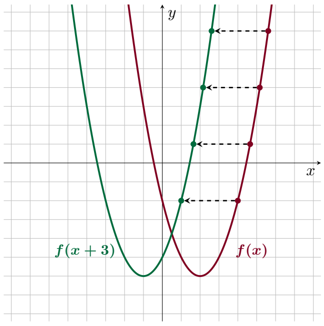
Преобразования графиков функций

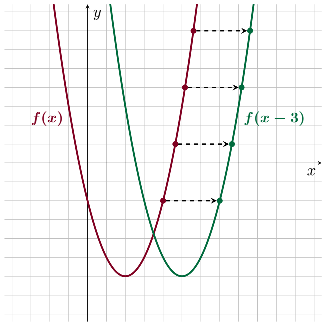
1. **Смещение графика функции по горизонтали $[y = f(x + c)]$**

   Если к аргументу функции $y = f(x)$ прибавить число c, то график функции $y = f(x)$ сместится по горизонтали.

   а) **Если $c > 0$**, то график $f(x)$ сместится **влево** на c:



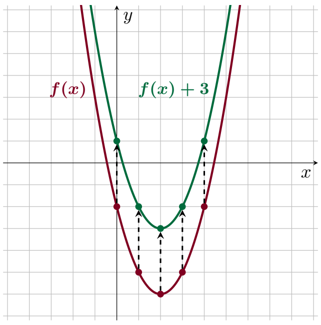
   б) **Если $c < 0$**, то график $f(x)$ сместится **вправо** на $|c|$:



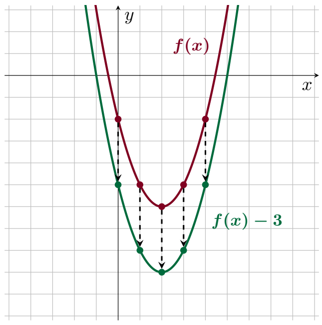
2. **Смещение графика функции по вертикали $[y = f(x) + c]$**

   Если к функции $y = f(x)$ прибавить число c, то график функции $y = f(x)$ сместится по вертикали.

   а) Если $c > 0$, то график $f(x)$ сместится **вверх** на c:



   б) Если $c < 0$, то график $f(x)$ сместится **вниз** на $|c|$:



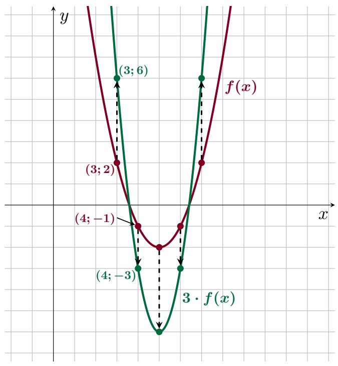
3. **Растяжение или сжатие графика по вертикали $[y = c \cdot f(x)]$**

   Если всю функцию $y = f(x)$ умножить на число c, то график функции $y = f(x)$ может растянуться, сжаться или отразиться относительно оси X в зависимости от значения c. Рассмотрим каждый случай отдельно.

   Сразу обратим внимание, что точки, которые называют нули функции (точки, у которых $y = 0$), в любом случае не меняют своего положения.

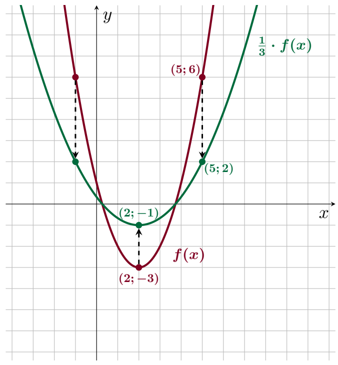
   а) **Если $c > 1$**, то график функции **растянется от оси X**.

   Игрековые координаты всех точек графика изменятся в c раз. Это означает, что точки графика, у которых $y > 0$, сместятся в c раз вверх, а точки с отрицательными значениями по игреку сместятся в c раз вниз.



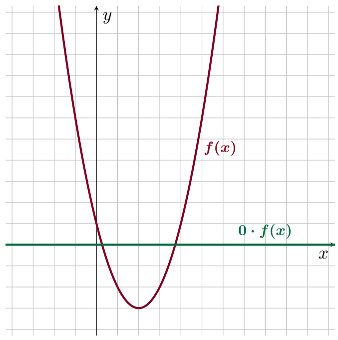
б) **Если $0 < c < 1$**, то график функции **сожмется к оси X**.

В этом случае точки графика, у которых $y > 0$, сместятся в $\frac{1}{c}$ раза вниз, а те, у которых $y < 0$, сместятся в $\frac{1}{c}$ раза вверх.



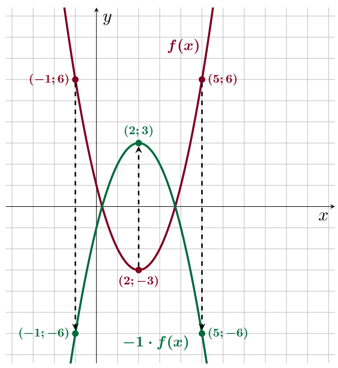
в) **Если $c = 0$**, то уравнение функции **превратится в уравнение $y = 0$**.

Очевидно, что при умножении всего выражения $f(x)$ на 0 в результате получим 0 и уравнение функции будет $y = 0 \cdot f(x) = 0$, то есть $y = 0$. Вспомним, что график функции вида $y = a$, где a — число, это прямая линия, параллельная оси X и пересекающая ось Y в значении a. В нашем случае получим прямую, проходящую по оси X.



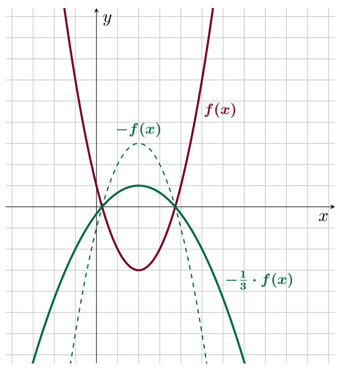
г) **Если $c = -1$**, то график функции **отразится относительно оси X**.

В этом случае игрековые координаты всех точек графика функции изменятся на противоположные.



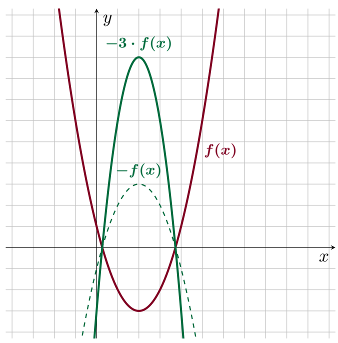
д) **Если $-1 < c < 0$**, то график функции **отразится относительно оси X** и **сожмется к оси X** в $\frac{1}{|c|}$ раз.

Такое преобразование удобно делать в два приема: сначала отражаем график относительно оси X график, а потом сжимаем к оси X.



е) **Если $c < -1$**, то график функции **отразится относительно оси X** и **растянется от оси X** в $|c|$ раз.

Это преобразование делаем также в два приема: сначала отражаем график относительно оси X график, а потом растягиваем от оси X.



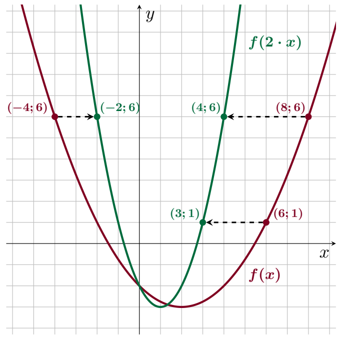
4. **Растяжение от или сжатие к оси Y $[y = f(c \cdot x)]$**

Если аргумент функции $y = f(x)$ умножить на число c, то график функции $y = f(x)$ может растянуться, сжаться или отразиться относительно оси Y в зависимости от значения c. Также как и в предыдущем пункте рассмотрим каждый случай отдельно.

В этом случае стоит отметить, что точка пересечения графика с осью Y не меняет своего положения.

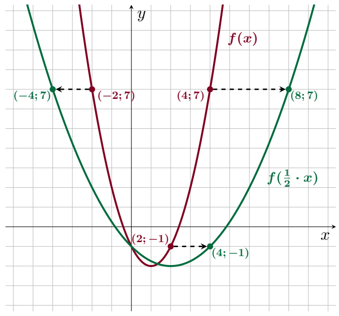
а) **Если $c > 1$**, то график функции **сожмется к оси Y**.

Иксовые координаты всех точек графика изменятся в c раз. То есть точки графика, у которых $x > 0$, сместятся в c раз влево, а точки, у которых $x < 0$, сместятся в c раз вправо.



б) **Если $0 < c < 1$**, то график функции **растянется от оси Y**.

Точки графика, у которых $x > 0$, сместятся в $\frac{1}{c}$ раза влево, а точки, у которых $x < 0$, сместятся в $\frac{1}{c}$ раз вправо.

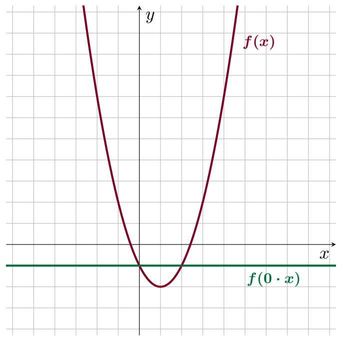


в) **Если $c = 0$**, то график функции **превратится в уравнение $y = a$**, где a — точка, в которой график пересекает ось Y.

Рассмотрим пример, представленный на рисунке справа. График функции $f(x)$ задан выражением $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Умножим аргумент функции на 0:

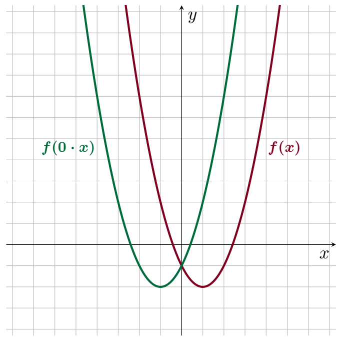
$$f(0 \cdot x) = (0 \cdot x)^2 - 2(0 \cdot x) - 1 = 0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = 0 - 0 - 1 = -1$$

То есть $f(0 \cdot x) = -1$. Графиком такой функции является прямая линия, параллельная оси X, пересекающая ось Y в точке -1.



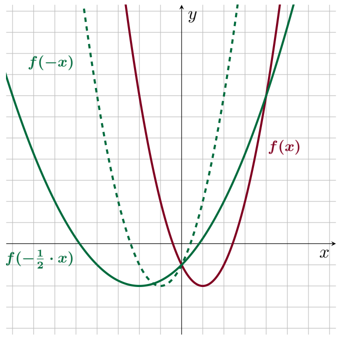
г) **Если $c = -1$**, то график функции **отразится относительно оси Y**.

В этом случае иксовые координаты всех точек графика функции изменятся на противоположные.



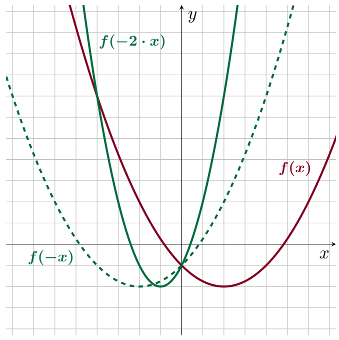
д) **Если $-1 < c < 0$**, то график функции **отразится относительно оси Y** и **растянется от оси Y** в $\frac{1}{|c|}$ раз.

Это преобразование делаем также в два приема: сначала отражаем график относительно оси Y, а потом растягиваем от оси Y.



е) **Если $c < -1$**, то график функции **отразится относительно оси Y** и **сожмется к оси Y** в $|c|$ раз.

Это преобразование делаем снова в два приема: сначала отражаем график относительно оси Y, а потом сжимаем к оси Y.



5. **Отражение части графика относительно оси X [$y = |f(x)|$]**

Если всю функцию $y = f(x)$ взять по модулю, то часть графика функции $y = f(x)$, которая расположена ниже оси X, отразится относительно оси X.

Исходный график $y = f(x)$

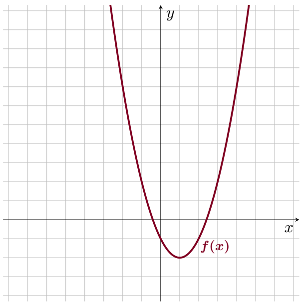
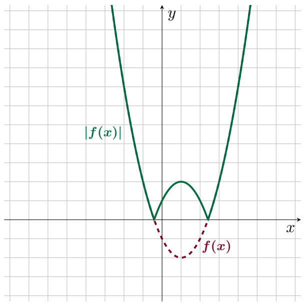


График функции $y = |f(x)|$



6. **Отражение части графика относительно оси Y [$y = f(|x|)$]**

Если аргумент функции $y = f(x)$ взять по модулю, то часть графика функции $y = f(x)$, которая расположена левее оси Y, сотрется, а правая часть отразится относительно оси Y.

Исходный график $y = f(x)$

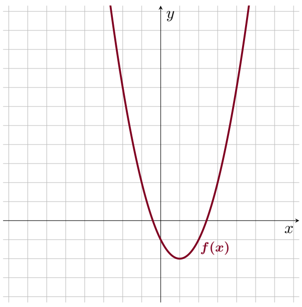


График функции $y = f(|x|)$