

Занятие ☒1

- 1 Докажите, что в равных треугольниках соответствующие медианы равны.
- 2 Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.
- 3 Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой AC . Образовавшиеся при этом три угла с вершиной B относятся как $3 : 10 : 5$. Найдите углы треугольника ABC .
- 4 Углы треугольника относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите отношение внешних углов треугольника.
- 5 Внешние углы треугольника ABC при вершинах A и C равны 115° и 140° . Прямая, параллельная прямой AC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N . Найдите углы треугольника BMN .
- 6 Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке M . При этом $BM = AB$, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle CAM = 15^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .
- 7 Острые углы прямоугольного треугольника равны 81° и 9° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.
- 8 В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M , причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите $\angle MCK$.

Занятие ☒2

- 1 Дан треугольник ABC , причем $AB = AC$ и $\angle A = 110^\circ$. Внутри треугольника взята точка M такая, что $\angle MBC = 30^\circ$, а $\angle MCB = 25^\circ$. Найдите $\angle AMC$.
- 2 Докажите, что если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то такой треугольник прямоугольный.
- 3 Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.
- 4 Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник является прямоугольным.
- 5 Докажите обратное, что если треугольник прямоугольный и вписан в окружность, то гипотенуза будет являться диаметром окружности.
- 6 Докажите, что окружность, построенная на стороне равностороннего треугольника как на диаметре, проходит через середины двух других сторон треугольника.
- 7 Докажите, что отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, лежит на прямой BC .
- 8 Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу пополам. Найдите углы треугольника.
- 9 Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° . Докажите, что высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, делят прямой угол на три равные части.
- 10 В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M , причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите $\angle MCK$.

Домашняя работа ☒1

1 Вычислить:

1) $3^7 \cdot 3^9 : 3^{14}$

2) $\frac{10^8}{2^9 \cdot 2^8}$

2 Упростить выражение:

$$\frac{7-5m}{m-4} + \frac{4m}{m+4} \cdot \frac{m^2-16}{4m} + \frac{9m-23}{m-4}$$

3 Упростить и найти значение выражения:

$$\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4x} \right), \quad \text{при } x = 0, 2$$

4 Докажите, что в равных треугольниках соответствующие биссектрисы равны.

5 В равностороннем треугольнике ABC биссектрисы CN и AM пересекаются в точке P . Найдите $\angle MPN$.

6 Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK . Найдите AB , если $BC = 12$.

7 На продолжениях гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC за точки A и B соответственно взяты точки K и M , причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол MSK .

8 Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.

9 На стороне AB квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник ABM . Найдите угол DMS .

Занятие №3

- 1** Докажите следующие свойства окружности:
- 1) диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам;
 - 2) диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде;
 - 3) хорды, удаленные от центра окружности на равные расстояния, равны.
- 2** Через точку A окружности с центром O проведены диаметр AB и хорда AC . Докажите, что угол BAC вдвое меньше угла BOC (*без использования свойств центральных и вписанных углов*).
- 3** Найдите угол между радиусами OA и OB , если расстояние от центра O окружности до хорды AB вдвое меньше AB .
- 4** Даны две концентрические окружности и пересекающая их прямая. Докажите, что отрезки этой прямой, заключенные между окружностями, равны.
- 5** Прямая, проходящая через общую точку A двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках B и C соответственно. Расстояние между проекциями центров окружностей на эту прямую равно 12. Найдите BC , если известно, что точка A лежит на отрезке BC .
- 8*** Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

Занятие 4

- 1 Внутренние углы треугольника ABC относятся как $10 : 5 : 3$. Найдите внутренние и внешние углы треугольника ABC и вычислите разницу самого наибольшего и наименьшего внешних углов.
- 2 Угол между радиусами OA и OB окружности равен 60° . Найдите хорду AB , если радиус окружности равен 12.
- 3 В треугольнике ABC углы B и C равны 30 и 40 соответственно. Сторону AB продлили за вершину A и из этой вершины провели высоту к стороне BC и биссектрису внешнего угла. Найдите угол между высотой и биссектрисой.
- 4 Дана окружность с центром O . На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC , равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (D – точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$.
- 5 Равные хорды окружности с центром O пересекаются в точке M . Докажите, что MO – биссектриса угла между ними.
- 6 Продолжения хорд AB и CD окружности с диаметром AD пересекаются под углом 25° . Найдите острый угол между хордами AC и BD .
- 7 Докажите, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC , точки B и C , а также точка пересечения биссектрис внешних углов с вершинами B и C лежат на одной окружности.
- 8 Упростить выражение:

$$\frac{x^3 + 50}{10x - x^2 - 25} + \frac{2x^2}{(x - 5)^2} + \frac{25x}{(5 - x)^2}$$

Домашняя работа ☒2

1 Упростить выражение:

$$1 : \left(\frac{a}{a-b} + \frac{4a^2b - ab^2}{b^3 - a^3} + \frac{b^2}{a^2 + ab + b^2} \right) - \frac{-3ab}{(a-b)^2}$$

2 Упростить и найти значение выражения:

$$\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + 4x \right) \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right), \quad \text{если } x = 5\frac{1}{3}$$

3 Через точку на окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

4 Найдите угол между радиусами OA и OB , если расстояние от центра O окружности до хорды AB вдвое меньше OA .

5 На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K . Найдите CK , если $AC = 2$ и $\angle A = 30^\circ$.

6 Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

7 Продолжения равных хорд AB и CD окружности соответственно за точки B и C пересекаются в точке P . Докажите, что треугольники APD и BPC равнобедренные.

Занятие 5

- 1 Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на его биссектрисе.
- 2 Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC . В треугольник ABD и ACD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 . Докажите, что отрезок O_1O_2 виден из точки D под прямым углом.
- 3 К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной, равной 8, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 4 Прямая, параллельная хорде AB , касается окружности в точке C . Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- 5 Две прямые, пересекающиеся в точке C , касаются окружности в точках A и B . Известно, что $\angle ACB = 120^\circ$. Докажите, что сумма отрезков AC и BC равна отрезку OC .
- 6 Пусть r – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c . Докажите, что $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.
- 7 В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M . Пусть $AM = x$, $BC = a$, полупериметр треугольника равен p . Докажите, что $x = p - a$.
- 8 Найти значение выражения:

$$61a - 11b + 50, \quad \text{если } \frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9.$$

Занятие №6

- 1** Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на его биссектрисе.
- 2** Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC . В треугольник ABD и ACD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 . Докажите, что отрезок O_1O_2 виден из точки D под прямым углом.
- 3** К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной, равной 8, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 4** Прямая, параллельная хорде AB , касается окружности в точке C . Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- 5** Две прямые, пересекающиеся в точке C , касаются окружности в точках A и B . Известно, что $\angle ACB = 120^\circ$. Докажите, что сумма отрезков AC и BC равна отрезку OC .
- 6** Пусть r – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c . Докажите, что $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.
- 7*** В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M . Пусть $AM = x$, $BC = a$, полупериметр треугольника равен p . Докажите, что $x = p - a$.
- 8*** В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.

Подготовка к проверочной

- 1 Чему равен угол между биссектрисами двух смежных углов?
- 2 Чему равен угол между биссектрисами двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых? Докажите это.
- 3 Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.
- 4 Чему равна сумма всех внешних углов треугольника?
- 5 Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, параллельна основанию.
- 6 Докажите, что если в треугольнике один угол равен сумме двух других, то такое треугольник прямоугольный.
- 7 Докажите, что если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то такой треугольник прямоугольный.
- 8 Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник прямоугольный.
- 9 Сформулируйте теорему об угле в 30° в прямоугольном треугольнике. Сформулируйте обратную теорему.
- 10 Сформулируйте теорему о диаметре, перпендикулярном хорде.
- 11 Сформулируйте теорему о диаметре, проходящем через середину хорды.
- 12 Где лежит центр вписанной в треугольник окружности? Где лежит центр описанной окружности?
- 13 Сформулируйте теорему о двух касательных, проведенных из одной точки к окружности.
- 14 Докажите, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.
- 15 Угол между биссектрисами двух углов треугольника равен 120° . Чему равен третий угол треугольника?
- 16 Угол треугольника равен 50° . Найдите угол между высотами, проведенными из двух других углов.
- 17 В треугольнике ABC угол $\angle B = 60^\circ$. Найдите угол между биссектрисами двух других внешних углов.
- 18 Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.
- 19 Продолжения равных хорд AB и CD окружности соответственно за точки B и C пересекаются в точке P . Докажите, что треугольники APD и BPC равнобедренные.
- 20 Хорда большей из двух concentрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.

- 21** Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C . Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.
- 22** К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной 4, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 23** Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.
- 24** Докажите, что отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, лежит на прямой BC .
- 25** В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M на расстояние, равное AM . Найдите расстояние от полученной точки до вершин B и C , если $AB = 5$, $AC = 12$.
- 26** Дана окружность с центром O . На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC , равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (D – точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$.
- 27** Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной 10, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.
- 28** На сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах построены четыре окружности. Докажите, что общая хорда окружностей, построенных на двух соседних сторонах, параллельна общей хорде двух других окружностей.

Проверочная работа

Вариант 1

- 1** 1) Чему равен угол между биссектрисами двух смежных углов?
2) Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.
3) Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, параллельна основанию.
4) Докажите, что если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то такой треугольник прямоугольный.
5) Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник прямоугольный.
6) Сформулируйте теорему об угле в 30° в прямоугольном треугольнике. Сформулируйте обратную теорему.
7) Сформулируйте теорему о диаметре, проходящем через середину хорды.
8) Где лежит центр вписанной в треугольник окружности?
- 2** В треугольнике ABC обе стороны AB и BC равны 15. Чему равна сторона AC , если $\angle BAC = 60^\circ$?
- 3** В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 50$ и $\angle B = 80$. Найдите сторону BC , если $AC = 16$ и $P_{ABC} = 40$.
- 4** Угол между биссектрисами двух углов треугольника равен 100° . Чему равен третий угол треугольника?
- 5** Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.
- 6** Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C . Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.
- 7** В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M на расстояние, равное AM . Найдите расстояние от полученной точки до вершин B и C , если $AB = 5$, $AC = 12$.
- 8** К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной 4, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

Проверочная работа

Вариант 2

- 1** 1) Чему равен угол между биссектрисами двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых?
- 2) Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.
- 3) Докажите, что если в треугольнике один угол равен сумме двух других, то такое треугольник прямоугольный.
- 4) Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник прямоугольный.
- 5) Сформулируйте теорему об угле в 30° в прямоугольном треугольнике. Сформулируйте обратную теорему.
- 6) Сформулируйте теорему о диаметре, перпендикулярном хорде.
- 7) Сформулируйте теорему о двух касательных, проведенных из одной точки к окружности.
- 2** В треугольнике ABC обе стороны AB и BC равны 30. Чему равна сторона AC , если $\angle BAC = 60^\circ$?
- 3** В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 50$ и $\angle B = 80$. Найдите сторону BC , если $AC = 20$ и $P_{ABC} = 50$.
- 4** Угол треугольника равен 80° . Найдите угол между высотами, проведенными из двух других углов.
- 5** Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.
- 6** Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C . Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.
- 7** В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M на расстояние, равное AM . Найдите расстояние от полученной точки до вершин B и C , если $AB = 5$, $AC = 12$.
- 8** Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной 10, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр полученного четырехугольника.