計算量と漸化式の整理

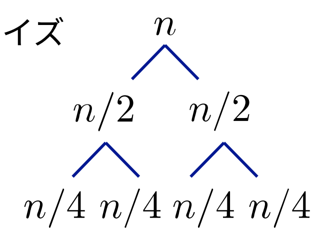
❶ Quicksort

O(n log n)

配列をピボットを基準に
左右に分割して
両方を再帰的に処理

$$T(n) = 2T(n/2) + \underbrace{cn}_{\text{Partition のコスト}}$$

サイズ



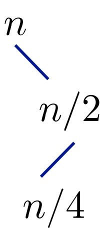
❷ Quickselect

O(n)

ピボットで分割したあと、
どちらか片方の部分配列しか
再帰しない（kがどちらにいるかに応じて）

$$T(n) = T(n/2) + \underbrace{cn}_{\text{Partition のコスト}}$$

サイズ



❸ Binary search

O(log n)

既にソート済みの配列の中で
目的の1個だけ探す

$$T(n) = T(n/2) + c$$

漸化式の解き方❶

$$\boxed{T(n) = 2T(n/2) + cn}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2(2T(n/4) + cn/2) + cn \\ &= 4T(n/4) + cn + cn \\ &= 4T(n/4) + 2cn \\ &= 4(2T(n/8) + c(n/4)) + 2cn \\ &= 8T(n/8) + 3cn \\ &\vdots \\ &= 2^k T(n/2^k) + kcn \end{aligned}$$

これを $\frac{n}{2^k} = 1$ となるまで繰り返すので
$k = \log_2 n$

$$T(n) = n \cdot T(1) + cn \log n = O(n \log n)$$

pivot が平均的に「中央寄り」になると、
再帰的に半分（約 n/2）を2つ処理になる

最初：n 個 check
次：n/2個 + n/2個 check
次：n/4個 + n/4個 + n/4個 + n/4個 check
：

各レベルの合計コストは毎回 O(n)
半分にする処理はlog n回まで

$$\underbrace{O(n) + O(n) + \cdots + O(n)}_{\log n} = O(n \log n)$$

漸化式の解き方❷

$$\boxed{T(n) = T(n/2) + cn}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n/2) + cn \\ &= (T(n/4) + cn/2) + cn \\ &= (T(n/8) + c(n/4)) + cn/2 + cn \\ &\vdots \\ &= T(n/2^k) + cn\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \end{aligned}$$

これを $\frac{n}{2^k} = 1$ となるまで繰り返すので
$k = \log_2 n$

$$T(n) = T(1) + cn\,(2(1 - 1/n)) = O(n)$$

pivot が平均的に「中央寄り」になると、
再帰的に半分（約 n/2）を1つ処理になる

最初：n 個 check
次：n/2個 check
次：n/4個 check
：

$$n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \cdots$$
$$= n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = 2n$$

この無限等比級数の和は **2n に収束**
→ すべて**合計しても O(n)** にしかならない

漸化式の解き方❸

$$\boxed{T(n) = T(n/2) + c}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n/2) + c \\ &= T(n/4) + c + c \\ &= T(n/8) + c + c + c \\ &\vdots \\ &= T(n/2^k) + kc \end{aligned}$$

これを $\frac{n}{2^k} = 1$ となるまで繰り返すので
$k = \log_2 n$

$$T(n) = T(1) + c\log n = O(\log n)$$

二分探索では「中央の要素を見て、
目的の値と比較」のみ

目的の値が小さければ「左半分」に、
大きければ「右半分」に絞る。

探索範囲が**毎回半分**になる

要素数 n の配列があったとき：
1回目で n → n/2 に
2回目で n/2 → n/4 に
3回目で n/4 → n/8 に
K回目で $n/2^{k-1}$ → $n/2^k$

これを $\frac{n}{2^k} = 1$ となるまで繰り返
すので $k = \log_2 n$

O(log n)

計算量と漸化式の整理(まとめ)

Quicksort

O(n log n)

配列をピボットを基準に
左右に分割して
両方を再帰的に処理

$$T(n) = 2T(n/2) + \underbrace{cn}_{\text{Partition のコスト}}$$

サイズ
n
$n/2$　$n/2$
$n/4$　$n/4$　$n/4$　$n/4$

Quickselect

O(n)

ピボットで分割したあと、
どちらか片方の部分配列しか
再帰しない（kがどちらにいるかに応じて）

$$T(n) = T(n/2) + \underbrace{cn}_{\text{Partition のコスト}}$$

サイズ
n
$n/2$
$n/4$

Binary search

O(log n)

既にソート済みの配列の中で
目的の1個だけ探す

$$T(n) = T(n/2) + c$$