

## Встреча 1

- 1** Точка  $B$  лежит на отрезке  $AC$  длиной 5. Найдите расстояние между серединами отрезков  $AB$  и  $BC$ .
- 2** Найдите угол между биссектрисами двух смежных углов.
- 3** Две параллельные прямые пересечены третьей. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов.
- 4** Медиана  $AM$  треугольника  $ABC$  перпендикулярна его биссектрисе  $BK$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ .
- 5** Через данную точку проведите прямую, пересекающую две данные прямые под равными углами.
- 6** Две различные окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, делит отрезок  $AB$  пополам и перпендикулярна ему.
- 7** Биссектрисы  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ , биссектрисы  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  треугольника  $AB_1C_1$  пересекаются в точке  $N$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $M$  и  $N$  лежат на одной прямой.
- 8** Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.
- 9** Постройте равнобедренный треугольник, если даны две прямые, на которых лежат биссектрисы его углов при вершине и при основании, и по точке на каждой из боковых сторон.
- 10** Постройте треугольник, если заданы сторона, противолежащий ей угол и сумма двух других сторон.
- 11** Один из углов треугольника равен  $\alpha$ . Найдите угол между биссектрисами двух других углов.
- 12** Один из углов треугольника равен  $\alpha$ . Найдите угол между высотами, проведенными из вершин двух других углов.
- 13** Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.
- 14** Докажите, что если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный. Доказать обратное.
- 15** В треугольнике  $ABC$  угол  $\angle C = 30^\circ$  и  $AC = 10$ . Из вершины  $B$  провели медиану, которая равна 5. Найдите другие стороны треугольника.
- 16** Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон – диаметр, то такой треугольник прямоугольный.
- 17** Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности.
- 18** Докажите, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.
- 19** Докажите, что, если в треугольнике один угол равен  $120^\circ$ , то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.

## Домашняя работа 1

- 1 Точка  $K$  отрезка  $AB$ , равного 12, расположена на 5 ближе к  $A$ , чем к  $B$ . Найдите  $AK$  и  $BK$ .
- 2 Через вершины  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$  проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла  $ABC$ , пересекающие прямые  $CB$  и  $BA$  в точках  $K$  и  $M$  соответственно. Найдите  $AB$ , если  $BM = 8$ ,  $KC = 1$ .
- 3 Дана прямая  $l$  и точки  $A$  и  $B$  по разные стороны от нее. Постройте на прямой  $l$  такую точку  $C$ , чтобы прямая  $l$  делила угол  $ACB$  пополам.
- 4 Дана прямая  $l$  и точки  $A$  и  $B$  по одну сторону от нее. Луч света, выпущенный из точки  $A$ , отразившись от этой прямой в точке  $C$ , попадает в точку  $B$ . Постройте точку  $C$ .
- 5 Постройте биссектрису угла, вершина которого недоступна.
- 6 Высоты остроугольного треугольника  $ABC$ , проведенные из вершин  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $H$ , причем  $\angle AHB = 120^\circ$ , а биссектрисы, проведенные из вершин  $B$  и  $C$ , – в точке  $K$ , причем  $\angle BKC = 130^\circ$ . Найдите угол  $ABC$ .
- 7 На стороне  $AB$  квадрата  $ABCD$  построен равносторонний треугольник  $ABM$ . Найдите угол  $DMC$ .
- 8 Угол при вершине  $B$  равнобедренного треугольника  $ABC$  равен  $108^\circ$ . Перпендикуляр к биссектрисе  $AD$  этого треугольника, проходящий через точку  $D$ , пересекает сторону  $AC$  в точке  $E$ . Докажите, что  $DE = BD$ .
- 9 Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1, один из острых углов равен  $15^\circ$ . Найдите гипотенузу.
- 10 Постройте окружность данного радиуса, высекающую на данной прямой отрезок, равный данному.
- 11 Постройте треугольник, если дана одна его вершина и две прямые, на которых лежат биссектрисы, проведенные из двух других вершин.
- 12 Внутри острого угла даны точки  $M$  и  $N$ . Как из точки  $M$  направить луч света, чтобы он, отразившись последовательно от сторон угла, попал в точку  $N$ ?

## Домашняя работа 2

- 1** Точка  $A$  лежит вне данной окружности с центром  $O$ . Окружность с диаметром  $OA$  пересекается с данной в точках  $B$  и  $C$ . Докажите, что прямые  $AB$  и  $AC$  — касательные к данной окружности.
- 2** Постройте хорду данной окружности, равную и параллельную заданному отрезку.
- 3**  $CH$  — высота прямоугольного треугольника  $ABC$ , проведенная из вершины прямого угла. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $ACH$ ,  $BCH$  и  $ABC$ , равна  $CH$ .
- 4** Окружность касается стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  в точке  $M$ , а продолжений сторон  $AB$  и  $AC$  — в точках  $N$  и  $P$  соответственно. Вписанная в этот треугольник окружность касается стороны  $BC$  в точке  $K$ , а стороны  $AB$  — в точке  $L$ . Докажите, что:  
а) отрезок  $AN$  равен полупериметру треугольника  $ABC$ ;  
б)  $BK = CM$ ;  
в)  $NL = BC$ .
- 5** В острый угол, равный  $60^\circ$ , вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Радиус меньшей окружности равен  $r$ . Найдите радиус большей окружности.
- 6** Угловые величины дуг, заключенных между двумя хордами, продолжения которых пересекаются вне круга, равны  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha > \beta$ ). Под каким углом пересекаются продолжения хорд?
- 7** Треугольник с вершинами в основаниях высот треугольника  $ABC$  называется ортотреугольником треугольника  $ABC$ . Докажите, что высоты остроугольного треугольника  $ABC$  являются биссектрисами его ортотреугольника.
- 8** Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $B$  проводится прямая, пересекающая окружности в точках  $C$  и  $D$ , а затем через точки  $C$  и  $D$  проводятся касательные к этим окружностям. Докажите, что точки  $A$ ,  $C$ ,  $D$  и точка  $P$  пересечения касательных лежат на одной окружности.
- 9** Решить уравнения:
- 1)  $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$                       3)  $|x^2 - x - 5| + |x^2 - x - 9| = 10$   
2)  $5\sqrt{12 - x} + |4x - 3| = 5x + |4\sqrt{12 - x} - 3|$     4)  $5 \sin x + 2 \cos x = 0$

- 1** Точка  $M$  — середина ребра  $AB$  треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ .  
а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую  $A_1M$  параллельно прямой  $AC$ .  
б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок, соединяющий точку  $B_1$  с серединой ребра  $AC$ ?
- 2** Основание шестиугольной пирамиды  $SAB CDEF$  — правильный шестиугольник  $AB CDEF$ . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через следующие точки:  
а) центр основания параллельно плоскости  $ASB$ ;  
б)  $B$ ,  $C$  и середину отрезка, соединяющего вершину пирамиды с центром основания.
- 3** В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = 12$ ,  $AC = 15$ ,  $BC = 18$ . Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины наибольшего угла.
- 4** Три окружности равных радиусов проходят через точку  $M$  и попарно пересекаются в трех других точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на окружности того же радиуса, а  $M$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ .