

Riemann 幾何学とリッチフロー

tko919

目次

第 1 章	Riemann 幾何	2
1.1	Riemann 計量と接続	2
1.2	測地線と第一変分公式	3
1.3	第二変分公式と Jacobi 場	6
1.4	Rauch の比較定理	10

第 1 章

Riemann 幾何

1.1 Riemann 計量と接続

定義 1.1.1. M を n 次元可微分多様体とする。 M 上の Riemann 計量とは、各点 $p \in M$ の接ベクトル空間に対する内積 $\langle -, - \rangle_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ の族であり、 $\langle -, - \rangle: M \ni p \mapsto \langle -, - \rangle_p$ が C^∞ 級であるものを指す。組 $(M, \langle -, - \rangle)$ を Riemann 多様体という。

Euclid 空間ではベクトルの平行移動が自然に行えるが、一般の多様体上では移動したベクトルが接空間の外にはみ出してしまうことがある。そこで、異なる点の接空間を「つなげる」ことで形式的に平行移動を可能にする機構を作りたい。

定義 1.1.2. M を n 次元可微分多様体、 $\mathfrak{X}(M)$ を M 上のベクトル場全体とする。

M 上の Affine 接続ないし共変微分とは、写像 $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ であって、次の条件を満たすものである。($X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ とする)

- (1) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$
- (2) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$
- (3) $\nabla_XfY = (Xf)Y + f\nabla_XY$

この条件を満たす接続は無数に存在する。そこで Riemann 計量に対する良い性質を持った接続をひとつ採用したい。

定義 1.1.3. Affine 接続 ∇ が対称的とは、 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ について $\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y]$ を満たすものをいう。

定義 1.1.4. Riemann 多様体 $(M, \langle -, - \rangle)$ 上の Affine 接続 ∇ が計量と両立するとは、 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ について $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_XY, Z \rangle + \langle Y, \nabla_XZ \rangle$ を満たすものをいう。

接続 ∇ が計量と両立するとき、曲線 $\gamma(t)$ に沿った平行なベクトル場 $X(t), Y(t)$ に対して $\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t) \rangle = \langle \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}X(t), Y(t) \rangle + \langle X(t), \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}Y(t) \rangle = 0$ より $\langle X(t), Y(t) \rangle$ は定数になる。つまり、平行移動によって 2 つのベクトルの「角度」が保存されることを表現している。

定理 1.1.1. Riemann 多様体 $(M, \langle -, - \rangle)$ 上で対称的かつ計量と両立する Affine 接続 ∇ が一意に存在する。これを Levi-Civita 接続という。 □

1.2 測地線と第一変分公式

定義 1.2.1. $(M, \langle -, - \rangle)$ を連結な Riemann 多様体、 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ を区分的なめらかな曲線 (つまり、 $[a, b]$ の分割 $\{s_i\}$ が存在して各区間 $[s_i, s_{i+1}]$ 上 C^∞ 級な連続写像) とする。 γ の長さを $L(\gamma) := \sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} |\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s)| ds$ とする ($|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$)。 M 上の 2 点 p, q について $\rho(p, q) := \inf\{L(\gamma) : \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$ が定められ、距離の公理を満たす。 また γ のエネルギーを $E(\gamma) := \int_a^b |\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s)|^2 ds$ とする。 $E(p, q)$ も同様に定める。

Cauchy-Schwarz の不等式より $L(\gamma)^2 \leq |b - a|E(\gamma)$ が成り立ち、等号が成立するのは $|\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s)|$ が定数のときである。

端点 p, q を固定したまま γ を摂動して、エネルギー E が極小値をとる曲線を調べたい。そのために区分的滑らかな曲線の 1 パラメータ族 $\hat{\gamma}: [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \ni (s, u) \mapsto \hat{\gamma}_u(s) \in M$ をとり $\gamma = \hat{\gamma}_0, U(s) = \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}(s, 0)$ とおく。逆に U が与えられたとき、条件を満たす $\hat{\gamma}$ を構成することもできる。端点を固定しているので $U(a) = U(b) = 0$ に注意する。

ある U について $u \mapsto E(\hat{\gamma})$ の $u = 0$ による微分は $\hat{\gamma}$ の取り方に依存しない。よって $\dot{E}(U) := \frac{\partial E(\hat{\gamma})}{\partial u}|_{u=0}$ を定義でき、これは γ を U に沿って滑らかに変形したときの差分を表す。特に $E(p, q)$ を実現する γ は $\dot{E}(U) = 0$ を満たすと考えられる。

以降ではベクトル場 $d\hat{\gamma}(\frac{\partial}{\partial u})$ を $\frac{\partial}{\partial u}$ と略記する。 ∇ を Levi-Civita 接続とすると、 E の被積分関数の u による微分が

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left| \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right|^2 &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \quad (\because [\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial u}] = 0) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \end{aligned}$$

となり、これを積分すると

$$\frac{1}{2} \dot{E}(U) = \sum_i [\langle U, \dot{\gamma} \rangle]_{s_i}^{s_{i+1}} - \int_a^b \langle U, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \rangle ds \quad (1.1)$$

が得られる。これを 第一変分公式 と呼ぶ。

$\hat{\gamma}$ が滑らかなとき第一項が消え、全ての U に対して第一変分が 0 となるとときには Euler-Lagrange 方程式

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 \quad (1.2)$$

が成り立つ。この方程式を満たす γ を測地線という。

改めて γ を測地線としたとき、 $\frac{1}{2} \frac{d}{ds} |\dot{\gamma}|^2 = \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s} \gamma, \dot{\gamma} \rangle = 0$ より $|\dot{\gamma}|$ は定数。よって s は γ の弧長パラメータに比例する。また、(1.2) は Affine 変換に対して不変なので、 $s \mapsto |\dot{\gamma}|s$ に取り替えることで最初から弧長パラメータ表示を持つと仮定してよい。

(1.2) は 2 階の常微分方程式なので、初期値 $\gamma(0) = p \in M, \dot{\gamma}(0) = v \in T_p M$ が与えられると、Picard-Lindelöf の定理より $\exists \delta > 0, \exists! \gamma_v : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ s.t. (1.2)。この δ は $(p, v) \in TM$ に対して局所一様連続となるので、結局 $p \in M$ に対して $0 \in \exists U \subset T_p M$ s.t. $\delta > 1$ より 指数写像 $\exp_p : U \ni v \mapsto \gamma_v(1) \in M$ が定義できる。一般論からこれは C^∞ 級となる。

補題 1.2.1. $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ を 2 点 p, q を結ぶ区分的滑らかな曲線で、弧長に比例するパラメータを持つとする。もし $L(\gamma) = \rho(p, q)$ のとき、 γ は滑らかで (1.2) を満たす。このとき γ を最短測地線と呼ぶ。

証明. パラメータの仮定から $L(\gamma)^2 = aE(\gamma)$ より γ は E の最小値をとるので $\forall U, \dot{E}(U) = 0$ 。 γ に属する $[0, a]$ の分割 $\{s_i\}$ について、 s_i の近傍で 0 となる適切な U を選ぶことで (1.1) の第一項を消すことができ、 γ の smooth な点全体で (1.2) が成り立つ。有限集合は測度 0 なので特に (1.1) の第二項は無視できる。よって $\sum_i \langle U(s_i), \dot{\gamma}(s_i^+) - \dot{\gamma}(s_i^-) \rangle = 0$ より $\dot{\gamma}(s_i^+) = \dot{\gamma}(s_i^-)$ 。したがって γ は C^1 級であり、解の一意性から滑らかな曲線であることがわかる。□

逆関数定理から \exp_p は $0 \in T_p M$ の近傍 U で局所微分同相となる。 $\iota_p := \inf\{r > 0 : B(0; r) \subset U\} > 0$ を p の単射半径という。また $\iota(V) = \inf_{p \in V} \iota_p$ を V の単射半径と呼ぶが、これは 0 になることがある。 $r \leq \iota_p$ について \exp_p による $B(0; r) \subset T_p M$ は p の局所座標近傍を定める。これを正規座標と呼ぶ。

補題 1.2.2. 任意の p について $\iota(V) > 0$ なる近傍 $p \in V$ が存在する。

証明. $(p, 0) \in TM$ のある近傍 D が存在して $\exp : D \ni (q, v) \mapsto \exp_q(v) \in M \times M$ が定義される。これについて逆関数定理を使うことで所望の結論を得る。□

補題 1.2.3. (Gauss の補題) $p \in M, \delta < \iota_p, v, w \in B(0; \delta) \subset T_p M, q := \exp_p v \in M$ とすると、微分 $d_v \exp_p : T_v(T_p M) \cong T_p M \rightarrow T_q M$ は内積を保存する。つまり、 $\langle d_v \exp_p v, d_v \exp_p w \rangle_q = \langle v, w \rangle_p$ 。

証明. $\epsilon > 0$ を十分小さくとり $\varphi : [0, 1] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, (s, t) \mapsto \exp_p(s(v + tw))$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} d_v \exp_p(v) &= \frac{\partial}{\partial s} \exp_p((s+1)v)|_{s=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(1, 0) \\ d_v \exp_p(w) &= \frac{\partial}{\partial t} \exp_p(v + tw)|_{t=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(1, 0) \end{aligned}$$

より示したいことは $\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(1, 0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(1, 0) \rangle_q = \langle v, w \rangle_p$ と言い換えられる。

$s \mapsto \varphi(s, t)$ は測地線なので $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) = 0$ 。よって Levi-Civita 接続の性質から

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |v + tw|^2 = \langle v, w \rangle + t \langle w, w \rangle \end{aligned}$$

より $\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle(s, 0) = \langle v, w \rangle$ 。また $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \exp_p(0) = 0$ と併せて $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle(s, 0) = s \langle v, w \rangle$ が分かるので、 $s = 1$ を代入して題意を得る。□

命題 1.2.1. $p \in M, r_0 < \iota_p$ とし、 $\gamma : [0, 1] \rightarrow B(p; r_0) := \exp_p(B(0; r_0)), \gamma(0) = p$ は区分的滑らかな曲線で $q := \gamma(1)$ とすると、 $L(\gamma) \geq r$ 。等号が成り立つのは γ が測地線 (をパラメータ変換したもの) のときに限る。

証明. $\exists r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \eta : [0, 1] \rightarrow \{X \in T_p M : |X| = 1\}$ s.t. $\gamma(t) = \exp_p(r(t)\eta(t))$ より、 $\dot{\gamma}(t) = d_{\gamma(t)} \exp_p(\dot{r}(t)\eta(t)) + d_{\gamma(t)} \exp_p(r(t)\dot{\eta}(t))$ 。

ここで η が微分可能な t では $\frac{d}{dt} \langle \eta(t), \eta(t) \rangle = 2 \langle \dot{\eta}(t), \eta(t) \rangle = 0$ なので補題 1.2.3 より、上の $\dot{\gamma}(t)$ の分解は直交分解。よって

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}(t)| &\geq |d_{\gamma(t)} \exp_p(\dot{r}(t)\eta(t))| \\ &= |\dot{r}(t)| \cdot |d_{\gamma(t)} \exp_p(\eta(t))| = |\dot{r}(t)| \\ L(\gamma) &\geq \int_0^1 |\dot{r}(t)| dt \\ &\geq \left| \int_0^1 \dot{r}(t) dt \right| \\ &= r(1) - r(0) = \rho(p, q) \end{aligned}$$

等号が成り立つのは $\eta(t)$ が区分的定数かつ $\dot{r} \geq 0$ のときだが、 $\eta(t)$ が定数のところでは正規化して $\dot{r} = 1$ を仮定してよいので、結局 η は定数関数にできる。このとき γ は測地線パラメータ変換で得られる。 \square

補題 1.2.4. $r_0 < \iota_p$ とし $p, q \in M$ を $\rho(p, q)$ とすると $\exists q' \in \partial B(p; r_0)$ s.t. $\rho(p, q) = \rho(p, q') + r_0$ 。

証明. p, q を結ぶ曲線の族 $\{\gamma_i\}$ で $L(\gamma_i) \rightarrow \rho(p, q)$ なるものを取り、 $\partial B(p; r_0)$ との交点を q_i とするとコンパクト性から $q_i \rightarrow \exists q'$ 。距離の公理からこの q' は条件を満たす。 \square

命題 1.2.2. (M, g) が完備のとき、 $v \in T_p M$ を初期値とする (1.2) の解は $[0, \infty)$ 上に延長できる。つまり \exp_p は $T_p M$ 全体で定義される。

証明. 解の存在区間の上限を A としたとき、 $A < \infty$ を仮定して矛盾を言えばよい。 ρ の定義より $\rho(\gamma_v(s), \gamma_v(t)) \leq |s - t| \cdot |v|$ 。 $s \uparrow A$ とすると $\gamma_v(s)$ は Cauchy 列なので、完備性から $\exists q = \lim_{s \uparrow A} \gamma_v(s)$ 。ここで補題 1.2.2 を使うと測地線が $[0, A + \delta)$ まで延長できるので仮定に矛盾する。 \square

定理 1.2.1. (Hopf-Rinow の定理) (M, g) が完備のとき、 $\forall p, q \in M$ について p, q を結ぶ最短測地線が存在する。

証明. $r_0 < \iota_p$ として、 $\rho(p, q) > r_0$ を仮定してよい。補題 1.2.4 で得られる q' をとると命題 1.2.1 から $\exists v \in T_p M, q' = \exp_p(r_0 v)$ 。また命題 1.2.2 より $\gamma(s) = \exp_p(sv)$ は $[0, \infty)$ 上で定義される。

$K = \{s \in [0, \infty) : L(\gamma|_{[0, s]}) + \rho(\gamma(s), q) = \rho(p, q)\}$ とおくと、 $s_0 \in K$ のとき $L(\gamma|_{[0, s_0]}) = \rho(p, q) - \rho(\gamma(s_0), q) \leq \rho(p, \gamma(s_0))$ より $\gamma|_{[0, s_0]}$ は最短測地線。 K はコンパクトなので $\bar{s} := \max K \in K$ であり $q_2 = \gamma(\bar{s})$ がとれるので、 $q_2 = q$ を示せばよい。

そうでないとき、 $r_1 = \min(\rho(q_2, q)/2, \iota_{q_2}) > 0$ とおくと、補題 1.2.4 より $\exists q_3 \in \partial B(q_2, r_1)$ s.t. $\rho(q_2, q_3) + \rho(q_3, q) = \rho(q_2, q)$ 。三角不等式より

$$\begin{aligned} \rho(p, q_2) + \rho(q_2, q_3) &= \rho(p, q_2) + \rho(q_2, q) - \rho(q_3, q) \\ &= \rho(p, q) - \rho(q_3, q) \leq \rho(p, q_3) \end{aligned}$$

より $\rho(p, q_2) + \rho(q_2, q_3) = \rho(p, q_3)$ 。よって、常微分方程式の解の一意性から q_2, q_3 を結ぶ最短測地線は γ と一致し、 $q_3 = \gamma(\bar{s} + r_1)$ より $L(\gamma|_{[0, \bar{s} + r_1]}) + \rho(q_3, q) = \rho(p, q_2) + \rho(q_2, q_3) + \rho(q_3, q) = \rho(p, q)$ 。これは

\bar{s} の最大性に矛盾する。 □

Riemann 多様体に局所的な完備性を仮定しても、同様の結論が得られる。

定義 1.2.2. Riemann 多様体 (M, g) と 1 点 $p \in M$ の組 (M, g, p) を 基点つき Riemann 多様体という。

定義 1.2.3. $D > 0$ とする。 $\forall l < D$ について基点つき Riemann 多様体 (M, g, p) の閉測地球 $\overline{B(p; l)}$ がコンパクトのとき、D-完備という。

定理 1.2.2. D-完備な基点つき Riemann 多様体 (M, g, p) について $\exp_p : B(0; D) \rightarrow M$ が定義され、 $\rho(p, q) < D$ なる $p, q \in M$ を結ぶ最短測地線が存在する。 □

1.3 第二変分公式と Jacobi 場

エネルギー汎関数 E が極値をとる曲線を測地線と定義したが、 E が極小値をとるならば 2 階微分 $\ddot{E}(U) = \frac{\partial^2 E}{\partial u^2}|_{u=0}$ は非負となるだろう。

$\gamma : [0, a] \rightarrow M$ を測地線とし $\hat{\gamma}, U$ をその変分・変分ベクトルとすると、被積分関数の u による 2 階微分は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^2 \left| \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right|^2 &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial u} \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle - \underbrace{\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle}_{0 \ (u=0)} - \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \right) - \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \end{aligned}$$

第三項について曲率テンソルの定義から

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\gamma(U) &:= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} + R \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \end{aligned}$$

が成り立ち、これを Jacobi 作用素という。これを積分すると第二変分公式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ddot{E}(U) &= [\langle \nabla_U U, \dot{\gamma} \rangle + \langle U, \nabla_U \dot{\gamma} \rangle]_0^a - \int_0^a \langle U, \mathcal{J}_\gamma U \rangle ds \\ &= [\langle \nabla_U U, \dot{\gamma} \rangle]_0^a + \int_0^a (|\nabla_{\dot{\gamma}} U|^2 - \langle U, R(U, \dot{\gamma}) \dot{\gamma} \rangle) ds \end{aligned}$$

を得る。

\mathcal{V}_s を $\gamma|_{[0, s]}$ に沿った区分的滑らかなベクトル場全体の集合、 $\mathcal{V}_s^0 = \{X \in \mathcal{V}_s : X(0) = X(s) = 0\}$ とする (特に $\mathcal{V} := \mathcal{V}_a, \mathcal{V}^0 := \mathcal{V}_a^0$)。第二変分公式の第二項について、 $U, V \in \mathcal{V}$ として

$$\begin{aligned} I(U, V) &:= \int_0^a (\langle \nabla_{\dot{\gamma}} U, \nabla_{\dot{\gamma}} V \rangle - \langle R(U, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, V \rangle) ds \\ &= [\langle \nabla_{\dot{\gamma}} U, V \rangle]_0^a - \int_0^a \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} U + R(U, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, V \rangle ds \end{aligned}$$

を指数形式という。 $\forall X \in \mathcal{V}^0, I(X, X) \geq 0$ のとき I を半正定値であるといい、さらに $0 \neq \forall X \in \mathcal{V}^0, I(X, X) > 0$ のとき I を正定値であるという。 $\hat{\gamma}_u(s) = \exp_{\gamma(s)} uX(s)$ を考えることで、 γ が最短ならば I が半正定値であることが従う。

$\{e_i\}$ を $T_p M$ の正規直交基底として、

$$\text{Rc}(X, Y) := \sum_i \langle R(X, e_i)e_i, Y \rangle = \text{tr}[Z \mapsto R(Z, X)Y]$$

で定まる TM の対称双線形形式を Ricci 曲率といい、 $R(p) = \sum_i \text{Rc}(e_i, e_i)$ で定まる値を Scalar 曲率という。

定理 1.3.1. (Myers の定理) $\lambda > 0, D > \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ とする。 D -完備な n 次元 Riemann 多様体 (M, g) について $\text{Rc} \geq (n-1)\lambda$ が成り立てば、 M はコンパクトで $\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$

証明. 2 点 $p, q \in M$ をとり $\rho(p, q) = l < D$ とする。定理 1.2.1 より最短測地線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ が存在する。 $\{e_i\}_{i=1}^n$ ($e_1 = \dot{\gamma}/l$) を γ に沿った平行なベクトル場で、各点の接空間の正規直交基底を成すとする。そして $U_i = \sin(\pi s)e_i$ とおくと、 U_i は全域で滑らかなことに注意して

$$\begin{aligned} I(U_i, U_i) &= - \int_0^1 \langle U_i, \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} U_i + R(U_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma} \rangle ds \\ &= - \int_0^1 \frac{\partial^2 \sin(\pi s)}{\partial s^2} + l^2 \sin^2(\pi s) \langle R(e_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, e_i \rangle ds \\ &= \int_0^1 \sin^2(\pi s) (\pi^2 - l^2 \langle R(e_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, e_i \rangle) ds \\ \sum_{i=2}^n I(U_i, U_i) &= \int_0^1 \sin^2(\pi s) ((n-1)\pi^2 - l^2 \text{Rc}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})) ds \end{aligned}$$

ここで $l > \pi/\sqrt{\lambda}$ とすると右辺は負になるので、 $\exists U_i, I(U_i, U_i) < 0$ 。よって I は半正定値でないので γ の最短性に矛盾する。定理 1.2.1 から $M = \exp_p(\overline{B(0; \pi/\sqrt{\lambda})})$ より M はコンパクト。 \square

定義 1.3.1. γ に沿ったベクトル場 V が

$$\mathcal{J}_{\gamma} V = \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} V + R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0 \quad (1.3)$$

を満たすとき、 V を Jacobi 場という。1.3 は 2 階の常微分方程式なので、基点 $p = \gamma(0)$ での初期値 $V(0), \nabla_{\dot{\gamma}} V(0) \in T_p M$ が与えられたとき、条件を満たす Jacobi 場が一意的にとれる。よって、Jacobi 場全体は $2n$ 次元のベクトル空間をなす。

補題 1.3.1. V を γ に沿った Jacobi 場とする。 $\langle V, \dot{\gamma} \rangle = 0$ と $\langle V(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = \langle \nabla_{\dot{\gamma}} V(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = 0$ は同値 (このような V を直交 Jacobi 場という)。

証明. $\frac{d^2}{dt^2} \langle V, \dot{\gamma} \rangle = \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} V, \dot{\gamma} \rangle = - \langle R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$ より $\langle V, \dot{\gamma} \rangle = ct + d$ ($c, d \in \mathbb{R}$) と書ける。 $U = V - \frac{ct+d}{|\dot{\gamma}|^2} \dot{\gamma}$ とおくと $\langle U, \dot{\gamma} \rangle = 0$ より U は直交 Jacobi 場となる。このとき $\langle V(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = d, \langle \nabla_{\dot{\gamma}} V(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = c$ より題意を得る。 \square

例 1.3.1. $\gamma(s, u)$ を測地線の 1 パラメータ族とすると $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \dot{\gamma}$ 。よって Jacobi 作用素の定義から $U = \frac{\partial \gamma}{\partial u}|_{u=0}$ 。特に $\gamma(s, t) = \exp_p(s(X + uY))$ のとき $U = d_{sX} \exp_p(sY)$ であり、初期値は $U(0) = 0, \nabla_{\dot{\gamma}} U(0) = Y$ なので $U(0) = 0$ なる Jacobi 場は全てこの形になる。

補題 1.3.2. 測地線 $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ の指数形式が半正定値で $U \in \mathcal{V}^0, I(U, U) = 0$ ならば、 U は Jacobi 場。

証明. $\forall V \in \mathcal{V}^0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ について $I(U + \alpha V, U + \alpha V) = 2\alpha I(U, V) + \alpha^2 I(V, V) \geq 0$ より $I(U, V) = 0$ (そうでないなら、 α を適切に設定して左辺を負にすることが出来る)。よって、

$$0 = I(U, V) = \sum_i \langle \nabla_{\dot{\gamma}} U(s_i^-) - \nabla_{\dot{\gamma}} U(s_i^+), V \rangle - \int_0^a \langle \mathcal{J}_{\gamma} U, V \rangle ds$$

が成り立ち、 V は任意なので $\mathcal{J}_{\gamma} U = 0$ が従う。 \square

補題 1.3.3. (指数定理) 測地線 $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ の指数形式が半正定値とする。 γ に沿った Jacobi 場 Y と $V \in \mathcal{V}$ が $Y(0) = V(0), Y(a) = V(a)$ を満たすとき、 $I(Y, Y) \leq I(V, V)$ が成り立つ。等号が成立する条件は V が Jacobi 場であるときのみ。

証明. 指数形式の定義より $I(Y, Y - V) = 0$ なので

$$\begin{aligned} 0 &\leq I(Y - V, Y - V) \\ &= I(-Y - V, Y - V) + 2I(Y, Y - V) \\ &= I(V, V) - I(Y, Y) \end{aligned}$$

等号条件は前の補題と Jacobi 場の線形性から成り立つ。 \square

定義 1.3.2. 測地線 γ 上の相異なる 2 点 $p = \gamma(0), q = \gamma(s_1)$ に対して $V(0) = V(s_1) = 0$ なる γ 上の 0 でない Jacobi 場が存在するとき、 p, q は γ に沿って 共役 であるという。例 1.3.1 より γ_X に沿って p と $q = \exp_p(X)$ が共役なことから X が \exp_p の臨界点であることは同値。

命題 1.3.1. $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ を測地線とする。

- (1) γ 上 $p = \gamma(0)$ と共役な点が存在しない $\iff I$ が正定値
- (2) γ 上 $p = \gamma(0)$ と共役な $q = \gamma(a)$ でない点が存在しない $\iff I$ が半正定値

証明. 必要性を示す。 $q_1 = \gamma(s_1)$ とし、 V を γ 上の Jacobi 場で $V(p) = V(q_1) = 0$ を満たすとする。このとき、 $U(s) = \begin{cases} V(s) & (s \in [0, s_1]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$ は γ 上に区分的滑らかなベクトル場であり $I(U, U) = 0$ を得る。 I が正定値ならば $V \equiv 0$ である。半正定値ならば補題 1.3.2 より U は Jacobi 場だが、 $s_1 \neq a$ のとき U は a の近傍で恒等的に 0 なので $U(a) = \nabla_{\dot{\gamma}} U(a) = 0$ 。初期値を満たす Jacobi 場の一意性より $V \equiv 0$ を得る。

十分性を示す。「 I が半正定値でないなら端点でない p と共役な点が存在する」ことを示せばよい。(・: 特に γ 上 p と共役な点が存在しないときも I は半正定値なので、 $V \in \mathcal{V}^0, I(V, V) = 0$ について補題 1.3.2 より V は Jacobi 場。 $V(0) = V(a) = 0$ と仮定から $V \equiv 0$ が従い I は正定値となる) $\gamma_s := \gamma|_{[0, s]}$ に対し $I_s := I_{\gamma_s}$ が半正定値となる s の上限を s_1 とおく。補題 1.2.2、命題 1.2.1 より $s_1 > 0$ であり、 I の連続性から I_{s_1} も半正定値。 $s_1 < a$ ならば $p, \gamma(s_1)$ が共役であることを言いたい。

再び補題 1.2.2 より $0 < \forall \epsilon < \delta$ について $\sigma_{\epsilon} = \gamma|_{[s_1 - \delta, s_1 + \epsilon]}$ が最短となる $\delta > 0$ が存在する。このとき $I_{s_1 + \epsilon}$ は半正定値でないので、 $\exists X_{\epsilon} \in \mathcal{V}_{s_1 + \epsilon}^0, I_{s_1 + \epsilon}(X_{\epsilon}, X_{\epsilon}) < 0$ 。 $s_1 - \delta$ の近傍での変形によって $|X_{\epsilon}(s_1 - \delta)| = 1$

を仮定してよい。例 1.3.1 より $U^-(0) = 0, U^-(s_1 - \delta) = X_\epsilon(s_1 - \delta)$ なる $\gamma_{s_1 - \delta}$ 上の Jacobi 場が存在し、補題 1.3.3 より $I_{s_1 - \delta}(U^-, U^-) \leq I_{s_1 - \delta}(X_\epsilon, X_\epsilon)$ 。同様に $U^+(s_1 + \epsilon) = 0, U^+(s_1 - \delta) = X_\epsilon(s_1 - \delta)$ なる σ_ϵ 上の Jacobi 場をとると $I_{\sigma_\epsilon}(U^+, U^+) \leq I_{\sigma_\epsilon}(X_\epsilon, X_\epsilon)$ が分かる。

U^-, U^+ を $s_1 - \delta$ で接続したベクトル場を $V_\epsilon \in \mathcal{V}_{s_1 + \epsilon}^0$ とすると、辺々足して $I_{s_1 + \epsilon}(V_\epsilon, V_\epsilon) \leq I_{s_1 + \epsilon}(X_\epsilon, X_\epsilon) < 0$ 。 $\epsilon \downarrow 0$ なる列を適切に選び U^-, U^+ を収束させると、 $|V_\epsilon(s_1 - \delta)| = 1$ より V_ϵ は 0 でないベクトル場 $V \in \mathcal{V}_{s_1}^0$ に収束する。これは $I_{s_1}(V, V) \leq 0$ を満たすが、 I_{s_1} は半正定値なので 0 に等しく、補題 1.3.2 より V は Jacobi 場。よって $p, \gamma(s_1)$ は共役。 \square

補題 1.3.4. D -完備な Riemann 多様体 (M, g) 上の 2 点 $p, q = \exp_p v$ 間の最短測地線 $\gamma : s \mapsto \exp_p sv$ が $|v| < D$ であり、 p, q が γ 上共役でないとする。このとき

- (1) $v \in T_p M$ の近傍 U が存在し、 $w \in U$ ならば測地線 $s \mapsto \exp_p sw$ は $[0, 1]$ 上最短。
- (2) p, q を結ぶ最短測地線は γ のみ。

証明. p, q は共役でないので \exp_p は v で正則。よって逆関数定理より v の近傍 U と q の近傍 V の微分同相を導く。条件 (1) が成立するとき $\epsilon > 0$ が存在して γ は $[0, 1 + \epsilon]$ まで延長できるので、常微分方程式の一意性から (2) がわかる。

逆に (1) が成り立たないとき、 γ に収束し $[0, 1]$ 上最短でない測地線の列 $\{\gamma_i\}$ がとれる。 $p, q_i = \gamma_i(1)$ を結ぶ最短測地線を σ_i とおくと、 $q_i \in V$ を仮定してよいので $w_i := \dot{\sigma}_i(0) \notin U$ となる必要がある。このとき $w_i \rightarrow w \in \overline{B(0; D)} \setminus U$ となるように列を取り直すと、 $\sigma_i \rightarrow (s \mapsto \exp_p(sw)) \neq \gamma$ より (2) も不適。 \square

定義 1.3.3. $v \in S_p M$ について $\text{cut}(v) := \sup\{s_0 \in [0, D) : [0, s_0] \ni s \mapsto \exp_p(sv) \text{ が最短} \}$ とおく。 $q = \exp_p(\text{cut}(v)v)$ を p の切片と呼ぶ。命題 1.2.1 よりこれは正であり、特に (M, g) が完備なら $\text{cut}(v) = \infty$ になり得る。このとき $s \mapsto \exp_p(sv)$ はどの有界区間に制限しても最短になる。このような測地線を半直線と呼ぶ。

補題 1.3.5. (M, g) が完備 Riemann 多様体のとき、 (M, g) がコンパクト $\iff p$ を始点とする半直線が存在しない。

証明. コンパクトならば有界なので十分性は明らか。逆に非コンパクトのとき $\rho(p, q_i) \rightarrow \infty$ なる点列を取り、 γ_i を p, q_i を結ぶ弧長パラメータ表示を持つ最短測地線とする。このとき (M, g) の完備性と $S_p M$ のコンパクト性から γ_i が $[0, \infty)$ 上の測地線 γ に収束するようにでき、これは半直線となる。 \square

系 1.3.1. $s_0 < \text{cut}(v)$ に対して $p, q = \exp_p(s_0 v)$ を結ぶ最短測地線は一意で、 q の近傍で $\rho(p, -)$ は滑らか。

証明. 補題 1.3.4 と常微分方程式の一意性から従う。 \square

系 1.3.2. q が p の切片 $\iff p, q$ を結ぶ最短測地線上で p, q が共役、または p, q を結ぶ最短測地線が複数存在する。

証明. 命題 1.3.1、補題 1.3.4 と常微分方程式の一意性から従う。 \square

補題 1.3.6. $S_p M \ni v \mapsto \text{cut}(v)$ は連続。

証明. $v_i \rightarrow v$ とする。最短測地線の収束性から $\limsup_{i \rightarrow \infty} \text{cut}(v_i) \leq \text{cut}(v)$ 。一方、系 1.3.1 より $l < \text{cut}(v)$ について $\gamma : [0, l] \rightarrow M, s \mapsto \exp_p(sv)$ は線分で前の系から端点は共役でない。したがって補題 1.3.4 より

$\gamma_i : s \mapsto \exp_p(sv)$ も $[0, l]$ 上で最短測地線なので $\liminf_{i \rightarrow \infty} \text{cut}(v_i) \geq \text{cut}(v)$ 。 \square

1.4 Rauch の比較定理

$(M, g), (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ を m 次元 Riemann 多様体、 $\gamma : [0, a] \rightarrow M, \widetilde{\gamma} : [0, a] \rightarrow \widetilde{M}$ を $\gamma(0) = p, \widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{p}$ なる正規測地線とする。 $t \in [0, a]$ について $K^-(t) = \min\{K(\Pi_\gamma) : \dot{\gamma}(t) \in \Pi_\gamma\}, \widetilde{K}^+(t) = \min\{\widetilde{K}(\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\gamma}}) : \dot{\widetilde{\gamma}}(t) \in \widetilde{\Pi}_{\widetilde{\gamma}}\}$ とおく (ここで K, \widetilde{K} は断面曲率)。

補題 1.4.1. X, \widetilde{X} を $\gamma, \widetilde{\gamma}$ に沿った直交 Jacobi 場とし、

- (1) $X(0) = \widetilde{X}(0) = 0$
- (2) $|X(a)| = |\widetilde{X}(a)|$

さらに定理の (4), (5) を満たすとき、 $I(X, X) \leq I(\widetilde{X}, \widetilde{X})$ が成り立つ。

証明. $\{e_i(t)\}, \{\widetilde{e}_i(t)\}$ を $\gamma, \widetilde{\gamma}$ に沿った正規直交基底とし、 $e_1 = \dot{\gamma}, \widetilde{e}_1 = \dot{\widetilde{\gamma}}, e_2(a) = X(a)/|X(a)|, \widetilde{e}_2(a) = \widetilde{X}(a)/|\widetilde{X}(a)|$ を満たすとする。ここで、(4) より $|X(a)| = |\widetilde{X}(a)| = \alpha \neq 0$ に注意する。

X, \widetilde{X} の $\{e_i(t)\}, \{\widetilde{e}_i(t)\}$ による成分表示を $\{X^i(t)\}, \{\widetilde{X}^i(t)\}$ とおくと、条件から

- (1) $\forall i, X^i(0) = \widetilde{X}^i(0) = 0$
- (2) $X^2(a) = \widetilde{X}^2(a) = \alpha, \forall i \neq 2, X^i(a) = \widetilde{X}^i(a) = 0$
- (3) $\forall t \in [0, a], X^1(t) = \widetilde{X}^1(t) = 0$

が成り立つ。 $Y := \sum_i \widetilde{X}^i(t)e_i(t)$ とおくと $Y(0) = 0, Y(a) = X(a)$ であり、 X は Jacobi 場なので補題 1.3.3 より $I(X, X) \leq I(Y, Y)$ 。一方、(5) を用いて $I(Y, Y) \leq I(\widetilde{X}, \widetilde{X})$ が分かるので、併せて題意を得る。 \square

定理 1.4.1. (Rauch の比較定理) X, \widetilde{X} を $\gamma, \widetilde{\gamma}$ の Jacobi 場とし、次の条件を満たすと仮定する。

- (1) $X(0) = \widetilde{X}(0) = 0$
- (2) $|\nabla_{\dot{\gamma}} X(0)| = |\widetilde{\nabla}_{\dot{\widetilde{\gamma}}} \widetilde{X}(0)|$
- (3) $\langle \dot{\gamma}(0), \nabla_{\dot{\gamma}} X(0) \rangle = \langle \dot{\widetilde{\gamma}}(0), \widetilde{\nabla}_{\dot{\widetilde{\gamma}}} \widetilde{X}(0) \rangle$
- (4) γ には $[0, a]$ 上共役な点対が存在しない
- (5) $\forall t \in [0, a], \widetilde{K}^+(t) \leq K^-(t)$

このとき、 $\widetilde{\gamma}$ には $[0, a]$ 上共役な点対が存在せず、 $\forall t \in [0, a], |X(t)| \leq |\widetilde{X}(t)|$ 。

証明. (1), (3) より初期値の接線成分が一致することから、一般性を失わず X, \widetilde{X} は直交 Jacobi 場としてよい (補題 1.3.1 を参照)。

$u(t) = |X(t)|^2, \widetilde{u}(t) = |\widetilde{X}(t)|^2$ とおくと、 $\widetilde{u}(t)/u(t)$ は $(0, a)$ 上 well-defined であり、L'Hospital の定理

より

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{u}(t)}{u(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{\ddot{u}}(t)}{\ddot{u}(t)} \\ &= \frac{|\nabla_{\dot{\gamma}} X(0)|^2}{|\nabla_{\dot{\gamma}} \tilde{X}(0)|^2} = 1\end{aligned}$$

よって $|X| \leq |\tilde{X}|$ を示すためには $\frac{d}{dt} \frac{\tilde{u}(t)}{u(t)} \geq 0 \iff \dot{\tilde{u}}(t)u(t) - \tilde{u}(t)\dot{u}(t) \geq 0$ が分かればよい。

(4) より $(0, a]$ 上 $u(t) > 0$ が成り立つ。 $c = \sup\{t: \tilde{u}(t) > 0\} \leq a$ とおき、 $b \in (0, c)$ について $X_b(t) = \frac{X(t)}{|X(b)|}$, $\tilde{X}_b(t) = \frac{\tilde{X}(t)}{|\tilde{X}(b)|}$ とすると、 $[0, b]$ 上 X_b, \tilde{X}_b は前補題の条件を満たすので $I(X_b, X_b) \leq I(\tilde{X}_b, \tilde{X}_b)$ 。指数形式の定義 (に部分積分を施した形) から $I(X_b, X_b) = \langle \nabla_{\dot{\gamma}} X_b(b), X_b(b) \rangle \leq I(\tilde{X}_b, \tilde{X}_b) = \langle \tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} \tilde{X}_b(b), \tilde{X}_b(b) \rangle$ となるので、 $\forall b \in (0, c)$ で

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{\dot{u}(b)}{u(b)} &= \frac{\langle \nabla_{\dot{\gamma}} X_b(b), X_b(b) \rangle}{\langle X(b), X(b) \rangle} \\ &\leq \frac{\langle \tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} \tilde{X}_b(b), \tilde{X}_b(b) \rangle}{\langle \tilde{X}(b), \tilde{X}(b) \rangle} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\dot{\tilde{u}}(b)}{\tilde{u}(b)}\end{aligned}$$

が成り立つ。これを移項して欲しかった不等式を得る。

もし $c < a$ ならば連続性から $|\tilde{X}(c)| \geq |X(c)| > 0$ となり c の選び方に矛盾。したがって $c = a$ より $\tilde{\gamma}$ は $[0, a]$ 上共役な点対が存在しない。 \square

この定理は定曲率を持つ単連結 Riemann 多様体をモデルとし、考察している Riemann 多様体 (M, g) の曲率と大小関係を持つという仮定のもと調べる、という形で応用されることが多い。