

# MẢNG CỘNG DỒN VÀ MẢNG CHÊNH LỆCH

## TRƯỜNG HỢP 1 CHIỀU:

Cho mảng số nguyên  $A_1, A_2, \dots, A_N$  và mảng số nguyên  $S_1, S_2, \dots, S_N$ , trong đó:

$$S_x = \sum_{i=1}^x A_i$$

Ta gọi  $S$  là **mảng cộng dồn** của mảng  $A$ , và  $A$  là **mảng chênh lệch** của mảng  $S$ . Nếu đã học qua giải tích sẽ thấy  $A$  giống như đạo hàm của  $S$ , còn  $S$  giống như nguyên hàm của  $A$ . Tuy nhiên bài viết sẽ không đề cập đến vấn đề này.

### Một số tính chất:

Nếu biết mảng chênh lệch, ta có thể tính được mảng cộng dồn, và ngược lại, nếu biết mảng cộng dồn, ta có thể tính được mảng chênh lệch. Mảng cộng dồn sẽ được tính bằng công thức truy hồi:

$$S_x = S_{x-1} + A_x$$

Mảng chênh lệch được tính ngược lại:

$$A_x = S_x - S_{x-1}$$

Nếu biết mảng cộng dồn, ta có thể tính tổng của mảng chênh lệch trong một khoảng liên tiếp từ  $L$  đến  $H$  bằng công thức sau:

$$\sum_{i=L}^H A_i = S_H - S_{L-1}$$

Khi ta tăng một phần tử của mảng chênh lệch thêm một lượng  $\Delta$ , tất cả các phần tử trong mảng cộng dồn từ vị trí đó trở về sau sẽ tăng thêm một lượng  $\Delta$ :

$$A_x += \Delta \Leftrightarrow S_{i=x \rightarrow N} += \Delta$$

Từ đó, muốn tăng tất cả các phần tử của  $S$  trong một khoảng liên tiếp từ  $L$  đến  $H$  thêm một lượng  $\Delta$ , ta sẽ tăng  $A_L$  thêm  $\Delta$  và giảm  $A_{H+1}$  đi  $\Delta$ :

$$A_L += \Delta$$

$$A_{H+1} -= \Delta$$

### Ứng dụng:

Sử dụng mảng cộng dồn và mảng chênh lệch có thể giải quyết 2 bài toán sau:

Bài toán 1: Cho mảng  $A$ , hãy trả lời các truy vấn tính tổng các phần tử liên tiếp của  $A$  trong khoảng từ  $L$  đến  $H$ .

**Cách làm:** Tính mảng  $S$  là mảng cộng dồn của mảng  $A$ , sau đó sử dụng tính chất 2 để trả lời truy vấn.

Bài toán 2. Cho mảng  $S$  và các truy vấn tăng tất cả các phần tử của  $S$  trong khoảng từ  $L$  đến  $H$  thêm một lượng bằng nhau, hãy tìm mảng  $S$  sau khi đã thực hiện tất cả các truy vấn.

*Cách làm:* Tính mảng  $A$  là mảng chênh lệch của mảng  $S$ , sau đó sử dụng tính chất 3 để thao tác trên mảng  $A$ , cuối cùng tính lại  $S$  từ  $A$ .

Cây Binary Indexed Tree (BIT) là một cấu trúc dữ liệu hỗ trợ việc cập nhật một điểm và tính tổng các phần tử từ 1 cho đến một vị trí  $pos$  trong  $O(\log N)$ . Liên hệ với khái niệm mảng cộng dồn và mảng chênh lệch, ta có thể thấy BIT cập nhật trên mảng chênh lệch và truy vấn trên mảng cộng dồn. Bài toán cơ bản của BIT là cập nhật một điểm, truy vấn một khoảng. Vận dụng những tính chất ở trên, hãy cho biết làm thế nào để BIT có thể cập nhật một khoảng, truy vấn một điểm?

## TRƯỜNG HỢP 2 CHIỀU:

Cho mảng số nguyên 2 chiều  $A$ :

$$\begin{matrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,M} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{N,M} \end{matrix}$$

Và mảng số nguyên 2 chiều  $S$ :

$$\begin{matrix} S_{1,1} & S_{1,2} & \dots & S_{1,M} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & \dots & S_{2,M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{N,1} & S_{N,2} & \dots & S_{N,M} \end{matrix}$$

Trong đó:

$$S_{x,y} = \sum_{i=1}^x \sum_{j=1}^y A_{i,j}$$

Thì  $S$  là **mảng cộng dồn** của  $A$ , còn  $A$  là **mảng chênh lệch** của  $S$ .

### Một số tính chất:

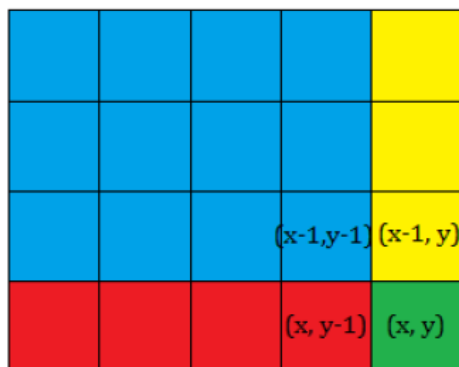
Các tính chất của mảng cộng dồn và mảng chênh lệch 2 chiều giống hệt mảng cộng dồn và mảng chênh lệch 1 chiều. Các công thức trong tính chất của mảng 2 chiều như sau:

- Tính mảng cộng dồn từ mảng chênh lệch:

$$S_{x,y} = S_{x-1,y} + S_{x,y-1} - S_{x-1,y-1} + A_{x,y}$$

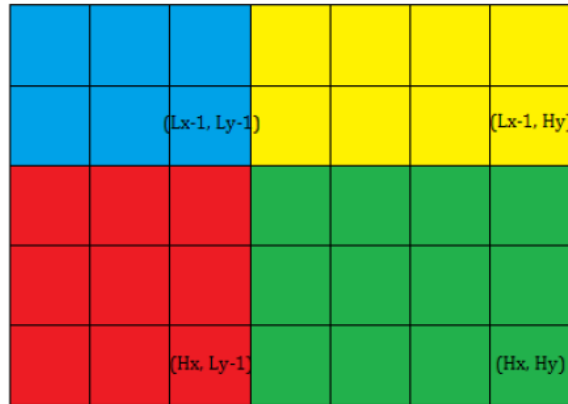
- Tính mảng chênh lệch từ mảng cộng dồn: (ngược lại)

$$A_{x,y} = S_{x,y} - S_{x-1,y} - S_{x,y-1} + S_{x-1,y-1}$$



- Tính tổng các phần tử của mảng chênh lệch trong hình chữ nhật con ( $Lx \rightarrow Hx, Ly \rightarrow Hy$ ):

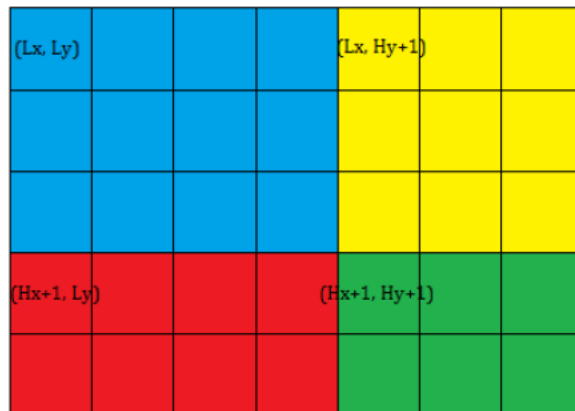
$$\sum_{i=Lx}^{Hx} \sum_{j=Ly}^{Hy} A_{i,j} = S_{Hx,Hy} - S_{Lx-1,Hy} - S_{Hx,Ly-1} + S_{Lx-1,Ly-1}$$



Hình chữ nhật được tính màu xanh lá cây

- Tăng tất cả các phần tử của mảng cộng dồn trong hình chữ nhật con ( $Lx \rightarrow Hx, Ly \rightarrow Hy$ ) thêm một lượng  $\Delta$ :

$$A_{Lx,Ly} += \Delta \quad A_{Hx+1,Ly} -= \Delta \quad A_{Lx,Hy+1} -= \Delta \quad A_{Hx+1,Hy+1} += \Delta$$



Hình chữ nhật được tăng màu xanh da trời

### Ứng dụng:

Ứng dụng của mảng cộng dồn và mảng chênh lệch 2 chiều cũng giống mảng 1 chiều, để giải quyết hai bài toán cơ bản nêu trên, nhưng ở đây là tính trên bảng 2 chiều thay vì một dãy 1 chiều.

Cũng giống như trường hợp 1 chiều, BIT 2D kết hợp với các công thức trong phần tính chất được sử dụng để thực hiện bài toán cập nhật điểm truy vấn bảng và cập nhật bảng truy vấn điểm.

### Mở rộng: 3 chiều, 4 chiều, ...

Các công thức tính chất của mảng cộng dồn và mảng chênh lệch dựa trên nguyên lý bao hàm - loại trừ.

Sử dụng nguyên tắc cộng trừ tương tự, hãy thử tự phát triển mảng cộng dồn và mảng chênh lệch lên 3 chiều.

**Bài tập:** Cho một hình hộp chữ nhật  $N \times M \times K$ , mỗi ô trên hình hộp chữ nhật ghi một số nguyên. Cho  $Q$  truy vấn, mỗi truy vấn yêu cầu tính tổng tất cả các số ghi trên các ô của một hình chữ nhật con. Hãy trả lời  $Q$  truy vấn trên, mỗi truy vấn với độ phức tạp  $O(1)$ .