Уравнения

Виды алгебраических выражений

1. Рациональные выражения

   - **Целые выражения** — это числа, переменные, а также всевозможные выражения, составленные из них при помощи действий сложения, вычитания, умножения и возведения в степень, которые также могут содержать скобки и деление на отличное от нуля число.

     Примеры:

     $$\frac{3}{7}\ ;\ 40x^2y\ ;\ \frac{7y^2x^3}{5}$$

   - **Дробные выражения** — отношение двух, как правило, целых алгебраических выражений.

     Примеры:

     $$\frac{45}{x+4}+4\ ;\ \frac{12x^2-4}{(x+y)^3}\ ;\ \frac{5}{x}$$

2. **Иррациональные выражения** — выражения, которые содержат алгебраические корни с переменной в подкоренном выражении.

   Примеры:

   $$3+\sqrt{x+1}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\ ;\ \sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}$$

3. **Тригонометрические выражения** — выражения, которые содержат переменную в аргументе тригонометрической функции.

   Примеры:

   $$\sin x\ ;\ \sin^2 3x+3\cos^2 3x\ ;\ \frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\cos 2x}$$

4. **Показательные выражения** — выражения, которые содержат переменную в показатели степени.

   Примеры:

   $$13-2^x\ ;\ 5^{x+1}\ ;\ 2^{2x}-2^x+12$$

5. **Логарифмические выражения** — выражения, которые содержат переменную в аргументе или в основании логарифмической функции.

   Примеры:

   $$\log_{3x}5-\log_{3x}7\ ;\ 1-4\log_2^2 4x+1$$

6. **Смешанные выражения** — выражения, которые являются "смесью" нескольких видов алгебраических выражений.

   Примеры:

$$\log_{3x} 5(2-\sin x)\ ;\ \frac{3+x}{\sqrt{3+x}} + 3^{3+x}$$

Все выражения, в которых присутствуют корни, тригонометрические, показательные и логарифмические функции, но в аргументе этих функций отсутствует переменная, будут являться рациональными.

Примеры рациональных выражений:

$$3x+\sqrt{100}\ ;\ 3x^2+5x-\sin\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{12}{\log_2 8}\ ;\ 5x+4^{\sqrt{16}}$$

Уравнения и неравенства будут называться рациональными (целыми или дробными), иррациональными, тригонометрическими, показательными, логарифмическими или смешанными в зависимости от того, какие выражения они содержат.

Решение уравнений

Главным этапом решения любого уравнения является сведе́ние его к одному или нескольким простейшим уравнениям. Под простейшими уравнениями, в зависимости от принадлежности к той тому или иному виду, подразумевают:

- для целых рациональных уравнений — линейные и квадратные уравнения;
- для дробно-рациональных уравнений — уравнения вида $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены первой или второй степени;
- для иррациональных уравнений—уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$, где $f(x)$ — многочлен первой или второй степени, $g(x)$ — многочлен степени не выше первой;
- для тригонометрических уравнений—уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, где a — действительное число;
- для показательных уравнений — уравнения вида $a^{f(x)} = b$, где a — положительное действительное число, отличное от единицы, b — действительное число, $f(x)$ — многочлен первой или второй степени;
- для логарифмических уравнений — уравнения вида $log_a f(x) = b$, где b — действительное число, a — положительное действительное число, отличное от 1, $f(x)$ — многочлен первой или второй степени.

Существует два основных способа сведения уравнения к одному или нескольким простейшим: алгебраические преобразования и замена переменной. Иногда уравнения будут решаться с помощью применения таких свойств функций, как монотонность и ограниченность.

Целые рациональные уравнения

Рассмотрим самые основные способы решения целых рациональных уравнений. Конечно, простейшие виды целых уравнений, такие как линейные и квадратные, мы рассматривать не будем, а перейдем сразу к более сложным случаям.

1. Условие равенства произведения нулю

$$f(x)\cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &f(x)=0,\\ &g(x)=0.\end{aligned}\right.$$

В данном методе наша ключевая задача заключается в том, чтобы разложить выражение на множители, предварительно не забыв перенести все слагаемые из правой части в левую и, после разложения на множители, приравнять каждый из множителей к нулю.

Пример:

Решить уравнение $5x^3 - 21x^2 = 21x - 5$

Решение:

Перенесем все слагаемые в левую сторону уравнения:

$$5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0$$

Сгруппируем первое слагаемое с последним, а второе с третьим:

$$5(x^3 + 1) - 21x(x + 1) = 0$$

Разложим $x^3 + 1$ по формуле суммы кубов:

$$5(x + 1)(x^2 - x + 1) - 21x(x + 1) = 0$$

Вынесем общий множитель $x + 1$ за скобку:

$$(x + 1)(5(x^2 - x + +1) - 21x) = 0$$

Применим условие равенства произведения нулю:

$$(x + 1)(5x^2 - 26x + 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ 5x^2 - 26x + 5 = 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = \dfrac{1}{5}, \\ x = 5 \end{array}\right.$$

ОТВЕТ: -1 ; $\dfrac{1}{5}$; 5

2. Условие равенства степеней

$$(f(x))^{2n+1} = (g(x))^{2n+1} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$(f(x))^{2n} = (g(x))^{2n} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Пример:

Решить уравнение $(x - 3)^6 = (-x^2 - 2x + 1)^3$

Решение:

Воспользуемся свойством степени $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$:

$$((x - 3)^2)^3 = (-x^2 - 2x + 1)^3$$

Применим условие равенства степеней:

$$((x - 3)^2)^3 = (-x^2 - 2x - 1)^3 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = -x^2 - 2x + 1$$

Раскроем $(x - 3)^2$ по формуле квадрата разности:

$$x^2 - 6x + 9 = -x^2 - 2x + 1$$

Решим обыкновенное квадратное уравнение.

ОТВЕТ: 2

3. Замена переменной

   Пример:

   Решить уравнение $(4x-9)^3 = (4x-9)^5$

   Решение:

   Пусть $4x - 9 = t$. Тогда:

$$t^3 = t^5$$

$$t^3 - t^5 = 0$$

   Вынесем общий множитель за скобку:

$$t^3(1-t^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^3 = 0, \\ 1 - t^2 = 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t^2 = 1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = 1, \\ t = -1 \end{array}\right.$$

   Давайте сделаем обратную замену и получим:

$$\left[\begin{array}{l} 4x - 9 = 0, \\ 4x - 9 = 1, \\ 4x - 9 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{4} = 2,25, \\ \\ x = \dfrac{10}{4} = 2,5, \\ \\ x = \dfrac{8}{4} = 2 \end{array}\right.$$

   ОТВЕТ: 2 ; $2,25$; $2,5$