ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.929

Хохлова Татьяна Наилевна

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ХОПФИЛДА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

М. М. Кипнис

Челябинск – 2012

Содержание

Глава 1

Численный и теоретический анализ устойчивости нейронных сетей с неограниченным количеством нейронов

1.1 Постановка задачи и алгоритм диагностирования устойчивости кольцевой сети с неограниченным количеством нейронов

Много работ посвящено проблеме устойчивости нейронных сетей, состоящих из двух нейронов (например, [4, 15]). Проблема устойчивости нейронной сети круговой архитектуры с запаздывающим взаимодействием при количестве нейронов больше двух исследуется, например, в работах [1–3, 6, 12, 16] Изучаемая нами в этой главе модель наиболее близка к модели работ [2, 16]. В отличие от работ [2, 16], мы не вводим запаздывание в реакцию нейрона на собственный сигнал (selfconnection), зато рассматриваем несимметричное взаимодействие нейрона с правым и левым соседом. Особенность нашего подхода в этом разделе и вообще в этой главе — рассмотрение конфигураций с неограниченным количеством нейронов. Методы нашего исследования основаны на конусах устойчивости, введенных в главе 1 диссертации (см. также [8]), но требуют изменения в связи с спецификой задачи о неограниченности количестве нейронов в кольце. Аналогичные методы применены в [5] для изучения устойчивости дискретных моделей круговой системы нейронов (см. также [6, 9]).

Переход от нелинейных моделей нейронных сетей с одним запаздыванием к линейным уравнениям посредством линеаризации описан в разделе

?? диссертации. Аналогично этому следующее дифференциальное уравнение описывает кольцевую нейронную сеть (рис. 1.1) с запаздыванием τ_1 во взаимодействии нейрона с левым соседним нейроном и τ с правым:

$$\dot{x}_j(t) + x_j(t) + a\,x_{j-1}(t-\tau_1) + b\,x_{j+1}(t-\tau) = 0 \qquad (j \bmod n). \tag{1.1}$$

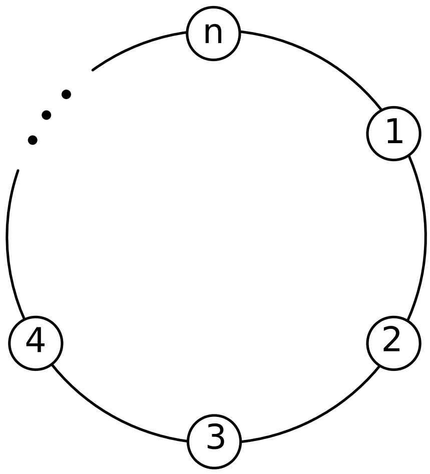

Рис. 1.1. Круговая система нейронов

Здесь x_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ сигнал j-го нейрона, действительные коэффициенты a и b характеризуют интенсивности взаимодействия нейрона с правым и левым соседними нейронами соответственно. Общее аналитическое исследование устойчивости системы (1.1) вряд ли возможно, поскольку даже скалярное уравнение $\dot{x}(t) + a\,x(t-\tau_1) + b\,x(t-\tau) = 0$ имеет, как выяснилось (см. [10, 11]), очень сложную структуру области устойчивости в пространстве параметров. Поэтому основными моделями в нашем исследовании будут два упрощенных варианта систем (1.1), в первом из которых $\tau_1 = 0$, во втором $\tau_1 = \tau$:

$$\dot{x}_j(t) + x_j(t) + a\,x_{j-1}(t) + b\,x_{j+1}(t-\tau) = 0 \qquad (j \bmod n), \tag{1.2}$$

$$\dot{x}_j(t) + x_j(t) + a\,x_{j-1}(t-\tau) + b\,x_{j+1}(t-\tau) = 0 \qquad (j \bmod n). \tag{1.3}$$

Уравнение (1.2) соответствует малым запаздываниям взаимодействия нейронов с правыми соседними нейронами, а (1.3) — близким запаздываниям взаимодействия нейронов с правыми и левыми соседями. В обоих уравнениях интенсивность взаимодействия нейронов с правыми и левыми соседями не обязательно одинакова. Последнее свойство отличает нашу модель от модели работ [2, 16]. Еще одно отличие в том, что у нас отсутствует запаздывание в реакции нейрона на собственный сигнал (selfconnection).

Системы (1.2), (1.3) принадлежат классу систем вида

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + Bx(t-\tau) = 0, \tag{1.4}$$

где $n \times n$ матрицы A, B одновременно триангулируемы. В главе **??** и статье автора диссертации [8] указан метод диагностики устойчивости таких систем с помощью конусов устойчивости.

Введем специальное обозначение для $n \times n$ матрицы оператора сдвига строк:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

В матричном виде уравнения (1.2), (1.3) соответственно будут иметь вид

$$\dot{x}(t) + (E + aP)\, x(t) + bP^{n-1}\, x(t-\tau) = 0, \tag{1.6}$$

$$\dot{x}(t) + E\, x(t) + (aP + bP^{n-1})\, x(t-\tau) = 0, \tag{1.7}$$

где E есть единичная $n \times n$ матрица, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$.

Пусть матрицы A, B в уравнении (1.4) приводятся одной трансформирующей матрицей к треугольным формам A_T, B_T с диагональными элементами λ_j, μ_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ соответственно. Построим n точек $M_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}) \in$

$\mathbb{R}^3$, так что

$$u_{1j} + iu_{2j} = \tau\mu_j \exp(i\tau \operatorname{Im}\lambda_j), \qquad u_{3j} = \tau \operatorname{Re}\lambda_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{1.8}$$

В силу результатов главы 1 диссертации (см. также [8]), система (1.4) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все точки M_j ($1 \leqslant j \leqslant n$) лежат внутри конуса устойчивости. Если хотя бы одна из точек M_j лежит вне конуса, то (1.4) неустойчива.

В разделах **??** **??** и **??** диссертации мы описали алгоритм и программный комплекс «Анализ устойчивости» (см. также [7]), предназначенный для диагностирования устойчивости системы (1.4). Программа по согласованному спектру λ_j, μ_j $1 \leqslant j \leqslant$ матриц A, B возвращает объединение интервалов

$$T = \cup_{k=1}^{N} (\tau_k,\, \tau_{k+1}), \tag{1.9}$$

такое что если $\tau \in T$, то система (1.4) асимптотически устойчива, а если $\tau \notin [\tau_k,\, \tau_{k+1}]$ при любом k ($1 \leqslant k \leqslant N$), то (1.4) неустойчива.

Для проверки устойчивости систем (1.2), (1.3) при неограниченном порядке n требуется модификация алгоритма, первоначально предназначенного для общей системы (1.4). В настоящем разделе мы указываем такой алгоритм.

Собственные числа матрицы P суть $\lambda_j = \exp(i\frac{2\pi j}{n})$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Поэтому при одновременном приведении четырех циркулянтных матриц $(I + a\,P)$, $b\,P^{n-1}$, I, $a\,P + b\,P^{n-1}$ к диагональному виду их диагональные элементы равны соответственно

$$\lambda_j^{'} = 1 + a\,\exp(i\frac{2\pi j}{n}), \quad \mu_j^{'} = b\,\exp(-i\frac{2\pi j}{n}), \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{1.10}$$

$$\lambda_j^{''} = 1, \quad \mu_j^{''} = a\,\exp(i\frac{2\pi j}{n}) + b\,\exp(-i\frac{2\pi j}{n}), \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{1.11}$$

Для изучения устойчивости (1.5), (1.6) строим систему точек $M_j^{'} = (u_{1j}^{'}, u_{2j}^{'}, u_3^{'}$ $\mathbb{R}^3$, определенных равенствами (см. (1.8), (1.10))

$$u_{1j}^{'}+iu_{2j}^{'} = \tau b \exp(i(-\frac{2\pi j}{n}+a\tau \sin\frac{2\pi j}{n})), \quad u_{3j}^{'} = \tau(1+a\cos\frac{2\pi j}{n}), \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{1.12}$$

Аналогично, для системы (1.5), (1.7) точки $M_j^{''} = (u_{1j}^{''}, u_{2j}^{''}, u_{3j}^{''}) \in \mathbb{R}^3$, определены равенствами (см. (1.8), (1.11))

$$u_{1j}^{''} + iu_{2j}^{''} = \tau a\,(\exp(i\frac{2\pi j}{n}) + b\exp(-i\frac{2\pi j}{n})), \quad u_{3j}^{''} = \tau, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{1.13}$$

Для анализа систем (1.5), (1.6) с большим n вместо дискретной системы точек M_j естественно ввести непрерывную замкнутую кривую $M^{'}(t) = (u_1^{'}(t), u_2^{'}(t), u_3^{'}(t)$ положив $t = \frac{2\pi j}{n}$ в (1.12):

$$u_1^{'}(t) + iu_2^{'}(t) = \tau b \exp(i(-t + a\,\tau\sin t)), \quad u_3^{'}(t) = \tau(1 + a\cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{1.14}$$

Аналогично, для (1.5), (1.7) строим кривую $M^{''}(t) = (u_1^{''}(t), u_2^{''}(t), u_3^{''}(t))$:

$$u_1^{''}(t) + iu_2^{''}(t) = \tau(a\exp(it) + b\exp(-it)), \quad u_3^{''}(t) = \tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{1.15}$$

При $n \to \infty$ точки M_j, определенные by (1.12), образуют плотное на кривой (1.14) множество. Поэтому вопрос об устойчивости системы (1.5), (1.6) сводится к геометрической проблеме. Если все точки кривой (1.14) лежат внутри конуса устойчивости (**??**), (**??**) (см. определение **??**), то система (1.5), (1.6) устойчива при любом n, а если хотя бы одна точка кривой (1.14) лежат вне конуса устойчивости, то система (1.5), (1.6) неустойчива при всех достаточно больших значениях n (Рис.1.2).

В свою очередь, эта геометрическая задача может быть решена численными методами. Для системы (1.5), (1.6) при различных значениях $t \in [0, 2\pi]$ мы вычисляем $\arg(u_1^{'}(t) + iu_2^{'}(t))$ согласно (1.14) и находим на конусе устойчивости на высоте $h = u_3^{'}(t)$ точку или две точки с тем же аргументом. Срав-

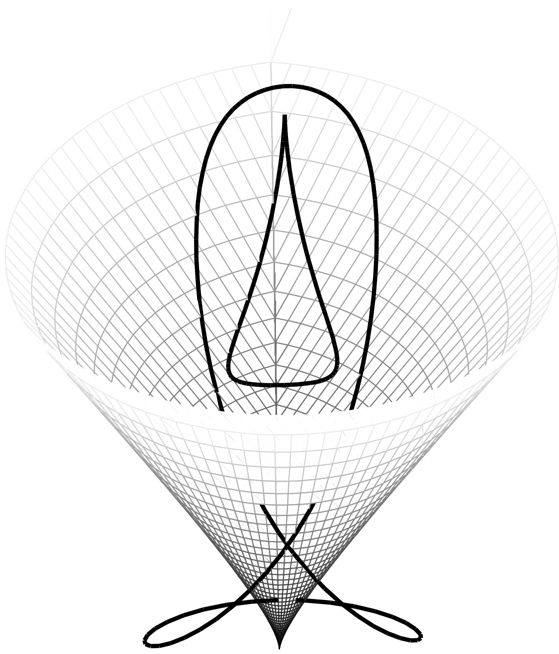

Рис. 1.2. Конус устойчивости и две кривые (1.14). Одна кривая для $\tau = 1.5$, $a = -1.4$, $b = 0.7$, находится частично вне конуса устойчивости, следовательно, система (1.5), (1.6) неустойчива при достаточно больших n. Вторая кривая для $\tau = 2$, $a = 0.5$, $b = -0.2$, находится полностью внутри конуса устойчивости, следовательно, система (1.5), (1.6) устойчива при любом n.

нение модулей точек на кривой и конусе дает ответ на вопрос, устойчива ли система (1.5), (1.6). Аналогично изучается система (1.5), (1.7).

1.2 Программный комплекс «Устойчивость нейронных сетей»

1.2.1 Функциональное назначение программы, область применения, её ограничения

Программа «Устойчивость нейронных сетей» по коэффициентам уравнений (1.2), (1.3) и величине запаздывания выдаёт сообщение об устойчивости системы. Программа выполнена в пакете MATLAB 7.11.0 (R2010b) посредством matlab APY для создания графического интерфейса пользователя (GUI).

Программа может применяться при разработке и исследовании моделей нейронных сетей, описываемых скалярными и матричными дифференциальными уравнениями с запаздыванием. Продукт может применяться для получения вывода об устойчивости конкретных систем, а также для регулирования коэффициентов модели с целью получения устойчивого решения.

1.2.2 Использование

Все входные параметры задаются на одноимённой панели, показанной на рисунке 1.3.

Прежде всего пользователю предлагается выбрать конфигурацию нейронной сети. В программе доступны два варианта кругового соединения нейронов: с малым запаздыванием взаимодействия с правыми соседями (уравнение (1.2)) и с одинаковым запаздыванием взаимодействия с правыми и левыми соседями (уравнение (1.3)). Выбирая первую или вторую радиокнопку, пользователь определяет, для какой именно модели будет проводиться анализ устойчивости. На рисунке 1.3 выбрана первая конфигурация, а на рисунке 1.4 — вторая.

Ниже, на панели ввода представлено название, описание и рисунок выбранной конфигурации. Пользователю необходимо ввести коэффициенты уравнения, соответствующие выбранной конфигурации. Ввести данные коэффициенты можно двумя способами: вручную или при помощи кнопки «Заполнить», которая генерирует случайные числа в каждой ячейке. Для очистки значений коэффициентов используется кнопка «Очистить».

Все элементы пользовательского интерфейса снабжены всплывающими подсказками.

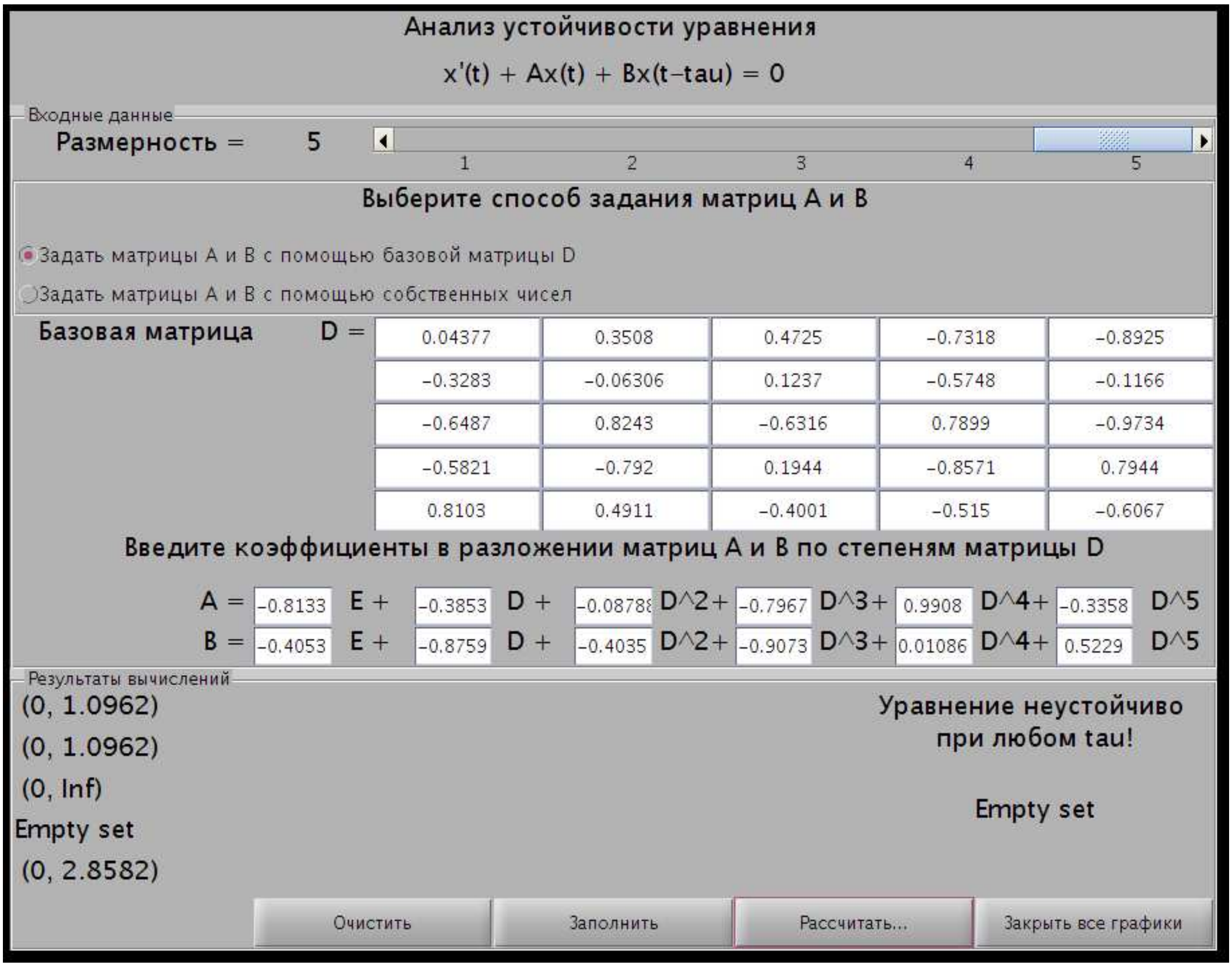

Рис. 1.3. Главное окно программы «Устойчивость нейронных сетей» при выборе первой конфигурации

После ввода данных в обоих случаях для начала расчёта необходимо нажать на кнопку «Рассчитать. . . ». Появляется вспомогательное окно (рис. 1.5), представляющее результаты расчётов графически: в трёхмерном пространстве изображаются конус устойчивости и системы точек, расположение которых позволяет сделать вывод об устойчивости данного уравнения. Чёрным цветом обозначаются точки, находящиеся внутри конуса устойчивости и соответствующие устойчивости, а красным — находящиеся вне конуса и соответствующие неустойчивости. При этом есть возможность использовать стандартный набор инструментов графического окна пакета MATLAB. На панели «Результаты вычислений» отображается отчёт о результатах вычислений и

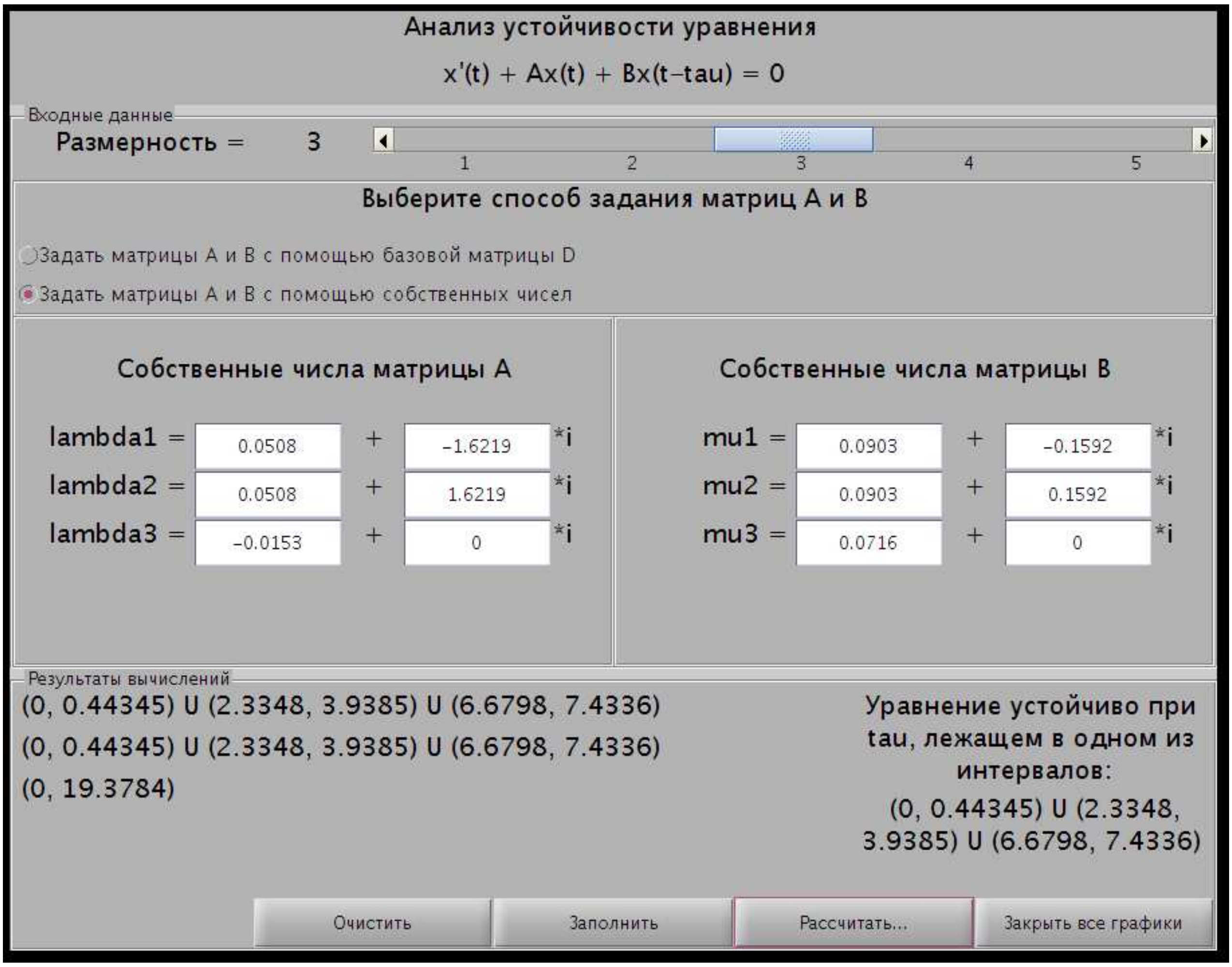

Рис. 1.4. Главное окно программы «Устойчивость нейронных сетей» при выборе второй конфигурации

выводится сообщение об устойчивости уравнения. Причём, если существует хотя бы один промежуток значений τ, обеспечивающих устойчивость уравнения, то будут показаны промежутки устойчивости (см. рис. 1.3), если нет — будет выдано сообщение о неустойчивости уравнения при всех значениях запаздывания (см. рис. 1.4).

После проведения расчётов пользователь может изменить входные параметры и ещё раз выполнить расчёт устойчивости. Появится ещё одно окно с графиком, а отчёт в главном окне будет обновлён. Данную процедуру можно проделывать сколько угодно раз. Для удобства пользователя была создана

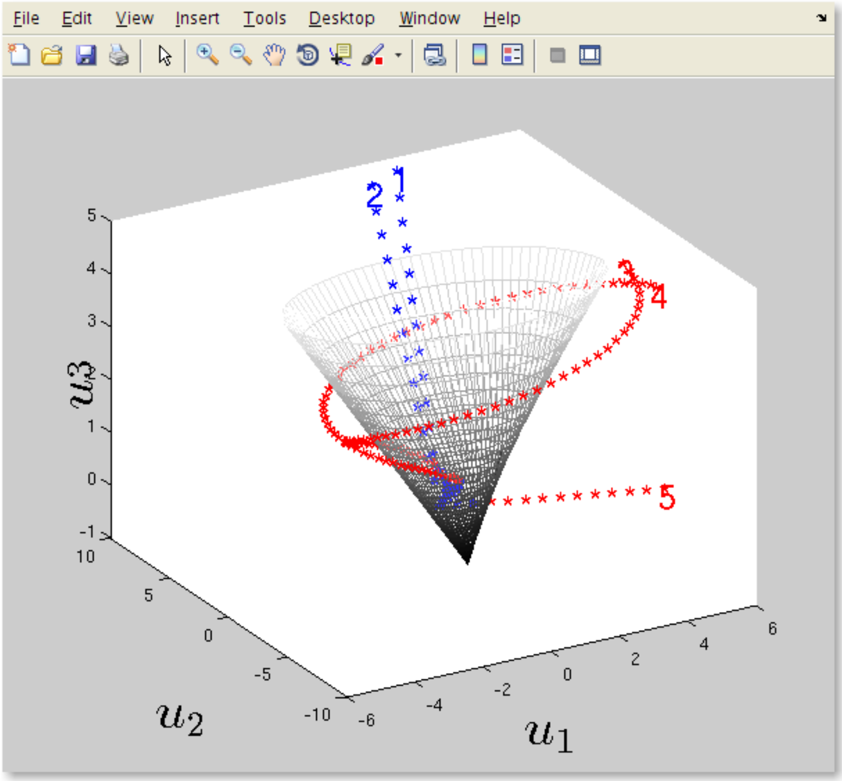

Рис. 1.5. Графический вывод результатов вычисления

кнопка «Закрыть все графики», позволяющая закрыть все дополнительные окна.

При вводе некорректных данных программа выдаёт различные сообщения об ошибках. Например, следующее сообщение может быть получено при вводе некорректных значений в поле ввода параметра a (см. рис. 1.6).

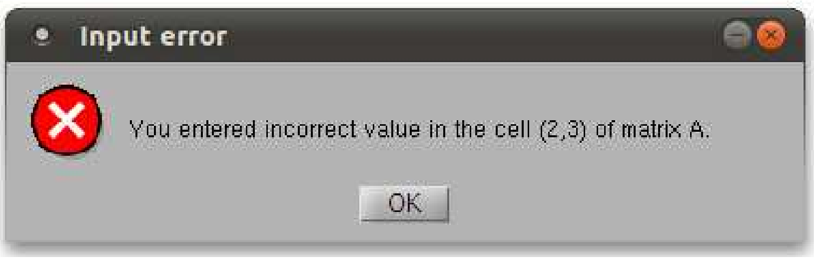

Рис. 1.6. Сообщение об ошибке: введены некорректные данные

1.2.3 Используемые технические средства

Программа «Устойчивость нейронных сетей» разрабатывалась в высокоуровневой среде для математических вычислений MATLAB 7.11.0 (R2010b) с использованием matlab APY для создания графического интерфейса пользователя (GUI). Пользовательская версия программного продукта поставляется в скомпилированном с помощью компилятора mcc, входящего в дистрибутив. Для запуска программы нужен установленный Matlab соответствующей версии либо библиотеки Matlab, которые можно получить на официальном сайте (http://www.mathworks.com/).

1.2.4 Специальные условия и требования организационного, технического и технологического характера

Каких-либо специальных условий применения и требований организационного характера не требуется.

1.2.5 Условия передачи документации или её продажи

Программа распространяется на безвозмездной основе.

1.3 Результаты исследования устойчивости кольцевой сети нейронов с неограниченным количеством нейронов

В работе Mori и др. [13] доказано, что устойчивость уравнения (1.4), независимая от запаздывания, гарантирована при условии

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{\alpha_{jj}-\sum_{k=1,k\neq j}^{n}|\alpha_{jk}|\}>\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}|\beta_{jk}|, \tag{1.16}$$

где α_{jk}, β_{jk} суть элементы матриц A, B соответственно. Отсюда вытекает следующее Предложение.

Предложение 1.1. *Если $|a| + |b| < 1$, то системы (1.5), (1.6) и (1.5), (1.7) асимптотически устойчивы при любом n и любом $\tau \geqslant 0$.*

Утверждение 1.1 также несложно вывести из Теоремы **??** раздела **??** диссертации.

Теорема 1.1. *Если $|a + b| > 1$, то системы (1.5), (1.6) и (1.5), (1.7) неустойчивы при любом $\tau > 0$, если n достаточно велико.*

Доказательство теоремы 1.1 будет дано в разделе 1.5. Предложение 1.1 и теорема 1.1 не дает информации о поведении систем (1.5), (1.6) и (1.5), (1.7) для случая, когда выполнены одновременно неравенства $|a+b| < 1$ и $|a|+|b| > 1$. Для этого случая мы применили программный комплекс «Устойчивость нейронных сетей».

Здесь мы представляем результаты, полученные применения программного комплекса, Предложения 1.1 и Теоремы 1.1 .

На рисунках 1.7, 1.8 показаны области D_τ в плоскости параметров (a, b) для некоторых значений τ. Область D_τ является расширением области, заданной неравенством $|a| + |b| < 1$, на северо-запад и юго-восток до границ, зависящих от τ. Если точка (a, b) лежит внутри D_τ на Рис. 1.7, то система (1.5), (1.6) асимптотически устойчива. Если (a, b) лежит вне D_τ на рисунке 1.7, то система (1.5), (1.6) неустойчива при достаточно больших n. Аналогичные утверждения верны для рисунка 1.8 и системы (1.5), (1.7). Область D_τ центрально-симметрична: если $(a, b) \in D_\tau$, то $(-a, -b) \in D_\tau$. При одинаковых τ область устойчивости для системы (1.5), (1.6) шире области для (1.5), (1.7).

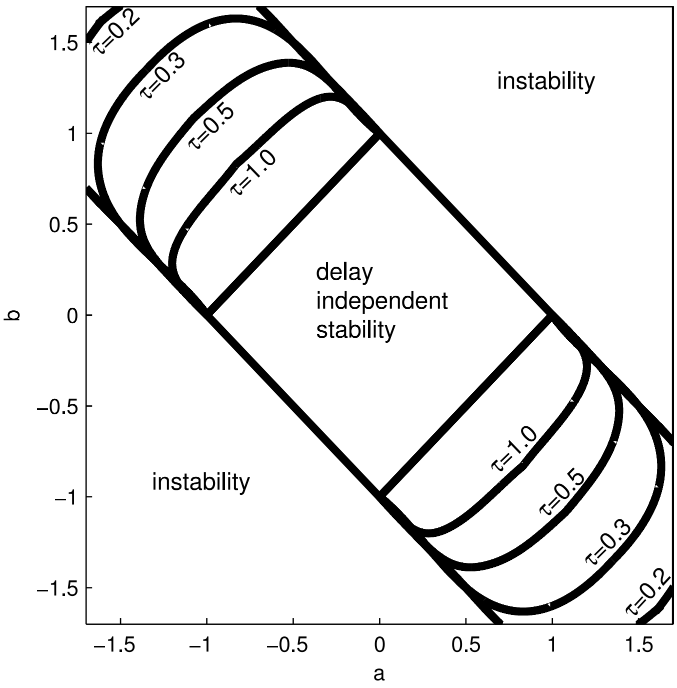

Рис. 1.7. Области устойчивости для системы (1.5), (1.6)

Для обеих систем важна прямая $a = -b$ в плоскости (a, b), в окрестности которой сконцентрированы точки устойчивости систем. Поэтому естественно рассмотреть следующие две системы уравнений:

$$\dot{x}_j(t) + x_j(t) + a\,(x_{j-1}(t) - x_{j+1}(t-\tau)) = 0 \qquad (j \bmod n), \tag{1.17}$$

$$\dot{x}_j(t) + x_j(t) + a\,(x_{j-1}(t-\tau) - x_{j+1}(t-\tau)) = 0 \qquad (j \bmod n). \tag{1.18}$$

Определение 1.1. *Границей устойчивости системы (1.17) для больших n назовем такое число $a_1(\tau) \in \mathbb{R}$, что если $|a| < a_1(\tau)$, то (1.17) устойчива при любом n, а если $|a| > a_1(\tau)$, то (1.17) неустойчива при всех достаточно больших n. Аналогично определим $a_2(\tau)$ как границу устойчивости (1.18) для больших n.*

В таблице 1.1 представлены результаты анализа устойчивости систем (1.17), (1.18) с помощью программного комплекса «Устойчивость нейронных сетей». Очевидно, $\lim_{\tau\to\infty} a_1(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} a_2(\tau) = 1/2$.

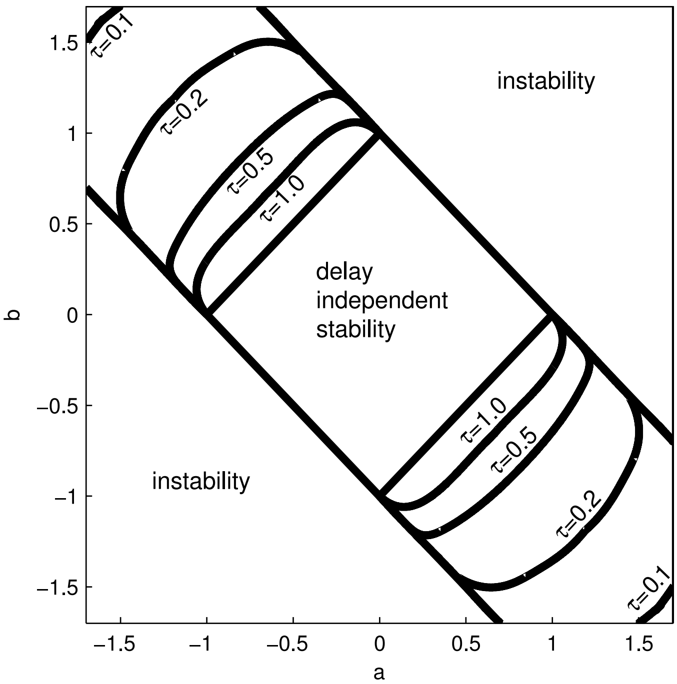

Рис. 1.8. Области устойчивости для системы (1.5), (1.7)

Не столь очевидно поведение систем (1.17), (1.18) при $\tau \to 0$, которое рассматривается в следующей теореме.

Теорема 1.2.

$$\lim_{\tau \to 0} a_1(\tau)\sqrt{2\tau} = \lim_{\tau \to 0} a_2(\tau) 2\sqrt{\tau} = 1. \tag{1.19}$$

Доказательство теоремы 1.2 дано в разделе 1.5. Таблица 1.1 подтверждает оценки теоремы 1.2. Действительно, согласно таблице 1.1, при $\tau = 0.01$ имеем $a_1(\tau)\sqrt{2\tau} \simeq 1.0017$, $a_2(\tau)2\sqrt{\tau} \simeq 1.0033$.

Таблица 1.1. Границы областей устойчивости для систем (1.17), (1.18)

τ	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	3	4
$a_1(\tau)$	7.0830	3.1901	2.2742	1.6337	1.0829	0.8229	0.6597	0.5988	0.5678
$a_2(\tau)$	5.0166	2.2733	1.6337	1.1921	0.8226	0.6595	0.5678	0.5380	0.5244

1.4 Разрыв в кольце: нейронная сеть линейной конфигурации

Выясним, что происходит с устойчивостью, когда разорвана связь между, скажем, первым и последним нейроном в кольцевой сети нейронов (Рисунок 1.9).

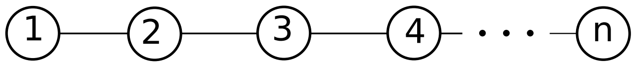

Рис. 1.9. Линейная система нейронов.

В этом случае система (1.5), (1.6) переходит в некоторое уравнение вида (1.4) с матрицами A, B, которые, вообще говоря, не приводятся одновременно к треугольному виду. Наш метод конусов устойчивости непригоден для анализа устойчивости таких систем. Поэтому мы вынуждены ограничиться анализом системы (1.5), (1.7) с разорванной связью. Итак, рассмотрим следующий аналог системы (1.5), (1.7):

$$\begin{gathered} \dot{x}_1(t) + x_1(t) + b\,x_2(t-\tau) = 0, \\ \dot{x}_j(t) + x_j(t) + a\,x_{j-1}(t-\tau) + b\,x_{j+1}(t-\tau) = 0, \qquad 2 \leqslant j \leqslant (n-1), \\ \dot{x}_n(t) + x_n(t) + a\,x_{n-1}(t-\tau) = 0, \qquad n > 2. \end{gathered} \tag{1.20}$$

Матричная форма уравнения (1.20) такова:

$$\dot{x}(t) + I\,x(t) + D\,x(t-\tau) = 0, \tag{1.21}$$

где $n \times n$ матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.22}$$

Для формулировки следующей теоремы определим функцию $F(\tau)$ от запаздывания $\tau \in (0, \infty)$:

$$F(\tau) = \frac{1}{4 \sin^2 \omega(\tau)}, \tag{1.23}$$

где $\omega(\tau)$ есть наименьший положительный корень уравнения

$$\tau = \omega \operatorname{tg} \omega. \tag{1.24}$$

Теорема 1.3. *1. Если $|ab| < \frac{1}{4}$, то система (1.21), (1.22) асимптотически устойчива при любом n и любом $\tau \geqslant 0$.*
2. Если $ab > \frac{1}{4}$, то система (1.21), (1.22) неустойчива при любом $\tau \geqslant 0$, если n достаточно велико.
3. Если $ab < 0$ и $|ab| < F(\tau)$, то система (1.21), (1.22) асимптотически устойчива при любом n.
4. Если $ab < 0$ и $|ab| > F(\tau)$, то система (1.21), (1.22) неустойчива, если n достаточно велико.

Доказательство Теоремы 1.3 дано в разделе 1.5. Область устойчивости, независимой от запаздывания, очерченная пунктом 1 Теоремы 1.3, шире области $|a| + |b| < 1$, гарантированной достаточным условием (1.16). Результаты Теоремы 1.3 отражены на Рисунке 1.10. Сравнивая Рисунки 1.8 и 1.10, мы видим, что при разрыве кольца нейронов область устойчивости в пространстве параметров увеличивается. Еще одно наблюдение: в системе (1.21), (1.22)

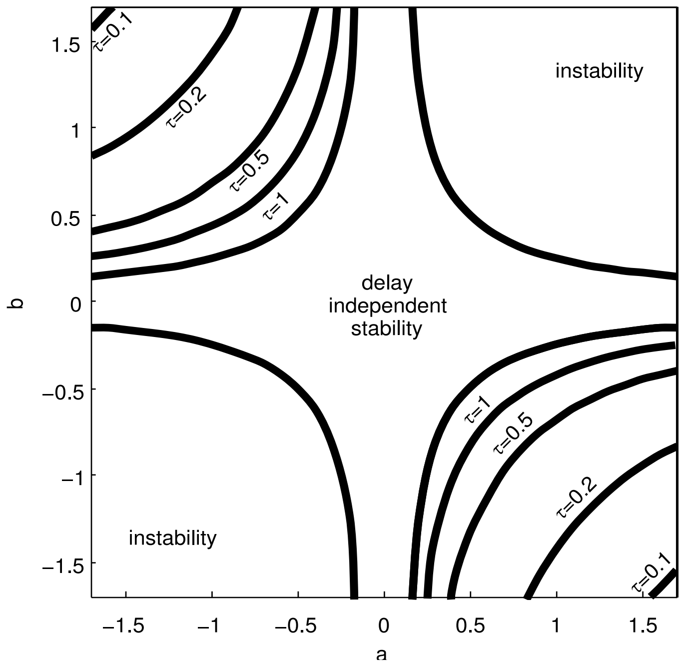

Рис. 1.10. Области устойчивости системы (1.21), (1.22).

при $a = 0$ (или $b = 0$) Теорема 1.3 гарантирует устойчивость независимо от запаздывания. В интерпретации это означает, что при разрыве кольца нейронов блокировка взаимодействия нейронов с правым (или левым) соседом гарантирует устойчивость при любом запаздывании, что отнюдь неверно для неповрежденного кольца нейронов (см. Теорему 1.1 и Рисунки 2,3).

Рассмотрим вариант $a = -b$ в (1.21), (1.22). Положим $H(\tau) = \sqrt{F(\tau)}$ (см. (1.23), (1.24)). Очевидно, $\lim_{\tau\to\infty} H(\tau) = 1/2$ и $\lim_{\tau\to 0} H(\tau)2\sqrt{\tau} = 1$. В системе (1.21), (1.22) с $a = -b$ функция $H(\tau)$ играет роль границы устойчивости, аналогичную функции $a_2(\tau)$ для системы (1.18) (см. Определение 1.1). Сравнение поведения $H(\tau)$ с $a_2(\tau)$ (см. (1.19)) обнаруживает весьма малые различия в условиях устойчивости для замкнутой и разорванной цепи нейронов, если соединение каждого нейрона с соседними антисимметрично, то есть при $a = -b$ в (1.21), (1.22).

1.5 Доказательства теорем главы 1

1.5.1 Доказательство Теоремы 1.1

Начнем доказательство с замечания, что неравенство

$$u_1 + u_3 \geqslant 0 \tag{1.25}$$

верно на поверхности конуса устойчивости (??), (??) (см. определение ??) и внутри него. Из (1.14) и $a + b > 1$ получим $u_1^{'}(\pi) + u_3^{'}(\pi) = -\tau(b + a - 1) < 0$. Последнее неравенство показывает, что точка $M^{'}(\pi)$ находится вне конуса устойчивости (см. (1.25)), поэтому при $a + b > 1$ система (1.5), (1.6) неустойчива, если n достаточно велико.

Преобразование $t \to t + \pi, a \to -a, b \to -b$ переводит кривую (1.14) в себя, поэтому область устойчивости системы (1.5), (1.6) центрально-симметрична. Следовательно, и неравенство $a+b < -1$ обеспечивает неустойчивость системы (1.5), (1.6) при достаточно больших n. Аналогично, положив в (1.15) $t = \pi/2$, докажем неустойчивость (1.5), (1.7) при достаточно больших n и $|a + b| > 1$. Теорема 1.1 доказана.

1.5.2 Доказательство Теоремы 1.2

1. Для выяснения асимптотики $a_1(\tau)$ требуется вычислить точки касания в $\mathbb{R}^3$ конуса устойчивости с кривой (1.14) при $a = a_1(\tau)$, $b = -a_1(\tau)$, $t = \pi/2$. На кривой (1.14)

$$\arg(u_1^{'}(\frac{\pi}{2}) + iu_2^{'}(\frac{\pi}{2})) - \frac{\pi}{2} = \tau a_1(\tau). \tag{1.26}$$

Когда $\tau \to 0$ и $h = u_3(\pi/2) = \tau$, на конусе (??), (??)

$$\arg(u_1 + iu_2) - \frac{\pi}{2} = -\omega + \arg(i\omega - \tau) - \frac{\pi}{2} \sim \frac{\tau}{\omega} - \omega. \tag{1.27}$$

Здесь $\alpha \sim \beta$ означает, что $(\alpha/\beta) \to 1$. Касание кривой и конуса влечет равенство аргументов (1.26), (1.27), а также равенство $|u_1 + iu_2| = |u_1^{'}(\pi/2) +$

$iu_2'(\pi/2)|$. Поэтому

$$\tau a_1(\tau) \sim \frac{\tau}{\omega} - \omega, \quad \tau a_1(\tau) = \sqrt{\omega^2+\tau^2} \sim \omega. \tag{1.28}$$

Из (1.28) получим $\omega \sim \sqrt{\tau/2}$, что дает требуемую оценку $a_1(\tau) \sim 1/\sqrt{2\tau}$. 2. Для выяснения асимптотики $a_2(\tau)$ положим $a = a_2(\tau)$, $b = -a_2(\tau)$ в (1.15). Получим сегмент

$$u_1''(t) = 0, \quad u_2''(t) = 2\tau a_2(\tau)\sin t, \quad u_3''(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{1.29}$$

На конусе (**??**), (**??**) положим $u_3 = \tau$, $u_1 = 0$. Получим $\omega^2 \sim \tau$, поэтому

$$u_2 = \omega\cos\omega + \tau\sin\omega \sim \sqrt{\tau}. \tag{1.30}$$

Из (1.30) и (1.29) при $t = \pi/2$ получим $a_2(\tau) \sim 1/(2\sqrt{\tau})$. Теорема 1.2 доказана.

1.5.3 Доказательство Теоремы 1.3

Начнем доказательство Теоремы 1.3 с леммы.

Лемма 1.1. Для любого натурального n собственные числа $n \times n$ матрицы D (см. (1.22)) суть

$$\mu_{jn} = 2\sqrt{ab}\cos\frac{\pi j}{n+1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{1.31}$$

Доказательство. Характеристический многочлен матрицы D (см. (1.22)) $D_n(\mu) = |\mu\, I - D|$ удовлетворяет соотношениям ($n = 1, 2, \ldots$)

$$D_1(\mu) = \mu, \quad D_2(\mu) = \mu^2 - ab, \quad D_{n+2}(\mu) = \mu D_{n+1}(\mu) - ab\, D_n(\mu). \tag{1.32}$$

При $ab = 0$ заключение леммы очевидно. Пусть $ab \neq 0$. Сделаем замену переменной и построим новую последовательность функций $U_n(y)$:

$$\mu = 2y\sqrt{ab}, \quad D_n(2y\sqrt{ab}) = (\sqrt{ab})^n U_n(y). \tag{1.33}$$

Из (1.32) и (1.33) выведем

$$U_1(y) = 2y, \quad U_2(y) = 4y^2 - 1, \quad U_{n+2}(y) = 2yU_{n+1}(y) - U_n(y), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.34}$$

Равенства (1.34) описывают многочлены Чебышева второго рода $U_n(y)$, нули которых таковы:

$$y_{jn} = \cos \frac{\pi j}{n+1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{1.35}$$

Из (1.35) и (1.33) получим требуемое. Лемма 1.1 доказана. ■

Продолжим доказательство Теоремы 1.3. Собственные числа $n \times n$ матрицы E равны $\lambda_{jn} = 1$. Поэтому из (1.31) получим при $|ab| < 1/4$

$$\frac{|\mu_{jn}|}{\operatorname{Re} \lambda_{jn}} = 2\sqrt{ab}\, |\cos \frac{\pi j}{n+1}| < 1, \tag{1.36}$$

что достаточно для асимптотической устойчивости, независимой от запаздывания (см. Теорему **??**). Пункт 1 Теоремы 1.3 доказан.

Для доказательства пунктов 2-4 Теоремы 1.3 построим точки $M_{jn} = (u_{1jn}, u_{2jn}, u_{3jn}) \in \mathbb{R}^3$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, такие что (см. (1.31))

$$u_{1jn} + iu_{2jn} = \tau\mu_{jn} \exp(i\tau \operatorname{Im} \lambda_{jn}) = 2\tau\sqrt{ab} \cos \frac{\pi j}{n+1}, \quad u_{3jn} = \tau \operatorname{Re} \lambda_{jn} = \tau. \tag{1.37}$$

Пусть $ab > 1/4$. Тогда по (1.37) найдется такое n_0, что для любого $n > n_0$

$$u_{1nn} = 2\tau\sqrt{ab} \cos \frac{\pi n}{n+1} < -\tau. \tag{1.38}$$

При этом $u_{2nn} = 0$, $u_{3nn} = \tau$. Но на поверхности и внутри конуса устойчивости (**??**), (**??**) на высоте $u_3 = \tau$ имеем

$$u_1 \geqslant -u_3 = -\tau. \tag{1.39}$$

Сравнивая (1.39) с (1.38), выясняем, что точка M_{nn} при $n > n_0$ лежит вне конуса устойчивости. Поэтому система (1.21), (1.22) неустойчива при достаточно больших n. Пункт 2 Теоремы 1.3 доказан.

Из (1.37) и Леммы 1.1 при $ab < 0$ получим

$$u_{1jn} = 0, \quad u_{2jn} = 2\tau\sqrt{|ab|}\cos\frac{\pi j}{n+1}, \quad u_{3jn} = \tau. \tag{1.40}$$

В то же время на поверхности конуса устойчивости на высоте $u_3 = \tau$ при $u_1 = 0$

$$|u_2| = \frac{\omega}{\cos\omega}, \tag{1.41}$$

где параметр ω ввиду $u_1 = 0$ удовлетворяет условию (1.24). Теперь из (1.40), (1.23) и (1.24) получим

$$u_{2jn} = \tau\cos\frac{\pi j}{n+1}\sqrt{\frac{|ab|}{F(\tau)}\frac{1}{\sin\omega}}, \tag{1.42}$$

Если $|ab| < F(\tau)$, то из (1.42) и неравенства $\mu_{jn} < 2$ (см. Лемму 1.1) вытекает $|u_{2jn}| < |u_2|$ при любых j, n, поэтому все точки M_{jn} лежат внутри конуса устойчивости, следовательно, система (1.21), (1.22) асимптотически устойчива при любых n. Пункт 3 Теоремы 1.3 доказан.

Пусть $|ab| > F(\tau)$. Тогда найдется такое значение n_0, что $\cos\frac{\pi}{n+1} > \sqrt{\frac{F(\tau)}{|ab|}}$ при любом $n > n_0$. Ввиду (1.40) отсюда следует, что

$$u_{21n} > 2\tau\sqrt{F(\tau)}. \tag{1.43}$$

Из (1.43), (1.23) и (1.24) получим $u_{21n} > \frac{\omega}{\cos\omega}$, что ввиду (1.41) дает $u_{21n} > u_2$. Поэтому точка M_{nn} находится вне конуса устойчивости, что влечет неустойчивость системы (1.21), (1.22) при всех $n > n_0$. Теорема 1.3 доказана.

1.6 Сравнение результатов главы 1 с известными результатами

В большинстве работ по устойчивости кольцевых нейронных сетей рассматривается задача об устойчивости сети из двух [14], трех [1] или четырех

[2], [12] нейронов. Задача об устойчивости кольцевой системы произвольного количества нейронов рассматривали Ю. Юан и С. Кэмпбелл [16]. В [16] изучена следующая система, описывающая кольцевую нейронную сеть:

$$\dot{x}_j(t) + x_j(t) + \alpha\, x_j(t-\tau_s) + \beta\,(x_{j-1}(t) + x_{j+1}(t-\tau)) = 0 \qquad (j \bmod n), \tag{1.44}$$

В уравнении (1.44) реакция нейрона на собственный сигнал (selfconnection) разделена на две части: мгновенная реакция с интенсивностью 1 и запаздывающая на время τ_s с интенсивностью α. Реакции нейрона на сигнал правого и левого соседа имеет одинаковые запаздывания τ и одинаковые интенсивности β. Если положить $\alpha = 0$, то система (1.44) совпадет с частным видом нашей системы (1.3) с $a = b$. Как показывают Предложение 1.1 и Теорема 1.1, а также рисунок 1.8, поведение таких систем несложно: при $|\beta| < 1/2$ система устойчива независимо от запаздывания, при $|\beta| > 1/2$ система неустойчива независимо от запаздывания. Сложность динамики системы нейронов в системе Юан-Кэмпбелл (1.44) происходит именно из-за запаздывания в реакции на собственный сигнал.

Это свидетельствует о недостаточной адекватности модели (1.44). В нашей модели источником сложности поведения моделей (1.2), (1.3) является несимметричность (когда $a \neq b$) и даже антисимметричность (когда $a = -b$) реакции нейрона на сигналы правого и левого соседа, что соответствует традиционному разделению сигналов на возбуждающие и тормозящие.

После публикации [1] 2006 года работы С. Кэмпбелл по нейронным сетям были посвящены только сетям с распределенным запаздыванием.

В работе [12] изучена модель кольцевой сети (1.44) с $\tau_s = \tau$, в которой $n = 4$. В этой статье указаны только области устойчивости, независимой от запаздывания, статья посвящена в основном проблемам симметрия в поведении нелинейной системы.

Насколько известно автору, кольцевые нейронные сети с неопределенно большим количеством нейронов до сих пор не рассматривались в литературе. Благодаря рассмтрению большого количества нейронов изложение решения задачи об устойчивости кольцевой сети в диссертации является достаточно прозрачным. Вот для сравнения цитата из работы [16] (2004) Ю. Юан и С. Кэмпбелл:

«Области устойчивости при нечетных n сходны с областями при $n = 3$, которые были исследованы в [1] поэтому мы сосредоточимся на области устойчивости для четных n.»

Изучение устойчивости линейных конфигураций нейронов не встречается в литературе, хотя в публикациях по устойчивости кольцевых сетей такая тема вполне естественна, так как линейная конфигурация в некотором смысле является предельной для кольцевой.

Литература

1. Campbell S., Ncube I., Wu. J. Multistability and stable asynchronous periodic oscillations in a multiple-delayed neural system // Physica D. 2006. Vol. 214(2). Pp. 101–119.

2. Campbell S. A., Ruan S., Wei J. Qualitative analysis of a neural Network model with multiple time delays // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1999. Vol. 9 (8). Pp. 1585–1595.

3. Guo S., Huang L. Stability of nonlinear waves in a ring of neurons with delays // J. of Differential Equations. 2007. Vol. 236 (2). Pp. 343–374.

4. Huang C., Huang L., Feng J. et al. Hopf bifurcation analysis for a two-neuron network with four delays // Chaos, Solitons and Fractals. 2007. Vol. 34. Pp. 795–812.

5. Ivanov S., Kipnis M., Malygina V. The stability cone for a difference matrix equation with two delays // ISRN Appl. Math. 2011. Pp. 1–19.

6. Kaslik E., Balint S. Complex and chaotic dynamics in a discrete-time-delayed Hopfield neural network with ring architecture // Neural Networks. 2009. Vol. 22 (10). Pp. 1411–1418.

7. Khokhlova T. Stability of Ring Neural Networks. 2011. Номер свидетельства о регистрации 17346 от 01.08.2011. URL: https://sites.google.com/site/stabilityanalysis/stability_networks.

8. Khokhlova T., Kipnis M., Malygina V. The stability cone for a delay differential matrix equation // Applied Mathematics Letters. 2011. Vol. 24. Pp. 742–745.

9. Kipnis M., Malygina V. The stability cone for a matrix delay difference Equation // Int. J. of Math. and Mathematical Scences. 2011. Pp. 1–18.

10. Kipnis M. M., Levitskaya I. S. Stability of delay difference and differential equations: similarity and distinctions // Proc. of the Int. Conf. Difference equations, special functions and orthogonal polynomials 2005, World Scientific. 2007. Pp. 315–324.

11. Levitskaya I. S. Stability domain of a linear differential equation with two delays // *Computers & Mathematics with Applications.* 2006. Vol. 51. Pp. 153–159.

12. Lu X., Guo S. Complete classification and stability of equilibrium in a delayed ring network // Electronic Journal of Differential Equations. 2008. Vol. 2008(85). P. 1–12.

13. Mori T., Fukuma N., Kuwahara M. Simple stability criteria for single and composite linear systems with time delay // Int. J. Control. 1981. Vol. 34. Pp. 1175–1184.

14. Wei J., Ruan S. Stability and bifurcation in a neural network model with two delays // Physica D. 1999. Pp. 255–272.

15. Yu W., Cao J. Stability and Hopf bifurcations on a two-neuron system with time delay in the frequency domain // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17 (4). Pp. 1355–1366.

16. Yuan Y., Campbell S. Stability and sinchronization ring of identical cells with delayed coupling // J. of Dynamics and differential equations. 2004. Vol. 16. Pp. 709–744.