

線形決定リストの下界

Lower bounds for linear decision lists

May 18, 2019

目次

- 1 序
- 2 線形しきい値関数
- 3 線形決定リスト
- 4 数学的準備
- 5 補題の証明
- 6 $MAJ \circ XOR$ に関する定理
- 7 参考文献
- 8 おわり

今日やること

決定リスト:(Decision List)

- Rivest によって導入された計算モデル [4]

今日やること

決定リスト:(Decision List)

- Rivest によって導入された計算モデル [4]
- 一定の手順で, 別の関数を表現する

今日やること

決定リスト:(Decision List)

- Rivest によって導入された計算モデル [4]
- 一定の手順で, 別の関数を表現する
- 機械学習理論を始めとする様々な場所で登場する

今日やること

決定リスト:(Decision List)

- Rivest によって導入された計算モデル [4]
- 一定の手順で, 別の関数を表現する
- 機械学習理論を始めとする様々な場所で登場する

今回は制限された線形決定リストというものについての下界を考える.

今日やること

- 効率よく計算することができる LDL は large monochromatic rectangle を持つことを示す
- $MAJ \circ XOR$ は large monochromatic rectangle を持たないことを示す
- $MAJ \circ XOR$ の下界が $2^{\Omega(n)}$ であることを示す

諸注意

注：

これから定義などを行うにあたり large, small など感覚的な用語がたびたび出現する.

ここで線形決定リスト (LDL) のサイズが small とは入力 n に対して, サイズが n の多項式で表せること. そうでない場合を large と呼ぶ。

Sign 関数

Definition

関数 $sign : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ を以下のように定義する.

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)

Definition

線形しきい値関数 (LTF) $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ とは,
 $w_0, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ に対して以下のような関数である。

$$f(x) = \text{sign}(w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i)$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)

Definition

線形しきい値関数 (LTF) $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ とは,
 $w_0, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ に対して以下のような関数である。

$$f(x) = \text{sign}(w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i)$$

Example

$\text{AND}(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$AND(0, 0)$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(0, 0) \\ = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0) \end{aligned}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(0, 0) &= \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0) \\ &= \text{sign}(-0.7) \end{aligned}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(0, 0) &= \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0) \\ &= \text{sign}(-0.7) \\ &= 0 \end{aligned}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$AND(0, 1)$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(0, 1) \\ = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1) \end{aligned}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(0, 1) &= \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1) \\ &= \text{sign}(-0.2) \end{aligned}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(0, 1) &= \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1) \\ &= \text{sign}(-0.2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

AND(1,0) も同様

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$AND(1, 1)$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(1, 1) \\ = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1) \end{aligned}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(1, 1) &= \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1) \\ &= \text{sign}(-0.7 + 1.0) \end{aligned}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(1, 1) &= \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1) \\ &= \text{sign}(-0.7 + 1.0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

ここで LTF の視覚的解釈を試みたい. sign 関数の条件式を展開することにより,

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & (-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y > 0) \\ 0 & (-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \leq 0) \end{cases}$$

を得る

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & (-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y > 0) \\ 0 & (-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \leq 0) \end{cases}$$

を平面上で表した図は以下のとおりである.

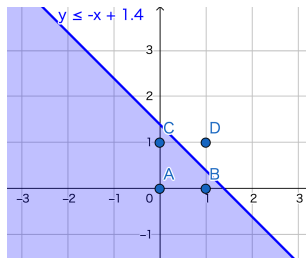


Figure: AND-LTF

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

このように LTF はあるしきい値を境界にして, 入力 (x,y) を分節するような動作をしていると考えることもできる.

(この場合, 青の領域を 0 とすれば AND-LTF である)

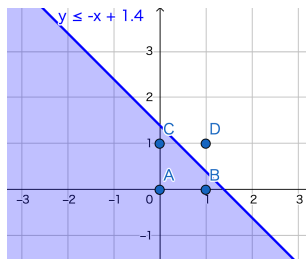


Figure: AND-LTF

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

では LTF はどれくらい表現能力があるのだろうか？

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

では LTF はどれくらい表現能力があるのだろうか？
全然能力がないことがすぐにわかる

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

では LTF はどれくらい表現能力があるのだろうか？
全然能力がないことがすぐにわかる
→ XOR を分節することができない

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

具体的に XOR の分節は以下のようなになる.

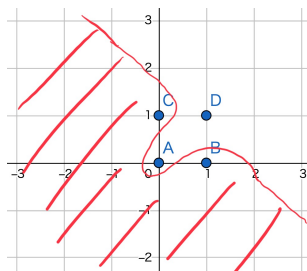


Figure: XOR の分節

しかし LTF の定義からこのような曲線描くことは不可能であることがわかる.

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

三本の矢なら折れないというが …



LTF をいくつか束ねたら計算能力は強くなるだろうか？

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

三本の矢なら折れないというが …



LTF をいくつか束ねたら計算能力は強くなるだろうか？

→ 線形決定リスト

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

- 線形決定リスト (LDL) は if-then ルールによる計算モデルである.

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

- 線形決定リスト (LDL) は if-then ルールによる計算モデルである.
- if 文の条件となる関数 (LTF) L_1, L_2, \dots と, 条件が真の場合の出力 $a_1, a_2 \dots$ からなり

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

- 線形決定リスト (LDL) は if-then ルールによる計算モデルである.
- if 文の条件となる関数 (LTF) L_1, L_2, \dots と, 条件が真の場合の出力 a_1, a_2, \dots からなり

```
if  $L_1 == 1$  then  $a_1$   
  else if  $L_2 == 1$  then  $a_2$   
    else if  $L_3 == 1$  then  $a_3$   
       $\vdots$ 
```

と計算を行っていく.

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

LDL がいくつかの LTF の束であると考ええると, 表現能力があがっていきそう.

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

LDL がいくつかの LTF の束であると考ええると、表現能力があがっていきそう。

実際に XOR を計算する LDL を設計して、そのことを示す。

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

方針としては以下の図のように XOR を分節すると良さそうだ.

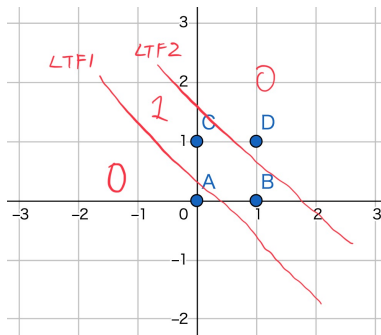


Figure: XOR-LDL の設計方針

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

Definition

XOR を計算する LDL を

$L_1(x, y) = \text{sign}(-1.9 - x + y)$, $L_2 = \text{sign}(-0.9 - x + y)$, $L_3 = \text{sign}(1)$
として

```
if  $L_1 == 1$  then 0  
  else if  $L_2 == 1$  then 1  
    else if  $L_3 == 1$  then 0
```

と定義する

すると, この LDL は XOR を計算する.

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

Example

XOR(0,0) の計算を見てみる. まず $(L_1, 0)$ が評価される. しかし $L_1(0, 0) = \text{sign}(-1.9 - 0 + 0) = 0$ なので次の条件へ移動する.

```
if  $L_1 == 1$  then 0  
  else if  $L_2 == 1$  then 1  
    else if  $L_3 == 1$  then 0
```


線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

Example

次に $(L_2, 1)$ が評価される. しかし

$L_2(0, 0) = \text{sign}(-0.9 - 0 + 0) = 0$ なので次の条件へ移動する.(ここで入力のどちらかが1であれば $L_2 = 1$ となることに注意.)

```
if  $L_1 == 1$  then 0  
  else if  $L_2 == 1$  then 1  
    else if  $L_3 == 1$  then 0
```

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

Example

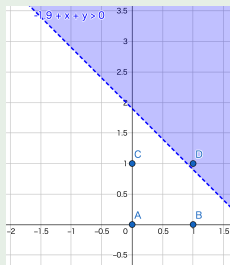
最後に $(L_3, 0)$ が評価される. L_3 は恒真関数なので 0 が出力される

```
if  $L_1 == 1$  then 0  
  else if  $L_2 == 1$  then 1  
    else if  $L_3 == 1$  then 0
```

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

Example

以上の LDL の計算を平面上に図示するとこのようになる.

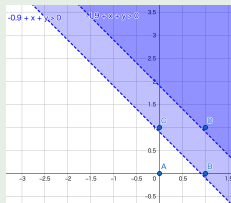


まず, 座標 (1,1) の値が分節される

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

Example

次に座標 $(0,1)$, $(1,0)$ が分節され,
このことにより残った $(0,0)$ の値も分節されたことになる。



ここでは LDL を操作的に定義したが、次に形式的な定義を与える。

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

Definition

サイズ k の線形決定リスト (LDL) とは、各タプル

$\overbrace{(L_1, a_1), (L_2, a_2), \dots, (L_k, a_k)}^{size=k}$ が以下の条件を満たすものである。

- 1 各 $i \in [1, k]$ について $a_i \in \{0, 1\}$
- 2 各 $i \in [1, k]$ について query L_i は LTF である
- 3 最後の $i = k$ について L_k は $L_k(x) = 1$ となる恒真関数である

注：

各 L_i は query 関数と呼ばれる

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

Definition

より形式的に $f(x)$ が LDL あることを

$$f(x) = \bigvee_{i=1}^k \left(a_i \wedge L_i(x) \wedge \bigwedge_{j < i} \neg L_j(x) \right)$$

と定義できる.¹

¹しかし今回はこの式は利用しない.

LDL に関連する研究

- Krause : AND-DL の小さな表現. しかし第一層に線形しきい値素子、第二層に XOR 素子を持つような深さ 2 の回路の計算には指数サイズが必要とされた.
- Impagliazzo, Williams : rectangle-DL と呼ばれる関連 (related) 計算モデルにおいて下界を得るための条件を示した. 多項式サイズの rectangle-DL では計算できないが多項式サイズの MAJ_oMAJ 回路で計算可能な関数を暗黙的に示した.

LDL に関連する研究

- Groger, Turan, Vatan : 決定リスト (bounded-rank 線形決定木についても) に対する Inner Product MOD2 関数の下界を示した
- Uchizawa, Takimoto : LDL と LDT のクラスについて, その線形しきい値クエリの重みが入力列の長さに対して多項式サイズで有界な場合の下界を示した.

Communication 行列

次にいくつか証明の道具を用意していく.

Definition

関数 $F : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ に対する Communication 行列 M_F とは, $2^n \times 2^n$ 行列で, 各要素が $M_F[x, y] := F(x, y)$ と定義された行列である.

Communication 行列

次にいくつか証明の道具を用意していく.

Definition

関数 $F : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ に対する Communication 行列 M_F とは, $2^n \times 2^n$ 行列で, 各要素が $M_F[x, y] := F(x, y)$ と定義された行列である.

Example

線形しきい値関数 $\text{AND}(x, y)$ は $\text{AND} : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ で, それに対する Communication 行列は各要素が $M_{\text{AND}}[x, y] := \text{AND}(x, y)$ と定義された 2×2 行列である.

Communication 行列 (例)

Example

$$M_{AND} = \begin{pmatrix} AND(0,0) = 0 & AND(0,1) = 0 \\ AND(1,0) = 0 & AND(1,1) = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Communication 行列は入力 (x,y) について, 行列 M_{AND} の (x,y) 成分が対応する. これは実際に AND の真理値表そのものである.

rectangle

Definition

ある集合 $R \subseteq X \times Y$ が, $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ によって, $R = X' \times Y'$ と表せるとき, R を $X \times Y$ 上の rectangle といい, rectangle R のことを $R \stackrel{\text{def}}{=} (X', Y')$ と表記する.

Monochromatic rectangle/square

Definition

関数 $F : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ と $b \in 0, 1$ に対する monochromatic b -rectangle とは以下の条件を満たす集合の組 (X, Y) である.

- 1 $X, Y \subseteq \{0, 1\}^n$
- 2 すべての $x \in X, y \in Y$ について $F(x, y) = b$

Monochromatic rectangle/square

Definition

関数 $F : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ と $b \in 0, 1$ に対する monochromatic b -rectangle とは以下の条件を満たす集合の組 (X, Y) である.

- 1 $X, Y \subseteq \{0, 1\}^n$
- 2 すべての $x \in X, y \in Y$ について $F(x, y) = b$

Definition

また、サイズ s の monochromatic b -square (X, Y) とは,

- 1 (X, Y) は monochromatic b -rectangle である
- 2 $|X| = s, |Y| = s$ であるものをいう

Monochromatic rectangle/square(例)

Example

次の行列で、灰色の部分は 1-monochromatic square である。

X \ Y	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	1	1	1	1
101	0	0	0	0	1	1	1	1
110	0	0	0	0	1	1	1	1
111	0	0	0	0	1	1	1	1

Monochromatic rectangle/square(例)

Example

具体的に 1-monochromatic square S は,
 $X' = \{100, 101, 110, 111\}$, $Y' = \{100, 101, 110, 111\}$ として,
 $S = (X', Y')$ である. また $|X'| = |Y'| = 4$ からサイズ 4 である.

Monochromatic rectangle/square(例)

注：

次のような場合も 1-monochromatic square である.

X \ Y	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	1	0	0	1	1	1	0
101	0	1	0	0	1	1	1	0
110	0	1	0	0	1	1	1	0
111	0	1	0	0	1	1	1	0

直積分布 (Product distribution)

Definition

$\{0, 1\}^n$ における確率分布を μ とする. このとき $X \subseteq \{0, 1\}^n$ に対する確率分布 $\mu(X)$ を

$$\mu(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in X} \mu(x)$$

と定義する.²

²ある入力列 $x \in X$ に対して $|x|$ は入力列中の 1 の数を表す.

直積分布 (Product distribution)

Definition

$\{0, 1\}^n$ における確率分布を μ, ν とする. $\{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n$ における確率分布 η が直積分布であるとは, 任意の $x, y \in \{0, 1\}^n$ について $\eta(x, y) = \mu(x) \times \nu(y)$ となることである.³

³このとき直積分布 η を $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \mu \times \nu$ と表記することがある.

直積分布 (Product distribution)

Definition

$\{0, 1\}^n$ における確率分布を μ, ν とする. $\{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n$ における確率分布 η が直積分布であるとは, 任意の $x, y \in \{0, 1\}^n$ について $\eta(x, y) = \mu(x) \times \nu(y)$ となることである.³

Definition

$\{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n$ における直積分布が $\mu \times \nu$ であり, 集合 $X, Y \subseteq \{0, 1\}^n$ があるとき $\text{rectangle}(X, Y)$ の重みとは,
$$\mu \times \nu(X, Y) = \mu(X) \times \nu(Y)$$

³このとき直積分布 η を $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \mu \times \nu$ と表記することがある.

直積分布 (Product distribution)(例)

Example

次の行列で、各入力確率分布が一様分布 (μ, ν) であるとする。

X \ Y	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	1	1	1	1
101	0	0	0	0	1	1	1	1
110	0	0	0	0	1	1	1	1
111	0	0	0	0	1	1	1	1

直積分布 (Product distribution)(例)

では, このときの monochromatic 1-square の重みはいくらか計算してみよう. 先述の通り,

$X' = \{100, 101, 110, 111\}$, $Y' = \{100, 101, 110, 111\}$ なので, 計算する内容は,

$$\mu \times \nu(X', Y')$$

直積分布 (Product distribution)(例)

では, このときの monochromatic 1-square の重みはいくらか計算してみよう. 先述の通り,

$X' = \{100, 101, 110, 111\}$, $Y' = \{100, 101, 110, 111\}$ なので, 計算する内容は,

$$\begin{aligned} & \mu \times \nu(X', Y') \\ &= \mu(X') \times \nu(Y') \end{aligned}$$

直積分布 (Product distribution)(例)

では, このときの monochromatic 1-square の重みはいくらか計算してみよう. 先述の通り,

$X' = \{100, 101, 110, 111\}$, $Y' = \{100, 101, 110, 111\}$ なので, 計算する内容は,

$$\begin{aligned} & \mu \times \nu(X', Y') \\ &= \mu(X') \times \nu(Y') \\ &= \sum_{x \in X'} \mu(x) \times \sum_{y \in Y'} \nu(y) \end{aligned}$$

直積分布 (Product distribution)(例)

では, このときの monochromatic 1-square の重みはいくらか計算してみよう. 先述の通り,

$X' = \{100, 101, 110, 111\}$, $Y' = \{100, 101, 110, 111\}$ なので, 計算する内容は,

$$\begin{aligned} & \mu \times \nu(X', Y') \\ &= \mu(X') \times \nu(Y') \\ &= \sum_{x \in X'} \mu(x) \times \sum_{y \in Y'} \nu(y) \\ &= (\mu(100) + \mu(101) + \mu(110) + \mu(111)) \times \\ & \quad (\nu(100) + \nu(101) + \nu(110) + \nu(111)) \end{aligned}$$

直積分布 (Product distribution)(例)

では, このときの monochromatic 1-square の重みはいくらか計算してみよう. 先述の通り,

$X' = \{100, 101, 110, 111\}$, $Y' = \{100, 101, 110, 111\}$ なので, 計算する内容は,

$$\begin{aligned} & \mu \times \nu(X', Y') \\ &= \mu(X') \times \nu(Y') \\ &= \sum_{x \in X'} \mu(x) \times \sum_{y \in Y'} \nu(y) \\ &= (\mu(100) + \mu(101) + \mu(110) + \mu(111)) \times \\ & \quad (\nu(100) + \nu(101) + \nu(110) + \nu(111)) \\ &= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \times \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \end{aligned}$$

直積分布 (Product distribution)(例)

では, このときの monochromatic 1-square の重みはいくらか計算してみよう. 先述の通り,

$X' = \{100, 101, 110, 111\}$, $Y' = \{100, 101, 110, 111\}$ なので, 計算する内容は,

$$\begin{aligned} & \mu \times \nu(X', Y') \\ &= \mu(X') \times \nu(Y') \\ &= \sum_{x \in X'} \mu(x) \times \sum_{y \in Y'} \nu(y) \\ &= (\mu(100) + \mu(101) + \mu(110) + \mu(111)) \times \\ & \quad (\nu(100) + \nu(101) + \nu(110) + \nu(111)) \\ &= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \times \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

直積分布 (Product distribution)(例)

この $\frac{1}{4}$ は, 行列において rectangle が持つ「重み」であった.
 実際に以下の行列で $\text{rectangle}(X', Y')$ は行列の $\frac{1}{4}$ である.

X \ Y	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	1	1	1	1
101	0	0	0	0	1	1	1	1
110	0	0	0	0	1	1	1	1
111	0	0	0	0	1	1	1	1

直積分布 (Product distribution)(例)

仮にいまこのような rectangle を考えると、先述の意味では、この rectangle の重みは $\frac{1}{16}$ になるはずである。

X \ Y	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0
101	0	0	0	0	0	0	0	0
110	0	0	0	0	0	0	1	1
111	0	0	0	0	0	0	1	1

直積分布 (Product distribution)(例)

実際に計算すると...

$$\begin{aligned}\mu \times \nu(X', Y') &= \mu(X') \times \nu(Y') \\&= \sum_{x \in X'} \mu(x) \times \sum_{y \in Y'} \nu(y) \\&= (\mu(110) + \mu(111)) \times (\nu(110) + \nu(111)) \\&= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \times \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\&= \frac{1}{16} \text{ たしかに成り立っている.}\end{aligned}$$

直積分布 (Product distribution)(例)

実際に計算すると...

$$\begin{aligned}\mu \times \nu(X', Y') &= \mu(X') \times \nu(Y') \\ &= \sum_{x \in X'} \mu(x) \times \sum_{y \in Y'} \nu(y) \\ &= (\mu(110) + \mu(111)) \times (\nu(110) + \nu(111)) \\ &= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \times \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{16} \text{ たしかに成り立っている.}\end{aligned}$$

注：

しかしこのような予想は確率分布が一様分布であることに基づいていることに注意.

Hamming 距離

Definition

入力列 $x, y \in \{0, 1\}^n$ に対する Hamming 距離 $d(x, y)$ を,
 $d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |\{i : i \text{ は } x_i \neq y_i \text{ であるような } i\}|$ と定義する

Hamming 距離

Definition

入力列 $x, y \in \{0, 1\}^n$ に対する Hamming 距離 $d(x, y)$ を,
 $d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |\{i : i \text{ は } x_i \neq y_i \text{ であるような } i\}|$ と定義する

Definition

入力列の集合 $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ に対する Hamming 距離 $d(A, B)$ は,
 $d(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in A, y \in B} d(x, y)$ と定義する.

Hamming 距離 (例)

それぞれ例を見ていく.

Example

$x = 11111, y = 00011$ の Hamming 距離は $d(x, y) = 3$ である.

Hamming 距離 (例)

それぞれ例を見ていく.

Example

$x = 11111, y = 00011$ の Hamming 距離は $d(x, y) = 3$ である.

Example

$X = 11111, 11110, y = 00011, 00111$ の Hamming 距離は

$$d(11111, 00011) = 3, d(11111, 00111) = 2$$

$$d(11110, 00011) = 4, d(11110, 00111) = 3$$

なので, $d(A, B) = 2$ である.

Hamming 球 (Hamming ball)

Definition

入力列 $c \in \{0, 1\}^n$ とある $r \in 1, \dots, n$ が与えられたとき, 以下の条件を満たす $A \subseteq \{0, 1\}^n$ を中心 c 半径 r の Hamming 球という.

- 1 $\{s \in \{0, 1\}^n \mid d(s, c) \leq r - 1\} \subset A$
- 2 $A \subseteq \{s \in \{0, 1\}^n \mid d(s, c) \leq r\}$ ^{4 5}

⁴ $\{s \in \{0, 1\}^n \mid d(s, c) \leq r\}$ を Hamming 球とよぶこともある.

⁵ A の要素がただ一つ $A = \{c\}$ であるとき Hamming 球の半径は 0 である.

Hamming 球 (Hamming ball)

Definition

入力列 $c \in \{0, 1\}^n$ とある $r \in 1, \dots, n$ が与えられたとき, 以下の条件を満たす $A \subseteq \{0, 1\}^n$ を中心 c 半径 r の Hamming 球という.

- 1 $\{s \in \{0, 1\}^n \mid d(s, c) \leq r - 1\} \subset A$
- 2 $A \subseteq \{s \in \{0, 1\}^n \mid d(s, c) \leq r\}$ ^{4 5}

Definition

また集合 $A \subseteq \{0, 1\}^n$ の境界 (boundary) とは集合 $\{s \in \{0, 1\}^n \mid d(s, A) = 1\}$ である.

⁴ $\{s \in \{0, 1\}^n \mid d(s, c) \leq r\}$ を Hamming 球とよぶこともある.

⁵ A の要素がただ一つ $A = \{c\}$ であるとき Hamming 球の半径は 0 である.

Hamming 球 (Hamming ball)(例)

Example

中心 $c = 0000$ で半径 2 の Hamming 球は,

$$\{0000, 0001, 0010, 0100, 1000\} \subset A$$

$A \subseteq \{0000, 0001, 0010, 0100, 1000, 1001, 0101, 0011, 1010, 0110, 1100\}$

であるような A .

Hamming 球 (Hamming ball)

関連する定理を紹介する.

Theorem

Harper の定理 : 空でない集合 $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ に対して以下の条件を満たすような *Hamming* 球 A_0, B_0 が存在する.

- 1 A_0, B_0 それぞれ中心が $0^n, 1^n$ である
- 2 それぞれサイズが $|A_0| = |A|, |B_0| = |B|$ を満たす
- 3 $d(A, B) \leq d(A_0, B_0)$ を満たす

Binary Entropy

Definition

関数 $\mathbb{H} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ が binary entropy 関数であるとは, $p \in [0, 1]$ に対して $\mathbb{H}(p) = -p \log p - (1 - p) \log(1 - p)$ と定義されていることである.

- 効率よく計算することができる LDL は large monochromatic rectangle を持つことを示す
- $MAJ \circ XOR$ は large monochromatic rectangle を持たないことを示す
- $MAJ \circ XOR$ の下界が $2^{\Omega(n)}$ であることを示す

先行研究の紹介

これから示す補題は次の先行研究に基づいている.

先行研究の紹介

これから示す補題は次の先行研究に基づいている.

Turán, Vatan

Turán, Vatan from [2] : 任意の $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ に対して関数 f が large monochromatic square を持たない場合, small size LDL で計算できないことを示した.

先行研究の紹介

これから示す補題は次の先行研究に基づいている.

Turán, Vatan

Turán, Vatan from [2]: 任意の $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ に対して関数 f が large monochromatic square を持たない場合, small size LDL で計算できないことを示した.

これから small size LDL で計算できる任意の関数がどのような直積分布のもとでも large (weight) monochromatic rectangle を持つことへ拡張していく.

補題 1

Lemma

関数 f を入力 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ の LTF, $\{0, 1\}^n$ 上の確率分布 μ, ν , 集合 $X, Y \subseteq \{0, 1\}^n$ が与えられたとき, m と t をそれぞれ, $m \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu(X), \nu(Y)\}$ $t \in (0, m]$ と定義する. このときいずれかどちらかが成り立つ.

- 1 $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ で, $\mu(X') \geq t, \nu(Y') \geq t$ となる *monochromatic 1-rectangle*(X', Y') が存在する.
- 2 $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ で, $\mu(X') \geq m - t, \nu(Y') \geq m - t$ となる *monochromatic 0-rectangle*(X', Y') が存在する.

補題 1(例)

証明の前に少しだけどんな意味をもつのか見ていく.
(そうでないと、ちょっとやる気が出ない)

補題 1(例)

証明の前に少しだけどんな意味をもつのか見ていく.

(そうでないと、ちょっとやる気が出ない)

まず確率分布 μ, ν が与えられたとき, $\mu \times \nu(X, Y) = \mu(X) \times \nu(Y)$ を直積分布といい, それが Communication 行列の重みだったことを思い出しておく.

では $\mu(X), \nu(Y)$ それぞれはどういう意味なのかというと

補題 1(例)

では $\mu(X), \nu(Y)$ それぞれはどういう意味なのかということ、以下の行列が与えられたとき、 $\mu(X') = \frac{1}{2}$ であった。

X \ Y	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	1	1	1	1
101	0	0	0	0	1	1	1	1
110	0	0	0	0	1	1	1	1
111	0	0	0	0	1	1	1	1

補題 1(例)

これは X の列の長さに対する $\frac{1}{2}$ である. (同様に Y も行について
そう言うことができる.)

$X \backslash Y$	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	1	1	1	1
101	0	0	0	0	1	1	1	1
110	0	0	0	0	1	1	1	1
111	0	0	0	0	1	1	1	1

補題 1(例)

Lemma

関数 f を入力 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ の LTF , $\{0, 1\}$ 上の確率分布 μ, ν , 集合 $X, Y \subseteq \{0, 1\}^n$ が与えられたとき, m と t をそれぞれ, $m \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu(X), \nu(Y)\}$ $t \in (0, m]$ と定義する.

補題ではまず行か列の中で重みが小さな方を m として, m を上限として t を定義している.

(一様分布において言ってしまうと、rectangle において長さが小さい辺をとっていると言える.)

補題 1(例)

Lemma

このときいずれかどちらかが成り立つ.

- 1 $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ で, $\mu(X') \geq t, \nu(Y') \geq t$ となる *monochromatic 1-rectangle* (X', Y') が存在する.
- 2 $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ で, $\mu(X') \geq m - t, \nu(Y') \geq m - t$ となる *monochromatic 0-rectangle* (X', Y') が存在する.

補題ではこのとき, 小さい方の辺に合わせて 0 か 1 の *monochromatic rectangle* が存在することを言っている.

補題 1(例)

実際に以下の行列で

$X = \{100, 101, 110, 111\}$, $Y = \{100, 101, 110, 111\}$ とおくと,

X \ Y	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	1	1	1	1
101	0	0	0	0	1	1	1	1
110	0	0	0	0	1	1	1	1
111	0	0	0	0	1	1	1	1

補題 1(例)

$m = \mu(X) = \nu(Y) = \frac{1}{2}, t \in (0, \frac{1}{2}]$ なので, $t = \frac{1}{4}$ とおくと
 $X' = \{110, 111\}, Y' = \{110, 111\}$ を得て,

X \ Y	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	1	1	1	1
101	0	0	0	0	1	1	1	1
110	0	0	0	0	1	1	1	1
111	0	0	0	0	1	1	1	1

補題 1(例)

$\mu(X') = \nu(Y') = \frac{1}{4} \geq t$ であるような monochromatic 1-rectangle
を得ることができた.

X \ Y	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	1	1	1	1
101	0	0	0	0	1	1	1	1
110	0	0	0	0	1	1	1	1
111	0	0	0	0	1	1	1	1

補題 1(例)

このように, ある rectangle から更に小さな rectangle を得る事ができることを任意の確率分布において保証するのが補題 1 である.
それでは証明へ移っていこう.

補題 1 の証明

まず行列 M に対して M_f を $X \times Y$ で制限された部分行列とする.
ここで関数 f とは $f(x, y) = \text{sign}(a + \langle \alpha \cdot x \rangle + \langle \beta \cdot y \rangle)$ で与えられる LTF とする.

補題 1 の証明

まず行列 M に対して M_f を $X \times Y$ で制限された部分行列とする.
ここで関数 f とは $f(x, y) = \text{sign}(a + \langle \alpha \cdot x \rangle + \langle \beta \cdot y \rangle)$ で与えられる LTF とする.

注

$\langle \alpha \cdot x \rangle$ とはベクトル α, x の内積を意味する.

補題 1 の証明

ここで $a + \langle \alpha \cdot x \rangle, \langle \beta \cdot y \rangle$ が降順になるように, 行列 M における行と列を並び替える. すると新たな行列 $B = R \times C$ を得ることができる.

$R \backslash C$	C_1	C_2	...	C_j	C_{2^n}
R_1	1	1	1	1	0	0	0	0
R_2	1	1	1	1	0	0	0	0
...	1	1	1	1	0	0	0	0
R_j	1	1	1	1	0	0	0	0
...	0	0	0	0	0	0	0	0
...	0	0	0	0	0	0	0	0
...	0	0	0	0	0	0	0	0
R_{2^n}	0	0	0	0	0	0	0	0

補題 1 の証明

このとき $\mu(\{R_1, \dots, R_i\} \geq t, \nu(\{C_1, \dots, C_i\} \geq t$ となる行と列を i, j とする. このような i, j は $t \in (0, m]$ に対して well-defined である.

補題 1 の証明

このとき $\mu(\{R_1, \dots, R_i\} \geq t, \nu(\{C_1, \dots, C_i\} \geq t)$ となる行と列を i, j とする. このような i, j は $t \in (0, m]$ に対して well-defined である.

ここで well-defined とは定義が実際上うまくいくことを言う表現である. 添字 i, j が well-defined であるとは, まず

$\mu(\{R_1, \dots, R_i\} \geq t, \nu(\{C_1, \dots, C_i\} \geq t)$ となる t が存在することと, そのような t に対して必ず i, j が存在することを保証する.

補題 1 の証明

ここで $\mu(\{R_1, \dots, R_i\} \geq t, \nu(\{C_1, \dots, C_i\} \geq t$ となる t の存在は, m が部分行列 $X \times Y$ の行か列の重みの総和かつどちらか小さい方なので少なくとも元々の行列の変形 B において, t 以上の重みを持つような R, C の集合は存在する.

補題 1 の証明

ここで $\mu(\{R_1, \dots, R_i\} \geq t, \nu(\{C_1, \dots, C_i\} \geq t$ となる t の存在は, m が部分行列 $X \times Y$ の行か列の重みの総和かつどちらか小さい方なので少なくとも元々の行列の変形 B において, t 以上の重みを持つような R, C の集合は存在する.

また行列 B は降順にソートされているので, ある時点で t を超えるような最小の i, j の存在が必ず保証されている. したがって i, j は well-defined である.

補題 1 の証明

もし行列 B において $[i, j]$ 成分が 1 であれば左上の部分行列は補題の (1) を満たす.

$R \backslash C$	C_1	C_2	...	C_j	C_{2^n}
R_1	1	1	1	1	0	0	0	0
R_2	1	1	1	1	0	0	0	0
...	1	1	1	1	0	0	0	0
R_i	1	1	1	1	0	0	0	0
...	0	0	0	0	0	0	0	0
...	0	0	0	0	0	0	0	0
...	0	0	0	0	0	0	0	0
R_{2^n}	0	0	0	0	0	0	0	0

補題 1 の証明

もし行列 B において $[i, j]$ 成分が 0 であれば右下の部分行列は補題の (2) を満たす.

$R \backslash C$	C_1	C_2	...	C_j	C_{2^n}
R_1	0	0	0	0	0	0	0	0
R_2	0	0	0	0	0	0	0	0
...	0	0	0	0	0	0	0	0
R_i	0	0	0	0	0	0	0	0
...	0	0	0	0	0	0	0	0
...	0	0	0	0	0	0	0	0
...	0	0	0	0	0	0	0	0
R_{2^n}	0	0	0	0	0	0	0	0



補題 2

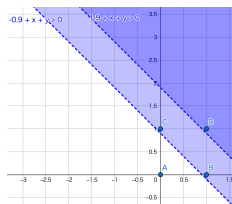
これからメインとなる補題を示していく.

Lemma

$\{0, 1\}^n$ 上の確率分布を μ, ν とする. 関数 f を直積分布 $\mu \times \nu$ において, *monochromatic rectangle* の重みが w より大きくない任意の $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ とする. このとき f を計算する LDL は少なくともサイズが $\frac{1}{\sqrt{w}}$ 必要である.

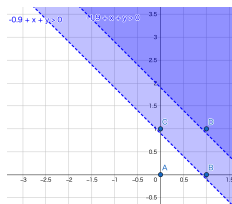
補題 2(証明)

ここで LDL のことを少し思い出しておく． XOR を計算する LDL は



補題 2(証明)

ここで LDL のことを少し思い出しておく． XOR を計算する LDL は



図のように関数の入力に対して境界線を引くことで分節し，出力を割り当てるような動作をしていた．

補題 2(証明)

このような分節の動作を真理値表で考え直してみると,
LDL は定義域全体すなわち, すべての可能な入力を分節していく
ような動作をしていく.

補題 2(証明)

このような分節の動作を真理値表で考え直してみると,
LDL は定義域全体すなわち, すべての可能な入力を分節していく
ような動作をしていく.

具体的なイメージは次のようになる.

ただし $b_{i,j}$ とは (i,j) 入力成分の組のことを指す. たとえば
 $b_{00} = (000, 000)$, $b_{01} = (000, 001)$ である.

補題 2(証明)

まず可能な入力全体が L_1 によって分節される.

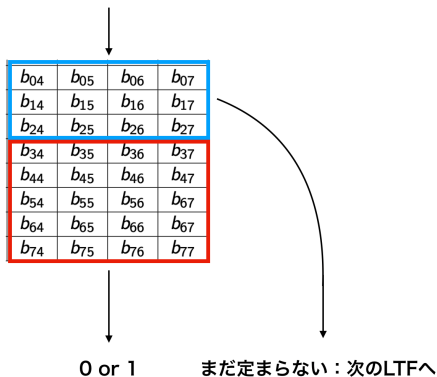
X \ Y	Y							
	000	001	010	011	100	101	110	111
000	b_{00}	b_{01}	b_{02}	b_{03}	b_{04}	b_{05}	b_{06}	b_{07}
001	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	b_{16}	b_{17}
010	b_{20}	b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}	b_{25}	b_{26}	b_{27}
011	b_{30}	b_{31}	b_{32}	b_{33}	b_{34}	b_{35}	b_{36}	b_{37}
100	b_{40}	b_{41}	b_{42}	b_{43}	b_{44}	b_{45}	b_{46}	b_{47}
101	b_{50}	b_{51}	b_{52}	b_{53}	b_{54}	b_{55}	b_{56}	b_{57}
110	b_{60}	b_{61}	b_{62}	b_{63}	b_{64}	b_{65}	b_{66}	b_{67}
111	b_{70}	b_{71}	b_{72}	b_{73}	b_{74}	b_{75}	b_{76}	b_{77}

0 or 1

まだ定まらない：次のLTFへ

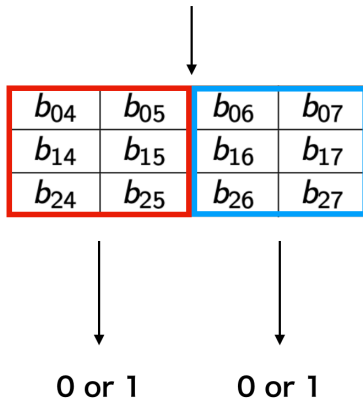
補題 2(証明)

次に L_2 によって分節される.



補題 2(証明)

サイズ 3 の LDL はこの三回目の分節で、最終的な値が定まる.



補題 2(証明)

したがって補題の主張では, このような各分節すなわち各 rectangle の重みが w より大きくないとき, そのような LDL のサイズ k は $k \geq \frac{1}{\sqrt{w}}$ であると言っている.

補題 2(証明)

したがって補題の主張では, このような各分節すなわち各 rectangle の重みが w より大きくないとき, そのような LDL のサイズ k は $k \geq \frac{1}{\sqrt{w}}$ であると言っている.

これは, 先のような分節作業が重み w によって何回で済むか, すなわち下界がわかるという主張なのである.(考えれば当然だがすごい!)

補題 2(証明)

背理法によって矛盾を導く.

まず $(L_1, a_1), \dots, (L_k, a_k)$ をサイズ k で関数 f を計算する LDL とする. LDL のサイズ k が $k < \frac{1}{\sqrt{w}}$ であると仮定する.

また, 先の分節作業を思い出すとわかるが, 関数 f に受理される rectangle は, ある rectangle の中から抽出されていた. このような rectangle を得る動作は補題 1 で保証されている.

補題 1

Lemma

関数 f を入力 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ の LTF, $\{0, 1\}^n$ 上の確率分布 μ, ν , 集合 $X, Y \subseteq \{0, 1\}^n$ が与えられたとき, m と t をそれぞれ, $m \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu(X), \nu(Y)\}$ $t \in (0, m]$ と定義する. このときいずれかどちらかが成り立つ.

- 1 $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ で, $\mu(X') \geq t, \nu(Y') \geq t$ となる *monochromatic 1-rectangle*(X', Y') が存在する.
- 2 $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ で, $\mu(X') \geq m - t, \nu(Y') \geq m - t$ となる *monochromatic 0-rectangle*(X', Y') が存在する.

補題 2(証明)

いま, LDL に対する最初の入力は関数 f の定義域全体, すなわち $2^n \times 2^n$ の rectangle である.

補題 2(証明)

いま, LDL に対する最初の入力は関数 f の定義域全体, すなわち $2^n \times 2^n$ の rectangle である.

当然その重みはすべての和になるため $\mu(X) = \nu(Y) = 1$ である.

補題 2(証明)

いま, LDL に対する最初の入力は関数 f の定義域全体, すなわち $2^n \times 2^n$ の rectangle である.

当然その重みはすべての和になるため $\mu(X) = \nu(Y) = 1$ である.
したがっていま補題 1 において $m = 1, t \in (0, 1]$ で, t はまったく自由である.

補題 2(証明)

ここで $k < \frac{1}{\sqrt{w}}$ を変形すると, $\sqrt{w} < \frac{1}{k}$ である.

少々技巧的ではあるが, t をこの範囲すなわち $t \in (\sqrt{w}, \frac{1}{k})$ とすることで後々に効いてくる.

補題 2(証明)

これからまず帰納法によって以下のことを導く.

k 未満の各 i について,

- 1 i 以下のすべての query, すなわち $j \leq i$ なる L_j において 0-rectangle $S_i = X_i \times Y_i$ を構成できる.
- 2 補題 1 と $m=1$ であることから $\mu(X_i), \nu(Y_i) \geq 1 - it$ となる.

その後 $i=k$ において, 矛盾を導いていく.

補題 2(証明)

$i=1$ の場合

L_1 に与えられるのは $2^n \times 2^n$ 行列の真理値表 $S_0 = (X_0, Y_0)$ である. L_1 でふりい落とされるのは S_0 における, ある $1\text{-rectangle}(X', Y')$ である. (X', Y') は補題 1 から $\mu(X) \geq t, \nu(Y) \geq t$ である.

ここで (X', Y') の重みは $\mu(X) \times \nu(Y) \geq t^2$ であるが, $t \in (\sqrt{w}, \frac{1}{k})$ なので矛盾.

これ以降もすべて矛盾していくことを示していく.

補題 2(証明)

$i=1$ の場合

反対に S_0 は $0\text{-rectangle}(X_1, Y_1)$ も含んでおり,
これは次の L_2 以降で処理される rectangle である.

補題 2(証明)

$i=1$ の場合

反対に S_0 は 0-rectangle(X_1, Y_1) も含んでおり,
これは次の L_2 以降で処理される rectangle である.

そして (X_1, Y_1) の重みは補題 1 より, $\mu(X_1) \geq 1 - t, \nu(Y_1) \geq 1 - t$
である.

補題 2(証明)

$i=1$ の場合

反対に S_0 は 0-rectangle(X_1, Y_1) も含んでおり,
これは次の L_2 以降で処理される rectangle である.

そして (X_1, Y_1) の重みは補題 1 より, $\mu(X_1) \geq 1 - t, \nu(Y_1) \geq 1 - t$
である.

以上で $i=1$ の場合の証明は構築できた.

補題 2(証明)

$i=i$ の場合

$i = 1, 2, \dots, i-1$ で帰納法が成立していたとする. つまり引き継がれてきた $S_{i-1} = (X_{i-1}, Y_{i-1})$ は, L_1, L_2, \dots, L_{i-1} で 0-rectangle だったような rectangle である.

補題 2(証明)

$i=i$ の場合

$i = 1, 2, \dots, i-1$ で帰納法が成立していたとする. つまり引き継がれてきた $S_{i-1} = (X_{i-1}, Y_{i-1})$ は, L_1, L_2, \dots, L_{i-1} で 0-rectangle だったような rectangle である.

その重みは $\mu(X_{i-1}) \geq 1 - (i-1)t, \nu(Y_{i-1}) \geq 1 - (i-1)t$ である.

補題 2(証明)

$i=i$ の場合

$i = 1, 2, \dots, i-1$ で帰納法が成立していたとする. つまり引き継がれてきた $S_{i-1} = (X_{i-1}, Y_{i-1})$ は, L_1, L_2, \dots, L_{i-1} で 0-rectangle だったような rectangle である.

補題 2(証明)

$i=i$ の場合

$i = 1, 2, \dots, i-1$ で帰納法が成立していたとする. つまり引き継がれてきた $S_{i-1} = (X_{i-1}, Y_{i-1})$ は, L_1, L_2, \dots, L_{i-1} で 0-rectangle だったような rectangle である.

その重みは $\mu(X_{i-1}) \geq 1 - (i-1)t, \nu(Y_{i-1}) \geq 1 - (i-1)t$ である. このとき S_{i-1} が 1-rectangle(X', Y') を含んでいるとすれば, 補題 1 より $\mu(X') \geq t, \nu(Y') \geq t$ となる. ここで $kt \leq 1, i < k$ から $t \leq 1 - (i-1)t$ を得る.

$$\begin{aligned} t \in (\sqrt{w}, \frac{1}{k}) &\Leftrightarrow kt < 1, i \in [k-1] \Leftrightarrow i < k \\ &\Leftrightarrow it < kt \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq kt - it \leq 1 - it \Leftrightarrow t \leq kt - (i-1)t \leq \\ &1 - (i-1)t \Leftrightarrow t \leq 1 - (i-1)t \end{aligned}$$

補題 2(証明)

$kt \leq 1, i < k$ から $t \leq 1 - (i - 1)t$ から補題 1 をまだ適応できることがわかる. すなわち, S_{i-1} は 0-rectangle $S_i = (X_i, Y_i)$ を含んでいる.

補題 2(証明)

$kt \leq 1, i < k$ から $t \leq 1 - (i - 1)t$ から補題 1 をまだ適応できることがわかる. すなわち, S_{i-1} は 0-rectangle $S_i = (X_i, Y_i)$ を含んでいる.

1 i 以下のすべての query, すなわち $j \leq i$ なる L_j において 0-rectangle $S_j = X_j \times Y_j$ を構成できる.

2 補題 1 と $m=1$ であることから $\mu(X_i), \nu(Y_i) \geq 1 - it$ となる.

以上のことを示し終わった.

補題 2(証明)

したがって L_1, \dots, L_{k-1} までで 0 であったような
rectangle $S_{k-1} = (X_{k-1}, Y_{k-1})$ が存在し, これらの値はすべて L_k
において 1 となる.

さらに, $\mu(X_{k-1}) \geq 1 - (k-1)t, \nu(Y_i) \geq 1 - (k-1)t$ である.

補題 2(証明)

したがって L_1, \dots, L_{k-1} までで 0 であったような
rectangle $S_{k-1} = (X_{k-1}, Y_{k-1})$ が存在し, これらの値はすべて L_k
において 1 となる.

さらに, $\mu(X_{k-1}) \geq 1 - (k-1)t, \nu(Y_i) \geq 1 - (k-1)t$ である. い
ま, 重みは w より大きくないので

$(1 - (k-1)t)^2 \leq w \leftrightarrow 1 - (k-1)t \leq \sqrt{w}$ であり $\sqrt{w} < t$ から
 $1 - (k-1)t \leq \sqrt{w} < t$ であり, これは $1 < kt$ と矛盾する. \square

今日やること

- 効率よく計算することができる LDL は large monochromatic rectangle を持つことを示す
- $MAJ \circ XOR$ は large monochromatic rectangle を持たないことを示す
- $MAJ \circ XOR$ の下界が $2^{\Omega(n)}$ であることを示す

これからやりたいこと

ここでもう一度補題 2 について考える.

Lemma

$\{0, 1\}^n$ 上の確率分布を μ, ν とする. 関数 f を直積分布 $\mu \times \nu$ において, *monochromatic rectangle* の重みが w より大きくない任意の $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ とする. このとき f を計算する LDL は少なくともサイズが $\frac{1}{\sqrt{w}}$ 必要である.

これからやりたいこと

重みの最大が w である monochromatic rectangle とは特に一様分布においては, 真理値表のなかで一番**大きい四角形**の形をとる.

これからやりたいこと

重みの最大が w である monochromatic rectangle とは特に一様分布においては, 真理値表のなかで一番**大きい四角形**の形をとる.
つまり large monochromatic rectangle を持つような LDL は, 分母が大きくなるため下界の値が下がる.

これからやりたいこと

Turán, Vatan

Turán, Vatan : クエリである LTF の重みについて特に制限がない状況で, LDL で効率的に計算できる関数は large monochromatic rectangle を持つことを示した.

これからやりたいこと

Turán, Vatan

Turán, Vatan : クエリである LTF の重みについて特に制限がない状況で, LDL で効率的に計算できる関数は large monochromatic rectangle を持つことを示した.

補題 2 ではさらに具体的な下界の値にまで言及するため, より一般化したものと言える.

これからやりたいこと

なので

- large monochromatic rectangle を持つ \Rightarrow small な LDL で計算できる

と言ったことになる.

これからやりたいこと

なので

- large monochromatic rectangle を持つ \Rightarrow small な LDL で計算できる

と言ったことになる. 逆に

- large monochromatic rectangle を持たない \Rightarrow small な LDL で計算できない

ということを (暗に) 示してみたい.

これからやりたいこと

- なので large monochromatic rectangle を持たないような関数
が, small な LDL では表現できないことを試みる.

これからやりたいこと

- なので large monochromatic rectangle を持たないような関数
が, small な LDL では表現できないことを試みる.
- そのためにある関数の"良い"上界によって重み w を定め, そ
のサイズの下界が small(多項式サイズ) ではないことを言う.

これからやりたいこと

これからやること

- $MAJ_n \circ XOR$ の下界を示す

これからやりたいこと

これからやること

- $MAJ_n \circ XOR$ の下界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ の上界を示す

これからやりたいこと

これからやること

- $MAJ_n \circ XOR$ の下界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ の上界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ を表す LDL のサイズの下界を求める

これからやりたいこと

これからやること

- $MAJ_n \circ XOR$ の下界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ の上界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ を表す LDL のサイズの下界を求める

"良い" 上界とは下界に近いものであるため, まず下界を示していることに注意.

MAJ_n

Definition

関数 $MAJ_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ は,

$$MAJ_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & (\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{2} > 0) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

MAJ_n

Example

$$MAJ_5(1, 1, 1, 0, 0) = 1 \because 1 + 1 + 1 + 0 + 0 = 3 \geq \frac{5}{2} = 2.5$$

MAJ_n

Example

$$MAJ_5(1, 1, 1, 0, 0) = 1 \because 1 + 1 + 1 + 0 + 0 = 3 \geq \frac{5}{2} = 2.5$$

Example

$$MAJ_5(1, 1, 0, 0, 0) = 0 \because 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 2 \leq \frac{5}{2} = 2.5$$

MAJ_n

Example

$$MAJ_5(1, 1, 1, 0, 0) = 1 \because 1 + 1 + 1 + 0 + 0 = 3 \geq \frac{5}{2} = 2.5$$

Example

$$MAJ_5(1, 1, 0, 0, 0) = 0 \because 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 2 \leq \frac{5}{2} = 2.5$$

Example

$$MAJ_6(1, 1, 1, 0, 0, 0) = 0 \because 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 3 \leq \frac{6}{2} = 3$$

XOR

Definition

関数 $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ に対して $f \circ XOR$ とは,
 $f \circ XOR(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = f(x_1 \oplus y_1, \dots, x_n \oplus y_n)$ で定義される関数である.

床関数, 天井関数

Definition

床関数 $\lfloor x \rfloor$ を x 以下の最大の整数とする.

床関数, 天井関数

Definition

床関数 $\lfloor x \rfloor$ を x 以下の最大の整数とする.

Definition

天井関数 $\lceil x \rceil$ を x 以上の最小の整数とする.

これからやりたいこと

これからやること

- $MAJ_n \circ XOR$ の下界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ の上界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ を表す LDL のサイズの下界を求める

補題 3

Lemma

関数 $F : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ を $MAJ_n \circ XOR$ とする. このとき任意の $b \in \{0, 1\}$ に対して, *communication* 行列 M_F の *monochromatic b -square* のサイズは少なくとも $\sum_{i=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{n}{i}$ である.

補題 3(証明)

まず $MAJ_n \circ XOR$ で 0 になる入力について考察する.

補題 3(証明)

まず $MAJ_n \circ XOR$ で 0 になる入力について考察する.

- 入力列 $\overbrace{000 \dots 000}^n$ と $\overbrace{000 \dots 000}^n$

補題 3(証明)

まず $MAJ_n \circ XOR$ で 0 になる入力について考察する.

- 入力列 $\overbrace{000 \dots 000}^n$ と $\overbrace{000 \dots 000}^n$
 $MAJ_n \circ XOR$ は 0 を出力する.

補題 3(証明)

まず $MAJ_n \circ XOR$ で 0 になる入力について考察する.

- 入力列 $\overbrace{000 \dots 000}^n$ と $\overbrace{000 \dots 000}^n$
 $MAJ_n \circ XOR$ は 0 を出力する.
- ひとつだけ値を変えて $\textcolor{red}{1}00 \dots 000$ と $\textcolor{red}{0}00 \dots 000$

補題 3(証明)

まず $MAJ_n \circ XOR$ で 0 になる入力について考察する.

- 入力列 $\overbrace{000 \dots 000}^n$ と $\overbrace{000 \dots 000}^n$
 $MAJ_n \circ XOR$ は 0 を出力する.
- ひとつだけ値を変えて $\textcolor{red}{1}00 \dots 000$ と $\textcolor{red}{0}00 \dots 000$
 $MAJ_n \circ XOR$ は 0 を出力する.

補題 3(証明)

- 同じ動作を $n/4$ 回繰り返すと, 半分が異なる $111\dots 000$ と $000\dots 000$ ができる.

補題 3(証明)

- 同じ動作を $n/4$ 回繰り返すと, 半分が異なる $111\dots 000$ と $000\dots 000$ ができる.

- $$\overbrace{1 \oplus 0 \dots 0 \oplus 0}^n = \overbrace{111\dots\dots}^{n/2} \overbrace{000\dots\dots}^{n/2}$$

補題 3(証明)

- 同じ動作を $n/4$ 回繰り返すと, 半分が異なる $111\dots 000$ と $000\dots 000$ ができる.

$$\text{■ } \overbrace{1 \oplus 0 \dots 0 \oplus 0}^n = \overbrace{111\dots\dots}^{n/2} \overbrace{000\dots\dots}^{n/2}$$

$n/2$ 個の 1 を含むため $MAJ_n \circ XOR$ は 0 を出力する.

補題 3(証明)

- 同じ動作を $n/4$ 回繰り返すと, 半分が異なる $111\dots 000$ と $000\dots 000$ ができる.

$$\text{■ } \overbrace{1 \oplus 0 \dots 0 \oplus 0}^n = \overbrace{111\dots\dots}^{n/2} \overbrace{000\dots\dots}^{n/2}$$

$n/2$ 個の 1 を含むため $MAJ_n \circ XOR$ は 0 を出力する.

これ以上異なる点を増やしたら出力が変わる.

$MAJ_n \circ XOR$ で 0 になる入力に 1 の数を $n/4$ 個より増やしたら存在しないようだ.

補題 3(証明)

- 同じ動作を $n/4$ 回繰り返すと, 半分が異なる $111\dots 000$ と $000\dots 000$ ができる.

$$\text{■ } \overbrace{1 \oplus 0 \dots 0 \oplus 0}^n = \overbrace{111\dots\dots}^{n/2} \overbrace{000\dots\dots}^{n/2}$$

$n/2$ 個の 1 を含むため $MAJ_n \circ XOR$ は 0 を出力する.

これ以上異なる点を増やしたら出力が変わる.

$MAJ_n \circ XOR$ で 0 になる入力 1 の数を $n/4$ 個より増やしたら存在しないようだ.

- $|x| \leq n/4$ を得る.

補題 3(証明)

同様に $MAJ_n \circ XOR$ が 1 を出力する入力について考察する. 入力長 n からその 1 の数 $|x|$ を引いた $n - |x|$ は 0 数になる. こちらで 0 を増やす操作をしていくと, $n/4$ 個以上に増やしたら $MAJ_n \circ XOR$ の出力は 0 になってしまう.

したがって $n - |x| \geq n/4 \Leftrightarrow |x| \geq n - n/4$ を得る.

注 :

一般には $n/4$ が整数ではないので, 厳密には $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ である.

補題 3(証明)

以上の議論から集合 X, Y, Z を以下のように定める.

$$X = Y = \{x \in \{0, 1\}^n : |x| \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\}$$

$$Z = \{x \in \{0, 1\}^n : |x| \geq n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\}$$

注 :

ただし $|x| \geq n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ についてイコールが成り立つのは, n が 4 の倍数でないときである.

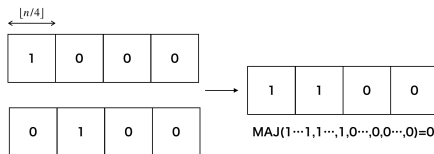
このとき $F(x, y) = 0, x \in X, y \in Y$ かつ
 $F(x, z) = 1, x \in X, z \in Z$ である.

補題 3(証明)

$F(x, y)$ ではかならず 1 の数が $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ なので, どんなに頑張っても 1 の数は $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ まで.

補題 3(証明)

$F(x, y)$ ではかならず 1 の数が $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ なので, どんなに頑張っても 1 の数は $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ まで.



したがって $F(x, y) = 0$

補題 3(証明)

$F(x, z)$ では入力列 x の 1 の数は最大で $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ で, 入力列 z の 0 の数は最大で $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ である.

補題 3(証明)

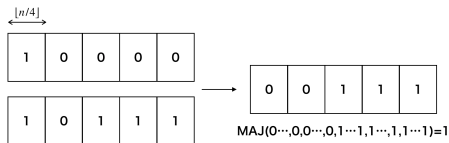
$F(x, z)$ では入力列 x の 1 の数は最大で $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ で, 入力列 z の 0 の数は最大で $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ である.

したがってどんなに XOR で 0 を出力するように工夫しても,

補題 3(証明)

$F(x, z)$ では入力列 x の 1 の数は最大で $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ で, 入力列 z の 0 の数は最大で $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ である.

したがってどんなに XOR で 0 を出力するように工夫しても,



$F(x, z) = 1$ である.

補題 3(証明)

以上の $(X, Y), (X, Z)$ はそれぞれ, 0 または 1 square である. 各サイズ, つまり $|X| = |Y| = |Z|$ は入力列 n から $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ 以下で選ぶ組み合わせの数なので $\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} \binom{n}{i}$ である. □

注 :

$MAJ_n \circ XOR$ が 0, 1 を出力するという最低限の条件を満たしており, かつその条件から生成されたので, このサイズが下界を意味することに注意.

これからやりたいこと

これからやること

- $MAJ_n \circ XOR$ の下界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ の上界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ を表す LDL のサイズの下界を求める

定理 1

Theorem

関数 $F : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ を $MAJ_n \circ XOR$ とする. このとき任意の $b \in \{0, 1\}$ に対して, *communication* 行列 M_F の *monochromatic b -square* のサイズの上界は $\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}$ である.

定理 1(証明)

- 集合 $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ が $|A| = |B| > \sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}$ で, $A \times B$ が M_F における monochromatic 1-square あると仮定する.

定理 1(証明)

- 集合 $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ が $|A| = |B| > \sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}$ で, $A \times B$ が M_F における monochromatic 1-square あると仮定する.

ここで Hamming 距離とは以下のようなものであった.

定理 1(証明)

- 集合 $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ が $|A| = |B| > \sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}$ で, $A \times B$ が M_F における monochromatic 1-square あると仮定する.

ここで Hamming 距離とは以下のようなものであった.

Definition

入力列 $x, y \in \{0, 1\}^n$ に対する Hamming 距離 $d(x, y)$ を,
 $d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |\{i : i \text{ は } x_i \neq y_i \text{ であるような } i\}|$ と定義する

定理 1(証明)

- 集合 $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ が $|A| = |B| > \sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}$ で, $A \times B$ が M_F における monochromatic 1-square あると仮定する.

ここで Hamming 距離とは以下のようなものであった.

Definition

入力列 $x, y \in \{0, 1\}^n$ に対する Hamming 距離 $d(x, y)$ を,
 $d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |\{i : i \text{ は } x_i \neq y_i \text{ であるような } i\}|$ と定義する

Definition

入力列の集合 $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ に対する Hamming 距離 $d(A, B)$ は,
 $d(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in A, y \in B} d(x, y)$ と定義する.

定理 1(証明)

- Hamming 距離を用いると (A,B) が 1-square であることから, $d(A, B) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ を満足しなければならない.

定理 1(証明)

- Hamming 距離を用いると (A,B) が 1-square であることから, $d(A, B) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ を満足しなければならない.
- つまりどんな組み合わせでも異なる部分が $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 以上でないと $MAJ \circ XOR$ は 1 を出力しない.

定理 1(証明)

ここで Haper の定理より

Theorem

Harper の定理 : 空でない集合 $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ に対して以下の条件を満たすような *Hamming* 球 A_0, B_0 が存在する.

- 1 A_0, B_0 それぞれ中心が $0^n, 1^n$ である
- 2 それぞれサイズが $|A_0| = |A|, |B_0| = |B|$ を満たす
- 3 $d(A, B) \leq d(A_0, B_0)$ を満たす

$0^n, 1^n$ を中心とする *Hamming* 球 A_0, B_0 があって,
 $|A_0| = |A|, |B_0| = |B|$ かつ $d(A_0, B_0) \geq d(A, B)$ を満たす.

定理 1(証明)

- 中心が $0^n, 1^n$ で半径が r なら, Hamming 球は中心から (Hamming 距離で) r 離れた位置までの集合である.
- どんな組み合わせでも異なる部分が $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 以上でないと $MAJ \circ XOR$ は 1 を出力しないのだから, 下界の議論のように, A_0, B_0 の要素はどんな組み合わせでも異なる部分が $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ より必要である. よって半径 r は $r - 1 \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \Rightarrow r > \lceil \frac{n}{4} \rceil$

注 :

入力列 $c \in \{0, 1\}^n$ とある $r \in 1, \dots, n$ が与えられたとき, 以下の条件を満たす $A \subseteq \{0, 1\}^n$ を中心 c 半径 r の Hamming 球という.

- 1 $\{s \in \{0, 1\}^n \mid d(s, c) \leq r - 1\} \subset A$
- 2 $A \subseteq \{s \in \{0, 1\}^n \mid d(s, c) \leq r\}$

定理 1(証明)

したがって

$$d(A_0, B_0) = \min_{x \in A_0, y \in B_0} d(x, y) = d(\lceil \frac{n}{4} \rceil, \lceil \frac{n}{4} \rceil) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

しかし

$$d(A_0, B_0) \geq d(A, B) > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

より矛盾を導いた.



これからやりたいこと

これからやること

- $MAJ_n \circ XOR$ の下界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ の上界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ を表す LDL のサイズの下界を求める

今日やること

- 効率よく計算することができる LDL は large monochromatic rectangle を持つことを示す
- $MAJ \circ XOR$ は large monochromatic rectangle を持たないことを示す
- $MAJ \circ XOR$ の下界が $2^{\Omega(n)}$ であることを示す

$MAJ_n \circ XOR$ を計算する LDL の下界

定理 1 から $MAJ_n \circ XOR$ の rectangle の一辺のサイズの上界は $\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}$ である.

$MAJ_n \circ XOR$ を計算する LDL の下界

定理 1 から $MAJ_n \circ XOR$ の rectangle の一辺のサイズの上界は $\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}$ である.

また補題 2 は任意の確率分布にて定義されていたので、一様分布であるとすると、各確立はサイズを 2^n で割れば良いので、

$MAJ_n \circ XOR$ を計算する LDL の下界

定理 1 から $MAJ_n \circ XOR$ の rectangle の一辺のサイズの上界は $\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}$ である.

また補題 2 は任意の確率分布にて定義されていたので、一様分布であるとする、各確立はサイズを 2^n で割れば良いので、したがって LDL のサイズ s_n は

$$s_n \geq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}}{2^n}\right)^2}}$$

$MAJ_n \circ XOR$ を計算する LDL の下界

したがって

$$s_n \geq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}}$$

$MAJ_n \circ XOR$ を計算する LDL の下界

したがって

$$s_n \geq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}}$$

いまスターリングの近似から, $\log_2 \binom{n}{i} \sim nH(\frac{k}{n})$ を利用できる.[3]
また i をすべて $n/4$ で近似すると,

MAJ_n ◦ XOR を計算する LDL の下界

したがって

$$s_n \geq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}}$$

いまスターリングの近似から, $\log_2 \binom{n}{i} \sim nH(\frac{k}{n})$ を利用できる.[3]
また i をすべて $n/4$ で近似すると,

$$s_n \geq \frac{2^n}{2^{nH(1/4)}}$$

$MAJ_n \circ XOR$ を計算する LDL の下界

したがって

$$s_n \geq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}}$$

いまスターリングの近似から, $\log_2 \binom{n}{i} \sim nH(\frac{i}{n})$ を利用できる.[3]
また i をすべて $n/4$ で近似すると,

$$s_n \geq \frac{2^n}{2^{nH(1/4)}}$$

またエントロピー $H(1/4) < 0.82$ であるから近似によって,

MAJ_n ◦ XOR を計算する LDL の下界

したがって

$$s_n \geq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}}$$

いまスターリングの近似から, $\log_2 \binom{n}{i} \sim nH(\frac{i}{n})$ を利用できる.[3]
また i をすべて $n/4$ で近似すると,

$$s_n \geq \frac{2^n}{2^{nH(1/4)}}$$

またエントロピー $H(1/4) < 0.82$ であるから近似によって,

$$s_n \geq \frac{2^n}{2^{0.82n}}$$

$$s_n \geq 2^{0.18n}$$

今後について

以上のことから (暗に) large monochromatic rectangle をもたないなら, LDL のサイズは small ではないことを言えた.

- LDL の計算量クラスを導入する

今後について

以上のことから (暗に) large monochromatic rectangle をもたないなら, LDL のサイズは small ではないことを言えた.

- LDL の計算量クラスを導入する
- 他の計算量クラスとの対応を証明する

References I

- [1] Chattopadhyay, Mahajan, Mande *Lower bounds for linear decision lists*. arXiv:1901.05911v1 [cs.CC] 17 Jan 2019
- [2] Turán, Vatan *Linear decision lists and partitioning algorithms for the construction of neural networks*. Foundation of Computational Mathematics, pages 414-423. Springer, 1997.
- [3] Wikipedia 『二項係数』 <https://ja.wikipedia.org/wiki/二項係数>
- [4] Rivest *Learning decision lists*. Machine Learning, 2(3):229-246, 1987.

ご静聴ありがとうございました.