

Занятие №1

- 1** Докажите, что в равных треугольниках соответствующие медианы равны.
- 2** Периметр прямоугольника равен 42, а площадь 98. Найдите большую сторону прямоугольника.
- 3** Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.
- 4** Внешние углы треугольника ABC при вершинах A и C равны 115° и 140° . Прямая, параллельная прямой AC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N . Найдите углы треугольника BMN .
- 5** Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой AC . Образовавшиеся при этом три угла с вершиной B относятся как $3 : 10 : 5$. Найдите углы треугольника ABC .
- 6** Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке M . При этом $BM = AB$, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle CAM = 15^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .
- 7** Дан треугольник с периметром, равным 24. Найдите периметр треугольника с вершинами в серединах сторон данного.
- 8** Острые углы прямоугольного треугольника равны 81° и 9° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

Занятие №2

- 1** Найти значение выражения:

$$61a - 11b + 50, \quad \text{если } \frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9.$$

- 2** Две высоты треугольника равны между собой. Докажите, что треугольник равнобедренный.
- 3** Дан четырехугольник, сумма диагоналей которого равна 18. Найдите периметр четырехугольника с вершинами в серединах сторон данного.
- 4** Углы треугольника относятся как 2 : 3 : 4 Найдите отношение внешних углов треугольника.
- 5** Основания трапеции равны 3 и 5, одна из диагоналей перпендикулярна боковой стороне, а другая делит пополам угол при большем основании. Найдите высоту трапеции.
- 6** Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC , причем $\angle ABM = \angle ACB$ и $\angle CBN = \angle BAC$. Докажите, что треугольник BMN равнобедренный.
- 7** Треугольник ABC – равнобедренный ($AB = BC$). Отрезок AM делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями AB и MC . Найдите угол B .
- 8** В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M , причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите $\angle MCK$.
- 9** Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC , пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB , если $BM = 8$, $KC = 1$.

Домашняя работа №1

1 Упростить выражение:

$$\left(\frac{1}{x+2} + \frac{5}{x^2-x-6} + \frac{2x}{x-3} \right) \cdot \frac{x}{2x+1} - \frac{x-9}{2(3-x)}$$

2 Найти значение выражения:

$$\frac{a}{b}, \quad \text{если} \quad \frac{2a+5b}{5a+2b} = 1.$$

3 Упростить выражение:

$$(2\sqrt{5} - \sqrt{15})(\sqrt{15} + 2\sqrt{5}) - (\sqrt{10} - 5\sqrt{2})^2$$

4 Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° , а гипотенуза равна 8. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла.

5 Докажите, что высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, вдвое меньше гипотенузы.

6 Биссектрисы двух углов треугольника пересекаются под углом 110° . Найдите третий угол треугольника.

7 Высоты треугольника ABC , проведенные из вершин B и C , пересекаются в точке M . Известно, что $BM = CM$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

Занятие №3

- 1** Докажите следующие свойства окружности:
- 1) диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам;
 - 2) диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде;
 - 3) хорды, удаленные от центра окружности на равные расстояния, равны.
- 2** Через точку A окружности с центром O проведены диаметр AB и хорда AC . Докажите, что угол BAC вдвое меньше угла BOC (без использования свойств центральных и вписанных углов).
- 3** Найдите угол между радиусами OA и OB , если расстояние от центра O окружности до хорды AB вдвое меньше AB . (без использования свойств центральных и вписанных углов)
- 4** Даны две концентрические окружности и пересекающая их прямая. Докажите, что отрезки этой прямой, заключенные между окружностями, равны.
- 5** Прямая, проходящая через общую точку A двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках B и C соответственно. Расстояние между проекциями центров окружностей на эту прямую равно 12. Найдите BC , если известно, что точка A лежит на отрезке BC .
- 6** Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.
- 7** Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник является прямоугольным.
- 8** Центр окружности, описанной около треугольника, симметричен центру окружности, вписанной в этот треугольник, относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.
- 9** Через точку A проведена прямая, пересекающая окружность с диаметром AB в точке K , отличной от A , а окружность с центром B — в точках M и N . Докажите, что $MK = KN$.

Занятие №4

- 1** Угол между радиусами OA и OB окружности равен 60° . Найдите хорду AB , если радиус окружности равен 12.
- 2** Дана окружность с центром O . На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC , равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (D – точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$.
- 3** Равные хорды окружности с центром O пересекаются в точке M . Докажите, что MO – биссектриса угла между ними.
- 4** Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной 10, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.
- 5** Продолжения хорд AB и CD окружности с диаметром AD пересекаются под углом 25° . Найдите острый угол между хордами AC и BD .
- 6** Докажите, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC , точки B и C , а также точка пересечения биссектрис внешних углов с вершинами B и C лежат на одной окружности.
- 7** Биссектрисы внутреннего и внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках P и Q . Докажите, что окружность, построенная на отрезке PQ как на диаметре, проходит через точку A .
- 8** Окружность, построенная на биссектрисе AD треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC соответственно в точках M и N , отличных от A . Докажите, что $AM = AN$.

Домашняя работа №2

1 Упростить выражение:

$$1 : \left(\frac{a}{a-b} + \frac{4a^2b - ab^2}{b^3 - a^3} + \frac{b^2}{a^2 + ab + b^2} \right) - \frac{-3ab}{(a-b)^2}$$

2 Упростить и найти значение выражения:

$$\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + 4x \right) \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right), \quad \text{если } x = 5\frac{1}{3}$$

3 Через точку на окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

4 Найдите угол между радиусами OA и OB , если расстояние от центра O окружности до хорды AB вдвое меньше OA .

5 На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K . Найдите CK , если $AC = 2$ и $\angle A = 30^\circ$.

6 Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

7 Продолжения равных хорд AB и CD окружности соответственно за точки B и C пересекаются в точке P . Докажите, что треугольники APD и BPC равнобедренные.

Занятие №5

- 1** Докажите, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.
- 2** Через точку M проведены две касательные MA и MB к окружности (A и B – точки касания). Докажите, что $MA = MB$.
- 3** Расстояние от точки M до центра O окружности равно диаметру. Через точку M проведены две прямые, касающиеся окружности в точках A и B . Найдите углы треугольника AOB .
- 4** В прямой угол вписана окружность радиуса 12, касающаяся сторон угла в точках A и B . Через некоторую точку на меньшей дуге AB окружности проведена касательная, отсекающая от данного угла треугольник. Найдите его периметр.
- 5** Прямая касается окружности с центром O в точке A . Точка C на этой прямой и точка D на окружности расположены по одну сторону от прямой OA . Докажите, что угол CAD вдвое меньше угла AOD .
- 6** В острый угол, равный 60° , вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Радиус меньшей окружности равен r . Найдите радиус большей окружности.
- 7** Вычислить:

$$\frac{6 \cdot 2^8 - 9 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^{12}}{4 \cdot 2^{10} + 4 \cdot 2^{12} - 8 \cdot 2^{11}}$$

- 8** Решить уравнение:

$$\frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{4x + 2}{3x - 2}$$

Занятие №6

- 1** Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на его биссектрисе.
- 2** Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC . В треугольник ABD и ACD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 . Докажите, что отрезок O_1O_2 виден из точки D под прямым углом.
- 3** К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной, равной 8, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 4** Прямая, параллельная хорде AB , касается окружности в точке C . Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- 5** Две прямые, пересекающиеся в точке C , касаются окружности в точках A и B . Известно, что $\angle ACB = 120^\circ$. Докажите, что сумма отрезков AC и BC равна отрезку OC .
- 6** Пусть r – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c . Докажите, что $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.
- 7** В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M . Пусть $AM = x$, $BC = a$, полупериметр треугольника равен p . Докажите, что $x = p - a$.
- 8** В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.

Домашняя работа №3

- 1** Хорда большей из двух концентрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.
- 2** Точки A и B лежат на окружности. Касательные к окружности, проведенные через эти точки, пересекаются в точке C . Найдите углы треугольника ABC , если $AB = AC$.
- 3** Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C . Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.
- 4** К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной 4, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 5** В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M . Пусть $AM = x$, $BC = a$, полупериметр треугольника равен p . Докажите, что $x = p - a$.
- 6** Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.
- 7** CH – высота прямоугольного треугольника ABC , проведенная из вершины прямого угла. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACH , BCH и ABC , равна CH .

Подготовка к проверочной работе

- 1 Чему равен угол между биссектрисами двух смежных углов?
- 2 Чему равен угол между биссектрисами двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых? Докажите это.
- 3 Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.
- 4 Чему равна сумма всех внешних углов треугольника?
- 5 Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, параллельна основанию.
- 6 Докажите, что если в треугольнике один угол равен сумме двух других, то такой треугольник прямоугольный.
- 7 Докажите, что если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то такой треугольник прямоугольный.
- 8 Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник прямоугольный.
- 9 Сформулируйте теорему об угле в 30° в прямоугольном треугольнике. Сформулируйте обратную теорему.
- 10 Сформулируйте теорему о диаметре, перпендикулярном хорде.
- 11 Сформулируйте теорему о диаметре, проходящем через середину хорды.
- 12 Где лежит центр вписанной в треугольник окружности? Где лежит центр описанной окружности?
- 13 Сформулируйте теорему о двух касательных, проведенных из одной точки к окружности.
- 14 Докажите, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.
- 15 Угол между биссектрисами двух углов треугольника равен 120° . Чему равен третий угол треугольника?
- 16 Угол треугольника равен 50° . Найдите угол между высотами, проведенными из двух других углов.
- 17 В треугольнике ABC угол $\angle B = 60^\circ$. Найдите угол между биссектрисами двух других внешних углов.
- 18 Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.
- 19 Продолжения равных хорд AB и CD окружности соответственно за точки B и C пересекаются в точке P . Докажите, что треугольники APD и BPC равнобедренные.
- 20 Хорда большей из двух концентрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.
- 21 Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C . Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.

- 22** К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной 4, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 23** Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.
- 24** Докажите, что отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, лежит на прямой BC .
- 25** В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M на расстояние, равное AM . Найдите расстояние от полученной точки до вершин B и C , если $AB = 5$, $AC = 12$.
- 26** Дана окружность с центром O . На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC , равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (D – точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$.
- 27** Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной 10, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.
- 28** На сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах построены четыре окружности. Докажите, что общая хорда окружностей, построенных на двух соседних сторонах, параллельна общей хорде двух других окружностей.

Проверочная работа**Вариант 1**

- 1** 1) Чему равен угол между биссектрисами двух смежных углов?
2) Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.
3) Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, параллельна основанию.
4) Докажите, что если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то такой треугольник прямоугольный.
5) Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник прямоугольный.
6) Сформулируйте теорему об угле в 30° в прямоугольном треугольнике. Сформулируйте обратную теорему.
7) Сформулируйте теорему о диаметре, проходящем через середину хорды.
8) Где лежит центр вписанной в треугольник окружности?
- 2** В треугольнике ABC обе стороны AB и BC равны 15. Чему равна сторона AC , если $\angle BAC = 60^\circ$?
- 3** Угол между биссектрисами двух углов треугольника равен 100° . Чему равен третий угол треугольника?
- 4** Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.
- 5** Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C . Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.
- 6** К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной 4, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 7** В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M на расстояние, равное AM . Найдите расстояние от полученной точки до вершин B и C , если $AB = 5$, $AC = 12$.
- 8** Дана окружность с центром O . На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC , равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (D – точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$.
- 9** Решить уравнение:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{7}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$$

- 10** Найти значение выражения $61a - 11b + 67$, если $\frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9$

Проверочная работа**Вариант 2**

- 1** 1) Чему равен угол между биссектрисами двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых?
- 2) Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.
- 3) Докажите, что если в треугольнике один угол равен сумме двух других, то такое треугольник прямоугольный.
- 4) Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник прямоугольный.
- 5) Сформулируйте теорему об угле в 30° в прямоугольном треугольнике. Сформулируйте обратную теорему.
- 6) Сформулируйте теорему о диаметре, перпендикулярном хорде.
- 7) Сформулируйте теорему о двух касательных, проведенных из одной точки к окружности.
- 2** В треугольнике ABC обе стороны AB и BC равны 30. Чему равна сторона AC , если $\angle BAC = 60^\circ$?
- 3** Угол треугольника равен 80° . Найдите угол между высотами, проведенными из двух других углов.
- 4** Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.
- 5** Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C . Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.
- 6** К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной 4, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 7** Дана окружность с центром O . На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC , равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (D – точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$.
- 8** В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M на расстояние, равное AM . Найдите расстояние от полученной точки до вершин B и C , если $AB = 6$, $AC = 17$.
- 9** Решить уравнение:

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{4}$$

- 10** Найти значение выражения $61a - 11b + 78$, если $\frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9$