

**Занятие №1**

- 1** Докажите, что в равных треугольниках соответствующие медианы равны.
- 2** Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.
- 3** Через вершину  $B$  треугольника  $ABC$  проведена прямая, параллельная прямой  $AC$ . Образовавшиеся при этом три угла с вершиной  $B$  относятся как  $3 : 10 : 5$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .
- 4** Углы треугольника относятся как  $2 : 3 : 4$ . Найдите отношение внешних углов треугольника.
- 5** Внешние углы треугольника  $ABC$  при вершинах  $A$  и  $C$  равны  $115^\circ$  и  $140^\circ$ . Прямая, параллельная прямой  $AC$ , пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ . Найдите углы треугольника  $BMN$ .
- 6** Прямая, проходящая через вершину  $A$  треугольника  $ABC$ , пересекает сторону  $BC$  в точке  $M$ . При этом  $BM = AB$ ,  $\angle BAM = 35^\circ$ ,  $\angle CAM = 15^\circ$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .
- 7** Острые углы прямоугольного треугольника равны  $81^\circ$  и  $9^\circ$ . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.
- 8** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на гипотенузе  $AB$  взяты точки  $K$  и  $M$ , причем  $AK = AC$  и  $BM = BC$ . Найдите  $\angle MCK$ .

**Занятие №2**

- 1** Дан треугольник  $ABC$ , причем  $AB = AC$  и  $\angle A = 110^\circ$ . Внутри треугольника взята точка  $M$  такая, что  $\angle MBC = 30^\circ$ , а  $\angle MCB = 25^\circ$ . Найдите  $\angle AMC$ .
- 2** Докажите, что если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то такой треугольник прямоугольный.
- 3** Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.
- 4** Докажите, что если треугольник вписан в окружность и одна из его сторон является диаметром этой окружности, то такой треугольник является прямоугольным.
- 5** Докажите обратное, что если треугольник прямоугольный и вписан в окружность, то гипотенуза будет являться диаметром окружности.
- 6** Докажите, что окружность, построенная на стороне равностороннего треугольника как на диаметре, проходит через середины двух других сторон треугольника.
- 7** Докажите, что отличная от  $A$  точка пересечения окружностей, построенных на сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  как на диаметрах, лежит на прямой  $BC$ .
- 8** Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу пополам. Найдите углы треугольника.
- 9** Острый угол прямоугольного треугольника равен  $30^\circ$ . Докажите, что высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, делят прямой угол на три равные части.
- 10** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на гипотенузе  $AB$  взяты точки  $K$  и  $M$ , причем  $AK = AC$  и  $BM = BC$ . Найдите  $\angle MCK$ .

**Домашняя работа №1****1** Вычислить:

1)  $3^7 \cdot 3^9 : 3^{14}$

2)  $\frac{10^8}{2^9 \cdot 2^8}$

**2** Упростить выражение:

$$\frac{7-5m}{m-4} + \frac{4m}{m+4} \cdot \frac{m^2-16}{4m} + \frac{9m-23}{m-4}$$

**3** Упростить и найти значение выражения:

$$\left( \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4x} \right), \quad \text{при } x = 0,2$$

**4** Докажите, что в равных треугольниках соответствующие биссектрисы равны.**5** В равностороннем треугольнике  $ABC$  биссектрисы  $CN$  и  $AM$  пересекаются в точке  $P$ . Найдите  $\angle MPN$ .**6** Медиана  $AM$  треугольника  $ABC$  перпендикулярна его биссектрисе  $BK$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ .**7** На продолжениях гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  за точки  $A$  и  $B$  соответственно взяты точки  $K$  и  $M$ , причем  $AK = AC$  и  $BM = BC$ . Найдите угол  $МСК$ .**8** Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.**9** На стороне  $AB$  квадрата  $ABCD$  построен равносторонний треугольник  $ABM$ . Найдите угол  $DMC$ .

**Занятие №3**

- 1** Докажите следующие свойства окружности:
- 1) диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам;
  - 2) диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде;
  - 3) хорды, удаленные от центра окружности на равные расстояния, равны.
- 2** Через точку  $A$  окружности с центром  $O$  проведены диаметр  $AB$  и хорда  $AC$ . Докажите, что угол  $BAC$  вдвое меньше угла  $BOC$  (без использования свойств центральных и вписанных углов).
- 3** Найдите угол между радиусами  $OA$  и  $OB$ , если расстояние от центра  $O$  окружности до хорды  $AB$  вдвое меньше  $AB$ .
- 4** Даны две концентрические окружности и пересекающая их прямая. Докажите, что отрезки этой прямой, заключенные между окружностями, равны.
- 5** Прямая, проходящая через общую точку  $A$  двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках  $B$  и  $C$  соответственно. Расстояние между проекциями центров окружностей на эту прямую равно 12. Найдите  $BC$ , если известно, что точка  $A$  лежит на отрезке  $BC$ .
- 8\*** Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

**Занятие №4**

- 1** Внутренние углы треугольника  $ABC$  относятся как  $10 : 5 : 3$ . Найдите внутренние и внешние углы треугольника  $ABC$  и вычислите разницу самого наибольшего и наименьшего внешних углов.
- 2** Угол между радиусами  $OA$  и  $OB$  окружности равен  $60^\circ$ . Найдите хорду  $AB$ , если радиус окружности равен 12.
- 3** В треугольнике  $ABC$  углы  $B$  и  $C$  равны 30 и 40 соответственно. Сторону  $AB$  продлили за вершину  $A$  и из этой вершины провели высоту к стороне  $BC$  и биссектрису внешнего угла. Найдите угол между высотой и биссектрисой.
- 4** Дана окружность с центром  $O$ . На продолжении хорды  $AB$  за точку  $B$  отложен отрезок  $BC$ , равный радиусу. Через точки  $C$  и  $O$  проведена секущая  $CD$  ( $D$  – точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка  $CO$ ). Докажите, что  $\angle AOD = 3\angle ACD$ .
- 5** Равные хорды окружности с центром  $O$  пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что  $MO$  – биссектриса угла между ними.
- 6** Продолжения хорд  $AB$  и  $CD$  окружности с диаметром  $AD$  пересекаются под углом  $25^\circ$ . Найдите острый угол между хордами  $AC$  и  $BD$ .
- 7** Докажите, что точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ , точки  $B$  и  $C$ , а также точка пересечения биссектрис внешних углов с вершинами  $B$  и  $C$  лежат на одной окружности.
- 8** Упростить выражение:

$$\frac{x^3 + 50}{10x - x^2 - 25} + \frac{2x^2}{(x - 5)^2} + \frac{25x}{(5 - x)^2}$$

**Домашняя работа №2**

**1** Упростить выражение:

$$1 : \left( \frac{a}{a-b} + \frac{4a^2b - ab^2}{b^3 - a^3} + \frac{b^2}{a^2 + ab + b^2} \right) - \frac{-3ab}{(a-b)^2}$$

**2** Упростить и найти значение выражения:

$$\left( \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + 4x \right) \cdot \left( x - \frac{1}{x} \right), \quad \text{если } x = 5\frac{1}{3}$$

**3** Через точку на окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

**4** Найдите угол между радиусами  $OA$  и  $OB$ , если расстояние от центра  $O$  окружности до хорды  $AB$  вдвое меньше  $OA$ .

**5** На катете  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу  $AB$  в точке  $K$ . Найдите  $CK$ , если  $AC = 2$  и  $\angle A = 30^\circ$ .

**6** Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

**7** Продолжения равных хорд  $AB$  и  $CD$  окружности соответственно за точки  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что треугольники  $APD$  и  $BPC$  равнобедренные.

**Занятие №5**

- 1** Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на его биссектрисе.
- 2** Точка  $D$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . В треугольник  $ABD$  и  $ACD$  вписаны окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$ . Докажите, что отрезок  $O_1O_2$  виден из точки  $D$  под прямым углом.
- 3** К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной, равной 8, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 4** Прямая, параллельная хорде  $AB$ , касается окружности в точке  $C$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.
- 5** Две прямые, пересекающиеся в точке  $C$ , касаются окружности в точках  $A$  и  $B$ . Известно, что  $\angle ACB = 120^\circ$ . Докажите, что сумма отрезков  $AC$  и  $BC$  равна отрезку  $OC$ .
- 6** Пусть  $r$  – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами  $a$  и  $b$  и гипотенузой  $c$ . Докажите, что  $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ .
- 7** В треугольник  $ABC$  вписана окружность, касающаяся стороны  $AB$  в точке  $M$ . Пусть  $AM = x$ ,  $BC = a$ , полупериметр треугольника равен  $p$ . Докажите, что  $x = p - a$ .
- 8** Найти значение выражения:

$$61a - 11b + 50, \quad \text{если} \quad \frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9.$$

**Занятие №6**

- 1** Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на его биссектрисе.
- 2** Точка  $D$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . В треугольник  $ABD$  и  $ACD$  вписаны окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$ . Докажите, что отрезок  $O_1O_2$  виден из точки  $D$  под прямым углом.
- 3** К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной, равной 8, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
- 4** Прямая, параллельная хорде  $AB$ , касается окружности в точке  $C$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.
- 5** Две прямые, пересекающиеся в точке  $C$ , касаются окружности в точках  $A$  и  $B$ . Известно, что  $\angle ACB = 120^\circ$ . Докажите, что сумма отрезков  $AC$  и  $BC$  равна отрезку  $OC$ .
- 6** Пусть  $r$  – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами  $a$  и  $b$  и гипотенузой  $c$ . Докажите, что  $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ .
- 7\*** В треугольник  $ABC$  вписана окружность, касающаяся стороны  $AB$  в точке  $M$ . Пусть  $AM = x$ ,  $BC = a$ , полупериметр треугольника равен  $p$ . Докажите, что  $x = p - a$ .
- 8\*** В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.