

日本経済学会 チュートリアルセッション

ニューケインジアン・モデルの新展開

2021年5月

一橋大学 砂川武貴

イントロダクション

- これまでは、時間反復法を用いて新古典派成長モデルを数値的に解く方法を示した
- 時間反復法では、解の必要条件である均衡条件を連立方程式とみなしてモデルの解を求める
- 均衡条件を求めること自体は比較的容易なため、この方法の汎用性は高い
- たとえば、金融政策分析に使われるニューケインジアン・モデルを、非線形性を考慮して解くのによく使われる

- ニューケインジアン・モデルとしてよく知られているのは、以下の3本の線形差分方程式
 - 消費のオイラー方程式(consumption Euler equation)
 - ニューケインジアン・フィリップス曲線(New Keynesian Phillips curve)
 - テイラー・ルール(Taylor rule)
- この3本の式の線形モデルでも、ゼロ金利制約(zero lower bound on nominal interest rates)を導入するとモデルは非線形になり、解析解がある特殊なケースを除いては、数値解を求める必要がある

- ここではモデルに確率的なショックを導入する
 - 自然利子率(natural rate of interest)はモデルにおいて外生的なショックとして与えられる
- より一般的なケースでは、連続的空間においてショックがAR(1)過程に従う

- 時間反復法は、最適金融政策の分析にも適用可能である
- 最適金融政策は、均衡条件を制約として社会厚生を最大化するような配分を求めるが、このような動学最適化問題の1階の必要条件から解を求めることができる
 - 政策決定者が将来の経路にコミットできるとき、これを最適コミットメント政策という
 - そのようなコミットができない場合は、政策決定者は每期ごとの社会厚生を最大化することになり、これを最適裁量政策という
- 最適コミットメント政策は、フォワードガイダンスの理論的基礎として知られている
- ゼロ金利下の最適コミットメント政策は、特別な場合を除き、数値計算によってのみ分析が可能である

ロードマップ

- 2状態・準線形ニューケインジアン・モデル
- 応用 1：ゼロ金利下の財政乗数（Christiano, Eichenbaum and Rebelo, 2011）
- ゼロ金利下の最適金融政策：裁量 vs. コミットメント
- 応用 2（やや高度）：フォワードガイダンス・ルール（Reifschneider-Williams, 2000）

2 状態・準線形モデル

- 標準的な線形ニューケインジアン・モデルにゼロ金利制約を追加した準線形モデルを考える
- 外生的なショック $s_t \in \{s_H, s_L\}$ は $N = 2$ 個だけの値をとると仮定しよう
 - s_t はモデルの状態変数(state variable)であり、ここでは自然利子率とする
 - $s_H > s_L$ として、添字 $\{H, L\}$ はそれぞれ状態(state)がHighもしくはLowであることを示す

- 状態は、 H と L の間を、ある確率過程にしたがって時間とともに動く
- ここで、今期の状態がいずれかになる確率は、前期の状態にのみ依存するという仮定を置く。すなわち、確率過程は以下の遷移行列を持つマルコフ連鎖によって表される

$$P = \begin{bmatrix} 1 - p_H & p_H \\ 1 - p_L & p_L \end{bmatrix}$$

- p_H ：危機の発生確率
- p_L ：危機の持続確率

- モデルの均衡条件は、以下の3つの式からなる連立方程式で与えられる

$$y_t = \mathbb{E}_t y_{t+1} - (r_{n,t} - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - s_t) \quad (1)$$

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \quad (2)$$

$$r_{n,t}^* = r^* + \phi_\pi \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \quad (3)$$

- モデルの均衡条件は、以下の3つの式からなる連立方程式で与えられる

$$y_t = \mathbb{E}_t y_{t+1} - (r_{n,t} - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - s_t) \quad (1)$$

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \quad (2)$$

$$r_{n,t}^* = r^* + \phi_\pi \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \quad (3)$$

- これらの式は、家計や企業の最適化問題から導出された均衡条件を対数線形近似したものであり、それぞれ、消費のオイラー方程式、ニューケインジアン・フィリップス曲線、テイラー型の金融政策ルールと呼ばれる
- y_t は生産ギャップ、 π_t はインフレ率、 $r_{n,t}$ は名目金利
- $(\beta, \phi_\pi, \kappa, r^*)$ はパラメータ：家計や企業の最適化行動のミクロ的基礎付けのある非線形モデルに基づく

- $r_{n,t}^*$ はシャドーレートと呼ばれ、ゼロ金利制約がなければ名目金利と一致（ $r_{n,t}^* = r_{n,t}$ ）する
- このとき、3つの未知数($y_t, \pi_t, r_{n,t}$)に対して3本の方程式があるので、通常の線形モデルを解く手続きにしたがって、解を求めることができる

- $r_{n,t}^*$ はシャドーレートと呼ばれ、ゼロ金利制約がなければ名目金利と一致（ $r_{n,t}^* = r_{n,t}$ ）する
- このとき、3つの未知数($y_t, \pi_t, r_{n,t}$)に対して3本の方程式があるので、通常の線形モデルを解く手続きにしたがって、解を求めることができる
- ここで、名目金利はゼロを下回ることができないという制約を明示的に考えると、

$$r_{n,t} = \max\{r_{n,t}^*, 0\} \quad (4)$$

この制約の下では、モデルの解は非線形となり、通常の線形モデルの解法はそのままでは使えない

準線形モデルの解析解

- モデルの解は以下のような関数となる

$$y = \varsigma_y(s), \quad \pi = \varsigma_\pi(s), \quad r_n = \varsigma_{r_n}(s)$$

準線形モデルの解析解

- モデルの解は以下のような関数となる

$$y = \varsigma_y(s), \quad \pi = \varsigma_\pi(s), \quad r_n = \varsigma_{r_n}(s)$$

- さらに、 s のとりうる値は $N_s = 2$ つだけなので、これらの関数も2つの値のいずれかをとる。すなわち、

$$y \in \{y_H, y_L\}, \quad \pi \in \{\pi_H, \pi_L\}, \quad r_n \in \{r_{n,H}, r_{n,L}\}$$

の6つの未知数がモデルの解となる

- 以下では、 $r_{n,H} > 0, r_{n,L} = 0$ という仮定を置く

- ここで、

$$\mathbb{E}_t y_{t+1} = (1 - p_i)y_H + p_i y_L$$

$$\mathbb{E}_t \pi_{t+1} = (1 - p_i)\pi_H + p_i \pi_L$$

をそれぞれの状態 $i \in \{H, L\}$ における均衡条件に代入すると、

$$y_H = (1 - p_H)y_H + p_H y_L - (r_{n,t} - [(1 - p_H)\pi_H + p_H \pi_L] - s_H)$$

$$\pi_H = \kappa y_H + \beta[(1 - p_H)\pi_H + p_H \pi_L]$$

$$r_{n,H} = r^* + \phi_\pi[(1 - p_H)\pi_H + p_H \pi_L]$$

$$y_L = (1 - p_L)y_H + p_L y_L - (r_{n,t} - [(1 - p_L)\pi_H + p_L \pi_L] - s_L)$$

$$\pi_L = \kappa y_L + \beta[(1 - p_L)\pi_H + p_L \pi_L]$$

$$r_{n,L} = 0$$

6つの未知数に対して6つの線形の方程式があるため、未知数を解析的に求めることができる

時間反復法による数値解

- 準線形モデルは、時間反復法を使っても解くことができる
- N_s が大きい場合は解析解を求めるのが非常に煩雑になるため、このアプローチが有用になる

時間反復法による数値解

- 準線形モデルは、時間反復法を使っても解くことができる
- N_s が大きい場合は解析解を求めるのが非常に煩雑になるため、このアプローチが有用になる

アルゴリズム

1. グリッド生成：状態空間の評価点を有限個のグリッドに区切る。この場合、 (s_H, s_L) はすでに与えられている
2. 収束の基準：収束の基準になるパラメータ ε を与える

1. 最適化：古い政策関数 $y = \varsigma_y^{(n-1)}(s)$, $\pi = \varsigma_\pi^{(n-1)}(s)$, $r_n = \varsigma_{r_n}^{(n-1)}(s)$ 、およびグリッドにおける s_i の値を所与として、以下の3本の式を $(y_t, \pi_t, r_{n,t})$ について解く

$$y_i = y_i^e - (r_{n,i} - \pi_i^e - s_i)$$

$$\pi_i = \kappa y_i + \beta \pi_i^e$$

$$r_{n,i} = \max\{r^* + \phi_\pi \pi_i^e, 0\}$$

ここで、

$$\begin{aligned}y_i^e &= (1 - p_i)\varsigma_y^{(n-1)}(s_H) + p_i\varsigma_y^{(n-1)}(s_L) \\ \pi_i^e &= (1 - p_i)\varsigma_\pi^{(n-1)}(s_H) + p_i\varsigma_\pi^{(n-1)}(s_L)\end{aligned}$$

である。

このステップで、それぞれのグリッド上の政策関数の値、すなわち新しい政策関数のベクトル $\varsigma^{(n)}(s_i)$

$$(y_H^{(n)}, y_L^{(n)}), \quad (\pi_H^{(n)}, \pi_L^{(n)}), \quad (r_{n,H}^{(n)}, r_{n,L}^{(n)})$$

を得る

1. 全ての s_i について $\|\varsigma^{(n)}(s_i) - \varsigma^{(n-1)}(s_i)\| < \varepsilon$ であればストップ。そうでなければ、 $\varsigma^{(n)}(s_i)$ を $\varsigma^{(n-1)}(s_i)$ に代入して、ステップ3-4を繰り返す

- $p_H = 0$ の場合、状態 H は吸収状態(absorbing state)とも呼ばれ、一度経済の状態が H になった後はそこから動かない
- ここで、状態 H では、政策金利（名目金利）はプラスになっており、産出ギャップ、インフレ率の値はゼロである



- $p_H = 0$ の場合、状態 H は吸収状態(absorbing state)とも呼ばれ、一度経済の状態が H になった後はそこから動かない
- ここで、状態 H では、政策金利（名目金利）はプラスになっており、産出ギャップ、インフレ率の値はゼロである



- $p_H > 0$ の場合、状態 H であっても政策金利が下がり、インフレ率が状態 H と状態 L の両方で下がる
- これは、ゼロ金利制約による不確実性の非中立性(non-neutrality of uncertainty)と呼ばれる

応用：ゼロ金利下の財政乗数

- 以下の準線形ニューケインジアン・モデルを考える (Christiano, Eichenbaum and Rebelo, 2011)

$$\lambda_t = \mathbb{E}_t \lambda_{t+1} + (r_{n,t} - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - s_t)$$

$$\lambda_t = d_c c_t + d_n n_t$$

$$\pi_t = \kappa \left(c_t + \frac{N}{1-N} n_t \right) + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1}$$

$$y_t = (1 - g_y) c_t + g_y g_t$$

$$n_t = y_t$$

$$r_{n,t}^* = r^* + \phi_\pi \mathbb{E}_t \pi_{t+1}$$

$$r_{n,t} = \max\{r_{n,t}^*, 0\}$$

ここで、 $d_c = \gamma(1 - \sigma) - 1$, $d_n = -(1 - \gamma)(1 - \sigma)N/(1 - N)$ とする

- 確率変数 (s_t, g_t) はそれぞれ2つの値のいずれか $s_t \in \{s_H, s_L\}, g_t \in \{g_H, g_L\}$ を取り、以下の遷移行列を持つ共通の確率過程に従うとする

$$P = \begin{bmatrix} 1 - p_H & p_H \\ 1 - p_L & p_L \end{bmatrix}$$

すなわち、状態 $H : (s_t, g_t) = (s_H, g_H)$ 、状態 $L : (s_t, g_t) = (s_L, g_L)$

- モデルの解は以下のような関数となる

$$\begin{aligned} y &= \varsigma_y(s, g), & \pi &= \varsigma_\pi(s, g), & r_n &= \varsigma_{r_n}(s, g), \\ c &= \varsigma_c(s, g), & n &= \varsigma_n(s, g), & \lambda &= \varsigma_\lambda(s, g) \end{aligned}$$

- モデルの解は以下のような関数となる

$$\begin{aligned} y &= \varsigma_y(s, g), & \pi &= \varsigma_\pi(s, g), & r_n &= \varsigma_{r_n}(s, g), \\ c &= \varsigma_c(s, g), & n &= \varsigma_n(s, g), & \lambda &= \varsigma_\lambda(s, g) \end{aligned}$$

- さらに、 (s, g) のとりうる値は2つだけなので、これらの関数も2つの値のいずれかをとり。すなわち、

$$\begin{aligned} y &\in \{y_H, y_L\}, & \pi &\in \{\pi_H, \pi_L\}, & r_n &\in \{r_{n,H}, r_{n,L}\}, \\ c &\in \{c_H, c_L\}, & n &\in \{n_H, n_L\}, & \lambda &\in \{\lambda_H, \lambda_L\}, \end{aligned}$$

の未知数がモデルの解となる

- 以下では、 $r_{n,H} > 0, r_{n,L} = 0$ という仮定を置く。また、状態 H においては財政支出は行わないものとする ($g_H = 0$)

- ゼロ金利下の財政乗数は、 g_L を1単位増やしたときの y_L の増分（ $y_L(g_L = 1) - y_L(g_L = 0)$ ）として定義できる
- 先ほどと同様に、時間反復法を使ってそのような y_L の増分を求めることができる
 - $N_s = 2$ のときは、解析解も存在するが・・・
- パラメータの値は以下の通り

- $p_L = 0.8$ のときの財政乗数の値は、ゼロ金利の下では3.60なのに対して、ゼロ金利を考慮しないと1.12と大きく異なる
- 財政乗数の値は、（ゼロ金利の下ではとくに）ショックの慣性に依存する



準線形モデルにおける最適金融政策

- ニューケインジアン・モデルにおいては、一般には、社会計画者問題における最適配分を実現できない
- 最適金融政策とは、社会計画者問題における配分にできるだけ近い配分を達成するような金融政策のことである
 - 代表的家計の価値関数を2次関数で近似した目的関数を社会厚生とみなして、線形近似した均衡条件を制約として最大化するような配分を求める

- 動学最適化問題において、政策決定者が現在だけでなく将来の変数についても操作し、将来の経路にコミットできるとき、これを最適コミットメント政策という
- そのようなコミットができない場合は、政策決定者は每期ごとの社会厚生を最大化するように変数を選ぶことになり、これを最適裁量政策という

- $s_t = s_L$ となる負のショックが8四半期続くとする
- 最適裁量政策では、ショックが続いている間のみ、政策金利を引き下げる。このような政策はショックを緩和するには十分でなく、産出ギャップやインフレ率は大きく落ち込む
- 最適コミットメント政策では、ショック期間が終わったあとも、政策金利を低くすることに予めコミットする。このような政策は、家計や企業の将来に対する期待を通じて、現在の産出ギャップやインフレ率を引き上げる
- 最適コミットメント政策は、歴史依存的な政策とも呼ばれる：過去のコミットメントが現在の経済に影響を与える

- 最適コミットメント政策を近似するような政策ルールはどのようなものだろうか？
- 以下の歴史依存的な政策ルールを考える (Reifschneider and Williams, 2000)

$$\begin{aligned}r_{n,t}^* &= r^* + \phi_\pi \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \\ r_{n,t} &= \max\{r_{n,t}^* + m_{t-1}, 0\} \\ m_t &= m_{t-1} - (r_{n,t} - r_{n,t}^*)\end{aligned}$$

ここで、 $m_{-1} = 0$ は所与とする

[TBW]

- $r_{n,t} = r_{n,t}^* > 0$ (および $m_{t-1} = 0$) の場合：これまでと同じ
- $r_{n,t} > r_{n,t}^*$ の場合、 $m_t - m_{t-1} < 0$ となる：次期以降に、 $r_{n,t}^* > 0$ となっても ($r_{n,t}^* + m_{t-1} < 0$ である場合) $r_{n,t} = 0$ となる
- $r_{n,t} < r_{n,t}^*$ の場合、 $m_t - m_{t-1} > 0$ となる： m_t の値はゼロに近づく

時間反復法による数値解

- ここで、 m_{t-1} は内生状態変数である
- モデルの解は以下のような関数となる

$$y = \varsigma_y(m_{-1}, s), \quad \pi = \varsigma_\pi(m_{-1}, s), \quad r_n = \varsigma_{r_n}(m_{-1}, s), \\ r_n^* = \varsigma_{r_n^*}(m_{-1}, s), \quad m = \varsigma_m(m_{-1}, s)$$

アルゴリズム

1. グリッド生成：状態空間の評価点を有限個のグリッドに区切る。この場合、 (s_H, s_L) はすでに与えられている

m_{-1} については $[m_{min}, m_{max}]$ を $j = 1, \dots, N$ 個のグリッド $(m_{-1,1}, m_{-1,2}, \dots, m_{-1,N})$ に区切る

1. 収束の基準：収束の基準になるパラメータ ε を与える

1. 最適化：古い政策関数

$$y = \varsigma_y^{(n-1)}(m_{-1}, s), \quad \pi = \varsigma_\pi^{(n-1)}(m_{-1}, s)$$

およびそれぞれのグリッドにおける $(m_{-1,j}, s_i)$ の値を所与として、以下の5本の式を $(y_{i,j}, \pi_{i,j}, r_{n,i,j}, r_{n,i,j}^*, m_{i,j})$ について解く

$$\begin{aligned} y_{i,j} &= y_i^e(m_{i,j}) - (r_{n,i,j} - \pi_i^e(m_{i,j}) - s_i) \\ \pi_{i,j} &= \kappa y_{i,j} + \beta \pi_i^e(m_{i,j}) \\ r_{n,i,j}^* &= r^* + \phi_\pi \pi_i^e(m_{i,j}) \\ r_{n,i,j} &= \max\{r_{n,i,j}^* + m_{-1,j}, 0\} \\ m_{i,j} &= m_{-1,j} - (r_{n,i,j} - r_{n,i,j}^*) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} y_i^e(m_{i,j}) &= (1 - p_i) \varsigma_y^{(n-1)}(m_{i,j}, s_H) + p_i \varsigma_y^{(n-1)}(m_{i,j}, s_L) \\ \pi_i^e(m_{i,j}) &= (1 - p_i) \varsigma_\pi^{(n-1)}(m_{i,j}, s_H) + p_i \varsigma_\pi^{(n-1)}(m_{i,j}, s_L) \end{aligned}$$

である。 $m_{i,j}$ はグリッド上にあるとは限らないので、 $\varsigma^{(n-1)}(m_{-1,j}, s_i)$ の値から補間する必要がある

このステップで、新しい政策関数のベクトル $\varsigma^{(n)}(m_{-1,j}, s_i)$

$$\begin{aligned} & (y_{H,1}^{(n)}, y_{H,2}^{(n)}, \dots, y_{H,N}^{(n)}, y_{L,1}^{(n)}, y_{L,2}^{(n)}, \dots, y_{L,N}^{(n)}), \\ & (\pi_{H,1}^{(n)}, \pi_{H,2}^{(n)}, \dots, \pi_{H,N}^{(n)}, \pi_{L,1}^{(n)}, \pi_{L,2}^{(n)}, \dots, \pi_{L,N}^{(n)}), \\ & (r_{n,H,1}^{(n)}, r_{n,H,2}^{(n)}, \dots, r_{n,H,N}^{(n)}, r_{n,L,1}^{(n)}, r_{n,L,2}^{(n)}, \dots, r_{n,L,N}^{(n)}), \\ & (r_{n,H,1}^{*(n)}, r_{n,H,2}^{*(n)}, \dots, r_{n,H,N}^{*(n)}, r_{n,L,1}^{*(n)}, r_{n,L,2}^{*(n)}, \dots, r_{n,L,N}^{*(n)}), \\ & (m_{H,1}^{(n)}, m_{H,2}^{(n)}, \dots, m_{H,N}^{(n)}, m_{L,1}^{(n)}, m_{L,2}^{(n)}, \dots, m_{L,N}^{(n)}) \end{aligned}$$

を得る

1. 全ての $(m_{-1,j}, s_i)$ について $\|\varsigma^{(n)}(m_{-1,j}, s_i) - \varsigma^{(n-1)}(m_{-1,j}, s_i)\| < \varepsilon$ であればストップ。そうでなければ、 $\varsigma^{(n)}(m_{-1,j}, s_i)$ を $\varsigma^{(n-1)}(m_{-1,j}, s_i)$ に代入して、ステップ3-4を繰り返す

- 政策関数

- 動学

補論

- 政策決定者は、以下の社会厚生を最大化するように $\{y_t, \pi_t, r_{n,t}\}_{t=0}^{\infty}$ の流れを求める

$$\max_{\{y_t, \pi_t, r_{n,t}\}_{t=0}^{\infty}} -\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\pi_t^2 + \lambda y_t^2)$$

subject to

$$y_t = \mathbb{E}_t y_{t+1} - (r_{n,t} - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - s_t)$$

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1}$$

$$r_{n,t} \geq 0$$

補論

- 政策決定者は、以下の社会厚生を最大化するように $\{y_t, \pi_t, r_{n,t}\}_{t=0}^{\infty}$ の流列を求める

$$\max_{\{y_t, \pi_t, r_{n,t}\}_{t=0}^{\infty}} -\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\pi_t^2 + \lambda y_t^2)$$

subject to

$$\begin{aligned} y_t &= \mathbb{E}_t y_{t+1} - (r_{n,t} - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - s_t) \\ \pi_t &= \kappa y_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \\ r_{n,t} &\geq 0 \end{aligned}$$

- 社会厚生は、現在から無限先の将来にわたっての、産出ギャップとインフレ率の2乗の加重和の割引現在価値で与えられる
- 政策決定者は、名目金利だけでなくその他の変数も直接選ぶことに注意

- 政策決定者の動学最適化問題は、動的ラグランジュアンとその1階の必要条件を用いて解くことができる

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 \equiv & \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \{ \beta^t (\pi_t^2 + \lambda y_t^2) \\ & + 2\phi_{PC,t} (-\pi_t + \kappa y_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1}) \\ & + 2\phi_{EE,t} (-y_t + \mathbb{E}_t y_{t+1} - (r_{n,t} - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - s_t)) \\ & + 2\phi_{ZLB,t} r_{n,t} \}\end{aligned}$$

ここで、 $\{\phi_{PC,t}, \phi_{EE,t}, \phi_{ZLB,t}\}_{t=0}^{\infty}$ はそれぞれの均衡条件にかかるラグランジュ乗数である

最適コミットメント政策

- 最適コミットメント政策では、政策決定者は、時点0で現在から将来にわたる変数について社会厚生を最大化するように選ぶ
- このとき、動的ラグランジュアンの1階の必要条件は

$$\pi_t : \pi_t - \phi_{PC,t} + \phi_{PC,t-1} + \beta^{-1} \phi_{EE,t-1} = 0$$

$$y_t : \lambda y_t + \kappa \phi_{PC,t} - \phi_{EE,t} + \beta^{-1} \phi_{EE,t-1} = 0$$

$$r_{n,t} : -\phi_{EE,t} + \phi_{ZLB,t} = 0$$

となる

- ここで、 $\phi_{ZLB,t}$ はゼロ金利制約にかかるラグランジュ乗数であり、ゼロ金利制約がバインドしない限りはゼロになる
- このことは以下の相補スラック条件にまとめられる

$$\phi_{ZLB,t} r_{n,t} = 0, \quad \phi_{ZLB,t} \geq 0, \quad r_{n,t} \geq 0$$

- すなわち、 $\phi_{ZLB,t} > 0$ あるいは $r_{n,t} > 0$ のいずれかが成り立ち、均衡条件は $r_{n,t}$ の値によって場合分けされる

- ここで、 $(\phi_{EE,t-1}, \phi_{PC,t-1})$ は内生状態変数である
- モデルの解は以下のような関数となる：政策関数は、外生的なショックのほかに内生状態変数にも依存する

$$\begin{aligned}
 y &= \varsigma_y(\phi_{EE,-1}, \phi_{PC,-1}, s), & \pi &= \varsigma_\pi(\phi_{EE,-1}, \phi_{PC,-1}, s), \\
 r_n &= \varsigma_{r_n}(\phi_{EE,-1}, \phi_{PC,-1}, s) \\
 \phi_{EE} &= \varsigma_y(\phi_{EE,-1}, \phi_{PC,-1}, s), & \phi_{PC} &= \varsigma_\pi(\phi_{EE,-1}, \phi_{PC,-1}, s)
 \end{aligned}$$

最適裁量政策

- 最適裁量政策では、政策決定者は将来の変数にコミットできず、每期ごとにその時点の変数を社会厚生を最大化するように選ぶ
- この場合、 $(\mathbb{E}_t y_{t+1}, \mathbb{E}_t \pi_{t+1})$ を所与とした動的ラグランジュアンの1階条件から、解となる政策関数を求めることができる。すなわち、

$$\pi_t : \pi_t - \phi_{PC,t} = 0$$

$$y_t : \lambda y_t + \kappa \phi_{PC,t} - \phi_{EE,t} = 0$$

$$r_{n,t} : -\phi_{EE,t} + \phi_{ZLB,t} = 0$$

- 相補スラック条件より、もし $r_{n,t} > 0$ であれば、 $\phi_{ZLB,t} = 0$ である。このとき均衡条件は、

$$r_{n,t} = -y_t + \mathbb{E}_t y_{t+1} + \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + g_t$$

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + u_t = 0$$

$$0 = \lambda y_t + \kappa \pi_t$$

- 相補スラック条件より、もし $r_{n,t} > 0$ であれば、 $\phi_{ZLB,t} = 0$ である。このとき均衡条件は、

$$\begin{aligned} r_{n,t} &= -y_t + \mathbb{E}_t y_{t+1} + \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + g_t \\ \pi_t &= \kappa y_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + u_t = 0 \\ 0 &= \lambda y_t + \kappa \pi_t \end{aligned}$$

- あるいは、もし $r_{n,t} = 0$ であれば、 $\phi_{ZLB,t} = \phi_{EE,t} > 0$ である。このとき均衡条件は、

$$\begin{aligned} 0 &= -y_t + \mathbb{E}_t y_{t+1} + \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + g_t \\ \pi_t &= \kappa y_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + u_t = 0 \\ \phi_{EE,t} &= \lambda y_t + \kappa \pi_t \end{aligned}$$

- 相補スラック条件より、もし $r_{n,t} > 0$ であれば、 $\phi_{ZLB,t} = 0$ である。このとき均衡条件は、

$$\begin{aligned} r_{n,t} &= -y_t + \mathbb{E}_t y_{t+1} + \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + g_t \\ \pi_t &= \kappa y_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + u_t = 0 \\ 0 &= \lambda y_t + \kappa \pi_t \end{aligned}$$

- あるいは、もし $r_{n,t} = 0$ であれば、 $\phi_{ZLB,t} = \phi_{EE,t} > 0$ である。このとき均衡条件は、

$$\begin{aligned} 0 &= -y_t + \mathbb{E}_t y_{t+1} + \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + g_t \\ \pi_t &= \kappa y_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + u_t = 0 \\ \phi_{EE,t} &= \lambda y_t + \kappa \pi_t \end{aligned}$$

- いずれの場合も、3つの未知数に対して3つの式があるので、解を求めることができる