$\mathbb{R}^n$ の空でない星状開集合 U は $\mathbb{R}^n$ と微分同相

tko919

U が星状 $\overset{\text{def}}{\iff} \exists x_0 \in U, \forall x \in U, 0 \leq \forall t \leq 1, (1-t)x_0 + tx \in U$

Fact として次を認める。

$\mathbb{R}^n$ の閉集合 V に対し、C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ で $f(V) = 0, 0 \notin f(V^c)$ となるものが存在する。

証明は "Bump function" 等で調べれば出てくるが、本筋ではないので割愛する。

定理 0.1. $\mathbb{R}^n$ の空でない星状開集合 U は $\mathbb{R}^n$ と微分同相である。

Proof. 平行移動によって $x_0 = 0$ としてよい。

微分同相写像 f の構成

Fact より C^∞ 級関数 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ で $\phi^{-1}(0) = U^c$ となるものが取れる。このとき、

$$\begin{aligned}
g &: U \to \mathbb{R} \\
&x \mapsto (\int_0^1 \frac{dt}{\phi(xt)})^2 \cdot ||x||^2 \\
f &: U \to \mathbb{R} \\
&x \mapsto g(x) \cdot x
\end{aligned}$$

と定義する。

$f : C^\infty$ 級関数

ϕ は C^∞ 級なので $\frac{1}{\phi}$ および $\int_0^1 \frac{dt}{\phi(xt)}$ は U 上 C^∞ 級。また $||x||^2$ は各成分の多項式で表せるので特に C^∞ 級。よって g および f は U 上 C^∞ 級。

f : 単射

$x \neq y$ を U の元とする。$x = 0, y \neq 0$ ならば ϕ は $\{ty : 0 \leq t \leq 1\}$ 上で正なので $g(y) > 0$ 。
$\dot{x} = \frac{x}{||x||}$ として、 $\dot{x} \neq \dot{y}$ ならば $\dot{f(x)} \neq \dot{f(y)}$ より $f(x) \neq f(y)$ 。
また $\dot{x} = \dot{y}$ ならば一般性を失わず $||x|| < ||y||$ 。また置換積分によって $g(x) = (\int_0^{||x||} \frac{dt}{\phi(t\dot{x})})^2$ よりノルムの大きさに対して狭義単調増加。よって $g(x) < g(y), ||f(x)|| = g(x)||x|| < g(y)||y|| = ||f(y)||$ 。

f : 全射

　$A(x) = \{t \geq 0 : t\dot{x} \in U\}$ と置く。

(i) $A(x) = +\infty$ のとき

$L = (\int_0^1 \frac{dt}{\phi(t\dot{x})})^2$ とすると、 $||x|| \geq 1 \Rightarrow L \leq g(x)$ 。よって $||f(x)|| = g(x) \cdot ||x|| \leq L||x|| \xrightarrow{||x|| \to +\infty} +\infty$ 。

(ii) $A(x) < +\infty$ のとき

$\phi(A(x)\dot{x}) = 0$ と ϕ は C^∞ 級なので、平均値の定理より $\forall t \in [0,1), \exists u \in [t,1], \text{s.t.} \frac{|\phi(A(x)\dot{x}) - \phi(t\dot{x})|}{A(x) - t} = \phi'(u\dot{x})$ 。

よって $M = \sup\{\phi'(u\dot{x}) : u \in [0,1]\}$ とすると、 ϕ' は C^∞ 級かつ $[0,1] : \text{cpt}$ より M は有限。

このとき $\forall t \in [0,1), \phi(t\dot{x}) \leq M(A(x) - t)$ より

$$
\begin{aligned}
g(x) &= (\int_0^u \frac{dt}{\phi(t\dot{x})})^2 \\
&\geq (\int_0^u \frac{dt}{M(A(x) - t)})^2 \\
&\geq \frac{1}{M}(\int_{A(x)-u}^{A(x)} \frac{dt}{t})^2 \xrightarrow{u \to A(x)} +\infty
\end{aligned}
$$

したがって連続性から中間値の定理を用いて f は全射である。

$f^{-1} : C^\infty$ 級関数

　逆関数定理の系を用いると、 $\forall x \in U, h \neq 0$ について $d_h f(x) \neq 0$ となることを言えばよい。背理法で示す。

chain rule により $d_h f(x) = g(x)h + d_h g(x)x = 0$ となり、$h \neq 0$ より h, x は一次従属。よって $h = \mu x(\mu \neq 0, x \neq 0)$ とおくと、$g(x) + d_x g(x) = 0$ が成り立つ。

しかし $0 \leq g(x)$ であり、$\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto g(tx)$ とすると狭義単調増加性より $d_x g(x) = \lambda'(1) > 0$ 。これは仮定に反する。 $\square$