

第5回：ニューケインジアン・モデルの新展開

初稿・再稿：反映済み

1 イントロダクション

連載第4回では、時間反復法を用いて新古典派成長モデルを数値的に解く方法を示した。時間反復法では、解の必要条件である均衡条件を連立方程式とみなしてモデルの解を求める。均衡条件を求めること自体は比較的容易なため、この方法の汎用性は高く、たとえば、金融政策分析に使われるニューケインジアン・モデルを、非線形性を考慮して解くのによく使われる。そこで、今回はニューケインジアン・モデルの最近の研究を説明しながら、時間反復法の実際の応用例を紹介する。

ニューケインジアン・モデルとしてよく知られているのは、消費のオイラー方程式 (consumption Euler equation)、ニューケインジアン・フィリップス曲線 (New Keynesian Phillips curve)、テイラー・ルール (Taylor rule) からなる3本の線形差分方程式であろう¹。この3本の式の線形モデルでも、ゼロ金利制約 (zero lower bound on nominal interest rates) を導入するとモデルは非線形になり、解析解がある特殊なケースを除いては、通常の線形化モデルの解法では解けなくなる。この場合でも、時間反復法を使うことで、モデルの解を求めることができる。

これまでは、モデルに不確実な要素のない確定的 (deterministic) なケースのみを扱ってきたが、今回はモデルに確率的 (stochastic) なショックを導入する。一般的に不確実性があるモデルは複雑になるが、ショックのとり値が2個だけのケースでは、準線形ニューケインジアン・モデルの解析解を求めることができる。また、新古典派成長モデルのときと同様、時間反復法で求めた数値解と解析解を比較することで、数値解に含まれる誤差を検証できる。より一般的なケースでは、連続的空間においてショックが自己回帰過程 (auto-regressive process) に従うことも考えられる。Tauchen (1986) 等の手法を使うことで、 N 個の離散的な値をとるマルコフ連鎖で自己回帰過程を近似することができる。

時間反復法は、最適金融政策 (optimal monetary policy) の分析にも適用可能である。最適金融政策は、均衡条件を制約として社会厚生を最大化するような配分を求めるが、このような動学最適化問題の1階の必要条件から解を求めることができる。また、ゼロ金利制約によりモデルを非線形に解く場合は、必ずしも均衡条件を対数線形近似する必要はない。このような完全に非線形 (fully nonlinear) なケースにも時間反復法は適用できることを示す。

¹ 日本語で書かれた学部上級向けのテキストでは、齊藤他 (2016)、中村他 (2016) などに説明がある。また、英語で書かれた大学院初級向けのテキストとしては、Gali (2015); Woodford (2003); Walsh (2017) がある。

2 2 状態モデル

2.1 準線形モデル

ここでは、標準的な線形ニューケインジアン・モデルにゼロ金利制約を追加する²。このようなモデルは準線形 (quasi-linear) モデルと呼ばれる。モデルの均衡条件は、後に説明する元の非線形モデルの均衡条件を定常状態周りで対数線形近似したものである。

外生的なショック $s_t \in \{s_H, s_L\}$ は $N = 2$ 個だけの値をとると仮定しよう。 s_t はモデルの状態変数 (state variable) であり、ここでは自然利子率 (natural rate of interest) とする。ここで、 $s_H > s_L$ として、添字 $\{H, L\}$ はそれぞれ状態 (state) が High もしくは Low であることを示す。状態は、 H と L の間を、ある確率過程 (stochastic process) にしたがって時間とともに動く。ここで、今期の状態が $\{H, L\}$ のいずれかになる確率は、前期の状態にのみ依存するという仮定を置く。すなわち、確率過程は以下の遷移行列 (transition matrix) を持つマルコフ連鎖によって表される。

$$P = \begin{bmatrix} 1 - p_H & p_H \\ 1 - p_L & p_L \end{bmatrix}$$

遷移行列の 1 行目は、今期の状態が H であるときに来期の状態が H または L になる確率、2 行目は今期の状態が L であるときに来期の状態が H または L になる確率である。また、1 列目は来期の状態が H である確率、2 列目は来期の状態が L である確率であり、今期の状態が H か L で確率は異なる。

モデルの均衡条件は、以下の 3 つの式からなる連立方程式で与えられる。

$$y_t = \mathbb{E}_t y_{t+1} - (r_{n,t} - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - s_t) \quad (1)$$

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \quad (2)$$

$$r_{n,t}^* = r^* + \phi_\pi \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \quad (3)$$

これらの式は、家計や企業の最適化問題から導出された均衡条件を対数線形近似したものであり、それぞれ、消費のオイラー方程式、ニューケインジアン・フィリップス曲線、テイラー型の金融政策ルールと呼ばれる。ここで、 y_t は生産ギャップ、 π_t はインフレ率、 $r_{n,t}$ は名目金利、 $(\beta, \phi_\pi, \kappa, r^*)$ はパラメータである。 β は主観的割引率、 ϕ_π はテイラー・ルールにおける名目金利の期待インフ

² ここで紹介するモデルと類似のものを扱っている論文として、Eggertsson and Woodford (2003); Nakata (2017) がある。

レ率に対する反応係数、 κ はフィリップス曲線の傾きであり、それぞれ後で説明する家計や企業の最適化行動といったミクロ的基礎付け (**micro foundation**) のある非線形モデルに基づいている。 r^* は自然利子率の定常状態の値である³。実質金利 $r_{n,t} - \mathbb{E}_t \pi_{t+1}$ が自然利子率 s_t に等しいとき、消費のオイラー方程式から $y_t = \mathbb{E}_t y_{t+1} = 0$ となり、ニューケインジアン・フィリップス曲線から $\pi_t = \mathbb{E}_t \pi_{t+1} = 0$ となる。このとき、名目金利は $r_{n,t}^* = r^*$ となる。

$r_{n,t}^*$ はシャドーレート (**shadow rate**) と呼ばれ、ゼロ金利制約がなければ名目金利と一致する ($r_{n,t}^* = r_{n,t}$)。このとき、3 つの未知数 ($y_t, \pi_t, r_{n,t}$) に対して 3 本の方程式があるので、通常の線形モデルを解く手続きにしたがって、解を求めることができる。

ここで、名目金利はゼロを下回ることができないという制約を明示的に考えると、

$$r_{n,t} = \max \{r_{n,t}^*, 0\} \quad (4)$$

すなわち、テイラー・ルールから計算できるシャドーレートがゼロを下回る場合、名目金利はゼロになる。この制約の下では、モデルの解は非線形となり、通常の線形モデルの解法はそのままでは使えない。

2.2 準線形モデルの解析解

$N = 2$ の場合、準線形モデルの解析解は比較的容易に導出できる。モデルの解は以下のような外生的ショック s のみの関数となる (時間をあらず添字は省略する)。

$$y = \varsigma_y(s), \quad \pi = \varsigma_\pi(s), \quad r_n = \varsigma_{r_n}(s)$$

さらに、 $N = 2$ のとき、 s のとりうる値は 2 つだけなので、これらの関数も 2 つの値のいずれかをとり。すなわち、

$$y \in \{y_H, y_L\}, \quad \pi \in \{\pi_H, \pi_L\}, \quad r_n \in \{r_{n,H}, r_{n,L}\}$$

の 6 つの未知数がモデルの解となる。ここで、名目金利は、状態 H のとき正の値をとり、状態 L のときゼロ金利制約がバインドする、すなわち、 $r_{n,H} > 0, r_{n,L} = 0$ という仮定を置く。ここで、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t y_{t+1} &= (1 - p_i) y_H + p_i y_L \\ \mathbb{E}_t \pi_{t+1} &= (1 - p_i) \pi_H + p_i \pi_L \end{aligned}$$

³ 非線形モデルの定常状態における消費のオイラー方程式 $1 = \beta R^*$ (4 項のモデルでは、 $R^* = \bar{R}_n / (\bar{\Gamma} \bar{\Pi})$) および $r^* \equiv \log R^*$ から、 $r^* = -\log(\beta) \approx 1/\beta - 1$ が成り立つ。

を均衡条件に代入し、それぞれの状態 $i \in \{H, L\}$ における均衡条件から、以下の連立方程式を得る。

$$\begin{aligned}
s = s_H : \quad & y_H = (1 - p_H)y_H + p_H y_L - (r_{n,H} - [(1 - p_H)\pi_H + p_H\pi_L] - s_H) \\
& \pi_H = \kappa y_H + \beta [(1 - p_H)\pi_H + p_H\pi_L] \\
& r_{n,H} = r^* + \phi_\pi [(1 - p_H)\pi_H + p_H\pi_L] \\
s = s_L : \quad & y_L = (1 - p_L)y_H + p_L y_L - (0 - [(1 - p_L)\pi_H + p_L\pi_L] - s_L) \\
& \pi_L = \kappa y_L + \beta [(1 - p_L)\pi_H + p_L\pi_L] \\
& r_{n,L} = 0
\end{aligned}$$

6 つの未知数に対して 6 つの線形の方程式があるため、未知数を解析的に求めることができる。

2.3 時間反復法による準線形モデルの数値計算

準線形モデルは、時間反復法を使っても解くことができる。後でみるように、 N が大きい場合は解析解を求めるのが非常に煩雑になるため、このアプローチが有用になる。以下のアルゴリズムは N の大きさについて一般的な場合となっている。また、解析解と数値解を比較することで、数値解の精度を検証することができる。

アルゴリズム

1. グリッド生成 状態空間の評価点を有限個のグリッドに区切る。この場合、 N 個のグリッド (s_1, \dots, s_N) は外生的な変数の取り得る値としてすでに与えられている。グリッド上における政策関数の値 $\left\{ \zeta_y^{(0)}(s_i), \zeta_\pi^{(0)}(s_i), \zeta_{r_n}^{(0)}(s_i) \right\}_{i=1}^N$ の初期値を当て推量する。たとえば、 $N = 2$ のケースでは、初期値は 3 つの変数のそれぞれの状態での値であり、 $\left\{ y_i^{(0)}, \pi_i^{(0)}, r_{n,i}^{(0)} \right\}_{i \in \{H, L\}}$ となる。
2. 収束の基準 収束の基準になるパラメータ ε を定める。
3. 最適化 古い政策関数のベクトル $\zeta^{(n-1)} = \left\{ \zeta_y^{(n-1)}(s_i), \zeta_\pi^{(n-1)}(s_i), \zeta_{r_n}^{(n-1)}(s_i) \right\}_{i=1}^N$ を所与として、各 s_i について、以下の 3 本の式を $(y_i, \pi_i, r_{n,i})$ について解く

$$\begin{aligned}
y_i &= y_i^e - (r_{n,i} - \pi_i^e - s_i) \\
\pi_i &= \kappa y_i + \beta \pi_i^e \\
r_{n,i} &= \max \{ r^* + \phi_\pi \pi_i^e, 0 \}
\end{aligned}$$

ここで、

$$y_i^e = \sum_{j=1}^N p_{ij} \zeta_y^{(n-1)}(s_j)$$

$$\pi_i^e = \sum_{j=1}^N p_{ij} \zeta_\pi^{(n-1)}(s_j)$$

である。また、 p_{ij} は、遷移行列の i 行 j 列の要素である。このステップで、新しい政策関数のベクトル $\zeta^{(n)}$ を得る。

4. 収束しているか確認 古い政策関数 $\zeta_x^{(n-1)}$ と新しい政策関数 $\zeta_x^{(n)}$ (ここで、 $x \in \{y, \pi, r_n\}$) の距離を測る。あらゆる s_i, x について $\|\zeta_x^{(n)}(s_i) - \zeta_x^{(n-1)}(s_i)\| < \varepsilon$ であればストップ。そうでなければ、 $\zeta^{(n)}$ を $\zeta^{(n-1)}$ に代入して、ステップ 3 を繰り返す。

図 1 は、 $N = 2$ の場合の数値解についてプロットしたものである。ここで、パラメータの値は、 $s_H = r^* = 3.0/4 = 0.75$ 、 $\phi_\pi = 5.0$ 、 $p_H = 0$ 、 $p_L = 0.75$ としたうえで、パラメータの組 (s_L, κ) を、モデルにおける (y_L, π_L) の値がターゲットの値に近くなるように設定した⁴。 $p_H = 0$ の場合、状態 H は吸収状態 (absorbing state) と呼ばれ、一度経済の状態が H になった後はそこから動かない。ここで、状態 H では、政策金利 (名目金利) はプラスになっており、産出ギャップ、インフレ率の値はゼロである。一方で、状態 L では、政策金利はゼロでバインドしている⁵。自然利子率が実質金利以上に下がっているので、政策金利をゼロにしても十分な緩和効果が得られず、産出ギャップ、インフレ率ともに大きく下がっている⁶。

ここで、 p_H を 0 % から 2.5 % にすると、状態 H であっても政策金利が下がり、インフレ率が状態 H と状態 L の両方で下がる。この不確実性の非中立性 (non-neutrality of uncertainty) は、ゼロ金利制約によるものである。すなわち、正のショックには政策金利を引き上げて引締めに対応できるのに対して、負のショックにはゼロ金利制約により政策金利を引き下げることができず、緩和的に対応できない。したがって、危機確率の上昇によって将来の期待産出ギャップはマイナスになり、インフレ率はフォワード・ルッキング (forward-looking) な企業の価格設定行動によって

⁴ ここでは、ターゲットを $(y_L, \pi_L) = (-7.0, 1.0/4)$ として、パラメータの組 $(s_L, \kappa) = (-1.56, 0.01)$ を最適化関数 (MATLAB の場合 fminsearch) を用いて求めた。自然利子率とインフレ率は年率の値を四半期換算するため 4 で割っている。また、解析解は、近似誤差の影響がないため十分に数値解に近く、ここでは省略した。

⁵ ϕ_π の値が小さく、状態 L においてインフレ率の落ち込みに対して政策金利が十分に反応しない場合、政策金利は正の値をとる。このとき、一般的な数値解に対して $r_{n,L} = 0$ を仮定した解析解は一致しない。

⁶ もしゼロ金利制約がなければ、名目金利をマイナスにして実質金利の値を自然利子率と一致させることで、状態 H と同様に産出ギャップとインフレ率の値をゼロにできる。

下押しされる⁷。一方で、産出ギャップがややプラスになるのは、状態 H で期待インフレ率の低下に反応して政策金利は通常よりも低く設定されるためである。このような不確実性の与える影響は、非線形モデルによってのみ分析が可能である⁸。

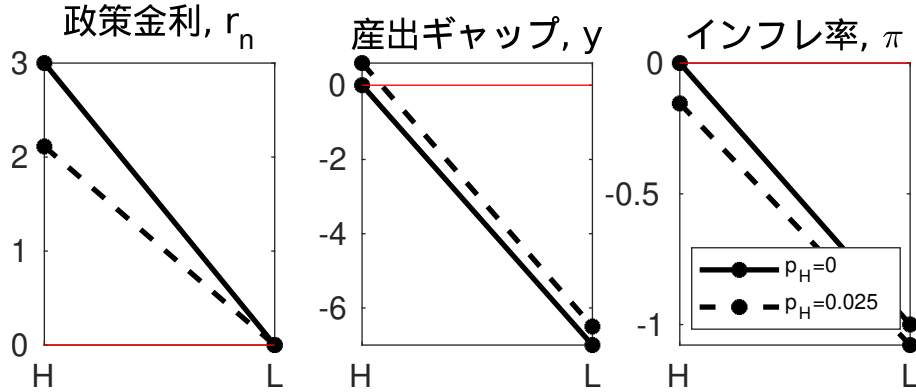


図 1: 2 状態モデルにおける政策関数

注：実線は $p_H = 0$ 、点線は $p_H = 0.025$ のときの値。縦軸は%。

MATLAB Code

- TwostateNK.m, dist.m

3 N 状態モデル

3.1 自己回帰確率過程の離散近似

前節では、マルコフ連鎖の取り得る値 s や遷移確率 p_{ij} は既に与えられているケースを紹介したが、一般には、このような遷移確率はどうやって計算すればよいのだろうか。Tauchen (1986) は、連続的 (continuous) な値をとる、1 階の自己回帰 (first-order auto-regressive, AR(1)) 確率過程を、マルコフ連鎖で離散的 (discrete) に近似する方法を考案した。連続した実数値をとる変数 $x \in \mathbb{R}$ が、以下のような AR(1) 過程に従うとする。

$$x' = c + \rho x + \varepsilon', \quad \varepsilon' \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

⁷ このようなゼロ金利制約下の不確実性が与える負の影響は、Nakata (2017) で詳しく議論されている。

⁸ 線形化モデルでは、確実性等価 (certainty equivalence) が成り立つため、不確実性の影響は排除される。また、非線形モデルの解法の一つに、将来の完全予見 (perfect foresight) を仮定するものがあるが、この解法でも不確実性の影響は分析できない。

ここで、 c は定数、 ρ は慣性 (persistence) についてのパラメータであり、 ε' は平均 0、分散 σ_ε^2 の正規分布に従う確率変数である⁹。この確率過程を、 N 個の状態変数を持つマルコフ連鎖で近似する。そのために、まず、 x のとる値についてグリッドを定める。

$$x_i \in \mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

ここで、 i は集合 \mathcal{X} に含まれるグリッドのインデックスである。例えば、以下のような等間隔のグリッドを考える。

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-m\sigma_\varepsilon}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ x_N &= \frac{m\sigma_\varepsilon}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ x_i &= x_{i-1} + w \text{ for } i = 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

ここで、 $w = \frac{x_N - x_1}{N-1}$ は隣り合うグリッドの間の距離である。平均値ゼロから上下それぞれ標準偏差 $\frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{1-\rho^2}}$ の m 倍の範囲に等間隔にグリッドを定める。

グリッドを定めたら、次にグリッドの集合に含まれる一つの点から別の点に移る確率を求める。

ここで、 ε' は正規分布に従うので、

$$\varepsilon' = (x' - c - \rho x_i) \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

となる。すると、 $x_i, i = 1, 2, \dots, N$ を所与として、 x' が $x_j, j = 1, 2, \dots, N$ の近傍にある確率は、以下のように近似できる

$$\begin{aligned} p_{i1} &= \Phi\left(x' + \frac{w}{2} - c - \rho x_i\right), \quad \text{for } x' = x_1 \\ p_{ij} &= \Phi\left(x' + \frac{w}{2} - c - \rho x_i\right) \\ &\quad - \Phi\left(x' - \frac{w}{2} - c - \rho x_i\right), \quad \text{for } x' = x_j, j = 2, 3, \dots, N-1 \\ p_{iN} &= 1 - \Phi\left(x' - \frac{w}{2} - c - \rho x_i\right), \quad \text{for } x' = x_N \end{aligned}$$

ここで、 $\Phi(\cdot)$ は正規分布 $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ の累積分布関数 (cumulative distribution function) である。 x' がグリッドの端にある場合に注意しよう。全ての $i, j = 1, \dots, N$ について確率 p_{ij} を計算する

⁹ 時系列分析の基礎については、沖本 (2010)、Hamilton (1994) を参照。

と、以下の遷移行列が求まる。

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & \cdots & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}$$

図 2 は、 p_{ij} の計算についてグラフを用いて示したものである。 $c = 0$ とすると、 $x' = \rho x_i$ のとき、 $\varepsilon = x' - \rho x_i = 0$ になり、確率密度関数 $\phi(x' - \rho x_i) = \phi(0)$ は最大値をとる。ここで、 $x' = x_j$ のときの確率密度関数 $\phi(x_j - \rho x_i)$ は、 x_j を中心とした累積分布関数の差 $\Phi(x_j + \frac{w}{2} - \rho x_i) - \Phi(x_j - \frac{w}{2} - \rho x_i)$ で近似できる¹⁰。

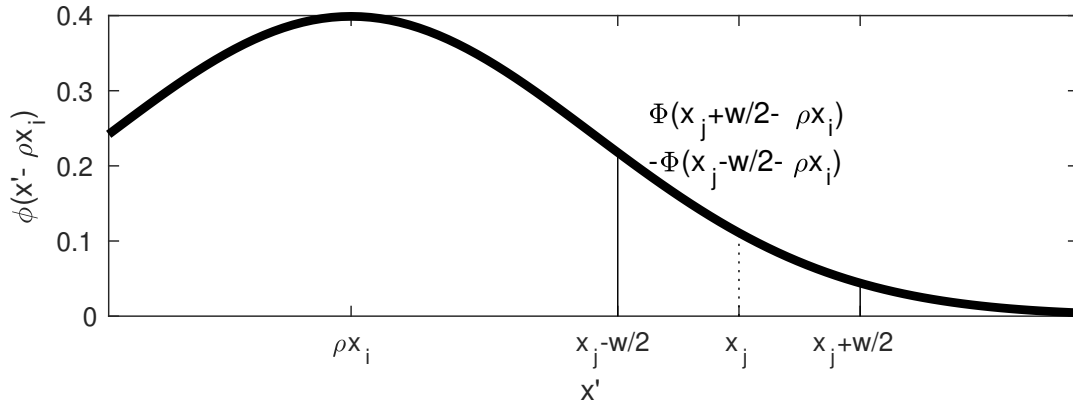


図 2: Tauchen (1986) による近似

MATLAB Code

- tauchen.m

Tauchen (1986) の方法は、慣性のパラメータが大きい値をとるときには誤差が大きくなる。この場合は Rouwenhorst (1995) の方法が誤差の少ない近似として知られている¹¹。

3.2 準線形モデルにおける最適金融政策

時間反復法を使った実際の応用例として、比較的新しいニューケインジアン・モデルに関する論文の結果を再現してみよう。ここでは、準線形モデルを用いて、ゼロ金利制約の下での最適金融政

¹⁰ $\Phi(x) = \int_0^x \phi(y)dy$ であることに注意。たとえば、 $\Phi(x_j + \frac{w}{2} - \rho x_i)$ は、 $x' \in (-\infty, x_j + \frac{w}{2}]$ の範囲における $\phi(x' - \rho x_i)$ のグラフより下の面積と等しい。

¹¹ 詳細については Kopecky and Suen (2010) を参照。

策を考えた Adam and Billi (2006, 2007) を紹介する¹²。ニューケインジアン・モデルにおいては、価格の硬直性により相対価格に歪みがあるため、一般には、社会計画者問題における最適な配分は実現できない。最適金融政策とは、社会計画者問題における配分にできるだけ近い配分を達成するような金融政策のことである。代表的家計の価値関数を 2 次関数で近似した目的関数を社会厚生 (social welfare) とみなして、対数線形近似した均衡条件を制約として最大化するような配分を求める。

動学最適化問題において、政策決定者 (policymaker) が現在だけでなく将来の変数についても操作し、将来の経路にコミットできるとき、これを最適コミットメント政策 (optimal commitment policy) という。そのようなコミットができない場合は、政策決定者は每期ごとの社会厚生を最大化するように変数を選ぶことになり、こうした政策は最適裁量政策 (optimal discretionary policy) と呼ばれる。

2.1 項の準線形モデルにおける最適金融政策を考えよう。政策決定者は、以下の社会厚生を最大化するように $\{y_t, \pi_t, r_{n,t}\}_{t=0}^{\infty}$ の流れを求める。

$$\begin{aligned} V_0 &\equiv \max_{\{y_t, \pi_t, r_{n,t}\}_{t=0}^{\infty}} -\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\pi_t^2 + \lambda y_t^2 \right) \\ &\text{subject to} \\ y_t &= \mathbb{E}_t y_{t+1} - (r_{n,t} - \mathbb{E}_t \pi_{t+1}) + g_t \\ \pi_t &= \kappa y_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + u_t \\ r_{n,t} &\geq 0 \end{aligned}$$

社会厚生は、現在から無限先の将来にわたっての、産出ギャップとインフレ率の 2 乗の加重和の割引現在価値で与えられる¹³。ここでは、2 節の分析で用いた名目金利に関するテイラー・ルールではなく、政策決定者がその他の変数も直接選ぶことに注意しよう。 (g_t, u_t) は外生的なショックであり、それぞれ以下の AR(1) 過程に従う。

$$\begin{aligned} g_t &= (1 - \rho_g) \bar{g} + \rho_g g_{t-1} + \varepsilon_{g,t}, \quad \varepsilon_{g,t} \sim N(0, \sigma_g^2) \\ u_t &= \rho_u u_{t-1} + \varepsilon_{u,t}, \quad \varepsilon_{u,t} \sim N(0, \sigma_u^2) \end{aligned}$$

ここで、 g_t は需要面に対するショック (政府支出など)、 u_t は供給面に対するショック (価格マ-

¹² 将来の期待を均衡条件に含まない、バックワード・ルッキング (backward-looking) モデルにおける、ゼロ金利制約の下での最適金融政策については、加藤 (2006) や Kato and Nishiyama (2005) に詳しい説明がある。

¹³ 前述のように、これは代表的家計の価値関数の 2 次近似である。詳しくは、Woodford (2003)、Benigno and Woodford (2012) を参照。

クアップなど) と考えることができる。また、 g_t は定常状態で自然利子率の定常値に一致する ($\bar{g} = r^*$)。

政策決定者の動学最適化問題は、前回でも出てきた動的ラグランジュアンとその 1 階の必要条件を用いて解くことができる。ここで、動的ラグランジュアンは以下で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 \equiv & \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \left(\pi_t^2 + \lambda y_t^2 \right) \right. \\ & + 2\phi_{PC,t} (-\pi_t + \kappa y_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + u_t) \\ & + 2\phi_{EE,t} (-y_t - r_{n,t} + \mathbb{E}_t y_{t+1} + \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + g_t) \\ & \left. + 2\phi_{ZLB,t} r_{n,t} \right\}\end{aligned}$$

ここで、 $\{\phi_{PC,t}, \phi_{EE,t}, \phi_{ZLB,t}\}_{t=0}^{\infty}$ はそれぞれの均衡条件にかかるラグランジュ乗数である。

最適コミットメント政策では、政策決定者は、時点 0 で現在から将来にわたる変数について社会厚生を最大化するように選ぶ¹⁴。このとき、動的ラグランジュアンの 1 階条件は、

$$\begin{aligned}\pi_t : & \pi_t - \phi_{PC,t} + \phi_{PC,t-1} + \beta^{-1} \phi_{EE,t-1} = 0 \\ y_t : & \lambda y_t + \kappa \phi_{PC,t} - \phi_{EE,t} + \beta^{-1} \phi_{EE,t-1} = 0 \\ r_{n,t} : & -\phi_{EE,t} + \phi_{ZLB,t} = 0\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\phi_{ZLB,t}$ はゼロ金利制約にかかるラグランジュ乗数であり、ゼロ金利制約がバインドしない限りはゼロになることに注意しよう。このことは以下の相補スラック条件 (complementary slackness condition) にまとめられる。

$$\phi_{ZLB,t} r_{n,t} = 0, \quad \phi_{ZLB,t} \geq 0, \quad r_{n,t} \geq 0$$

すなわち、 $\phi_{ZLB,t} > 0$ あるいは $r_{n,t} > 0$ のいずれかが成り立ち、均衡条件は $r_{n,t}$ の値によって場合

¹⁴ このモデルにおいては、政策決定者は、時点 0 にコミットした将来の変数を後に選びなおす動機を持つ。すなわち、最適コミットメント政策の下での政策関数は、時点 0 からみたときに限って最適となる。これは動学的非整合性 (time inconsistency) と呼ばれており、最適金融政策の分野では Kydland and Prescott (1977) により最初に分析された。

分けされる¹⁵。もし $r_{n,t} > 0$ であれば、 $\phi_{ZLB,t} = \phi_{EE,t} = 0$ である。このとき均衡条件は、

$$r_{n,t} = -y_t + \mathbb{E}_t y_{t+1} + \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + g_t \quad (5)$$

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + u_t \quad (6)$$

$$\pi_t - \phi_{PC,t} + \phi_{PC,t-1} + \beta^{-1} \phi_{EE,t-1} = 0 \quad (7)$$

$$\lambda y_t + \kappa \phi_{PC,t} + \beta^{-1} \phi_{EE,t-1} = 0 \quad (8)$$

となる。4 つの未知数 ($y_t, \pi_t, r_{n,t}, \phi_{PC}$) に対して 4 本の式 (5)、(6)、(7)、(8) があるので、解を求めることができる。あるいは、もし $r_{n,t} = 0$ であれば、 $\phi_{ZLB,t} = \phi_{EE,t} > 0$ である。このとき均衡条件は、上の (6)、(7) および以下の 2 式となり、

$$0 = -y_t + \mathbb{E}_t y_{t+1} + \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + g_t \quad (9)$$

$$\lambda y_t + \kappa \phi_{PC,t} - \phi_{EE,t} + \beta^{-1} \phi_{EE,t-1} = 0 \quad (10)$$

4 つの未知数 ($y_t, \pi_t, \phi_{EE}, \phi_{PC}$) に対して 4 本の式 (6)、(7)、(9)、(10) があるので、解を求めることができる。

最適裁量政策では、政策決定者は将来の変数にコミットできず、每期ごとにその時点の変数を社会厚生を最大化するように選ぶ。この場合、 $(\mathbb{E}_t y_{t+1}, \mathbb{E}_t \pi_{t+1})$ を所与とした動的ラグランジュアンの 1 階条件から、解となる政策関数を求めることができる¹⁶。すなわち、

$$\pi_t : \pi_t - \phi_{PC,t} = 0$$

$$y_t : \lambda y_t + \kappa \phi_{PC,t} - \phi_{EE,t} = 0$$

$$r_{n,t} : -\phi_{EE,t} + \phi_{ZLB,t} = 0$$

となる。また、相補スラック条件より、もし $r_{n,t} > 0$ であれば、 $\phi_{EE,t} = 0$ である。このとき均衡条件は、上の (5)、(6) および以下の式で与えられる。

$$0 = \lambda y_t + \kappa \pi_t \quad (11)$$

あるいは、もし $r_{n,t} = 0$ であれば、 $\phi_{EE,t} > 0$ である。このとき均衡条件は、上の (6)、(9) および以下の式で与えられ、

$$\phi_{EE,t} = \lambda y_t + \kappa \pi_t \quad (12)$$

¹⁵ 後に 3.3 節でみるように、実際の計算では、 $r_{n,t} > 0$ を仮定して均衡条件を解き、もしその仮定が満たされなければ、 $r_{n,t} = 0$ として解きなおす。

¹⁶ 最適裁量政策はマルコフ完全均衡 (Markov-perfect equilibrium) となる。すなわち、最適コミットメント政策と異なり、最適裁量政策の下での政策関数は、どの時点からみても最適なものになっている。

いずれの場合も、3つの未知数に対して3つの式((5)、(6)、(11)または(6)、(9)、(12))があるので、解を求めることができる。

3.3 時間反復法による最適裁量政策の数値計算

ここでは、時間反復法を用いて Adam and Billi (2007) の結果を再現してみよう。最適裁量政策においては、2状態モデルと同じように、モデルの状態変数が外生的なショック以外に存在しないため、外生変数をグリッドとしてそれぞれのグリッドの点で均衡条件を解けばよい。政策関数をグリッド以外の点で近似する必要がないため、比較的簡単にモデルを解くことができる。

まず、外生的なショックの確率過程を Tauchen (1986) の方法を用いてマルコフ連鎖で近似する。すなわち、各変数のグリッドは以下で与えられる。

$$g \in \{g_1, g_2, \dots, g_{N_g}\}$$

$$u \in \{u_1, u_2, \dots, u_{N_u}\}$$

また、遷移確率は、それぞれ、

$$P^g = \begin{bmatrix} p_{11}^g & \cdots & \cdots & p_{1N_g}^g \\ p_{21}^g & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{N_g1}^g & \cdots & \cdots & p_{N_gN_g}^g \end{bmatrix}, \quad P^u = \begin{bmatrix} p_{11}^u & \cdots & \cdots & p_{1N_u}^u \\ p_{21}^u & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{N_u1}^u & \cdots & \cdots & p_{N_uN_u}^u \end{bmatrix}$$

これらの2つのマルコフ連鎖を結合して1つのマルコフ連鎖として考えるために、2次元のグリッドの座標 (g, u) を1次元のベクトル s に集約する。例えば、 $N_g = N_u = 2$ の場合、 g と u の組み合わせは以下の $N_g \times N_u = 4$ 個のベクトルで与えられる。

$$s_1 = (g_1, u_1)$$

$$s_2 = (g_1, u_2)$$

$$s_3 = (g_2, u_1)$$

$$s_4 = (g_2, u_2)$$

ここで、ベクトル s のインデックス $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ は、それぞれのショックのインデックスの組に対応しており、 $s_i = (g_{k(i)}, u_{l(i)})$ のように書ける。また、それぞれの遷移行列のクロネッカー積 (Kronecker product)、 $P = P^g \otimes P^u$ が、結合されたマルコフ連鎖の遷移行列となる。例えば、

$N_g = N_u = 2$ の場合、以下ようになる。

$$P = \begin{bmatrix} p_{11}^g p_{11}^u & p_{11}^g p_{12}^u & p_{12}^g p_{11}^u & p_{12}^g p_{12}^u \\ p_{11}^g p_{21}^u & p_{11}^g p_{22}^u & p_{12}^g p_{21}^u & p_{12}^g p_{22}^u \\ p_{21}^g p_{11}^u & p_{21}^g p_{12}^u & p_{22}^g p_{11}^u & p_{22}^g p_{12}^u \\ p_{21}^g p_{21}^u & p_{21}^g p_{22}^u & p_{22}^g p_{21}^u & p_{22}^g p_{22}^u \end{bmatrix}$$

数値計算のアルゴリズムは 2.3 節とほぼ同じである。ただし、ステップ 3 の最適化の部分は以下のように書き換えられる。すなわち、各 $s_i = (g_{k(i)}, u_{l(i)})$ について、以下の式を $(y_i, \pi_i, r_{n,i})$ について解く。

$$\begin{aligned} r_{n,i} &= -y_i + y_i^e + \pi_i^e + g_{k(i)} \\ \pi_i &= \kappa y_i + \beta \pi_i^e + u_{l(i)} \\ 0 &= \lambda y_i + \kappa \pi_i \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} y_i^e &= \sum_{j=1}^N p_{ij} \zeta_y^{(n-1)}(s_j) \\ \pi_i^e &= \sum_{j=1}^N p_{ij} \zeta_\pi^{(n-1)}(s_j) \end{aligned}$$

p_{ij} は、遷移行列の i 行 j 列の要素である。 $r_{n,i} \geq 0$ が満たされているかをチェックし、そうでなければ、 $r_{n,i} = 0$ として、以下の式を (y_i, π_i) について解く。

$$\begin{aligned} 0 &= -y_i + y_i^e + \pi_i^e + g_{k(i)} \\ \pi_i &= \kappa y_i + \beta \pi_i^e + u_{l(i)} \end{aligned}$$

図 3 は、様々な値の負の需要ショックに対する、産出ギャップ、インフレ率、政策金利の解を示している。ゼロ金利制約がバインドすると、自然利子率の低下に対して実質金利を下げることはできないため、生産ギャップとインフレ率は目立って落ち込む。また、インフレ率はゼロ金利制約がバインドするよりも早く落ち込み始める。これは、将来にゼロ金利制約がバインドし、産出ギャップが落ち込むことを見越して企業が価格を引き下げる、というゼロ金利制約下の不確実性の影響による。政策金利はこのようなインフレの動きに対応して、予備的緩和 (preemptive easing) を行い、結果として産出ギャップはゼロ金利制約がバインドするまでは若干のプラスとなる。

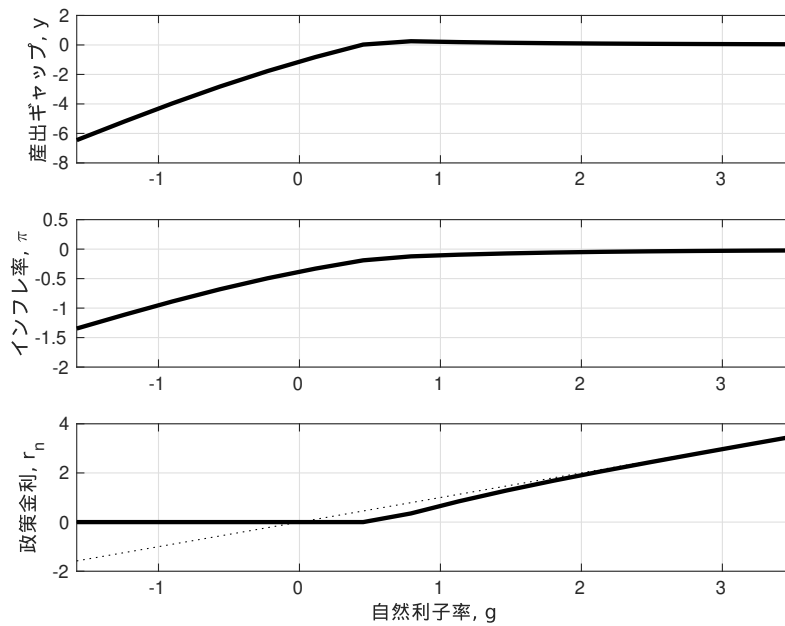


図 3: Adam and Billi (2007) のリプリケーション

MATLAB Code

- discNK.m

4 非線形モデル

これまでは均衡条件を対数線形近似したモデルでゼロ金利制約を考慮してきた。すなわち、モデルにおける非線形性はゼロ金利制約によってのみ与えられていた。しかし、元の均衡条件は非線形であり、そのような非線形の均衡条件とゼロ金利制約を合わせて考えることももちろん可能である。

ここでは、最終財生産企業と中間財生産企業、家計、政府からなるニューケインジアンモデルを考える (Herbst and Schorfheide, 2015; Hirose and Sunakawa, 2019)。また、価格の硬直性について、Rotemberg (1982) 型のインフレ率の定常状態からの乖離の 2 乗に比例する調整費用を考える。

4.1 最終財生産企業

最終財生産企業は、異なる中間財 $Y_t(j)$ (添字 $j \in [0, 1]$ は中間財の種類を表す) を用いて、最終財を生産する。

$$Y_t = \left(\int_0^1 Y_t(j)^{1-\nu} dj \right)^{\frac{1}{1-\nu}}$$

ここで、 ν は需要の価格弾力性の逆数である。利潤最大化あるいは費用最小化により、以下の需要曲線を得る。

$$Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-1/\nu} Y_t \quad (13)$$

$P_t(j)$ は中間投入 $Y_t(j)$ の価格である。また、 P_t は一般価格水準であり、 $P_t = \left(\int_0^1 P_t(j)^{\frac{\nu-1}{\nu}} dj \right)^{\frac{\nu}{\nu-1}}$ と表される。

4.2 中間財生産企業

それぞれの中間財生産企業は、 $Y_t(j)$ を独占的競争下で生産し、2 次の価格調整コストの下で価格を設定する。生産関数は以下で与えられる。

$$Y_t(j) = A_t N_t(j) \quad (14)$$

ここで、 A_t は全要素生産性であり、確定的なトレンド $\bar{\gamma}$ とトレンドに対するショック z_t からなる。すなわち、 A_t の成長率は、 $\gamma_t \equiv \ln(A_t/A_{t-1}) = \bar{\gamma} + z_t$ のように分解できる。 z_t は、AR(1) 過程 $z_t = \rho_z z_{t-1} + \varepsilon_{z,t}$ に従う。ここで、 $\varepsilon_{z,t} \sim N(0, \sigma_z^2)$ である。 $N_t(j)$ は労働投入である。中間財 j を生産する企業は、その企業自身の生産関数 (14) と、最終財生産企業からの需要関数 (13) を制約条件として、以下の将来利益の割引現在価値を最大化する。

$$\mathbb{E}_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s Q_{t+s|t} \left(\frac{P_{t+s}(j)}{P_{t+s}} Y_{t+s}(j) - W_{t+s} N_{t+s}(j) - AC_{t+s}(j) \right) \right]$$

ここで、 $\beta^s Q_{t+s|t} = \beta^s (C_{t+s}/C_t)^{-\tau} (A_t/A_{t+s})^{1-\tau}$ は確率的割引因子 (stochastic discount factor) と呼ばれ、家計のオイラー方程式 (16) から導出される¹⁷。 β は (主観的) 割引因子、 τ はリスク回避に関するパラメータ、 C_t は総消費である。価格の調整費用は、Rotemberg (1982) に従い、 $AC_t(j) = \frac{\phi}{2} \left(\frac{P_t(j)}{P_{t-1}(j)} - \Pi \right)^2 Y_t(j)$ として定式化され、 ϕ は調整費用の大きさに関するパラメータ、

¹⁷ 中間財生産企業は家計が保有すると仮定される。このとき、独占的競争による利益は家計に分配される。

Π は定常状態での粗インフレ率である。また、 W_t は実質賃金率である。 $P_t(j)$ について微分し整理することで、最適化の必要条件は以下の式で与えられる。

$$(1 - \nu^{-1}) \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-1/\nu} \frac{Y_t}{P_t} + \nu^{-1} \frac{W_t}{A_t} \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-1/\nu-1} \frac{Y_t}{P_t} - \frac{\partial AC_t(j)}{\partial P_t(j)} - \beta \mathbb{E}_t Q_{t+1|t} \frac{\partial AC_{t+1}(j)}{\partial P_t(j)} = 0. \quad (15)$$

4.3 家計

代表的家計は、各期の予算制約を所与として、生涯の効用を最大化する。

$$\mathbb{E}_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \left(\frac{(C_{t+s}/A_{t+s})^{1-\tau} - 1}{1-\tau} - \chi_H H_{t+s} \right) \right]$$

subject to

$$P_t C_t + B_t + T_t = P_t W_t H_t + R_{n,t-1} B_{t-1} + P_t D_t + P_t SC_t.$$

ここで、 χ_H は労働による不効用の効用全体に対するウェイトである。 B_t は t 期末における債券の保有量、 H_t は総労働供給、 T_t は所得移転、 $R_{n,t}$ は名目金利を粗利 (gross) で表したものである。 D_t は家計が保有する中間財生産企業からの配当である。また、 SC_t は状態依存型証券を取引することで得られる純キャッシュフローである¹⁸。最適化の必要条件は以下の式で与えられる。

$$1 = \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1}/C_t}{A_{t+1}/A_t} \right)^{-\tau} \frac{A_t}{A_{t+1}} \frac{R_{n,t}}{\Pi_{t+1}} \right], \quad (16)$$

$$\frac{W_t}{A_t} = \chi_H \left(\frac{C_t}{A_t} \right)^{\tau}, \quad (17)$$

ここで、 $\Pi_t = P_t/P_{t-1}$ は粗インフレ率である。

4.4 モデルを閉じる

金融政策ルールは以下の形をとる。

$$R_{n,t} = \left(R \Pi^* \left(\frac{\Pi_t}{\Pi^*} \right)^{\psi_1} \left(\frac{Y_t}{Y_t^*} \right)^{\psi_2} \right)^{1-\rho_R} R_{n,t-1}^{\rho_R} \exp(\varepsilon_{R,t}) \quad (18)$$

¹⁸ ここで、証券市場は完備 (complete) であり、どのような経済の状態においてもそのリスクをヘッジできる証券が存在する。

R は定常状態の実質利子率、 Π^* は目標インフレ率、 $\varepsilon_{R,t} \sim N(0, \sigma_R^2)$ は金融政策ショックである。 $Y_t^* = (1 - \nu)^{1/\tau} A_t \exp(g_t)$ は、 $\phi = 0$ とした伸縮的価格の下で得られる自然産出量の水準である。 ψ_1 と ψ_2 はインフレ率と産出ギャップに対する反応係数、 ρ_R は政策の慣性を示すパラメータである。財政支出は、産出の一部として、 $G_t = (1 - \exp(-g_t)) Y_t$ で与えられる。また、 g_t は、以下の AR(1) 過程に従う。

$$g_t = (1 - \rho_g) \bar{g} + \rho_g g_{t-1} + \varepsilon_{g,t},$$

ここで、 \bar{g} は g の定常状態の値、 $\varepsilon_{g,t} \sim N(0, \sigma_g^2)$ は財政支出に対するショックである。

以下では、全ての中間財生産企業が同じ決定をする対称均衡 (symmetric equilibrium) に着目するため、添字 j は省略する。市場精算条件 (market-clearing conditions) は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} C_t + G_t + AC_t &= Y_t, \\ H_t &= N_t. \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、(15)-(19) 式において、 (Y_t, Y_t^*, C_t) は共通のトレンド A_t を持つことから、 $\tilde{Y}_t = Y_t / A_t$ 、 $\tilde{Y}_t^* = Y_t^* / A_t$ 、 $\tilde{C}_t = C_t / A_t$ のようにトレンドを除去する。結果として、均衡条件は以下で与えられる。

$$\tilde{C}_t^{-\tau} = \beta R_{n,t} \mathbb{E}_t \left[\frac{\tilde{C}_{t+1}^{-\tau}}{\exp(\gamma_{t+1}) \Pi_{t+1}} \right] \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left((1 - \nu^{-1}) + \nu^{-1} \tilde{C}_t^\tau - \phi (\Pi_t - \bar{\Pi}) \left[\Pi_t - \frac{1}{2\nu} (\Pi_t - \bar{\Pi}) \right] \right) \tilde{C}_t^{-\tau} \tilde{Y}_t \\ &\quad + \beta \phi \mathbb{E}_t [\tilde{C}_{t+1}^{-\tau} \tilde{Y}_{t+1} (\Pi_{t+1} - \bar{\Pi}) \Pi_{t+1}] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\tilde{C}_t + \frac{\phi}{2} (\Pi_t - \bar{\Pi})^2 \tilde{Y}_t = \exp(-g_t) \tilde{Y}_t \quad (22)$$

$$R_{n,t}^* = \left(R^* \bar{\Pi} \left(\frac{\Pi}{\bar{\Pi}} \right)^{\psi_1} \left(\frac{\tilde{Y}_t}{\tilde{Y}_t^*} \right)^{\psi_2} \right)^{1-\rho_R} R_{n,t-1}^{\rho_R} \exp(\varepsilon_{R,t}) \quad (23)$$

$$R_{n,t} = \max \{ R_{n,t}^*, 1 \} \quad (24)$$

(20)-(23) の 4 つの式は、消費のオイラー方程式、ニューケインジアン・フィリップス曲線、経済の資源制約、そしてテイラー型の金融政策ルールである。 $R_{n,t}^*$ はシャドーレートである。 $R_{n,t}$ はゼロ金利制約 ((24) 式) から 1 以上となる (純利に直すと 0 以上となる)。

これらの非線形の均衡条件にも、時間反復法を適用できる。前節までの準線形モデルと比べて、ゼロ金利制約以外の非線形性を考慮した場合、モデルの政策関数は特に定常状態から大き

く離れたところでは異なり得ることが知られている¹⁹。また、非線形の均衡条件 (20)–(23) 式を対数線形近似することで、(1)–(3) 式に近い式を求めることができる。²⁰ 連載のサポートサイト (<https://github.com/keizai-seminar-quant-macro/chapter5>) には、非線形ニューケインジアン・モデル、線形ニューケインジアン・モデル (準線形モデル) のそれぞれについて、ゼロ金利制約を考慮して数値的に解いた例がアップロードされているので、参考にしてほしい。ゼロ金利制約を考慮した場合、非線形モデルと準線形モデルのいずれの場合も、自然利子率に対する負のショックが発生してシャドーレートが下がることで名目金利はゼロになり、インフレ率と生産ギャップはゼロ金利制約のない線形モデルと比べて落ち込む。線形モデルからの乖離の度合いは準線形モデルよりも非線形モデルの方がより大きくなっており、これはゼロ金利制約以外の非線形性の影響を示している。

¹⁹ 例えば、Boneva, Braun, and Waki (2016) を参照。

²⁰ 対数線形近似後の、線形ニューケインジアン・モデルの均衡条件は以下の通り。

$$\begin{aligned}
c_t &= \mathbb{E}_t c_{t+1} - \tau^{-1} (r_{n,t} - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - \mathbb{E}_t \gamma_{t+1}) \\
\pi_t &= \frac{(v^{-1} - 1)\tau}{\phi \bar{\Pi}^2} c_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \\
y_t &= c_t + g_t \\
r_{n,t} &= \rho_R r_{n,t-1} + (1 - \rho_R) (\psi_1 \pi_t + \psi_2 (y_t - y_t^*)) + \varepsilon_{R,t}
\end{aligned}$$

対数線形近似

線形近似 (**linear approximation**) とは、モデルの均衡条件を、定常状態の周りで線形に近似することである。たとえば、関数 $f(x)$ を定常状態 \bar{x} の周りで近似するには、以下の 1 次のテイラー近似 (**Taylor approximation**) を用いる。

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

あるいは、 $z = \ln(x)$ のように変数変換を行い、 $f(x) = f(\exp(z))$ を $\bar{x} = \exp(\bar{z})$ の周りで近似すると、

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\bar{x}(\ln(x) - \ln(\bar{x})) \quad (25)$$

となり、これを対数線形近似 (**log-linear approximation**) と呼ぶ。

対数線形近似を行うには、以下の公式が便利である。 $x_t \equiv \ln(X_t/\bar{X})$ とすると、

$$X_t \approx \bar{X}(1 + x_t), \quad \frac{X_t}{Y_t} \approx \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}(1 + x_t - y_t), \quad X_t^a \approx \bar{X}^a(1 + ax_t)$$

が成り立つ。例えば、消費のオイラー方程式 (20) にこれらの公式を適用すると、 $\tilde{C}_t^{-\tau} \approx \bar{C}^{-\tau}(1 - \tau c_t)$ 、 $\tilde{\Pi}_t \approx \bar{\Pi}(1 + \pi_t)$ 、 $\tilde{R}_{n,t} \approx \bar{R}_n(1 + r_{n,t})$ 、 $\exp(\gamma_t) \equiv \Gamma_t \approx \bar{\Gamma}(1 + \gamma_t)$ を代入して、

$$\begin{aligned} \tilde{C}_t^{-\tau} &= \beta R_{n,t} \mathbb{E}_t \left[\frac{\tilde{C}_{t+1}^{-\tau}}{\Gamma_{t+1} \Pi_{t+1}} \right] \\ \Leftrightarrow 1 - \tau c_t &= \frac{\beta \bar{R}_n}{\bar{\Gamma} \bar{\Pi}} \mathbb{E}_t (1 + r_{n,t} - \tau c_{t+1} - \gamma_{t+1} - \pi_{t+1}) \\ \Leftrightarrow -\tau c_t &= r_{n,t} - \mathbb{E}_t \tau c_{t+1} - \mathbb{E}_t \gamma_{t+1} - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \\ \therefore c_t &= \mathbb{E}_t c_{t+1} - \tau^{-1} (r_{n,t} - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - \mathbb{E}_t \gamma_{t+1}) \end{aligned}$$

ここで、定常状態より、 $\beta \bar{R}_n / (\bar{\Gamma} \bar{\Pi}) = 1$ を用いた。 $\tau = 1$ 、 $c_t = y_t$ 、 $\mathbb{E}_t \gamma_{t+1} = s_t$ としたとき、これは線形の式 (1) と等しい。

5 まとめ

今回は、時間反復法の応用として、ゼロ金利制約を考慮した非線形ニューケインジアン・モデルについて主にみてきた。ゼロ金利制約をモデル化して明示的に扱った分析は、かつては数えるほどしかなかったが、2008年の金融危機以降に米国を始めとする各国の中央銀行がそのような制約に実際に直面したことから、論文の数は、以前とは比べものにならないほど増加した。ゼロ金利制約は、モデルにおいて内生的にバインドするため数値解法での取扱いが難しいが、ここでは時間反復法にそのような制約を取り入れる工夫を紹介した。このような時折バインドする制約 (**occasional binding constraint**) のあるモデルの数値解法は、担保制約のあるモデル (Kiyotaki and Moore, 1997) などほかのマクロモデルにも適用可能であり、興味深い非線形の経済現象の分析で活用できる。

参考文献

- Adam, Klaus and Roberto Billi (2006) "Optimal Monetary Policy under Commitment with a Zero Bound on Nominal Interest Rates," *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 38, No. 7, pp. 1877-1905.
- (2007) "Discretionary Monetary Policy and the Zero Lower Bound on Nominal Interest Rates," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 54, No. 3, pp. 728-752.
- Benigno, Pierpaolo and Michael Woodford (2012) "Linear-quadratic Approximation of Optimal Policy Problems," *Journal of Economic Theory*, Vol. 147, No. 1, pp. 1-42.
- Boneva, Lena Mareen, R. Anton Braun, and Yuichiro Waki (2016) "Some Unpleasant Properties of Loglinearized Solutions When the Nominal Rate is Zero," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 84, pp. 216-232.
- Eggertsson, Gauti B. and Michael Woodford (2003) "The Zero Bound on Interest Rates and Optimal Monetary Policy," *Brookings Papers on Economic Activity*, Vol. 1, pp. 139-211.
- Gali, Jordi (2015) *Monetary Policy, Inflation and the Business Cycle*: Princeton University Press, 2nd edition.
- Hamilton, James D. (1994) *Time Series Analysis*: Princeton University Press.
- Herbst, Edward P. and Frank Schorfheide (2015) *Bayesian Estimation of DSGE Models*: Prince-

- ton University Press.
- Hirose, Yasuo and Takeki Sunakawa (2019) "A Review of Solution and Estimation Methods for Nonlinear DSGE Models with the Zero Lower Bound," *Japanese Economic Review*, Vol. 70, No. 1, pp. 51-104.
- Kato, Ryo and Shin-Ichi Nishiyama (2005) "Optimal monetary policy when interest rates are bounded at zero," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 29, No. 1-2, pp. 97-133.
- Kiyotaki, Nobuhiro and John Moore (1997) "Credit Cycle," *Journal of Political Economy*, Vol. 105, No. 2, pp. 211-248.
- Kopecky, Karen .A. and Richard .M.H. Suen (2010) "Finite State Markov-Chain Approximations to Highly Persistent Processes," *Review of Economic Dynamics*, Vol. 13, No. 3, pp. 701-714.
- Kydland, Finn E. and Edward C. Prescott (1977) "Rules Rather Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans," *Journal of Political Economy*, Vol. 85, No. 3, pp. 473-91, June.
- Nakata, Taisuke (2017) "Uncertainty at the Zero Lower Bound," *American Economic Journal: Macroeconomics*, Vol. 9, No. 3, pp. 186-221, July.
- Rotemberg, Julio J. (1982) "Sticky Prices in the United States," *Journal of Political Economy*, Vol. 90, No. 6, pp. 1187-1211.
- Rouwenhorst, K. Greet (1995) "Asset Pricing Implications of Equilibrium Business Cycle Models," in Cooley, Thomas ed. *Frontiers of Business Cycle Research*, New Jersey: Princeton University Press, pp. 294-330.
- Tauchen, George (1986) "Finite State Markov-Chain Approximations to Univariate and Vector Autoregressions," *Economics Letters*, Vol. 20, No. 2, pp. 177-181.
- Walsh, Carl E. (2017) *Monetary Theory and Policy*: MIT Press, 4th edition.
- Woodford, Michael (2003) *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy*: Princeton University Press.
- 加藤涼 (2006) 『現代マクロ経済学講義動学的一般均衡モデル入門』, 東洋経済新報社 .
- 齊藤誠・岩本康志・太田聡一・柴田章久 (2016) 『マクロ経済学』, 有斐閣 .
- 沖本竜義 (2010) 『経済・ファイナンスデータの計量時系列分析』, 朝倉書店 .
- 中村保・北野重人・地主敏樹 (2016) 『サピエンティア マクロ経済学』, 東洋経済新報社 .