

**Занятие №1**

- 1** Докажите, что в равных треугольниках соответствующие медианы равны.
- 2** Периметр прямоугольника равен 42, а площадь 98. Найдите большую сторону прямоугольника.
- 3** Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.
- 4** Внешние углы треугольника  $ABC$  при вершинах  $A$  и  $C$  равны  $115^\circ$  и  $140^\circ$ . Прямая, параллельная прямой  $AC$ , пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ . Найдите углы треугольника  $BMN$ .
- 5** Через вершину  $B$  треугольника  $ABC$  проведена прямая, параллельная прямой  $AC$ . Образовавшиеся при этом три угла с вершиной  $B$  относятся как  $3 : 10 : 5$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .
- 6** Прямая, проходящая через вершину  $A$  треугольника  $ABC$ , пересекает сторону  $BC$  в точке  $M$ . При этом  $BM = AB$ ,  $\angle BAM = 35^\circ$ ,  $\angle CAM = 15^\circ$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .
- 7** Дан треугольник с периметром, равным 24. Найдите периметр треугольника с вершинами в серединах сторон данного.
- 8** Острые углы прямоугольного треугольника равны  $81^\circ$  и  $9^\circ$ . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.
- 9** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на гипотенузе  $AB$  взяты точки  $K$  и  $M$ , причем  $AK = AC$  и  $BM = BC$ . Найдите  $\angle MCK$ .
- 10** Через вершины  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$  проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла  $ABC$ , пересекающие прямые  $CB$  и  $BA$  в точках  $K$  и  $M$  соответственно. Найдите  $AB$ , если  $BM = 8$ ,  $KC = 1$ .

**Занятие №2**

**1** Найти значение выражения:

$$61a - 11b + 50, \quad \text{если } \frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9.$$

**2** Докажите, что если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

**3** Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

**4** Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник является прямоугольным.

**5** Докажите обратное, что если треугольник прямоугольный и вписан в окружность, то гипотенуза будет являться диаметром окружности.

**6** Докажите, что окружность, построенная на стороне равностороннего треугольника как на диаметре, проходит через середины двух других сторон треугольника.

**7** Острый угол прямоугольного треугольника равен  $30^\circ$ . Докажите, что высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, делят прямой угол на три равные части.

**8** На катетах  $AC$  и  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  вне его построены квадраты  $ACDE$  и  $CBFK$  (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки),  $P$  – середина  $KD$ . Докажите, что  $CP \perp AB$ .

**Домашняя работа №1**

**1** Упростить выражение:

$$\left( \frac{1}{x+2} + \frac{5}{x^2-x-6} + \frac{2x}{x-3} \right) \cdot \frac{x}{2x+1} - \frac{x-9}{2(3-x)}$$

**2** Найти значение выражения:

$$\frac{a}{b}, \quad \text{если } \frac{2a+5b}{5a+2b} = 1.$$

**3** Упростить выражение:

$$(2\sqrt{5} - \sqrt{15})(\sqrt{15} + 2\sqrt{5}) - (\sqrt{10} - 5\sqrt{2})^2$$

**4** Острый угол прямоугольного треугольника равен  $30^\circ$ , а гипотенуза равна 8. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла.

**5** Докажите, что высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, вдвое меньше гипотенузы.

**6** Биссектрисы двух углов треугольника пересекаются под углом  $110^\circ$ . Найдите третий угол треугольника.

**Занятие №3**

- 1** Докажите следующие свойства окружности:
- 1) диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам;
  - 2) диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде;
  - 3) хорды, удаленные от центра окружности на равные расстояния, равны.
- 2** Через точку  $A$  окружности с центром  $O$  проведены диаметр  $AB$  и хорда  $AC$ . Докажите, что угол  $BAC$  вдвое меньше угла  $BOC$  (без использования свойств центральных и вписанных углов).
- 3** Найдите угол между радиусами  $OA$  и  $OB$ , если расстояние от центра  $O$  окружности до хорды  $AB$  вдвое меньше  $AB$ .
- 4** Даны две концентрические окружности и пересекающая их прямая. Докажите, что отрезки этой прямой, заключенные между окружностями, равны.
- 5** Прямая, проходящая через общую точку  $A$  двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках  $B$  и  $C$  соответственно. Расстояние между проекциями центров окружностей на эту прямую равно 12. Найдите  $BC$ , если известно, что точка  $A$  лежит на отрезке  $BC$ .
- 6** Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.
- 7** Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник является прямоугольным.
- 8** Центр окружности, описанной около треугольника, симметричен центру окружности, вписанной в этот треугольник, относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.
- 9** Через точку  $A$  проведена прямая, пересекающая окружность с диаметром  $AB$  в точке  $K$ , отличной от  $A$ , а окружность с центром  $B$  — в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $MK = KN$ .

- 1) Внутренние углы треугольника  $ABC$  относятся как  $10 : 5 : 3$ . Найдите внутренние и внешние углы треугольника  $ABC$  и вычислите разницу самого наибольшего и наименьшего внешних углов.
- 2) В треугольнике  $ABC$  углы  $B$  и  $C$  равны  $30$  и  $40$  соответственно. Сторону  $AB$  продлили за вершину  $A$  и из этой вершины провели высоту и биссектрису внешнего угла. Найдите угол между высотой и биссектрисой.
- 3) Две параллельные прямые пересечены третьей. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов.
- 4) Угол между радиусами  $OA$  и  $OB$  окружности равен  $60^\circ$ . Найдите хорду  $AB$ , если радиус окружности равен  $12$ .
- 5) Дана окружность с центром  $O$ . На продолжении хорды  $AB$  за точку  $B$  отложен отрезок  $BC$ , равный радиусу. Через точки  $C$  и  $O$  проведена секущая  $CD$  ( $D$  – точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка  $CO$ ). Докажите, что  $\angle AOD = 3\angle ACD$ .
- 6) В треугольнике  $ABC$  медиана  $AM$  продолжена за точку  $M$  на расстояние, равное  $AM$ . Найдите расстояние от полученной точки до вершин  $B$  и  $C$ , если  $AB = 7$ ,  $AC = 11$ .
- 7) Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной  $10$ , проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.
- 8) Решить уравнение:  
1)  $2x^4 + 3x^3 + 16x = -24$   
2)  $(x + 3)^3 = 100(x + 3)$

**Домашняя работа №2**

**1** Упростить выражение:

$$1 : \left( \frac{a}{a-b} + \frac{4a^2b - ab^2}{b^3 - a^3} + \frac{b^2}{a^2 + ab + b^2} \right) - \frac{-3ab}{(a-b)^2}$$

**2** Упростить и найти значение выражения:

$$\left( \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + 4x \right) \cdot \left( x - \frac{1}{x} \right), \quad \text{если } x = 5\frac{1}{3}$$

**3** Через точку на окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

**4** Найдите угол между радиусами  $OA$  и  $OB$ , если расстояние от центра  $O$  окружности до хорды  $AB$  вдвое меньше  $OA$ .

**5** На катете  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу  $AB$  в точке  $K$ . Найдите  $CK$ , если  $AC = 2$  и  $\angle A = 30^\circ$ .

**6** Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

**7** Продолжения равных хорд  $AB$  и  $CD$  окружности соответственно за точки  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что треугольники  $APD$  и  $BPC$  равнобедренные.

**Занятие №5**

- 1** Докажите, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.
- 2** Через точку  $M$  проведены две касательные  $MA$  и  $MB$  к окружности ( $A$  и  $B$  – точки касания). Докажите, что  $MA = MB$ .
- 3** Расстояние от точки  $M$  до центра  $O$  окружности равно диаметру. Через точку  $M$  проведены две прямые, касающиеся окружности в точках  $A$  и  $B$ . Найдите углы треугольника  $AOB$ .
- 4** В прямой угол вписана окружность радиуса 12, касающаяся сторон угла в точках  $A$  и  $B$ . Через некоторую точку на меньшей дуге  $AB$  окружности проведена касательная, отсекающая от данного угла треугольник. Найдите его периметр.
- 5** Прямая касается окружности с центром  $O$  в точке  $A$ . Точка  $C$  на этой прямой и точка  $D$  на окружности расположены по одну сторону от прямой  $OA$ . Докажите, что угол  $CAD$  вдвое меньше угла  $AOD$ .
- 6** В острый угол, равный  $60^\circ$ , вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Радиус меньшей окружности равен  $r$ . Найдите радиус большей окружности.
- 7** Вычислить:

$$\frac{6 \cdot 2^8 - 9 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^{12}}{4 \cdot 2^{10} + 4 \cdot 2^{12} - 8 \cdot 2^{11}}$$

- 8** Решить уравнение:

$$\frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{4x + 2}{3x - 2}$$

**Занятие №6**

- 1** Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на его биссектрисе.
- 2** Точка  $D$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . В треугольник  $ABD$  и  $ACD$  вписаны окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$ . Докажите, что отрезок  $O_1O_2$  виден из точки  $D$  под прямым углом.
- 3** К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной, равной 8, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 4** Прямая, параллельная хорде  $AB$ , касается окружности в точке  $C$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.
- 5** Две прямые, пересекающиеся в точке  $C$ , касаются окружности в точках  $A$  и  $B$ . Известно, что  $\angle ACB = 120^\circ$ . Докажите, что сумма отрезков  $AC$  и  $BC$  равна отрезку  $OC$ .
- 6** Пусть  $r$  – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами  $a$  и  $b$  и гипотенузой  $c$ . Докажите, что  $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ .
- 7** В треугольник  $ABC$  вписана окружность, касающаяся стороны  $AB$  в точке  $M$ . Пусть  $AM = x$ ,  $BC = a$ , полупериметр треугольника равен  $p$ . Докажите, что  $x = p - a$ .
- 8** В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.
- 9** Найти значение выражения:

$$\left( \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + 4\sqrt{x} \right) \cdot \left( \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right), \quad \text{при } x = 7, 2$$



**Домашняя работа №3**

- 1** Хорда большей из двух концентрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.
- 2** Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности. Касательные к окружности, проведенные через эти точки, пересекаются в точке  $C$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если  $AB = AC$ .
- 3** Две прямые касаются окружности с центром  $O$  в точках  $A$  и  $B$  и пересекаются в точке  $C$ . Найдите угол между этими прямыми, если  $\angle ABO = 40^\circ$ .
- 4** К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной  $a$ , проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 5** В треугольник  $ABC$  вписана окружность, касающаяся стороны  $AB$  в точке  $M$ . Пусть  $AM = x$ ,  $BC = a$ , полупериметр треугольника равен  $p$ . Докажите, что  $x = p - a$ .
- 6** Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.
- 7**  $CH$  – высота прямоугольного треугольника  $ABC$ , проведенная из вершины прямого угла. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $ACH$ ,  $BCH$  и  $ABC$ , равна  $CH$ .

## Консультация

**Математическая индукция** — метод математического доказательства, который применяется, чтобы доказать истинность некоего утверждения для всех натуральных чисел. Некоторое утверждение будет справедливым для натурального значения  $n$  тогда, и только тогда, когда:

- 1) Оно будет верно при  $n = 1$  (**база индукции**)
- 2) Предположительно справедливо для произвольного натурального  $n = k$  (**предположение индукции**)
- 3) И окажется верным при  $n = k + 1$  (**шаг индукции**)

**1** Докажите методом математической индукции:

1)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3)  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$

2)  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

4)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**2** В треугольнике  $ABC$  сторона  $AB = 12$ ,  $BC = 4$  и  $\angle CBA = 45^\circ$ . Найдите площадь треугольника.

**3** Радиус описанной вокруг равностороннего треугольника  $ABC$  окружности равен 9. Найдите площадь стороны и площадь треугольника  $ABC$ .

**Консультация****1** Решить уравнение:

1)  $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0$

2)  $3(6x^2 - 13x + 6)^2 - 10(6x^2 - 13) = 53$

3)  $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$

4)  $(x^2 - x)^2 - 18(x^2 - x - 2) + 36 = 0$

5)  $3(6x^2 - 13x + 6)^2 - 10(6x^2 - 13) = 53$

6)  $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{2}{x}\right) - 3 = 0$

7)  $\frac{1}{x - 3 + \frac{8}{x}} - \frac{1}{x + 2 + \frac{8}{x}} = \frac{5}{24}$

**Консультация**

**1** Найдите область определения функции:

1)  $y = \frac{x - 7}{x^2 - 6x + 8}$

3)  $y = \sqrt{\frac{x + 11}{x^2 + 14x + 33}}$

2)  $y = \sqrt{x^2 + 6x - 16}$

4)  $y = \frac{1 - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 + \sqrt{x + 9}}$

**2** Найдите область значений функции:

1)  $y = 2x - 1$

4)  $y = 1 - \frac{3}{x}$

2)  $y = 2x^2 - 3$

3)  $y = -3x^2 - 12x + 1, x \in [-6; 1)$

5)  $y = \frac{x - 1}{x + 1}$

**3** Найдите промежутки монотонности:

1)  $y = x^2 - 9x + 20$

2)  $y = (x + 3)^2 - 12$

**4** Пусть функция  $y = f(x)$  определена и возрастает на  $R$ . Решите уравнение:

$$f\left(\frac{24}{x}\right) = f\left(1 + \frac{17 - x}{x - 1}\right)$$

**5** Найдите область определения функции и исследуйте ее на четность и нечетность:

$$y = \frac{x^2}{1 + x} + \frac{x^2}{1 - x}$$

**6** Являются ли функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  взаимно обратными, если  $f(x) = 3x + 5$  и  $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ ?

**7** Найдите функцию, обратную  $y = \frac{x + 7}{2x - 5}$ .

**Консультация****1** Решить уравнение:

1)  $(2x - 3)(x^2 + 3x + 2) = 0$

3)  $(x^2 + 6x)^2 + 2(x + 3)^2 = 81$

2)  $\frac{(x + 2)(x - 5)}{3} - \frac{11x + 12}{10} = 2 - \frac{x - 2}{3}$

4)  $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$

**2** Сколько пятизначных чисел можно получить из цифр 1; 3; 5; 7; 9?**3** Сколько трехзначных чисел можно получить из цифр 1; 3; 5; 7; 9?**4** Сколько есть способов поставить в ряд (последовательность не важна) 3 человек из 8?**5** Упростить выражение:

$$\left( \frac{2}{2+m} - \frac{m}{m-2} - \frac{4}{4-m^2} \right) : \left( \frac{2}{2+m} + \frac{4}{m^2-4} + \frac{m}{2-m} \right)$$

**6** Решить неравенство:

1)  $(x - 1)(x + 5) \geq 0$

3)  $(3x^2 - 8x + 4)(5x^2 - 8x - 4) \leq 0$

2)  $x^2 - 6x + 5 \geq 0$