

第8回：定量的マクロ経済学のフロンティア

1 定量的マクロ経済学のフロンティア

本連載の最終回では、(1) Krusell and Smith (1998) 以降の異質な個人と集計ショック (**aggregate shock**) の関係性に関する分析と、(2) McKay et al. (2016) に代表されるニューケインジアンモデルの最近の研究の動向という、2つの定量的マクロ経済学のフロンティアを紹介する。どちらも連載第6回で紹介したビューリーモデルを発展させて、経済格差や個人の異質性とマクロ経済の関係性を探ろうという試みである。まずは、クルセル=スミスモデルから説明を始めよう。

ビューリーモデルでは、各個人は固有の所得リスクに直面しているものの集計 (マクロ) 変数は時間を通じて一定となる定常均衡のみを分析対象としていた。この仮定は、例えば景気循環のように集計ショックが存在して集計変数自体が変動する経済を分析したい場合、大きな障害となる。ところが、集計ショックが存在している経済で個人の異質性を考慮した均衡を分析するのはそれほど容易ではないことが知られている。この点を直観的に説明しよう。

不完備市場モデルの中で登場したオイラー不等式を思い出して欲しい¹。

$$u'(c_t) \geq \beta E(1 + r_{t+1})u'(c_{t+1}) \quad (1)$$

ビューリーモデルでは集計変数は変動しないため利子率 r は時間を通じて一定であるが、集計ショックがある場合、個人の意思決定に必要な次期の利子率 r_{t+1} にも不確実性が含まれることになる。そのため個人は次期の利子率を予測する必要があるが、利子率 r_{t+1} は次期の総資本 K_{t+1} の関数である。また、総資本は個人の資産分布 $m_{t+1}(a, l)$ に依存する。 $t+1$ 期の分布関数は現在の分布関数から推移法則によって決定するため、各個人の最適な意思決定には現在の資産分布の情報が必要になる。言い換えると、個人の意思決定の状態変数に資産分布が入ってくるのである。

資産分布は期初の資産や全要素生産性といったスカラーではなく関数なので、資産分布そのものを個人の状態空間に含めることは、理論的にも数値計算的にも問題を非常に複雑なものにする。そこで Krusell and Smith (1998) や den Haan (1997) は、分布関数そのものを状態空間に含めるのではなく、分布のモーメント情報のみを状態変数として近似的に解くアプローチを開発した。

本来は分布関数そのものが必要であるから、すべての情報ではなく平均や分散といったモーメントのみを用いることは、情報の一部を落としてしまっているといえる。しかし、Krusell and

¹ ノーテーションはすべて連載第6回と同じである。

Smith (1998) は、限られたモーメントに基づいて予測された次期の総資本は非常に当てはまりが良く、資産分布のすべての情報を用いなくても精度の高い数値計算ができることを示した。この結果は近似集計 (**approximate aggregation**) と呼ばれている²。

2 クルセル=スミスモデル (Krusell and Smith Model)

2.1 不完備市場モデル再考

まずはビューリーモデルの復習から始めよう。ビューリーモデルでは無数の個人が存在していて、それぞれの個人は自身が保有する資産 a と労働生産性 l に基づいて消費・貯蓄の意思決定を行っていた。今回は状態の数を節約するために、確率的に推移する雇用状態を $l \in \{1, \theta\}$ の2種類で捉えて、就業状態の労働生産性を1に基準化する。よって、賃金を w としたとき、就業時の労働所得は w である。一方、失業時は雇用保険が $w\theta$ ($0 \leq \theta < 1$) だけ受け取れると仮定する³。このとき、個人の最適化問題は以下のように書くことができた。

$$\begin{aligned} V(a, l) &= \max_{c, a'} \{u(c) + \beta E[V(a', l') | l]\}, \\ \text{s.t.} \\ c + a' &= (1 + r)a + wl, \\ a' &\geq 0. \end{aligned}$$

また生産関数は $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ で、総資本 K と総労働 L にはそれぞれ、個人の貯蓄と労働を集計した値が投入されていた。実物的景気循環理論などのさまざまな景気循環モデルでは、生産関数における全要素生産性 A が確率的に変化することが景気循環が生じる要因の1つであるとされている。一方、ビューリーモデルでは A に不確実性はなく、すべての個人が同時に受ける集計 (マクロ) ショックは存在していなかった。そのため、定常均衡でも個人の消費・貯蓄や労働所得は変化するが、集計量としてのマクロ変数は時間を通じて一定な経済を考えていた。

² 近似集計が当てはまらないケースも指摘されている。例えば Krueger and Kubler (2004) は、集計ショックが存在する世代重複モデルを数値計算で解く場合、近似集計の当てはまりが悪くなることを示している。

³ Krusell and Smith (1998) は失業時の所得をゼロとして計算している。所得がゼロの場合、資産がゼロのグリッド上で総所得がゼロとなり消費もゼロとなり定義できなくなる。そのようなケースを避けるためにグリッドの最小値をわずかにゼロより上に設定する必要がある。このような問題をさけるために本稿では、失業時でも所得はゼロにならないという仮定を置いて、資産がゼロとなるグリッド上の値を計算している。

2.2 限定合理性 (Bounded Rationality) と近似集計

第1節の議論から、集計リスクが入る場合、個人の意思決定は自身の資産 a 、雇用状態 l だけでなく、分布関数 $m(a, l)$ と全要素生産性ショック A にも依存するようになる。すなわち、

$$V(a, l; m, A) = \max_{c, a'} \{u(c) + \beta \mathbb{E}[V(a', l'; m', A') | A, l]\} \quad (2)$$

のように価値関数の状態空間に分布関数 $m(a, l)$ が入ってくる。分布関数の推移式を $m' = \mathcal{H}(m, A, A')$ と書くことにしよう。

一見すると状態変数が1つ増えただけのようにみえるが、(2)式はかなり厄介な問題である。資産 $a \in \mathcal{R}$ 上の価値関数であれば、適切にグリッドを設定して、内挿法 (interpolation) を用いながらグリッド上で個人の意思決定問題を近似的に解くというこれまで学習してきたアプローチが使える。しかし、資産分布が状態変数の場合、問題はより複雑となる。1つの分布を表現するだけでも複数のグリッドとその分布を表現するためのパラメータが必要となる。しかも、資産分布は正規分布のようなきれいな形をしていることもあれば、パレート分布であったり、もっと複雑な形かもしれないため、それぞれに適したグリッドも異なる可能性がある。無数に存在する様々な分布関数の形状のそれぞれについて価値関数を計算してみるということは到底不可能である。

Krusell and Smith (1998) は分布関数そのものを状態空間に入れる代わりに、分布関数のモーメントを状態変数にする方法を提案した。具体的には、

$$\hat{V}(a, l; K, A) = \max_{c, a'} \{u(c) + \beta \mathbb{E}[\hat{V}(a', l'; K', A') | A, l]\}$$

のように $m(a, l)$ をマクロ経済における総資本 $K \in \mathcal{R}_+$ で代替した。総資本 K であれば他の状態変数と同様にスカラーなので、数値計算は支障なく行える。また、次期の総資本については、

$$\ln K' = a(A) + b(A) \ln K \quad (3)$$

で推移すると個人は信じて意思決定を行うとする。こうすれば、最適化の必要条件である (1) 式にある次期の利子率も計算できる。

言い換えると、本来、次期の資本は現在の個人の資産分布から決定するのであるが、個人は他の人たちの資産分布を知らず、代わりに観察可能な総資本の情報のみに基づいて次期の資本を予測して、そのもとでの最適な行動していると仮定するのである。Krusell and Smith (1998) はこの仮定を限定合理性 (bounded rationality) の一種とみなして正当化している。たしかにわれわれは他

の個人の資産状況を正確に知りながら行動しているわけではないので、この仮定には一定の妥当性があるであろう。一方で、限られたモーメントの情報に基づいて予測した推移法則 (3) 式が、実際に均衡において実現した推移法則と大きくズレるのであれば、誤った予測に基づいて行動をし続けると仮定するのは不自然だろう。幸い Krusell and Smith (1998) は、決定係数を用いて、(3) 式に基づいた予測とそこから生成された均衡経路における総資本の推移に大きなズレはないことを示した。すなわち彼らのモデルにおいては、資産分布の平均といった容易に観察可能な変数だけで、マクロ経済の動態をかなり予測できる⁴。これが近似集計である。

2.3 集計ショックと固有リスク

数値計算ができるように、モデルの設定を具体的に詰めていこう。個人は固有リスクに加えて、集計ショックにも直面している。その場合の個人が直面する推移確率行列は下記のように定義される。

簡単化のために、Krusell and Smith (1998) にしたがって $A_t \in \{A_g, A_b\}$ とし、マクロ経済の状態は好景気 $A_t = A_g$ と不況 $A_t = A_b$ のどちらかであると仮定する。マクロ状態の推移確率を $\pi_{ij} = \Pr\{A_j|A_i\}$ と書くことにしよう。このとき推移確率行列は

$$\Pi_A = \begin{pmatrix} \pi_{gg'} & \pi_{gb'} \\ \pi_{bg'} & \pi_{bb'} \end{pmatrix}$$

となる。同様に、雇用状態の推移確率行列は

$$\Pi_l = \begin{pmatrix} \pi_{11'} & \pi_{1\theta'} \\ \pi_{\theta 1'} & \pi_{\theta\theta'} \end{pmatrix}$$

となる。両者を結合した

$$\Pi = \Pi_l \otimes \Pi_A = \begin{pmatrix} \pi_{gg'11'} & \pi_{gb'11'} & \pi_{gg'1\theta'} & \pi_{gb'1\theta'} \\ \pi_{bg'11'} & \pi_{bb'11'} & \pi_{bg'1\theta'} & \pi_{bb'1\theta'} \\ \pi_{gg'\theta 1'} & \pi_{gb'\theta 1'} & \pi_{gg'\theta\theta'} & \pi_{gb'\theta\theta'} \\ \pi_{bg'\theta 1'} & \pi_{bb'\theta 1'} & \pi_{bg'\theta\theta'} & \pi_{bb'\theta\theta'} \end{pmatrix} \quad (4)$$

が個人からみた状態 (l, A) の推移確率行列である。ただし、 $\pi_{AA'11'}$ は状態 (A, l) から (A', l') への推移確率である。また、各 A の状態における失業率 u_A は一定と仮定し、以下の条件が満たされ

⁴ ただし、この結果はあくまで Krusell and Smith (1998) モデルの設定とパラメータのもとで成立する結果であり、パラメータやモデルの設定が変われば、必ずしも成立しない点に注意されたい。

とする。

$$\begin{aligned}\pi_{AA'\theta\theta'} + \pi_{AA'\theta 1'} &= \pi_{AA'1\theta'} + \pi_{AA'11'} = \pi_{AA'} \\ u_A \frac{\pi_{AA'\theta\theta'}}{\pi_{AA'}} + (1 - u_A) \frac{\pi_{AA'1\theta'}}{\pi_{AA'}} &= u_{A'}\end{aligned}$$

これは不況時 A_b と好況時 A_g にそれぞれ決まった失業率になるため、失業のプールへの流入 (出) の整合性を保つための条件である。さらに Krusell and Smith (1998) に従って

$$\pi_{bb'\theta\theta'} = 0.75 \times \pi_{bg'\theta\theta'} \quad (5)$$

$$\pi_{gg'\theta\theta'} = 1.25 \times \pi_{gb'\theta\theta'} \quad (6)$$

という条件を置いておく⁵。これらの条件から、推移確率行列 (4) 式を完全に特定化することができる。

2.4 再帰的競争均衡 (Recursive Competitive Equilibrium)

クルセル=スミスモデルにおける再帰的競争均衡は、以下の条件を満たす価値関数 V 、政策関数 $a' = f(a, l; m, A)$ 、分布関数の推移法則 \mathcal{H} 、金利 r および賃金 w である。

1. すべての $(a, l; m, A)$ について価値関数 V は (2) 式を満たし、政策関数 $a' = f(a, l; m, A)$ はそのときの解となる。
2. あらゆる (m, A) において、要素価格は競争的に決定される。

$$r(m, A) = \alpha AK^{\alpha-1} N^{1-\alpha} - \delta, \quad w(m, A) = (1 - \alpha) AK^{\alpha} N^{-\alpha}$$

ただし、 $K = \int_l \int_a am(a, l) dadl$ 、 $L = \int_l \int_a lm(a, l) dadl$ である。

3. 推移法則 \mathcal{H} は政策関数 $a' = g(a, l; m, A)$ より生成される。

2.5 カリブレーション

Krusell and Smith (1998) に従って、モデルのパラメータを設定しよう。モデルの 1 期間は四半期であると仮定する。

- $\beta = 0.99$ 、 $u(c) = \ln c$

⁵ この条件は推移確率行列の値を決定するために必要な追加的仮定であるが、具体的な実証的背景などは Krusell and Smith (1998) の中では語られていない。

- $\alpha = 0.36$, $\delta = 0.025$

全要素生産性 A は好況時と不況時にそれぞれ 1.01、0.99 とし、そのときの失業率 u_A はそれぞれ 4%、10% とする。雇用状態および全要素生産性の推移確率 Π は共に 2×2 の行列であることから、それぞれの状態の平均持続期間と定常分布を設定すれば推移確率を決定することができる。具体的には、好況期および不況期の平均持続期間は 8 期間、好況時の平均失業持続期間は 1.5 期間、不況時の平均失業期間は 2.5 期間であるとする。これらに (5) 式と (6) 式の条件を加えれば、(4) 式を計算することが出来る。

■アルゴリズム Krusell and Smith (1998) モデルを解くためのアルゴリズムは以下の通りである。

1. 予測関数を特定化してパラメータを当て推量する。ここでは Krusell and Smith (1998) に従って、(3) 式のように次期の総資本は現在の総資本のみから決定すると考える。
2. 予測関数を所与として、家計の最適化問題を解く。ベルマン方程式およびオイラー不等式は、状態変数に総資本 K と全要素生産性 A が含まれる以外はこれまでと同様であるため、価値関数反復法でも時間反復法でも計算可能である。利子率および賃金は現在の総資本 K から導出できる。 (a, K) 上のグリッド数は、 a について 100 個、 K について 21 個とした。
3. 政策関数 $a' = g(a, l; K, A)$ が求められたら、政策関数を使って N 人の T 期間の貯蓄の推移をシミュレーションする。Krusell and Smith (1998) は $N = 5000$ 、 $T = 11000$ として、定常性を求めるためにシミュレーションの始めの 1000 期間を切り捨てている⁶。
4. ステップ 3 から生成されたシミュレーションデータ $\{K_t\}_{t=1001}^{11000}$ を使って、新しい予測関数のパラメータ $(\hat{a}(A), \hat{b}(A))$ を回帰分析によって推計する。
5. 新しいパラメータ $(\hat{a}(A), \hat{b}(A))$ と古いパラメータ $(a(A), b(A))$ が十分に近くなったら、不動点であるとみなしてストップする。
6. ステップ 5 までで予測関数のパラメーターが収束したにも関わらずフィット (決定係数: R^2) が良くなければ、 K^2 を加えるなど予測関数の形状を変えてステップ 2－5 を繰り返す。

⁶ Young (2010) のように、シミュレーションを用いないで、分布関数を線形補間などで計算するアプローチも存在している。

2.6 数値計算結果

では、数値計算結果を確認していこう⁷。次式は予測関数の係数およびアルゴリズムのステップ 3-4 で計算したシミュレーションデータに基づく決定係数である。

$$\ln K' = 0.134 + 0.963 \ln K, R^2 = 0.99994, \text{ if } A = A_g$$

$$\ln K' = 0.122 + 0.965 \ln K, R^2 = 0.99987, \text{ if } A = A_b$$

上式が好況時で、下式が不況時である。

決定係数が非常に 1 に近いことから、このような予測ルールが次期の総資本水準の予測精度として十分に高いことを示している⁸。なぜ異質な個人の資産にバラツキがあるにも関わらず、マクロ経済の動態を総資本だけで高い精度で説明できてしまうのだろうか。その理由は政策関数の形状にある。図 1 は実際に計算して得られた政策関数の借入制約近辺を拡大した図である。見ての通り、資産ゼロ近辺を除いて、かなり直線に近い形状であることが確認できる。資産ゼロ近辺は非線形となっているが、均衡分布において借り入れ制約付近の個人は (消費の平滑化と予備的貯蓄から) 少ないうえに、貯蓄がゼロに近い個人を集計しても値は小さいことからマクロに与える影響も小さくなる。個人の意思決定関数でマクロに大きな影響を与える部分が線形に近いのであれば、それを集計した結果も線形に近くなるので、個人の貯蓄の散らばりから複雑なダイナミクスは生まれてこない。言い換えると、個人の異質性や資産分布の違いがマクロ経済の動態に強く影響を与えるためには、借入制約に直面する人がもっと増えたり、借入制約の他にさまざまな非線形な意思決定が生じる要因が必要になるのである。

⁷ これまでと同様、コードは https://github.com/TomoakiYamada/KeizaiSeminar_Chap8 から入手できる。

⁸ ただし、この予測関数の精度の問題に関しては議論の余地がある。例えば、自己実現 (self-fulfilling) 的な予測になっている可能性は否定できないため、den Haan (2010) は決定係数に代わる近似集計の適切さの指標について議論している。

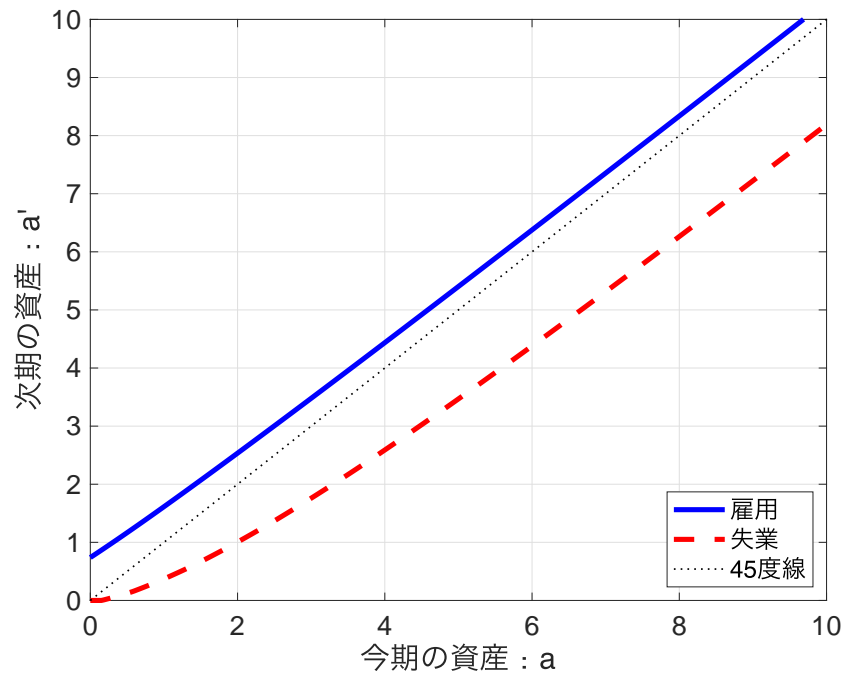


図 1: 借入制約近辺の政策関数

Matlab/Fortran Code

- Matlab: `main_KS.m` 他^a
- Fortran: `main_krusell_smith.f90` 他^b

^a クルッセル=スミスモデルを彼らが提案したアルゴリズムで Matlab で解こうとすると、非常に計算時間がかかる。これはシミュレーション・パートにおいて“繰り返し計算 (for ループ)”が必要になるためである。一般的に、Matlab のようなインタープリタ言語と呼ばれる言語は繰り返し計算を増やすと極端に計算時間が増加することが知られており、コードを書く際にループを避ける工夫が必要である。

^b Krusell and Smith (1998) が実際に論文で使用したコードは <http://www.econ.yale.edu/smith/code.htm> からダウンロード出来る。また、この分野の第一人者であるジョージタウン大学の向山敏彦教授は、HP 上で自身の経験に基づきながら、クルッセル=スミスモデルの解法の解説 (英語) と Fortran コードを公開している (<https://sites.google.com/site/toshimukoyama/lecture-notes-and-slides>)。

3 HANK モデルとフォワード・ガイダンス・パズル

3.1 金融政策の波及過程と消費行動

次に、異質な個人モデルから派生したもう 1 つの発展分野をみていこう。近年、金融政策分析において、**HANK(Heterogeneous Agent New Keynesian)** モデルが注目を集めている。HANK モデルは、連載第 5 回で学んだニューケインジアン・モデルに、連載第 6 回で学んだ所得の不確実

性と不完備市場の仮定のもとで家計の異質性を導入したものである。HANK モデルを用いることで、例えば、金融政策が家計の資産分布、すなわち格差 (**inequality**) に与える影響や、分布を通じた金融政策の波及過程 (**transmission mechanism of monetary policy**) について考えることができる。

標準的なニューケインジアン・モデルでは、金融政策の波及過程において、消費のオイラー方程式における異時点間の代替 (**intertemporal substitution**) が非常に大きな役割を持っている。例えば、中央銀行が名目金利を引き下げたとしよう。このときインフレ率を一定とすると、実質金利も低下し、家計は貯蓄を減らすか借入れをして、消費を増やそうとする。このような総需要の増加は、硬直的な価格の下で企業の生産を増やして、経済に対する拡張的な効果が働く。これは、金利収入の減少による所得効果と合わせて、金利の直接効果 (**direct effect**) とも呼ばれる⁹。

しかし、不完備市場のもとで借入制約に直面している家計は、実質金利が低下しても、借入れを行って消費を増やすことができないかもしれない。流動的な資産 (現金や預金など) がなく限界消費性向の高い家計のことを、その日暮らし (**hand-to-mouth**) 家計と呼ぶ¹⁰。こうしたその日暮らし家計の経済全体に占める割合が高いとき、名目金利の引き下げは、標準的なモデルでみられるような大きな緩和効果は持たないことになる。

また、2008 年の世界金融危機以降、世界各国の多くの中央銀行が名目金利の実効下限（いわゆるゼロ金利制約）に直面してきた。このような状況下では、名目金利を引き下げて経済を刺激する伝統的金融政策が使えない。そこで中央銀行は、いわゆる非伝統的金融政策の一環として、経済の安定化を目的として将来の政策に関する情報を発信するようになった。これはフォワード・ガイダンス (**forward guidance**) と呼ばれる。

標準的なモデルにおいては、経済がゼロ金利制約に直面しており、現在の名目金利を下げられないようなときでも、将来の名目金利を経済が回復した後もゼロに据え置くことを約束することで、現在の経済に緩和効果を持つ。これは、経済の先行きを見越して行動するとき、家計や企業は将来の経済の過熱化を予測して、現在の経済活動を活発化させるからである。しかし、実際の経済ではフォワード・ガイダンスの効果は必ずしも大きくない (DelNegro, Giannoni, and Paterson, 2015)。

このパズルに対する 1 つの回答が、家計の異質性をモデルに導入することである (McKay,

⁹ 通常のモデルでは、代替効果は所得効果を上回る。一方で、名目金利の引き下げは、一般均衡において、需要増による要素価格の変化を通じた金利の間接効果 (**indirect effect**) によっても経済に影響を与えうる (Kaplan, Moll, and Violante, 2018)。

¹⁰ 日本におけるその日暮らし家計の割合を推定したものとして、宇南山・原 (2015) がある。

Nakamura, and Steinsson, 2016)。すなわち、借入制約に直面しているような家計は、将来の金利低下とそれによる好況を知らされても、借り入れをして今期の消費を増やすことができない。このような家計の影響が経済全体に与える影響が大きいとき、金利の直接効果を通じたフォワード・ガイダンスの効果は限定的になる。

3.2 HANK モデル

ここでは、McKay, Nakamura, and Steinsson(2016, 以下 MNS) モデルに基づき、不完備市場と所得の不確実性のもとでの家計の異質性が、フォワード・ガイダンスの効果にどのような影響を与えるのか見ていこう。モデルの定常状態は、第 6 回でみたビューリーモデルと基本的に同じである。また、消費やインフレ率といった各変数の現在から将来への経路を数値的に解くには、第 7 回で学習したモデルの移行過程の数値計算を応用する¹¹。

第 5 回で学んだような、最終財生産企業と中間財生産企業、家計、政府からなるニューケインジアンモデルを考える。価格の硬直性について、Rotemberg (1982) 型のインフレ率の定常状態からの乖離の 2 乗に比例する調整費用を考える¹²。ここでの違いは、家計は市場の不完備性と所得の不確実性に直面しており、それぞれの家計は異なる資産と生産性を持っているという点である。

3.2.1 企業

それぞれの中間財生産企業は、異なる中間財 $Y_t(j)$ ($j \in [0, 1]$ は中間財の種類を表す) を独占的競争下で生産し、2 次の価格調整コストのもとで価格を設定する。生産関数および最終財生産企業による需要関数は以下で与えられる。

$$Y_t(j) = N_t(j) \quad (7)$$

$$Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-1/\nu} Y_t \quad (8)$$

$N_t(j)$ は労働投入、 $P_t(j)$ は中間投入 $Y_t(j)$ の価格であり、 ν は需要の価格弾力性の逆数である。 Y_t は最終財、 P_t は最終財の価格すなわち一般価格水準であり、 $P_t = \left(\int_0^1 P_t(j)^{\frac{\nu-1}{\nu}} dj \right)^{\frac{\nu}{\nu-1}}$ と表される。

中間財 j を生産する企業は、その企業自身の生産関数 (7) と、最終財生産企業からの需要関数 (8)

¹¹ 数値計算にあたっては、仲田泰祐氏 (連邦準備制度) の作成した Fortran コードを利用した。また、田邊一成氏 (東京大学大学院) の協力を得た。

¹² MNS では、Calvo (1983) 型の調整費用を用いている。すなわち、それぞれの中間財生産企業は、ある一定の確率でのみ価格改定を行える。

を制約条件として、以下の将来利益の割引現在価値を最大化する。

$$\sum_{s=0}^{\infty} D_{t+s} \left(\frac{P_{t+s}(j)}{P_{t+s}} Y_{t+s}(j) - (1 - \tau^w) w_{t+s} N_{t+s}(j) - AC_{t+s}(j) \right)$$

ここで、 $D_t = 1$ 、 $D_{t+s} = \frac{1}{1+r_t} \frac{1}{1+r_{t+1}} \cdots \frac{1}{1+r_{t+s-1}}$ は将来利益の割引因子であり、 $1 + r_t$ は粗実質金利である。また、 w_t は実質賃金率であり、 r_t および w_t は企業にとって所与とする。価格の調整費用は、 $AC_t(j) = \frac{\phi}{2} \left(\frac{P_t(j)}{P_{t-1}(j)} - \Pi \right)^2 Y_t$ として定式化され (Rotemberg 1982)、 ϕ は調整費用の大きさに関するパラメータ、 $\Pi = 1 + \pi$ は定常状態での粗インフレ率である。また、企業は $\tau^w w_t N_t(j)$ の補助金を政府から受け取る。 $P_t(j)$ について微分し整理することで、最適化の必要条件は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} 0 = & (1 - \nu^{-1}) + (1 - \tau^w) \nu^{-1} w_t \\ & - \phi \pi_t (1 + \pi_t) - \frac{1}{1 + r_t} \phi \pi_{t+1} (1 + \pi_{t+1}) \frac{Y_{t+1}}{Y_t} \end{aligned} \quad (9)$$

これは、割引率が実質金利であることを除いては、第 5 回で出てきた非線形ニューケインジアン・フィリップス曲線と同じものである¹³。また、独占的競争下で得られる、中間財生産企業の各期における実質利益は以下で与えられる。

$$d_t = Y_t - (1 - \tau^w) w_t Y_t \quad (10)$$

3.2.2 家計

家計は、実質金利 r_t 、賃金率 w_t 、税 T_t および配当 d_t を所与として、消費 c と労働時間 h から得られる効用 $u(c, h)$ の期待割引現在価値を予算制約のもとで最大化する。それぞれの家計は所得の不確実性に直面しており、市場は不完備であるとする。すなわち、家計が所得リスクに備える唯

¹³ ここで、 $\phi = 0$ のとき、最適化の必要条件は $\frac{P_t(j)}{P_t} = (1 - \tau^w)(\nu - 1)^{-1} w_t$ と書ける。ここで、 $(1 - \tau^w)(\nu - 1)^{-1}$ は独占によるマークアップ率であり、 $\tau^w = 2 - \nu$ と設定することでマークアップ率を 1 にすることができる。

一の手段は資産を購入して貯蓄を行うことである。ベルマン方程式は以下のように書ける¹⁴。

$$\begin{aligned} V(a, s_i) &= \max_{c, a', h} \left\{ u(c, h) + \beta \sum_j p_{ij}^s V(a', s_j) \right\}, \\ \text{s.t.} \\ c + a' &= (1 + r_t)a + w_t s_i h - T_t(s_i) + d_t, \\ a' &\geq 0. \end{aligned}$$

ここで、 $a' \geq 0$ であり、家計は借入れを行うことができないとする。それぞれの家計は労働時間 h に応じた不効用を得る一方で、労働所得を受け取る。労働所得は、労働生産性 s と労働時間 h の積に、実質賃金率 w_t を掛けたものである。労働生産性に応じた税 $T_t(s)$ を政府に支払う一方で、中間財生産企業からは配当 d_t を受け取る¹⁵。

労働生産性 s はマルコフ連鎖に従う。 s の値が取り得る上限 s_{max} および下限 s_{min} を設定し、 N_s 個のグリッド $[s_1, \dots, s_{N_s}]$ で離散化する。今期の生産性 s_i から次期に s_j となる確率を p_{ij}^s で表す。また、価値関数 V は今期の状態変数 (a, s_i) の関数となる。

それぞれの家計は、異なる資産 a と労働生産性 s_i を持っており、 (a, s_i) の分布は $\mu_t(a, s_i)$ として与えられる。ここで、労働生産性の分布は時間によらず不変であり、 $\mu^s(s_i) = \int \mu_t(a, s_i) da$ となる。

3.2.3 政府

政府は金融市場において家計が資産として購入できる債券を発行し、また家計から税金を集め、企業には補助金を渡す。政府の予算制約式は以下で与えられる。

$$b_{t+1} = (1 + r_t)b_t - \sum_i \mu^s(s_i) T_t(s_i) + \tau^w w_t \int N_t(j) dj \quad (11)$$

ここで、 b_t は t 期の初めにおける実質債券の量である。すなわち、前期に発行した債券の元本を含む利払いおよび補助金支出と集めた税金の差が、今期に発行する債券の量になる。

中央銀行は名目金利の水準 R_t を決定する。ここで、以下の恒等式が成り立つ。

$$1 + r_t = \frac{1 + R_t}{1 + \pi_{t+1}} \quad (12)$$

これは、フィッシャー方程式 (**Fisher equation**) とも呼ばれる。すなわち、実質金利は、名目金利

¹⁴ ここでは、要素価格などのマクロ変数にのみ時間を表す添字 t を付けている。またこれらの変数は、家計の最適化問題にとって所与である。

¹⁵ $T_t(s)$ は外生的に決まる労働生産性に対する一括税のため、家計の労働供給などの意思決定を歪めない。

と期待インフレ率の差として決定される。

3.2.4 市場精算条件と競争均衡

財市場、労働市場および債券市場の市場精算条件 (**market clearing condition**) はそれぞれ以下で与えられる¹⁶。

$$Y_t = C_t = \sum_i \int_a g_c(a, s_i) \mu_t(a, s_i) da \quad (13)$$

$$b_t = \sum_i \int_a g_a(a, s_i) \mu_t(a, s_i) da \quad (14)$$

$$N_t = \sum_i \int_a s_i g_h(a, s_i) \mu_t(a, s_i) da \quad (15)$$

また、中間財投入企業の生産関数より、 $Y_t = N_t$ となる。すなわち、総生産量は生産性を含む総労働供給に等しい。

HANK モデルにおける競争均衡は、以下の条件を満たす政策関数 $a' = g_a(a, s)$ および $h = g_h(a, s)$ 、確率分布 $\mu_t(a, s)$ 、総労働 N_t 、実質債券の量 b_t 、賃金 w_t 、金利 r_t 、税 T_t および配当 d_t によって定義される。

1. 実質賃金率 w_t は労働市場において競争的に決定される。実質金利 r_t は中央銀行が決定する名目金利から期待インフレ率を引いたものに等しくなる。
2. 政府は家計から税 T_t を徴収する。実質債券の量 b_t は、政府の予算制約式を満たすように決定される。
3. 実質賃金率 w_t を所与として、企業は中間財の価格を独占的競争下で最適に設定する。独占によって得られた利益は家計に配当 d_t として移転される。
4. 政策関数 $a' = g_a(a, s)$ および $h = g_h(a, s)$ は、賃金 w_t 、金利 r_t 、税 T_t および配当 d_t を所与としたときの、家計の最適化問題の解である。
5. 政府の実質債券供給 b_t と家計の総債券需要は一致する。また企業の総労働需要 N_t と家計の総労働供給も一致する。
6. 家計の確率分布 $\mu_t(a, s)$ は、政策関数 $g_a(a, s)$ および労働生産性 s の推移確率 $\{p_{ij}^s\}$ に従って推移する。

¹⁶ 価格の調整コストを財市場の式に含めることもできる。ここでは、そのようなコストは例えば効用に影響を与えるものであり、最終財の量には影響を与えないもの ("as if they were") とする (Hagedorn et al., 2019)。

3.3 定常状態の計算

連載第 6 回のビューリーモデルと同様に、HANK モデルの定常状態を数値的に解くことができる。価格は短期においてのみ硬直的であるため、定常状態には影響しない。さらに簡素化のため、定常インフレ率はゼロ ($\pi = 0$) とする。このとき、(6) 式にみられるように名目金利は実質金利と常に等しくなる。

このモデルにおいても、金利・賃金などの要素価格を所与としたミクロの家計の最適化問題と、要素価格を決定するマクロの需給均衡を分けて考える。またここでは、政府の予算制約についても考える必要がある。連載第 6 回でみたように、「外側」のマクロステップと「内側」のミクロステップの 2 段階に分けて計算しよう。

マクロステップでは、労働供給と貯蓄が内生的であるため、労働市場と債券市場の均衡を考える必要がある¹⁷。定常状態でインフレ率がゼロの場合、これらの均衡条件は (14)~(15) 式から時間を表す添字を落としたものおよび以下の 2 式で与えられる。

$$w = (1 - \tau^w)^{-1}(1 - \nu),$$

$$rb = \sum_i \mu^s(s_i) T(s_i)$$

(9) 式において $\pi = 0$ とすることで、賃金 w は他の条件によらず一定となる。したがって、総労働はそのような賃金のもとでの労働供給の量となる。

さらに、ここでは、実質債券の量の総生産量に対する比率 $b_y = b/Y$ をデータと一致させるように、税収を調整したい¹⁸。このため、 $T(s_i) = \tau \bar{\tau}(s_i)$ と定式化して、税収のパラメータ τ の値を調整する。すなわち、債券・生産比率 b_y と総生産 Y を所与としたとき、政府の予算制約式から、

$$rb_y Y = \tau \sum_i \mu^s(s_i) \bar{\tau}(s_i)$$

が成り立つ。この式から τ の値を求める。

また、実質金利についても、債券市場の需要と供給を一致させるような値を求める代わりに、実質金利の値 r をターゲットと合致させる。実質金利のターゲットはデータに基づいて決定し、需給が一致する均衡においてそのような実質金利が内生的に導出されるような主観的割引率 β を求め

¹⁷ ワルラス法則により 2 つの市場精算条件が満たされれば、残り 1 つについても自動的に満たされる。このため、財市場の市場精算条件については明示的に考えなくてもよい。

¹⁸ 逆に税収が一定のとき、実質金利を所与とすると、実質債券の量は政府の予算制約式から求めることができる。

る¹⁹。

ミクロステップにおいて、家計による労働供給と実質債券需要を計算するには、ベルマン方程式を用いた動的計画法による解に加えて資産と労働生産性の空間における定常分布を導出する必要がある。

■アルゴリズム

1. 初期セットアップ パラメータを設定する。労働生産性は $[s_{min}, s_{max}]$ 内で N_s 個のグリッドに離散化し、推移確率 $\{p_{ij}^s\}$ を求める。
2. グリッド生成 家計の貯蓄について、状態空間の評価点を N_a 個のグリッドで設定する。
3. 収束の基準 収束の基準になるパラメータ ε を定める。
4. 変数の初期値設定 実質賃金率の値は一定とし、実質金利の値はデータから所与であり一定とする。債券市場の需給を均衡させるような割引率の初期値 $\beta_0 \in (\beta_{min}, \beta_{max})$ を当て推量する。総生産量 Y についても当て推量により、政府の予算制約式を満たす τ_0 の値を求める。
5. 個人の政策関数の導出 割引率 β_0 、税収のパラメータ τ_0 を所与として、個人の最適化問題を解く。価値関数反復法や時間反復法などを用いて、各状態変数 (a, s) における個人の政策関数 $a' = g_a(a, s)$ および $h = g_h(a, s)$ を求める。
6. 定常分布の導出 定常分布を求めて総債券需要 b および総生産量 $Y = N$ を求める。
7. 均衡条件の確認 モデルの総債券需要量の総生産量に対する比率 b/Y をデータの値と比較する。 $|b/Y - b_y| < \varepsilon$ であればストップ。そうでなければ β_0 の値を調整して、新しい総生産量により政府の予算制約式を満たすような τ_0 の値を求めて、ステップ 4、5、6 を繰り返す。

ステップ 6 の定常分布の計算は、ビューリーモデルの場合と基本的に同じである。以下では反復によるアルゴリズムのみを再掲する。

■アルゴリズム：反復による定常分布の導出

1. 初期セットアップ 政策関数 $a' = g_a(a, s)$ および労働生産性の遷移確率 p_{ij}^s から、推移確率行列 P を求める。
2. 収束の基準 収束の基準になるパラメータ ε を定める。
3. 初期値の設定 状態変数空間における分布 μ_0 (ただし $\sum_{a,s} \mu_0(a, s) = 1$) を当て推量する。
4. 新分布の計算 推移確率行列 P に基づき、 $\mu'_1 = \mu'_0 P$ を計算する。

¹⁹ もちろん、割引率の値を所与として、債券市場の需給が均衡するような実質金利の値を求めることも可能である。

5. 収束の確認 ステップ4で計算した新分布と初期分布との距離を測る。 $\|\mu_0 - \mu_1\| < \varepsilon$ であればストップ。そうでなければ $\mu_0 = \mu_1$ として、ステップ4を繰り返す。

■カリブレーション パラメータについては、基本的にはMNSと同じ値を用いる。モデルの1期間の長さは四半期とする。このとき、実質金利の定常状態は年率2%、すなわち $1 + r = 1.005$ とした。すでに述べたように、定常状態のインフレ率は $\pi = 0\%$ とした。家計の効用関数は $u(c, h) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{h^{1+\psi}}{1+\psi}$ とし、リスク回避度を示すパラメータは $\gamma = 2$ 、フリッシュ弾力性の逆数については $\psi = 2$ とした。需要の価格弾力性の逆数は $\nu = 1/6$ とした。債券・生産比率については $b_y = 5.5/4$ と四半期換算した値を用いた。Rotemberg型の価格の調整コストのパラメータは、対数線形化後のニューケインジアン・フィリップス曲線における限界費用の係数がMNS(Calvo型の調整コストを用いている)と整合的になるように、 $\phi = 800$ とした²⁰。

労働生産性 s の対数はAR(1)過程に従う。ここでは、Flodén and Lindé (2001)によるPSIDの年次データを用いた推定結果を四半期変換して、 $\log(s') = 0.966 \log(s) + \varepsilon'$, $\varepsilon' \sim N(0, 0.017)$ とした。このAR(1)過程を、Rouwenhorst (1995)の方法を用いて、グリッド数 $N_s = 3$, $s_i \in \{s_L, s_M, s_H\}$ のマルコフ連鎖で近似した²¹。

政府は労働生産性が最も高い家計にのみ税金を課す²²。すなわち、 $T(s_i) = \tau \bar{\tau}(s_i)$ としたとき、

$$\mu^s(s_L) \bar{\tau}(s_L) = \mu^s(s_M) \bar{\tau}(s_M) = 0, \mu^s(s_H) \bar{\tau}(s_H) = 1$$

とおき、 τ については政府の予算制約式を満たすように計算した。

図2は、定常状態における家計の資産分布を労働生産性ごとに示したものである。労働生産性の低い家計 ($s = s_L$) の多くは資産がなく借入制約に直面している一方で、労働生産性の高い家計 ($s = s_H$) は資産も多い。経済全体における借入制約に直面している家計の割合は14.8%である。

²⁰ 対数線形化後のニューケインジアン・フィリップス曲線は、Calvo型の調整コストとRotemberg型の調整コストで同じ式となり、それぞれの調整コストのパラメータの間には一対一の関係がある。

²¹ 連載第5回で紹介したTauchen (1986)の方法は、慣性のパラメータが大きい値をとるときには誤差が大きくなる。ここでは $\rho = 0.966$ であるため、代わりに誤差の少ない近似としてRouwenhorst (1995)の方法を用いる。詳細についてはKopecky and Suen (2010)を参照。

²² Hagedorn et al. (2019)は、この定式化のもとで、金利低下に対して低生産性家計から高生産性家計への所得移転が起こっていることを指摘した。これは、金利低下による税支払いの減少が、資産からの金利収入の減少を上回るためである。高生産性家計は低生産性家計より低い限界消費性向を持つため、このような負の再分配効果 (redistribution effect) もまたフォワード・ガイダンスの効果を弱め得る。Hagedorn et al. (2019)はまた、税金を低生産性家計からも集めるとき、高生産性家計から低生産性家計への再分配を通じて、HANKモデルにおいてもフォワード・ガイダンスの効果は大きくなり得ることを示した。

また、モデルで計算される資産のジニ係数は 0.63 である²³。このような格差がモデルにおいても生じるのは、賃金のマイクロデータから推定された労働生産性の慣性が高いためである。先に述べたように、データに近い家計の資産と生産性に関する分布をモデルによる分析に取り入れることで、金融政策の波及過程にも影響を及ぼす可能性がある。次節では、移行過程の計算においてそれをみていこう。

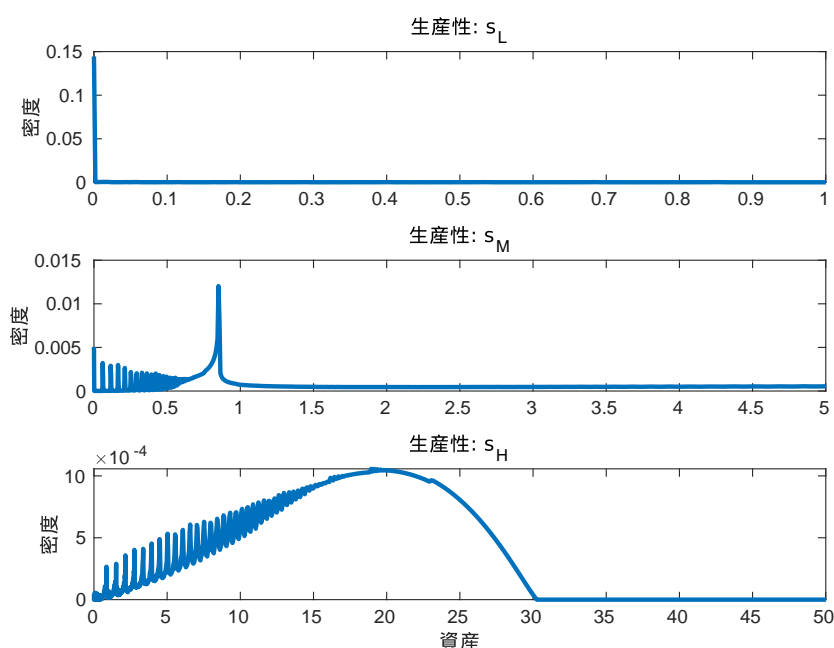


図 2: 生産性毎の資産分布

MATLAB Code

- Solve_SS.m、HH_opt_EGM.m、HH_dist.m、Rouwenhorst.m

3.4 移行過程の計算

所得の不確実性と不完備市場の仮定のもとで、家計の異質性はフォワード・ガイダンスの効果にどのような影響を与えるのだろうか。例えば、実質金利が将来のある時点 (例えば 20 期目) に一時

²³ 米国のデータでは、家計の約 1/3 が流動的な資産 (現金や預金など) がなく限界消費性向の高いその日暮らし家計であり、そのうち非流動的な資産 (持家や年金など) も持たない家計はその約 1/3 である (Kaplan, Violante, and Weidner, 2014)。Kaplan, Moll, and Violante (2018) は、流動的な資産と非流動的な資産の 2 種類の資産をモデル化することで、非流動的な資産を持つと同時に限界消費性向の高いその日暮らし家計が、金融政策の波及過程に重要であることを示した。また、ジニ係数は、PSID または SCF のマイクロデータを用いた推定では、0.77-0.78 である (Krueger, Mitman, and Perri, 2016)。

的に 50bps(=0.5 %) 低下し、その後すぐに元の水準に戻るということが現在 (0 期目) にわかっているとする。このとき、現在から将来にかけての総生産やインフレ率といったマクロ変数はどのように反応するだろうか。この問いに答えるためには、将来の外生変数の動きについて完全予見 (perfect foresight) の仮定のもとでモデルを解けばよい。

標準的な代表的家計のニューケインジアン・モデルでは、完全予見のもとでフォワード・ガイダンスは大きな効果を持つ。第 5 回で学んだ対数線形化後の消費のオイラー方程式から、現在の消費は将来の金利ギャップ (実質金利と自然利子率の差) の総和として書くことができる。

$$c_t = c_{t+1} - (r_t - r^*)$$

$$\Leftrightarrow c_t = - \sum_{i=0}^{\infty} (r_{t+i} - r^*)$$

すなわち、20 期目に金利ギャップがマイナスになることがわかっているならば、1~20 期目の消費に対して等しく押上げる効果がある。このことから、消費のオイラー方程式にみられるような異時点間の代替が、フォワード・ガイダンスの効果にとって重要であることがわかる。しかし、現実には異時点間の代替による金融政策の波及過程の働きは弱く、このような効果は観察されないかもしれない。ここでは、HANK モデルを用いて、家計の異質性が与える影響を定量化してみよう。

HANK モデルにおける移行過程の計算には、第 7 回の世代重複モデルで学んだ方法を用いることができる。以前は 2 つの異なる定常状態の間の移行過程を計算したが、ここでは外生変数の一時的な変化に伴う移行過程を計算する。

移行過程の計算は大きく分けて 2 つのステップからなる。まず、定常状態における均衡を計算する。次に、この定常状態をスタート地点およびゴール地点として、その間の外生変数の一時的な変化に伴う移行経路を導出する。計算期間には、すべての変数が定常状態へとスムーズに収束するのに十分な長さが必要となる²⁴。

ここでも、最終期間からの後ろ向き帰納法を用いることができる。各期の家計の最適化問題における金利などの外生変数を所与とする。移行過程の最終期である T 期における価値関数はすでに計算した定常状態における価値関数と一致するため、ここを起点に時間を遡って各期の政策関数を計算していく。すべての期間における政策関数を求めたら、今度は 1 期から順下りに分布を計算していく。分布をもとに、各期のマクロ変数を計算する。外生変数をアップデートし、以上の計算を繰り返す²⁵。

²⁴ シミュレーションの長さは $T = 250$ 期間として、 $T_0 = 20$ 期目に実質金利にマイナス 50bps のショックを与えた。

²⁵ ここで、第 7 回の世代重複モデルと異なるのは、均衡条件の 1 つであるニューケインジアン・フィリップス曲線に将来のインフレ率が含まれる点である。この場合、各期のマクロ変数は、現在だけではなく将来の均衡条件にも依存す

図3は、実質金利のパスを、20期(5年)目に一時的に50bps低下させ、それ以外では定常状態(年率2%)にあるように固定させたときの、消費(=総生産)、インフレ率、および名目金利のパスを描いたものである。代表的家計のモデルでは、消費のオイラー方程式が示唆するように、消費は1期目から20期目まで一様に上昇する。一方で、HANKモデルにおいては、その日暮らし家計の反応が鈍く、異時点間の消費の代替が十分でないために、消費の上昇は抑えられる。ここで、20期目以降に消費が落ち込むのは、金利低下による負の所得効果によるものである。この結果、1~20期目におけるインフレ率および名目金利の上昇も低く抑えられる。

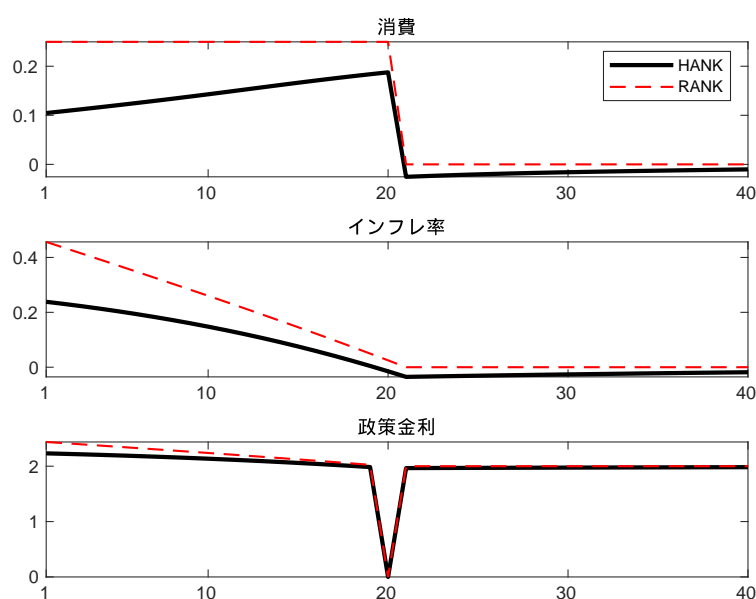


図3: 移行過程

4 おわりに

本連載は、経済学における数値計算の考え方の基礎から最先端の研究までを駆け足で講義してきた。数値計算はマクロ経済研究のフロンティアでは必須レベルのツールの1つとなっているものの、学部生や大学院でマクロ経済学を勉強し始めた人たちにとっては馴染みがないものだったかもしれない。連載初回でも強調したように、数値計算やプログラミングは「習うより慣れろ」の側面が強い。繰り返しになるが、ぜひ、コードを実際にダウンロードして、手を動かしながら色々と試してみてほしい。最後に、本連載にあたって、東京大学大学院経済学研究科修士課程の鈴木徳馬氏

る。このため、MNSは修正ニュートン法(modified Newton method)を用いて、各期のマクロ変数を計算し、外生変数をアップデートしている。詳しくはMNSあるいはJuillard et al. (1998)およびNakata (2017)を参照。

には GitHub 上に公開されたコードのチェックや Julia のコーディング、原稿の確認などさまざまな形でお世話になった。ここに感謝の意を記したい。

参考文献

- Calvo, Guillermo (1983) “Staggered Prices in a Utility-Maximizing Framework,” *Journal of Monetary Economics*, Vol. 12, No. 3, pp. 383-398.
- Del Negro, Marco, Marc Giannoni, and Christina Patterson (2015) “The Forward Guidance Puzzle,” Federal Reserve Bank of Minneapolis Staff Reports 574.
- Flodén, Martin and Jesper Lindé (2001) “Idiosyncratic Risk in the United States and Sweden: Is There a Role for Government Insurance?” *Review of Economic Dynamics*, Vol. 4, pp. 406-436.
- den Haan, Wouter (1997) “Solving Dynamic Models with Aggregate Shocks and Heterogeneous Agents,” *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 1, pp. 355-386.
- (2010) “Assessing the Accuracy of the Aggregate Law of Motion in Models with Heterogeneous Agents,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 34, pp. 79-99.
- Hagedorn, Marcus, Jinfeng Luo, Iouri Manovskii, and Kurt Mitman (2019) “Forward Guidance,” *Journal of Monetary Economics*, Vol. 102, No. C, pp. 1-23.
- Juillard, Michel, Douglas Laxton, Peter McAdam, and Hope Pioro (1998) “An Algorithm Competition: First-order Iterations versus Newton-based Techniques,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 22, No. 8-9, pp. 1291-1318.
- Kaplan, Greg, Giovanni L. Violante, and Justin Weidner (2014) “The Wealthy Hand-To-Mouth,” *Brooking Papers on Economic Activity*, Vol. Spring, pp. 77-138.
- Kaplan, Greg, Benjamin Moll, and Giovanni L. Violante (2018) “Monetary Policy According to HANK,” *American Economic Review*, Vol. 108, No. 3, pp. 697-743, Unpublished Manuscript.
- Kopecky, Karen .A. and Richard .M.H. Suen (2010) “Finite State Markov-Chain Approximations to Highly Persistent Processes,” *Review of Economic Dynamics*, Vol. 13, No. 3, pp. 701-714.
- Krueger, Dirk, Kurt Mitman, and Fabrizio Perri (2016) “Macroeconomics and Household Heterogeneity,” in Taylor, John B. and Harald Uhlig eds. *Handbook of Macroeconomics*, Vol.

- 2: Elsevier, pp. 843-921.
- Krueger, Dirk and Felix Kubler (2004) "Computing Equilibrium in OLG Models with Stochastic Production," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 28, pp. 1411-1436.
- Krusell, Per and Anthony A. Smith (1998) "Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy," *Journal of Political Economy*, Vol. 106, No. 5, pp. 867-896.
- McKay, Alisdair, Emi Nakamura, and Jón Steinsson (2016) "The Power of Forward Guidance Revisited," *American Economic Review*, Vol. 106, No. 10, pp. 3133-3158.
- Nakata, Taisuke (2017) "Optimal Government Spending at the Zero Lower Bound: A Non-Ricardian Analysis," *Review of Economic Dynamics*, Vol. 23, pp. 150-169.
- Rotemberg, Julio J. (1982) "Sticky Prices in the United States," *Journal of Political Economy*, Vol. 90, No. 6, pp. 1187-1211.
- Rouwenhorst, K. Greet (1995) "Asset Pricing Implications of Equilibrium Business Cycle Models," in Cooley, Thomas ed. *Frontiers of Business Cycle Research*, New Jersey: Princeton University Press, pp. 294-330.
- Tauchen, George (1986) "Finite State Markov-Chain Approximations to Univariate and Vector Autoregressions," *Economics Letters*, Vol. 20, No. 2, pp. 177-181.
- Young, Eric R. (2010) "Solving the Incomplete Markets Model with Aggregate Uncertainty using the Krusell-Smith Algorithm and Non-Stochastic Simulations," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 34, pp. 36-41.
- 宇南山卓・原亮太 (2015) 「日本における「裕福なその日暮らし」と消費刺激策」, , PRI Discussion Paper Series, No. 15 A-3.