集合論 メモ

tko919

目次

第 1 章

順序数

1.1　ZFC 公理系

(1) 外延性の公理： 集合 A, B に属する元が一致するなら $A = B$
(2) 空集合の公理： いかなる元も持たないような集合が存在する
(3) 対の公理： 要素 x, y について、x, y のみを元とする集合が存在する
(4) 和集合の公理： 集合 X について、 X の元の要素全体からなる集合が存在する
(5) 無限公理： $\emptyset \in X$ かつ $\forall x \in X, x \cup \{x\} \in X$ なる集合 X が存在する
(6) べき集合の公理： 集合 X について、 X の部分集合全体からなる集合 2^X が存在する
(7) 置換公理： 集合 X と論理式 φ について、 $\forall x \in X$ に対し $\varphi(x, y)$ を満たす y が一意に存在するなら、$\{y | \exists x \in X, \varphi(x, y)\}$ は集合である
(8) 正則性公理： 空でない集合 X について、元 $x \in X$ であって $\forall y \in X, y \notin x$ が成り立つ
(9) 選択公理： 空でない集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、選択関数 $f : \Lambda \to \cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, f(\lambda) \in X_\lambda$ が存在する

1.2　整列集合の諸性質

定義 1.2.1. 全順序かつ任意の部分集合が最小元を持つとき、**整列集合** と呼ぶ。

命題 1.2.1. $(P, <)$ を整列集合, $f : P \to P$ を単調増加とすると, $\forall x \in P, f(x) \geq x$ 。

証明. $f(x) < x$ なる $x \in P$ の最小元を z とする。 $w = f(z)$ とおくと $f(w) < f(z) = w < z$ より最小性に矛盾。 □

系 1.2.1. 整列集合の同型写像は恒等写像しかない。 □

系 1.2.2. 整列集合 P_1, P_2 が同型ならば、同型写像は一意。 □

P を整列集合,$w \in P$ として, $\{x \in P \colon x < w\}$ を w の **切片** $P(w)$ と呼ぶ。

補題 1.2.1. 自身の切片と同型な整列集合 P は存在しない。

証明. $f : P \to P(w)$ を同型写像とすると, $f(w) < w, P(w) \subset P$ より命題 1.2.1 に矛盾する。 □

定理 1.2.1. P_1, P_2 : 整列集合について, 次のいずれか 1 つが成り立つ。

- P_1, P_2 は同型
- P_1 と P_2 の切片は同型
- P_2 と P_1 の切片は同型

証明. $f = \{(x, y) \in P_1 \times P_2 \colon P_1(x) \cong P_2(y)\}$ とおく。
補題 1.2.1 より f は単射な写像。また $x' < x$ とすると、同型写像 $\varphi : P_1(x) \to P_2(f(x))$ を $P_1(x')$ に制限して $P_1(x') \cong P_2(\varphi(x')), \varphi(x') = f(x') < f(x)$ を得るので, f は順序を保つ。
$\mathrm{dom} f = P_1, \mathrm{ran} f = P_2$ のとき 1 番目が成り立つ。
$\mathrm{ran} f \neq P_2$ のとき、y_0 を $P_2 \setminus \mathrm{ran} f$ の最小元とする。$y_1 < y_2, y_2 \in \mathrm{ran} f \Rightarrow y_1 \in \mathrm{ran} f$ に注意すると $\mathrm{ran} f \cong P_2(y_0)$ がわかる。もし $\mathrm{dom} f \neq P_1$ ならば x_0 を $P_1 \setminus \mathrm{dom} f$ の最小元として同様に $\mathrm{dom} f \cong P_1(x_0)$ より $(x_0, y_0) \in f$ だが $x_0 \notin \mathrm{dom} f$ に矛盾する。よって $\mathrm{dom} f = P_1$ より 2 番目が成り立つ。また $\mathrm{dom} f \neq P_1$ のときも同様に 3 番目が成り立つことがわかる。
これらの条件は互いに排反なので題意が示された。 □

1.3 順序数の定義

定義 1.3.1. 集合 T が**推移的**とは、任意の元が T の部分集合となることである。($y \in x \in T \Rightarrow y \in T$ と言い換えられる)

定義 1.3.2. **順序数**とは、関係 $\in$ について整列集合かつ推移的な集合のことである (正則性公理から整列性は全順序性に仮定を弱められる)。
順序数の二項関係 $<$ を $\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta$ で定義する。

補題 1.3.1. (1) $0 = \emptyset$ は順序数。
(2) α を順序数として $\beta \in \alpha$ ならば β は順序数。
(3) $\alpha \neq \beta$ が順序数かつ $\alpha \subset \beta$ ならば $\alpha \in \beta$ 。
(4) α, β が順序数ならば $\alpha \subset \beta$ または $\beta \subset \alpha$ 。

証明. (1),(2) 明らか。
(3) γ を $\beta \setminus \alpha$ の最小元 ((2) よりこれは順序数) として $\alpha = \gamma$ を示す。まず $x \in \gamma$ とすると γ の推移性から $x \in \beta$ 。ここで $x \notin \alpha$ ならば $x \in \beta \setminus \alpha$ と γ の最小性から $x = \gamma$ または $\gamma \in x$ 。これはいずれも $x \in \gamma$ に反する。
次に $x \in \alpha$ とすると、仮定より $x \in \beta$ 。もし $x \notin \gamma$ ならば $x = \gamma$ または $\gamma \in x$ だが、α の推移性から $\gamma \in \alpha$ が得られ γ の取り方に矛盾する。以上より $\alpha = \gamma$ 。
(4) $\alpha \cap \beta = \gamma$ は明らかに順序数である。γ が α, β のどちらでもないとすると、(3) より $\gamma \in \alpha, \gamma \in \beta$ なので $\gamma \in \gamma$ 。これは α が $\in$ での全順序集合であることに反する。 □

補題 1.3.1 より次のことが確認できる (Exercise)

(1) 順序数全体の集合 On は関係 $<$ で全順序となる。
(2) 順序数 α について $\alpha = \{\beta \colon \beta < \alpha\}$。

(3) 順序数の族 C について $\cap C$ は順序数であり $\cap C \in C, \cap C = \inf C$ 。
(4) 順序数の集合 X について $\cup X$ は順序数であり、 $\cup X = \sup X$ 。
(5) 順序数 α について $\alpha \cup \{\alpha\}$ も順序数であり $\alpha \cup \{\alpha\} = \inf\{\beta \colon \alpha < \beta\}$。

定理 1.3.1. 任意の整列集合について、順序同型な順序数が一意に存在する。

証明. 補題 1.2.1 より一意性はすぐに従うので、存在性を示す。P を整列集合とし、$x \in P$ について $F(x) = \{F(y) \colon y \in P, y < x\}$ と定義し、像を α とする。
まず α の推移性をみる。 $\beta \in \alpha, \gamma \in \beta$ と仮定すると、定義から $\exists x \in P, \beta = F(x)$ であり $\exists y < x, \gamma = F(y)$ 。つまり $\gamma \in \alpha$ となるので良い。
次に整列集合であることをみる。$\in$ を関係とする全順序集合であることは F の定義からすぐに分かる。$S \subset \alpha$ を空でない部分集合とすると $\emptyset \neq \exists Y \subset P, S = F(Y)$ 。P は整列集合だったので Y の最小元が存在し、F に写した値が S の最小元となる。
最後に F が順序同型であることを示せばよい。$x < y \Rightarrow F(x) \in F(y)$ より F は順序を保つ単射であり、全射性は明らか。 □

定義 1.3.3. $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ を α の**後者** と呼ぶ。
$\alpha = \beta + 1$ と書けるとき α を**後続順序数**、そうでないとき**極限順序数**と呼ぶ。$\emptyset$ を極限順序数とするかどうかは流儀がある。

補題 1.3.2. α が極限順序数であることと $\alpha = \sup_{\beta < \alpha} \beta$ は同値。

証明. $\gamma = \sup_{\beta < \alpha} \beta$ とおく。 $\gamma \leq \alpha$ は明らかなことに注意する。
α が極限順序数のとき $\alpha \leq \gamma$ を示す。$\gamma < \alpha$ とすると、 α が極限順序数であることから $\gamma < \gamma + 1 < \alpha$ ($\beta < \alpha \Rightarrow \beta + 1 \leq \alpha$ に注意)。よって $\gamma < \gamma$ だがこれは全順序性に矛盾。
逆に $\alpha = \gamma$ とする。$\forall \beta < \alpha = \gamma$ について、γ の定義から $\beta < \exists \delta < \alpha$ 。よって $\beta < \beta + 1 \leq \delta < \alpha$ より α は $\beta \cup \{\beta\}$ と書けない。 □

定義 1.3.4. 無限公理から $\emptyset, \emptyset \cup \{\emptyset\}, \emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}, \ldots$ を元とする集合の存在が保証され、順序数の公理を満たす。これを ω と書く。

1.4 順序数の算法

定義 1.4.1. $\alpha > 0$ を極限順序数、$\{a_\xi\}_{\xi < \alpha}$ を非減少な順序数の列としたとき、その極限を $\lim_{\xi \to \alpha} a_\xi = \sup\{a_\xi \colon \xi < \alpha\}$ で定める。

定義 1.4.2. α, β の和を以下で帰納的に定める。

(1) $\alpha + 0 = \alpha$
(2) $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
(3) $\alpha + \beta = \lim_{\xi \to \beta} \alpha + \xi \quad (\beta > 0\colon\ \text{limit})$

$\alpha \cdot \beta, \alpha^\beta$ についても同様にいい感じで定義する。

分配法則などの各種性質は超限帰納法で証明できる。

定理 1.4.1. (超限帰納法) 順序数を引数にもつ論理式 φ について

(1) $\varphi(0)$:True
(2) $\varphi(\alpha) \Rightarrow \varphi(\alpha+1)$
(3) $\forall \beta < \alpha, \varphi(\beta) \Rightarrow \varphi(\alpha)$ (α: limit)

が成り立つなら、任意の順序数 α について $\varphi(\alpha)$ は True。

証明. $\varphi(\alpha)$ が False となる最小の α をとって上の条件を適用する。 □

定理 1.4.2. (Cantor 標準形) $\alpha > 0$ は $n \geq 1, \alpha \geq \beta_1 > \cdots > \beta_n, k_1, \cdots, k_n \in \omega$ を用いて $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$ と一意的に表される。

証明. α の帰納法による。 $\alpha = 1$ のときは $1 = \omega^0 \cdot 1$ より良い。
$\alpha > 1$ について $\beta < \gamma \Rightarrow \omega^\beta < \omega^\gamma$ を用いると $\alpha \leq \omega^\alpha < \omega^{\alpha+1}$ 。よって $\alpha < \omega^\xi$ なる ξ が存在するので最小元をとってくる。ξ が極限順序数だとすると sup の定義からより小さな元を取れるので ξ は後続型。
$\xi = \beta_1 + 1$ とおくと $\omega^{\beta_1} \leq \alpha < \omega^{\beta_1} \cdot \omega$ 。よって $\alpha < \omega^{\beta_1} \cdot \eta$ なる最小の η は 2 以上の自然数なので $\eta = k_1 + 1$ と書ける。
このとき $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \alpha_1 (0 \leq \alpha_1 < \omega^{\beta_1} < \alpha)$ となるので α_1 に帰納法の仮定を適用すれば存在性がわかる。
一意性も同様に α の帰納法を用いればよい。 □

第 2 章

基数