

線形決定リストの下界

Lower bounds for linear decision lists

May 31, 2019

目次

- 1 序
- 2 線形しきい値関数
- 3 線形決定リスト
- 4 数学的準備
- 5 補題の証明
- 6 $MAJ \circ XOR$ に関する定理
- 7 参考文献
- 8 おわり

今日やること

今日やること

決定リスト:(DL:Decision List)

- Rivest によって導入された計算モデル [4]

今日やること

決定リスト:(DL:Decision List)

- Rivest によって導入された計算モデル [4]
- 一定の手順で, 別の関数を表現する

今日やること

決定リスト:(DL:Decision List)

- Rivest によって導入された計算モデル [4]
- 一定の手順で, 別の関数を表現する
- 機械学習理論を始めとする様々な場所で登場する

今日やること

決定リスト:(DL:Decision List)

- Rivest によって導入された計算モデル [4]
- 一定の手順で, 別の関数を表現する
- 機械学習理論を始めとする様々な場所で登場する

今回は制限された**線形決定リスト (LDL)** というものについての下界を考える.

今日やること

- 線形決定リストを導入する

今日やること

- 線形決定リストを導入する
- 命題のための数学的準備を行う

今日やること

- 線形決定リストを導入する
- 命題のための数学的準備を行う
- 線形決定リストに関する命題を紹介する

今日やること

- 線形決定リストを導入する
- 命題のための数学的準備を行う
- 線形決定リストに関する命題を紹介する
- 線形決定リストに関する命題を証明する

線形しきい値関数

今日やること

- 線形決定リストを導入する
- 命題のための数学的準備を行う
- 線形決定リストに関する命題を証明する

今日やること

- 線形決定リストを導入する
- 命題のための数学的準備を行う
- 線形決定リストに関する命題を証明する

そのまえに線形しきい値関数というものを導入する.

Sign 関数

Definition

関数 $sign : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ を以下のように定義する.

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

Sign 関数 (例)

Example

■ $\text{sign}(0.1) = 1$

Sign 関数 (例)

Example

- $\text{sign}(0.1) = 1$
- $\text{sign}(0) = 0$

Sign 関数 (例)

Example

- $\text{sign}(0.1) = 1$
- $\text{sign}(0) = 0$
- $\text{sign}(-1) = 0$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)

Definition

線形しきい値関数 (LTF) $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ とは,
 $w_0, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ に対して以下のような関数である。

$$f(x) = \text{sign}(w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i)$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)

Definition

線形しきい値関数 (LTF) $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ とは,
 $w_0, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ に対して以下のような関数である。

$$f(x) = \text{sign}(w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i)$$

Example

$\text{AND}(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$AND(0, 0)$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(0, 0) \\ = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0) \end{aligned}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(0, 0) &= \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0) \\ &= \text{sign}(-0.7) \end{aligned}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(0, 0) &= \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0) \\ &= \text{sign}(-0.7) \\ &= 0 \end{aligned}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$AND(0, 1)$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} &AND(0, 1) \\ &= \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1) \end{aligned}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(0, 1) &= \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1) \\ &= \text{sign}(-0.2) \end{aligned}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(0, 1) &= \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1) \\ &= \text{sign}(-0.2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

AND(1,0) も同様

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$AND(1, 1)$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(1, 1) \\ = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1) \end{aligned}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(1, 1) &= \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1) \\ &= \text{sign}(-0.7 + 1.0) \end{aligned}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

Example

$AND(x, y) = \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ は LTF である

x	y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} AND(1, 1) &= \text{sign}(-0.7 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1) \\ &= \text{sign}(-0.7 + 1.0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

ここで LTF の視覚的解釈を試みたい. sign 関数の条件式を展開することにより,

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & (-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y > 0) \\ 0 & (-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \leq 0) \end{cases}$$

を得る

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & (-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y > 0) \\ 0 & (-0.7 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \leq 0) \end{cases}$$

を平面上で表した図は以下のとおりである.

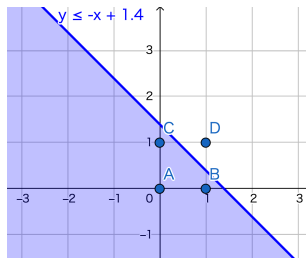


Figure: AND-LTF

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

LTF はあるしきい値を境界にして、分節するような動作をしていると考えることもできる。

(この場合, 青の領域を 0 とすれば AND-LTF である)

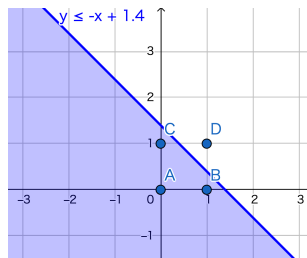


Figure: AND-LTF

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

では LTF はどれくらい表現能力があるのだろうか？

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

では LTF はどれくらい表現能力があるのだろうか？
全然能力がないことがすぐにわかる

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

では LTF はどれくらい表現能力があるのだろうか？
全然能力がないことがすぐにわかる
→ XOR を分節することができない

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

具体的に XOR の分節は以下のようなになる.

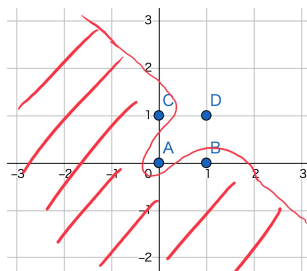


Figure: XOR の分節

しかし LTF の定義からこのような曲線描くことは不可能であることがわかる.

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

三本の矢なら折れないというが …



LTF をいくつか束ねたら計算能力は強くなるだろうか？

線形しきい値関数 (LTF: Linear Threshold Function)(例)

三本の矢なら折れないというが …



LTF をいくつか束ねたら計算能力は強くなるだろうか？

→ 線形決定リスト

線形決定リスト

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

- 線形決定リスト (LDL) は if-then ルールによる計算モデルである.

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

- 線形決定リスト (LDL) は if-then ルールによる計算モデルである.
- if 文の条件となる関数 (LTF) L_1, L_2, \dots と, 条件が真の場合の出力 $a_1, a_2 \dots$ からなり

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

- 線形決定リスト (LDL) は if-then ルールによる計算モデルである.
- if 文の条件となる関数 (LTF) L_1, L_2, \dots と, 条件が真の場合の出力 a_1, a_2, \dots からなり

```
if  $L_1 == 1$  then  $a_1$   
  else if  $L_2 == 1$  then  $a_2$   
    else if  $L_3 == 1$  then  $a_3$   
       $\vdots$ 
```

と計算を行っていく.

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

LDL がいくつかの LTF の束であると考ええると, 表現能力があがっていきそう.

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

LDL がいくつかの LTF の束であると考ええると、表現能力があがっていきそう。

実際に XOR を計算する LDL を設計して、そのことを示す。

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

方針としては以下の図のように XOR を分節すると良さそうだ.

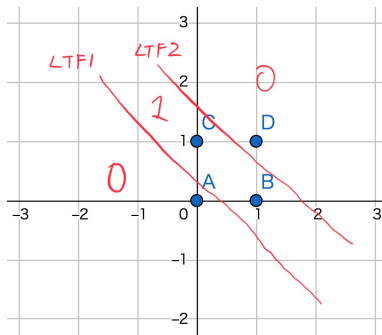


Figure: XOR-LDL の設計方針

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

Definition

XOR を計算する LDL を

$L_1(x, y) = \text{sign}(-1.9 - x + y)$, $L_2 = \text{sign}(-0.9 - x + y)$, $L_3 = \text{sign}(1)$
として

```
if  $L_1 == 1$  then 0  
  else if  $L_2 == 1$  then 1  
    else if  $L_3 == 1$  then 0
```

と定義する

すると, この LDL は XOR を計算する.

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

Example

XOR(0,0) の計算を見てみる. まず $(L_1, 0)$ が評価される. しかし $L_1(0, 0) = \text{sign}(-1.9 - 0 + 0) = 0$ なので次の条件へ移動する.

```
if  $L_1 == 1$  then 0  
  else if  $L_2 == 1$  then 1  
    else if  $L_3 == 1$  then 0
```

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

Example

次に $(L_2, 1)$ が評価される. しかし

$L_2(0, 0) = \text{sign}(-0.9 - 0 + 0) = 0$ なので次の条件へ移動する.(ここで入力のどちらかが1であれば $L_2 = 1$ となることに注意.)

```
if  $L_1 == 1$  then 0  
  else if  $L_2 == 1$  then 1  
    else if  $L_3 == 1$  then 0
```

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

Example

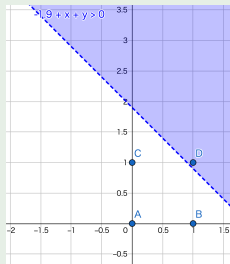
最後に $(L_3, 0)$ が評価される. L_3 は恒真関数なので 0 が出力される

```
if  $L_1 == 1$  then 0  
  else if  $L_2 == 1$  then 1  
    else if  $L_3 == 1$  then 0
```

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

Example

以上の LDL の計算を平面上に図示するとこのようになる.

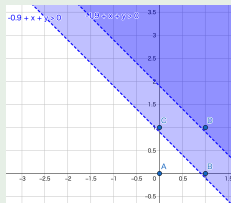


まず, 座標 (1,1) の値が分節される

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

Example

次に座標 $(0,1)$, $(1,0)$ が分節され,
このことにより残った $(0,0)$ の値も分節されたことになる。



ここでは LDL を操作的に定義したが、次に形式的な定義を与える。

線形決定リスト (LDL: Linear Decision Lists)

Definition

サイズ k の線形決定リスト (LDL) とは、各タプル

$\overbrace{(L_1, a_1), (L_2, a_2), \dots, (L_k, a_k)}^{size-k}$ が以下の条件を満たすものである。

- 1 各 $i \in [1, k]$ について $a_i \in \{0, 1\}$
- 2 各 $i \in [1, k]$ について query L_i は LTF である
- 3 最後の $i = k$ について L_k は $L_k(x) = 1$ となる恒真関数である

注：

各 L_i は query 関数と呼ばれる

数学的準備

今日やること

- 線形決定リストを導入する
- 命題のための数学的準備を行う
- 線形決定リストに関する命題を紹介する
- 線形決定リストに関する命題を証明する

Communication 行列

次にいくつか証明の道具を用意していく.

Definition

関数 F に対する ¹ **Communication 行列** M_F とは, 各要素が $M_F[x, y] := F(x, y)$ と定義された $2^n \times 2^n$ 行列である.

¹ $F : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

Communication 行列

次にいくつか証明の道具を用意していく.

Definition

関数 F に対する ¹ **Communication 行列** M_F とは, 各要素が $M_F[x, y] := F(x, y)$ と定義された $2^n \times 2^n$ 行列である.

Example

$$M_{AND} = \begin{pmatrix} AND(0,0) = 0 & AND(0,1) = 0 \\ AND(1,0) = 0 & AND(1,1) = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

各要素に対して AND が適応されて, 実質的に AND の真理値表行列となる.

¹ $F : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$

Monochromatic rectangle/square

Definition

関数 F に対する ² **monochromatic b-rectangle** とは次のような組 (X, Y) である.

- 1 $X, Y \subseteq \{0, 1\}^n$
- 2 すべての $x \in X, y \in Y$ について $F(x, y) = b$

² $F : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

Monochromatic rectangle/square

Definition

関数 F に対する ² **monochromatic b-rectangle** とは次のような組 (X, Y) である.

- 1 $X, Y \subseteq \{0, 1\}^n$
- 2 すべての $x \in X, y \in Y$ について $F(x, y) = b$

Definition

サイズ s の monochromatic b-square (X, Y) とは,

- 1 (X, Y) は monochromatic b-rectangle である
- 2 $|X| = s, |Y| = s$ であるものをいう

² $F : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

Monochromatic rectangle/square(例)

Example

灰色の部分は monochromatic 1-square である。

<div>Y</div> <div>X</div>	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	1	1	1	1
101	0	0	0	0	1	1	1	1
110	0	0	0	0	1	1	1	1
111	0	0	0	0	1	1	1	1

Monochromatic rectangle/square(例)

Example

具体的に $X' = \{100, 101, 110, 111\}$, $Y' = \{100, 101, 110, 111\}$ とした, $S = (X', Y')$ が monochromatic 1-square である.
また $|X'| = |Y'| = 4$ からサイズ 4 である.

集合に対する確立分布の計算

Definition

集合 X の確率分布とは,

- 集合 $X \subseteq \{0, 1\}^n$

集合に対する確立分布の計算

Definition

集合 X の確率分布とは,

- 集合 $X \subseteq \{0, 1\}^n$
- $\{0, 1\}^n$ における確率分布を μ のとき

集合に対する確立分布の計算

Definition

集合 X の確率分布とは,

- 集合 $X \subseteq \{0, 1\}^n$
- $\{0, 1\}^n$ における確率分布を μ のとき

$$\mu(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in X} \mu(x)$$

といった具合に各要素の和で考える.

直積分布/重み

Definition

$\{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n$ における確率分布 η が直積分布であるとは,

³このとき直積分布 η を $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \mu \times \nu$ と表記することがある.

⁴ $x, y \in \{0, 1\}^n$

直積分布/重み

Definition

$\{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n$ における確率分布 η が直積分布であるとは,

- $\{0, 1\}^n$ における確率分布 μ, ν で

³このとき直積分布 η を $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \mu \times \nu$ と表記することがある.

⁴ $x, y \in \{0, 1\}^n$

直積分布/重み

Definition

$\{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n$ における確率分布 η が直積分布であるとは,

- $\{0, 1\}^n$ における確率分布 μ, ν で
- $\eta(x, y) = \mu(x) \times \nu(y)$ と表せることである.^{3 4}

³このとき直積分布 η を $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \mu \times \nu$ と表記することがある.

⁴ $x, y \in \{0, 1\}^n$

直積分布/重み

Definition

$\{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n$ における確率分布 η が直積分布であるとは,

- $\{0, 1\}^n$ における確率分布 μ, ν で
- $\eta(x, y) = \mu(x) \times \nu(y)$ と表せることである.^{3 4}

Definition

monochromatic rectangle (X,Y) の重みとは

³このとき直積分布 η を $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \mu \times \nu$ と表記することがある.

⁴ $x, y \in \{0, 1\}^n$

直積分布/重み

Definition

$\{0,1\}^n \times \{0,1\}^n$ における確率分布 η が直積分布であるとは,

- $\{0,1\}^n$ における確率分布 μ, ν で
- $\eta(x, y) = \mu(x) \times \nu(y)$ と表せることである.^{3 4}

Definition

monochromatic rectangle (X, Y) の重みとは

- $\{0,1\}^n \times \{0,1\}^n$ における直積分布 $\mu \times \nu$ に対して

³このとき直積分布 η を $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \mu \times \nu$ と表記することがある.

⁴ $x, y \in \{0,1\}^n$

直積分布/重み

Definition

$\{0,1\}^n \times \{0,1\}^n$ における確率分布 η が直積分布であるとは,

- $\{0,1\}^n$ における確率分布 μ, ν で
- $\eta(x, y) = \mu(x) \times \nu(y)$ と表せることである.^{3 4}

Definition

monochromatic rectangle (X,Y) の重みとは

- $\{0,1\}^n \times \{0,1\}^n$ における直積分布 $\mu \times \nu$ に対して
- $\mu \times \nu(X, Y) = \mu(X) \times \nu(Y)$ である.

³このとき直積分布 η を $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \mu \times \nu$ と表記することがある.

⁴ $x, y \in \{0,1\}^n$

monochromatic rectangle の重み (例)

Example

ここに monochromatic 1-square(X', Y') がある。

($X' = \{100, 101, 110, 111\}$, $Y' = \{100, 101, 110, 111\}$)

X \ Y	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	1	1	1	1
101	0	0	0	0	1	1	1	1
110	0	0	0	0	1	1	1	1
111	0	0	0	0	1	1	1	1

直積分布 (Product distribution)(例)

monochromatic 1-square の重みは定義より,

$\mu \times \nu(X, Y) = \mu(X) \times \nu(Y)$ である. 簡単のために各確率分布を一様分布であるとする. すると,

直積分布 (Product distribution)(例)

monochromatic 1-square の重みは定義より,

$\mu \times \nu(X, Y) = \mu(X) \times \nu(Y)$ である. 簡単のために各確率分布を一様分布であるとする. すると, $\mu \times \nu(X', Y')$

直積分布 (Product distribution)(例)

monochromatic 1-square の重みは定義より,

$\mu \times \nu(X, Y) = \mu(X) \times \nu(Y)$ である. 簡単のために各確率分布を一様分布であるとする. すると, $\mu \times \nu(X', Y')$
 $= \mu(X') \times \nu(Y')$

直積分布 (Product distribution)(例)

monochromatic 1-square の重みは定義より,

$\mu \times \nu(X, Y) = \mu(X) \times \nu(Y)$ である. 簡単のために各確率分布を一様分布であるとする. すると, $\mu \times \nu(X', Y')$

$$= \mu(X') \times \nu(Y')$$

$$= \sum_{x \in X'} \mu(x) \times \sum_{y \in Y'} \nu(y)$$

直積分布 (Product distribution)(例)

monochromatic 1-square の重みは定義より,

$\mu \times \nu(X, Y) = \mu(X) \times \nu(Y)$ である. 簡単のために各確率分布を一様分布であるとする. すると, $\mu \times \nu(X', Y')$

$$= \mu(X') \times \nu(Y')$$

$$= \sum_{x \in X'} \mu(x) \times \sum_{y \in Y'} \nu(y)$$

$$= (\mu(100) + \mu(101) + \mu(110) + \mu(111)) \times$$
$$(\nu(100) + \nu(101) + \nu(110) + \nu(111))$$

直積分布 (Product distribution)(例)

monochromatic 1-square の重みは定義より,

$\mu \times \nu(X, Y) = \mu(X) \times \nu(Y)$ である. 簡単のために各確率分布を一様分布であるとする. すると, $\mu \times \nu(X', Y')$

$$= \mu(X') \times \nu(Y')$$

$$= \sum_{x \in X'} \mu(x) \times \sum_{y \in Y'} \nu(y)$$

$$= (\mu(100) + \mu(101) + \mu(110) + \mu(111)) \times$$

$$(\nu(100) + \nu(101) + \nu(110) + \nu(111))$$

$$= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \times \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)$$

直積分布 (Product distribution)(例)

monochromatic 1-square の重みは定義より,

$\mu \times \nu(X, Y) = \mu(X) \times \nu(Y)$ である. 簡単のために各確率分布を一様分布であるとする. すると, $\mu \times \nu(X', Y')$

$$= \mu(X') \times \nu(Y')$$

$$= \sum_{x \in X'} \mu(x) \times \sum_{y \in Y'} \nu(y)$$

$$= (\mu(100) + \mu(101) + \mu(110) + \mu(111)) \times$$

$$(\nu(100) + \nu(101) + \nu(110) + \nu(111))$$

$$= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \times \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

直積分布 (Product distribution)(例)

monochromatic 1-square の重み $\frac{1}{4}$ の直感的な意味は, square が行列を占める割合をいう.⁵

X \ Y	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	1	1	1	1
101	0	0	0	0	1	1	1	1
110	0	0	0	0	1	1	1	1
111	0	0	0	0	1	1	1	1

⁵ただし一様分布に限る

直積分布 (Product distribution)(例)

仮にいまこのような 1-square を考えると, 先述の意味では, 重みが $\frac{1}{16}$ になるはずである.

X \ Y	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
010	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0
101	0	0	0	0	0	0	0	0
110	0	0	0	0	0	0	1	1
111	0	0	0	0	0	0	1	1

直積分布 (Product distribution)(例)

実際に計算すると...

$$\begin{aligned}\mu \times \nu(X', Y') &= \mu(X') \times \nu(Y') \\&= \sum_{x \in X'} \mu(x) \times \sum_{y \in Y'} \nu(y) \\&= (\mu(110) + \mu(111)) \times (\nu(110) + \nu(111)) \\&= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \times \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\&= \frac{1}{16} \text{ たしかに成り立っている.}\end{aligned}$$

補題の証明

今日やること

- 線形決定リストを導入する
- 命題のための数学的準備を行う
- 線形決定リストに関する命題を紹介する
- 線形決定リストに関する命題を証明する

今日やること

これから大雑把に, 次のようなことを言っていきます.

今日やること

これから大雑把に、次のようなことを言っていきます.

- 補題 1: どんな確率分布にさらされた集合 (X, Y) でも, そこから新しく 0 か 1-rectangle をつくれる

今日やること

これから大雑把に、次のようなことを言っていきます.

- 補題 1: どんな確率分布にさらされた集合 (X, Y) でも, そこから新しく 0 か 1-rectangle をつくれる
- 補題 2: 効率的な LDL は (重みが) large な monochromatic rectangle を持っている

今日やること

これから大雑把に, 次のようなことを言っていきます.

- 補題 1: どんな確率分布にさらされた集合 (X, Y) でも, そこから新しく 0 か 1-rectangle をつくれる
- 補題 2: 効率的な LDL は (重みが) large な monochromatic rectangle を持っている
- 補題 3: しかし $MAJ \circ XOR$ は large monochromatic rectangle を持っていない

今日やること

これから大雑把に, 次のようなことを言っていきます.

- 補題 1: どんな確率分布にさらされた集合 (X, Y) でも, そこから新しく 0 か 1-rectangle をつくれる
- 補題 2: 効率的な LDL は (重みが) large な monochromatic rectangle を持っている
- 補題 3: しかし $MAJ \circ XOR$ は large monochromatic rectangle を持っていない
- 定理 1: $MAJ \circ XOR$ の下界は $2^{\Omega(n)}$ である

large ? small ?

注：

ここで LDL のサイズが

large ? small ?

注：

ここで LDL のサイズが

- small : 入力 n に対して, サイズが n の多項式で表せる

large ? small ?

注：

ここで LDL のサイズが

- small : 入力 n に対して, サイズが n の多項式で表せる
- large : 入力 n に対して, サイズが n の多項式で表せない

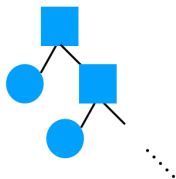
large ? small ?

先行研究によって LDL のサイズと rectangle の重みの関係は以下のことがわかっている.

large ? small ?

先行研究によって LDL のサイズと rectangle の重みの関係は以下のことがわかっている.

LDLがsmall



Vatanら

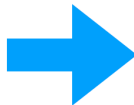
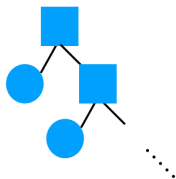
rectangleがlarge



large ? small ?

先行研究によって LDL のサイズと rectangle の重みの関係は以下のことがわかっている.

LDLがsmall



Vatanら

rectangleがlarge



なので LDL が small のとき rectangle は large という.

large ? small ?

逆に rectangle から LDL のことがわからないか？

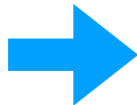
large ? small ?

逆に rectangle から LDL のことがわからないか？
このことを示したのが Chattopadhyay らである。

large ? small ?

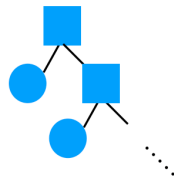
逆に rectangle から LDL のことがわからないか？
このことを示したのが Chattopadhyay らである。

rectangleがlargeじゃない



この論文

LDLがsmallではない



large ? small ?

- 補題 1 : どんな確率分布にさらされた集合 (X, Y) でも, そこから新しく 0 か 1-rectangle をつくれる
- 補題 2 : 効率的な LDL は (重みが) large な monochromatic rectangle を持っている
- 補題 3 : しかし $MAJ \circ XOR$ は large monochromatic rectangle を持っていない
- 定理 1 : $MAJ \circ XOR$ の下界は $2^{\Omega(n)}$ である

補題 2 は Vatan らの結果を拡張して, 先程のような rectangle の情報を盛り込んだものである.

(Vatan らによる武器の強化が、今回の話のメインとなる.)

補題 1

今日やること

- 補題 1: どんな確率分布にさらされた集合 (X, Y) でも, そこから新しく 0 か 1-rectangle をつくれる
- 補題 2: 効率的な LDL は (重みが) large な monochromatic rectangle を持っている
- 補題 3: しかし $MAJ \circ XOR$ は large monochromatic rectangle を持っていない
- 定理 1: $MAJ \circ XOR$ の下界は $2^{\Omega(n)}$ である

補題 1

Lemma

- 線形しきい値関数 $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$

補題 1

Lemma

- 線形しきい値関数 $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$
- 集合 $X, Y \subseteq \{0, 1\}^n$

補題 1

Lemma

- 線形しきい値関数 $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$
- 集合 $X, Y \subseteq \{0, 1\}^n$
- $\{0, 1\}^n$ 上の確率分布 μ, ν

m を $m \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu(X), \nu(Y)\}$, t を範囲 $(0, m]$ の中の任意の値とする.

補題 1

Lemma

- 線形しきい値関数 $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$
- 集合 $X, Y \subseteq \{0, 1\}^n$
- $\{0, 1\}^n$ 上の確率分布 μ, ν

m を $m \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu(X), \nu(Y)\}$, t を範囲 $(0, m]$ の中の任意の値とする.

Lemma

このときいずれかが成立する.

補題 1

Lemma

- 線形しきい値関数 $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$
- 集合 $X, Y \subseteq \{0, 1\}^n$
- $\{0, 1\}^n$ 上の確率分布 μ, ν

m を $m \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu(X), \nu(Y)\}$, t を範囲 $(0, m]$ の中の任意の値とする.

Lemma

このときいずれかが成立する.

- 1 $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ で, $\mu(X') \geq t, \nu(Y') \geq t$ となる *monochromatic 1-rectangle*(X', Y') が存在する.

補題 1

Lemma

- 線形しきい値関数 $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$
- 集合 $X, Y \subseteq \{0, 1\}^n$
- $\{0, 1\}^n$ 上の確率分布 μ, ν

m を $m \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu(X), \nu(Y)\}$, t を範囲 $(0, m]$ の中の任意の値とする。

Lemma

このときいずれかが成立する。

- 1 $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ で, $\mu(X') \geq t, \nu(Y') \geq t$ となる *monochromatic 1-rectangle* (X', Y') が存在する。
- 2 $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ で, $\mu(X') > m - t, \nu(Y') > m - t$ となる *monochromatic 0-rectangle* (X', Y') が存在する。

補題 1(例)

まず補題の $m \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu(X), \nu(Y)\}$ における $\mu(X), \nu(Y)$ はそれぞれ辺の長さである.

	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	1	0	0	0	1	0	0
001	1	0	1	0	0	1	0	1
010	1	0	0	1	0	0	1	0
011	0	1	0	0	0	0	0	0
100	1	0	0	0	1	1	1	1
101	0	0	0	0	0	1	0	1
110	0	1	1	0	1	0	1	0
111	0	1	1	0	0	1	0	1

Y

与えられたX
短い辺m

補題 1(例)

補題 1 ではこの灰色の部分から新しく rectangle を得られるということを行っている. $\mu(X), \nu(Y)$ はそれぞれ辺の長さである.

	000	001	010	011	100	101	110	111	
000	0	1	0	0	0	1	0	0	
001	1	0	1	0	0	1	0	1	
010	1	0	0	1	0	0	1	0	
011	0	1	0	0	0	0	0	0	Y
100	1	0	0	0	1	1	1	1	
101	0	0	0	0	0	1	0	1	
110	0	1	1	0	1	0	1	0	
111	0	1	1	0	0	1	0	1	

与えられたX
短い辺m

補題 1 の証明

monochromatic rectangle を得るアルゴリズムを示すことによって証明する.

補題 1 の証明

monochromatic rectangle を得るアルゴリズムを示すことによって証明する.

- まず集合 X, Y から $f(x, y) = \text{sign}(a + \langle \alpha \cdot x \rangle + \langle \beta \cdot y \rangle)$ による communication 行列 M_f を作る.⁶

補題 1 の証明

monochromatic rectangle を得るアルゴリズムを示すことによって証明する.

- まず集合 X, Y から $f(x, y) = \text{sign}(a + \langle \alpha \cdot x \rangle + \langle \beta \cdot y \rangle)$ による communication 行列 M_f を作る.⁶

行列M

	0,0,0	0,0,1	0,1,0	0,1,1	1,0,0	1,0,1	1,1,0	1,1,1
0,0,0								
0,0,1								
0,1,0								
0,1,1								
1,0,0								
1,0,1								
1,1,0								
1,1,1								

部分行列X×Y

	0,0,1	0,1,0	0,1,1	1,0,0	1,0,1
0,0,1					
0,1,0					
0,1,1					
1,0,0					
1,0,1					

補題 1 の証明

- $a + \langle \alpha \cdot x \rangle, \langle \beta \cdot y \rangle$ が降順になるように M_f をソートする.

補題 1 の証明

- $a + \langle \alpha \cdot x \rangle, \langle \beta \cdot y \rangle$ が降順になるように M_f をソートする.
- 新たな行列 $B = R \times C$ を得る

補題 1 の証明

- $a + \langle \alpha \cdot x \rangle, \langle \beta \cdot y \rangle$ が降順になるように M_f をソートする.
- 新たな行列 $B = R \times C$ を得る

部分行列 $X \times Y$

	0,0,1	0,1,0	0,1,1	1,0,0	1,0,1
0,0,1					
0,1,0					
0,1,1					
1,0,0					
1,0,1					

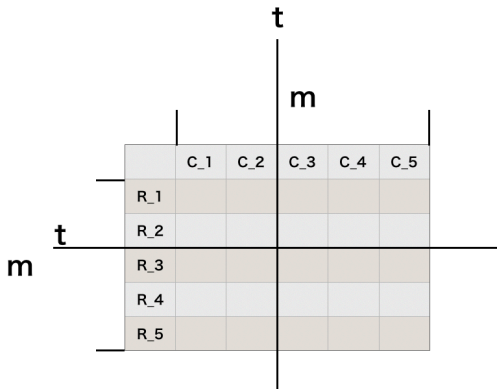
降順

行列 $B = R \times C$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
R_1					
R_2					
R_3					
R_4					
R_5					

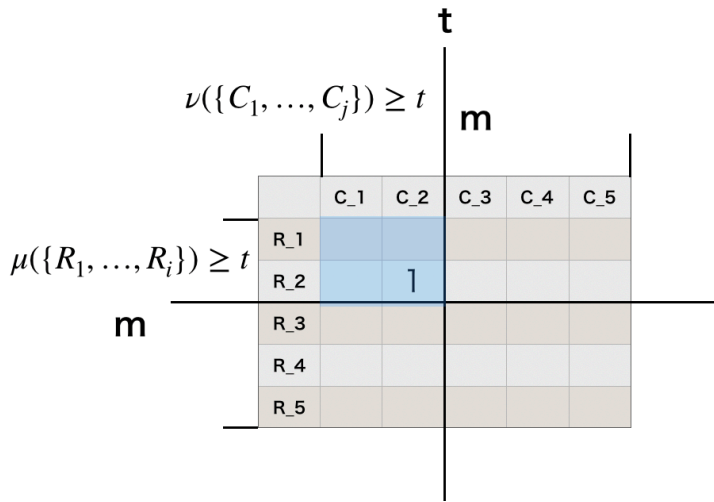
補題 1 の証明

- $t \in (0, m]$ で適当に得られた行列 $B = R \times C$ を分割する.
- $\mu(\{R_1, \dots, R_i\}) \geq t, \nu(\{C_1, \dots, C_j\}) \geq t$ となる行と列を i, j とする



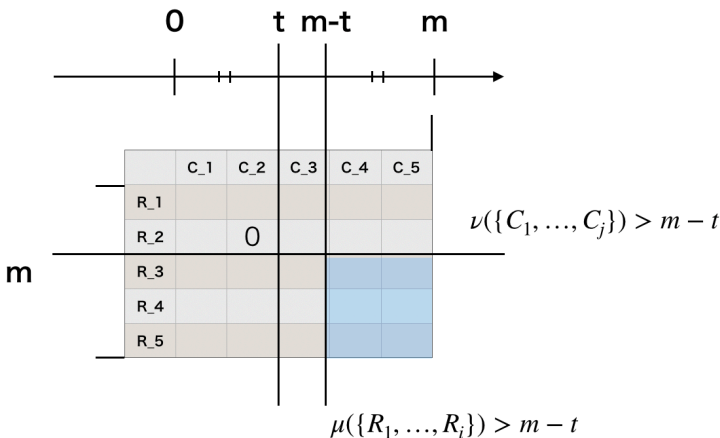
補題 1 の証明

もし $[i, j]$ 成分が 1 なら左上の部分行列は補題の (1) を満たす.



補題 1 の証明

もし $[i, j]$ 成分が 0 なら右下の部分行列は補題の (2) を満たす.



補題 2

今日やること

- 補題 1 : どんな確率分布にさらされた集合 (X, Y) でも, そこから新しく 0 か 1-rectangle をつくれる
- 補題 2 : 効率的な LDL は (重みが) large な monochromatic rectangle を持っている
- 補題 3 : しかし $MAJ \circ XOR$ は large monochromatic rectangle を持っていない
- 定理 1 : $MAJ \circ XOR$ の下界は $2^{\Omega(n)}$ である

補題 2

これからメインとなる補題を示していく.

Lemma

- 関数 f は直積分布 $\mu \times \nu$ において⁷, *monochromatic rectangle* の重みが w より大きくない⁸

⁷ $\{0, 1\}^n$ 上の確率分布 μ, ν

⁸ $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

補題 2

これからメインとなる補題を示していく.

Lemma

- 関数 f は直積分布 $\mu \times \nu$ において⁷, *monochromatic rectangle* の重みが w より大きくない⁸
- このとき f を計算する LDL は少なくともサイズが $\frac{1}{\sqrt{w}}$ 必要である.

⁷ $\{0, 1\}^n$ 上の確率分布 μ, ν

⁸ $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

補題 2(証明)

証明の方針

- 1 背理法によって矛盾を導きたい

補題 2(証明)

証明の方針

- 1 背理法によって矛盾を導きたい
- 2 その前に矛盾を含む世界で LDL は 0-rectangle しか持っていない、補題 1 からその重みがわかることを帰納法で導く

補題 2(証明)

証明の方針

- 1 背理法によって矛盾を導きたい
- 2 その前に矛盾を含む世界で LDL は 0-rectangle しか持っていない、補題 1 からその重みがわかることを帰納法で導く
- 3 すべての k について重みが矛盾していることを証明する

補題 2(証明)

- 関数 f を計算するサイズ k の LDL が与えられたとする


補題 2(証明)

- 関数 f を計算するサイズ k の LDL が与えられたとする
- $k < \frac{1}{\sqrt{w}}$ としてみる

w は rectangle の重みだったので各 L_1, \dots, L_k の重みを調べていく.

補題 2(証明)

まず可能な入力全体 $2^n \times 2^n$ に対して L_1 の rectangle を考える.

⁹短い辺を上限として t を決められたが $2^n \times 2^n$ 行列なので t はなんでもいい 

補題 2(証明)

まず可能な入力全体 $2^n \times 2^n$ に対して L_1 の rectangle を考える.

- 補題 1 から t を適当にとってきて 0 または 1-rectangle が得られるはずである.⁹

⁹短い辺を上限として t を決められたが $2^n \times 2^n$ 行列なので t はなんでもいい

補題 2(証明)

まず可能な入力全体 $2^n \times 2^n$ に対して L_1 の rectangle を考える.

- 補題 1 から t を適当にとってきて 0 または 1-rectangle が得られるはずである.⁹
- t は自由なので $t \in (\sqrt{w}, \frac{1}{k})$ とする.

⁹短い辺を上限として t を決められたが $2^n \times 2^n$ 行列なので t はなんでもいい

補題 2(証明)

- 1 まず補題 1 から $1\text{-rectangle}(X', Y')$ が得られるとする.

補題 2(証明)

- 1 まず補題 1 から $1\text{-rectangle}(X', Y')$ が得られるとする.
- 2 すると条件として $\mu(X) \geq t, \nu(Y) \geq t$ が付随する.

補題 2(証明)

- 1 まず補題 1 から $1\text{-rectangle}(X', Y')$ が得られるとする.
- 2 すると条件として $\mu(X) \geq t, \nu(Y) \geq t$ が付随する.
- 3 しかし $t \in (\sqrt{w}, \frac{1}{k})$ より $t^2 > w$ なので破綻.

補題 2(証明)

- 1 まず補題 1 から $1\text{-rectangle}(X', Y')$ が得られるとする.
- 2 すると条件として $\mu(X) \geq t, \nu(Y) \geq t$ が付随する.
- 3 しかし $t \in (\sqrt{w}, \frac{1}{k})$ より $t^2 > w$ なので破綻.
- 4 よって L_1 における $0\text{-rectangle} S_1 = (X_1, Y_1)$ が手に入る. ¹⁰

¹⁰ どちらかは成り立つという補題だったことに注意

補題 2(証明)

- 1 まず補題 1 から $1\text{-rectangle}(X', Y')$ が得られるとする.
- 2 すると条件として $\mu(X) \geq t, \nu(Y) \geq t$ が付随する.
- 3 しかし $t \in (\sqrt{w}, \frac{1}{k})$ より $t^2 > w$ なので破綻.
- 4 よって L_1 における $0\text{-rectangle} S_1 = (X_1, Y_1)$ が手に入る.¹⁰
- 5 S_1 の重みは補題 1 より $\mu(X_1) \geq 1 - t, \nu(Y_1) \geq 1 - t$

¹⁰ どちらかは成り立つという補題だったことに注意

補題 2(証明)

- このような 0-rectangle の構成が帰納的に続くとする.

補題 2(証明)

- このような 0-rectangle の構成が帰納的に続くとする.
- S_{i-1} は L_{i-1} における 0-rectangle で重みは
 $\mu(X_{i-1}) \geq 1 - (i-1)t, \nu(Y_{i-1}) \geq 1 - (i-1)t$ とする.

補題 2(証明)

- いま, S_{i-1} が補題 1 によって $1\text{-rectangle}(X', Y')$ を含んでいるとする

補題 2(証明)

- いま, S_{i-1} が補題 1 によって $1\text{-rectangle}(X', Y')$ を含んでいるとする
- 補題 1 から $\mu(X') \geq t, \nu(Y') \geq t$ である

補題 2(証明)

- いま, S_{i-1} が補題 1 によって $1\text{-rectangle}(X', Y')$ を含んでいるとする
- 補題 1 から $\mu(X') \geq t, \nu(Y') \geq t$ である
- しかし $t^2 > w$ なので無理

補題 2(証明)

- いま, S_{i-1} が補題 1 によって $1\text{-rectangle}(X', Y')$ を含んでいるとする
- 補題 1 から $\mu(X') \geq t, \nu(Y') \geq t$ である
- しかし $t^2 > w$ なので無理
- よって $0\text{-rectangle} S_i$ が得られ, 重みが $\mu(X_i) \geq 1 - it, \nu(Y_i) \geq 1 - it$

補題 2(証明)

- いま, S_{i-1} が補題 1 によって $1\text{-rectangle}(X', Y')$ を含んでいるとする
- 補題 1 から $\mu(X') \geq t, \nu(Y') \geq t$ である
- しかし $t^2 > w$ なので無理
- よって $0\text{-rectangle} S_i$ が得られ, 重みが $\mu(X_i) \geq 1 - it, \nu(Y_i) \geq 1 - it$
- 帰納法によって背理法の世界では LDL は 0-rectangle しか持たないことが示せた.

補題 2(証明)

- 帰納法から $S_{k-1} = (X_{k-1}, Y_{k-1})$ が存在し
- 重みは $\mu(X_{k-1}) \geq 1 - (k-1)t, \nu(Y_i) \geq 1 - (k-1)t$ である.

補題 2(証明)

- 帰納法から $S_{k-1} = (X_{k-1}, Y_{k-1})$ が存在し
- 重みは $\mu(X_{k-1}) \geq 1 - (k-1)t, \nu(Y_i) \geq 1 - (k-1)t$ である.
- ここで $kt \leq 1, i < k$ から $t \leq 1 - (i-1)t$ なので

補題 2(証明)

- 帰納法から $S_{k-1} = (X_{k-1}, Y_{k-1})$ が存在し
- 重みは $\mu(X_{k-1}) \geq 1 - (k-1)t, \nu(Y_i) \geq 1 - (k-1)t$ である.
- ここで $kt \leq 1, i < k$ から $t \leq 1 - (i-1)t$ なので
- この 0-rectangle の重み w' は $w' > t^2 > w$ となり矛盾. □

補題 2(証明)

- 帰納法から $S_{k-1} = (X_{k-1}, Y_{k-1})$ が存在し
- 重みは $\mu(X_{k-1}) \geq 1 - (k-1)t, \nu(Y_i) \geq 1 - (k-1)t$ である.
- ここで $kt \leq 1, i < k$ から $t \leq 1 - (i-1)t$ なので
- この 0-rectangle の重み w' は $w' > t^2 > w$ となり矛盾. □

付録

$$\begin{aligned}
 t \in (\sqrt{w}, \frac{1}{k}) &\Leftrightarrow kt < 1, i \in [k-1] \Leftrightarrow i < k \\
 &\Leftrightarrow it < kt \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq kt - it \leq 1 - it \Leftrightarrow t \leq kt - (i-1)t \leq \\
 &1 - (i-1)t \Leftrightarrow t \leq 1 - (i-1)t
 \end{aligned}$$

補題 3

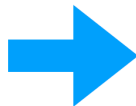
今日やること

- 補題 1: どんな確率分布にさらされた集合 (X, Y) でも, そこから新しく 0 か 1-rectangle をつくれる
- 補題 2: 効率的な LDL は (重みが) large な monochromatic rectangle を持っている
- 補題 3: しかし $MAJ \circ XOR$ は large monochromatic rectangle を持っていない
- 定理 1: $MAJ \circ XOR$ の下界は $2^{\Omega(n)}$ である

補題2再考

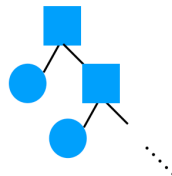
補題2は rectangle の重みが LDL の分母に来ていた.

rectangleがlargeじゃない



この論文

LDLがsmallではない

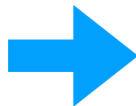


(暗に) 今日言いたかったことが言えた！

補題2再考

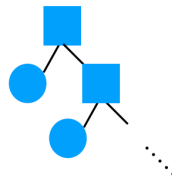
補題2は rectangle の重みが LDL の分母に来ていた.

rectangleがlargeじゃない



この論文

LDLがsmallではない



(暗に) 今日言いたかったことが言えた！
これから実例を見ていく.

これからやりたいこと

これからやること

- 定義

これからやりたいこと

これからやること

- 定義
- $MAJ_n \circ XOR$ の (rectangle の) 下界を示す

これからやりたいこと

これからやること

- 定義
- $MAJ_n \circ XOR$ の (rectangle の) 下界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ の (rectangle の) 上界を示す

これからやりたいこと

これからやること

- 定義
- $MAJ_n \circ XOR$ の (rectangle の) 下界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ の (rectangle の) 上界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ を表す LDL のサイズの下界を求める

これからやりたいこと

これからやること

- 定義
- $MAJ_n \circ XOR$ の下界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ の上界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ を表す LDL のサイズの下界を求める

MAJ_n

Definition

関数 $MAJ_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ は,

$$MAJ_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & (\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{2} > 0) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

MAJ_n

Example

$$MAJ_5(1, 1, 1, 0, 0) = 1 \because 1 + 1 + 1 + 0 + 0 = 3 \geq \frac{5}{2} = 2.5$$

MAJ_n

Example

$$MAJ_5(1, 1, 1, 0, 0) = 1 \because 1 + 1 + 1 + 0 + 0 = 3 \geq \frac{5}{2} = 2.5$$

Example

$$MAJ_5(1, 1, 0, 0, 0) = 0 \because 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 2 \leq \frac{5}{2} = 2.5$$

MAJ_n

Example

$$MAJ_5(1, 1, 1, 0, 0) = 1 \because 1 + 1 + 1 + 0 + 0 = 3 \geq \frac{5}{2} = 2.5$$

Example

$$MAJ_5(1, 1, 0, 0, 0) = 0 \because 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 2 \leq \frac{5}{2} = 2.5$$

Example

$$MAJ_6(1, 1, 1, 0, 0, 0) = 0 \because 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 3 \leq \frac{6}{2} = 3$$

XOR

Definition

関数 $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ に対して $f \circ XOR$ とは,
 $f \circ XOR(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = f(x_1 \oplus y_1, \dots, x_n \oplus y_n)$ で定義される関数である.

床関数, 天井関数

Definition

床関数 $\lfloor x \rfloor$ を x 以下の最大の整数とする.

床関数, 天井関数

Definition

床関数 $\lfloor x \rfloor$ を x 以下の最大の整数とする.

Definition

天井関数 $\lceil x \rceil$ を x 以上の最小の整数とする.

これからやりたいこと

これからやること

- 定義
- $MAJ_n \circ XOR$ の (rectangle の) 下界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ の (rectangle の) 上界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ を表す LDL のサイズの下界を求める

補題 3

Lemma

関数 $F : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ を $MAJ_n \circ XOR$ とする. このとき任意の $b \in \{0, 1\}$ に対して, *communication* 行列 M_F の *monochromatic b -square* のサイズは少なくとも $\sum_{i=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{n}{i}$ である.

補題 3(証明)

まず $MAJ_n \circ XOR$ で 0 になる入力について考察する.

補題 3(証明)

まず $MAJ_n \circ XOR$ で 0 になる入力について考察する.

- 入力列 $\overbrace{000 \dots 000}^n$ と $\overbrace{000 \dots 000}^n$

補題 3(証明)

まず $MAJ_n \circ XOR$ で 0 になる入力について考察する.

- 入力列 $\overbrace{000 \dots 000}^n$ と $\overbrace{000 \dots 000}^n$
 $MAJ_n \circ XOR$ は 0 を出力する.

補題 3(証明)

まず $MAJ_n \circ XOR$ で 0 になる入力について考察する.

- 入力列 $\overbrace{000 \dots 000}^n$ と $\overbrace{000 \dots 000}^n$
 $MAJ_n \circ XOR$ は 0 を出力する.
- ひとつだけ値を変えて $\textcolor{red}{1}00 \dots 000$ と $\textcolor{red}{0}00 \dots 000$

補題 3(証明)

まず $MAJ_n \circ XOR$ で 0 になる入力について考察する.

- 入力列 $\overbrace{000 \dots 000}^n$ と $\overbrace{000 \dots 000}^n$
 $MAJ_n \circ XOR$ は 0 を出力する.
- ひとつだけ値を変えて $\textcolor{red}{1}00 \dots 000$ と $\textcolor{red}{0}00 \dots 000$
 $MAJ_n \circ XOR$ は 0 を出力する.

補題 3(証明)

- 同じ動作を $n/4$ 回繰り返すと, 半分が異なる $111\dots 000$ と $000\dots 000$ ができる.

補題 3(証明)

- 同じ動作を $n/4$ 回繰り返すと, 半分か異なる $111\dots 000$ と $000\dots 000$ ができる.

- $$\overbrace{1 \oplus 0 \dots 0 \oplus 0}^n = \overbrace{111\dots\dots}^{n/2} \overbrace{000\dots\dots}^{n/2}$$

補題 3(証明)

- 同じ動作を $n/4$ 回繰り返すと, 半分が異なる $111\dots 000$ と $000\dots 000$ ができる.

$$\text{■ } \overbrace{1 \oplus 0 \dots 0 \oplus 0}^n = \overbrace{111\dots\dots}^{n/2} \overbrace{000\dots\dots}^{n/2}$$

$n/2$ 個の 1 を含むため $MAJ_n \circ XOR$ は 0 を出力する.

補題 3(証明)

- 同じ動作を $n/4$ 回繰り返すと, 半分が異なる $111\dots 000$ と $000\dots 000$ ができる.

$$\text{■ } \overbrace{1 \oplus 0 \dots 0 \oplus 0}^n = \overbrace{111\dots\dots}^{n/2} \overbrace{000\dots\dots}^{n/2}$$

$n/2$ 個の 1 を含むため $MAJ_n \circ XOR$ は 0 を出力する.

これ以上異なる点を増やしたら出力が変わる.

$MAJ_n \circ XOR$ で 0 になる入力 1 の数を $n/4$ 個より増やしたら存在しないようだ.

補題 3(証明)

- 同じ動作を $n/4$ 回繰り返すと, 半分が異なる $111\dots 000$ と $000\dots 000$ ができる.

$$\text{■ } \overbrace{1 \oplus 0 \dots 0 \oplus 0}^n = \overbrace{111\dots\dots}^{n/2} \overbrace{000\dots\dots}^{n/2}$$

$n/2$ 個の 1 を含むため $MAJ_n \circ XOR$ は 0 を出力する.

これ以上異なる点を増やしたら出力が変わる.

$MAJ_n \circ XOR$ で 0 になる入力 1 の数を $n/4$ 個より増やしたら存在しないようだ.

- $|x| \leq n/4$ を得る.

補題 3(証明)

同様に $MAJ_n \circ XOR$ が 1 を出力する入力について考察する. 入力長 n からその 1 の数 $|x|$ を引いた $n - |x|$ は 0 数になる. こちらで 0 を増やす操作をしていくと, $n/4$ 個以上に増やしたら $MAJ_n \circ XOR$ の出力は 0 になってしまう.

したがって $n - |x| \geq n/4 \Leftrightarrow |x| \geq n - n/4$ を得る.

注 :

一般には $n/4$ が整数ではないので, 厳密には $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ である.

補題 3(証明)

以上の議論から集合 X, Y, Z を以下のように定める.

$$X = Y = \{x \in \{0, 1\}^n : |x| \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\}$$

$$Z = \{x \in \{0, 1\}^n : |x| \geq n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\}$$

注 :

ただし $|x| \geq n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ についてイコールが成り立つのは, n が 4 の倍数でないときである.

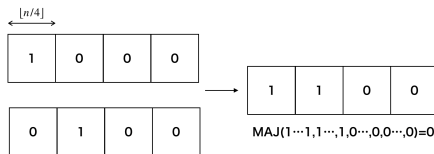
このとき $F(x, y) = 0, x \in X, y \in Y$ かつ
 $F(x, z) = 1, x \in X, z \in Z$ である.

補題 3(証明)

$F(x, y)$ ではかならず 1 の数が $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ なので, どんなに頑張っても 1 の数は $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ まで.

補題 3(証明)

$F(x, y)$ ではかならず 1 の数が $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ なので, どんなに頑張っても 1 の数は $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ まで.



したがって $F(x, y) = 0$

補題 3(証明)

$F(x, z)$ では入力列 x の 1 の数は最大で $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ で, 入力列 z の 0 の数は最大で $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ である.

補題 3(証明)

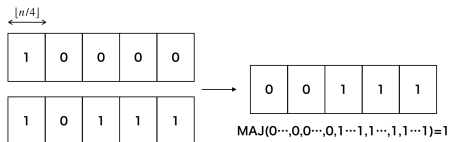
$F(x, z)$ では入力列 x の 1 の数は最大で $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ で, 入力列 z の 0 の数は最大で $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ である.

したがってどんなに XOR で 0 を出力するように工夫しても,

補題 3(証明)

$F(x, z)$ では入力列 x の 1 の数は最大で $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ で, 入力列 z の 0 の数は最大で $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ である.

したがってどんなに XOR で 0 を出力するように工夫しても,



$F(x, z) = 1$ である.

補題 3(証明)

以上の $(X, Y), (X, Z)$ はそれぞれ, 0 または 1 square である. 各サイズ, つまり $|X| = |Y| = |Z|$ は入力列 n から $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ 以下で選ぶ組み合わせの数なので $\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} \binom{n}{i}$ である. □

注 :

$MAJ_n \circ XOR$ が 0, 1 を出力するという最低限の条件を満たしており, かつその条件から生成されたので, このサイズが下界を意味することに注意.

これからやりたいこと

これからやること

- $MAJ_n \circ XOR$ の下界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ の上界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ を表す LDL のサイズの下界を求める

定理 1

Theorem

関数 $F : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ を $MAJ_n \circ XOR$ とする. このとき任意の $b \in \{0, 1\}$ に対して, *communication* 行列 M_F の *monochromatic b -sqare* のサイズの上界は $\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}$ である.

定理 1(証明)

- 集合 $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ が $|A| = |B| > \sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}$ で, $A \times B$ が M_F における monochromatic 1-square あると仮定する.

定理 1(証明)

- 集合 $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ が $|A| = |B| > \sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}$ で, $A \times B$ が M_F における monochromatic 1-square あると仮定する.

ここで Hamming 距離とは以下のようなものであった.

定理 1(証明)

- 集合 $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ が $|A| = |B| > \sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}$ で, $A \times B$ が M_F における monochromatic 1-square あると仮定する.

ここで Hamming 距離とは以下のようなものであった.

Definition

入力列 $x, y \in \{0, 1\}^n$ に対する Hamming 距離 $d(x, y)$ を,
 $d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |\{i : i \text{ は } x_i \neq y_i \text{ であるような } i\}|$ と定義する

定理 1(証明)

- 集合 $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ が $|A| = |B| > \sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}$ で, $A \times B$ が M_F における monochromatic 1-square あると仮定する.

ここで Hamming 距離とは以下のようなものであった.

Definition

入力列 $x, y \in \{0, 1\}^n$ に対する Hamming 距離 $d(x, y)$ を,
 $d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |\{i : i \text{ は } x_i \neq y_i \text{ であるような } i\}|$ と定義する

Definition

入力列の集合 $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ に対する Hamming 距離 $d(A, B)$ は,
 $d(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in A, y \in B} d(x, y)$ と定義する.

定理 1(証明)

- Hamming 距離を用いると (A,B) が 1-square であることから, $d(A, B) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ を満足しなければならない.

定理 1(証明)

- Hamming 距離を用いると (A,B) が 1-square であることから, $d(A, B) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ を満足しなければならない.
- つまりどんな組み合わせでも異なる部分が $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 以上でないと $MAJ \circ XOR$ は 1 を出力しない.

定理 1(証明)

ここで Haper の定理より

Theorem

Harper の定理 : 空でない集合 $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ に対して以下の条件を満たすような Hamming 球 A_0, B_0 が存在する.

- 1 A_0, B_0 それぞれ中心が $0^n, 1^n$ である
- 2 それぞれサイズが $|A_0| = |A|, |B_0| = |B|$ を満たす
- 3 $d(A, B) \leq d(A_0, B_0)$ を満たす

$0^n, 1^n$ を中心とする Hamming 球 A_0, B_0 があって,
 $|A_0| = |A|, |B_0| = |B|$ かつ $d(A_0, B_0) \geq d(A, B)$ を満たす.

定理 1(証明)

- 中心が $0^n, 1^n$ で半径が r なら, Hamming 球は中心から (Hamming 距離で) r 離れた位置までの集合である.
- どんな組み合わせでも異なる部分が $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 以上でないと $MAJ \circ XOR$ は 1 を出力しないのだから, 下界の議論のように, A_0, B_0 の要素はどんな組み合わせでも異なる部分が $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ より必要である. よって半径 r は $r - 1 \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \Rightarrow r > \lceil \frac{n}{4} \rceil$

注 :

入力列 $c \in \{0, 1\}^n$ とある $r \in 1, \dots, n$ が与えられたとき, 以下の条件を満たす $A \subseteq \{0, 1\}^n$ を中心 c 半径 r の Hamming 球という.

- 1 $\{s \in \{0, 1\}^n \mid d(s, c) \leq r - 1\} \subset A$
- 2 $A \subseteq \{s \in \{0, 1\}^n \mid d(s, c) \leq r\}$

定理 1(証明)

したがって

$$d(A_0, B_0) = \min_{x \in A_0, y \in B_0} d(x, y) = d(\lceil \frac{n}{4} \rceil, \lceil \frac{n}{4} \rceil) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

しかし

$$d(A_0, B_0) \geq d(A, B) > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

より矛盾を導いた.



これからやりたいこと

これからやること

- $MAJ_n \circ XOR$ の下界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ の上界を示す
- $MAJ_n \circ XOR$ を表す LDL のサイズの下界を求める

今日やること

- 効率よく計算することができる LDL は large monochromatic rectangle を持つことを示す
- $MAJ \circ XOR$ は large monochromatic rectangle を持たないことを示す
- $MAJ \circ XOR$ の下界が $2^{\Omega(n)}$ であることを示す

$MAJ_n \circ XOR$ を計算する LDL の下界

定理 1 から $MAJ_n \circ XOR$ の rectangle の一辺のサイズの上界は $\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}$ である.

$MAJ_n \circ XOR$ を計算する LDL の下界

定理 1 から $MAJ_n \circ XOR$ の rectangle の一辺のサイズの上界は $\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}$ である.

また補題 2 は任意の確率分布にて定義されていたので、一様分布であるとすると、各確立はサイズを 2^n で割れば良いので、

$MAJ_n \circ XOR$ を計算する LDL の下界

定理 1 から $MAJ_n \circ XOR$ の rectangle の一辺のサイズの上界は $\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}$ である.

また補題 2 は任意の確率分布にて定義されていたので、一様分布であるとする、各確立はサイズを 2^n で割れば良いので、したがって LDL のサイズ s_n は

$$s_n \geq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}}{2^n}\right)^2}}$$

$MAJ_n \circ XOR$ を計算する LDL の下界

したがって

$$s_n \geq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}}$$

$MAJ_n \circ XOR$ を計算する LDL の下界

したがって

$$s_n \geq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}}$$

いまスターリングの近似から, $\log_2 \binom{n}{i} \sim nH(\frac{k}{n})$ を利用できる.[3]
また i をすべて $n/4$ で近似すると,

$MAJ_n \circ XOR$ を計算する LDL の下界

したがって

$$s_n \geq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}}$$

いまスターリングの近似から, $\log_2 \binom{n}{i} \sim nH(\frac{k}{n})$ を利用できる.[3]
また i をすべて $n/4$ で近似すると,

$$s_n \geq \frac{2^n}{2^{nH(1/4)}}$$

$MAJ_n \circ XOR$ を計算する LDL の下界

したがって

$$s_n \geq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}}$$

いまスターリングの近似から, $\log_2 \binom{n}{i} \sim nH(\frac{i}{n})$ を利用できる.[3]
また i をすべて $n/4$ で近似すると,

$$s_n \geq \frac{2^n}{2^{nH(1/4)}}$$

またエントロピー $H(1/4) < 0.82$ であるから近似によって,

$MAJ_n \circ XOR$ を計算する LDL の下界

したがって

$$s_n \geq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n}{i}}$$

いまスターリングの近似から, $\log_2 \binom{n}{i} \sim nH(\frac{i}{n})$ を利用できる.[3]
また i をすべて $n/4$ で近似すると,

$$s_n \geq \frac{2^n}{2^{nH(1/4)}}$$

またエントロピー $H(1/4) < 0.82$ であるから近似によって,

$$s_n \geq \frac{2^n}{2^{0.82n}}$$

$$s_n \geq 2^{0.18n}$$

今後について

以上のことから (暗に) large monochromatic rectangle をもたないなら, LDL のサイズは small ではないことを言えた.

- LDL の計算量クラスを導入する

今後について

以上のことから (暗に) large monochromatic rectangle をもたないなら, LDL のサイズは small ではないことを言えた.

- LDL の計算量クラスを導入する
- 他の計算量クラスとの対応を証明する

付録：LDL に関連する研究

- Krause：AND-DL の小さな表現. しかし第一層に線形しきい値素子、第二層に XOR 素子を持つような深さ 2 の回路の計算には指数サイズが必要とされた.
- Impagliazzo, Williams：rectangle-DL と呼ばれる関連 (related) 計算モデルにおいて下界を得るための条件を示した. 多項式サイズの rectangle-DL では計算できないが多項式サイズの $MAJ \circ MAJ$ 回路で計算可能な関数を暗黙的に示した.

付録：LDLに関連する研究

- Groger, Turan, Vatan : 決定リスト (bounded-rank 線形決定木についても) に対する Inner Product MOD2 関数の下界を示した
- Uchizawa, Takimoto : LDL と LDT のクラスについて, その線形しきい値クエリの重みが入力列の長さに対して多項式サイズで有界な場合の下界を示した.

References I

- [1] Chattopadhyay, Mahajan, Mande *Lower bounds for linear decision lists*. arXiv:1901.05911v1 [cs.CC] 17 Jan 2019
- [2] Turán, Vatan *Linear decision lists and partitioning algorithms for the construction of neural networks*. Foundation of Computational Mathematics, pages 414-423. Springer, 1997.
- [3] Wikipedia 『二項係数』 <https://ja.wikipedia.org/wiki/二項係数>
- [4] Rivest *Learning decision lists*. Machine Learning, 2(3):229-246, 1987.

ご静聴ありがとうございました.