

## Занятие 08.05

1. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = 64, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 289. \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$$a \in \{-28\} \cup (-24; -8] \cup [8; 24) \cup \{28\}$$

2. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 5|x| - 12|y| = 5, \\ x^2 + y^2 - 28x + 196 - a^2 = 0. \end{cases}$$

имеет два или три различных решения.

$$a \in \{5\} \cup [13; 15]$$

3. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3|x - 2a| + 2|y - a| = 6, \\ xy - x - 2y + 2 = 0. \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

$$a \in \{2; \frac{1}{4}; \frac{1}{7}; 0\}$$

4. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых существует единственная пара чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - xy + y^2)(x^2 - 36) \geq 0, \\ |x - 2 + y| + |x - 2 - y| \leq a. \end{cases}$$

$$a \in [4; 8)$$

5. В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 4$  и  $BC = 3$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = \sqrt{11}$ ,  $SB = 3\sqrt{3}$ ,  $SD = 2\sqrt{5}$

- а) Докажите, что  $SA$  — высота пирамиды.  
б) Найдите угол между прямой  $SC$  и плоскостью  $ASB$ .

$$30^\circ$$

6. Все рёбра правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  имеют длину 6. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AA_1$  и  $A_1C_1$  соответственно.

- а) Докажите, что прямые  $BM$  и  $MN$  перпендикулярны.  
б) Найдите угол между плоскостями  $BMN$  и  $ABB_1$ .

$$\arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$$

7. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Точка  $M$  — середина ребра  $A_1C_1$ , а точка  $O$  — точка пересечения диагоналей боковой грани  $ABB_1A_1$ .

- а) Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, являющегося сечением призмы  $ABCA_1B_1C_1$  плоскостью  $AMB$ , лежит на отрезке  $OC_1$ .
- б) Найдите угол между прямой  $OC_1$  и плоскостью  $AMB$ .

$$\arcsin \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$$

8. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно 3. На ребре  $AB$  отмечена точка  $K$  так, что  $AK = 1$ . Точки  $M$  и  $L$  — середины рёбер  $A_1C_1$  и  $B_1C_1$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $AC$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

- а) Докажите, что прямая  $BM$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ .
- б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\alpha$ .

$$\frac{3}{4}$$

9. Длина диагонали куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  равна 3. На луче  $A_1C$  отмечена точка  $P$  так, что  $A_1P = 4$ .

- а) Докажите, что  $PBDC_1$  — правильный тетраэдр.
- б) Найдите длину отрезка  $AP$ .

$$\sqrt{11}$$

10. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  сторона основания  $AB = 4$ , а боковое ребро  $SA = 7$ . Точка  $M$  лежит на ребре  $BC$ , причем  $BM = 1$ , точка  $K$  лежит на ребре  $SC$ , причем  $SK = 4$ .

- а) Докажите, что плоскость  $MKD$  перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- б) Найдите объем пирамиды  $CDKM$ .

$$\frac{9\sqrt{11}}{7}$$