

第 6 回：異質な個人を組み込んだマクロモデル

2019 年 8 月 28 日

1 イン트로ダクション

これまでの連載では、ベルマン方程式を使った動的計画法 (dynamic programming) や射影法 (projection method) を用いて、家計や企業の動学的最適化問題の解き方を学んできた。また前回は、確定的 (deterministic) なモデルを発展させ、マクロ経済に確率的 (stochastic) なショックを導入したモデルの解法を解説した。さまざまな経済環境の不確実性に直面する個人がどのように意思決定をするか学んできたわけだが、あくまでも一人の個人の最適化問題に焦点を当てた、いわゆる代表的個人 (**representative agent**) の仮定のもとで家計の行動を分析してきた。

しかしながら現実には、マクロ変数と同じ動きをする代表的個人にお目にかかることはあまりなく、各個人がそれぞれの不確実性に直面して異なる予算制約の中で日々意思決定をしている。仮に代表的個人とでも呼ぶべき、平均的な資産・所得といった経済変数を有する個人がいたとして、彼・彼女の行動を追えばマクロ経済の変化が必ずしも理解できるというわけでもない。

とはいえこれまでの学習が無駄になることはないので安心してほしい。個人の意思決定はマクロ経済の動態を探る根底にあり、ミクロをきちんと理解することなしにマクロの理解はありえない。また、資本市場で取引される資産や効用関数に一定の仮定を置いた場合、代表的個人の動きはマクロの動きに近づくため、近似的には問題ない場合もあるだろう。その一方で、代表的個人だけに焦点を当てた分析では語ることが難しい問題も存在する。所得・資産格差や再分配政策の分析はその良い例だ。ベストセラーとなった『21 世紀の資本』(Piketty 2014) のベストセラーなどをきっかけに、世界各国において格差動向、とりわけ富裕層がさらに豊かになり貧困層は逆に一層貧しくなるといった傾向に対する問題意識が高まっている。米国ほど極端ではないものの、日本においても

過去数十年にわたって所得と資産格差の拡大傾向が確認されている¹。格差が広がる要因を分析して望ましい再分配政策のあり方を探るには、代表的個人を仮定したモデルを超えて、異質な個人 (**heterogeneous agents**) の存在を許容したマクロモデルを構築することが必要である。たとえば家計間の異質性や格差動向に関心はなく、分析対象が金利や総生産といったマクロ変数の動きであったとしても、異質な個人の分布とその変化がマクロの動きを説明する重要な鍵を握りうることは近年多数の研究が明らかにしている²。

さらに、様々な個人の行動がマクロ変数に影響するのはもちろんだが、当然のことながらマクロ経済の現状と先行きの見込みは我々の行動を左右する重大な要素である。そのため、均衡においてはたくさんの異なるミクロレベルの個人の動きとマクロ経済の相互作用も無視できない。

というわけで今回は、異質な個人を明示的に組み込んだマクロ経済モデルとその数値計算方法を学習していく。今回扱うモデルは、これまでと比較してやや複雑かもしれないが、分析の幅が広がって、興味深いマクロ経済問題へ様々な切り口からアプローチできるようになる。基本的にはこれまでの連載で学んできた動的計画法を使ってモデルを構築し、一般均衡の概念、コンピューターを使った近似計算や解の探索方法などの知識を総動員することで自ずと道は開けるので、あまり心配する必要はない。近年はモデルが進化し数値計算手法が発展すると同時に、コンピューター技術が飛躍的に発展して計算にかかる時間的・金銭的費用も低下している。そのため様々なマクロ・ミクロの断面に切り込んだ分析が、クリアかつ低コストに行うことができるようになってきている。

これから連載二回にわたって異質な個人を組み込んだ古典的なマクロモデルの学習を行う。個人間の異質性という場合、例えば性別・年齢の違いといった各個人にとって確定的な事前 (**ex-ante**) の異質性と、確率的なショックによって生じる事後 (**ex-post**) の異質性とがある。今回は後者の異質性、とくに前回学んだ確率的ショックが個人レベルで起きる可能性を組み込んだ、いわゆるビューリー (**Bewley**) モデルを、今回は「年齢」という確定的な異質性を組み込んだ世代重複型 (**overlapping generations: OLG**) モデルを取り扱う。世代重複型モデルについては、簡単な二期間モデルは既に紹介したが、これを発展させてゆく。とくに日本では、社会保障を通じた世代間移転や、世代内における所得・資産格差など、確定的および確率的に生じる個人の異質性を組み入れずにはアプローチが難しい経済問題が山積している。可能な限り精緻な分析を行い現実的な政策議論に役立てるには、二期間モデルや後述する固有なリスクのない代表的個人を仮定したモデル分析では限界がある。加えて、少子高齢化によるマクロ経済への影響や教育水準・家族構成・労働供給パターンの変化、さらにはテクノロジーの発展によって需要されるスキルや職種構成の変化な

¹ 例えば Kitao and Yamada (2019) を参照せよ。

² 例えば Krueger et al. (2016a)、Kaplan and Violante (2018) 等のサーベイを参照せよ。

ど、構造的な変化が引き起こす移行過程におけるミクロ・マクロのダイナミクスは分析をさらに面白くしてくれる³。不況による賃金変動や再分配政策・資産格差の拡大といった重要な課題の分析においても、クロスセクションでの異質性のみならず、時系列を通じて分布が変化する異質性についても対処せねばならない。その際に本領を発揮するのがこれらのモデルである。

2 ビューリーモデル (Bewley models)

先に述べたように異質な個人を組み込んだモデルと一言でいっても、私とあなたのどのような違いを組み込むか、そのやり方はさまざまだ。ここでは個人の消費を支える労働所得もしくは労働生産性に固有 (**idiosyncratic**) なショックが確率的に発生するケースを考えてみる。

悪いショックが起きた時には所得を補填して消費変動を抑制できる保険を購入したり、借り入れを繰り返して消費を平準化し続けたりできれば、一般的な効用関数のもとでは結果として代表的個人のような消費プロファイルを実現できる。しかし現実には所得リスクを一掃してくれるような完全な保険市場は存在しないし、借り入れにも様々な制約がかかる。あらゆるリスクを取り払い状態に応じて支払いが行われる、状態条件付き資産 (**state-contingent asset**) を取引する市場が存在しない経済、すなわち不完備市場 (**incomplete market**) において、借り入れ制約に直面する個人をモデル化してみよう。この種の不完備市場モデルは、最初に開発を行ったアメリカ人経済学者 Truman Bewley の名前にちなんでビューリーモデルと呼ばれることが多い。初期の代表的な論文の著者名を並べて、Bewley-Aiyagari-Huggett-İmrohoroglu モデルなどと言われることもあるが、ここではシンプルにビューリーモデルと呼んでおく⁴。以下では、Aiyagari (1994) に基づいたモデルを学習し、均衡の定義と特徴、カリブレーションと実際の計算について順番に見ていこう。

2.1 完備市場の均衡

モデルの解説を始める前に、市場が完備から不完備になることで生じる変化を明確にするために、完備市場 (**complete market**) における均衡を復習してみよう。個人は無限期間において消費 c_t から得られる効用 $u(c_t)$ の割引現在価値を最大化すべく、以下の最適化問題を解く。

³ マクロ経済ショック (aggregate uncertainty) と個人の異質性を組み込んだモデルについては、連載最終回 (第 8 回) で取り扱う予定である。

⁴ Bewley (1983)、İmrohoroglu (1989)、Huggett (1993)、Aiyagari (1994) などが初期の代表的な論文として挙げられる。

$$\begin{aligned}
& \max_{\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
& \text{subject to} \\
& c_t + a_{t+1} = (1 + r_t)a_t + w_t
\end{aligned}$$

a_{t+1} は内生的に決定される今期の貯蓄（次期の資産）を指し、 w_t は外生的に与えられる労働所得、 β は主観的割引因子である。金利水準 r_t は均衡において決定されるが、個人にとっては所与である。個人が借入れをしている場合は $a_t < 0$ となるが、借金の現在価値が無限大に拡散し返済が不可能となるポンジー・ゲームを排除するため、個人の資産には（1）式で示す制約があるものとする⁵。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_{t+1}}{\prod_{s=0}^t (1 + r_s)} < \infty \quad (1)$$

この無限期間の問題をベルマン方程式を使って以下のように書き換える⁶。

$$\begin{aligned}
V(a) &= \max_{c, a'} \{u(c) + \beta V(a')\} \\
&\text{subject to} \\
c + a' &= (1 + r)a + w \\
a' &\geq -b
\end{aligned}$$

個人は每期同じ問題を解くので、期間を示すサブスクリプトは省略してある。プライム記号（例えば a' ）は次期の値を示す。借入れ制約については、資産の下限を $-b$ とおく。

一階条件は（2）式で与えられ、標準的な効用関数の仮定（ $u'(c) > 0$ 、 $u''(c) < 0$ ）および $c > 0$ かつ $c \neq \infty$ の条件下では、均衡における金利 r について（2）式、（3）式が成立する。

$$u'(c) = \beta(1 + r)u'(c') \quad (2)$$

$$r = \frac{1}{\beta} - 1 \equiv \lambda \quad (3)$$

競争的な企業は、総資本 K および総労働供給 L を生産要素として生産関数 $Y = F(K, L)$ に基づ

⁵ 非ポンジー・ゲーム条件については齊藤（2006）を参照せよ。

⁶ 価値関数を使った計算手法を復習したい場合は、連載第三回の「動的計画法」を参照せよ。

き生産を行う。 K および L はそれぞれ、個人から借りた資産および労働の総和である⁷。市場金利 r と賃金 w のもと、企業の利潤最大化条件は以下に与えられる⁸。

$$\begin{aligned} r &= F_K(K, L) - \delta \\ w &= F_L(K, L) \end{aligned} \quad (4)$$

ただし δ は資本減耗率である。

資本市場における個人と企業の行動を慣例に従って、縦軸に価格（金利）、横軸に需要・供給量として表すと、図 1(Aiyagari (1994) より抜粋) のようになる。完備市場における均衡は、資本水準に依存しない直線で示される供給「曲線」 $r = \lambda$ と、企業の最適化条件（4）式で示される需要曲線との交点（図中の e^f ）で与えられる。均衡においては、金利は $r = \lambda$ 、総資本は生産関数と企業の最適化条件から $\lambda = F_K(K, L) - \delta$ を満たす K の値となる。図で示されるように、金利が $-\delta$ に近づくにつれ（すなわち $F_K(K, L)$ がゼロに近づくにつれ）、 K は無限大に拡散する。

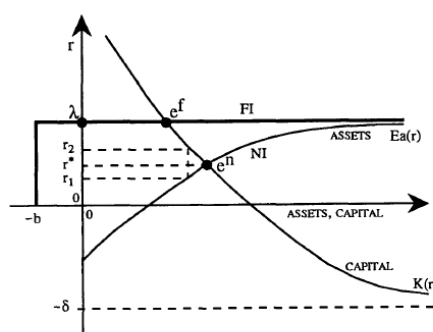


FIGURE IIb
Steady-State Determination

図 1: 完備市場および不完備市場における均衡：出所）Aiyagari（1994）Figure IIb

⁷ 総人口を 1 とすると、均衡において $L = 1$ 、 $K = a$ となる。

⁸ F_K および F_L は、生産関数 F を各生産要素 K 、 L に関して微分した値を示す。

2.2 不完備市場モデル

次に個人に固有な不確実性を労働生産性に導入しよう。総人口を 1 に標準化し、市場は不完備、すなわち状態条件付き資産は存在しないと仮定する⁹。消費の変動を嫌う個人が、将来の所得変動に備えてできることは、リスクのない資産を用いた予備的貯蓄（**precautionary saving**）のみとなる。

労働生産性を l と表し、1 階の自己回帰（**first-order auto regressive: AR(1)**）確率過程に従うとする。 l の値が取り得る上限 l_{max} および下限 l_{min} を設定し、 N_l 個のグリッド $[l_1, \dots, l_{N_l}]$ で離散化する。今期の生産性 l_i から次期に l_j となる確率を p_{ij}^l で表す。

所得の不確実性を含めて完備市場のベルマン方程式を書き改めると以下ようになる。

$$\begin{aligned} V(a, l) &= \max_{c, a'} \{u(c) + \beta \mathbb{E}V(a', l')\} \\ \text{s.t.} \\ c + a' &= (1 + r)a + wl \\ a' &\geq -b \end{aligned}$$

完備市場のケースとの違いは、新たに個人の状態変数として加わった今期の労働生産性 l と、 l の不確実性に伴って次期の価値関数にかかる期待値を示すオペレーター \mathbb{E} のみである。今期の l が l_i の場合の価値関数の期待値を推移確率を用いて明示的に表すと、 $\mathbb{E}V(a', l') = \sum_j V(a', l_j) p_{ij}^l$ となる。企業セクターについては完備市場の場合と同じ仮定を置く。不完備市場の定常均衡においては、個人は每期労働生産性のリスクに直面するが、労働生産性の分布は常に一定であるという条件を満たす必要がある。次に、この不完備市場での均衡を定義する。

■**均衡の定義** この不完備市場モデルにおける定常均衡は、以下の条件を満たす政策関数 $a' = g(a, l)$ 、個人の状態変数空間における確率分布 $m(a, l)$ 、総資本 K 、総労働 L 、金利 r 、および賃金 w によって定義される。

1. 要素価格は競争的に決定される。、均衡においては $r = F_K(K, L) - \delta$ および $w = F_L(K, L)$ が成立する。
2. 政策関数 $a' = g(a, l)$ は個人の最適化問題の解である。

⁹ 不完備市場モデルの詳細については、Ljungqvist and Sargent (2018) 等の教科書を参照せよ。

3. 確率分布 $m(a, l)$ は不変であり、政策関数 $g(a, l)$ および労働生産性 l の推移確率によって導かれる。
4. 企業の総資本需要 K と個人の総資本供給は一致する。また総労働需要 L と総労働供給も一致する。

$$K = \int_l \int_a a m(a, l) da dl$$

$$L = \int_l \int_a l m(a, l) da dl$$

2.3 不完備市場における均衡の特徴

モデルの概要は以上であるが、資本市場の均衡において価格（金利）と総資本がどのように決定されるか特徴づけてみよう。消費と貯蓄に関するオイラー不等式は（5）式で与えられる。

$$u'(c) \geq \beta(1+r)\mathbb{E}u'(c') \quad (5)$$

借入れ制約がバインドしている、すなわち借入れ制約があるために望むだけの借入れをして消費を増やすことができないときには、今期の消費による限界効用が割引後の来期の限界効用を上回り、不等式が成立する（ $u'(c)$ が減少関数であることに注意）。これは異時点間の消費の限界効用を平準化させたいがそれができない状態である。

借入れ制約にかからない範囲においては、標準的な効用関数のもとでは金利が上がれば、貯蓄が上昇し消費成長率も増加する。また、金利が下方から完備市場における金利水準 $\lambda = 1/\beta - 1$ に近づくと、期待資産は無限大に発散する。 $u'(c)$ が非負のマルチンゲール（**non-negative supermartingale**）であることを利用して数学的に証明できるが、直感的な説明は以下の通りである¹⁰。

仮に金利が $r = \lambda$ であった場合（すなわち $(1+r)\beta = 1$ の場合）、(5) 式は $u'(c_t) \geq \mathbb{E}u'(c_{t+1})$ となる。不等式が成立する場合には、イェンセンの不等式（**Jensen's inequality**）から $\mathbb{E}(c_{t+1}) > c_t$ となり、消費の期待値は上昇を続ける。このような消費過程を支えられるのは期待資産が増加し続ける場合に限られる。よって、極限においては資産は無限大となる。

¹⁰ 消費の限界効用のマルチンゲール性についての詳細は、阿部 (2011)、Ljungqvist and Sargent (2018) 等を参照せよ。

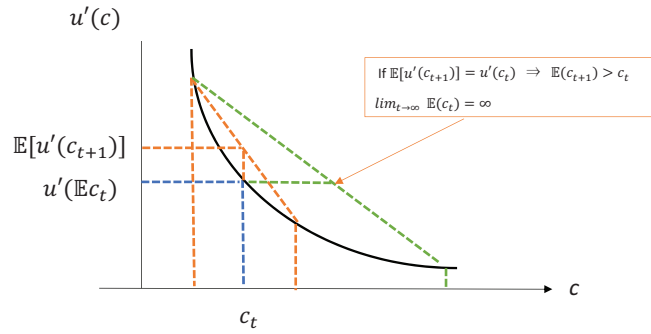


図 2: $u'(c)$ とイェンセンの不等式: $u'(c_t) = Eu'(c_{t+1})$ のケース

図 2 で示すように、等式が成立する $u'(c_t) = Eu'(c_{t+1})$ の場合には $E(c_{t+1}) \geq c_t$ となる。 $E(c_{t+1}) > c_t$ であれば上のケースと同じく、期待資産は無限大となる。 $E(c_{t+1}) = c_t$ というのは、イェンセンの不等式から、不確実性のない $c_{t+1} = c_t$ が成立する場合に限られる。

しかしながら、消費が変動しない、という状態はこの不完備市場においては永続しえない。もしそうであれば、 $c_t = \bar{c}$ となり、均衡においては包絡線定理 (envelope theorem) により $V'(a) = u'(c)(1+r)$ が成り立つことから資産の成長率もゼロ、すなわち $a_t = \bar{a}$ となる。¹¹これは家計の予算制約式と矛盾する。 l が不変でない限り、 $\bar{c} + \bar{a} = (1+r)\bar{a} + wl$ は成立しえないからだ。

少々説明が長くなったが、所得に不確実性が導入されたことで、金利に対する個人の反応が全く異なる結果となったことは、完備市場と不完備市場の違いを理解する上で重要な点である。不完備市場において不確実性にさらされている個人にとって、リスクフリーの資産というのは不完全ながらも所得変動リスクの影響の緩和してくれるありがたい代物であり、完備市場の個人にはわからない大いなる魅力がある。よって完備市場に暮らす人たちよりも、利回りが低くても喜んで手に入れたいわけで、もし完備市場と同じ値段 ($r = 1/\beta - 1$) がつけられたならば、每期每期喜んで資産を積み上げていくというわけだ。しかし一般均衡を考えると、そこまでの大量の資本を借り入れてまで生産を行いたい企業はいない ($F_{KK} < 0$) ため、金利は低くなり貯蓄意欲にもブレーキがかかる。

不完備市場における総資産、すなわち人口 1 の経済における平均資産 $E(a(r))$ をグラフで示すと、図 1 における右上がりの曲線となり、金利 r が完備市場の均衡金利 λ に近づくにつれ $E(a(r))$ は無限大に発散する様子が示されている。企業の需要曲線については、図 1 で示すように完備市場と同じ右下がりの曲線で示される。不完備市場における均衡点は図中の e^n となり、金利水準は完備市場より低く、総資本は高水準となることが分かる。では、次にこの均衡点 e^n を導出すべく、

¹¹ 包絡線定理についての詳細は、例えばチャン・ウエイナイト (2010) を参照せよ。

実際の計算に話を進めよう。

2.4 カリブレーション

コンピューターを使った計算では、モデルの各パラメータ値を事前に設定する必要がある。ここでは Aiyagari (1994) に沿った設定を行い、それぞれの値に関する深い議論は割愛する。モデル期間は年単位とし、効用関数は $u(c) = c^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ で与えられ、リスク回避度を示すパラメータ γ は 3、主観的割引因子 β は 0.96 とし、労働生産性 l は以下の AR(1) 過程に従うとする。

$$\log(l_t) = \rho \log(l_{t-1}) + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (6)$$

慣性 (persistence) を示すパラメータ ρ は 0.6、標準偏差は $\sigma = 0.4$ と設定する。前回学んだように Tauchen (1986) の手法で離散的に近似する。

生産関数は、 $F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$ とし、資本シェア $\alpha = 0.36$ 、資本減耗率 $\delta = 0.08$ 、借り入れの上限は $b = 3.0$ とする。

2.5 一般均衡の計算

今回のモデルに限らず、異質な個人を組み込んだ一般均衡の数値計算においては同時に満たすべき均衡条件が複数存在するため、いくつかのブロックにわけて計算を考えるとわかりやすい。個人の最適化問題あるいは個々の企業の利潤最大化問題を解くには、金利・賃金などの要素価格や（今のモデルにはないが）所得税率などの政策関数、その他マクロ経済環境を示す変数がインプットとして必要である。一般均衡モデルにおいては要素価格は要素市場におけるマクロ的な需給均衡によって決まり、政府が存在する場合にはその異時点間予算制約の達成が求められる。今回取り扱っている比較的シンプルなモデルをコンピューター上で解く場合でも、ミクロの最適化問題とマクロの需給均衡の両方を同時に解くのはややこしいので、大きく分けて「外側」のマクロステップと「内側」のミクロステップの 2 段階に分けて計算しよう。

まずはマクロステップだ。このモデルにおいては均衡の計算が必要な市場は一つ、図 1 で示した資本市場である¹²。企業による資本需要と個人の資本供給が一致する均衡点 e^n を見つければ良いわけだが、不完備市場において均衡金利は $-\delta < r < \lambda$ となることは既に分かっているので、この領域で均衡点を探すことになる。色々な計算方法が考えられるが、 $(-\delta, \lambda)$ の範囲において、各金

¹² 労働供給は外生であるため、均衡量の導出は必要ない。資本市場が均衡すれば、ワルラスの法則により生産財市場は均衡する。

利水準における企業からの資本需要を計算して需要曲線を導出し、個人の最適化問題を解いて総資産を計算して供給曲線を導出してその交点を見つけるのが基本作業となる。

前者の資本需要は単純な計算 $r = F_K(K, L) - \delta$ によって導かれるが、後者はいくつかのステップが必要だ。ベルマン方程式を用いた動的計画法による解、すなわち消費・貯蓄配分の導出はこれまでの連載で既に学習したところではあるが、それに加えて資産空間における定常分布 (**stationary distribution**) (あるいは不変分布、**invariant distribution**) を導出して総資本供給を計算する必要がある。以下では、これらの一連の家計セクターの計算を行うアルゴリズムを解説する。

■アルゴリズム

1. 初期セットアップ パラメータを設定する。労働生産性は $[l_{min}, l_{max}]$ 内で N_l 個のグリッドに離散化し、推移確率 p_{ij}^l を求める。総労働供給 L を計算する。
2. グリッド生成 個人の資産について、状態空間の評価点を N_a 個のグリッドに区切る。
3. 収束の基準 収束の基準になるパラメータ ε を定める。
4. マクロ変数の初期値設定 金利の初期値 $r_0 \in (-\delta, \lambda)$ を当て推量する。金利 r_0 における企業の資本需要 K_0 を $r_0 = F_K(K_0, L) - \delta$ から求め、 K_0 に基づく賃金 $w_0 = F_L(K_0, L)$ を計算する。
5. 個人の政策関数の導出 金利 r_0 、賃金 w_0 を所与として、個人の最適化問題を解く。これまでの連載で既に学んだ価値関数反復法 (value function iteration: VFI) や政策関数を直接的に求める時間反復法 (time iteration: TI) などを用いて、各状態変数 (a, l) における個人の政策関数 $a' = g(a, l)$ を求める。ここでは詳しい手法についての再度の説明は省略する。
6. 定常分布の導出 定常分布を求めて総資本供給 A_0 を求める。このステップについては、以下に詳しく説明する。
7. 均衡条件の確認 ステップ4、5、6で計算した総資本需要 K_0 と総資本供給 A_0 の距離を測る。 $|K_0 - A_0| < \varepsilon$ であればストップ。そうでなければ r_0 の値を調整して、ステップ4、5、6を繰り返す。

計算の結果得られた政策関数 $a' = g(a, l)$ を3つの異なる労働生産性 l の値で表したのが図3になる。ほぼ直線に近いが、労働生産性の低い個人 (l_{low}) の政策関数は借り入れ上限 $a = -b = -3$ 近辺においては非線形となり、借り入れ制約が貯蓄に影響していることを示している。

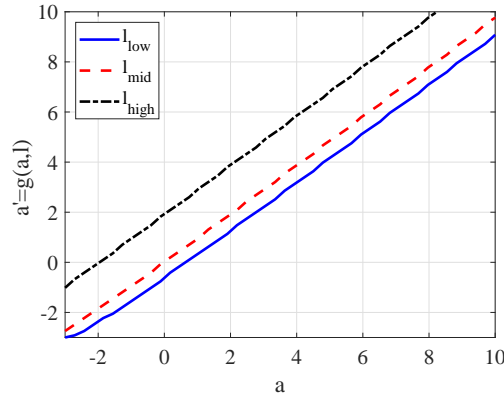


図 3: 政策関数 $a' = g(a, l)$

ステップ 7 においては、 $|K_0 - A_0| > \varepsilon$ の場合、正しい均衡金利は当て推量した金利 r_0 と、総資本供給 A_0 が資本需要と一致する場合の金利、すなわち $r_1 = F_K(A_0, L) - \delta$ との間に位置すると考えられる。新たな当て推量はこの二つの間、例えば $0.5 \times (r_0 + r_1)$ と設定してもよいし、あるいは $r_0 + \kappa(K_0 - A_0)$ (κ は正の小さい実数) などでの計算を試みてもよいだろう。

2.6 定常分布の計算

ステップ 6 において定常分布を導出するには主に二つの方法がある。一つ目は価値関数反復法のように、分布の当て推量から始めて収束するまで反復計算する方法、二つ目はモンテカルロ・シミュレーションによる方法だ。

まずは分布計算の反復による定常分布の導出について説明しよう。 $N_s = N_a \times N_l$ とし、個人の状態変数 (a, l) 空間における分布をサイズ $N_s \times 1$ のベクトル π で表そう。ステップ 5 で求められた政策関数 $a' = g(a, l)$ および外生的な労働生産性の遷移確率 p_{ij}^l を用いて、2 状態変数の推移確率行列 (**stochastic matrix**)、 $P \sim N_s \times N_s$ を求める。

a' の導出については連載第 2 回で詳しく学んだように、状態変数 a のグリッドから選ぶこともできるが、グリッド数が十分ないと解の精度が落ちる。そのため、 a' のグリッドをより細かく設定したり、非線形方程式を解く関数を使って a' を求めることもできる。その場合、操作変数 a' のグリッドが状態変数のグリッド上にないことも当然起こりうるが、近接する a のグリッド上の 2 点に a' からの距離に応じて推移確率を振り分ければよい¹³。

¹³ Matlab コード Aiyagari_1994.m では複数の方法で政策関数および定常分布の計算を行っているので参照されたい。

t 期の分布を π_t とすると、 $t+1$ 期の分布 π_{t+1} は以下のように表される。

$$\pi'_{t+1} = \pi'_t P$$

ここで求めたいのは、毎期不変の定常分布、すなわち $\pi_{t+1} = \pi_t = \bar{\pi}$ となるような分布である。
すなわち、

$$\bar{\pi}' = \bar{\pi}' P$$

となり、右辺の項を左辺に移動し、

$$\bar{\pi}'(I - P) = 0$$

転置 (transpose) すると

$$(I - P)'\bar{\pi} = 0$$

となることから、 P について固有値 1 に相当する固有ベクトルを求めればよいことになる（但し分布であるので、ベクトル要素の和が 1 となるように調整）。 P は推移確率行列であることから、少なくとも一つはそのような固有ベクトルを見つけることができる。ただし、われわれの問題においてはいくつも定常分布があっては困る。

推移確率行列 P の (i, j) に位置する要素を $P(i, j)$ で表すと、ある整数 $n \geq 1$ についてあらゆる (i, j) において $P^n(i, j) > 0$ である場合、単一 (unique) の定常分布が存在し、分布は漸近的に定常 (asymptotically stationary) であるという定理がある¹⁴。この定理を利用すれば複数均衡の問題は回避できる。

われわれの数値計算においてこの定理が非常に便利なのは、VFI においてもそうであったように、どのような当て推量から始めても反復を繰り返せば単一の分布に収束する点である。例えば、すべての $\pi(i), i = 1, \dots, N_s$ について $\pi(i) = 1/N_s$ と設定してスタートしてもよいだろう。

■ アルゴリズム：反復による定常分布の導出

1. 初期セットアップ 政策関数 $a' = g(a, l)$ および労働生産性の遷移確率 p_{ij}^l から、推移確率行列 P を求める。
2. 収束の基準 収束の基準になるパラメータ ε を定める。
3. 初期値の設定 状態変数空間における分布 π_0 （ただし $\sum_{a,l} \pi_0(a, l) = 1$ ）を当て推量する。
4. 新分布の計算 推移確率行列 P に基づき、 $\pi'_1 = \pi'_0 P$ を計算する。

¹⁴ Ljungqvist and Sargent (2018) の 2 章 Theorem 2.2.2 等を参照。今回の問題のように、脱出することのない吸収状態 (absorbing state) がない場合には、条件が満たされることを比較的容易に示すことができる。

5. 収束の確認 ステップ4で計算した新分布と初期分布との距離を測る。 $\|\pi_0 - \pi_1\| < \varepsilon$ であればストップ。そうでなければ $\pi_0 = \pi_1$ として、ステップ4を繰り返す。

定常分布を導出する第二の方法としては、ある一定数の個人の状態変数の遷移をモンテカルロ・シミュレーションによって計算する方法があげられる。この場合も、推移確率行列に関する上記の条件が満たされればいかなる初期分布からスタートしても、固有の分布に収束する。

事前に十分なサンプルサイズを決めてシミュレーションを行うことが必要（例えば $N = 5000$ ）だがシミュレーション期間が増えるにつれて初期値の影響はなくなり、定常分布からサンプルされるようになる。あるいは $N = 1$ として、非常に長い一連のシミュレーションを行い、時系列データをクロスセクションの分布とすることもできるだろう。ランダムな初期分布からスタートして分布が変わらなくなるまでシミュレーションを重ねる場合、定常分布を得るために必要なサンプルサイズについての明確な決まりはない。ショックの分散や異質性が高まればサンプルサイズを多くとることが望ましいが、サンプルサイズを増やしてみたときに分布が変わるようであれば十分な数が確保できているとは言えないのでケースバイケースで試行錯誤してみるのがよいだろう。

■アルゴリズム：モンテカルロ・シミュレーションによる定常分布の導出

1. 初期セットアップ サンプルサイズ（個人の数） N およびシミュレーションの期間を決める。
2. 収束の基準 収束の基準になるパラメータ ε を定める。
3. 初期分布の設定 N 人の個人に対して初期の資産 a と労働生産性 l を割り当てる。
4. 初期分布統計の設定 初期分布に関する統計（ k 次モーメント、平均・分散など）を計算する。
5. 新分布統計の計算 政策関数 $a' = g(a, l)$ に基づき、 a' を決定し、乱数ジェネレータによって l' を定める。シミュレーションにより定常分布を求め、それに関する統計を計算する。
6. 収束の確認 ステップ5で計算した新分布に関する統計と初期分布における統計との距離を測る。誤差が収束の基準を下回ればストップ。そうでなければ新分布を初期分布としてステップ4と5を繰り返す。

どちらの手法を使ってもサンプルサイズを十分にとってシミュレーションを重ねれば単一の定常分布に収束するはずである。Heer and Maussner (2009) はモンテカルロ・シミュレーションは膨大な時間がかかりうることを短所として指摘している。

MATLAB code

- Aiyagari_1994.m
- tauchen.m

図4は上記のカリブレーションに基づき、各金利水準における資本需給と均衡を示している。個人の貯蓄の和である資本供給については、(6)式の労働生産性のAR(1)プロセスにおける標準偏差 σ をベースラインの0.4から0.2、0.6に変えて計算した3ケースを示している。 σ が高い、すなわち個人がより大きな所得リスクに直面している場合、所与の金利水準における予備的貯蓄は上昇することから、供給曲線は右方にシフトしている。その結果、均衡を示す需要曲線との交点に置いては金利水準は低下し、総資本は上昇する。

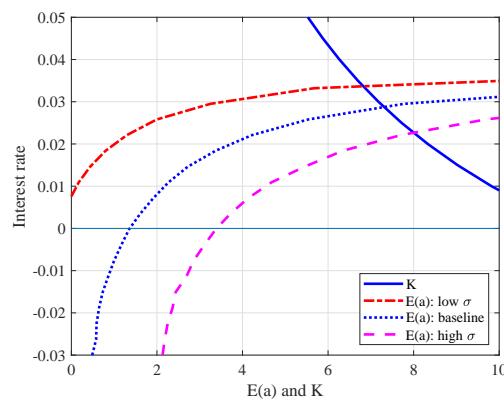


図4: 資本市場の均衡

Aiyagari (1994) は四半世紀も昔に書かれた論文で、現在に至るまであらゆる方向での拡張が行われている。その一方で、個人の直面するリスクとマクロ経済との関連を考えるうえで、こうした初期の論文が与えてくれる重要な示唆は今も変わらない。Aiyagari (1995) や Aiyagari and McGrattan (1998) は、今回学んだ不完備市場モデルを政策分析に応用した研究の例だ。前者は、最適な資本課税はいくらかという経済学のいわば大命題に対して、それまでの定説であるゼロが最適 (Chamley (1986) および Judd (1985)) という結果が不完備市場を考えることによって覆ることを示した。後者の論文では最適な政府債務残高はいくらかという問いに対し、総生産の3分の2程度、という答えを示している。不完備市場においては、リスクのない完備市場に比べると予備的動機から貯蓄が増え資本が過剰になるため、政策のツールによって個人の貯蓄意欲に手を加えることで貯蓄水準を完備市場に近づけられることが背景にあると考え、これらの結論がより直感的に理解できるだろう。

3 ビューリーモデルのさまざまな拡張

今回学習したモデルでは、所得の不確実性が個人の異質性の源泉となり、消費や貯蓄といった個人行動の変化を生み出し、完備市場とは異なるマクロ経済の均衡につながることを示された。数値計算手法を学習することが主な目的であったため、異質な個人を組み込んだモデルのなかでもっともシンプルなモデルを使って解説したが、このモデルをプロトタイプとして発展させることで様々な経済現象を分析すべく新しいモデルを構築することができる。代表的個人を仮定したモデルではそもそも語ることでできない経済格差の分析が可能となったことが、ビューリーモデルの主要な貢献のひとつであるが、Aiyagari (1994) が導入した労働所得の AR(1) 過程だけでは、比較的大きな分散や高い慣性を仮定してもデータでみられるような格差を再現しきれないことも明らかにされている¹⁵。労働生産性の不確実性だけでなく、人的資本投資リスク、選好の異質性、遺産動機などを分析に取り入れることで、モデルによる格差の説明力が向上することも示されてきた。異質な個人を組み込んだ初期のマクロモデルを含む包括的なサーベイとしては De Nardi et al. (2017) や Heathcote et al. (2009) などがお勧めである。

また、雇用者の賃金リスクだけでなく、資本所得 (capital income) や、リスクをとって起業するアントレプレナーの投資収益の不確実性を組み入れることで、資産格差、とりわけトップ層への一極集中を説明しようとするモデルもある (Quadrini (2000)、Benhabib et al. (2015)、Aoki and Nirei (2016) など)。

さらに、今回学んだ計算手法を使って、収入サイドだけでなく支出サイドの不確実性を組み込むことも可能である。例えば医療・介護費用の不確実性は個人の消費・貯蓄行動に影響を与え、マクロ経済動向にも少なからぬ影響を与えることが多くの論文によって明らかにされている。賃金と健康・医療費の不確実性が退出を含む労働参加に与える影響を研究した French (2005)、高齢者の貯蓄行動と医療費に関するリスクの関係を分析した De Nardi et al. (2010)、介護費に関するリスクを組み込み介護保険市場の分析を行った Braun et al. (2019) などの研究は、高齢化と労働力不足・社会保障制度の課題を抱える日本の政策議論に与える示唆も大きいだろう。健康状態や医療支出の変化、保険制度などをマクロモデルに組み込んだ分析はいわゆるマクロ・ヘルスと呼ばれる分野として過去十年あまりで急速に成長している。De Nardi et al. (2018) は健康状態の不確実性が医療費支出や寿命など複数の経路を通じて、所得・資産格差をもたらすことを世代重複型モデルを使って説明している。

¹⁵ 例えば Cagetti and De Nardi (2008) を参照せよ。

また、個人や家計間の異質性だけでなく、家計内の異質性、例えば男女の生産性の違いや家庭内の分業・出産や結婚の意思決定といった、異質性を組み込んだ研究も家族のマクロ経済学 (family macroeconomics) と呼ばれる分野として発展している。最近の研究については Doepke and Tertilt (2016) や Doepke et al. (2019) のサーベイを参照されたい。女性の労働参加や出生率上昇が期待される日本にとっても政策的インプリケーションの高い分野である。Attanasio et al. (2008) は夫婦それぞれの人的資本リスクを含むモデルを構築して、コーホートごとの女性の労働参加率の変化を分析しており、Blundell et al. (2016) も人的資本形成を内生化したモデルにおいて税・福祉制度による女性参加率と厚生への影響を推計している。

さらに、個人や家計の間で生じるリスクのみならず、税・社会保障制度改革、金融政策、国内外由来の景気変動のような構造変化やマクロショックが起きる場合、個人がどのような異質性を有するかによってマクロ変数の反応や厚生効果の分析にも違いが出てくる。異質な個人を組み込んだモデルにマクロ経済ショックを組み込んだ古典的な論文といえば Krusell and Smith (1998) であるが、2000 年以降の景気変動を受けて研究が活発に拡張されている¹⁶。近年注目を浴びている、いわゆる HANK (Heterogeneous-Agent New Keynesian) モデルは、個人の異質性とマクロ経済リスクの波及効果の相互作用を分析し、家計間の所得や資産分布が金融危機後のマクロ経済分析に影響を与えることを明らかにしている¹⁷。また、Krueger et al (2016a, 2016b) も、マクロ経済ショックの影響は資産や所得水準によって個人間で大きく異なり、ショックに対する総消費などのマクロ経済変数の変動も元々の格差の度合いによって大きく変化しうることを示している。

次回も引き続き異質な個人を組み込んだモデルの学習を行うが、所得リスクに加えて年齢という異質性に焦点を当てた世代重複型モデルの分析と数値計算について学習してゆく。

参考文献

- Ahn, S., G. Kaplan, B. Moll, T. Winberry, and C. Wolf (2017) “When Inequality Matters for Macro and Macro Matters for Inequality,” in *NBER Macroeconomics Annual*, Vol. 32, Chicago: University of Chicago Press.
- Aiyagari, S. Rao (1994) “Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving,” *Quarterly*

¹⁶ Krusell and Smith (1998) 以降のマクロショックと異質な個人を組み込んだモデルと計算手法の発展については、*Journal of Economic Dynamics and Control*(Vol 34, 2010) の Special Issue に収められた論文および Ahn et al. (2017) 等を参照せよ。

¹⁷ 代表的な文献として、異質な個人を組み込んだニューケインジアンモデルにおいて金融政策を分析した、Kaplan et al. (2018) などがあげられる。Kaplan and Violante (2018) は HANK モデルのサーベイである。

- Journal of Economics*, Vol. 109, No. 3, pp. 659-684.
- (1995) "Optimal Capital Income Taxation with Incomplete Markets, Borrowing Constraints, and Constant Discounting," *Journal of Political Economy*, Vol. 103, No. 6, pp. 1158-1175.
- Aiyagari, S. Rao and Ellen R. McGrattan (1998) "The Optimum Quantity of Debt," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 42, No. 3, pp. 447-469.
- Aoki, Shuhei and Makoto Nirei (2016) "Pareto Distribution of Income in Neoclassical Growth Models," *Review of Economic Dynamics*, Vol. 20, pp. 25-42.
- Attanasio, Orazio P., Hamish Low, and Virginia Sánchez-Marcos (2008) "Explaining Changes in Female Labour Supply in a Life-cycle Model," *American Economic Review*, Vol. 98, No. 4, pp. 1517-1552.
- Benhabib, Jess, Alberto Bisin, and Shenghao Zhu (2015) "The wealth distribution in Bewley models with capital income risk," *Journal of Economic Theory*, Vol. 159, p. 459-515.
- Bewley, Truman F. (1983) "A Difficulty with the Optimum Quantity of Money," *Econometrica*, Vol. 51, No. 5, p. 1485-1504.
- Blundell, Richard, Monica Costa Dias, Costas Meghir, and Jonathan Shaw (2016) "Female Labor Supply, Human Capital, and Welfare Reform," *Econometrica*, Vol. 84, No. 5, pp. 1705-1753.
- Braun, R. Anton, Karen A. Kopecky, and Tatyana Koreshkova (2019) "Old, frail, and uninsured: Accounting for features of the U.S. long-term care insurance market," *Econometrica*, Vol. 87, No. 3, pp. 981-1019.
- Cagetti, Marco and Mariacristina De Nardi (2008) "Wealth Inequality: Data and Models," *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 12, No. S2, pp. 285-313.
- Chamley, Christophe (1986) "Optimal Taxation of Capital Income in General Equilibrium with Infinite Lives," *Econometrica*, Vol. 54, No. 3, pp. 607-622.
- De Nardi, Mariacristina, Eric French, and John Bailey Jones (2010) "Why do the Elderly Save? The Role of Medical Expenses," *Journal of Political Economy*, Vol. 118, No. 1, pp. 37-75.
- De Nardi, Mariacristina, Giulio Fella, and Fang Yang (2017) "Macro Models of Wealth Inequality," in Boushey, Heather, Bradford DeLong, and Marshall Steinbaum eds. *After Piketty's 'Capital in the 21st century' : The Agenda for Economics and Inequality*, Cambridge:

Harvard University Press.

- De Nardi, Mariacristina, Svetlana Pashchenko, and Ponpoje Porapakkarm (2018) "The Lifetime Costs of Bad Health," NBER working paper No. 23963.
- Doepke, Matthias, Giuseppe Sorrenti, and Fabrizio Zilibotti (2019) "The Economics of Parenting," *Annual Review of Economics*, Vol. 11.
- Doepke, Matthias and Michele Tertilt (2016) "Families in Macroeconomics," in Taylor, John B. and Harald Uhlig eds. *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 2A, Amsterdam: Elsevier, Chapter 23.
- French, Eric (2005) "The Effects of Health, Wealth, and Wages on Labour Supply and Retirement Behaviour," *Review of Economic Studies*, Vol. 72, No. 2, pp. 395-427.
- Heathcote, Jonathan, Kjetil Storesletten, and Giovanni L. Violante (2009) "Quantitative Macroeconomics with Heterogeneous Households," *Annual Review of Economics*, Vol. 1, No. 1, pp. 319-354.
- Heer, Burkhard and Alfred Maussner (2009) *Dynamic General Equilibrium Modeling Computational Methods and Applications*, Berlin: Springer, 2nd edition.
- Huggett, Mark (1993) "The Risk-free Rate in Heterogeneous-agent Incomplete-insurance Economies," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 17, No. 5-6, pp. 953-969.
- Imrohoroğlu, Ayşe (1989) "Cost of Business Cycles with Indivisibilities and Liquidity Constraints," *Journal of Political Economy*, Vol. 97, No. 6, pp. 1364-1383.
- Judd, Kenneth L. (1985) "Redistributive Taxation in a Simple Perfect Foresight Model," *Journal of Public Economics*, Vol. 28, No. 1, pp. 59-83.
- Kaplan, Greg, Ben Moll, and Giovanni Violante (2018) "Monetary Policy According to HANK," *American Economic Review*, Vol. 18, No. 3, pp. 697-743.
- Kaplan, Greg and Giovanni Violante (2018) "Microeconomic Heterogeneity and Macroeconomic Shocks," *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 32, No. 3, pp. 167-194.
- Kitao, Sagiri and Tomoaki Yamada (2019) "Dimensions of Inequality in Japan: Distributions of Earnings, Income and Wealth between 1984 and 2014," RIETI Discussion Paper 19-E-034.
- Krueger, Dirk, Kurt Mitman, and Fabrizio Perri (2016a) "Macroeconomics and Household Heterogeneity," in Taylor, John B. and Harald Uhlig eds. *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 2B, Amsterdam: Elsevier, Chapter 12.

- (2016b) “On the Distribution of the Welfare Losses of Large Recessions,” *Advances in Economics and Econometrics: Eleventh World Congress*.
- Krusell, Per and Anthony A. Smith, Jr. (1998) “Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy,” *Journal of Political Economy*, Vol. 106, No. 5, pp. 867-896.
- Ljungqvist, Lars and Thomas J. Sargent (2018) *Recursive Macroeconomic Theory*, Cambridge: MIT Press, 4th edition.
- Piketty, T. (2014) *Capital in the Twenty-First Century*, Cambridge: Belknap Press.
- Quadrini, Vincenzo (2000) “Entrepreneurship, Saving, and Social Mobility,” *Review of Economic Dynamics*, Vol. 3, No. 1, pp. 1-40.
- Tauchen, George (1986) “Finite state Markov-chain approximations to univariate and vector autoregressions,” *Economics Letters*, Vol. 20, pp. 177-181.
- 阿部修人 (2011) 『家計消費の経済分析』, 岩波書店.
- 齊藤誠 (2006) 『新しいマクロ経済学—クラシカルとケインジアン邂逅 [新版]』, 有斐閣.
- チャン, A.C.・K. ウェインライト (2010) 『現代経済学の数学基礎 [第4版上・下]』, シーエーピー出版.