квадраты  $ACDE$  и  $CBFK$  (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки),  $P$  – середина  $KD$ . Докажите, что  $CP \perp AB$ .
- 8** Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1, один из острых углов равен  $15^\circ$ . Найдите гипотенузу.
- 9** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на гипотенузе  $AB$  взяты точки  $K$  и  $M$ , причем  $AK = AC$  и  $BM = BC$ . Найдите  $\angle MCK$ .

**Занятие №4**

- 1** Внутренние углы треугольника  $ABC$  относятся как  $10 : 5 : 3$ . Найдите внутренние и внешние углы треугольника  $ABC$  и вычислите разницу самого наибольшего и наименьшего внешних углов.
- 2** В треугольнике  $ABC$  углы  $B$  и  $C$  равны  $30$  и  $40$  соответственно. Сторону  $AB$  продлили за вершину  $A$  и из этой вершины провели высоту и биссектрису внешнего угла. Найдите угол между высотой и биссектрисой.
- 3** Две параллельные прямые пересечены третьей. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов.
- 4** Угол между радиусами  $OA$  и  $OB$  окружности равен  $60^\circ$ . Найдите хорду  $AB$ , если радиус окружности равен  $12$ .
- 5** Дана окружность с центром  $O$ . На продолжении хорды  $AB$  за точку  $B$  отложен отрезок  $BC$ , равный радиусу. Через точки  $C$  и  $O$  проведена секущая  $CD$  ( $D$  – точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка  $CO$ ). Докажите, что  $\angle AOD = 3\angle ACD$ .
- 6** В треугольнике  $ABC$  медиана  $AM$  продолжена за точку  $M$  на расстояние, равное  $AM$ . Найдите расстояние от полученной точки до вершин  $B$  и  $C$ , если  $AB = 7$ ,  $AC = 11$ .
- 7** Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной  $10$ , проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.
- 8** Решить уравнение:

1)  $2x^4 + 3x^3 + 16x = -24$

2)  $(x + 3)^3 = 100(x + 3)$

**Домашняя работа №2**

- 1** Через точку на окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.
- 2** Найдите угол между радиусами  $OA$  и  $OB$ , если расстояние от центра  $O$  окружности до хорды  $AB$  вдвое меньше  $OA$ .
- 3** На катете  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу  $AB$  в точке  $K$ . Найдите  $CK$ , если  $AC = 2$  и  $\angle A = 30^\circ$ .
- 4** Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что треугольник равнобедренный.
- 5** Продолжения равных хорд  $AB$  и  $CD$  окружности соответственно за точки  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что треугольники  $APD$  и  $BPC$  равнобедренные.
- 6** На стороне  $AB$  квадрата  $ABCD$  построен равносторонний треугольник  $ABM$ . Найдите угол  $DMC$ .
- 7** В треугольнике  $ABC$  угол  $\angle B = 80$ . Найдите угол между высотами проведенными из двух других углов.
- 8** Решить уравнение:

1)  $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$

2)  $(x + 7)^3 = 25(x + 7)$

**Занятие №5**

- 1** Докажите, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.
- 2** Через точку  $M$  проведены две касательные  $MA$  и  $MB$  к окружности ( $A$  и  $B$  – точки касания). Докажите, что  $MA = MB$ .
- 3** Расстояние от точки  $M$  до центра  $O$  окружности равно диаметру. Через точку  $M$  проведены две прямые, касающиеся окружности в точках  $A$  и  $B$ . Найдите углы треугольника  $AOB$ .
- 4** Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности. Касательные к окружности, проведенные через эти точки, пересекаются в точке  $C$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если  $AB = AC$ .
- 5** В прямой угол вписана окружность радиуса 12, касающаяся сторон угла в точках  $A$  и  $B$ . Через некоторую точку на меньшей дуге  $AB$  окружности проведена касательная, отсекающая от данного угла треугольник. Найдите его периметр.
- 6** Прямая касается окружности с центром  $O$  в точке  $A$ . Точка  $C$  на этой прямой и точка  $D$  на окружности расположены по одну сторону от прямой  $OA$ . Докажите, что угол  $CAD$  вдвое меньше угла  $AOD$ .
- 7** Вычислить:

$$\frac{6 \cdot 2^8 - 9 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^{12}}{4 \cdot 2^{10} + 4 \cdot 2^{12} - 8 \cdot 2^{11}}$$

- 8** Решить уравнение:

$$\frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{4x + 2}{3x - 2}$$

**Занятие №6**

- 1** Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на его биссектрисе.
- 2** Точка  $D$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . В треугольник  $ABD$  и  $ACD$  вписаны окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$ . Докажите, что отрезок  $O_1O_2$  виден из точки  $D$  под прямым углом.
- 3** К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной, равной 8, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 4** Прямая, параллельная хорде  $AB$ , касается окружности в точке  $C$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.
- 5** Две прямые, пересекающиеся в точке  $C$ , касаются окружности в точках  $A$  и  $B$ . Известно, что  $\angle ACB = 120^\circ$ . Докажите, что сумма отрезков  $AC$  и  $BC$  равна отрезку  $OC$ .
- 6** Пусть  $r$  – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами  $a$  и  $b$  и гипотенузой  $c$ . Докажите, что  $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ .
- 7** Найти значение выражения  $47a - 7b + 38$ , если  $\frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 7$



**Домашняя работа №3**

- 1** Хорда большей из двух концентрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.
- 2** Две прямые касаются окружности с центром  $O$  в точках  $A$  и  $B$  и пересекаются в точке  $C$ . Найдите угол между этими прямыми, если  $\angle ABO = 40^\circ$ .
- 3** К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной 4, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 4** Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.

**Подготовка к проверочной работе**

- 1** Чему равен угол между биссектрисами двух смежных углов?
- 2** Чему равен угол между биссектрисами двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых? Докажите это.
- 3** Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.
- 4** Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, параллельна основанию.
- 5** Докажите, что если в треугольнике один угол равен сумме двух других, то такой треугольник прямоугольный.
- 6** Докажите, что если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то такой треугольник прямоугольный.
- 7** Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник прямоугольный.
- 8** Сформулируйте теорему об угле в  $30^\circ$  в прямоугольном треугольнике. Сформулируйте обратную теорему.
- 9** Сформулируйте теорему о диаметре, перпендикулярном хорде.
- 10** Сформулируйте теорему о диаметре, проходящем через середину хорды.
- 11** Где лежит центр вписанной в треугольник окружности?
- 12** Сформулируйте теорему о двух касательных, проведенных из одной точки к окружности.
- 13** Чему равна сумма всех внешних углов треугольника?
- 14** Докажите, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.
- 15** В треугольнике  $ABC$  обе стороны  $AB$  и  $BC$  равны 15. Чему равна сторона  $AC$ , если  $\angle BAC = 60^\circ$ ?
- 16** В треугольнике  $ABC$  известно, что  $\angle A = 50$  и  $\angle B = 80$ . Найдите сторону  $BC$ , если  $AC = 10$  и  $P_{ABC} = 40$ .
- 17** Угол между биссектрисами двух углов треугольника равен  $120^\circ$ . Чему равен третий угол треугольника?
- 18** Угол треугольника равен  $50^\circ$ . Найдите угол между высотами, проведенными из двух других углов.
- 19** В треугольнике  $ABC$  угол  $\angle B = 60^\circ$ . Найдите угол между биссектрисами двух других внешних углов.
- 20** Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.
- 21** Продолжения равных хорд  $AB$  и  $CD$  окружности соответственно за точки  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что треугольники  $APD$  и  $BPC$  равнобедренные.

- 22** Хорда большей из двух concentрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.
- 23** Две прямые касаются окружности с центром  $O$  в точках  $A$  и  $B$  и пересекаются в точке  $C$ . Найдите угол между этими прямыми, если  $\angle ABO = 40^\circ$ .
- 24** К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной 4, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 25** Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.
- 26** В треугольнике  $ABC$  медиана  $AM$  продолжена за точку  $M$  на расстояние, равное  $AM$ . Найдите расстояние от полученной точки до вершин  $B$  и  $C$ , если  $AB = 5$ ,  $AC = 12$ .
- 27** Дана окружность с центром  $O$ . На продолжении хорды  $AB$  за точку  $B$  отложен отрезок  $BC$ , равный радиусу. Через точки  $C$  и  $O$  проведена секущая  $CD$  ( $D$  – точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка  $CO$ ). Докажите, что  $\angle AOD = 3\angle ACD$ .
- 28** Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной 10, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.