

Cheeger の有限性定理

1 目標

このレポートでは、Cheeger の有限性定理の証明の概略について述べる。

定理 1.1. (Cheeger) $n \geq 2, K, D, v > 0$ について、「 $\text{Diam} \leq D, \text{Vol} \geq v, |\text{sec}| \leq K$ なる n 次元閉 Riemann 多様体の族」は有限個の微分同相類で代表される。

2 準備

証明を記すうえで前提となる事実を列挙する。

- (1) Ricci 曲率 $\text{Rc}(v, w) = \text{Tr}(x \mapsto R(x, v)w) = \sum_i g(R(e_i, w)e_i)$ ($\{e_i\}$: 直交基底)
- (2) 断面曲率 $\text{sec}(v, w) = \frac{g(R(w, v)v, w)}{g(v \wedge w, v \wedge w)}$
- (3) 単射半径 $\iota : \exp_p : T_p M \rightarrow M$ が微分同相となる半径の上界

定理 2.1. (Klingenberg's estimate) (M, g) を完備 Riemann 多様体とし $\text{sec} \leq C(\text{const.})$ とする。このとき、 $\iota_M \geq \frac{\pi}{\sqrt{C}}$ となるか、最短の閉測地線 γ が存在して $\iota_M = \frac{L(\gamma)}{2}$ 。

定理 2.2. (Ambrose) $(M, g), (N, h)$ を Riemann 多様体、 $f : M \rightarrow N$ を局所等長写像とする。 (M, g) が完備なら f は滑らかな被覆写像である。

定理 2.3. (Bishop-Gromov) (M, g) を完備 Riemann 多様体とし $\text{Rc} \leq (n-1)k$ とする。このとき、 $r \mapsto \frac{\text{Vol}B(p, r)}{v(n, k, r)}$ は単調非減少。ここで $v(n, k, r)$ は断面曲率が k で一定の空間上で半径 r の閉球の体積。

定理 2.4. (分裂定理) 完備 Riemann 多様体 (M, g) が直線を含み $\text{Ric} \geq 0$ を満たすとする。このとき、ある Riemann 多様体 (H, g_0) が存在して (M, g) は $(H \times \mathbb{R}, g_0 + dt^2)$ と等長同型 (M が分裂するという)。

3 Riemann 多様体の族上のノルム

基点つき Riemann 多様体 (M, g, p) 上の $C^{m, \alpha}$ -norm が $\|(M, g, p)\|_{C^{m, \alpha}, r} \leq Q$ であることを、次の条件を満たす $C^{m+1, \alpha}$ -class chart $\varphi : B(0, r) \rightarrow U \ni p$ が存在することと定義する。

- (1) $|D\varphi|, |D\varphi^{-1}| \leq \exp(Q)$
- (2) 任意の多重指数 $|I| \leq m$ について $r^{|I|+\alpha} \|\partial^I g_{kl}\|_\alpha \leq Q$

上の norm を入れた位相を pointed- $C^{m, \alpha}$ 位相と呼ぶ。Riemann 多様体の族自体には各点の sup を取ったものがそのままノルムになり、単に $C^{m, \alpha}$ 位相と呼ぶ。

Ascoli-Arzelà の定理に対応する結果が次である。

定理 3.1. $Q > 0, n \geq 2, m \geq 0, \alpha \in (0, 1], r > 0$ とする。「基点つき n 次元 Riemann 多様体 (M, g, p) で $\|(M, g, p)\|_{C^{m, \alpha}, r} \leq Q$ なるものの族」は pointed- $C^{1, \beta}$ ($\beta < \alpha$) 位相でコンパクト。□

系 3.1. 上の族の部分集合として、 $\text{diam} \leq D$ という制限をつけたものは $C^{m, \beta}$ 位相でコンパクトであり、高々有限

個の微分同相類を含む。

証明. 直径とノルムの条件から定数個の chart で被覆でき、上の定理と合わせて前半が従う。

また、座標変換が C^1 ノルムで十分近い二つの Riemann 多様体は微分同相であること [2, Theorem 2.1.6] を用いると、任意の $C^{m,\beta}$ 位相でのコンパクト性は微分同相類の有限性を意味する。□

例 3.1. (M, g) を完備平坦な Riemann 多様体とすると $\forall r \in \iota(M, g), \|(M, g)\|_{C^{m,\alpha},r} = 0$ 。特に $\forall r > 0, \|(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})\|_{C^{m,\alpha},r} = 0$ だが、実は任意の m, α, r で等式が成り立つことと Euclid 空間と等長同型であることが後で示される。

4 調和座標と調和ノルム

Riemann 多様体上の調和座標 $(U, \{x_i\})$ とは、 $\Delta x_i = 0$ が成り立つことを指す。

命題 4.1. Riemann 多様体 (M, g) 上の各点 p について調和座標系 $p \in (U, \{x_i\})$ が存在する。

証明. まず適当な chart $(U, \{y_i\})$ を取り $y(p) = 0$ とすると、座標変換 $y \mapsto x$ が満たすべき条件は

$$\Delta x_i = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} \partial_i (\sqrt{\det g_{ij}} g^{ij} \partial_j x_k)$$

この解を見つけるためには、Dirichlet 問題 $\Delta x_k = 0, x_k = y_k(\text{on } \partial B(0, \epsilon))$ を解けばよい。

$\{x_k\}$ が実際に座標系となることは elliptic estimates から従う。□

補題 4.1. Riemann 多様体 (M, g) 上の調和座標系 $(U, \{x_i\})$ について、次が成り立つ。

- (1) $\Delta u = \frac{1}{\sqrt{\det g_{st}}} \partial_i (\sqrt{\det g_{st}} g^{ij} \partial_j u) = g^{ij} \partial_i \partial_j u$
- (2) $\frac{1}{2} \Delta g_{ij} + Q(g, \partial g) = -\text{Rc}_{ij}$ (Q : 分子が g の多項式と ∂g の二次式で分母が $\sqrt{\det g_{ij}}$ にのみ依存する有理多項式)

証明. (1) 定義から

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta x^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g_{st}}} \partial_i (\sqrt{\det g_{st}} g^{ij} \partial_j x^k) \\ &= g^{ij} \partial_i \partial_j x^k + \frac{1}{\sqrt{\det g_{st}}} \partial_i (\sqrt{\det g_{st}} g^{ij}) \partial_j x^k \\ &= g^{ij} \partial_i \delta_j^k + \frac{1}{\sqrt{\det g_{st}}} \partial_i (\sqrt{\det g_{st}} g^{ij}) \delta_j^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g_{st}}} \partial_i (\sqrt{\det g_{st}} g^{ik}) \\ \Delta u &= \frac{1}{\sqrt{\det g_{st}}} \partial_i (\sqrt{\det g_{st}} g^{ij} \partial_j u) \\ &= g^{ij} \partial_i \partial_j u + \frac{1}{\sqrt{\det g_{st}}} \partial_i (\sqrt{\det g_{st}} g^{ij}) \partial_j u \\ &= g^{ij} \partial_i \partial_j u \end{aligned}$$

(2) Bochner's formula を行列表示して得られる。詳細略。□

上の等式を Einstein 計量の場合に適用する。つまり $\text{Rc}_{ij} = (n-1)kg_{ij}$ のとき、 $\frac{1}{2} \Delta g_{ij} = -(n-1)kg_{ij} - Q(g, \partial g)$ 。このとき右辺は C^1 級で意味を持つ式になっている。つまり、 g が $C^{1,\alpha}$ 級のとき左辺が C^α 級となるが、elliptic estimate から g は $C^{2,\alpha}$ 級になる。この議論を反復することで g の smoothness が従う。

harmonic norm $\|(M, g, p)\|_{C^{m,\alpha},r}^{\text{har}}$ を、選択する chart に調和性を課したときのノルムと定義する。

次の命題も 3.1 とほとんど同様に示される。収束先でノルムの不等式が保たれることを示す際に Dirichlet 問題を解く必要がある。

命題 4.2. $Q > 0, n \geq 2, m \geq 0, \alpha \in (0, 1], r > 0$ とする。「基点つき n 次元 Riemann 多様体 (M, g, p) で $\|(M, g, p)\|_{C^{m, \alpha, r}}^{har} \leq Q$ なるものの族」は pointed- $C^{1, \beta}(\beta < \alpha)$ 位相でコンパクト。□

調和座標を用いるメリットとして、計量が Ricci 曲率によって制御されることが挙げられる。これは次の補題に集約される。

補題 4.2. Riemann 多様体 (M, g) が有界な Ricci 曲率 $|\text{Rc}| \leq \Lambda$ を持ち、 $\forall r' > r, \|(M, g, p)\|_{C^{1, \alpha, r'}}^{har} \leq K$ が成り立つとき、 $\forall \alpha \in (0, 1)$ について $C^{1, \alpha}$ ノルムが有界、つまり $\|(M, g, p)\|_{C^{1, \alpha, r}}^{har} \leq C$ 。

証明. 調和座標を固定し計量成分 g_{ij} を評価する。 $\Delta = g^{ij} \partial_i \partial_j$ に注意する。elliptic estimate から

$$\|g_{ij}\|_{C^{1, \alpha, B(0, r)}} \leq C(\|\Delta g_{ij}\|_{C^0, B(0, r')} + \|g_{ij}\|_{C^\alpha, B(0, r')})$$

4.1 (2) から、

$$\|\Delta g_{ij}\|_{C^0, B(0, r')} \leq 2\Lambda \|g_{ij}\|_{C^0, B(0, r')} + C' \|g_{ij}\|_{C^1, B(0, r')}$$

上の二つの評価を合わせて結論を得る。□

実は、分裂定理を用いると harmonic norm の評価を単射半径の評価に置き換えることができる。

定理 4.1. (Anderson) $n > 2, \alpha \in (0, 1), \Lambda, R > 0$ が与えられるとき、任意の $Q > 0$ について $r > 0$ が存在し、「 $|\text{Rc}| \leq \Lambda, \iota \geq R$ なる n 次元閉 Riemann 多様体の族」は $\|(M, g)\|_{C^{1, \alpha, r}}^{har} \leq Q$ を満たす。

証明. 背理法で示す。ある $Q > 0$ と $\forall i \geq 1, (M_i, g_i)$ が存在して、

$$\begin{aligned} |\text{Rc}| &\leq \Lambda \\ \iota &\geq R \\ \|(M_i, g_i)\|_{C^{1, \alpha, i-1}}^{har} &> Q \end{aligned}$$

が成り立つとする。scale の連続性からある $r_i \in (0, i^{-1})$ で $\|(M, g, p)\|_{C^{m, \alpha, r_i}}^{har} = Q$ となるので、 $\bar{g}_i = r_i^{-2} g_i$ と rescale すると上の条件は

$$\begin{aligned} |\text{Rc}| &\leq r_i \Lambda \\ \iota &\geq r_i^{-1} R \\ \|(M_i, g_i)\|_{C^{1, \alpha, 1}}^{har} &= Q \end{aligned}$$

となる。定義から $\|(M_i, g_i, p_i)\|_{C^{1, \alpha, 1}}^{har} \in [\frac{Q}{2}, Q]$ なる $p_i \in M_i$ が存在する。

前の補題から $\forall \gamma \in (0, 1)$ について $C^{1, \gamma}$ ノルムで有界なので、3.1 から pointed- $C^{1, \alpha}$ 位相で収束部分列が取れる。極限を (M, g, p) とすると、ノルムの連続性から $\|(M, g, p)\|_{C^{1, \alpha, 1}}^{har} \in [\frac{Q}{2}, Q]$ が成り立つ。

Claim: $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{std})$

この主張が成り立てば $\|(M, g, p)\|_{C^{1, \alpha, 1}}^{har} \in [\frac{Q}{2}, Q]$ と矛盾し背理法が成立する。

収束する調和座標を取ると 4.1 から各 (M_i, \bar{g}_i) で $\frac{1}{2} \Delta \bar{g}_{kl} + Q(\bar{g}, \partial \bar{g}) = -\text{Rc}_{kl}$ が成り立っているが、Ricci 曲率の評価から $|\text{Rc}| \leq r_i^{-2} \Lambda \bar{g} \rightarrow 0$ であり、極限では $\frac{1}{2} \Delta g_{kl} + Q(g, \partial g) = 0$ が分かる。これは (M, g) が Einstein 方程式 $\text{Rc} = 0$ の弱解であることを意味し、4.1 の系から smooth で Ricci 平坦な多様体であることが従う。また、 $\iota \geq r_i^{-1} R \rightarrow \infty$ であり任意の (M, g) 上の測地線は (M_i, g_i) 上の測地線の極限であることから $\iota(M, g) = \infty$ が分かる。よって分裂定理から (M, g) が標準的な Euclid 空間になることが分かった。□

上の Ricci 曲率に対する評価を断面曲率に対する評価に取り替えて次を得る。

定理 4.2. $n \geq 2, \alpha \in (0, 1), R, K > 0$ が与えられるとき、任意の $Q > 0$ について $r > 0$ が存在し、「 $|\text{sec}| \leq K, \iota \geq R$ なる n 次元閉 Riemann 多様体の族」は $\|(M, g)\|_{C^{1, \alpha, r}}^{har} \leq Q$ を満たす。

5 主定理の証明

前節の内容から、後は単射半径が制御できれば有限性定理を示すことが出来る。これは半径 1 の球の体積による評価から実現される。

補題 5.1. $n \geq 2, v, K > 0$ が与えられるとき、 $R > 0$ が存在し、 $|\sec| \leq K, \text{Vol}B(p, 1) \geq v (p \in M)$ なる n 次元閉 Riemann 多様体 (M, g) は $\iota_M \geq R$ を満たす。

証明. 補題の条件を満たし $\iota_{M_i} \rightarrow 0$ となる列 (M_i, g_i) を取る。 $\iota(M_i, p_i) = \iota_{M_i}$ とし $\bar{g}_i = (\iota_{M_i})^{-2} g_i$ と正規化すると、 $\iota(M, \bar{g}_i) = 1, |\sec(M, \bar{g}_i)| \leq (\iota_{M_i})^2 K = K_i \rightarrow 0$ となる。上の定理からこれは pointed- $C^{1,\alpha}$ 位相で収束部分列を持ち、収束先 (M, g, p) は平坦となる。

まず $\iota(M, p) \leq 1$ を導く。 $\frac{\pi}{\sqrt{K_i}} \rightarrow \infty$ と Klingenberg's estimate から、 (M_i, g_i, p_i) は長さ 2 の閉測地線を持つ。これは pointed- $C^{1,\alpha}$ 位相で長さ 2 の閉測地線に収束するから $\iota \leq 1$ が得られる。

一方で、 $\text{Vol}B(p_i, 1) \geq v$ と Bishop-Gromov 不等式から、ある v' が存在し $r < 1$ について $\text{Vol}B(p_i, r) \geq v' r^n$ が成り立つ。このとき収束先では $\forall r, \text{Vol}B(p_i, r) \geq v' r^n$ が成り立ち、 (M, g) の平坦性から $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{std})$ である。

上の主張をもう少し詳しく説明する。Ambrose の定理から普遍被覆 $p: \widetilde{M} = \mathbb{R}^n \rightarrow M$ が存在し、基本群の元は \mathbb{R}^n の等長写像として実現される。位数が有限の元が存在するとき、その等長写像はある点を中心に回転するものであり、特に固定点を持つ。これは作用が自由であることに反するので基本群は torsion-free。よって M 自身が単連結でないとする Galois 対応から部分群 \mathbb{Z} に対応する被覆 $\widehat{M} \rightarrow M$ が取れる。これは $\widehat{M} = \mathbb{R}^{n-1} \times S^1$ を意味し、体積の増大度が r^{n-1} のオーダーであることから矛盾。よって $M = \mathbb{R}^n$ であり、 $\iota(M, p) \leq 1$ と合わせて列 (M_i, g_i) の存在が否定される。□

References

- [1] Petersen, Peter. Riemannian geometry. Vol. 171. New York: Springer, 2006.
- [2] Hirsch, Morris W. Differential topology. Vol. 33. Springer Science & Business Media, 2012.