

# Riemann 幾何学とリッチフロー

tko919

# 目次

第 1 章	Riemann 幾何	2
1.1	Riemann 計量と接続 . . . . .	2
1.2	測地線と第一変分公式 . . . . .	3
1.3	第二変分公式と Jacobi 場 . . . . .	6
1.4	空間形との比較 . . . . .	10
1.5	Bishop-Gromov の体積評価 . . . . .	12
第 2 章	リッチフロー	15
2.1	リッチフローの方程式 . . . . .	15

# 第 1 章

## Riemann 幾何

### 1.1 Riemann 計量と接続

定義 1.1.1.  $M$  を可微分多様体とする。  $M$  上の Riemann 計量とは、各点  $p \in M$  の接ベクトル空間に対する内積  $\langle -, - \rangle_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  の族であり、  $\langle -, - \rangle: M \ni p \mapsto \langle -, - \rangle_p$  が  $C^\infty$  級であるものを指す。組  $(M, \langle -, - \rangle)$  を Riemann 多様体という。

Euclid 空間ではベクトルの平行移動が自然に行えるが、一般の多様体上では移動したベクトルが接空間の外にはみ出してしまうことがある。そこで、異なる点の接空間を「つなげる」ことで形式的に平行移動を可能にする機構を作りたい。

定義 1.1.2.  $M$  を可微分多様体、  $\mathfrak{X}(M)$  を  $M$  上のベクトル場全体とする。

$M$  上の Affine 接続ないし共変微分とは、写像  $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  であって、次の条件を満たすものである。(  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  とする )

- (1)  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$
- (2)  $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$
- (3)  $\nabla_XfY = (Xf)Y + f\nabla_XY$

この条件を満たす接続は無数に存在する。そこで Riemann 計量に対する良い性質を持った接続をひとつ採用したい。

定義 1.1.3. Affine 接続  $\nabla$  が対称的とは、  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  について  $\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y]$  を満たすものをいう。

定義 1.1.4. Riemann 多様体  $(M, \langle -, - \rangle)$  上の Affine 接続  $\nabla$  が計量と両立するとは、  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  について  $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_XY, Z \rangle + \langle Y, \nabla_XZ \rangle$  を満たすものをいう。

接続  $\nabla$  が計量と両立するとき、曲線  $\gamma(t)$  に沿った平行なベクトル場  $X(t), Y(t)$  に対して  $\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t) \rangle = \langle \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}X(t), Y(t) \rangle + \langle X(t), \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}Y(t) \rangle = 0$  より  $\langle X(t), Y(t) \rangle$  は定数になる。つまり、平行移動によって 2 つのベクトルの「角度」が保存されることを表現している。

定理 1.1.1. Riemann 多様体  $(M, \langle -, - \rangle)$  上で対称的かつ計量と両立する Affine 接続  $\nabla$  が一意に存在する。これを Levi-Civita 接続という。 □

## 1.2 測地線と第一変分公式

**定義 1.2.1.**  $(M, \langle -, - \rangle)$  を連結な Riemann 多様体、 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  を区分的なめらかな曲線 (つまり、 $[a, b]$  の分割  $\{s_i\}$  が存在して各区間  $[s_i, s_{i+1}]$  上  $C^\infty$  級な連続写像) とする。  $\gamma$  の長さを  $L(\gamma) := \sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} |\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s)| ds$  とする ( $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ )。  $M$  上の 2 点  $p, q$  について  $\rho(p, q) := \inf\{L(\gamma) : \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$  が定められ、距離の公理を満たす。 また  $\gamma$  のエネルギーを  $E(\gamma) := \int_a^b |\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s)|^2 ds$  とする。  $E(p, q)$  も同様に定める。

Cauchy-Schwarz の不等式より  $L(\gamma)^2 \leq |b - a|E(\gamma)$  が成り立ち、等号が成立するのは  $|\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s)|$  が定数のときである。

端点  $p, q$  を固定したまま  $\gamma$  を摂動して、エネルギー  $E$  が極小値をとる曲線を調べたい。そのために区分的滑らかな曲線の 1 パラメータ族  $\hat{\gamma}: [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \ni (s, u) \mapsto \hat{\gamma}_u(s) \in M$  をとり  $\gamma = \hat{\gamma}_0, U(s) = \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}(s, 0)$  とおく。逆に  $U$  が与えられたとき、条件を満たす  $\hat{\gamma}$  を構成することもできる。端点を固定しているとき  $U(a) = U(b) = 0$  に注意する。

ある  $U$  について  $u \mapsto E(\hat{\gamma})$  の  $u = 0$  による微分は  $\hat{\gamma}$  の取り方に依存しない。よって  $\dot{E}(U) := \frac{\partial E(\hat{\gamma})}{\partial u}|_{u=0}$  を定義でき、これは  $\gamma$  を  $U$  に沿って滑らかに変形したときの差分を表す。特に  $E(p, q)$  を実現する  $\gamma$  は  $\dot{E}(U) = 0$  を満たすと考えられる。

以降ではベクトル場  $d\hat{\gamma}(\frac{\partial}{\partial u})$  を  $\frac{\partial}{\partial u}$  と略記する。  $\nabla$  を Levi-Civita 接続とすると、 $E$  の被積分関数の  $u$  による微分が

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left| \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right|^2 &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \quad (\because [\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial u}] = 0) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \end{aligned}$$

となり、これを積分すると

$$\frac{1}{2} \dot{E}(U) = \sum_i [\langle U, \dot{\gamma} \rangle]_{s_i}^{s_{i+1}} - \int_a^b \langle U, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \rangle ds \quad (1.1)$$

が得られる。これを 第一変分公式 と呼ぶ。

$\hat{\gamma}$  が滑らかなとき第一項が消え、全ての  $U$  に対して第一変分が 0 となるとときには Euler-Lagrange 方程式

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 \quad (1.2)$$

が成り立つ。この方程式を満たす  $\gamma$  を測地線 という。

改めて  $\gamma$  を測地線としたとき、  $\frac{1}{2} \frac{d}{ds} |\dot{\gamma}|^2 = \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s} \gamma, \dot{\gamma} \rangle = 0$  より  $|\dot{\gamma}|$  は定数。よって  $s$  は  $\gamma$  の弧長パラメータに比例する。また、(1.2) は Affine 変換に対して不変なので、  $s \mapsto |\dot{\gamma}|s$  に取り替えることで最初から弧長パラメータ表示を持つと仮定してよい。

(1.2) は 2 階の常微分方程式なので、初期値  $\gamma(0) = p \in M, \dot{\gamma}(0) = v \in T_p M$  が与えられると、Picard-Lindelöf の定理より  $\exists \delta > 0, \exists! \gamma_v : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  s.t. (1.2)。この  $\delta$  は  $(p, v) \in TM$  に対して局所一様連続となるので、結局  $p \in M$  に対して  $0 \in \exists U \subset T_p M$  s.t.  $\delta > 1$  より 指数写像  $\exp_p : U \ni v \mapsto \gamma_v(1) \in M$  が定義できる。一般論からこれは  $C^\infty$  級となる。

補題 1.2.1.  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  を 2 点  $p, q$  を結ぶ区分的滑らかな曲線で、弧長に比例するパラメータを持つとする。もし  $L(\gamma) = \rho(p, q)$  のとき、 $\gamma$  は滑らかで (1.2) を満たす。このとき  $\gamma$  を最短測地線と呼ぶ。

証明. パラメータの仮定から  $L(\gamma)^2 = aE(\gamma)$  より  $\gamma$  は  $E$  の最小値をとるので  $\forall U, \dot{E}(U) = 0$ 。 $\gamma$  に属する  $[0, a]$  の分割  $\{s_i\}$  について、 $s_i$  の近傍で 0 となる適切な  $U$  を選ぶことで (1.1) の第一項を消すことができ、 $\gamma$  の smooth な点全体で (1.2) が成り立つ。有限集合は測度 0 なので特に (1.1) の第二項は無視できる。よって  $\sum_i \langle U(s_i), \dot{\gamma}(s_i^+) - \dot{\gamma}(s_i^-) \rangle = 0$  より  $\dot{\gamma}(s_i^+) = \dot{\gamma}(s_i^-)$ 。したがって  $\gamma$  は  $C^1$  級であり、解の一意性から滑らかな曲線であることがわかる。□

逆関数定理から  $\exp_p$  は  $0 \in T_p M$  の近傍  $U$  で局所微分同相となる。 $\iota_p := \inf\{r > 0 : B(0; r) \subset U\} > 0$  を  $p$  の単射半径という。また  $\iota(V) = \inf_{p \in V} \iota_p$  を  $V$  の単射半径と呼ぶが、これは 0 になることがある。 $r \leq \iota_p$  について  $\exp_p$  による  $B(0; r) \subset T_p M$  は  $p$  の局所座標近傍を定める。これを正規座標と呼ぶ。

補題 1.2.2. 任意の  $p$  について  $\iota(V) > 0$  なる近傍  $p \in V$  が存在する。

証明.  $(p, 0) \in TM$  のある近傍  $D$  が存在して  $\exp : D \ni (q, v) \mapsto \exp_q(v) \in M \times M$  が定義される。これについて逆関数定理を使うことで所望の結論を得る。□

補題 1.2.3. (Gauss の補題)  $p \in M, \delta < \iota_p, v, w \in B(0; \delta) \subset T_p M, q := \exp_p v \in M$  とすると、微分  $d_v \exp_p : T_v(T_p M) \cong T_p M \rightarrow T_q M$  は  $v$  と始点を共有するベクトルの等長写像。つまり、 $\langle d_v \exp_p v, d_v \exp_p w \rangle_q = \langle v, w \rangle_p$ 。

証明.  $\epsilon > 0$  を十分小さくとり  $\varphi : [0, 1] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, (s, t) \mapsto \exp_p(s(v + tw))$  とおく。このとき

$$\begin{aligned} d_v \exp_p(v) &= \frac{\partial}{\partial s} \exp_p((s+1)v)|_{s=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(1, 0) \\ d_v \exp_p(w) &= \frac{\partial}{\partial t} \exp_p(v + tw)|_{t=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(1, 0) \end{aligned}$$

より示したいことは  $\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(1, 0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(1, 0) \rangle_q = \langle v, w \rangle_p$  と言い換えられる。

$s \mapsto \varphi(s, t)$  は測地線なので  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) = 0$ 。よって Levi-Civita 接続の性質から

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |v + tw|^2 = \langle v, w \rangle + t \langle w, w \rangle \end{aligned}$$

より  $\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle(s, 0) = \langle v, w \rangle$ 。また  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \exp_p(0) = 0$  と併せて  $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle(s, 0) = s \langle v, w \rangle$  が分かるので、 $s = 1$  を代入して題意を得る。□

命題 1.2.1.  $p \in M, r_0 < \iota_p$  とし、 $\gamma : [0, 1] \rightarrow B(p; r_0) := \exp_p(B(0; r_0)), \gamma(0) = p$  は区分的滑らかな曲線で  $q := \gamma(1)$  とすると、 $L(\gamma) \geq r$ 。等号が成り立つのは  $\gamma$  が測地線 (をパラメータ変換したもの) のときに限る。

証明.  $\exists r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \eta : [0, 1] \rightarrow \{X \in T_p M : |X| = 1\}$  s.t.  $\gamma(t) = \exp_p(r(t)\eta(t))$  より、 $\dot{\gamma}(t) = d_{\gamma(t)} \exp_p(\dot{r}(t)\eta(t)) + d_{\gamma(t)} \exp_p(r(t)\dot{\eta}(t))$ 。

ここで  $\eta$  が微分可能な  $t$  では  $2 \langle \dot{\eta}(t), \eta(t) \rangle = \frac{d}{dt} \langle \eta(t), \eta(t) \rangle = 0$  なので補題 1.2.3 より、上の  $\dot{\gamma}(t)$  の分解は直交分解。よって

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}(t)| &\geq |d_{\gamma(t)} \exp_p(\dot{r}(t)\eta(t))| \\ &= |\dot{r}(t)| \cdot |d_{\gamma(t)} \exp_p(\eta(t))| = |\dot{r}(t)| \\ L(\gamma) &\geq \int_0^1 |\dot{r}(t)| dt \\ &\geq \left| \int_0^1 \dot{r}(t) dt \right| \\ &= r(1) - r(0) = \rho(p, q) \end{aligned}$$

等号が成り立つのは  $\eta(t)$  が区分的定数かつ  $\dot{r} \geq 0$  のときだが、 $\eta(t)$  が定数のところでは正規化して  $\dot{r} = 1$  を仮定してよいので、結局  $\eta$  は定数関数にできる。このとき  $\gamma$  は測地線パラメータ変換で得られる。  $\square$

補題 1.2.4.  $r_0 < \iota_p$  とし  $p, q \in M$  を  $\rho(p, q)$  とすると  $\exists q' \in \partial B(p; r_0)$  s.t.  $\rho(p, q) = \rho(p, q') + r_0$ 。

証明.  $p, q$  を結ぶ曲線の族  $\{\gamma_i\}$  で  $L(\gamma_i) \rightarrow \rho(p, q)$  なるものを取り、 $\partial B(p; r_0)$  との交点を  $q_i$  とするとコンパクト性から  $q_i \rightarrow \exists q'$ 。距離の公理からこの  $q'$  は条件を満たす。  $\square$

命題 1.2.2.  $(M, g)$  が完備のとき、 $v \in T_p M$  を初期値とする (1.2) の解は  $[0, \infty)$  上に延長できる。つまり  $\exp_p$  は  $T_p M$  全体で定義される。

証明. 解の存在区間の上限を  $A$  としたとき、 $A < \infty$  を仮定して矛盾を言えばよい。 $\rho$  の定義より  $\rho(\gamma_v(s), \gamma_v(t)) \leq |s - t| \cdot |v|$ 。 $s \uparrow A$  とすると  $\gamma_v(s)$  は Cauchy 列なので、完備性から  $\exists q = \lim_{s \uparrow A} \gamma_v(s)$ 。ここで補題 1.2.2 を使うと測地線が  $[0, A + \delta)$  まで延長できるので仮定に矛盾する。  $\square$

定理 1.2.1. (Hopf-Rinow の定理)  $(M, g)$  が完備のとき、 $\forall p, q \in M$  について  $p, q$  を結ぶ最短測地線が存在する。

証明.  $r_0 < \iota_p$  として、 $\rho(p, q) > r_0$  を仮定してよい。補題 1.2.4 で得られる  $q'$  をとると命題 1.2.1 から  $\exists v \in T_p M, q' = \exp_p(r_0 v)$ 。また命題 1.2.2 より  $\gamma(s) = \exp_p(sv)$  は  $[0, \infty)$  上で定義される。

$K = \{s \in [0, \infty) : L(\gamma|_{[0, s]}) + \rho(\gamma(s), q) = \rho(p, q)\}$  とおくと、 $s_0 \in K$  のとき  $L(\gamma|_{[0, s_0]}) = \rho(p, q) - \rho(\gamma(s_0), q) \leq \rho(p, \gamma(s_0))$  より  $\gamma|_{[0, s_0]}$  は最短測地線。 $K$  はコンパクトなので  $\bar{s} := \max K \in K$  であり  $q_2 = \gamma(\bar{s})$  がとれるので、 $q_2 = q$  を示せばよい。

そうでないとき、 $r_1 = \min(\rho(q_2, q)/2, \iota_{q_2}) > 0$  とおくと、補題 1.2.4 より  $\exists q_3 \in \partial B(q_2, r_1)$  s.t.  $\rho(q_2, q_3) + \rho(q_3, q) = \rho(q_2, q)$ 。三角不等式より

$$\begin{aligned} \rho(p, q_2) + \rho(q_2, q_3) &= \rho(p, q_2) + \rho(q_2, q) - \rho(q_3, q) \\ &= \rho(p, q) - \rho(q_3, q) \leq \rho(p, q_3) \end{aligned}$$

より  $\rho(p, q_2) + \rho(q_2, q_3) = \rho(p, q_3)$ 。よって、常微分方程式の解の一意性から  $q_2, q_3$  を結ぶ最短測地線は  $\gamma$  と一致し、 $q_3 = \gamma(\bar{s} + r_1)$  より  $L(\gamma|_{[0, \bar{s} + r_1]}) + \rho(q_3, q) = \rho(p, q_2) + \rho(q_2, q_3) + \rho(q_3, q) = \rho(p, q)$ 。これは

$\bar{s}$  の最大性に矛盾する。 □

Riemann 多様体に局所的な完備性を仮定しても、同様の結論が得られる。

定義 1.2.2. Riemann 多様体  $(M, g)$  と 1 点  $p \in M$  の組  $(M, g, p)$  を 基点つき Riemann 多様体という。

定義 1.2.3.  $D > 0$  とする。  $\forall l < D$  について基点つき Riemann 多様体  $(M, g, p)$  の閉測地球  $\overline{B(p; l)}$  がコンパクトのとき、D-完備という。

定理 1.2.2. D-完備な基点つき Riemann 多様体  $(M, g, p)$  について  $\exp_p : B(0; D) \rightarrow M$  が定義され、 $\rho(p, q) < D$  なる  $p, q \in M$  を結ぶ最短測地線が存在する。 □

### 1.3 第二変分公式と Jacobi 場

エネルギー汎関数  $E$  が極値をとる曲線を測地線と定義したが、 $E$  が極小値をとるならば 2 階微分  $\ddot{E}(U) = \frac{\partial^2 E}{\partial u^2}|_{u=0}$  は非負となるだろう。

$\gamma : [0, a] \rightarrow M$  を測地線とし  $\hat{\gamma}, U$  をその変分・変分ベクトルとすると、被積分関数の  $u$  による 2 階微分は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 \left| \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right|^2 &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial u} \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle - \underbrace{\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle}_{0 \ (u=0)} - \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \right) - \left\langle \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \right\rangle \end{aligned}$$

第三項について曲率テンソルの定義から

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\gamma(U) &:= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u} + R \left( \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial s} \end{aligned}$$

が成り立ち、これを Jacobi 作用素という。これを積分すると第二変分公式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ddot{E}(U) &= [\langle \nabla_U U, \dot{\gamma} \rangle + \langle U, \nabla_U \dot{\gamma} \rangle]_0^a - \int_0^a \langle U, \mathcal{J}_\gamma U \rangle ds \\ &= [\langle \nabla_U U, \dot{\gamma} \rangle]_0^a + \int_0^a (|\nabla_{\dot{\gamma}} U|^2 - \langle U, R(U, \dot{\gamma}) \dot{\gamma} \rangle) ds \end{aligned}$$

を得る。

$\mathcal{V}_s$  を  $\gamma|_{[0, s]}$  に沿った区分的滑らかなベクトル場全体の集合、 $\mathcal{V}_s^0 = \{X \in \mathcal{V}_s : X(0) = X(s) = 0\}$  とする (特に  $\mathcal{V} := \mathcal{V}_a, \mathcal{V}^0 := \mathcal{V}_a^0$ )。第二変分公式の第二項について、 $U, V \in \mathcal{V}$  として

$$\begin{aligned} I(U, V) &:= \int_0^a (\langle \nabla_{\dot{\gamma}} U, \nabla_{\dot{\gamma}} V \rangle - \langle R(U, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, V \rangle) ds \\ &= [\langle \nabla_{\dot{\gamma}} U, V \rangle]_0^a - \int_0^a \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} U + R(U, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, V \rangle ds \end{aligned}$$

を指数形式という。  $\forall X \in \mathcal{V}^0, I(X, X) \geq 0$  のとき  $I$  を半正定値であるといい、さらに  $0 \neq \forall X \in \mathcal{V}^0, I(X, X) > 0$  のとき  $I$  を正定値であるという。  $\hat{\gamma}_u(s) = \exp_{\gamma(s)} uX(s)$  を考えることで、  $\gamma$  が最短ならば  $I$  が半正定値であることが従う。

$\{e_i\}$  を  $T_p M$  の正規直交基底として、

$$\text{Rc}(X, Y) := \sum_i \langle R(X, e_i)e_i, Y \rangle = \text{tr}[Z \mapsto R(Z, X)Y]$$

で定まる  $TM$  の対称双線形形式を Ricci 曲率といい、  $R(p) = \sum_i \text{Rc}(e_i, e_i)$  で定まる値を Scalar 曲率という。

**定理 1.3.1.** (Myers の定理)  $\lambda > 0, D > \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$  とする。  $D$ -完備な  $n$  次元 Riemann 多様体  $(M, g)$  について  $\text{Rc} \geq (n-1)\lambda$  が成り立てば、  $M$  はコンパクトで  $\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$

**証明.** 2 点  $p, q \in M$  をとり  $\rho(p, q) = l < D$  とする。定理 1.2.1 より最短測地線  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  が存在する。  $\{e_i\}_{i=1}^n$  ( $e_1 = \dot{\gamma}/l$ ) を  $\gamma$  に沿った平行なベクトル場で、各点の接空間の正規直交基底を成すとする。そして  $U_i = \sin(\pi s)e_i$  とおくと、  $U_i$  は全域で滑らかなことに注意して

$$\begin{aligned} I(U_i, U_i) &= - \int_0^1 \langle U_i, \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} U_i + R(U_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma} \rangle ds \\ &= - \int_0^1 \frac{\partial^2 \sin(\pi s)}{\partial s^2} + l^2 \sin^2(\pi s) \langle R(e_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, e_i \rangle ds \\ &= \int_0^1 \sin^2(\pi s) (\pi^2 - l^2 \langle R(e_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, e_i \rangle) ds \\ \sum_{i=2}^n I(U_i, U_i) &= \int_0^1 \sin^2(\pi s) ((n-1)\pi^2 - l^2 \text{Rc}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})) ds \end{aligned}$$

ここで  $l > \pi/\sqrt{\lambda}$  とすると右辺は負になるので、  $\exists U_i, I(U_i, U_i) < 0$ 。よって  $I$  は半正定値でないので  $\gamma$  の最短性に矛盾する。定理 1.2.1 から  $M = \exp_p(\overline{B(0; \pi/\sqrt{\lambda})})$  より  $M$  はコンパクト。  $\square$

**定義 1.3.1.**  $\gamma$  に沿ったベクトル場  $V$  が

$$\mathcal{J}_{\gamma} V = \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} V + R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0 \quad (1.3)$$

を満たすとき、  $V$  を Jacobi 場という。1.3 は 2 階の常微分方程式なので、基点  $p = \gamma(0)$  での初期値  $V(0), \nabla_{\dot{\gamma}} V(0) \in T_p M$  が与えられたとき、条件を満たす Jacobi 場が一意的にとれる。よって、  $M$  の次元を  $n$  として Jacobi 場全体は  $2n$  次元のベクトル空間をなす。

**補題 1.3.1.**  $V$  を  $\gamma$  に沿った Jacobi 場とする。  $\langle V, \dot{\gamma} \rangle = 0$  と  $\langle V(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = \langle \nabla_{\dot{\gamma}} V(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = 0$  は同値 (このような  $V$  を直交 Jacobi 場という)。

**証明.**  $\frac{d^2}{dt^2} \langle V, \dot{\gamma} \rangle = \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} V, \dot{\gamma} \rangle = - \langle R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$  より  $\langle V, \dot{\gamma} \rangle = ct + d$  ( $c, d \in \mathbb{R}$ ) と書ける。  $U = V - \frac{ct+d}{|\dot{\gamma}|^2} \dot{\gamma}$  とおくと  $\langle U, \dot{\gamma} \rangle = 0$  より  $U$  は直交 Jacobi 場となる。このとき  $\langle V(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = d, \langle \nabla_{\dot{\gamma}} V(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = c$  より題意を得る。  $\square$



例 1.3.1.  $\gamma(s, u)$  を測地線の 1 パラメータ族とすると  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \dot{\gamma}$ 。よって Jacobi 作用素の定義から  $U = \frac{\partial \gamma}{\partial u}|_{u=0}$ 。特に  $\gamma(s, t) = \exp_p(s(X + uY))$  のとき  $U = d_{sX} \exp_p(sY)$  であり、初期値は  $U(0) = 0, \nabla_{\dot{\gamma}} U(0) = Y$  なので  $U(0) = 0$  なる  $\gamma = \exp_p sX$  上の Jacobi 場は全てこの形になる。

補題 1.3.2. 測地線  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$  の指数形式が半正定値で  $U \in \mathcal{V}^0, I(U, U) = 0$  ならば、 $U$  は Jacobi 場。

証明.  $\forall V \in \mathcal{V}^0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$  について  $I(U + \alpha V, U + \alpha V) = 2\alpha I(U, V) + \alpha^2 I(V, V) \geq 0$  より  $I(U, V) = 0$  (そうでないなら、 $\alpha$  を適切に設定して左辺を負にすることが出来る)。よって、

$$0 = I(U, V) = \sum_i \langle \nabla_{\dot{\gamma}} U(s_i^-) - \nabla_{\dot{\gamma}} U(s_i^+), V \rangle - \int_0^a \langle \mathcal{J}_{\gamma} U, V \rangle ds$$

が成り立ち、 $V$  は任意なので  $\mathcal{J}_{\gamma} U = 0$  が従う。  $\square$

補題 1.3.3. (指数定理) 測地線  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$  の指数形式が半正定値とする。 $\gamma$  に沿った Jacobi 場  $Y$  と  $V \in \mathcal{V}$  が  $Y(0) = V(0), Y(a) = V(a)$  を満たすとき、 $I(Y, Y) \leq I(V, V)$  が成り立つ。等号が成立する条件は  $V$  が Jacobi 場であるときのみ。

証明. 指数形式の定義より  $I(Y, Y - V) = 0$  なので

$$\begin{aligned} 0 &\leq I(Y - V, Y - V) \\ &= I(-Y - V, Y - V) + 2I(Y, Y - V) \\ &= I(V, V) - I(Y, Y) \end{aligned}$$

等号条件は前の補題と Jacobi 場の線形性から成り立つ。  $\square$

定義 1.3.2. 測地線  $\gamma$  上の相異なる 2 点  $p = \gamma(0), q = \gamma(s_1)$  に対して  $V(0) = V(s_1) = 0$  なる  $\gamma$  上の 0 でない Jacobi 場が存在するとき、 $p, q$  は  $\gamma$  に沿って 共役 であるという。例 1.3.1 より  $\gamma_X$  に沿って  $p$  と  $q = \exp_p(X)$  が共役なことから  $X$  が  $\exp_p$  の臨界点であることは同値。

命題 1.3.1.  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$  を測地線とする。

- (1)  $\gamma$  上  $p = \gamma(0)$  と共役な点が存在しない  $\iff I$  が正定値
- (2)  $\gamma$  上  $p = \gamma(0)$  と共役な  $q = \gamma(a)$  でない点が存在しない  $\iff I$  が半正定値

証明. 必要性を示す。 $q_1 = \gamma(s_1)$  とし、 $V$  を  $\gamma$  上の Jacobi 場で  $V(p) = V(q_1) = 0$  を満たすとする。このとき、 $U(s) = \begin{cases} V(s) & (s \in [0, s_1]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$  は  $\gamma$  上に区分的滑らかなベクトル場であり  $I(U, U) = 0$  を得る。 $I$  が正定値ならば  $V \equiv 0$  である。半正定値ならば補題 1.3.2 より  $U$  は Jacobi 場だが、 $s_1 \neq a$  のとき  $U$  は  $a$  の近傍で恒等的に 0 なので  $U(a) = \nabla_{\dot{\gamma}} U(a) = 0$ 。初期値を満たす Jacobi 場の一意性より  $V \equiv 0$  を得る。

十分性を示す。「 $I$  が半正定値でないなら端点でない  $p$  と共役な点が存在する」ことを示せばよい。(・: 特に  $\gamma$  上  $p$  と共役な点が存在しないときも  $I$  は半正定値なので、 $V \in \mathcal{V}^0, I(V, V) = 0$  について補題 1.3.2 より  $V$  は Jacobi 場。 $V(0) = V(a) = 0$  と仮定から  $V \equiv 0$  が従い  $I$  は正定値となる)  $\gamma_s := \gamma|_{[0, s]}$  に対し  $I_s := I_{\gamma_s}$  が半正定値となる  $s$  の上限を  $s_1$  とおく。補題 1.2.2、命題 1.2.1 より  $s_1 > 0$  であり、 $I$  の連続性から  $I_{s_1}$  も半正定値。 $s_1 < a$  ならば  $p, \gamma(s_1)$  が共役であることを言いたい。

再び補題 1.2.2 より  $0 < \forall \epsilon < \delta$  について  $\sigma_{\epsilon} = \gamma|_{[s_1 - \delta, s_1 + \epsilon]}$  が最短となる  $\delta > 0$  が存在する。このとき  $I_{s_1 + \epsilon}$  は半正定値でないので、 $\exists X_{\epsilon} \in \mathcal{V}_{s_1 + \epsilon}^0, I_{s_1 + \epsilon}(X_{\epsilon}, X_{\epsilon}) < 0$ 。 $s_1 - \delta$  の近傍での変形によって  $|X_{\epsilon}(s_1 - \delta)| = 1$

を仮定してよい。例 1.3.1 より  $U^-(0) = 0, U^-(s_1 - \delta) = X_\epsilon(s_1 - \delta)$  なる  $\gamma_{s_1 - \delta}$  上の Jacobi 場が存在し、補題 1.3.3 より  $I_{s_1 - \delta}(U^-, U^-) \leq I_{s_1 - \delta}(X_\epsilon, X_\epsilon)$ 。同様に  $U^+(s_1 + \epsilon) = 0, U^+(s_1 - \delta) = X_\epsilon(s_1 - \delta)$  なる  $\sigma_\epsilon$  上の Jacobi 場をとると  $I_{\sigma_\epsilon}(U^+, U^+) \leq I_{\sigma_\epsilon}(X_\epsilon, X_\epsilon)$  が分かる。

$U^-, U^+$  を  $s_1 - \delta$  で接続したベクトル場を  $V_\epsilon \in \mathcal{V}_{s_1 + \epsilon}^0$  とすると、辺々足して  $I_{s_1 + \epsilon}(V_\epsilon, V_\epsilon) \leq I_{s_1 + \epsilon}(X_\epsilon, X_\epsilon) < 0$ 。  $\epsilon \downarrow 0$  なる列を適切に選び  $U^-, U^+$  を収束させると、 $|V_\epsilon(s_1 - \delta)| = 1$  より  $V_\epsilon$  は 0 でないベクトル場  $V \in \mathcal{V}_{s_1}^0$  に収束する。これは  $I_{s_1}(V, V) \leq 0$  を満たすが、 $I_{s_1}$  は半正定値なので 0 に等しく、補題 1.3.2 より  $V$  は Jacobi 場。よって  $p, \gamma(s_1)$  は共役。  $\square$

系 1.3.1. 最短測地線  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  上の相異なる 2 点  $\gamma(s), \gamma(t)$  ( $s < t$ ) が  $\gamma$  上共役ならば  $s = 0, t = a$ 。  $\square$

次の section まで  $(M, g)$  に完備性を課す。

補題 1.3.4. 2 点  $p, q = \exp_p v$  間の最短測地線  $\gamma : s \mapsto \exp_p sv$  で  $p, q$  が  $\gamma$  上共役でないとする。このとき、次は同値：

- (1)  $v \in T_p M$  の近傍  $U$  が存在し、 $w \in U$  ならば測地線  $s \mapsto \exp_p sw$  は  $[0, 1]$  上最短。
- (2)  $p, q$  を結ぶ最短測地線は  $\gamma$  のみ。

証明.  $p, q$  は共役でないので  $\exp_p$  は  $v$  で正則。よって逆関数定理より  $v$  の近傍  $U$  と  $q$  の近傍  $V$  の微分同相を導く。条件 (1) が成立するとき  $\epsilon > 0$  が存在して  $\gamma$  は  $[0, 1 + \epsilon]$  まで延長できるので、常微分方程式の一意性から (2) がわかる。

逆に (1) が成り立たないとき、 $\gamma$  に収束し  $[0, 1]$  上最短でない測地線の列  $\{\gamma_i\}$  がとれる。 $p, q_i = \gamma_i(1)$  を結ぶ最短測地線を  $\sigma_i$  とおくと、 $q_i \in V$  を仮定してよいので  $w_i := \dot{\sigma}_i(0) \notin U$  となる必要がある。このとき  $w_i \rightarrow w \in \overline{B(0; D)} \setminus U$  となるように列を取り直すと、 $\sigma_i \rightarrow (s \mapsto \exp_p(sw)) \neq \gamma$  より (2) も不適。  $\square$

定義 1.3.3.  $v \in S_p M$  について  $\text{cut}(v) := \sup\{s_0 \in [0, \infty) : [0, s_0] \ni s \mapsto \exp_p(sv) \text{ が最短} \}$  とおく。 $q = \exp_p(\text{cut}(v)v)$  を  $p$  の切片と呼ぶ。命題 1.2.1 より  $\text{cut}(v) > 0$  であり、特に  $(M, g)$  が完備なら  $\text{cut}(v) = \infty$  になり得る。このとき  $s \mapsto \exp_p(sv)$  はどの有界区間に制限しても最短になる。このような測地線を半直線と呼ぶ。

補題 1.3.5.  $(M, g)$  が完備 Riemann 多様体のとき、 $(M, g)$  がコンパクト  $\iff p$  を始点とする半直線が存在しない。

証明. コンパクトならば有界なので十分性は明らか。逆に非コンパクトのとき  $\rho(p, q_i) \rightarrow \infty$  なる点列を取り、 $\gamma_i$  を  $p, q_i$  を結ぶ弧長パラメータ表示を持つ最短測地線とする。このとき  $(M, g)$  の完備性と  $S_p M$  のコンパクト性から  $\gamma_i$  が  $[0, \infty)$  上の測地線  $\gamma$  に収束するようにでき、これは半直線となる。  $\square$

系 1.3.2.  $s_0 < \text{cut}(v)$  に対して  $p, q = \exp_p(s_0 v)$  を結ぶ最短測地線は一意的で、 $q$  の近傍で  $\rho(p, -)$  は滑らか。

証明. 補題 1.3.4 と常微分方程式の一意性から従う。  $\square$

系 1.3.3.  $q$  が  $p$  の切片  $\iff p, q$  を結ぶ最短測地線上で  $p, q$  が共役、または  $p, q$  を結ぶ最短測地線が複数存在する。

証明. 系 1.3.1、補題 1.3.4 と常微分方程式の一意性から従う。□

補題 1.3.6.  $S_p M \ni v \mapsto \text{cut}(v)$  は連続。

証明.  $v_i \rightarrow v$  とする。最短測地線の収束性から  $\limsup_{i \rightarrow \infty} \text{cut}(v_i) \leq \text{cut}(v)$ 。一方、系 1.3.2 より  $l < \text{cut}(v)$  について  $\gamma : [0, l] \rightarrow M, s \mapsto \exp_p(sv)$  は線分で前の系から端点は共役でない。したがって補題 1.3.4 より  $\gamma_i : s \mapsto \exp_p(sv)$  も  $[0, l]$  上で最短測地線なので  $\liminf_{i \rightarrow \infty} \text{cut}(v_i) \geq \text{cut}(v)$ 。□

系 1.3.4.  $\Sigma(p) := \{v \in T_p M : |v| < \text{cut}(\frac{v}{|v|})\}$ ,  $\text{Cut}(p) = \exp_p(\partial \Sigma(p))$  を  $p$  の切片全体とすると、 $M \setminus \text{Cut}(p) = \exp_p(\Sigma(p))$  であり  $\text{Cut}(p)$  は測度零。

証明. 前半は系 1.3.3 を使えばよい。後半の結論は  $\partial \Sigma(p) = \{v \in B(0; D) : |v| = \text{cut}(\frac{v}{|v|})\}$  と前補題、連続関数のグラフが測度零であることから従う。□

## 1.4 空間形との比較

$(M, g), (\tilde{M}, \tilde{g})$  を Riemann 多様体、 $\gamma : [0, a] \rightarrow M, \tilde{\gamma} : [0, a] \rightarrow \tilde{M}$  を  $\gamma(0) = p, \tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$  なる正規測地線とする。  $t \in [0, a]$  について  $K^-(t) = \min\{K(\Pi_\gamma) : \dot{\gamma}(t) \in \Pi_\gamma\}, \tilde{K}^+(t) = \min\{\tilde{K}(\tilde{\Pi}_{\tilde{\gamma}}) : \dot{\tilde{\gamma}}(t) \in \tilde{\Pi}_{\tilde{\gamma}}\}$  とおく (ここで  $K, \tilde{K}$  は断面曲率)。

補題 1.4.1.  $X, \tilde{X}$  を  $\gamma, \tilde{\gamma}$  に沿った直交 Jacobi 場とし、

- (1)  $X(0) = \tilde{X}(0) = 0$
- (2)  $|X(a)| = |\tilde{X}(a)|$
- (3)  $\gamma$  には  $[0, a]$  上共役な点対が存在しない
- (4)  $\forall t \in [0, a], \tilde{K}^+(t) \leq K^-(t)$

このとき、 $I(X, X) \leq I(\tilde{X}, \tilde{X})$  が成り立つ。

証明.  $\{e_i(t)\}, \{\tilde{e}_i(t)\}$  を  $\gamma, \tilde{\gamma}$  に沿った正規直交基底とし、 $e_1 = \dot{\gamma}, \tilde{e}_1 = \dot{\tilde{\gamma}}, e_2(a) = X(a)/|X(a)|, \tilde{e}_2(a) = \tilde{X}(a)/|\tilde{X}(a)|$  を満たすとする。ここで、(2)(3) より  $|X(a)| = |\tilde{X}(a)| = \alpha \neq 0$  に注意する。

$X, \tilde{X}$  の  $\{e_i(t)\}, \{\tilde{e}_i(t)\}$  による成分表示を  $\{X^i(t)\}, \{\tilde{X}^i(t)\}$  とおくと、条件から

- (1)  $\forall i, X^i(0) = \tilde{X}^i(0) = 0$
- (2)  $X^2(a) = \tilde{X}^2(a) = \alpha, \forall i \neq 2, X^i(a) = \tilde{X}^i(a) = 0$
- (3)  $\forall t \in [0, a], X^1(t) = \tilde{X}^1(t) = 0$

が成り立つ。  $Y := \sum_i \tilde{X}^i(t) e_i(t)$  とおくと  $Y(0) = 0, Y(a) = X(a)$  であり、 $X$  は Jacobi 場なので補題 1.3.3 より  $I(X, X) \leq I(Y, Y)$ 。一方、(4) を用いて  $I(Y, Y) \leq I(\tilde{X}, \tilde{X})$  が分かるので、併せて題意を得る。□

定理 1.4.1. (Rauch の比較定理)  $X, \tilde{X}$  を  $\gamma, \tilde{\gamma}$  の Jacobi 場とし、次の条件を満たすと仮定する。

- (1)  $X(0) = \tilde{X}(0) = 0$
- (2)  $|\nabla_{\dot{\gamma}} X(0)| = |\tilde{\nabla}_{\dot{\tilde{\gamma}}} \tilde{X}(0)|$
- (3)  $\langle \dot{\gamma}(0), \nabla_{\dot{\gamma}} X(0) \rangle = \langle \dot{\tilde{\gamma}}(0), \tilde{\nabla}_{\dot{\tilde{\gamma}}} \tilde{X}(0) \rangle$

(4)  $\gamma$  には  $[0, a]$  上共役な点対が存在しない

(5)  $\forall t \in [0, a], \tilde{K}^+(t) \leq K^-(t)$

このとき、 $\tilde{\gamma}$  には  $[0, a]$  上共役な点対が存在せず、 $\forall t \in [0, a], |X(t)| \leq |\tilde{X}(t)|$ 。

証明. (1),(3) より初期値の接線成分が一致することから、一般性を失わず  $X, \tilde{X}$  は直交 Jacobi 場としてよい (補題 1.3.1 を参照)。

$u(t) = |X(t)|^2, \tilde{u}(t) = |\tilde{X}(t)|^2$  とおくと、 $\tilde{u}(t)/u(t)$  は  $(0, a)$  上 well-defined であり、L'Hospital の定理より

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{u}(t)}{u(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\dot{\tilde{u}}(t)}{\dot{u}(t)} \\ &= \frac{|\nabla_{\dot{\tilde{\gamma}}} \tilde{X}(0)|^2}{|\nabla_{\dot{\gamma}} X(0)|^2} = 1 \end{aligned}$$

よって  $|X| \leq |\tilde{X}|$  を示すためには  $\frac{d}{dt} \frac{\tilde{u}(t)}{u(t)} \geq 0 \iff \dot{\tilde{u}}(t)u(t) - \tilde{u}(t)\dot{u}(t) \geq 0$  が分かればよい。

(4) より  $(0, a)$  上  $u(t) > 0$  が成り立つ。  $c = \sup\{t: \tilde{u}(t) > 0\} \leq a$  とおき、  $b \in (0, c)$  について  $X_b(t) = \frac{X(t)}{|X(b)|}, \tilde{X}_b(t) = \frac{\tilde{X}(t)}{|\tilde{X}(b)|}$  とすると、 $[0, b]$  上  $X_b, \tilde{X}_b$  は前補題の条件を満たすので  $I(X_b, X_b) \leq I(\tilde{X}_b, \tilde{X}_b)$ 。指数形式の定義 (に部分積分を施した形) から  $I(X_b, X_b) = \langle \nabla_{\dot{\gamma}} X_b(b), X_b(b) \rangle \leq I(\tilde{X}_b, \tilde{X}_b) = \langle \tilde{\nabla}_{\dot{\tilde{\gamma}}} \tilde{X}_b(b), \tilde{X}_b(b) \rangle$  となるので、 $\forall b \in (0, c)$  で

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\dot{u}(b)}{u(b)} &= \frac{\langle \nabla_{\dot{\gamma}} X_b(b), X_b(b) \rangle}{\langle X(b), X(b) \rangle} \\ &\leq \frac{\langle \tilde{\nabla}_{\dot{\tilde{\gamma}}} \tilde{X}_b(b), \tilde{X}_b(b) \rangle}{\langle \tilde{X}(b), \tilde{X}(b) \rangle} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\dot{\tilde{u}}(b)}{\tilde{u}(b)} \end{aligned}$$

が成り立つ。これを移項して欲しかった不等式を得る。

もし  $c < a$  ならば連続性から  $|\tilde{X}(c)| \geq |X(c)| > 0$  となり  $c$  の選び方に矛盾。したがって  $c = a$  より  $\tilde{\gamma}$  は  $[0, a]$  上共役な点対が存在しない。  $\square$

系 1.4.1. 定理の (4),(5) を満たすとし、 $p = \gamma(0), \tilde{p} = \tilde{\gamma}(0)$  とする。  $X_p \in T_p M, \tilde{X}_{\tilde{p}} \in T_{\tilde{p}} \tilde{M}$  が  $\langle X_p, \dot{\gamma}(0) \rangle = \langle \tilde{X}_{\tilde{p}}, \dot{\tilde{\gamma}}(0) \rangle, |X_p| = |\tilde{X}_{\tilde{p}}|$  を満たすとき、  $|(d \exp_p)_{t\dot{\gamma}(0)} X_p| \leq |(d \exp_{\tilde{p}})_{t\dot{\tilde{\gamma}}(0)} \tilde{X}_{\tilde{p}}|$ 。

証明. 前定理と例 1.3.1 より明か。

この定理は定曲率を持つ単連結 Riemann 多様体 (空間形) をモデルとし、考察している Riemann 多様体  $(M, g)$  の曲率と大小関係を持つという仮定のもとで  $M$  の幾何を調べる、という形で応用されることが多い。

定曲率  $C$  の Riemann 多様体について、Jacobi 場がどのように表示されるかを調べよう。Jacobi 方程式は  $\frac{d^2 J}{dt^2} + CJ = 0$  となる。  $w$  を測地線に沿った平行な直交ベクトル場で  $|w(t)| = 1$  とすると、

$$J(t) = \sin_C(t)w(t), \sin_C(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{C}t)}{\sqrt{C}} & (C > 0) \\ t & (C = 0) \\ \frac{\sinh(\sqrt{-C}t)}{\sqrt{-C}} & (C < 0) \end{cases} \text{ が初期値 } J(0) = 0, J'(0) = w(0) \text{ の解となる。}$$

補題 1.4.2.  $p \in M, q \in \text{Cut}(p)$  で  $\rho(p, q) = \rho(p, \text{Cut}(p))$  を満たすとき、次のいずれかが成立する。

- (1)  $p, q$  を結ぶ最短測地線上で  $p, q$  が共役。
- (2)  $p, q$  を結ぶ正規最短測地線がちょうど 2 つ存在する ( $\gamma, \sigma$  とおく)。

さらに、(2) の場合  $l = \rho(p, q)$  として  $\dot{\gamma}(l) = -\dot{\sigma}(l)$  が成り立つ。

証明. 後半の主張が示されれば、系 1.3.3 と Jacobi 場全体の線形性から前半も従う。

(2) を仮定して  $\dot{\gamma}(l) \neq -\dot{\sigma}(l)$  とすると、 $\exists X_q \in S_q M$ , s.t.  $\langle X_q, \dot{\gamma}(l) \rangle < 0, \langle X_q, \dot{\sigma}(l) \rangle < 0$ 。  $q$  は  $\gamma$  上  $p$  と共役でないので逆関数定理から  $l\dot{\gamma}(0) \in \exists U \subset T_p M$  で  $\exp_p|_U$  が微分同相になる。  $s$  を十分小さくすると  $\xi(s) := (\exp_p|_U)^{-1} \exp_q(sX_q)$  が定義される。  $\xi$  は測地線の 1 パラメータ族  $\gamma_s(t) = \exp_p(\frac{t\xi(s)}{l})$  の変分ベクトルなので、第一変分公式から  $\frac{1}{2} \frac{dL(\gamma)}{ds}(0) = \langle X_q, \dot{\gamma}(l) \rangle < 0$ 。 よって十分小さい  $s > 0$  について  $L(\gamma_s) < L(\gamma)$ 。 同様に  $\sigma_0 = \sigma$  なる測地線の 1 パラメータ族  $\sigma_s$  が存在して、十分小さい  $s > 0$  について  $L(\sigma_s) < L(\sigma)$  となる。

$\gamma_s, \sigma_s$  はともに  $p, \exp_q(sX_q)$  の測地線だが、  $l_s := \rho(p, \exp_q(sX_q)) \leq L(\gamma_s) < \rho(p, q) = l$  と  $\dot{\gamma}(l) \neq -\dot{\sigma}(l)$  より  $\exp_p$  は  $B(0; \frac{l_s+l}{2}) \subset T_p M$  上単射でない。 これは  $l = \rho(p, \text{Cut}(p)) = \iota_p$  に反する。  $\square$

定理 1.4.2. (Klingenberg の補題)  $(M, g)$  を完備 Riemann 多様体とし、断面曲率  $K$  が定数  $C > 0$  で抑えられるとする。このとき、次のいずれかが成り立つ。

- (1)  $\iota_M \geq \frac{\pi}{\sqrt{C}}$
- (2) 長さ最小を達成する測地閉曲線  $\gamma$  が存在して  $\iota_M = \frac{L(\gamma)}{2}$

証明.  $\iota_M = \rho(p, q)$  なる  $p \in M, q \in \text{Cut}(p)$  をとる。前述の考察と定理 1.4.1 から測地線  $\gamma$  上の Jacobi 場は  $t \in [0, \frac{\pi}{\sqrt{C}}]$  上で消えない。よって、もし  $p, q$  を結ぶ最短測地線上で 2 点が共役なら、長さは  $\frac{\pi}{\sqrt{C}}$  以上なので (1) が成り立つ。

もし  $p, q$  が共役でないなら、前補題から  $p, q$  を結ぶ 2 つの最短測地線  $\gamma, \sigma$  が取れて  $\dot{\gamma}(l) = -\dot{\sigma}(l)$  ( $l = \rho(p, q)$ )。  $p, q$  を入れ替えて考えると、同様にして  $\dot{\sigma}(0) = -\dot{\gamma}(0)$  がわかるので、 $\gamma, \sigma$  は滑らかに連結でき、1 つの測地閉曲線  $\tau$  を作る。このとき作り方から  $\iota_M = \frac{L(\tau)}{2}$  であり、 $\tau$  は測地閉曲線の長さの最小値を達成する。なぜなら  $\tau'$  を  $L(\tau)$  より短い測地閉曲線とすると  $\rho(p', q') = L(\tau')$  なる  $p', q'$  が存在する。定義から  $\exists q'' \in \text{Cut}(p') \cap \tau', d(p', q'') \leq \frac{L(\tau')}{2} < \frac{L(\tau)}{2} = \iota_M$  より矛盾。したがって (2) が成り立つ。  $\square$

## 1.5 Bishop-Gromov の体積評価

定義 1.5.1.  $(M, g)$  を Riemann 多様体、 $K$  をある座標近傍系  $(U; x)$  に含まれる  $x(K)$  が可測なコンパクト部分集合とする。このとき  $K$  の体積を

$$\text{Vol}(K) = \int_{x(K)} \sqrt{G \circ x^{-1}} dx$$

で定義する。ここで  $G = \det(g_{ij}), g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$  で  $dx$  は Lebesgue 測度。

補題 1.5.1. この定義は座標近傍系の取り方に依らない。

証明.  $(V; y)$  を別の座標近傍系、 $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$  のヤコビアンを  $J$  として、

$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p = \sum_j J_{ij}(x(p))(\frac{\partial}{\partial y_j})_p$  ( $p \in x(U \cap V)$ )。よって  $g_{ij}^x = J^T(g_{kl}^y)J$  より  $\sqrt{G^y \circ y^{-1}}dy = \sqrt{G^x \circ x^{-1}}dx$ 。□

$(M, g)$  に完備性を仮定すると、系 1.3.2 から  $\exp_p : \Sigma(p) \rightarrow M \setminus \text{Cut}(p)$  は微分同相となるので、 $M$  上の座標近傍系として扱える。 $\Sigma(p)$  上の Lebesgue 測度を  $dx = r^{n-1}drd\Theta$  と極座標表示して  $\mu(r, \Theta) := \begin{cases} \sqrt{G \circ \exp_p}(r\Theta)r^{n-1} & (r\Theta \in \Sigma(p)) \\ 0 & (o.w.) \end{cases}$  とおくと、 $\text{Cut}(p)$  が測度零 (系 1.3.4) より

$\text{Vol}(B(p; r)) = \int_{B(0; r)} \mu(r, \Theta)drd\Theta$  と表せる。

$\mu$  の性質を調べるため、 $\Theta \in S_p M$  を固定して考える。

命題 1.5.1.  $\gamma$  を  $\dot{\gamma}(0) = \Theta$  の正規測地線、 $V_2, \dots, V_n$  を  $V_j(0) = 0$  なる  $\gamma$  上の直交 Jacobi 場とし、 $\{\nabla_{\dot{\gamma}} V_j(0)\}$  が一次独立だと仮定する。このとき、 $r\Theta \in \Sigma(p)$  なる  $r$  について、 $\mu(r, \Theta) = \frac{\det(V_j(r))}{\det(\nabla_{\dot{\gamma}} V_j(0))}$ 。ただし、行列式には  $(\dot{\gamma}(t))^\perp$  の正規直交基底を用いる。

証明.  $e_1 = \Theta, e_j = \nabla_{\dot{\gamma}} V_j(0)$  は  $T_p M$  の基底をなし、座標系  $\{u_i\}$  を作ることができる。よって  $du = \frac{r^{n-1}}{\det(e_i)_{i=2}^n} drd\Theta$  を得る ( $e_1 = \Theta = \dot{\gamma}(0)$  に注意)。

例 1.3.1 より  $V_j(t) = (d\exp_p)_{t\Theta}(te_j)$  と書け、 $\exp_p(r\Theta)$  において  $\partial_1 = \dot{\gamma}(r), \partial_j = \frac{V_j(r)}{r}$ 。よって  $i, j \geq 2$  のとき  $\langle \partial_i, \partial_j \rangle = \frac{\langle V_i(r), V_j(r) \rangle}{r^2}$  であり、 $\gamma$  は正規測地線なので  $\langle \partial_1, \partial_1 \rangle = 1$ 。さらに補題 1.2.3 より  $i \geq 2$  ならば  $\langle \partial_1, \partial_i \rangle = 0$ 。したがって

$$\begin{aligned} G &= \det(g_{ij}) \\ &= r^{-2n+2} \det(\langle V_i(r), V_j(r) \rangle)_{i,j \geq 2} \\ &= r^{-2n+2} \det(V_i(r))_{i \geq 2}^2 \end{aligned}$$

から与式を得る。□

補題 1.5.2. (Jacobi の公式)  $A$  を  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  の可微分写像とすると、 $\frac{d}{dt} \det A(t) = (\det A(t)) \text{tr} \left( A(t)^{-1} \cdot \frac{dA(t)}{dt} \right)$ 。

証明. Taylor 展開から

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det A(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det A(t+h) - \det A(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(A(t) + h dA dt) - \det A(t)}{h} \\ &= \det A(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(I + h A^{-1} dA dt) - \det I}{h} \end{aligned}$$

ここで、固有多項式の性質から  $\det(I + hX) = 1 + h \text{tr} X + O(h^2)$  より  $\frac{d}{dt} \det A(t) = \det A(t) \text{tr} \left( A^{-1} \frac{dA}{dt} \right)$  が分かる。□

体積比較をするために、定曲率  $C$  を持つ空間形について  $\mu_C(r) := \mu(r, \Theta)$  とおく (これは基点  $p$  や  $\Theta$  の取り方に依らない)。

補題 1.5.3.  $(M, g)$  を完備 Riemann 多様体とし  $Rc \geq (n-1)C$  が成り立つとする。このとき  $\Theta \in S_p M, r\Theta \in \Sigma(p)$  について  $\frac{\mu'(r, \Theta)}{\mu(r, \Theta)} \leq \frac{\mu'_C(r, \Theta)}{\mu_C(r, \Theta)}$ 。ただし、微分は  $r$  について取ることにする。

証明.  $\gamma$  を基点  $p$ 、初期値  $\Theta$  の正規測地線とする。 $\{e_i(t)\}$  を  $e_1(t) = \dot{\gamma}(t)$  なる  $\gamma$  に沿った平行な正規直交基底とし、 $V_j(t)$  を  $V_j(0) = 0, V_j(r) = e_j(r)$  なる  $\gamma$  に沿った Jacobi 場とする。

$A(t) = (\langle V_i(t), V_j(t) \rangle)_{i,j \geq 2}, d(t) = \det A(t) = (\det(V_i(t))_{i \geq 2})^2$  とおくと、前補題から ( $A(r) = I$  に注意)

$$\frac{\mu'(r, \Theta)}{\mu(r, \Theta)} = \frac{d'(r)}{2d(r)} = \frac{\text{tr}(A'(t))}{2} = \sum_{j=2}^n \langle V_j(r), \nabla_{\dot{\gamma}(r)} V_j(r) \rangle = \sum_{j=2}^n I(V_j, V_j)$$

ここで  $H_j(t) = \frac{sn_C(t)}{sn_C(r)} e_j(t)$  とおくと、補題 1.3.3 より

$$\begin{aligned} \sum_j I(V_j, V_j) &\leq \sum_j I(H_j, H_j) \\ &= \int_0^r \left( \frac{sn_C(t)}{sn_C(r)} \right)^2 \{ (n-1)k - Rc(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \} dt + \sum_j \langle H_j(r), \nabla_{\dot{\gamma}(r)} H_j(r) \rangle \end{aligned}$$

一方、定曲率  $C$  の空間形について同様の計算を行うと  $\frac{\mu'_C(r)}{\mu_C(r)} = \sum_j \langle H_j(r), \nabla_{\dot{\gamma}(r)} H_j(r) \rangle$  より、これらを併せて与式を得る。  $\square$

定理 1.5.1. (Bishop-Gromov の体積評価)  $(M, g)$  を  $Rc \geq (n-1)C$  なる完備 Riemann 多様体とし、任意の点  $p \in M$  をとる。このとき、 $B_r^C$  を定曲率  $C$  の空間形上で半径  $r$  の測地球とすると、 $r \mapsto \frac{\text{Vol}(B_r(p))}{\text{Vol}(B_r^C)}$  は単調非増加。とくに  $\text{Vol}(B_r(p)) \leq \text{Vol}(B_r^C)$ 。

証明.  $a(r) := \int_{S^{n-1}} \mu(r, \Theta) dr d\Theta, b(r) = \int_{S^{n-1}} \mu_C(r) d\Theta$  とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( \log \frac{\text{Vol}(B_r(p))}{\text{Vol}(B_r^C)} \right) &= \frac{a(r)}{\text{Vol}(B_r(p))} - \frac{b(r)}{\text{Vol}(B_r^C)} \\ &= \frac{\int_0^r (a(r)b(t) - a(t)b(r)) dt}{\text{Vol}(B_r(p))\text{Vol}(B_r^C)} \end{aligned}$$

よって前半の主張は  $t \leq r$  について  $a(r)b(t) - a(t)b(r) \leq 0$ 、つまり  $\frac{a(t)}{b(t)}$  が非増加であることを言えばよい。

$\mu_C(r)$  は  $\Theta$  の取り方に依らないので  $\frac{a(t)}{b(t)} = \int_{S^{n-1}} \frac{\mu(t, \Theta)}{\mu_C(t)} d\Theta$ 。よって  $\frac{\mu(t, \Theta)}{\mu_C(t)}$  が任意の  $\Theta$  について非増加であればよい。しかし、前補題から  $\frac{d}{dt} \left( \log \frac{\mu(t, \Theta)}{\mu_C(t)} \right) = \frac{\mu'(t, \Theta)}{\mu(t, \Theta)} - \frac{\mu'_C(t, \Theta)}{\mu_C(t, \Theta)} \leq 0$  なので示された。

後半の主張は、 $r \rightarrow 0$  で両者の体積は  $\mathbb{R}^n$  上の球の体積に近似されるので、比が 1 に近づくことから従う。  $\square$

## 第 2 章

# リッチフロー

### 2.1 リッチフローの方程式

この節ではリッチフローの基本的な性質と例を述べる。

定義 2.1.1.  $M$  を多様体、 $I$  を  $\mathbb{R}$  上の開区間とする。 $I$  上で定義される  $M$  上の Riemann 計量の  $C^\infty$  な 1 パラメータ族  $g(t)$  が  $g(0)$  を初期値とするリッチフローであるとは、偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2\text{Rc}(g)$$

を満たすことを指す。

$(M, g(0))$  がコンパクトのとき、 $(M, g(t))$  が体積一定となるように正規化したリッチフローを考えることができる。

$h(t) = \lambda(t)g(t)$  が  $\text{Vol}(M, h(t)) : \text{const}$  となる  $\lambda(t)$  を求めよう。

$$\begin{aligned} d\text{Vol}_h &= \sqrt{\det(h_{ij})} dx \\ &= \sqrt{\det(\lambda(t)g_{ij})} dx \\ &= \lambda(t)^{n/2} d\text{Vol}_g \\ \text{Vol}(h(t)) &= \text{Vol}(g(0)) \\ \iff \lambda(t)^{n/2} \text{Vol}(g(t)) &= \text{Vol}(g(0)) \\ \iff \lambda(t) &= \left( \frac{\text{Vol}(g(t))}{\text{Vol}(g(0))} \right)^{-n/2} \end{aligned}$$

と計算できる。また、Jacobi の公式から

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Vol}(g(t)) &= \int_M \frac{d}{dt} \sqrt{\det(g_{ij})} dx \\ &= \int_M \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij})}} \det(g_{ij}) \text{tr} \left( \frac{d}{dt} g_{ij} \right) dx \\ &= - \int_M \text{tr}(\text{Rc}_{ij}^g) d\text{Vol}(g(t)) = - \int_M R^g d\text{Vol}(g(t)) \end{aligned}$$



$g$  によるスカラー曲率の平均  $r_g := \frac{\int_M R^g d\text{Vol}(g(t))}{\text{Vol}(g(t))}$  と、 $h$  での値  $r_h := \frac{\int_M R^h d\text{Vol}(g(t))}{\text{Vol}(g(t))}$  を用いて、

$$\begin{aligned}
r_h &= \frac{r_g}{\lambda(t)} \\
\frac{d}{dt} \lambda(t) &= -\frac{2}{n} \left( \frac{\text{Vol}(g(t))}{\text{Vol}(g(0))} \right)^{-2/n-1} \frac{\frac{d}{dt} \text{Vol}(g(t))}{\text{Vol}(g(0))} \\
&= \frac{2r_g}{n} \lambda(t) \\
&= \frac{2r_h}{n} \lambda(t)^2 \\
\frac{d}{dt} h &= -2\lambda(t) \text{Rc}_g + \frac{2r_h}{n} \lambda(t)^2 g(t) \\
&= \lambda(t) \left( -2\text{Rc}_h + \frac{2r_h}{n} h(t) \right)
\end{aligned}$$

$\lambda(t)$  を取り除くために変数変換  $\tau = \int_0^t \lambda(s) ds$  を施すと、

$$\frac{d}{d\tau} h = -2\text{Rc}_h + \frac{2r_h}{n} h$$

を得る。これを正規化されたリッチフローと呼ぶ。これは元々のリッチフローの解が有限時間でしか存在しないケースを克服するために用いられる。