

**Занятие №1**

- 1** Докажите, что в равных треугольниках соответствующие медианы равны.
- 2** Периметр прямоугольника равен 42, а площадь 98. Найдите большую сторону прямоугольника.
- 3** Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.
- 4** Внешние углы треугольника  $ABC$  при вершинах  $A$  и  $C$  равны  $115^\circ$  и  $140^\circ$ . Прямая, параллельная прямой  $AC$ , пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ . Найдите углы треугольника  $BMN$ .
- 5** Через вершину  $B$  треугольника  $ABC$  проведена прямая, параллельная прямой  $AC$ . Образовавшиеся при этом три угла с вершиной  $B$  относятся как  $3 : 10 : 5$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .
- 6** Прямая, проходящая через вершину  $A$  треугольника  $ABC$ , пересекает сторону  $BC$  в точке  $M$ . При этом  $BM = AB$ ,  $\angle BAM = 35^\circ$ ,  $\angle CAM = 15^\circ$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .
- 7** Дан треугольник с периметром, равным 24. Найдите периметр треугольника с вершинами в серединах сторон данного.
- 8** Острые углы прямоугольного треугольника равны  $81^\circ$  и  $9^\circ$ . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

**Занятие №2**

**1** Найти значение выражения:

$$61a - 11b + 50, \quad \text{если } \frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9.$$

**2** Две высоты треугольника равны между собой. Докажите, что треугольник равнобедренный.

**3** Дан четырехугольник, сумма диагоналей которого равна 18. Найдите периметр четырехугольника с вершинами в серединах сторон данного.

**4** Углы треугольника относятся как  $2 : 3 : 4$ . Найдите отношение внешних углов треугольника.

**5** Основания трапеции равны 3 и 5, одна из диагоналей перпендикулярна боковой стороне, а другая делит пополам угол при большем основании. Найдите высоту трапеции.

**6** Точки  $M$  и  $N$  лежат на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ , причем  $\angle ABM = \angle ACB$  и  $\angle CBN = \angle BAC$ . Докажите, что треугольник  $BMN$  равнобедренный.

**7** Треугольник  $ABC$  – равнобедренный ( $AB = BC$ ). Отрезок  $AM$  делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями  $AB$  и  $MC$ . Найдите угол  $B$ .

**8** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на гипотенузе  $AB$  взяты точки  $K$  и  $M$ , причем  $AK = AC$  и  $BM = BC$ . Найдите  $\angle MCK$ .

**9** Через вершины  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$  проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла  $ABC$ , пересекающие прямые  $CB$  и  $BA$  в точках  $K$  и  $M$  соответственно. Найдите  $AB$ , если  $BM = 8$ ,  $KC = 1$ .

**Домашняя работа №1**

**1** Упростить выражение:

$$\left( \frac{1}{x+2} + \frac{5}{x^2 - x - 6} + \frac{2x}{x-3} \right) \cdot \frac{x}{2x+1} - \frac{x-9}{2(3-x)}$$

**2** Найти значение выражения:

$$\frac{a}{b}, \quad \text{если } \frac{2a+5b}{5a+2b} = 1.$$

**3** Упростить выражение:

$$(2\sqrt{5} - \sqrt{15})(\sqrt{15} + 2\sqrt{5}) - (\sqrt{10} - 5\sqrt{2})^2$$

**4** Острый угол прямоугольного треугольника равен  $30^\circ$ , а гипотенуза равна 8. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла.

**5** Докажите, что высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, вдвое меньше гипотенузы.

**6** Биссектрисы двух углов треугольника пересекаются под углом  $110^\circ$ . Найдите третий угол треугольника.

**7** Высоты треугольника  $ABC$ , проведенные из вершин  $B$  и  $C$ , пересекаются в точке  $M$ . Известно, что  $BM = CM$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.

**Занятие №3**

- 1** Докажите следующие свойства окружности:
- 1) диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам;
  - 2) диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде;
  - 3) хорды, удаленные от центра окружности на равные расстояния, равны.
- 2** Через точку  $A$  окружности с центром  $O$  проведены диаметр  $AB$  и хорда  $AC$ . Докажите, что угол  $BAC$  вдвое меньше угла  $BOC$  (без использования свойств центральных и вписанных углов).
- 3** Найдите угол между радиусами  $OA$  и  $OB$ , если расстояние от центра  $O$  окружности до хорды  $AB$  вдвое меньше  $AB$ .  
(без использования свойств центральных и вписанных углов)
- 4** Даны две концентрические окружности и пересекающая их прямая. Докажите, что отрезки этой прямой, заключенные между окружностями, равны.
- 5** Прямая, проходящая через общую точку  $A$  двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках  $B$  и  $C$  соответственно. Расстояние между проекциями центров окружностей на эту прямую равно 12. Найдите  $BC$ , если известно, что точка  $A$  лежит на отрезке  $BC$ .
- 6** Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.
- 7** Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник является прямоугольным.
- 8** Центр окружности, описанной около треугольника, симметричен центру окружности, вписанной в этот треугольник, относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.
- 9** Через точку  $A$  проведена прямая, пересекающая окружность с диаметром  $AB$  в точке  $K$ , отличной от  $A$ , а окружность с центром  $B$  — в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $MK = KN$ .

**Занятие №4**

- 1** Угол между радиусами  $OA$  и  $OB$  окружности равен  $60^\circ$ . Найдите хорду  $AB$ , если радиус окружности равен 12.
- 2** Дана окружность с центром  $O$ . На продолжении хорды  $AB$  за точку  $B$  отложен отрезок  $BC$ , равный радиусу. Через точки  $C$  и  $O$  проведена секущая  $CD$  ( $D$  – точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка  $CO$ ). Докажите, что  $\angle AOD = 3\angle ACD$ .
- 3** Равные хорды окружности с центром  $O$  пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что  $MO$  – биссектриса угла между ними.
- 4** Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной 10, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.
- 5** Продолжения хорд  $AB$  и  $CD$  окружности с диаметром  $AD$  пересекаются под углом  $25^\circ$ . Найдите острый угол между хордами  $AC$  и  $BD$ .
- 6** Докажите, что точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ , точки  $B$  и  $C$ , а также точка пересечения биссектрис внешних углов с вершинами  $B$  и  $C$  лежат на одной окружности.
- 7** Биссектрисы внутреннего и внешнего угла при вершине  $A$  треугольника  $ABC$  пересекают прямую  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что окружность, построенная на отрезке  $PQ$  как на диаметре, проходит через точку  $A$ .
- 8** Окружность, построенная на биссектрисе  $AD$  треугольника  $ABC$  как на диаметре, пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  соответственно в точках  $M$  и  $N$ , отличных от  $A$ . Докажите, что  $AM = AN$ .

**Домашняя работа №2**

**1** Упростить выражение:

$$1 : \left( \frac{a}{a-b} + \frac{4a^2b - ab^2}{b^3 - a^3} + \frac{b^2}{a^2 + ab + b^2} \right) - \frac{-3ab}{(a-b)^2}$$

**2** Упростить и найти значение выражения:

$$\left( \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + 4x \right) \cdot \left( x - \frac{1}{x} \right), \quad \text{если } x = 5\frac{1}{3}$$

**3** Через точку на окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

**4** Найдите угол между радиусами  $OA$  и  $OB$ , если расстояние от центра  $O$  окружности до хорды  $AB$  вдвое меньше  $OA$ .

**5** На катете  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу  $AB$  в точке  $K$ . Найдите  $CK$ , если  $AC = 2$  и  $\angle A = 30^\circ$ .

**6** Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

**7** Продолжения равных хорд  $AB$  и  $CD$  окружности соответственно за точки  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что треугольники  $APD$  и  $BPC$  равнобедренные.

**Занятие №5**

- 1** Докажите, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.
- 2** Через точку  $M$  проведены две касательные  $MA$  и  $MB$  к окружности ( $A$  и  $B$  – точки касания). Докажите, что  $MA = MB$ .
- 3** Расстояние от точки  $M$  до центра  $O$  окружности равно диаметру. Через точку  $M$  проведены две прямые, касающиеся окружности в точках  $A$  и  $B$ . Найдите углы треугольника  $AOB$ .
- 4** В прямой угол вписана окружность радиуса 12, касающаяся сторон угла в точках  $A$  и  $B$ . Через некоторую точку на меньшей дуге  $AB$  окружности проведена касательная, отсекающая от данного угла треугольник. Найдите его периметр.
- 5** Прямая касается окружности с центром  $O$  в точке  $A$ . Точка  $C$  на этой прямой и точка  $D$  на окружности расположены по одну сторону от прямой  $OA$ . Докажите, что угол  $CAD$  вдвое меньше угла  $AOD$ .
- 6** В острый угол, равный  $60^\circ$ , вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Радиус меньшей окружности равен  $r$ . Найдите радиус большей окружности.
- 7** Вычислить:

$$\frac{6 \cdot 2^8 - 9 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^{12}}{4 \cdot 2^{10} + 4 \cdot 2^{12} - 8 \cdot 2^{11}}$$

- 8** Решить уравнение:

$$\frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{4x + 2}{3x - 2}$$

**Занятие №6**

- 1** Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на его биссектрисе.
- 2** Точка  $D$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . В треугольник  $ABD$  и  $ACD$  вписаны окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$ . Докажите, что отрезок  $O_1O_2$  виден из точки  $D$  под прямым углом.
- 3** К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной, равной 8, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 4** Прямая, параллельная хорде  $AB$ , касается окружности в точке  $C$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.
- 5** Две прямые, пересекающиеся в точке  $C$ , касаются окружности в точках  $A$  и  $B$ . Известно, что  $\angle ACB = 120^\circ$ . Докажите, что сумма отрезков  $AC$  и  $BC$  равна отрезку  $OC$ .
- 6** Пусть  $r$  – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами  $a$  и  $b$  и гипотенузой  $c$ . Докажите, что  $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ .
- 7** В треугольник  $ABC$  вписана окружность, касающаяся стороны  $AB$  в точке  $M$ . Пусть  $AM = x$ ,  $BC = a$ , полупериметр треугольника равен  $p$ . Докажите, что  $x = p - a$ .
- 8** В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.



**Домашняя работа №3**

- 1** Хорда большей из двух concentрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.
- 2** Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности. Касательные к окружности, проведенные через эти точки, пересекаются в точке  $C$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если  $AB = AC$ .
- 3** Две прямые касаются окружности с центром  $O$  в точках  $A$  и  $B$  и пересекаются в точке  $C$ . Найдите угол между этими прямыми, если  $\angle ABO = 40^\circ$ .
- 4** К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной  $a$ , проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 5** В треугольник  $ABC$  вписана окружность, касающаяся стороны  $AB$  в точке  $M$ . Пусть  $AM = x$ ,  $BC = a$ , полупериметр треугольника равен  $p$ . Докажите, что  $x = p - a$ .
- 6** Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.
- 7**  $CH$  – высота прямоугольного треугольника  $ABC$ , проведенная из вершины прямого угла. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $ACH$ ,  $BCH$  и  $ABC$ , равна  $CH$ .