Riemann 幾何学とリッチフロー

tko919

目次

第 1 章

Riemann 多様体

1.1 Riemann 計量と接続

定義 1.1.1. M を n 次元可微分多様体とする。 M 上の **Riemann 計量**とは、各点 $p \in M$ の接ベクトル空間に対する内積 $\langle -,- \rangle_p \colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ の族であり、$\langle -,- \rangle \colon M \ni p \mapsto \langle -,- \rangle_p$ が C^∞ 級であるものを指す。組 $(M, \langle -,- \rangle)$ を **Riemann 多様体**という。

Euclid 空間ではベクトルの平行移動が自然に行えるが、一般の多様体上では移動したベクトルが接空間の外にはみ出してしまうことがある。そこで、異なる点の接空間を「つなげる」ことで形式的に平行移動を可能にする機構を作りたい。

定義 1.1.2. M を n 次元可微分多様体、$\mathfrak{X}(M)$ を M 上のベクトル場全体とする。

M 上の **Affine 接続**ないし**共変微分**とは、写像 $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ であって、次の条件を満たすものである。($X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ とする)

(1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
(2) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
(3) $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

この条件を満たす接続は無数に存在する。そこで Riemann 計量に対する良い性質を持った接続をひとつ採用したい。

定義 1.1.3. Affine 接続 ∇ が**対称的**とは、$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ について $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ を満たすものをいう。

定義 1.1.4. Riemann 多様体 $(M, \langle -,- \rangle)$ 上の Affine 接続 ∇ が**計量と両立する**とは、$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ について $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ を満たすものをいう。

接続 ∇ が計量と両立するとき、曲線 $\gamma(t)$ に沿った平行なベクトル場 $X(t), Y(t)$ に対して $\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t) \rangle = \langle \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} X(t), Y(t) \rangle + \langle X(t), \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} Y(t) \rangle = 0$ より $\langle X(t), Y(t) \rangle$ は定数になる。つまり、平行移動によって 2 つのベクトルの「角度」が保存されることを表現している。

定理 1.1.1. Riemann 多様体 $(M, \langle -,- \rangle)$ 上で対称的かつ計量と両立する Affine 接続 ∇ が一意に存在する。これを **Levi-Civita 接続**という。 □

1.2　測地線と第一変分公式

定義 1.2.1. $(M,\langle -,-\rangle)$ を連結な Riemann 多様体、$\gamma\colon [a,b]\to M$ を区分的なめらかな曲線 (つまり、$[a,b]$ の分割 $\{s_i\}$ が存在して各区間 $[s_i,s_{i+1}]$ 上 C^∞ 級な連続写像) とする。γ の**長さ** を $L(\gamma):=\sum_i\int_{s_i}^{s_{i+1}}|\frac{\partial\gamma}{\partial s}(s)|ds$ とする ($|v|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$)。$M$ 上の 2 点 p,q について $\rho(p,q):=\inf\{L(\gamma)\colon \gamma(a)=p,\gamma(b)=q\}$ が定められ、距離の公理を満たす。また γ の**エネルギー**を $E(\gamma):=\int_a^b|\frac{\partial\gamma}{\partial s}(s)|^2ds$ とする。$E(p,q)$ も同様に定める。

Cauchy-Schwarz の不等式より $L(\gamma)^2\le|b-a|E(\gamma)$ が成り立ち、等号が成立するのは $|\frac{\partial\gamma}{\partial s}(s)|$ が定数のときである。

端点 p,q を固定したまま γ を摂動して、エネルギー E が極小値をとる曲線を調べたい。そのために区分的滑らかな曲線の 1 パラメータ族 $\widehat{\gamma}\colon[a,b]\times(-\epsilon,\epsilon)\ni(s,u)\mapsto\widehat{\gamma}_u(s)\in M$ をとり $\gamma=\widehat{\gamma}_0, U(s)=\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u}(s,0)$ とおく。逆に U が与えられたとき、条件を満たす $\widehat{\gamma}$ を構成することもできる。端点を固定しているので $U(a)=U(b)=0$ に注意する。

ある U について $u\mapsto E(\widehat{\gamma})$ の $u=0$ による微分は $\widehat{\gamma}$ の取り方に依存しない。よって $\dot{E}(U):=\frac{\partial E(\widehat{\gamma})}{\partial u}|_{u=0}$ を定義でき、これは γ を U に沿って滑らかに変形したときの差分を表す。特に $E(p,q)$ を実現する γ は $\dot{E}(U)=0$ を満たすと考えられる。

以降ではベクトル場 $d\widehat{\gamma}(\frac{\partial}{\partial u})$ を $\frac{\partial}{\partial u}$ と略記する。∇ を Levi-Civita 接続とすると、E の被積分関数の u による微分が

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}|\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial s}|^2&=\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\gamma},\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial s}\rangle\\&=\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial u}\widehat{\gamma},\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial s}\rangle\ (\because[\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial u}]=0)\\&=\frac{\partial}{\partial s}\langle\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u},\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial s}\rangle-\langle\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u},\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\gamma}\rangle\end{aligned}$$

となり、これを積分すると

$$\frac{1}{2}\dot{E}(U)=\sum_i[\langle U,\dot{\gamma}\rangle]_{s_i}^{s_{i+1}}-\int_a^b\langle U,\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\rangle ds \tag{1.1}$$

が得られる。これを **第一変分公式**と呼ぶ。

$\widehat{\gamma}$ が滑らかなとき第一項が消え、全ての U に対して第一変分が 0 となるときには **Euler-Lagrange 方程式**

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=0 \tag{1.2}$$

が成り立つ。この方程式を満たす γ を**測地線**という。

改めて γ を測地線としたとき、 $\frac{1}{2}\frac{d}{ds}|\dot{\gamma}|^2=\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s}\gamma,\dot{\gamma}\rangle=0$ より $|\dot{\gamma}|$ は定数。よって s は γ の弧長パラメータに比例する。また、(1.2) は Affine 変換に対して不変なので、 $s\mapsto|\dot{\gamma}|s$ に取り替えることで最初から弧長パラメータ表示を持つと仮定してよい。

(1.2) は 2 階の常微分方程式なので、初期値 $\gamma(0)=p\in M,\dot{\gamma}(0)=v\in T_pM$ が与えられると、Picard-Lindelöf の定理より $\exists\delta>0,\exists!\gamma_v:(-\delta,\delta)\to M$ s.t. (1.2)。この δ は $(p,v)\in TM$ に対して局所一様連続となるので、結局 $p\in M$ に対して $0\in\exists U\subset T_pM$ s.t. $\delta>1$ より **指数写像** $\exp_p:U\ni v\mapsto\gamma_v(1)\in M$ が定義できる。一般論からこれは C^∞ 級となる。

補題 1.2.1. $\gamma:[0,a]\to M$ を 2 点 p,q を結ぶ区分的滑らかな曲線で、弧長に比例するパラメータを持つとする。もし $L(\gamma)=\rho(p,q)$ のとき、 γ は滑らかで (1.2) を満たす。このとき γ を**最短測地線**と呼ぶ。

証明. パラメータの仮定から $L(\gamma)^2=aE(\gamma)$ より γ は E の最小値をとるので $\forall U, \dot{E}(U)=0$ 。γ に属する $[0,a]$ の分割 $\{s_i\}$ について、s_i の近傍で 0 となる適切な U を選ぶことで (1.1) の第一項を消すことができ、γ の smooth な点全体で (1.2) が成り立つ。有限集合は測度 0 なので特に (1.1) の第二項は無視できる。よって $\sum_i\langle U(s_i),\dot\gamma(s_i^+)-\dot\gamma(s_i^-)\rangle=0$ より $\dot\gamma(s_i^+)=\dot\gamma(s_i^-)$ 。したがって γ は C^1 級であり、解の一意性から滑らかな曲線であることがわかる。 □

逆関数定理から $\exp_p$ は $0\in T_pM$ の近傍 U で局所微分同相となる。$\iota_p:=\inf\{r>0\colon B(0;r)\subset U\}>0$ を p の**単射半径**という。また $\iota(V)=\inf_{p\in V}\iota_p$ を V の単射半径と呼ぶが、これは 0 になることがある。$r\le\iota_p$ について $\exp_p$ による $B(0;r)\subset T_pM$ は p の局所座標近傍を定める。これを**正規座標**と呼ぶ。

補題 1.2.2. 任意の p について $\iota(V)>0$ なる近傍 $p\in V$ が存在する。

証明. $(p,0)\in TM$ のある近傍 D が存在して $\exp: D\ni(q,v)\mapsto\exp_q(v)\in M\times M$ が定義される。これについて逆関数定理を使うことで所望の結論を得る。 □

補題 1.2.3. (Gauss の補題) $p\in M,\delta<\iota_p,v,w\in B(0;\delta)\subset T_pM,q:=\exp_p v\in M$ とすると、微分 $d_v\exp_p:T_v(T_pM)\cong T_pM\to T_qM$ は内積を保存する。つまり、 $\langle d_v\exp_p v,d_v\exp_p w\rangle_q=\langle v,w\rangle_p$ 。

証明. $\epsilon>0$ を十分小さくとり $\varphi:[0,1]\times(-\epsilon,\epsilon)\to M,(s,t)\mapsto\exp_p(s(v+tw))$ とおく。このとき

$$
\begin{aligned}
d_v\exp_p(v)&=\frac{\partial}{\partial s}\exp_p((s+1)v)|_{s=0}=\frac{\partial\varphi}{\partial s}(1,0)\\
d_v\exp_p(w)&=\frac{\partial}{\partial t}\exp_p(v+tw)|_{t=0}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}(1,0)
\end{aligned}
$$

より示したいことは $\langle\frac{\partial\varphi}{\partial s}(1,0),\frac{\partial\varphi}{\partial t}(1,0)\rangle_q=\langle v,w\rangle_p$ と言い換えられる。

$s\mapsto\varphi(s,t)$ は測地線なので $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)=0$ 。よって Levi-Civita 接続の性質から

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle&=\underbrace{\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle}_{0}+\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial s},\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle\\
&=\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial s},\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right\rangle\\
&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right\rangle\\
&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|v+tw|^2=\langle v,w\rangle+t\langle w,w\rangle
\end{aligned}
$$

より $\frac{\partial}{\partial s}\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle(s,0)=\langle v,w\rangle$ 。また $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,0)=\frac{\partial}{\partial t}\exp_p(0)=0$ と併せて $\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle(s,0)=s\langle v,w\rangle$ が分かるので、$s=1$ を代入して題意を得る。 □

命題 1.2.1. $p\in M,r_0<\iota_p$ とし、 $\gamma:[0,1]\to B(p;r_0):=\exp_p(B(0;r_0)),\gamma(0)=p$ は区分的滑らかな曲線で $q:=\gamma(1)$ とすると、$L(\gamma)\ge r$ 。等号が成り立つのは γ が測地線 (をパラメータ変換したもの) のときに限る。

証明. $\exists r: [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \eta: [0,1] \to \{X \in T_pM \colon |X| = 1\}$ s.t. $\gamma(t) = \exp_p(r(t)\eta(t))$ より、$\dot\gamma(t) = d_{\gamma(t)}\exp_p(\dot r(t)\eta(t)) + d_{\gamma(t)}\exp_p(r(t)\dot\eta(t))$ 。

ここで η が微分可能な t では $\frac{d}{dt}\underbrace{\langle \eta(t), \eta(t)\rangle}_{1} = 2\langle \dot\eta(t), \eta(t)\rangle = 0$ なので補題 1.2.3 より、上の $\dot\gamma(t)$ の分解は直交分解。よって

$$
\begin{aligned}
|\dot\gamma(t)| &\geq |d_{\gamma(t)}\exp_p(\dot r(t)\eta(t))| \\
&= |\dot r(t)| \cdot |d_{\gamma(t)}\exp_p(\eta(t))| = |\dot r(t)| \\
L(\gamma) &\geq \int_0^1 |\dot r(t)| dt \\
&\geq |\int_0^1 \dot r(t) dt| \\
&= r(1) - r(0) = \rho(p,q)
\end{aligned}
$$

等号が成り立つのは $\eta(t)$ が区分的定数かつ $\dot r \geq 0$ のときだが、$\eta(t)$ が定数のところでは正規化して $\dot r = 1$ を仮定してよいので、結局 η は定数関数にできる。このとき γ は測地線パラメータ変換で得られる。 □

補題 1.2.4. $r_0 < \iota_p$ とし $p, q \in M$ を $\rho(p,q)$ とすると $\exists q' \in \partial B(p; r_0)$ s.t. $\rho(p,q) = \rho(p,q') + r_0$ 。

証明. p, q を結ぶ曲線の族 $\{\gamma_i\}$ で $L(\gamma_i) \to \rho(p,q)$ なるものをとり、$\partial B(p; r_0)$ との交点を q_i とするとコンパクト性から $q_i \to \exists q'$ 。距離の公理からこの q' は条件を満たす。 □

命題 1.2.2. (M, g) が完備のとき、$v \in T_pM$ を初期値とする (1.2) の解は $[0, \infty)$ 上に延長できる。つまり $\exp_p$ は T_pM 全体で定義される。

証明. 解の存在区間の上限を A としたとき、$A < \infty$ を仮定して矛盾を言えばよい。ρ の定義より $\rho(\gamma_v(s), \gamma_v(t)) \leq |s - t| \cdot |v|$ 。$s \uparrow A$ とすると $\gamma_v(s)$ は Cauchy 列なので、完備性から $\exists q = \lim_{s\uparrow A}\gamma_v(s)$ 。ここで補題 1.2.2 を使うと測地線が $[0, A + \delta)$ まで延長できるので仮定に矛盾する。 □

定理 1.2.1. (Hopf-Rinow の定理) (M, g) が完備のとき、$\forall p, q \in M$ について p, q を結ぶ最短測地線が存在する。

証明. $r_0 < \iota_p$ として、$\rho(p,q) > r_0$ を仮定してよい。補題 1.2.4 で得られる q' をとると命題 1.2.1 から $\exists v \in T_pM, q' = \exp_p(r_0 v)$ 。また命題 1.2.2 より $\gamma(s) = \exp_p(sv)$ は $[0, \infty)$ 上で定義される。

$K = \{s \in [0,\infty) \colon L(\gamma|_{[0,s]}) + \rho(\gamma(s), q) = \rho(p,q)\}$ とおくと、$s_0 \in K$ のとき $L(\gamma|_{[0,s_0]}) = \rho(p,q) - \rho(\gamma(s_0), q) \leq \rho(p, \gamma(s_0))$ より $\gamma|_{[0,s_0]}$ は最短測地線。K はコンパクトなので $\overline{s} := \max K \in K$ であり $q_2 = \gamma(\overline{s})$ がとれるので、$q_2 = q$ を示せばよい。

そうでないとき、$r_1 = \min(\rho(q_2, q)/2, \iota_{q_2}) > 0$ とおくと、補題 1.2.4 より $\exists q_3 \in \partial B(q_2, r_1)$ s.t. $\rho(q_2, q_3) + \rho(q_3, q) = \rho(q_2, q)$ 。三角不等式より

$$
\begin{aligned}
\rho(p, q_2) + \rho(q_2, q_3) &= \rho(p, q_2) + \rho(q_2, q) - \rho(q_3, q) \\
&= \rho(p, q) - \rho(q_3, q) \leq \rho(p, q_3)
\end{aligned}
$$

より $\rho(p, q_2) + \rho(q_2, q_3) = \rho(p, q_3)$ 。よって、常微分方程式の解の一意性から q_2, q_3 を結ぶ最短測地線は γ と一致し、$q_3 = \gamma(\overline{s} + r_1)$ より $L(\gamma|_[0, s + r_1]) + \rho(q_3, q) = \rho(p, q_2) + \rho(q_2, q_3) + \rho(q_3, q) = \rho(p, q)$ 。これは

$\overline{s}$ の最大性に矛盾する。 $\square$

Riemann 多様体に局所的な完備性を仮定しても、同様の結論が得られる。

定義 1.2.2. Riemann 多様体 (M,g) と 1 点 $p\in M$ の組 (M,g,p) を **基点つき Riemann 多様体**という。

定義 1.2.3. $D>0$ とする。 $\forall l<D$ について基点つき Riemann 多様体 (M,g,p) の閉測地球 $\overline{B(p;l)}$ がコンパクトのとき、**D-完備**という。

定理 1.2.2. D-完備な基点つき Riemann 多様体 (M,g,p) について $\exp_p: B(0;D)\to M$ が定義され、$\rho(p,q)<D$ なる $p,q\in M$ を結ぶ最短測地線が存在する。 $\square$

1.3 第二変分公式と Jacobi 場

エネルギー汎関数 E が極値をとる曲線を測地線と定義したが、E が極小値をとるならば 2 階微分 $\ddot{E}(U)=\frac{\partial^2 E}{\partial u^2}|_{u=0}$ は非負となるだろう。

$\gamma:[0,a]\to M$ を測地線とし $\widehat{\gamma},U$ をその変分・変分ベクトルとすると、被積分関数の u による 2 階微分は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u})^2|\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial s}|^2 &= \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial}{\partial s}\langle\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u},\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial s}\rangle-\langle\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u},\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\gamma}\rangle)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial s\partial u}\langle\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u},\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial s}\rangle-\underbrace{\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u},\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\gamma}\rangle}_{0}-\langle\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u},\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\gamma}\rangle\\
&= \frac{\partial}{\partial s}(\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u},\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial s}\rangle+\langle\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u},\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial s}\rangle)-\langle\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u},\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\gamma}\rangle
\end{aligned}$$

第三項について曲率テンソルの定義から

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\gamma(U) &:= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\gamma}\\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial u}\widehat{\gamma}+R(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial s})\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\gamma}
\end{aligned}$$

が成り立ち、これを **Jacobi 作用素**という。これを積分すると**第二変分公式**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ddot{E}(U) &= [\langle\nabla_U U,\dot{\gamma}\rangle+\langle U,\nabla_U\dot{\gamma}\rangle]_0^a-\int_0^a\langle U,\mathcal{J}_\gamma U\rangle ds\\
&= [\langle\nabla_U U,\dot{\gamma}\rangle]_0^a+\int_0^a(|\nabla_{\dot{\gamma}}U|^2-\langle U,R(U,\dot{\gamma})\dot{\gamma}\rangle)ds
\end{aligned}$$

を得る。

$\mathcal{V}$ を γ に沿った区分的滑らかなベクトル場全体の集合、$\mathcal{V}^0=\{X\in\mathcal{V}\colon X(a)=X(b)=0\}$ とする。第二変分公式の第二項について、$U,V\in\mathcal{V}$ として

$$\begin{aligned}
I(U,V) &:= \int_0^a(\langle\nabla_{\dot{\gamma}}U,\nabla_{\dot{\gamma}}V\rangle-\langle R(U,\dot{\gamma})\dot{\gamma},V\rangle)ds\\
&= [\langle\nabla_{\dot{\gamma}}U,V\rangle]_0^a-\int_0^a\langle\nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}}U+R(U,\dot{\gamma})\dot{\gamma},V\rangle ds
\end{aligned}$$

を**指数形式**という。$\forall X \in \mathcal{V}^0, I(X,X) \geq 0$ のとき I を**半正定値**であるといい、さらに $0 \neq \forall X \in \mathcal{V}^0, I(X,X) > 0$ のとき I を**正定値**であるという。$\widehat{\gamma}_u(s) = \exp_{\gamma(s)} uX(s)$ を考えることで、γ が最短ならば I が半正定値であることが従う。

$\{e_i\}$ を T_pM の正規直交基底として、

$$\mathrm{Rc}(X,Y) := \sum_i \langle R(X,e_i)e_i, Y\rangle = \mathrm{tr}[Z \mapsto R(Z,X)Y]$$

で定まる TM の対称双線形形式を **Ricci 曲率**といい、$R(p) = \sum_i \mathrm{Rc}(e_i,e_i)$ で定まる値を **Scalar 曲率**という。

定理 1.3.1. (Myers の定理) $\lambda > 0, D > \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ とする。D-完備な n 次元 Riemann 多様体 (M,g) について $\mathrm{Rc} \geq (n-1)\lambda$ が成り立てば、 M はコンパクトで $\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$

証明. 2 点 $p,q \in M$ をとり $\rho(p,q) = l < D$ とする。定理 1.2.1 より最短測地線 $\gamma : [0,1] \to M$ が存在する。$\{e_i\}_{i=1}^n$ $(e_1 = \dot{\gamma}/l)$ を γ に沿った平行なベクトル場で、各点の接空間の正規直交基底を成すとする。そして $U_i = \sin(\pi s)e_i$ とおくと、 U_i は全域で滑らかなことに注意して

$$\begin{aligned}
I(U_i,U_i) &= -\int_0^1 \langle U_i, \nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}}U_i + R(U_i,\dot{\gamma})\dot{\gamma}\rangle\, ds \\
&= -\int_0^1 \frac{\partial^2 \sin(\pi s)}{\partial s^2} + l^2 \sin^2(\pi s)\langle R(e_i,\dot{\gamma})\dot{\gamma}, e_i\rangle\, ds \\
&= \int_0^1 \sin^2(\pi s)(\pi^2 - l^2\langle R(e_i,\dot{\gamma})\dot{\gamma}, e_i\rangle) ds \\
\sum_{i=2}^n I(U_i,U_i) &= \int_0^1 \sin^2(\pi s)((n-1)\pi^2 - l^2\mathrm{Rc}(\dot{\gamma},\dot{\gamma})) ds
\end{aligned}$$

ここで $l > \pi/\sqrt{\lambda}$ とすると右辺は負になるので、$\exists U_i, I(U_i,U_i) < 0$ 。よって I は半正定値でないので γ の最短性に矛盾する。定理 1.2.1 から $M = \exp_p(\overline{B(0;\pi/\sqrt{\lambda})})$ より M はコンパクト。 □

定義 1.3.1. γ に沿ったベクトル場 V が

$$\mathcal{J}_\gamma V = \nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}}V + R(V,\nabla_{\dot{\gamma}})\nabla_{\dot{\gamma}} = 0 \tag{1.3}$$

を満たすとき、 V を **Jacobi 場**という。1.3 は 2 階の常微分方程式なので、基点 $p = \gamma(0)$ での初期値 $V(0), \nabla_{\dot{\gamma}}V(0) \in T_pM$ が与えられたとき、条件を満たす Jacobi 場が一意的にとれる。よって、Jacobi 場全体は $2n$ 次元のベクトル空間をなす。

例 1.3.1. $\gamma(s,u)$ を測地線の 1 パラメータ族とすると $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\dot{\gamma}$ 。よって Jacobi 作用素の定義から $U = \frac{\partial\gamma}{\partial u}|_{u=0}$ 。特に $\gamma(s,t) = \exp_p(s(X+uY))$ のとき $U = d_{sX}\exp_p(sY)$ であり、初期値は $U(0) = 0, \nabla_{\dot{\gamma}}U(0) = Y$ なので $U(0) = 0$ なる Jacobi 場は全てこの形になる。

補題 1.3.1. 測地線 $\gamma : [0,a] \to M$ の指数形式が半正定値で $U \in \mathcal{V}^0, I(U,U) = 0$ ならば、U は Jacobi 場。

証明. $\forall V \in \mathcal{V}^0, \forall\alpha \in \mathbb{R}$ について $I(U+\alpha V, U+\alpha V) = 2\alpha I(U,V) + \alpha^2 I(V,V) \geq 0$ より $I(U,V) = 0$ (そ

うでないなら、α を適切に設定して左辺を負にすることが出来る)。よって、

$$0 = I(U,V) = \sum_i \left\langle \nabla_{\dot\gamma} U(s_i^-) - \nabla_{\dot\gamma} U(s_i^+), V \right\rangle - \int_0^a \langle \mathcal{J}_\gamma U, V \rangle \, ds$$

が成り立ち、 V は任意なので $\mathcal{J}_\gamma U = 0$ が従う。 □

補題 1.3.2. (指数定理) 測地線 $\gamma : [0,a] \to M$ の指数形式が半正定値とする。γ に沿った Jacobi 場 Y と $V \in \mathcal{V}$ が $Y(0) = V(0), Y(a) = V(a)$ を満たすとき、$I(Y,Y) \le I(V,V)$ が成り立つ。等号が成立する条件は V が Jacobi 場であるときのみ。

証明. 指数定理の定義より $I(Y, Y-V) = 0$ なので

$$\begin{aligned} 0 &\le I(Y-V, Y-V) \\ &= I(-Y-V, Y-V) + 2I(Y, Y-V) \\ &= I(V,V) - I(Y,Y) \end{aligned}$$

等号条件は前の補題と Jacobi 場の線形性から成り立つ。 □

定義 1.3.2. 測地線 γ 上の相異なる 2 点 $p = \gamma(0), q = \gamma(s_1)$ に対して $V(0) = V(s_1) = 0$ なる γ 上の 0 でない Jacobi 場が存在するとき、 p, q は γ に沿って **共役** であるという。例 1.3.1 より γ_X に沿って p と $q = \exp_p(X)$ が共役なことと X が $\exp_p$ の臨界点であることは同値。

命題 1.3.1. $\gamma : [0,a] \to M$ を測地線とする。

(1) γ 上 $p = \gamma(0)$ と共役な点が存在しない $\iff$ I が正定値
(2) γ 上 $p = \gamma(0)$ と共役な $q = \gamma(a)$ でない点が存在しない $\iff$ I が半正定値

証明. 必要性を示す。$q_1 = \gamma(s_1)$ とし、V を γ 上の Jacobi 場で $V(p) = V(q_1) = 0$ を満たすとする。このとき、$U(s) = \begin{cases} V(s) & (s \in [0, s_1]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$ は γ 上に区分的滑らかなベクトル場であり $I(U,U) = 0$ を得る。I が正定値ならば $V \equiv 0$ である。半正定値ならば補題 1.3.1 より U は Jacobi 場だが、$s_1 \ne a$ のとき U は a の近傍で恒等的に 0 なので $U(a) = \nabla_{\dot\gamma} U(a) = 0$ 。初期値を満たす Jacobi 場の一意性より $V \equiv 0$ を得る。

十分性を示す。(2) の十分性のみ示せばよい。($\because$ 特に γ 上 p と共役な点が存在しないときも I は半正定値なので、$V \in \mathcal{V}^0, I(V,V) = 0$ について補題 1.3.1 より V は Jacobi 場。$V(0) = V(a) = 0$ と仮定から $V \equiv 0$ が従い I は正定値となる) $\gamma_s := \gamma|_{[0,s]}$ に対し $I_s := I_{\gamma_s}$ が半正定値となる s の上限を s_1 とおく。補題 1.2.2、命題 1.2.1 より $s_1 > 0$ であり、I の連続性から I_{s_1} も半正定値。$s_1 < a$ ならば $p, \gamma(s_1)$ が共役であることを言いたい。再び補題 1.2.2 より $0 < \forall \epsilon < \delta$ について $\sigma_\epsilon = \gamma|_{[s_1-\delta, s_1+\epsilon]}$ が最短となる $\delta > 0$ が存在する。このとき $I_{s_1+\epsilon}$ は半正定値でないので、$\exists X_\epsilon \in \mathcal{V}^0_{s_1+\epsilon}, I_{s_1+\epsilon}(X_\epsilon, X_\epsilon) < 0$ 。$s_1 - \delta$ の近傍での変形とスカラー倍によって $|X_\epsilon(s_1-\delta)| = 1$ を仮定してよい。例 1.3.1 より $U^-(0) = 0, U^-(s_1-\delta) = X_\epsilon(s_1-\delta)$ なる $\gamma_{s_1-\delta}$ 上の Jacobi 場が存在し、補題 1.3.2 より $I_{s_1-\delta}(U^-, U^-) \le I_{s_1-\delta}(X_\epsilon, X_\epsilon)$ 。同様に $U^+(s_1+\epsilon) = 0, U^+(s_1-\delta) = X_\epsilon(s_1-\delta)$ なる σ_ϵ 上の Jacobi 場をとると $I_{\sigma_\epsilon}(U^+, U^+) \le I_{\sigma_\epsilon}(X_\epsilon, X_\epsilon)$ が分かる。

U^-, U^+ を $s_1 - \delta$ で接続したベクトル場を $V_\epsilon \in \mathcal{V}^0_{s_1+\epsilon}$ とすると、辺々足して $I_{s_1+\epsilon}(V_\epsilon, V_\epsilon) \le I_{s_1+\epsilon}(X_\epsilon, X_\epsilon) < 0$ 。$\epsilon \downarrow 0$ なる列を適切に選び U^-, U^+ を収束させると、 $|V_\epsilon(s_1 - \delta)| = 1$ より V_ϵ は 0 でないベクトル場 $V \in \mathcal{V}^0_{s_1}$ に収束する。これは $I_{s_1}(V,V) \le 0$ を満たすが、I_{s_1} は半正定値なので 0 に等しく、補題 1.3.1 より V は Jacobi 場。よって $p, \gamma(s_1)$ は共役。 □