

サマーチャレンジ課題演習 P07

はじめに

サマーチャレンジによこそ！！

サマーチャレンジ課題演習P07班のみなさん、はじめまして！ このレジュメには Advanced な内容も含まれているので、サマチャレ期間中に全ページを読んでもらえるとは思ってはいませんが TA 達からの”おみやげ”として、帰ってからもまた手に取って読んでもらえるとうれしいです。

みんなで最高のサマーチャレンジにしていきましょう！

平成 29 年 6 月 12 日 TA 一同

目 次

第1章 Introduction	7
1.1 光子の干渉	7
第2章 実験の概要	9
2.1 光の干渉	9
2.1.1 フラウンホーファー回折	9
2.1.2 線状光源	10
2.1.3 単スリット	11
2.1.4 ダブルスリット	16
2.2 偏光と干渉	18
2.2.1 偏光	18
2.2.2 偏光板	19
2.2.3 偏光板と干渉	20
2.2.4 偏りのない光	22
第3章 演習	27
第4章 光検出器	31
4.1 光検出器について	31
4.2 光電子増倍管 (Photo Multiplier Tube)	31
4.3 フォトダイオード	32
4.3.1 PN フォトダイオード	32
4.3.2 PIN フォトダイオード	33
4.3.3 アバランシェフォトダイオード (APD)	34
4.3.4 MPPC	36
4.4 MPPC の特性	37
4.4.1 評価の方法	38
4.4.2 ゲイン	39
4.4.3 ノイズとその他測定に影響を及ぼす要素	41

第 5 章 Electronics	47
5.1 電気信号の特性	47
5.1.1 電気信号を見る	47
5.1.2 オシロスコープ	47
5.1.3 信号の種類	47
5.2 NIM 規格回路モジュール	48
5.2.1 NIM 規格	48
5.2.2 モジュール	49
5.3 その他-実験で用いるもの	50
5.4 おまけ-回路素子の見方	51
第 6 章 Statistics	57
6.1 統計はなぜ必要か	57
6.2 誤差	57
6.2.1 誤差の種類	57
6.2.2 誤差の表し方	58
6.2.3 誤差の伝播	59
6.3 基本的な統計	61
6.3.1 二項分布	61
6.3.2 Poisson 分布	62
6.3.3 Gauss 分布	62
6.3.4 χ^2 検定	64
付 錄 A ROOT In A Nutshell	69
A.1 はじめに	70
A.1.1 ROOT をインストールする	70
A.1.2 ROOT を起動する	72
A.1.3 ROOT の起動オプション	74
A.1.4 ROOT の終了	75
A.1.5 作業ディレクトリを作る	75
A.2 ヒストグラムを描こう	76
A.2.1 tree	76
A.2.2 データを選別する（カット）	86
A.2.3 カットの例	86
A.2.4 ヒストグラムの重ね描き	90
A.2.5 自分でヒストグラムを用意しよう	93
A.3 ヒストグラムをフィットしよう	97

A.3.1	ROOT に用意されている関数でフィット	97
A.3.2	関数の作成	102
A.4	グラフについて	114
A.4.1	グラフを描いてみよう	114
A.5	マクロを書いてみよう	121
A.5.1	マクロの書き方	121
A.6	終わりに	124
付 錄 B	古典場の量子化	127
B.1	なぜ場の量子論が必要なのか	127
B.2	記法・単位	127
B.3	古典場のラグランジュ形式	128
B.4	スカラー場の量子化	129
付 錄 C	LED 発光原理	137
C.1	直接遷移型と間接遷移型	137
付 錄 D	電気信号とインピーダンス	141
D.1	フィルタ回路	141
D.1.1	CR 回路	141
D.1.2	RC 回路	142
D.2	同軸ケーブル	143
D.2.1	同軸ケーブルのインダクタンス	143
D.2.2	同軸ケーブルの静電容量	144
D.2.3	同軸ケーブルの等価回路	145
D.2.4	同軸ケーブルの信号伝達速度	147
D.2.5	同軸ケーブルのインピーダンス	147
D.3	信号の反射	148
付 錄 E	コマンドラインでの操作	153
E.1	Windows の場合	154
E.1.1	ディレクトリの内容一覧を表示	154
E.1.2	ディレクトリの移動	155
E.1.3	ディレクトリの作成	157
E.2	Linux の場合	158
E.2.1	ディレクトリの内容一覧を表示	158
E.2.2	ディレクトリの移動	160

第1章 Introduction

1.1 光子の干渉

「私は二つの窓の両方と一緒に通って室内に入ったのです」
私はこの答えにあっけにとられました。

— 朝永振一郎, 『光子の裁判』

我々は、光が光子と呼ばれ、粒子のようにふるまうことを知っている。これは、aignシュタインの提唱した光電効果の以下のような性質からわかる。

1. 飛び出す電子一つ一つのエネルギーを測ってみると、照射する光の強さにはよらず、振動数 ν のみに依存する。
2. 飛び出す電子の個数は、照射する光の強さに依存する。

電子が光のエネルギーを吸収するときは、1 個の光子が 1 個の電子に吸収されるとし、金属内の自由電子が金属表面をとびだすときに必要な仕事(仕事関数)を W とするととびだす電子の運動エネルギーは、

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W \quad (1.1)$$

となる。この式は先に述べた 1、2 の実験事実をうまく説明しており、光が $h\nu$ のエネルギーを持つ粒子のようにふるまっていることを示している。

ところが我々は、光が干渉を起こすことも知っている。しかもそれは、光子がたったひとつしかないときも起こるのである。二重スリットを用いたヤングの実験では、ひとつの光子はそのスリットのどちらかのみを通るのではなく、どちらも通るというのだ。

あるときは粒子のようにふるまい、またあるときは波のようにふるまう。この実験では、日常概念での「粒子」や「波動」をそのまま当てはめることのできない光子の性質を、干渉実験によって確かめる。

第2章 実験の概要

2.1 光の干渉

2.1.1 フラウンホーファー回折

単色光の点光源から十分離れた位置¹に小さな開口を持つスリット, さらにはスリットから十分離れた位置にスクリーンがある状況での光の干渉を考える。それは図2.1のように点光源とスリット, スリットとスクリーンの間が無限遠と見なせるようにレンズを置いたセットアップでも良い。このときスクリーンには干渉縞が現れる。この現象をフラウンホーファー回折という。実用的な経験則として, 開口の最大幅を A , 光源とスリット, またはスリットとスクリーンの2つの距離のうち短い方を R , 光の波長を λ とすると,

$$R > A^2/\lambda \quad (2.1)$$

が満たされるときにフラウンホーファー回折は生じる。

以下では単スリット, ダブルスリットにおけるフラウンホーファー回折によりどのような干渉縞が得られるか考察する。

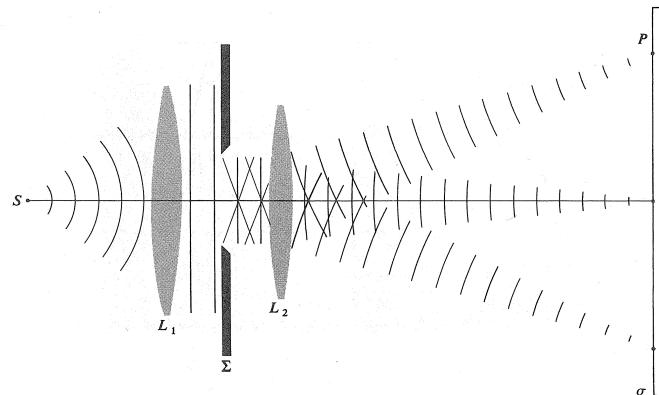


図 2.1: レンズを用いて得られるフラウンホーファー回折

¹スリットに至る波が平面波と見なせるような位置

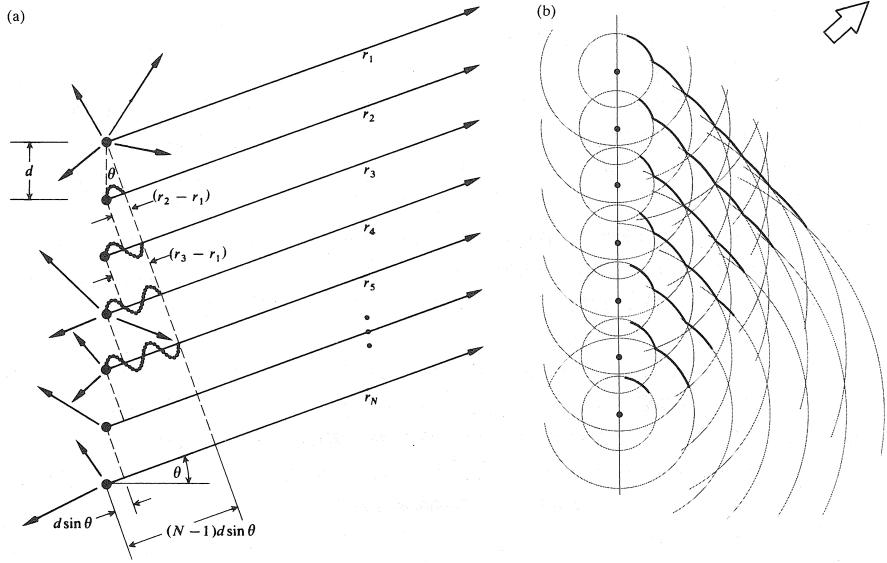


図 2.2: 線状に並べられた振幅、周波数が互いに等しい光源。(a) 示されている角度では隣の光源との位相差 δ は $\delta = \pi$ であるが、 $\theta = 0$ では δ は 0 であることに注意。(b) 一直線に並べられた光源から放射された波面の多数の組の一つ。

2.1.2 線状光源

図 2.2 のような直線に並んだ振幅、周波数が互いに等しい N 個の光源を考える。各光源は等しい初期位相を持っていると仮定する。ここで j 番目の光源が r 離れた点で作る電場 E_j は

$$E_j = \frac{\varepsilon_0}{r_j} \sin(\omega t - kr_j) \quad (2.2)$$

と書ける。

さらに、この点状光源を無数に並べた線状光源を考える(図 2.3)。ここで考えている状況は、各光源は大変弱く、光源の数 N がきわめて多く²、光源間の間隔が無視できるほど小さい状況である。ここで、 D を線状光源全体の長さとすると線状光源の微小部分 δy_i は $(N/D)\delta y_i$ 個の光源を含んでいる(ここで、光源は M 個の微小部分に分けられているとする。つまり $1 \leq i \leq M$)。このとき δy_i が P に作る電場は球面波となるので、

$$E_i = \frac{\varepsilon_0}{r_i} \sin(\omega t - kr_i) \frac{\delta y_i N}{D} \quad (2.3)$$

となる。ただし、 δy_i は微小であり、この微小範囲内の各光源から P までの距離は一

² $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_0(N)N = \text{定数}$ となるような状況を考えている

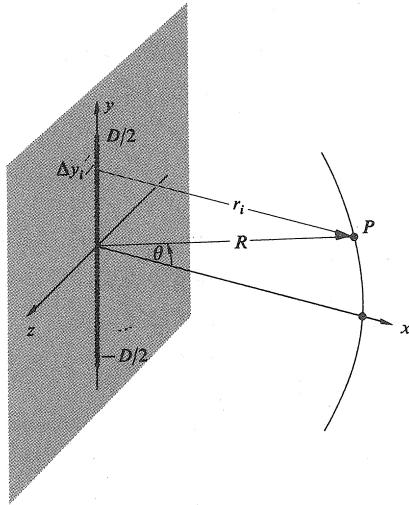


図 2.3: 線状光源

定であるとした。さらに一定値の ε_L を

$$\varepsilon_L \equiv \frac{1}{D} \lim_{N \rightarrow \infty} (\varepsilon_0 N) \quad (2.4)$$

と定義できる。 M 個の全部分による P での電場は、

$$E = \sum_{i=1}^M \frac{\varepsilon_L}{r_i} \sin(\omega t - kr_i) \delta y_i \quad (2.5)$$

最後に、 δy_i は無限小になるはずで ($M \rightarrow \infty$)、

$$E = \varepsilon_L \int_{-D/2}^{+D/2} \frac{\sin(\omega t - kr)}{r} dy \quad (2.6)$$

となる。ここで $r = r(y)$ である。

2.1.3 単スリット

図 2.3 のような振幅、周波数が互いに等しい長さ D ($D \ll R$) の線状光源を考える。線状光源の中心から y だけ離れた光源の微小部分 dy が、中心から xy 平面上の角 θ の方向に R だけ離れた点 P に作る電場は、式 (2.6) から

$$dE = \varepsilon_L \frac{\sin(\omega t - kr)}{r} dy \quad (2.7)$$

r を y で展開すると

$$r = R - y \sin \theta + (y^2/2R) \cos^2 \theta + \dots \quad (2.8)$$

これを式(2.7)に適用する。式(2.7)の r のうち分母のものに比べ位相のほうが r の変化に敏感であることに注意して

$$dE = \varepsilon_L \frac{\sin[(\omega t - k(R - y \sin \theta))]}{R} dy \quad (2.9)$$

と近似する³。これは R が十分大きいとき、 θ のすべての値に対して正しい。これを積分すると、

$$\begin{aligned} E &= \frac{\varepsilon_L}{R} \int_{-D/2}^{+D/2} \sin[\omega t - k(R - y \sin \theta)] dy \\ &= \frac{\varepsilon_L D}{R} \frac{\sin[(kD/2) \sin \theta]}{(kD/2) \sin \theta} \sin(\omega t - kR) \\ &= \frac{\varepsilon_L D \sin \beta}{R} \sin(\omega t - kR) \end{aligned} \quad (2.10)$$

となる。第2式から第3式への式変形では $\beta \equiv (kD/2) \sin \theta$ とおいた。このとき強度は

$$I(\theta) = \langle E^2 \rangle_T = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_L D}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (2.11)$$

となる⁴。 $\langle E^2 \rangle_T$ は E^2 の十分長い時間における時間平均⁵であり、式(2.11)は $\langle \sin^2(\omega t - kR) \rangle_T = \frac{1}{2}$ を用いて求めた。 $\theta = 0$ のとき $\sin \beta / \beta = 1$ であり、 $I(0)$ は $I(\theta)$ の最大値となる。 $I(0)$ を使うと $I(\theta)$ は

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (2.12)$$

と書ける。ここで $\beta \equiv (kD/2) \sin \theta$ であるから、 $D \gg \lambda$ のとき強度は $\theta = 0$ から離れると急速に低下する。つまり式(2.10)で $\sin \beta / \beta = 1$ とした

$$E = \frac{\varepsilon_L D}{R} \sin(\omega t - kR) \quad (2.13)$$

が点Pでの電場とみなせる。

³ 逆に、このように近似できるときフーリエ分析による回折になると言える

⁴ $\langle E^2 \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T E^2 dt$ で定義される

⁵ $T = 2\pi/\omega$ より十分長い時間間隔で測定する場合、振動項の変化は見えず、その時間間隔で平均したもののが見える

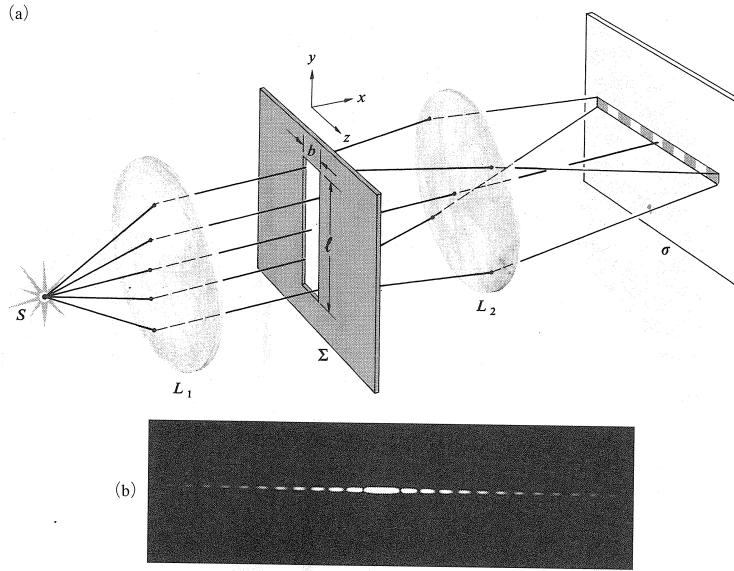


図 2.4: (a) 単一スリットによるフラウンホーファー回折.(b) 点光源照明下での直立した单一開口の回折像.

ここからは図 2.4 のような一方向に伸長された狭い矩形の孔によるフラウンホーファー回折の問題を扱うことにする. 図 2.5 に示されるように, スリットを y 軸に平行な無限小幅の一連の短冊領域 (幅 dz で長さ l) に分ける. 分けられた短冊一つ一つは線光源であり, 前の式 (2.13) にそれぞれに適応できる. ここで, 各 dz の作る電場を式 (2.7) に見立てることで, 先ほどと同様の議論を z 軸方向にも展開できる. 図 2.5(a) のように xz 面で測られる θ をとると, 単スリットの開口部を通った光がスクリーン上に作る電場の強さは,

$$E = \frac{\varepsilon_L}{R} \int_{-b/2}^{+b/2} \sin[\omega t - k(R - z \sin \theta)] dz \quad (2.14)$$

$$= \frac{\varepsilon_L b \sin \beta}{R} \sin(\omega t - kR) \quad (2.15)$$

から

$$I(\theta) = \langle E^2 \rangle_T = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_L b}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (2.16)$$

$$= I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (2.17)$$

となる. ただし

$$\beta = \frac{kb}{2} \sin \theta \quad (2.18)$$

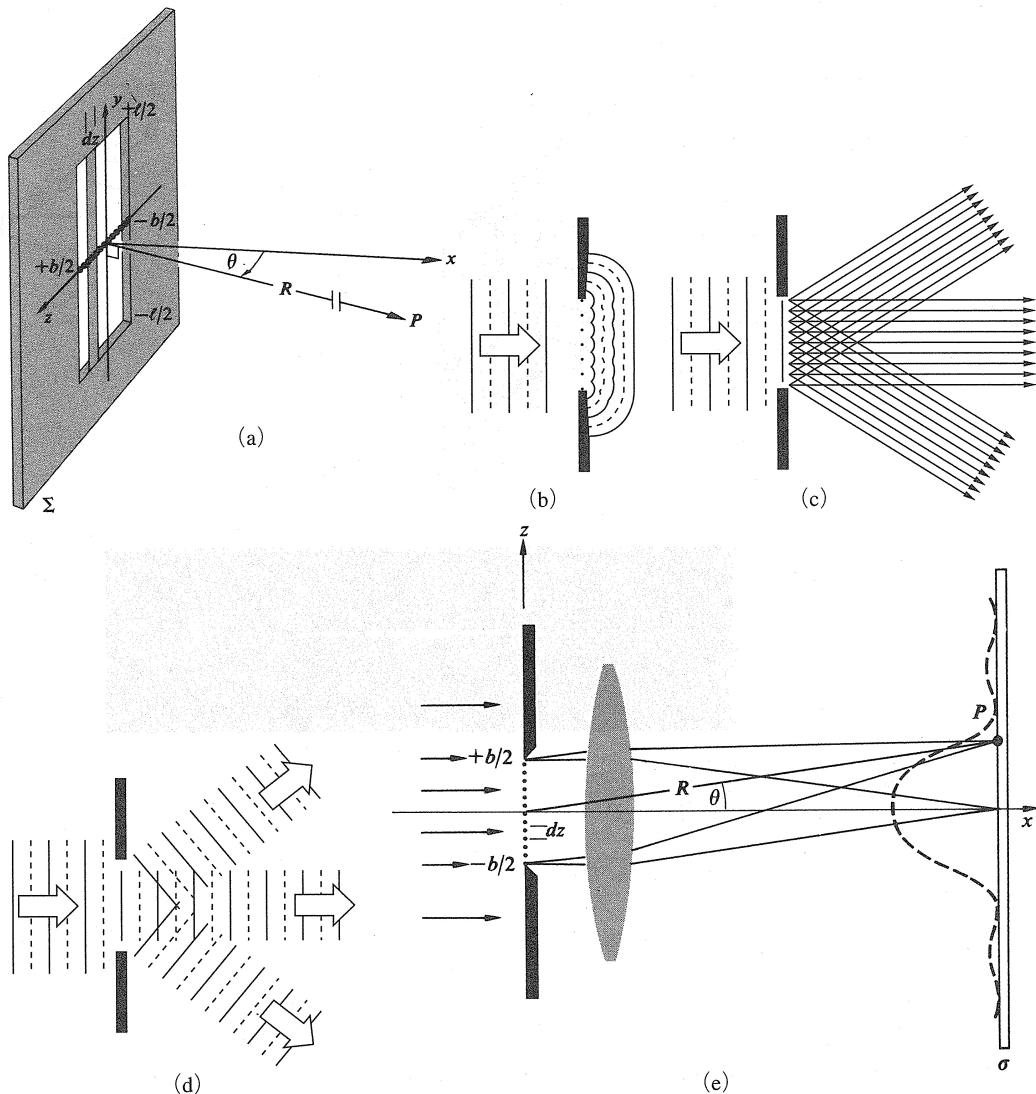


図 2.5: (a) スクリーン σ 上の点 P は本質的にスリット Σ から無限遠にある。(b) 開口全体から放射されるホイエンスの小波。(c) 光線による等価表現. 各点はあらゆる方向に光線を放射する. 種々の方向で平行光線が見られる.(d) これらの光線束は, 三次元フーリエ成分と考えることができる平面波に対応している.(e) 単色平面波で照
明されている単一スリット.

である。式(2.12)と比べると、 $b \ll D$ であり β が小さいため、強度は急速に低下するものの、高次の項の影響も観察される。 $I(\theta)$ の極値は $dI/d\beta = 0$ にする、つまり

$$\frac{dI}{d\beta} = I(0) \frac{2 \sin \beta (\beta \cos \beta - \sin \beta)}{\beta^3} = 0 \quad (2.19)$$

を満たす β の値で生じる。 $\sin \beta = 0$ のとき、すなわち、

$$\beta = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots \quad (2.20)$$

のとき $I(\theta)$ は 0 に等しい最小値を持ち、

$$\beta \cos \beta - \sin \beta = 0 \quad (2.21)$$

のとき $I(\theta)$ は極大値を持つ。式(2.21)は

$$\tan \beta = \beta \quad (2.22)$$

と書いて、この方程式の解は図 2.6 で示すように、図式的に決定できる。

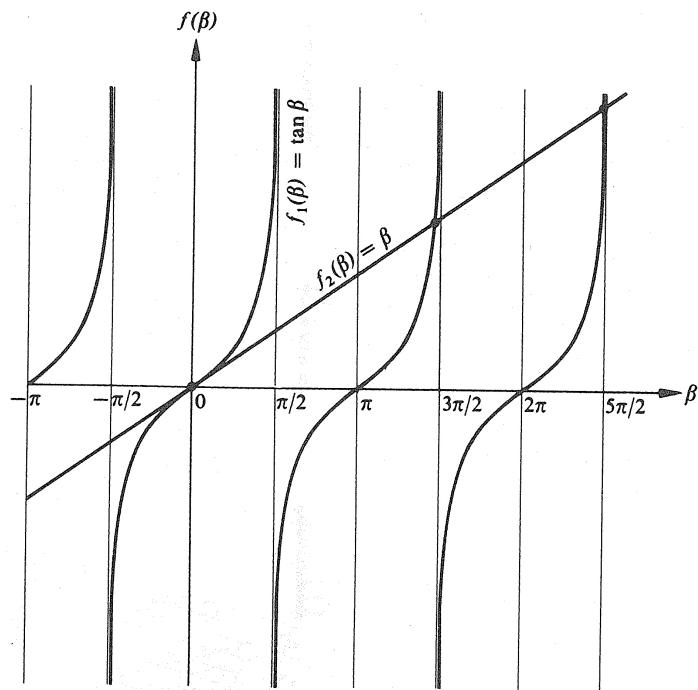


図 2.6: 2 つの曲線の交差する点が式(2.22)の解である。

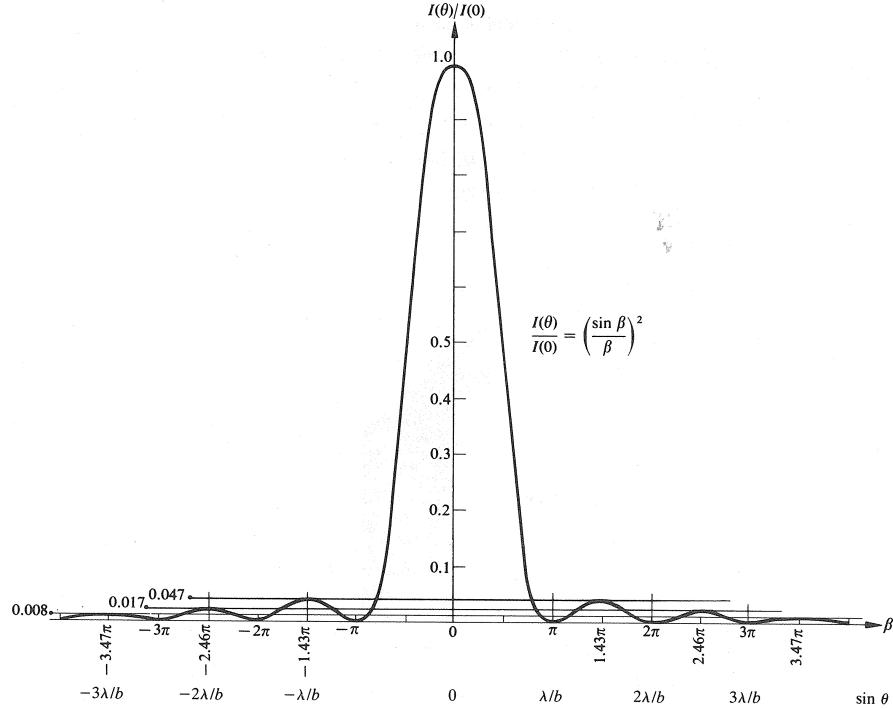


図 2.7: 単一スリットのフラウンホーファー回折像.

数値的に解くと

$$\beta = (\pm 1.4303\pi, \pm 2.4590\pi, \pm 3.4707\pi, \dots) \quad (2.23)$$

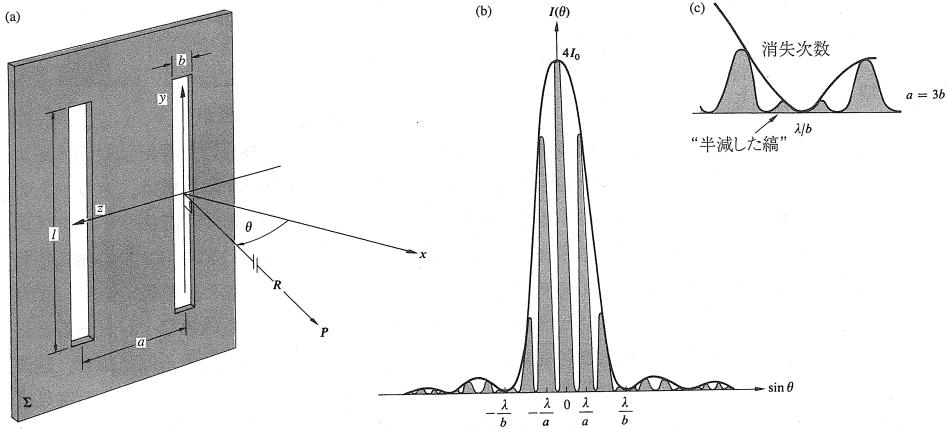
これらから $I(\theta)/I(0)$ をプロットすると図 2.7 のようになる.

2.1.4 ダブルスリット

図 2.8 のような、幅が b で中心間隔が a の 2 本の長いスリットがあるとする。スクリーン σ 上のある点の光波に対する式を得るには、単一スリットの解析をわずかに変更すればよい。このダブルスリットのフラウンホーファー回折による電場は二つの单スリットの電場の和で書ける。片方のスリットの中央から P までの長さを R 、もう一方のスリットの中央から P までの長さを R' とすると、

$$E = \frac{\varepsilon_L}{R} \int_{-b/2}^{b/2} F(z) dz + \frac{\varepsilon_L}{R'} \int_{a-b/2}^{a+b/2} F(z) dz \quad (2.24)$$

$$\simeq \frac{\varepsilon_L}{R} \int_{-b/2}^{b/2} F(z) dz + \frac{\varepsilon_L}{R} \int_{a-b/2}^{a+b/2} F(z) dz \quad (2.25)$$

図 2.8: (a) ダブルスリットの配置 (b) ダブルスリットの回折像 ($a = 3b$)

となり、ここで $F(z) = \sin[\omega t - k(R - z \sin \theta)]$ である（式 (2.14) より）。第 1 式から第 2 式への式変形では $a \ll R$ より $R = R'$ とした。 $\alpha \equiv (ka/2) \sin \theta, \beta = (kb/2) \sin \theta$ とおいて式 (2.25) を積分すると

$$E = \frac{\varepsilon_L b \sin \beta}{R} [\sin(\omega t - kR) + \sin(\omega t - kR + 2\alpha)] \quad (2.26)$$

これは、式 (2.15) と見比べると各スリットからの電場の P における和である。第一のスリットから P までの距離は R で位相への寄与は $-kR$ である。また、第二のスリットから P までの距離は $(R - a \sin \theta)$ あるいは $(R - 2\alpha/k)$ であり、位相への寄与は $(-kR + 2\alpha)$ である。式 (2.26) をもう少し簡単にする

$$E = 2 \frac{\varepsilon_L b \sin \beta}{R} \cos \alpha \sin(\omega t - kR + \alpha) \quad (2.27)$$

となり、2乗して長い時間間隔で平均したときの強度は、 $I_0 = \frac{1}{2} (\frac{\varepsilon_L b}{R})^2$ とおくと、

$$I(\theta) = 4I_0 \left(\frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \right) \cos^2 \alpha \quad (2.28)$$

式 (2.28) において、スリット幅 b が波数の逆数に比べ十分小さくなれば ($kb \ll 1$)、そのとき $(\sin \beta)/\beta \simeq 1$ であり、この式は一対の長い線光源つまり、ヤングの実験に対する光束密度の表式になる。そして、

$$\beta = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots \quad (2.29)$$

となる角度位置 θ では、 $\sin \beta = 0$ となり暗線となる。

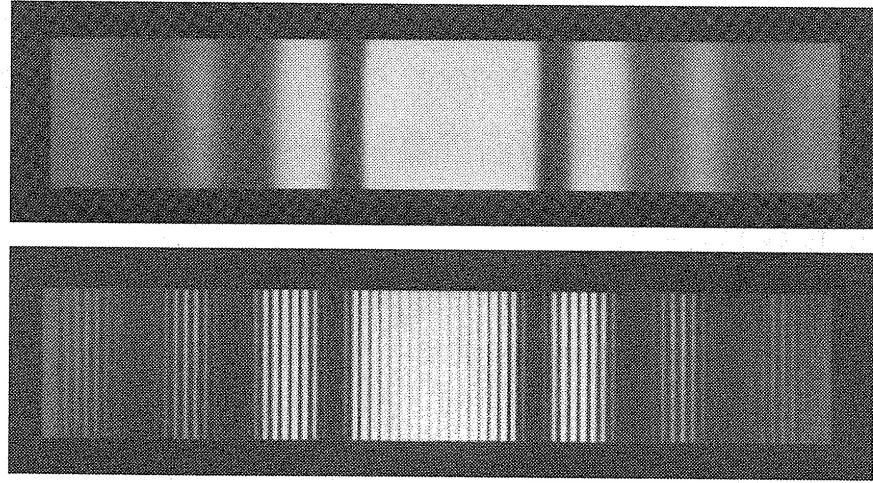


図 2.9: 単スリットのフラウンホーファー回折像(上), ダブルスリットのフラウンホーファー回折像(下)

$$\alpha = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots \quad (2.30)$$

である σ 上の点では, そこの電場に対する種々の寄与は, 回折過程で生じる実際の光量に関係なく, 完全に位相がずれており打ち消しあう. よってダブルスリットのフラウンホーファー回折は図 2.8(b) のようになる.

2.2 偏光と干渉

この節での偏光のあつかいに関連して, "Feynman 物理学 V 量子力学" の 5 章を参考にすると良い。別な実験でのスピン(=偏光)のあつかいを学べるし、なにより Feynman は私より"物理を知っている"。また、1~3 章もこの実験に関連があると言える。6 章は 5 章と似た内容だが少し難しい。

2.2.1 偏光

光子は 3 つの座標と 3 つの運動量で記述される粒子と異なり、さらに偏光と呼ばれる自由度を持つ。これは古典的な電磁波の電場の向き、つまり波の進行方向に垂直な 2 つの向きに対応する。

運動量 $\mathbf{p} = (\hbar k, 0, 0)$ を持ち、 z 方向、 y 方向の偏光を持つ光子の波動関数を

$$e^{ikx} |e_z\rangle, e^{ikx} |e_y\rangle \quad (2.31)$$

とかく。これは Maxwell 方程式の最も簡単な解の形であり、” y 偏光の波は伝播しても y 偏光のままである”ことを表している。これらふたつの実係数⁶の線形結合

$$e^{ikx} |\psi\rangle = ae^{ikx} |e_z\rangle + be^{ikx} |e_y\rangle \quad (2.32)$$

は直線偏光と呼ばれる。ここで、

$$\langle e_z | e_z \rangle = \langle e_y | e_y \rangle = 1, \quad (2.33)$$

$$\langle e_z | e_y \rangle = \langle e_y | e_z \rangle = 0 \quad (2.34)$$

である。したがって、直線偏光の状態ベクトルの偏光部分の内積は、幾何学的な内積と一致する。

次に、 $|e_z\rangle$ と $|e_y\rangle$ から伝播方向に関して ϕ だけまわした状態の光子の波動関数(の偏光成分)を $|e_{z'}\rangle, |e_{y'}\rangle$ とかくと、

$$\begin{pmatrix} |e_{z'}\rangle \\ |e_{y'}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |e_z\rangle \\ |e_y\rangle \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

であり、

$$\langle e_{z'} | e_{y'} \rangle = \langle e_{y'} | e_{z'} \rangle = 0. \quad (2.36)$$

特に zy 面内で z 方向から $\pi/4, 3\pi/4$ の方向の偏光を持つ光子の偏光状態を $|e_R\rangle, |e_L\rangle$ と置くと、それぞれ $|e_z\rangle, |e_y\rangle$ を $\pi/4$ まわしたものだから

$$|e_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_z\rangle + |e_y\rangle), \quad (2.37)$$

$$|e_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|e_z\rangle + |e_y\rangle) \quad (2.38)$$

となる。

2.2.2 偏光板

偏光を選ぶことができる道具として、偏光板がある。 z 方向の偏光のみを通す、理想的な偏光板を光子が通過した時、偏光板より上流で $e^{ikx}(a|e_z\rangle + b|e_y\rangle)$ である波動関数は偏光板の下流で $ae^{ikx}|e_z\rangle$ となる。これは、波動関数 $e^{ikx}|\psi\rangle$ に対して、 $|e_z\rangle\langle e_z|$ を作用させて、

$$|e_z\rangle\langle e_z|e^{ikx}|\psi\rangle \quad (2.39)$$

とすることに一般化される。

⁶円偏光などと区別する条件。

2.2.3 偏光板と干渉

ここからは、前節で扱ったスリットに、偏光板を組み合わせて使用することを考える。簡単のため、スリット幅 b は非常に狭いという状況で考える。スリットを通過してくる電磁波の強さは b が小さくなるに従って減少するが、その大きさは考えずに位相のみを気にすることで、干渉縞の角度依存性のおおまかな性質を導くこととする。

偏光の状態が $|\psi\rangle$ である光子が偏光板と单スリットを通過した後の波動関数は、 R が大きいところで

$$|\psi_{\text{diffraction}}(R, \theta)\rangle = \frac{e^{ikR}}{R} |e_z\rangle \langle e_z| \psi \rangle \quad (2.40)$$

と近似的に書かれる。ここで $|\psi_{\text{diffraction}}(R, \theta)\rangle$ は偏光の成分を持っている“波動関数”として定義している。つまりその大きさ $\langle \psi_{\text{diff}}(R, \theta) | \psi_{\text{diff}}(R, \theta) \rangle$ は 1 に規格化されておらず、座標 (R, θ) での光子の存在確率を表している。ket の形で書いたのは、存在確率だけでなく偏光の情報を含むことの主張であり、このことは古典的な電場が大きさだけでなく向きを持つ“ベクトル場”であるということに対応付けられる。

さて、この時のスクリーンへの光子の立体角あたりの到達確率は

$$\begin{aligned} R^2 \langle \psi_{\text{diff}}(R, \theta) | \psi_{\text{diff}}(R, \theta) \rangle &= \langle \psi | e_z \rangle \langle e_z | e_z \rangle \langle e_z | \psi \rangle \\ &= |\langle e_z | \psi \rangle|^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

となる。すなわち一様である。ここで、今使っている近似について注意しておく。つまり、光の偏光を考慮すると、電場の強さをあらわす式 (2.2) は修正されて角度分布を持つことになる。このことは直感的に理解できるだろうし、あるいは双極放射の式等を知っているかもしれない。しかし、スリットから見て前方(スクリーン方向)の狭い角度領域に限れば、式 (2.2) は相変わらず正しいままである。したがって、ここでの一様に光が届くという結論は θ が小さい領域に関して正しく、逆にある程度大きい θ の領域では現実の再現でないことに注意しよう。

次に図 2.10 に示したような二重スリットと偏光板の組み合わせを考える。

(I) ふたつのスリットに偏光板を直行する向きに貼った場合。スリットの下流での光子の波動関数は

$$|\psi_{\text{diff}}(R, \theta)\rangle = \frac{1}{R} \left\{ e^{ik(R - \frac{a}{2} \sin \theta)} |e_z\rangle \langle e_z| + e^{ik(R + \frac{a}{2} \sin \theta)} |e_y\rangle \langle e_y| \right\} |\psi\rangle \quad (2.42)$$

スクリーンへの立体角あたりの光子の到達確率は

$$R^2 \langle \psi_{\text{diff}}(R, \theta) | \psi_{\text{diff}}(R, \theta) \rangle = \langle \psi | \left\{ |e_z\rangle \langle e_z| + |e_y\rangle \langle e_y| \right\} |\psi\rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (2.43)$$

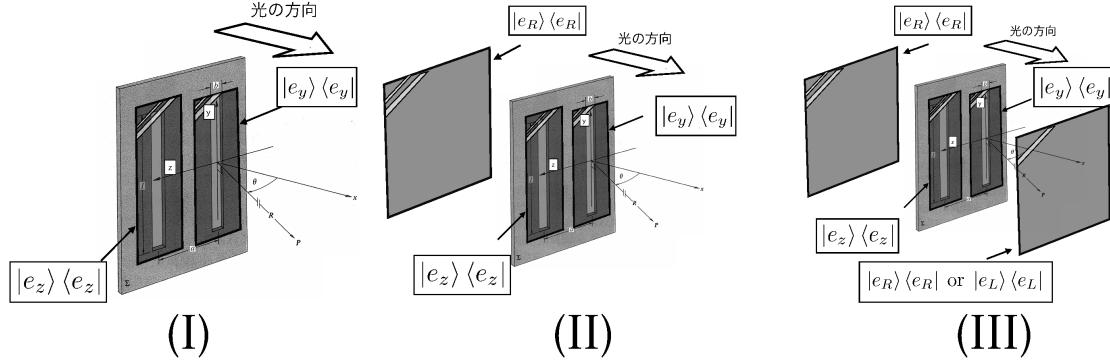


図 2.10: スリットと偏光板の配置 (I) 直行した向きに偏光を選ぶスリット。 (II)(I) に加えてスリットの上流に斜めに偏光を選ぶように偏光板をおいた場合。 (III) さらにスリットの下流にななめに偏光を選ぶよう偏光板をおいた場合。

よって、二重スリットによる干渉は起こらず光子は一様にスクリーンまで到達する。

(II) スリットの上流に斜めに偏光を選ぶように偏光板をおいた時の、偏光板の下流での光子の波動関数は、

$$\begin{aligned}
 |\psi_{\text{diff}}(R, \theta)\rangle &= |e_R\rangle\langle e_R| \frac{1}{R} \left\{ e^{ik(R - \frac{a}{2} \sin \theta)} |e_z\rangle\langle e_z| + e^{ik(R + \frac{a}{2} \sin \theta)} |e_y\rangle\langle e_y| \right\} |\psi\rangle \\
 &= |e_R\rangle \frac{1}{\sqrt{2}R} \left\{ e^{ik(R - \frac{a}{2} \sin \theta)} \langle e_z|\psi\rangle + e^{ik(R + \frac{D}{2} \sin \theta)} \langle e_y|\psi\rangle \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}R} e^{ikR} |e_R\rangle \left\{ e^{-i\frac{ka}{2} \sin \theta} \langle e_z|\psi\rangle + e^{i\frac{ka}{2} \sin \theta} \langle e_y|\psi\rangle \right\} \\
 &= \frac{1}{R} e^{ikR} |e_R\rangle \{\cos \alpha \langle e_R|\psi\rangle + i \sin \alpha \langle e_L|\psi\rangle\}
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

ただし、 $\alpha = \frac{ka}{2} \sin \theta$ であり、

$$\langle e_z|\psi\rangle = \langle e_z| \left\{ |e_R\rangle\langle e_R| + |e_L\rangle\langle e_L| \right\} |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \langle e_R|\psi\rangle - \langle e_L|\psi\rangle \} \tag{2.45}$$

$$\langle e_y|\psi\rangle = \langle e_y| \left\{ |e_R\rangle\langle e_R| + |e_L\rangle\langle e_L| \right\} |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \langle e_R|\psi\rangle + \langle e_L|\psi\rangle \} \tag{2.46}$$

を使った。立体角あたりの光子の到達確率は

$$\begin{aligned}
 R^2 \langle \psi_{\text{diff}}(R, \theta) | \psi_{\text{diff}}(R, \theta) \rangle &= \cos^2 \alpha |\langle e_R|\psi\rangle|^2 + \sin^2 \alpha |\langle e_L|\psi\rangle|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \{ \langle \psi|\psi\rangle + \cos 2\alpha (|\langle e_R|\psi\rangle|^2 - |\langle e_L|\psi\rangle|^2) \}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

これは、はじめの光子の偏光の向きによって、到達しやすい位置が変わることを意味している。

(III) (II) に加えてスリットより下流にななめ向きに偏光を選ぶよう偏光板をおいた場合は式 (2.47) で

$$|\psi\rangle \rightarrow (i) |e_R\rangle \langle e_R|\psi\rangle \text{ または } (ii) |e_L\rangle \langle e_L|\psi\rangle \quad (2.48)$$

とおきかえればよいので、

$$R^2 \langle \psi_{\text{diff}}(R, \theta) | \psi_{\text{diff}}(R, \theta) \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} |\langle e_R | \psi \rangle|^2 (1 + \cos 2\alpha) & \cdots (\text{i}) \\ \frac{1}{2} |\langle e_L | \psi \rangle|^2 (1 - \cos 2\alpha) & \cdots (\text{ii}) \end{cases} \quad (2.49)$$

スリットの幅 b を考慮する時は波動関数で e^{ikR} を $F(\theta)e^{ikR}$ と置き換えれば良い。ただし

$$F(\theta) = \frac{\sin \beta}{\beta} = \frac{\sin \left(\frac{kb}{2} \sin \theta \right)}{\frac{kb}{2} \sin \theta}. \quad (2.50)$$

これに伴って、スクリーンへの到達確率を求めるには、 $b \rightarrow 0$ として計算した上記の式全体に $F(\theta)^2$ をかけねば良い。

2.2.4 偏りのない光

前節では、 $|\psi\rangle$ の状態を持った光子の到達確率を計算した。しかし、偏光板に入射した時の偏光状態 $|\psi\rangle$ は一定ではなく、統計的な広がりを持つ。つまり、今回の実験で得られるスクリーンへの光子の到達確率 P は

$$P = \int d\phi (\text{はじめの偏光が } \phi \text{ である確率}) \times (\text{偏光の向きが } \phi \text{ の時の到達確率}) \quad (2.51)$$

となる。

日常で見かけるほとんどの光源は、偏光していない光を放出している⁷。このことの物理的な意味は、色々な偏光の状態を持った光子を等量ずつ放出しているということである(ただし横波のみ)。今回の実験で用いるレーザーポインターや LED も同様に偏っていない光源である。この場合、はじめの偏光が $|e_R\rangle$ から角度 ϕ だけ回転した状態になっている確率(密度)は ϕ に依存せず $1/2\pi$ であり、その時の到達確率は前節で

$$|\psi\rangle = \cos \phi |e_R\rangle + \sin \phi |e_L\rangle \quad (2.52)$$

⁷例外は液晶画面、反射光などがある

とすれば求まる。先ほどまでと同様にスクリーンの幅 b は非常に小さいと考えて計算をするが、有限の b を考慮したスクリーンへの到達確率を求めるには全体に $F(\theta)^2$ をかけなければならない。

再び図 2.10 の (I)~(III) の配置で計算する。

(I) ふたつのスリットに偏光板を直行する向きに貼った場合。式 (2.43) から、角度 ϕ の時の到達確率が一様なので、偏りのない光源を用いた場合も一様となる。

(II) (I) のスリットの上流に偏光板 $|e_R\rangle \langle e_R|$ をおいた場合、式 (2.47) から角度 ϕ の時の到達確率は、

$$\frac{1}{2} \{1 + \cos 2\alpha (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)\} \quad (2.53)$$

となり、偏りのない光源を用いた時の到達率は、

$$P(\theta) = \int d\phi \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \{1 + \cos 2\alpha (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)\} = \frac{1}{2}. \quad (2.54)$$

つまり、前節の結果とは違い光子がスクリーン上に一様に到達することを意味している。状態 $|\psi\rangle$ の光子 1 つだけでは到達する位置に依存した確率分布を持つが、偏りのない光を用いて実験するとそれらが互いに打ち消し合うことによって、一様な分布となってしまう。

(III) (II) に加えて、さらにスリットの下流に偏光板 (i) $|e_R\rangle \langle e_R|$ や (ii) $|e_L\rangle \langle e_L|$ をおいた場合、式 (2.49) から角度 ϕ の時の到達確率は、

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cos^2 \phi [1 + \cos 2\alpha] & \cdots \text{(i)} \\ \frac{1}{2} \sin^2 \phi [1 - \cos 2\alpha] & \cdots \text{(ii)} \end{cases} \quad (2.55)$$

であり、偏りのないときの到達率は ϕ で積分して

$$P(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{4} [1 + \cos 2\alpha] & \cdots \text{(i)} \\ \frac{1}{4} [1 - \cos 2\alpha] & \cdots \text{(ii)} \end{cases} \quad (2.56)$$

となる。つまり干渉縞が復活し、(i) と (ii) で明線の位置が異なることもわかる。また (i) と (ii) を足すと、干渉が打ち消し合い (II) に等しくなることにも注目したい。

おまけ

光子の偏光がどの向きを向いているか (統計的にしか) 決定できないような状態は混合状態と呼ばれ、密度行列と呼ばれる演算子によって記述される。密度行列によって様々な偏光の状態を記述しておこう。

偏光の状態空間での状態ベクトルが決まっている状態。これは純粹状態と呼ばれる。 $|\psi\rangle$ で書かれる純粹状態を密度行列で書くと、

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2.57)$$

つぎに偏りのない光の密度行列は

$$\begin{aligned} \rho &= \int d\phi \frac{1}{2\pi} (\cos\phi |e_R\rangle + \sin\phi |e_L\rangle)(\cos\phi \langle e_R| + \sin\phi \langle e_L|) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\phi (\cos^2\phi |e_R\rangle\langle e_R| + \sin^2\phi |e_L\rangle\langle e_L| + \sin\phi \cos\phi |e_R\rangle\langle e_L| + \sin\phi \cos\phi |e_L\rangle\langle e_R|) \\ &= \frac{1}{2}(|e_R\rangle\langle e_R| + |e_L\rangle\langle e_L|) \end{aligned} \quad (2.58)$$

なお、最後の表式は回転に対して不変であることを直接示すこともできる。

参考文献

- [1] Eugene Hecht. *Optics. 4th ed.* Addison Wesley, 2002.
- [2] R. P. Feynman; R. B. Leighton; M. L. Sands 著, 砂川重信 訳, 1979, ファンマン物理学 V 量子力学, 岩波書店

第3章 演習

演習 1：光子を見る

素粒子実験において簡単な実験を行う際には NIM と CAMAC がよく使われる。大まかに分類すると、NIM は検出器からの信号を処理する装置で、ほしいデータのみを選択的に取得するときなどに用いられる、CAMAC はそのアナログ信号をデジタルに変換し、パソコンに読み込むための装置である。(詳しくは 5 章を参照) 解析には Cern が開発した Root というソフトを用いる。

ダークカレントを見てみる

今回の実験では、光子を観測するための検出器として、MPPC を用いる(詳しくは 4 章を参照)。MPPC は(残念ながら)光が入射していない場合でも、高い頻度で信号を出している。これをダークカレントと呼ぶ。

光子を見てみる

LED にかける電流を調節していくと、光子 1 つが出てくる程度にまで光量をしぼることができる¹。MPPC で、その光子を観測してみよう。

- まずは、オシロスコープで MPPC の波形を見てみよう。
- NIM, CAMAC を使ってデータを取ってみよう。
- 得られたヒストグラムから、様々な情報を読み取ることができる。MPPC のゲインや、ダークレートを求めてみよう。

¹LED が光子レベルまで光量をしぼれる理由は LED の発光原理にある。詳しくは Appendix 参照

演習2：干渉を見る

サマチャレでのメイン課題。可動ステージ上にMPPCを固定して、MPPCを走査することで干渉を見てみよう。自分たちで実験をデザインしてみよう。

回折格子を用いた干渉実験

- 今回用いる回折格子の格子定数は、 $140[\text{mm}^{-1}]$ である。明線間隔はいくらになるだろうか。
- LEDから回折格子までの距離、回折格子からMPPCまでの距離、LEDにかける電圧、取得する event 数などをどのように設定するとよいか、自分で考えて実験をしてみよう。

二重スリットを用いた干渉実験

- スリット幅 $d = 100[\mu\text{m}]$ 、スリット間隔 $D = 400[\mu\text{m}]$ の二重スリットを用いて、干渉を見てみよう。明線間隔はいくらになるだろうか。また、得られる干渉の形はどのようになるだろうか。
- LEDから二重スリットまでの距離、二重スリットからMPPCまでの距離、LEDの発光量、取得する event 数などをどのように設定するとよいか、自分で考えて実験をしてみよう。
- この二重スリットの他にも、 $(d, D) = (150, 250), (150, 500), (150, 750), (150, 1000), (20, 100), (20, 50) [\mu\text{m}]$ のものを用意している。これらでも測定してみよう。

1photon の干渉実験

- LEDの光量を落として、1photonの干渉を観測してみよう。
- どのような実験を行えば、1photonが干渉することを実験的に明らかにすることができますか。この実験の最も大切な部分なので、よく考えて、実験してみよう。

演習3：自由課題

もし時間が余れば、やってみたい実験を考えて、実行してみよう。偏光板を入れてみたり、LEDの色を変えてみたり、工夫して実験しよう。

第4章 光検出器

4.1 光検出器について

素粒子・原子核実験において、光子を捉えることは非常に重要である。そのような装置が光検出器(光センサ)であり、たくさんの種類があるが、どれも電気信号に変換して信号を取り出すという点は共通している。今回の実験で用いるのはMPPCと呼ばれる優れたフォトンカウンティング能力を持つ小型の光検出器である。この章では基本的な光検出器からMPPCまでの紹介を行う。

4.2 光電子増倍管(Photo Multiplier Tube)

PMTはフォトマルと呼ばれ親しまれている基本的な光検出器である。光センサの中でも極めて高感度・高速応答である。その構造を以下の図に示す。

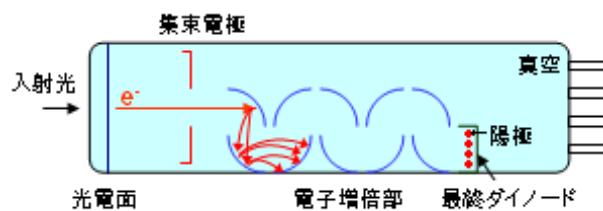


図 4.1: PMT の構造

この図に示されるように、PMTは光を電子に変換する光電面(陰極)、集束電極、電子増倍部(ダイノード)、電子を集める陽極を真空の容器に収めた構造をしている。

では PMT は光子をどのように電気信号に変えるのだろうか、その基本的な仕組みを説明しよう。

1. 光子が光電面に入射し、光電面から真空中に光電子が放出される¹。そのときの量子効率(入射光子の数に対して放出される電子(キャリア)の数の比のこと)は理想的には 1 であるが、典型的には 25%ほどしかない。
2. 光電子が収束電極の電場に沿って加速され、ダイノードに衝突する。
3. 加速された電子がダイノード内の電子を複数個(典型的には 3~4 個)たたき出す(これを 2 次電子と呼ぶ)。放出された 2 次電子は、ダイノード間でも加速されて再び 2 次電子放出を起こすので、指数関数的に電子の数が増倍する。²
4. 十数段のダイノードでの增幅の後、最終ダイノードにより放出された 2 次電子群が出力信号として陽極に収集される。

PMT は基本的な光検出器として使用されているが、その小型化には限界がある、高価である³、数 kV の高電圧が必要である、磁場に弱いなどの問題もあり、これらの問題は後に説明する MPPC で解決される。

4.3 フォトダイオード

フォトダイオードは光検出器として働く半導体のダイオードである。その仕組みは一般に光起電力効果を利用しておらず、さまざまな種類が存在する⁴が、ここでは PN フォトダイオード、PIN フォトダイオード、APD を紹介する。

4.3.1 PN フォトダイオード

PN フォトダイオードは p 型と n 型の半導体を接合(pn 接合という)させたものである。半導体とは、簡単に言えば導体と絶縁体の中間の電導性をもつ物質のことである。p 型・n 型では電圧が印加されたときの電荷を運ぶもの(キャリア)が違い、

¹光電効果を起こす光子のエネルギー帯は典型的には可視光領域(波長 360~780nm ほど)であり、波長~400nm 程度で量子効率(QE)が最も良くなるものが多い。もちろん、様々な用途に合わせて、紫外線、長波長領域に特化したものも存在する。

²印加電圧が大きければ電子は大きく加速されるので増幅率(ゲイン)は上昇し、エネルギー分解能も向上する。

³30~40 万円ほどする。それに対して、今回の実習で用いる MPPC は数千円で購入できる。

⁴PN フォトダイオード、PIN フォトダイオード、ショットキーフォトダイオード、アバランシェフォトダイオード(APD)などがある。

p型はホール(正孔), n型は電子がキャリアとなる。このPN接合部は負と正の電荷層ができており、これを空乏層という。空乏層はダイオードに順方向の電圧を印加すると狭くなり、逆電圧を印加すると広がる。

PNフォトダイオード内に光子が入射すると、ある確率で電子・正孔対を生成する。この電子・正孔対が空乏層付近で発生した場合⁵、空乏層の電場に沿ってキャリアがそれぞれ反対方向に移動し、電流(光電流と呼ぶ)が流れる。この光電流を測定することで、光が入射したことを知ることができる。PNフォトダイオードは印加電圧をかけずに使用することもできるが、逆電圧を印加すると空乏層が広がるため、光センサとしての感度は良くなる。

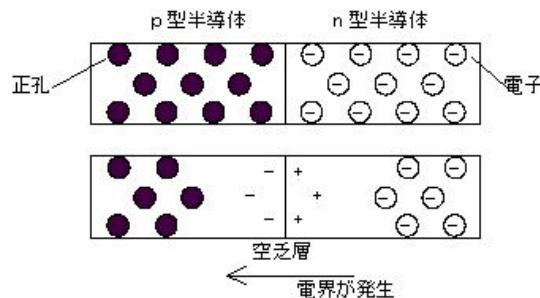


図 4.2: pn 接合部の空乏層

4.3.2 PIN フォトダイオード

PINフォトダイオードは以下の図のように、p型とn型の半導体の間にi型の半導体(真性半導体)を挟んだ構造をしている。i型とは不純物を加えていない半導体である(半導体にはキャリアを生むために不純物を加え、その種類によってp型やn型になる)。PN接合部が存在しないため、逆電圧を印加しないと使用することができない。

通常、pn接合の空乏層を広げるには高い逆電圧をかけなければならないが、i型半導体はそもそも空乏層のような働きをするため、i型を挟めば低い電圧ですむ。さらに、p型とn型を素子の両側に位置づけることで、光が当たっていないときに流れる暗電流が少なくなるという利点もある。

⁵空乏層以外で電子・正孔対が発生しても、すぐに周囲のキャリアと再結合してしまい、光電流として取り出すことができない。

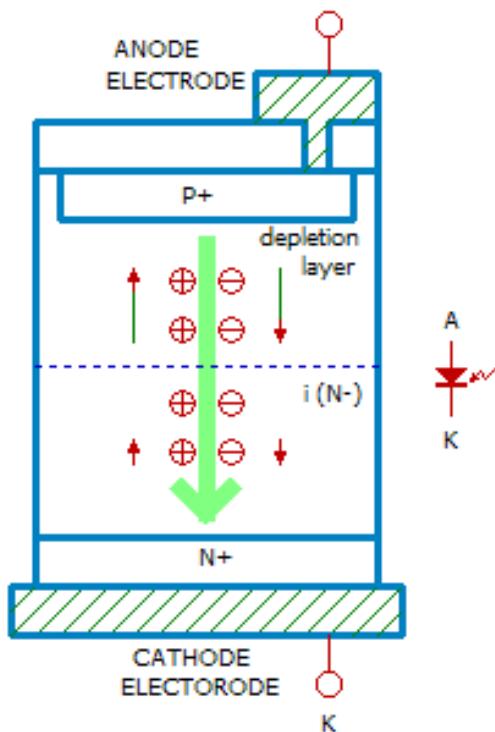


図 4.3: PIN フォトダイオードの構造

4.3.3 アバランシェフォトダイオード (APD)

APD はアバランシェ増幅⁶と呼ばれる現象を利用してシグナルの強度を増加させる仕組みをとった高速・高感度のフォトダイオードである。先ほどの PIN フォトダイオードの n 型半導体側にさらに n 型の極性の強い半導体を附加させる構造をとることで、そこに逆電圧をかけることによって生じる高電場領域において電子雪崩（アバランシェ）を生じさせる。アバランシェ増幅の基本的な仕組みは以下のようになっている。

1. 光子の衝突により発生する電子が、半導体中の電場によって加速される。
2. 加速された電子が半導体中の原子と衝突して、複数の 2 次電子を放出する。
3. さらにこれらが加速を受けて、爆発的な勢いで電子が増加する。

この現象により、APD は受光感度を高めているのである。APD の動作モードには大きく分けて、ノーマルモードとガイガーモードという 2 つのモードが存在する。

1. ノーマルモード
 - ブレイクダウン電圧（アバランシェが起きる電圧）以下の電圧で動作。
 - ゲイン < 100
 - APD に入射した光子数に比例⁷する電荷量の出力。

⁶アバランシェとは雪崩のことである。電子が雪崩のように増幅される様子を表している。

⁷実際には出力の log に比例する。

2. ガイガーモード⁸

- ブレイクダウン電圧以上の電圧で操作.
- ゲイン $\sim 10^6$
- APD に入射した光子数に無関係の電圧値に依存した電荷量の出力.

ひとつの APD ピクセルから出力される電荷量 Q は APD ピクセルに入射した光子の数にはよらず、以下の式 4.1 のように表される。

$$Q = C(V - V_{bd}) \quad (4.1)$$

ここで V は付加されたバイアス電圧、 C は APD ピクセルのキャパシタンスを示している。 C として的一般的な値は数十から数百 fF であり、 $(V - V_{bd})$ として一般的な値は数 V である。そのため Q として一般的な値は数十から数百 fC になる。MPPC のゲインは、元々 1 個の光電子がアバランシェによっていくつに増幅されたかで示されるので、 Q を素電荷で割った値、つまり 10^6 程度である。図 4.4 に APD の一般的な構造を示す。

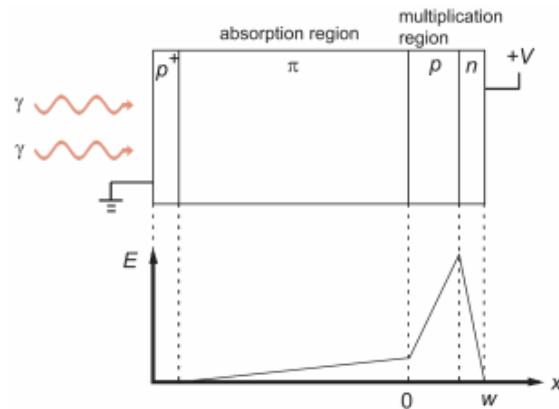


図 4.4: APD の電場

入射した光子は図 4.4 中の “absorption region” で電子-正孔対を作る。電子は “abosorption region” 内にかかっている弱い電場によって pn 接合が形成する “multiplication region” までドリフトする。“multiplication region” の高電場領

⁸名前の由来はガイガーミュラー計数管から来ている。ガスカウンターにもノーマルモード (ex. 比例計数管) などが存在し、電圧やガスの種類によってモードが決定される。詳しくは Sauli[1] を参照のこと。

域に入った電子はアバランシェ増幅を起こし、入射した光子数によらない電荷量がAPDから出力される。この増幅された電流はポリシリコンの抵抗体を通じてアルミ電極によってシグナルとして読み出される。

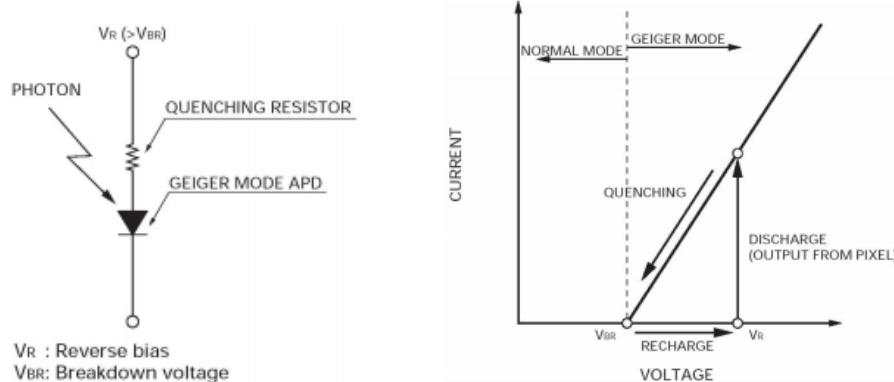


図4.5にAPDの等価回路を、図4.6にシグナルが発生する一連のプロセスを示す。ポリシリコンの抵抗体はクエンチング抵抗と呼ばれ、各ピクセルに付属している。APDピクセルでガイガーフラッシュが生じると、出力された電流がクエンチング抵抗を流れる際に電圧降下をおこし、APDにかかっていた逆電圧が一時的に減少する(図4.6中での”DISCHARGE”→”QUENCHING”). この電圧降下のためにAPDピクセルはガイガーモードから脱し、アバランシェは終了する。抵抗体を通して電荷が流れ出していく時間はAPDピクセルのキャパシタンスをC、抵抗体の抵抗値をRとすると、 $C \times R$ に比例する。この時間はオシロスコープで波形を見た際のシグナルの時間スケールに対応している。

4.3.4 MPPC

MPPCは正方形のAPDピクセルが受光部に敷き詰められた構造をしている。全てのAPDの読み出し線、及び電圧供給の線は共通になっている。そのために図4.7で示すように全てのAPDピクセルには同じ電圧値が付加され、全てのAPDピクセルからのシグナルの総和が1つのMPPCからの出力として得られる構造になる。

MPPCでは各APDピクセルからの応答が良く揃っているために、総和として出力されるシグナル Q_{total} は、フォトンを受光したピクセル数 N_{fired} に式(4.1)の

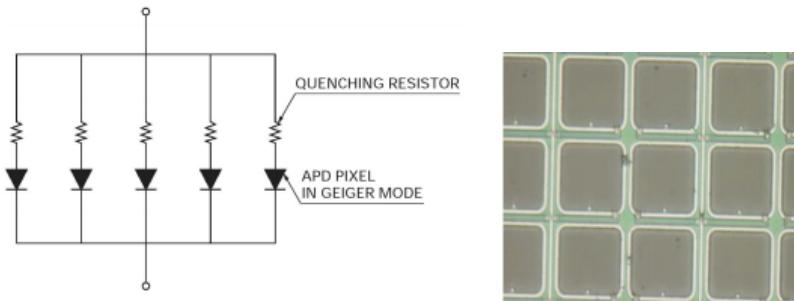


図 4.8: MPPC の受光面

図 4.7: MPPC 等価回路

Q をかけた値になる。受光したピクセル数は、光が微弱である時入射する光量に比例する。そのために MPPC は非常に高いフォトンカウンティング能力を備えている。主な性能を、PMT と MPPC とで比較する。

表 4.1: PMT と MPPC の比較

	MPPC	PMT
ゲイン	$10^5 \sim 10^6$	$10^6 \sim 10^7$
光子検出率	30 ~ 50 %	15 ~ 30 %
ダークカウント	$10^5 \sim 10^6$ Hz	$\sim 10^3$ Hz
動作電圧	~ 70 V	1000 ~ 2000 V
時間分解能	~ 200 psec	100 psec ~ 1 nsec
有感領域	~ 1 mm 2	10 cm 2 ~ 100 cm 2
磁場耐性	あり	なし

MPPC も当然いいところばかりではなくダークカウントが非常に多いなどの欠点もある。なので、トリガーなどを工夫してデータをとらないといけない。また、有感領域が小さいので、ある程度有感領域を確保しようとすると大量の MPPC が必要となりデータ解析などが大変になる。

4.4 MPPC の特性

我々が事前に評価のために測定したデータも用いながら MPPC の特性を説明していく。一部の測定は [2][3][4] のデータを参考にした。また一部の特性は演習とし

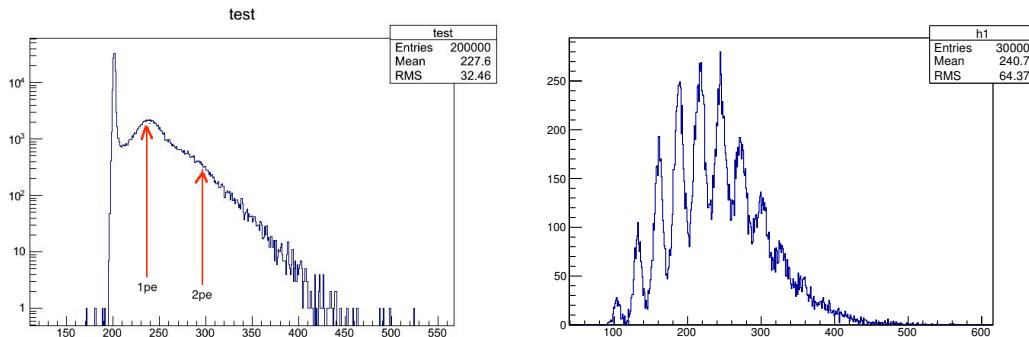


図 4.9: PMT で見た 1 光子

図 4.10: MPPC で見た光子

て自ら計って実感してもらいたい⁹。

4.4.1 評価の方法

MPPC の特性の評価には次のようなセットアップを行った。ADCなどの装置の詳しい説明は5章にある。

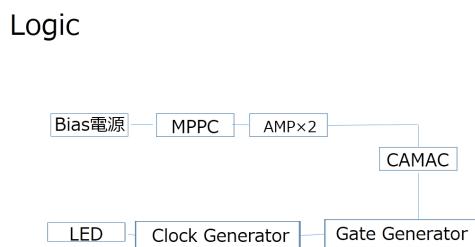


図 4.11: ロジック

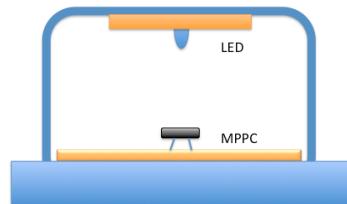


図 4.12: LED と MPPC の配置

⁹MPPC には個体差があるため、今回測定する MPPC が同じ値になるとは限らないことに注意。

4.4.2 ゲイン

ゲインは一番最初に得られた信号が最終的にどれだけ増幅されて出力されたのかを示す量である。入射粒子によって発生した光電子の電荷（つまり素電荷）と増幅後に得られた電荷の比を求めて MPPC のゲインを測定した。ゲインは

$$G_{\text{mppc}} = \frac{A \cdot \Delta N_{\text{channel}}}{G_{\text{amp}} e} \quad (4.2)$$

で得られる。 G_{amp} はアンプのゲイン、 $\Delta N_{\text{channel}}$ は 0p.e. と 1p.e.¹⁰ の ADC チャンネルの差、A は ADC 1 チャンネルあたり何 C かを表す量である。今回我々が用いた ADC では 0.25 pC/ch である。アンプは 10 倍のものを用いた。Bias 電圧 69.3 V で測定し得られたデータ（図 4.13）から計算すると

$$G_{\text{mppc}} = 2.8 \times 10^6 \quad (4.3)$$

となった。

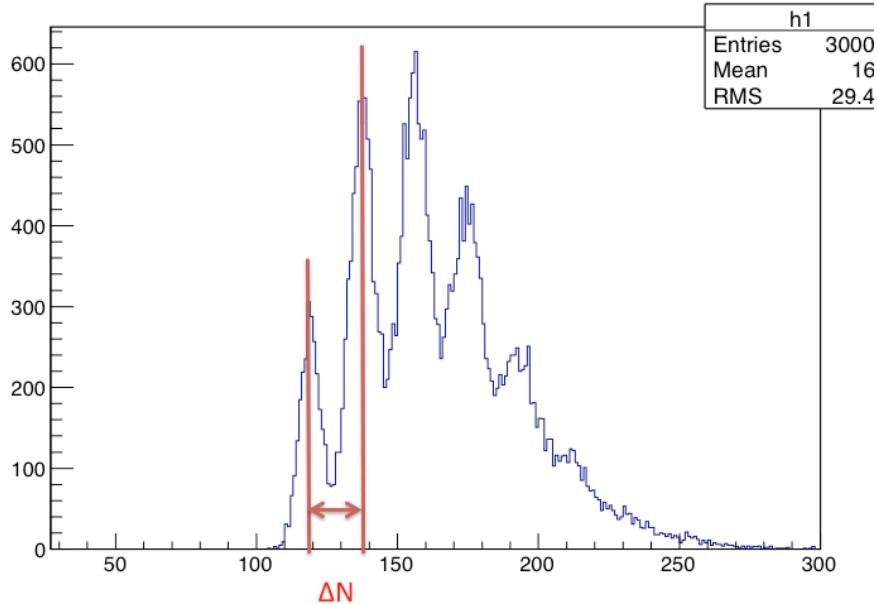


図 4.13: ΔN を求める

¹⁰p.e. とは photoelectron のこと。n p.e. とは光電子 n 個分のチャージを観測したことを表す。

電圧依存性

式(4.1)よりBias電圧が高いほど、得られる信号も大きくなるためMPPCの増幅率も比例して大きくなる。電圧を徐々に増やしてゲインを計算しプロットした結果が次の図4.14である。

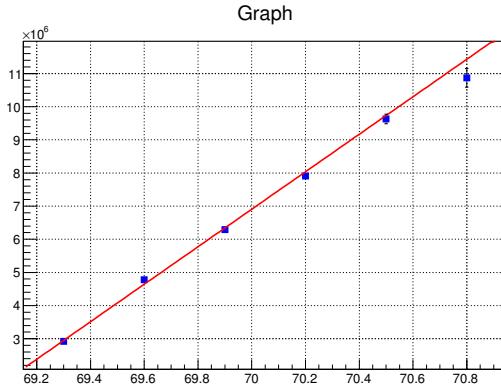


図4.14: 電圧 vs ゲイン

ブレイクダウン電圧

式(4.1)より、 V_{bd} の時得られる電荷は0になるのでゲインも0になる。また、これより下の電圧になると電子雪崩が起こせないため V_{bd} 以上の電圧でないと増幅が起こらない。この増幅が起こり始める電圧のことをブレイクダウン電圧という。ゲインと電圧の関係が線形なので線形の式でゲインが0になるところがブレイクダウン電圧になる。図4.14で線形近似すると

$$y(gain) = 5.65 \times 10^6 (\pm 6.14 \times 10^4) x[V] - 3.89 \times 10^8 (\pm 4.27 \times 10^6) \quad (4.4)$$

となり、ここからブレイクダウン電圧を求めると

$$68.8 \pm 1.1 \text{ V} \quad (4.5)$$

になった¹¹。

¹¹これらは、演習で測定するデータからも求めることができる。興味がある人は自分で求めてみるといい

温度依存性

ブレイクダウンはイオン化係数が一定値に達する電場が生成された時に起こる。低温である時ほど、半導体中でのキャリアの移動速度が速いためブレイクダウン電圧は低下する。

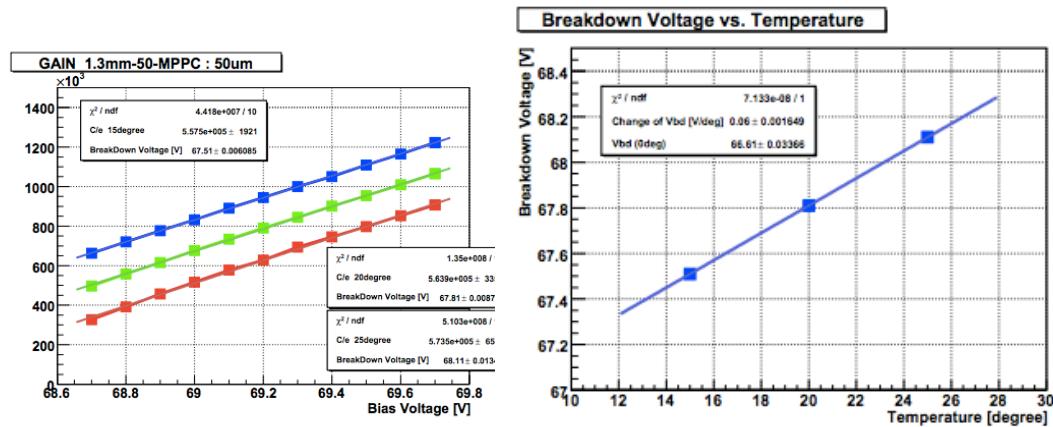


図 4.15: ゲインの温度依存性

4.4.3 ノイズとその他測定に影響を及ぼす要素

ダークカウント

ノイズは回路に起因する電気的なもの以外にもある。特に、熱励起によって生じる熱電子をカウントしてしまう現象、ダークカウントが実験する場合重要である¹²。発生原理からダークカウントは 1p.e. のイベントが多く 2p.e.、3p.e. … と光子数が多くなるにつれてイベント数が落ちていく性質がある。さて、ダークカウントレートを ADC 分布から計算する。具体的には、LED を光らせていないとき、測定時間中 (=ゲート幅 × 全イベント数) に生じた全てのイベントを測定時間で割ることにより求める。以下では Poisson 分布を仮定している。

¹²ダークカウントと競合するものとして、Bias 電圧が十分かかるとトンネル効果により自由なキャリアができるてしまい、それが増倍されることで信号を拾ってしまうこともある。ただ、ダークカウントに比べると効果はだいぶ少ない。詳しくは、[4]

$$\begin{aligned}
 \text{DarkcountRate} &= \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i \times N_i}{\text{Gatewidth} \times \text{TotalEvents}} \\
 &= \frac{\text{TotalEvents} \times \lambda}{\text{Gatewidth} \times \text{TotalEvents}} \\
 &= \frac{-\ln(N_0/\text{TotalEvents})}{\text{GateWidth}}
 \end{aligned}$$

次の図 4.16 は Bias 電圧 69.3 V のときに LED を光らせずにデータをとったときのヒストグラムである。

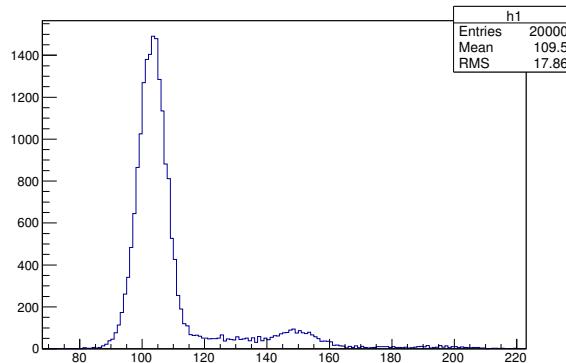


図 4.16: LED なしの時の ADC ヒストグラム

ここからダークカウントを求めると

$$5.334 \times 10^6 \text{ Hz} \quad (4.6)$$

となった。ダークカウントも Bias 電圧と温度に依存し、Bias 電圧、温度が高くなるほどダークカウントも多くなってくる。Bias 電圧が高いほどアバランシェが起きやすく、温度が高いほど増幅される前のもともとの熱電子の数が多いことを示す¹³。[4]

クロストーク

ある APD ピクセルが熱電子や光電子をトリガーとしてガイガーフラッシュを起こしたとする。その放電の最中に、二次的な光子が放出される。この二次光子は、隣の

¹³余力のある人はゲインと温度のグラフを書いてみよう。

ピクセルにおいてガイガーフィラメントのトリガーになってしまうことがある。ガイガーフィラメントはピコ秒のオーダーで終了するものであるため、2つのシグナルはほとんど同時に放出されることになる。このような事象をクロストーク、それが起こる確率をクロストークレートと定義している。クロストークが起こると、本来光子を検知しなかったはずのピクセルがシグナルを放出することになる。すなわち、クロストークは本来1つの光電子でしかなかったものを、2、もしくはそれ以上の光電子のように見せてしまう。クロストークは見かけの光量を増加させ、パルスリニアリティーなどに悪影響を及ぼす。

アフターパルス

あるピクセルでガイガーフィラメントが起こる。すると、その放電中に增幅された電子のうちの一部が、半導体内に存在する格子欠陥にトラップされる。このトラップされた電子は、ある時間だけ経った後に再放出され、再びガイガーフィラメントのトリガーになることがある。この、先のシグナルよりもやや遅れて同じピクセルからシグナルが放出される現象をアフターパルスと定義する。ある1つのAPDピクセルでのガイガーフィラメントから派生するものであり、本来1つの光電子でしかなかったものを、2、もしくはそれ以上の光電子のように見せてしまうという点でクロストークと似ているが¹⁴、生じるプロセスは全く違う。

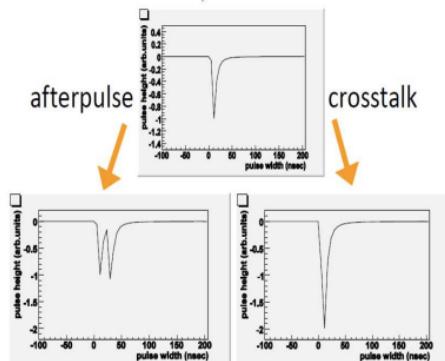


図 4.17: Cross Talk と After Pulse

¹⁴今回の演習ではこの2つの影響を同時に測定することになる。しかし、2つを分けて測定する方法も存在する。詳しくは [2]

パルスリニアリティ

MPPC は APD の集合体であるために、ピクセルの全数以上のシグナルを出すことが原理上不可能である。入射してくる光子の数が大きくなるにつれ、同じピクセルに複数の光子が入射する確率が高くなり、光子を検出したピクセルの数が入射した光子数に比例しなくなってくる。ピクセル数が大きい素子ほどダイナミックレンジが広く、また線型性もより強い光に対して成立すると考えられる。さらに MPPC ではクロストークの影響によりダイナミックレンジが狭まる可能性がある。また入射光の時間構造が長い場合、MPPC の回復時間が短いために回復し終えたピクセルが再び光を検知し、実効的なダイナミックレンジが広がる可能性がある。

参考文献

- [1] F.Sauli , Principles of operation of multiwire proportional and drift chambers CERN, Geneva, Switzerland CERN, 77-09 (1977),
- [2] http://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/theses/master/gomi_mt.pdf
- [3] http://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/theses/master/nobuhara_mt.pdf
- [4] http://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/theses/master/nao_mt.pdf
- [5] G.F.Knoll, Radiation Detection and Measurement 4th Ed. Wiley, New York,2010
- [6] W.R.Leo ,Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments: A How-to Approach Springer,Berlin,1994
- [7] 浜松ホトニクスカタログ

放射線計測全般については[5],[6]を参照。

少々値ははるが、ガス計数管、PMT、半導体検出器などの検出器の説明やシンチレータの特性、種類など放射線計測の広範な知識を1冊でカバーできるはずである。ガス計数管に関しては[1]などがある。MPPCの評価方法については京都大学理学研究科高エネルギー物理学研究室の修士論文[2][3][4]などを参考にした。

MPPCについては[7]。MPPCは研究が進められてだんだんと性能が良くなっている。最新のMPPCの評価については各大学の論文、報告のトラペを参考にしてもらいたい。

第5章 Electronics

5.1 電気信号の特性

5.1.1 電気信号を見る

「粒子を見る」ということはすなわち「電気信号を見る」ということである。一昔前には霧箱・泡箱などのように視覚的に認識する方法も取られていたが、大量のイベントを扱う現在では、我々が粒子(放射線)を観測し、定量的に分析するために、それらのもつ情報を電気信号に変えて読み出すことが必要となっている。¹ ここでは電気信号の処理についてまとめてみた。

5.1.2 オシロスコープ

オシロスコープは信号を見るための基本的な道具である。横軸に時間、縦軸に電圧をとり、ある時間スコープ内の電圧変化(波形)を表示する。オシロスコープでは波形の「写真」をとっている様なものである。オシロスコープのサンプリング能力(連写速度)には限界があるため、全ての時間の波形を表示する(写真を撮る)ことは出来ない。このため、欲しい信号が来たタイミングで表示する(シャッターを切る)こと、すなわちトリガーをかけることが大事である。トリガーをかけると、ある閾値(threshold)を超えた信号が来たときその波形を表示する。またトリガーは信号が自分自身で閾値を超えたときにかける以外に、外からトリガー信号を送ることによってもかけることが出来る。今回の実験で言えば、前者はMPPCの信号自身でトリガーをかけること、後者はLEDの発光タイミングでトリガーをかけることに対応する。

5.1.3 信号の種類

信号には直流信号と交流信号の2種類がある。我々が粒子検出として使うのは交流信号である。電圧が時間変化しない直流信号に対し、交流信号は時間とともに

¹原子核乾板(粒子の軌跡上に銀を析出させ、off-lineで解析する)のように一部例外はある。

に電圧が変化し、一般に様々な周波数をもつ正弦関数の重ね合わせで表すことが出来る(フーリエ変換)。信号は同じ回路(導線中などを含めて)の中を伝わるとしても、その周波数によって反応が異なる。例えば周波数 ω の信号に対して、静電容量 C のコンデンサとインダクタンス L のコイルのインピーダンスはそれぞれ $1/i\omega C$ 、 $i\omega L$ となる。

5.2 NIM 規格回路モジュール



図 5.1: NIM モジュール

5.2.1 NIM 規格

NIM(Nuclear Instrument Module) 規格とは、回路モジュールの機械的・電気的仕様を規定している規格であり、素粒子・原子核実験で広範に使われている。これらは、NIM ビンと呼ばれるスロット付の箱に装着することで、背面の電源供給ピンや制御信号ピンとモジュールを接続し、動作させることができる(図 5.1)。ここでは NIM 規格での論理信号と、実験で使うモジュールについて説明する。

NIM 規格では -16mA ($50\ \Omega$ 受けで -0.8V)を真、 $0\text{mA}(0\text{V})$ を偽と定義する。

状態	電流	50Ω終端時電圧
1 (YES)	-16mA	-0.8V
0 (NO)	0mA	0V



図 5.2: NIM のロジック信号 - 1

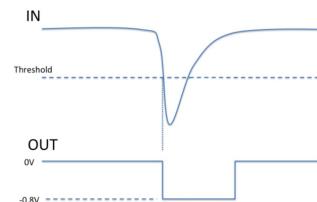
図 5.3: NIM のロジック信号 - 2

5.2.2 モジュール

代表的な NIM モジュールを以下に挙げる。

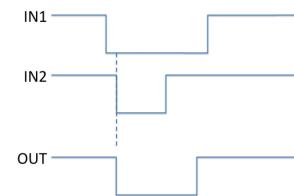
ディスクリミネータ

アナログ入力信号の大きさがある閾値以上の場合に論理信号を出力する。



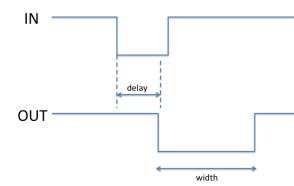
コインシデンス

複数の論理信号が重複して入力された場合に論理信号を出力する。一定間隔の信号を出力するモードと、重複している時間のみ信号を出力するモードがある。

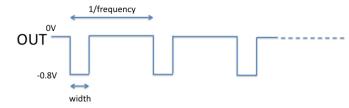


ゲートジェネレータ

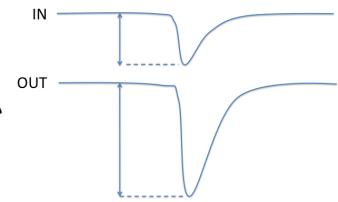
入力論理信号に対し、一定時間後に一定の幅を持つ論理信号を出力する。遅延時間 (delay) や幅 (width) は自ら設定できる。比較的大きな delay や width を実現したい場合に使用する。



クロックジェネレータ
周期的に論理信号を出す。



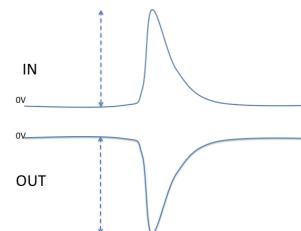
アンプ
(アナログ)信号を増幅する。MPPCなどの波高の小さい信号を見るときには必要。



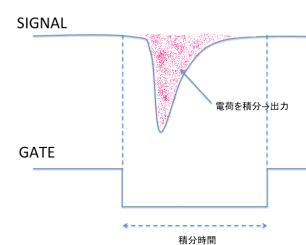
スケーラー
論理信号が入力された数を数え上げる。信号のレートを見るときなどに用いる。

5.3 その他-実験で用いるもの

インバーター
信号の正負の向きを反転させるデバイス。



荷電積分型アナログ-デジタル変換器 (ADC)
アナログ信号をある時間間隔だけ積分して 荷電情報に直し、それをデジタル情報化して 得るモジュール。積分時間間隔はゲート信号入力の幅で決められる。このデータは 信号の大きさを数値化したもので、例えばシンチレーターでの発光量、あるいはエネルギー損失量に比例するものである。したがって、このデータの分布がエネルギー分布に対応する。



5.4 おまけ-回路素子の見方

今回の演習で扱う回路素子（抵抗、コンデンサ）は、高校でも教科書に出てきていてよく知っている（気がする）が、案外実物を見たことがない人も多いのではないだろうか？ 単に抵抗、コンデンサといつてもその種類はたくさんある。詳しいことについては章末の参考文献から（興味がある人は）調べてもらうとして、ここではもっと基本的なこと、抵抗値や静電容量の読み方について簡単にまとめたいと思う。

抵抗については図 5.4 にあるような「カラーコード」によって抵抗値を表している。左 2ch(3ch) で有効数字 2(3) 枝の値を、次の 1ch で 10 の何乗を乗じるかを表し、最後の ch で許容差を表している。

図 5.4 の右上の例にあるように、これは $33 \times 10^1 = 330\Omega$ を表しているのであり、 $3.3 \times 10^1 = 33\Omega$ を表している訳ではないので注意。（結構うっかり間違えたりする。。）

コンデンサの静電容量についても似たような規則で表現されている。コンデンサではカラーコードは使われないが、例えば “102” などと書かれているものは $10 \times 10^2 = 1000[\text{pF}]$ を表している。抵抗は $[\Omega]$ を単位としているがコンデンサは $[\text{pF}] (= 10^{-12}[\text{F}])$ が単位であることに注意（1[F]（ファラド）のコンデンサなんてものはとんでもない大容量のバケモノコンデンサ）。

色名	數字	10のべき数	抵抗値許容差 [%]	記号	抵抗温度係数 [ppm/°C]	記号
銀	—	10^{-2}	± 10	K	—	—
金	—	10^{-1}	± 5	J	—	—
黒	0	1	—	—	± 250	K
茶	1	10	± 1	F	± 100	H
赤	2	10^2	± 2	G	± 50	G
黄赤	3	10^3	—	—	± 15	D
黄	4	10^4	—	—	± 25	F
緑	5	10^5	± 0.5	D	± 20	E
青	6	10^6	± 0.25	C	± 10	C
紫	7	10^7	± 0.1	B	± 5	B
灰	8	10^8	—	—	± 1	A
白	9	10^9	—	—	—	—
無色	—	—	± 20	M	—	—

• 有効数字2桁の抵抗の色表示

第1色帯(有効数字の1桁目の数字)
第2色帯(有効数字の2桁目の数字)
第3色帯(有効数字に乘じる10のべき数)
第4色帯(抵抗値許容差)

写真の抵抗の仕様は以下のとおり。
黄赤 黄赤 黒 金
 $3\ 3 \times 10^1 = 330\Omega$, 許容差: $\pm 5\%$

• 有効数字3桁の抵抗の色表示

第1色帯(第1数字)
第2色帯(第2数字)
第3色帯(第3数字)
第4色帯(有効数字に乘じる10のべき数)
第5色帯(抵抗値許容差)
第6色帯(抵抗温度係数)

写真の抵抗の仕様は以下のとおり。
黄 白 白 黑 紫
 $4\ 9\ 9 \times 10^1 = 4.99k\Omega$, 許容差: $\pm 1\%$, 溫度係数: $\pm 50\text{ppm}/\text{°C}$

図 5.4: カラーコード



図 5.5: いろいろなコンデンサ

参考文献

- [1] http://www-cr.scphys.kyoto-u.ac.jp/member/tsuru/data/lecture/electronics_v2007_8.pdf
京都大学 鶴先生の「エレクトロニクス」講義ノート
- [2] http://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/gakubu/A2/A2-02/A2text_20020527.pdf
京都大学3回生向け課題演習の資料
- [3] W.R.Leo *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*
- [4] Glenn F.Knoll *Radiation Detection and Measurement*
- [5] Paul Horowitz , Winfield Hill *The Art of Electronics*

第6章 Statistics

6.1 統計はなぜ必要か

どんな分野においても実験には誤差がつきものであり、誤差の評価はその実験値にどの程度の重要性があるか表す指標としてかかすことができない。素粒子の世界では存在する確率（Backgroundとして説明できない確率）が 5σ を超えると発見とは言わない慣習があつたりする。ここでは必要最小限の確率の知識と誤差の評価についてまとめた。詳しくは各自統計、確率の本を参考にしてもらいたい。

6.2 誤差

6.2.1 誤差の種類

誤差には大きく分けて2つの種類がある。統計誤差と系統誤差である。統計誤差とは実験値のランダムなばらつきに起因する誤差で一般に取得するデータをためることで誤差を減らすことができる。系統誤差とは、一定の原因によって繰り返し現れる誤差のことである。例えばノギスである物体の直径をはかったときを考えよう。ノギスの当て方、ノギスの目盛りの読み方などによって測定ごとに誤差が生じる。1回の測定でそのため何度も測定を繰り返し平均を取ることによって測定値を求めるというのは小学校から行っていることである。多く測れば多く測るほどばらつきの広がりは減っていくし、平均値は一定の値に近づいていく。こういった測定に関する誤差が統計誤差である。しかし、ノギスが少し歪んでいたらどうなるだろうか？歪んだノギスで何度も計測しても歪みによるずれは減らすことはできない。この歪みによって生じる誤差のことを系統誤差という。正しい値を求めるには統計をためて統計誤差を減らすというのも重要であるが系統誤差を押さえることも非常に重要である。

6.2.2 誤差の表し方

誤差の指標としてどのような量を計算すればいいのだろうか？ 一番最初に思いつくのは各々のデータと平均からのずれ

$$d_i = x_i - \bar{x}_e \quad (6.1)$$

の平均である。 \bar{x}_e はデータの平均値を表す。しかしこの量は

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N d_i &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N x_i - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \bar{x}_e \\ &= \bar{x}_e - \bar{x}_e = 0 \end{aligned}$$

であるので、誤差を表す量にできない。そこでこの d_i の二乗の和をとり、 N で割ったものを分散 (variance) と定義する。

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (6.2)$$

\bar{x} は「真の」平均値であるが、平均値を実験データから求める際は

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x}_e)^2 \quad (6.3)$$

となる¹。

このままだともとのデータと次元が異なるのでこれの平方根をとることで誤差の指標とする。これを (標本) 標準偏差という。確率分布を用いて標準偏差を計算すると

$$\begin{aligned} s^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} (x_i - \bar{x})^2 F(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) F(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 F(x_i) - 2\bar{x} \sum_{i=0}^{\infty} x_i F(x_i) + \bar{x}^2 \sum_{i=0}^{\infty} F(x_i) \\ &= \bar{x}^2 - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

¹直感的にはデータから平均 \bar{x}_e を求めているのでその分 1 つ減ると考えればよい。いずれにせよ N が大きいときはあまり気にする必要はない

とかける。

6.2.3 誤差の伝播

一般に物理量は必ずしも直接はかることができる訳ではない。例えば、Compton 散乱を用いて光子が物質中の電子に落としたエネルギーを求めることを考える。物質中の電子のエネルギーを直接はかることはできないので、入射エネルギーと光子の反跳エネルギーを測定することで求める。Compton 散乱の式より光子の反跳エネルギーは

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \quad (6.4)$$

物質中に落とすエネルギーは

$$E = h\nu - h\nu' \quad (6.5)$$

であるが²、 $h\nu$ も $h\nu'$ も測定して求めるものなのでともに誤差が生じる。なので当然間接的にもとめる量 E にも誤差が生じる。このようにある測定量の誤差が求める量の誤差に影響を及ぼすことを「誤差の伝播」という。この誤差の伝播を調べてみよう。

測定値を変数を持つ関数 $f(x_i)$ の分散を求める考えよう。 x_i の平均を \bar{x}_i 、分散を σ_i^2 とする。

$$x_i = \bar{x}_i + \delta_i \quad (6.6)$$

とかくと、 δ_i は平均 0、分散 σ_i^2 である。 δ_i が微小のとき

$$\begin{aligned} < f(x_i) > &= < f(\bar{x}_i + \delta_i) > \\ &= < f(\bar{x}_i) + \sum_{i=0}^N \frac{\partial f(\bar{x}_i)}{\partial \bar{x}_i} \delta_i > \\ &= f(\bar{x}_i) + \frac{\partial f(\bar{x}_i)}{\partial \bar{x}_i} \sum_{i=0}^N < \delta_i > \\ &= f(\bar{x}_i) \end{aligned} \quad (6.7)$$

²Compton 散乱は角度に依存するが一つ角度を決めてしまえばエネルギーは一定になるのでエネルギーを計るだけで物質に落ちたのエネルギーはわかる。

となる。分散は各測定値が独立だとすると

$$\begin{aligned}
 & <(f(x_i) - f(\bar{x}_i))^2> \\
 &= <(\sum_{i=0}^N \frac{\partial f(\bar{x}_i)}{\partial \bar{x}_i} \delta_i)^2> \\
 &= <\sum_{i=0}^N (\frac{\partial f(\bar{x}_i)}{\partial \bar{x}_i} \delta_i)^2> + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{\partial f(\bar{x}_i)}{\partial \bar{x}_i} \delta_i \frac{\partial f(\bar{x}_j)}{\partial \bar{x}_j} \delta_j <\delta_i \delta_j> + \dots \\
 &= \sum_{i=0}^N (\frac{\partial f(\bar{x}_i)}{\partial \bar{x}_i} <\delta_i>)^2 + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{\partial f(\bar{x}_i)}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial f(\bar{x}_j)}{\partial \bar{x}_j} <\delta_i><\delta_j> + \dots \\
 &= \sum_{i=0}^N (\frac{\partial f(\bar{x}_i)}{\partial \bar{x}_i})^2 \sigma_i^2
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

となる。先ほどの例で試してみよう。例えば $h\nu = 660 \pm 10 \text{ keV}$, $h\nu' = 440 \pm 15 \text{ keV}$ だったとしよう。式(6.7)、式(6.8)に代入すると

$$\bar{E} = 660 - 440 = 220 \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_E^2 &= \left(\frac{\partial(h\nu - h\nu')}{\partial h\nu} \right)_{h\nu=660}^2 \sigma_{h\nu}^2 + \left(\frac{\partial(h\nu - h\nu')}{\partial h\nu'} \right)_{h\nu'=420}^2 \sigma_{h\nu'}^2 \\
 \sigma_E &= \sqrt{\sigma_{h\nu}^2 + \sigma_{h\nu'}^2} \\
 &= 18.03
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

より、 $E = 240 \pm 18 \text{ keV}$ となる。 $h\nu$ の誤差が 1.5%, $h\nu'$ の誤差が 3.6% であったものが 8.2% まで大きくなっているのがわかる。

今度は角度のずれによる反跳エネルギーのずれを求めてみる。入射エネルギーは上と同様 $660 \pm 10 \text{ keV}$, その他は $mc^2 = 511 \text{ keV}$, $\theta = 60^\circ \pm 5^\circ$ とする。

$$< h\nu'> = \frac{660}{1 + \frac{660}{511}(1 - \cos 60^\circ)} = 440.0 \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{h\nu'}^2 &= \left(\frac{\partial(h\nu')}{\partial h\nu} \right)_{h\nu=660}^2 \sigma_{h\nu}^2 + \left(\frac{\partial(h\nu')}{\partial \theta} \right)_{\theta=60^\circ}^2 \sigma_\theta^2 \\
 &= \left(\frac{1}{(1 + \frac{660}{511}(1 - \cos 60^\circ))^2} \right)^2 \sigma_{h\nu}^2 + \left(-\frac{\frac{660^2}{511} \sin 60^\circ}{(1 + \frac{660}{511}(1 - \cos 60^\circ))^2} \right)^2 \sigma_\theta^2
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

このままでも計算できるのだが、かけ算割り算がある場合相対誤差を考えるのが便利である。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_{h\nu'}}{h\nu'}\right)^2 &= \left(\frac{1}{(1 + \frac{660}{511}(1 - \cos 60^\circ))^2} \frac{1 - \frac{660}{511}(1 - \cos 60^\circ)}{660}\right)^2 \sigma_{h\nu}^2 \\ &+ \left(-\frac{\frac{660^2}{511} \sin 60^\circ}{(1 + \frac{660}{511}(1 - \cos 60^\circ))^2} \frac{1 + \frac{660}{511}(1 - \cos 60^\circ)}{660}\right)^2 \sigma_\theta^2 \\ &= \left(\frac{1}{660(1 + \frac{660}{511}(1 - \cos 60^\circ))}\right)^2 \sigma_{h\nu}^2 + \left(-\frac{\frac{660}{511} \sin 60^\circ}{1 + \frac{660}{511}(1 - \cos 60^\circ)} 1 + \frac{660}{511}(1 - \cos 60^\circ)\right)^2 \sigma_\theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{h\nu'}}{h\nu'} &= \frac{1}{1 + \frac{660}{511}(1 - \cos 60^\circ)} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{h\nu}}{660}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\theta 660 \sin 60^\circ}{511}\right)^2} \\ &= 0.6076 \times \sqrt{2.296 \times 10^{-4} + 0.03811} \quad (6.13) \\ &= 0.118 \quad (6.14) \end{aligned}$$

より $h\nu' = 440.0 \pm 52.3$ keV になる。この場合、エネルギーのずれよりも角度のずれによる寄与が大きいこともわかる。このようにどこで誤差が一番効いてくるのか、求める値の精度をよくするにはどこの測定の誤差を減らすといいのかというのは実験において重要な要素となる。

6.3 基本的な統計

6.3.1 二項分布

まずは、高校の確率のおさらいをしよう。

例題 1

あるコンビニの昼の T 分間に N 人の客が来店するという。その間、客の来店はランダムであるとして、ある一分間に n 人の客が来る確率 P_n を求めよ。

T 分内に来た N 人の客のうち n 人が 1 分のうちに、残りの $N - n$ 人が $(T - 1)$ 分に来店する確率に等しいので

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{1}{T}\right)^n \left(1 - \frac{1}{T}\right)^{N-n} \quad (6.15)$$

が答えとなる。このようにある事象の分布が二項係数を用いてかける場合を二項分布という。

6.3.2 Poisson 分布

さて上のコンビニの問題で $T \gg 1, N \gg n$ という条件が加わったとしよう。つまり1分に1人くる確率が非常に小さくなり、くる人数が非常に多くなった場合を考える。このとき式(6.15)は

$$\begin{aligned} P(n) &= \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!} \left(\frac{1}{T}\right)^n \frac{\left(1-\frac{1}{T}\right)^N}{\left(1-\frac{1}{T}\right)^{-n}} \\ &= \frac{1}{n!} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{N}\right) \left(1-\frac{2}{N}\right) \dots \left(1-\frac{n-1}{N}\right) \left(\frac{N}{T}\right)^n \frac{\left(1-\frac{1}{T}\right)^N}{\left(1-\frac{1}{T}\right)^n} \end{aligned}$$

ここで $\frac{N}{T} = \lambda$ として、 $N \rightarrow \infty$ の極限をとる。この λ は1分間の平均の来客数を表している。

$$P(n) = \frac{1}{n!} \cdot 1 \dots 1 \cdot \lambda^n \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N}{\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^n} \quad (6.16)$$

$$= \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \quad (6.17)$$

この式(6.17)をPoisson分布という³。平均 λ 起こる事象が k 回起こる確率を表すのがPoisson分布になる。一般に稀現象を大量に観測した場合この分布に従うようになる。

問題 1

1. Poisson分布に従う事象の例をあげよ
2. Poisson分布の平均・標準偏差を求めよ。

6.3.3 Gauss 分布

Poisson分布で λ が大きい場合を考える。式(6.15)にStirlingの公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n} \quad (6.18)$$

³京都大学理学研究科物理学専攻の大学院入試問題を参考にした

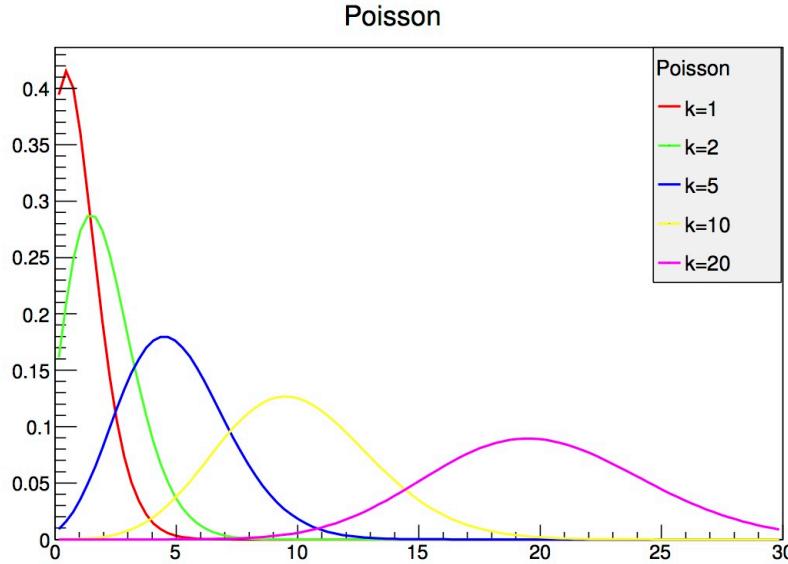


図 6.1: Poisson 分布

を代入して

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{\lambda}{n} \right)^n e^{n-\lambda} \quad (6.19)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left(\frac{\lambda}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} e^{n-\lambda} \quad (6.20)$$

$(n - \lambda) = \epsilon$ としてまとめると

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \epsilon} \right)^{\epsilon + \lambda + \frac{1}{2}} e^\epsilon \quad (6.21)$$

$$\log(\sqrt{2\pi\lambda} P(n)) = - \left(\epsilon + \lambda + \frac{1}{2} \right) \log(1 + \frac{\epsilon}{\lambda}) + \epsilon \quad (6.22)$$

$$= - \left(\epsilon + \lambda + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\epsilon}{\lambda} - \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\lambda} \right)^2 + O\left(\left(\frac{\epsilon}{\lambda} \right)^3 \right) \right) + \epsilon \quad (6.23)$$

$$\cong - \left(\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2\lambda} + \frac{\epsilon^2}{\lambda} \right) + \epsilon + O\left(\left(\frac{\epsilon}{\lambda} \right)^3 \right) \quad (6.24)$$

$$\cong \frac{\epsilon^2}{2\lambda} \quad (6.25)$$

ただし、式(6.24)では

$$\log(1+x) \cong x - \frac{1}{2}x^2 + \mathbf{O}(x^3) \quad (6.26)$$

式(6.25)では

$$\epsilon \gg \frac{1}{2} \quad \lambda \gg \frac{1}{2} \quad (6.27)$$

の近似を用いた。以上より

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left(\frac{(n-\lambda)^2}{2\lambda}\right) \quad (6.28)$$

となる。この式(6.28)をGauss分布⁴という。ガウス分布はきわめて一般的な分布で中心極限定理⁵より、統計をためるとデータの母平均はGauss分布に従うようになる。

問題2

1. $n \gg 1, N \gg 1$ のとき、Stirlingの公式を用いて二項分布から直接ガウス分布を導け
2. $P(n)$ の n を実数と見なし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(n) dn = 1 \text{ を確かめよ。} \quad (6.29)$$

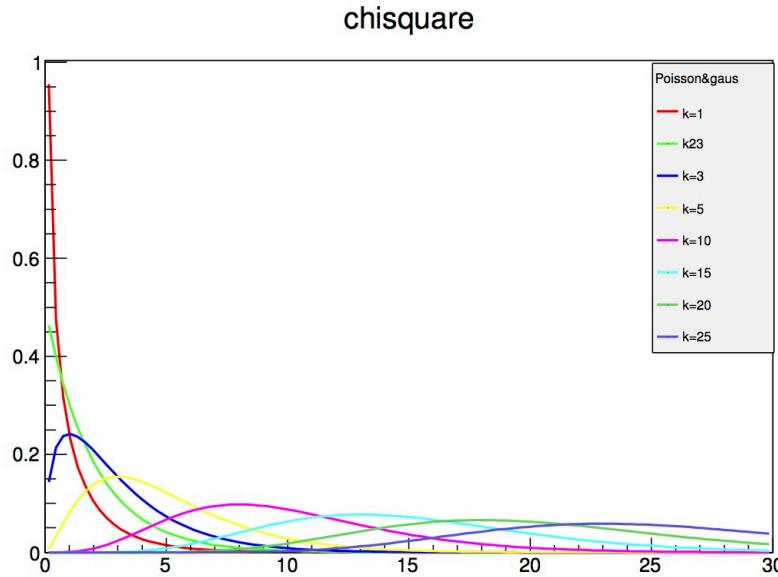
6.3.4 χ^2 検定

実験を行った際その値が正しい値が実際に理論と一致するかどうかを確かめる際に指標としてよく使われるのが χ^2 検定である。得られたデータ y を関数 $f(x)$ でFitすることを考えよう。測定値と予想値を N 点で比較することを考える。測定値の各点 y_i はガウス分布に従うとし分散が σ_i^2 とする。 χ^2 を

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_i^2} \quad (6.30)$$

⁴ここでは二項分布（ポワソン分布）から導出したため母平均 λ と分散が独立でないが一般的には独立の値をとれる。

⁵適当な統計学の参考書を参照せよ

図 6.2: χ^2 分布

と定義する。自由度が $n = N - m$ (m は $f(x)$ のパラメータの数) の $\chi^2 = x$ の確率分布は

$$P(x, n) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad (6.31)$$

とかけるのが知られている。この x の平均値は

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty x P(x, n) dx = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx \quad (6.32)$$

$x = 2t$ の変数変換をして

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx &= \int_0^\infty (2t)^{(\frac{n}{2}+1)-1} e^{-t} 2dt \\ &= 2^{\frac{n}{2}+1} \int_0^\infty t^{(\frac{n}{2}+1)-1} e^{-t} dt \\ &= 2^{\frac{n}{2}+1} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \end{aligned}$$

より

$$\langle x \rangle = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 2^{\frac{n}{2}+1} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = n \quad (6.33)$$

なので χ^2 の平均値は自由度 n に一致する。つまりデータ y と関数 $f(x)$ からから χ^2 を計算しその値が自由度に近づけば近づくほどその関数はよく Fitting できているということになる。よく χ^2 を自由度で割ってしまい 1 を基準にして Fit の指標にすることもある。この χ^2/n を reduced χ^2 といい、こちらの値を持って χ^2 ということもある。

問題 3

1. 得られたデータの各点がガウス分布とみなせるのはなぜか？
2. χ^2 分布の分散を求めよ

参考文献

- [1] G.F.Knoll, Radiation Detection and Measurement 4th Ed. Wiley, New York, 2010
- [2] 小針 アキ宏 確率・統計入門 岩波書店 1973
- [3] N.C. バーフォード 実験の精度と誤差—測定の確からしさとは何か 丸善 1997

この章の記述は [1] の第 3 章に基づいている。統計の入門書としては [2] が面白い。実験データの解析に即した本としては [3] などがある。世の中にはいろいろな種類の統計処理があるが詳しいことは筆者もわからない。この辺の話は物理学の人より医学、心理学、経済学などでよく使われているようである。興味がある人は各自統計学の本を参考にしてもらいたい。

付 錄A ROOT In A Nutshell



ROOT あなたのデータファイルやプログラムをグラフと同期しましょう。

自由な bin幅操作や、さまざまなレイアウト、自由なデータのカット、なめらかな三次元ヒストグラムなど、今までの excel や gnuplot でできなかったことを ROOT で。

もちろん、プログラミング言語を用いてマクロを書くこともできます。 TTree や TLegend など、豊富なラインナップがあなたを待っています。

あなたのワンクリックでヒストグラムを編集することだってできるんです。

そう、 ROOT ならね。

A.1 はじめに

ここでは Microsoft Windows7 上に ROOT をインストールし、実際に ROOT を起動する方法を学びます¹.

A.1.1 ROOT をインストールする

1. ROOT のホームページ (<http://root.cern.ch/drupal/>) を開きましょう。また、"ROOT"でググれば一番最初に出てきます。
2. 開いたところの上部真ん中にある「Download」をクリックします（図 A.1）。



図 A.1: ROOT のホームページ

3. 今回の実験では ROOT 単体で解析を行うので、最新版をインストールします（図 A.2）。
4. 開いたページの一番下の「Windows」のところにある「VC++10」の「MSI」の「Release」をダウンロードする（図 A.3）。
5. ダウンロードしたファイルを実行するとインストーラーが起動するので、あとは画面の指示にしたがってインストールしてください。設定はすべて自動で行われるので、終わるまでくつろいでいてください。

¹ 筆者の作業環境上、Windows7 を使用して説明していきますが、Windows8 や XP・Vista などでもやり方は同じです。

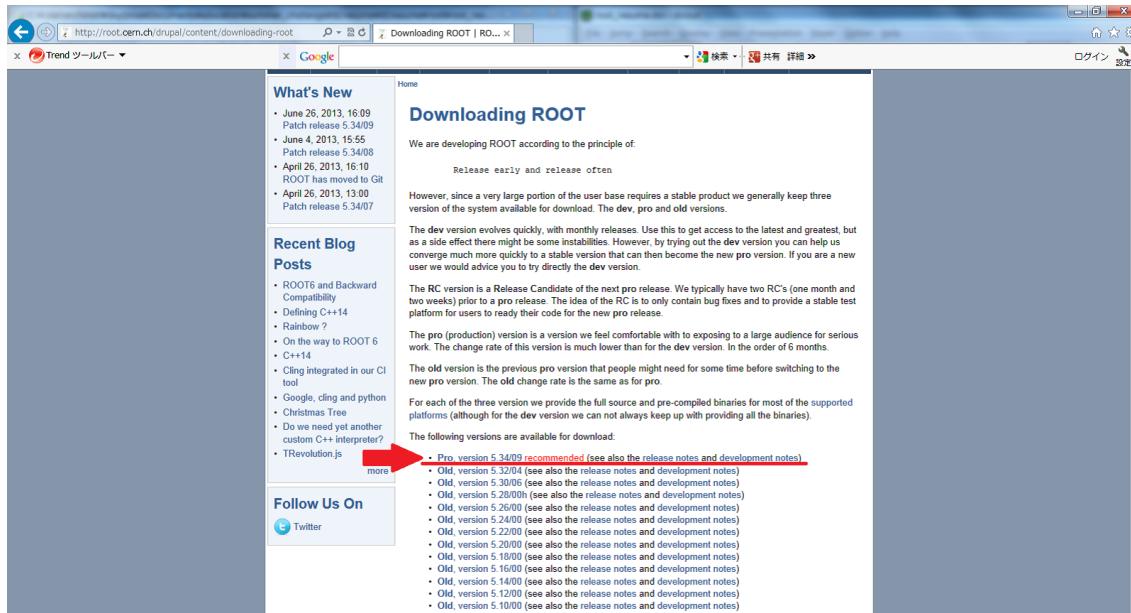


図 A.2: ダウンロードのページ

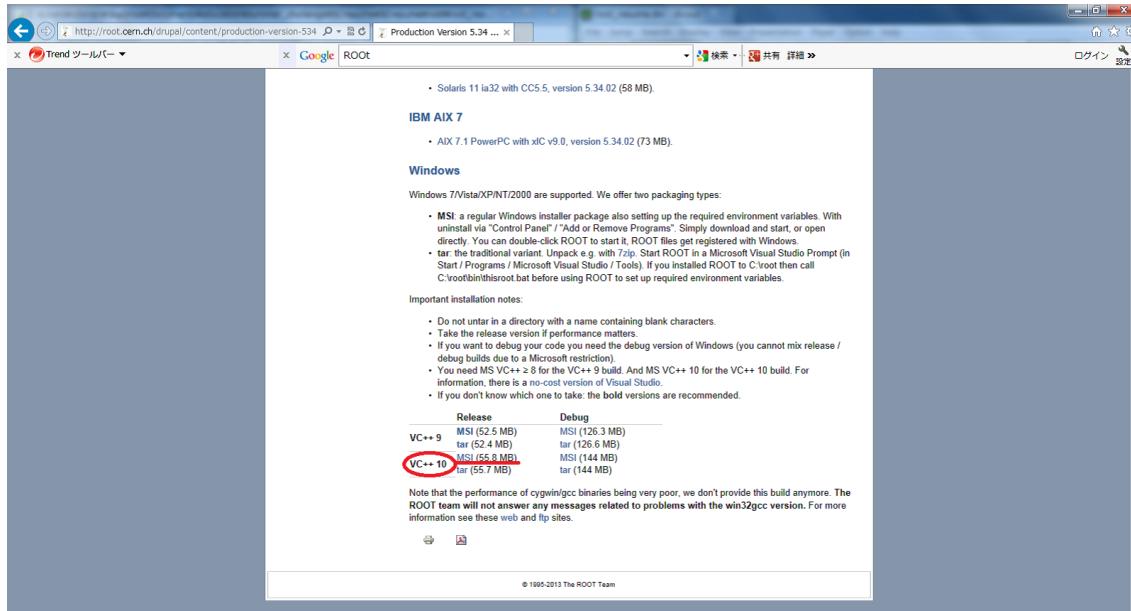


図 A.3: ROOT の Windows 版

A.1.2 ROOT を起動する

インストールが完了したら、さっそく ROOT を起動してみましょう。

1. ROOT は基本的にコマンドラインで使うことが多いので、コマンドプロンプトを起動します。コマンドプロンプトを開くには、[スタート]→[すべてのプログラム]→[アクセサリ]→[コマンドプロンプト] とするか、[スタート]を開いたところにある [プログラムとファイルの検索] に

cmd.exe

と打ち込んででてきたアプリケーションを選択してください (図 A.4)。

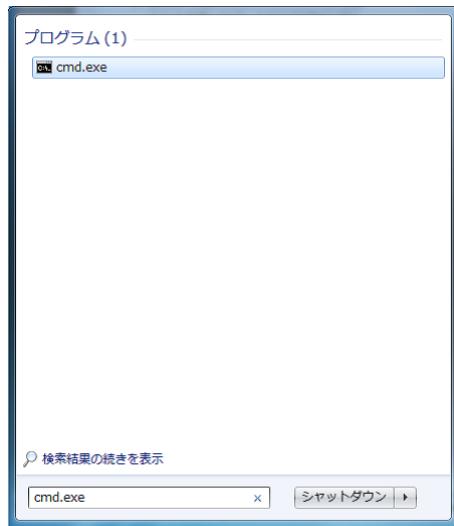


図 A.4: コマンドプロンプトの起動

2. コマンドプロンプトが起動したら、

root

と入力します(図 A.5)。すると図 A.6 のような画面が表れます。これで ROOT の起動は完了です。

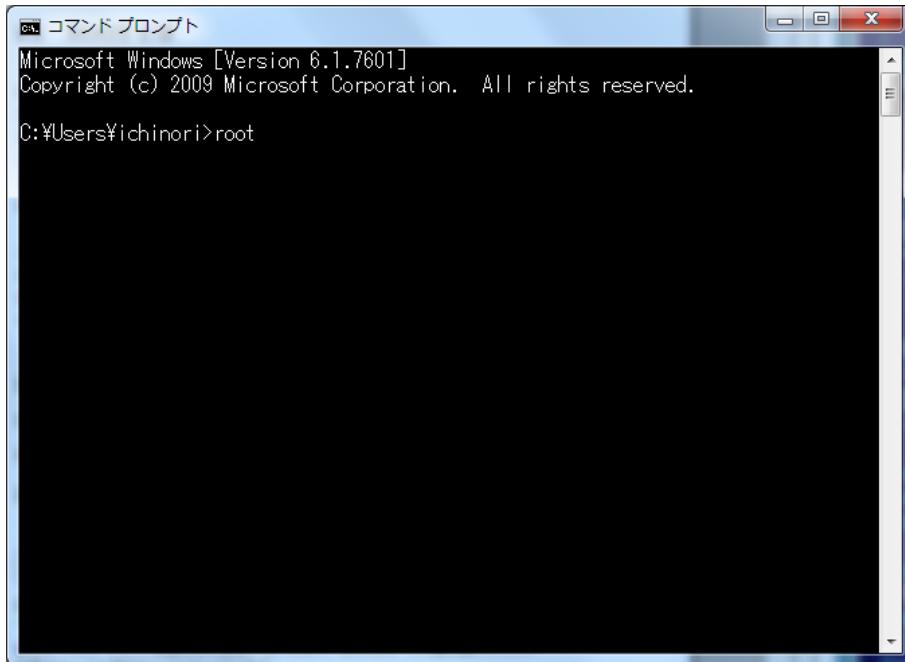


図 A.5: ROOT の起動

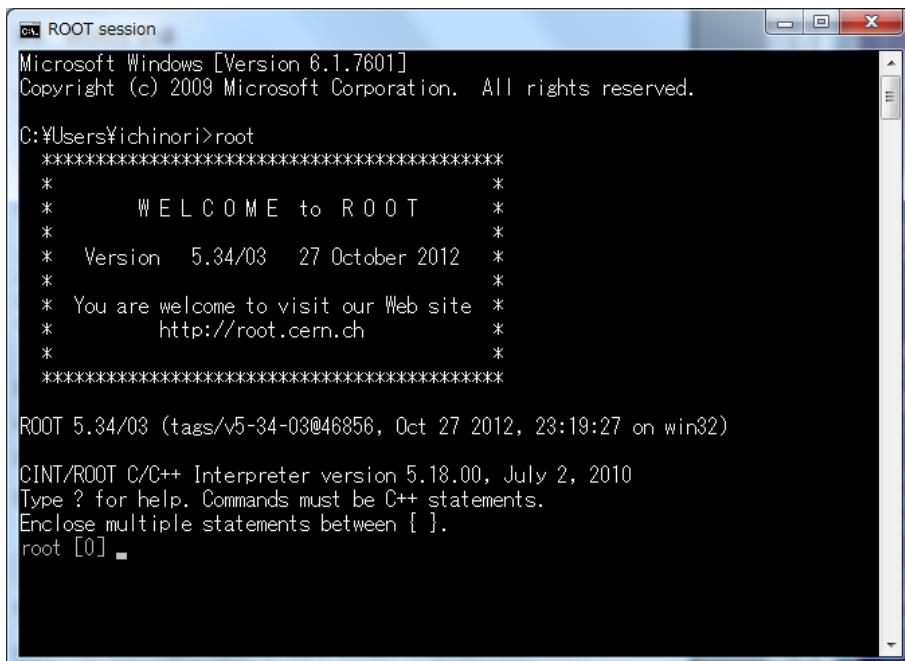


図 A.6: ROOT の起動

A.1.3 ROOT の起動オプション

A.1.2 節のように ROOT を起動すると、起動するたび ROOT のロゴが出現して邪魔なので、消してしまいましょう。

1. ROOT 起動時にロゴを表示させないようにするためにオプション-1 を使用します。コマンドプロンプトに

```
root -l
```

と入力してみましょう。するとロゴやバージョン情報などが表示されず、いきなり ROOT のコマンドラインが使用可能状態になります（図 A.7）。

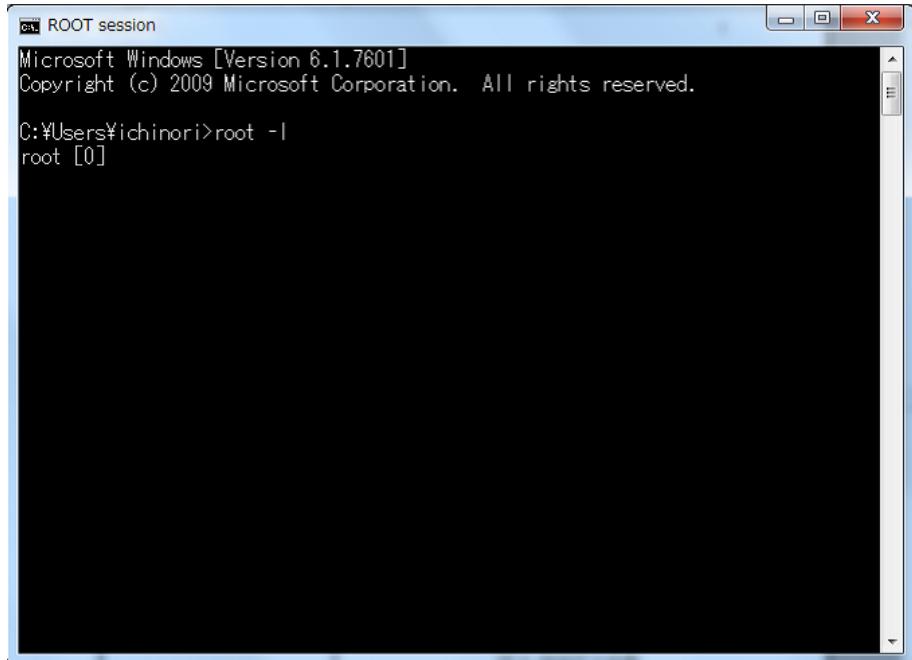


図 A.7: ROOT の起動（ロゴなし）

2. 特に必要なわけではありませんが、そのほかの起動オプションを列挙しておきます。

```
-b : グラフィックを描画しないモード  
-n : .rootrc に指定されているログオン・ログオフマクロを起動しない  
-q : スクリプトファイルを実行後終了する
```

これらのオプションは状況に応じて使用します。たとえば、-b オプションは

ROOT のもつ演算に関する機能のみが必要でグラフィックを必要としない場合に使用することになります。CUI（キャラクタユーザーインターフェース）のようにグラフィックを使用できない状況では必須です。

A.1.4 ROOT の終了

ROOT を終了するには、

```
.q
```

と入力します。

A.1.5 作業ディレクトリを作る

wiki のページにある `workspace.zip` を作業スペースを構築したいところに展開してください。これで作業ディレクトリの準備は完了です。展開したディレクトリの中身を見ると、次の五つのディレクトリがあるはずです：

```
daq    : データの取得を行うための実行ファイル置き場  
data   : 取得したデータの置き場  
root   : root ファイル（後述）の置き場  
macro  : root 上で動作するマクロの置き場  
src    : 実行ファイルのソースコード置き場
```

上記の各ディレクトリの使用法にとらわれる必要はありませんが、各種ファイルは整理しておくことをお勧めします。

以下、`workspace` ディレクトリの場所を`%workspace%` と書くことにします。例えば、`workspace` ディレクトリが D ドライブの直下にある場合、`%workspace%` は D:`workspace` のことを意味します。

A.2 ヒストグラムを描こう

物理データの解析はヒストグラム²を描くことから始まります。ここではROOTを使用してヒストグラムを描く方法を説明します。

A.2.1 tree

- 「難しいことは抜きにして、とにかくデータファイルからヒストグラムをパッと描いてしまいたい。」

ROOTにはそれをかなえる素晴らしいオブジェクトが用意されています。それがtreeなのです。

tree の準備

データからtreeを作成するためにマクロ³を使用します。

1. %workspace%¥macroディレクトリに移動します。このディレクトリにあるmaketree.Cというマクロを使用します。
2. ROOTを起動し、次のように入力します：

```
.x maketree.C ("directory","file name",column)
```

directoryには、データの入っているディレクトリを%workspace%¥dataから先の部分だけ指定します。例えば、データが%workspcae%¥data¥hogeディレクトリにあるなら、"hoge"と指定してください。%workspcae%¥data直下にある場合は指定せず、""としてください。filenameにはデータファイルの名前を指定するのですが、拡張子（例えば.datなど）は取り除いてください。3つ目の引数には、データが一行に何個並んでいるのかを指定します。

3. さっそくtreeを作ってみましょう。今回は%workspace%¥data¥exerciseディレクトリにあるexercise1.datというデータファイルをtreeに変換しま

² ヒストグラムとは、データ（たとえばエネルギー）の値を横軸、その値を持つデータの個数を縦軸にとったグラフです。統計的なデータの処理や、実験データの処理に大いに役立てられています。

³ ここでマクロとは、ROOT上で走るプログラムのことです。C, C++, pythonなどいろいろなプログラミング言語で記述することができます。

```

C:\$Users\$ichinori\$SkyDrive\$Documents\$education\$summer_challenge\$root_resume\$data\$test.dat - sakura ...
ファイル(F) 編集(E) 変換(C) 検索(S) ツール(T) 設定(O) ウィンドウ(W) ヘルプ(H) SJIS(CRLF) [32] 2108:1
1 0 3.99545
2 1 1.07794
3 2 1.45393
4 3 3.45275
5 4 1.30608
6 5 1.96404
7 6 3.52734
8 7 2.62249
9 8 2.09595
10 9 2.6098
11 10 2.66857
12 11 2.38915
13 12 1.54353
14 13 2.80834
15 14 2.04708
16 15 1.08847
17 16 1.94142
18 17 1.73943
19 18 1.27535
20 19 1.24871
21 20 0.371459
22 21 1.59057
23 22 1.16685
24 23 3.42921
25 24 2.19242
26 25 3.1759

```

図 A.8: データファイルの例

す。テキストエディタでファイルの中身を見ると図 A.8 のように一行に 2 個のデータがありますので、

```
.x maketree.C ("exercise", "exercise1", 2)
```

と入力しましょう（ファイル名に拡張子.dat をつけていないことに注意してください）。ディレクトリ名、ファイル名、一行当たりのデータの個数を間違えていない場合、特に何も起こらずマクロは終了するはずです。

4. マクロが終了したら ROOT をいったん閉じ、%workspace%\root ディレクトリに移動してください。マクロが正しく終了していれば、maketree1.root という ROOT ファイル⁴ が出来上がっていると思います。このファイルの中に tree が入っています。
5. tree を読み込むために、ROOT ファイルを開きます。ROOT ファイルを開くには、コマンドプロンプトで

⁴ 以後、.root という拡張子のついたファイルを「ROOT ファイル」と呼ぶことにします。

```
root -l exercise1.root
```

という風に起動時に指定するのが一番簡単です⁵.

- 先程作成した tree が存在しているか確認しましょう。コマンドラインに

```
tree->Print()
```

と入力してください。すると、図 A.9 のような画面が表れます。

```
C:\$Users\$ichinori\$Dropbox\$summer_challenge\$root>root -l exercise1.root
root [0]
Attaching file exercise1.root as _file0...
root [1] tree->Print()
*****
*Tree   :tree   : tree
*Entries : 30000 : Total =      482375 bytes File Size =    240235 *
*:       : Tree compression factor = 2.01
*****
*Br   0 :v1   : v1/D
*Entries : 30000 : Total Size=    241022 bytes File Size =    52661 *
*Baskets :     8 : Basket Size=   32000 bytes Compression= 4.57
*.....
*Br   1 :v2   : v2/D
*Entries : 30000 : Total Size=    241022 bytes File Size =   187018 *
*Baskets :     8 : Basket Size=   32000 bytes Compression= 1.29
*.....
root [2]
```

図 A.9: tree の中身に関するデータ

- (a) 一行目は tree に関する情報を表しています。*Tree の後ろには、変数名と tree の「名前」が書き出されています。使用したマクロでは、tree 作成時にどちらも同じ tree に設定されています。
- (b) 二行目以降は tree に入れたデータに関する情報です。*Br と書かれたところの後ろにある v1, v2 というのは、tree にくっつけたデータの名前です。データファイルの一列目のデータが v1, 二列目のデータが v2 です。データがいっぱいある場合には v3, v4, …と増えていきます。

⁵ さっそくオプションを使ってみました (A.1.3 節参照).

- (c) 各行に記されている*Entries というのは、それぞれのデータの総量を表します。今回の場合は、データファイルの行数 30000 に一致するはずです。もしこの*Entries が違う値になっている場合は、tree の作成に失敗しているということになります。

tree を使ったヒストグラムの描画

前節で準備した tree を使用して、いくつかのヒストグラムを描いてみましょう。

- まず、v2 に入っているデータのヒストグラムを描いてみましょう。ヒストグラムを描くには、コマンドラインに

```
tree->Draw("v2")
```

と入力します。成功すれば図 A.10 のようなヒストグラムが飛び出してきます。たった一行で全部終わってしまうのは、ROOT が勝手に描く場所とヒストグラムを用意して、描画してくれたからです。

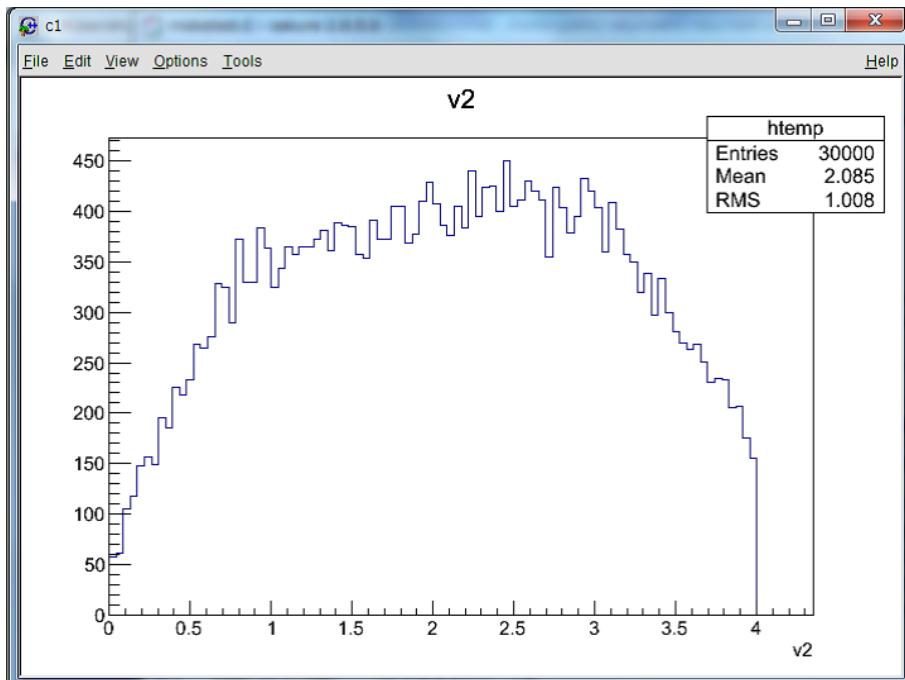


図 A.10: ヒストグラム

- 同様に v1 もヒストグラムにできます（練習のために描いてみましょう）。

3. ROOT の上でヒストグラムやグラフは、 canvas (より正確には pad) というものの上に描画されます。図 A.10 のヒストグラムが鎮座しているところがまさに canvas です。ちゃんとするのであれば、まず canvas を用意してから描き出すのですが、何もせずにいきなりヒストグラムを描くと、ROOT が勝手に用意してくれます。コマンドラインをよく見ると、`tree->Draw("v2")` の下に

```
Info in <TCanvas::MakeDefCanvas>:  
created default TCanvas with name c1
```

と表示されているかと思います。これは ROOT が「c1 という名前の canvas を作りましたよ」と教えてくれているのです。

4. ヒストグラムの右上にある四角い囲み (stat といいます) にはヒストグラムの情報が表示されています。特に設定をしなければ、デフォルトでヒストグラムの「名前」、Entry 数、平均値、RMS⁶ が表示されます。
5. stat にはヘッダーがついています。今は `htemp` となっているはずです。実は、この `htemp` がヒストグラムの「入れ物」になります。`tree` を使ってヒストグラムを描画すると、ROOT 自身が勝手にヒストグラムの入れ物を作成してくれるのです。



Draw() についての補足

`tree->Draw()` の一つ目の引数は

`tree->Draw("v2*4")`

とすることもできます。これは、`v2` に入っているデータを 4 倍してヒストグラムを描きなさい、という風に解釈されて、そのようにヒストグラムが生成されます。このように、`tree->Draw()` の一つ目の引数の中には式を描くことができるので、データのリスケールが必要な場合等に使いましょう。

⁶ Root Mean Square (二乗平均平方根) の略。ただし、ROOTにおいてはデータの標準偏差、すなわち、実験データの持つ統計的な誤差を表します（詳しくは、統計の章を参照してください）。

ヒストグラムの編集

ヒストグラムの周りにはいろいろなものが配置してあります。 canvas に描かれているものの上で、右クリックメニュー（図 A.11）にある SetLineAttributes から編集することができます。

1. 適当なところで右クリックし、下の方にある SetLineAttributes を選択します（図 A.12 左）。すると図 A.12 右のようなウィンドウが表示されます。
2. この状態で、ヒストグラムの線をクリックすると、ヒストグラムのタイトル、線や塗りつぶし、ビンの数⁷などを編集することができるようになります。

注意！！

ビンの数は極端に増やさないでください。メモリがあふれて PC の動作が極端に遅くなってしまいます。

3. x 軸 (y 軸) の目盛りの付近をクリックすれば、軸のタイトルのフォント、オフセットや軸の目盛の大きさなどを編集できます。
4. 同様に、その他の領域をクリックすると、その領域を担当するオブジェクトの編集を行うことができます。編集メニューをたっぷり使ってみたものを図 A.13 に示します⁸。

⁷ ビンとは、ヒストグラムの横の区切り一つ一つのことです。ビンを多くするとヒストグラムは細かくなります。

⁸ ここから先はみなさんの絵心にかかっています。美しいヒストグラムをぜひあなたの手で。

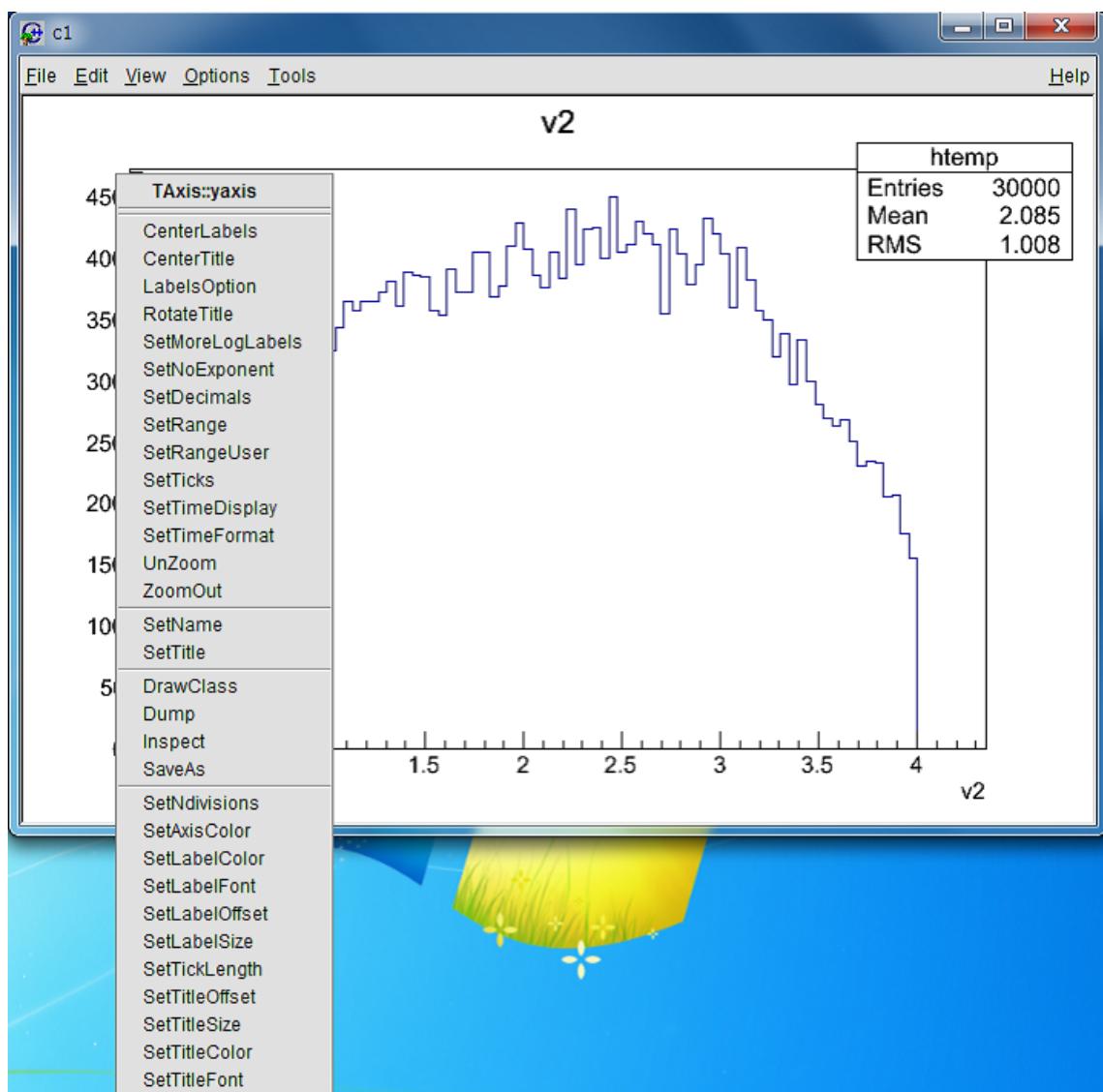


図 A.11: 右クリックメニュー。y 軸に関するメニューが表示されている。

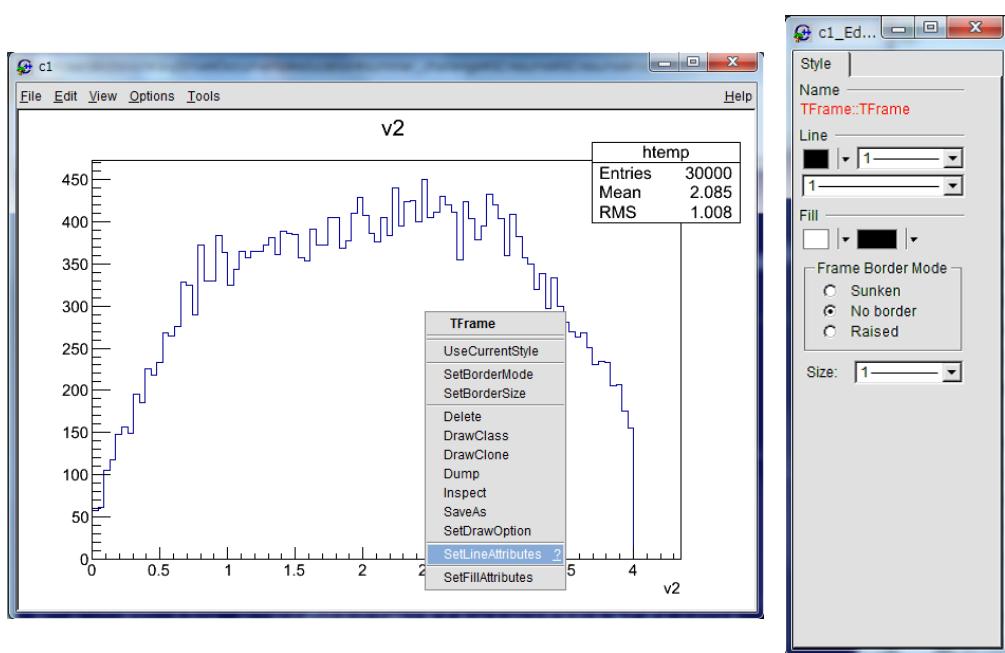


図 A.12: SetLineAttributes メニュー

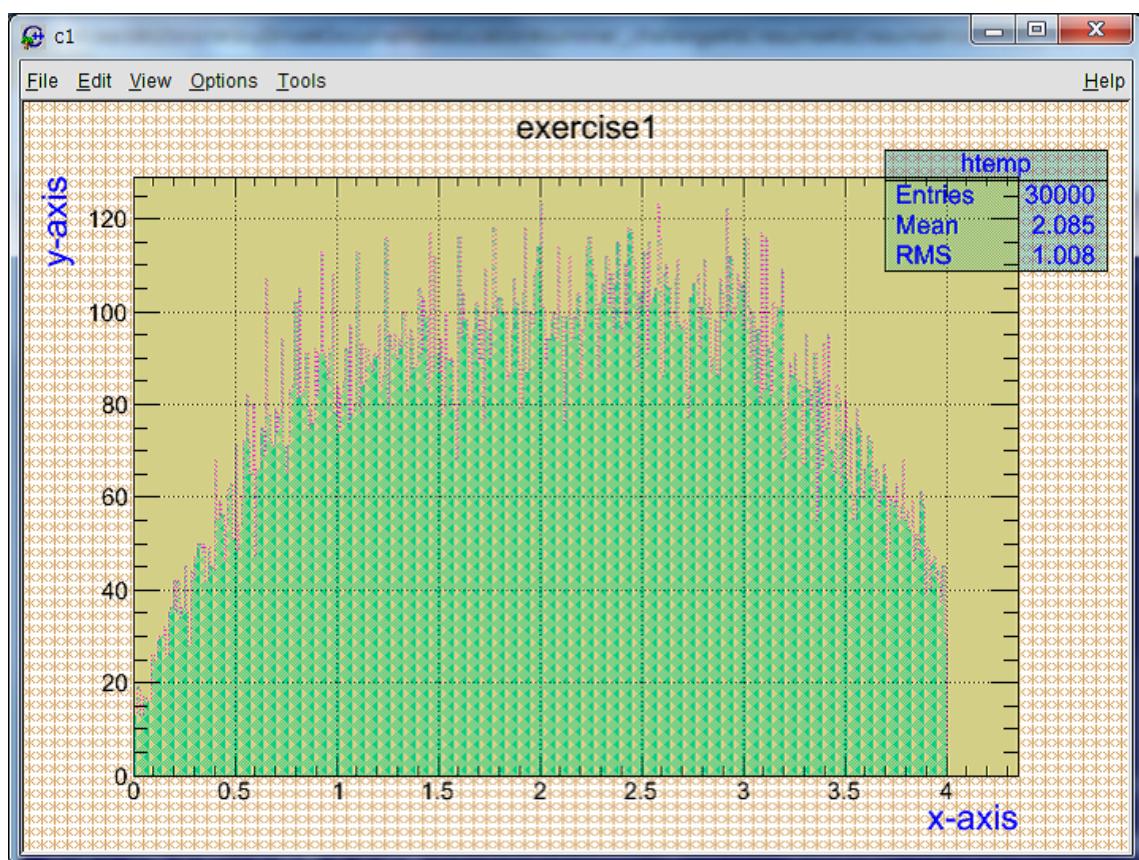
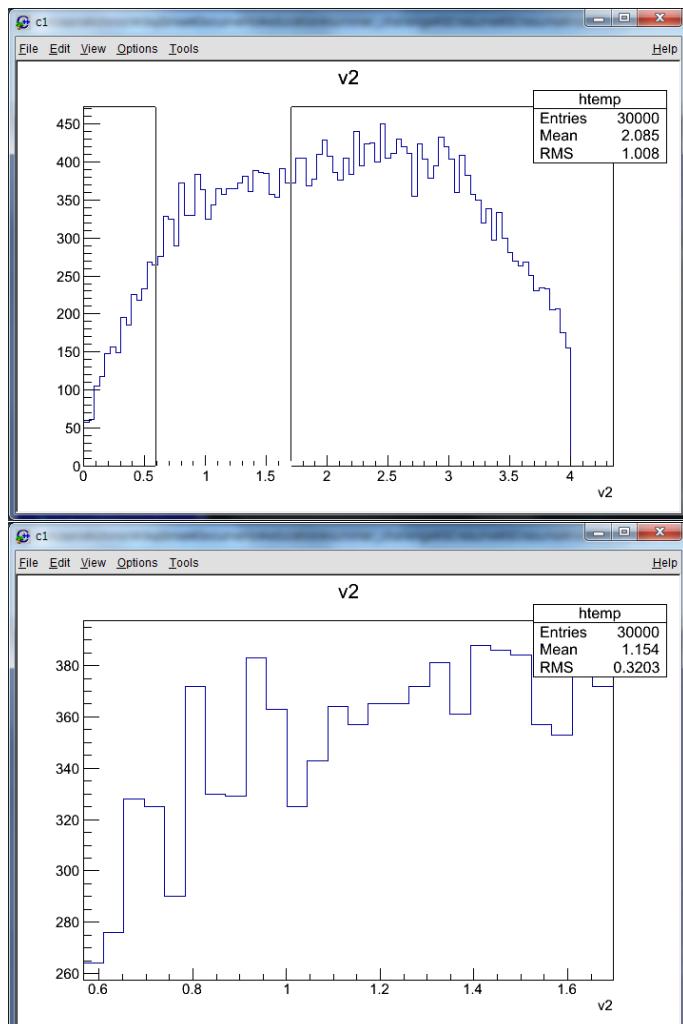


図 A.13: いろいろいじった結果

ヒストグラムの拡大

ヒストグラムの一部分を拡大してみたいということがよくあります。ROOTでヒストグラムを拡大するにはx軸（またはy軸）のメモリ上にマウスカーソルを持っていき、指さしマークになったところで、拡大したい範囲をドラッグします（上）。そうすると、ドラッグした範囲だけが拡大されて表示されます（下）。元に戻す時は同じ軸上で右クリックし、Unzoomメニューを選択します。



A.2.2 データを選別する（カット）

前節で tree を用いてヒストグラムを描きました。今度はデータのカットを行ってみましょう。

カットとは

カットというのは、データの解析を行う際にある条件を設けてそれを満たすものだけを残すという作業です。図 A.14 のように 3 種類のデータが入っているデータファイルがあったとします。今、データ 1 の値に対してある条件（例えば、ある値の範囲内に入っているという条件）を課すと、取り出すことのできるデータはその条件を満たしたデータ 1 の入っている行だけになります (A.15)。

データ1	データ2	データ3	
xxxx	yyyy	xxxx	
⋮	⋮	⋮	

データ1	データ2	データ3	
xxxx	yyyy	xxxx	
⋮	⋮	⋮	

図 A.14: データファイルの例

図 A.15: カットの概念図

A.2.3 カットの例

前節で取り扱っていたデータファイルには二つのデータ (v1 と v2) が入っています。前節ではただ単に v2 の全データのヒストグラムを描いただけでしたが、ここでは v1 の範囲に制限を設けて、v2 のデータをカットしてみましょう。

1. v1 の範囲が 0 から 9999 までの間のときの v2 のデータをヒストグラムにしてみましょう。これを実現するためには、コマンドラインに

```
tree->Draw("v2", "v1<10000")
```

と入力すると、図 A.16 のようなヒストグラムが描画されます⁹。

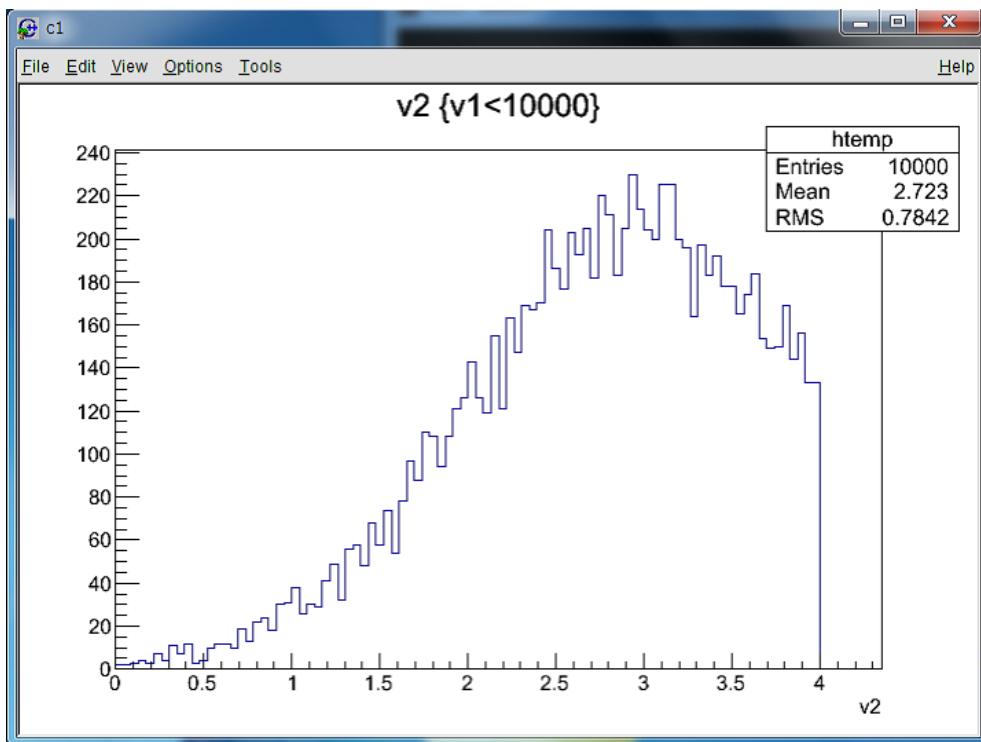


図 A.16: カットを行ったヒストグラム（ガウス分布）

- 前節との違いは、引数が一つだけ増えたというだけです。増やした引数をよく見ると、"v1<10000"となっており、カットの条件を表していることがわかります。このように、`tree->Draw()` の二つ目の引数にはカットの条件式を入れます。この条件式を変えれば思うが儘にデータをカットできてしまうというわけなのです。
- 条件式の書き方は表 A.1 のようになっています。だいたい直観通りなのですが、気を付けなければいけないのは等号`=`です。条件式の中では`==`と書かねばなりません。

条件式の例

```
v2<1000 || v2>20000 : v2< 1000, または, v2> 20000
v2>1000 && v2<=20000 : 1000 < v2 ≤ 20000
v2!=10000 && v3==10000 : v2≠10000, かつ, v3=10000
```

⁹ ちなみに、このヒストグラムは統計の分野で言わずと知れた「ガウス分布」になっていたりします。（ヒストグラムの端が切れてしまっているのは、ただ単に用意したデータの都合であって ROOT の仕様というわけではありません。）

意味	条件の書き方
$a = b$	$a == b$
$a \neq b$	$a != b$
$a > b$	$a > b$
$a < b$	$a < b$
$a \geq b$	$a \geq b$
$a \leq b$	$a \leq b$
条件 A かつ条件 B	$A \& \& B$
条件 A または条件 B	$A B$
条件 A ではない	$\neg A$

表 A.1: 条件式の書き方

4. さらに $v1$ が 10000 から 19999 までの場合（図 A.17），20000 から 29999 までの場合（図 A.18）を自分で描いてみましょう。
5. 図 A.17 左の分布はランダウ分布といいます。このような分布が表れる例としては、荷電粒子が薄い検出器を貫通した際にそこに落とすエネルギーの分布などが知られています¹⁰。また、図 A.18 右は二次関数の分布をヒストグラムにしたものです（あまり見かけない分布ではあります）。

¹⁰ 例えば，W.R.Leo, *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments: A How-to Approach Second Revised Edition*, Springer-Verlag

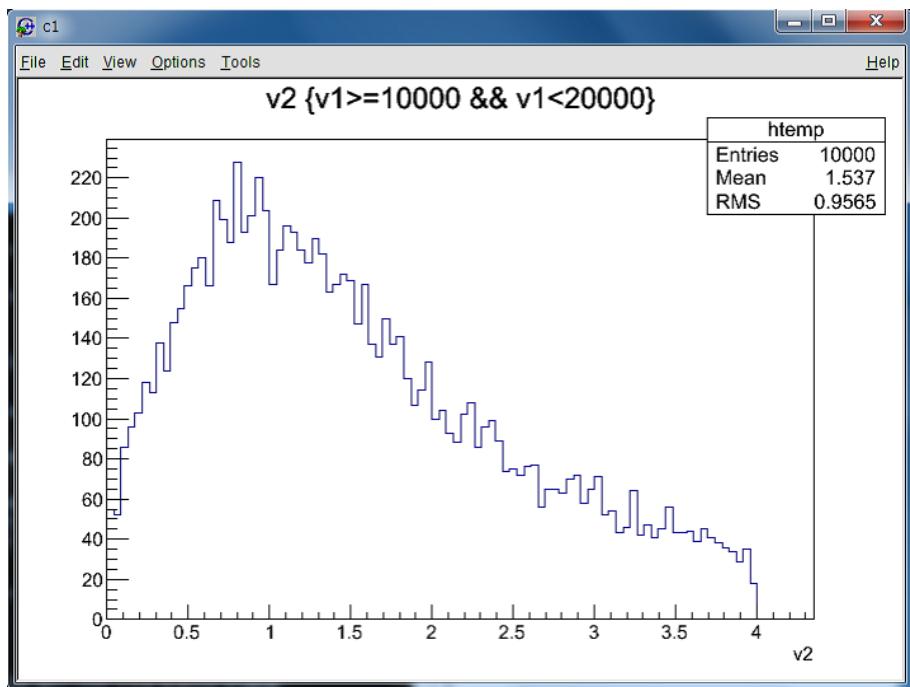


図 A.17: カットを行ったヒストグラム：ランダウ分布（左）

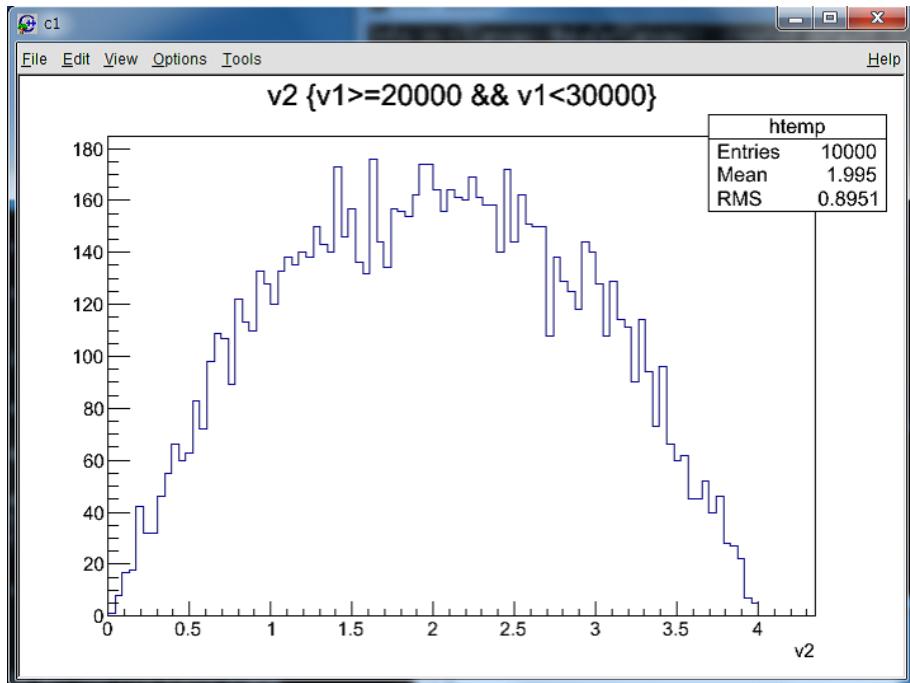


図 A.18: カットを行ったヒストグラム：二次関数の分布（右）

A.2.4 ヒストグラムの重ね描き

解析をしていると複数のヒストグラムを重ねて表示したくなるときがあります。そんなときは、`tree->Draw()` の三つ目の引数を使用します。

1. まず、一つ目のヒストグラムを描きましょう。何でもよいのですが、ここでは図 A.16 で出てきたガウス分布のヒストグラムを最初に描いたことにします。
2. 次に、ガウス分布のヒストグラムの上に、図 A.17 のランダウ分布を重ねます。コマンドラインに

```
tree->Draw("v2", "v1>=10000&&v1<20000", "SAME")
```

と入力すると、図 A.19 のようにヒストグラムが重なります。

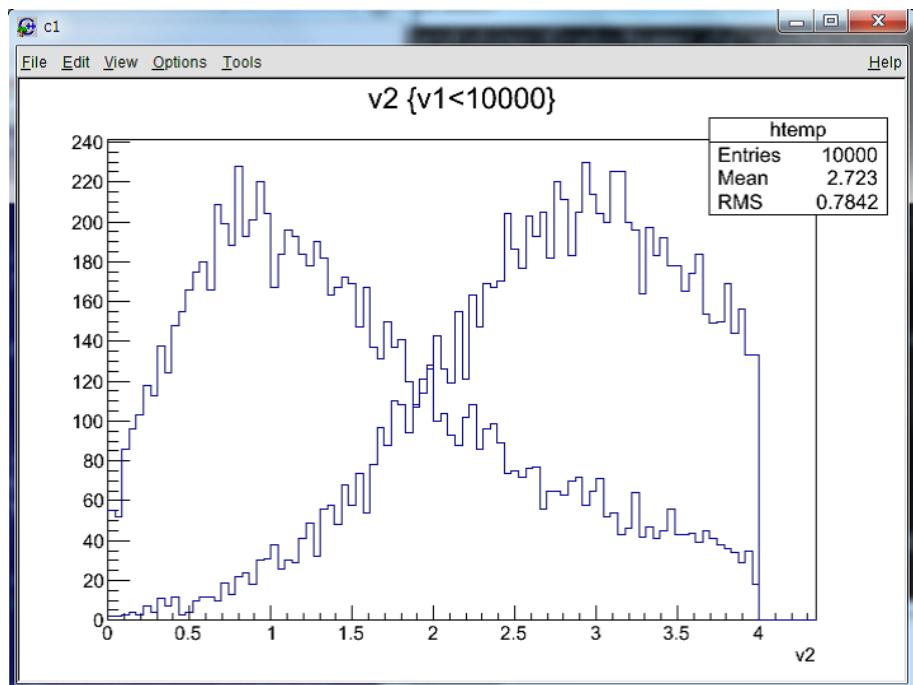


図 A.19: ヒストグラムの重ね描き

3. このままだと大変見づらいので、片方のヒストグラムの線の色を変えましょう（図 A.20）。線の色を変えるには `SetLineAttributes` メニューを使用します（A.2.1 節参照）。
4. せっかくなので、図 A.18 の二次関数分布も重ねましょう（図 A.21）。

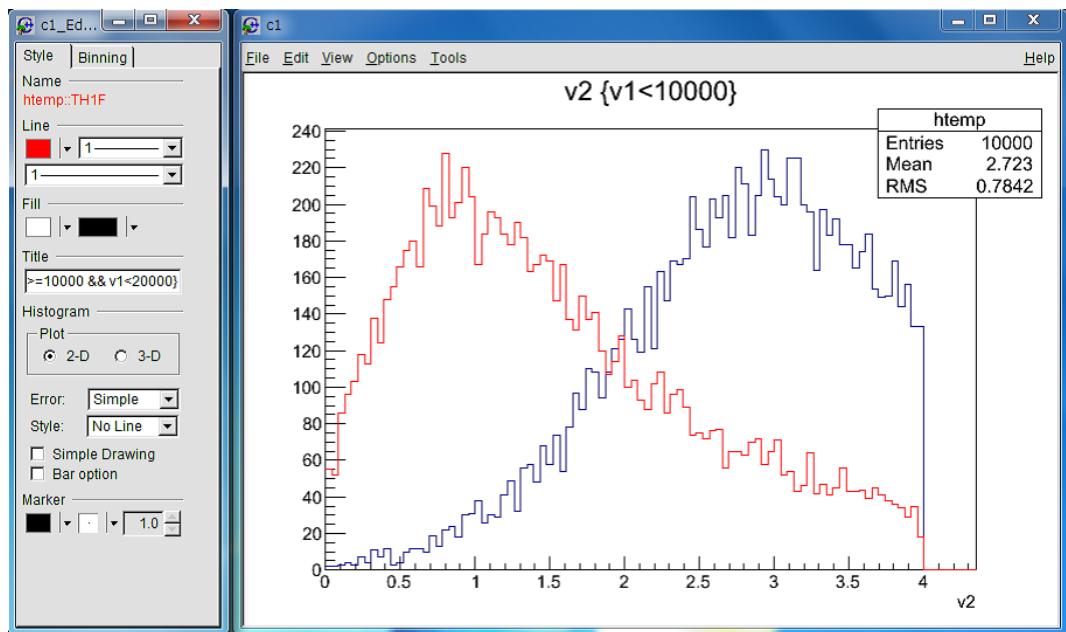


図 A.20: ヒストグラムの色の変更

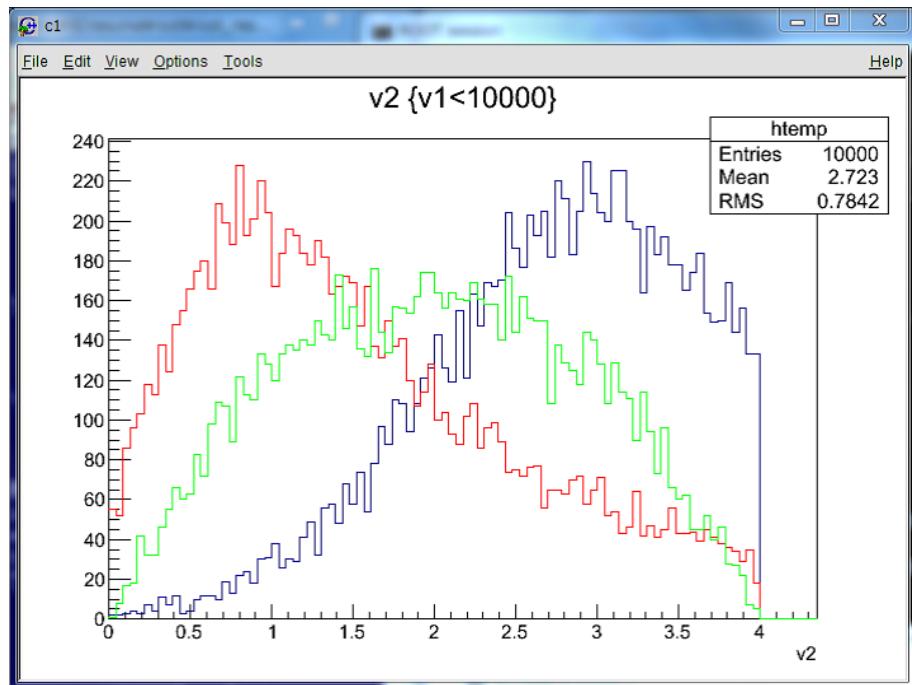


図 A.21: ヒストグラム 3 つを重ねたもの

5. おまけとして、ヒストグラムの内側に色を付けてみました（図 A.22）。皆さんもいろいろ編集して、「他人が見やすいヒストグラム」を追及してみてください。

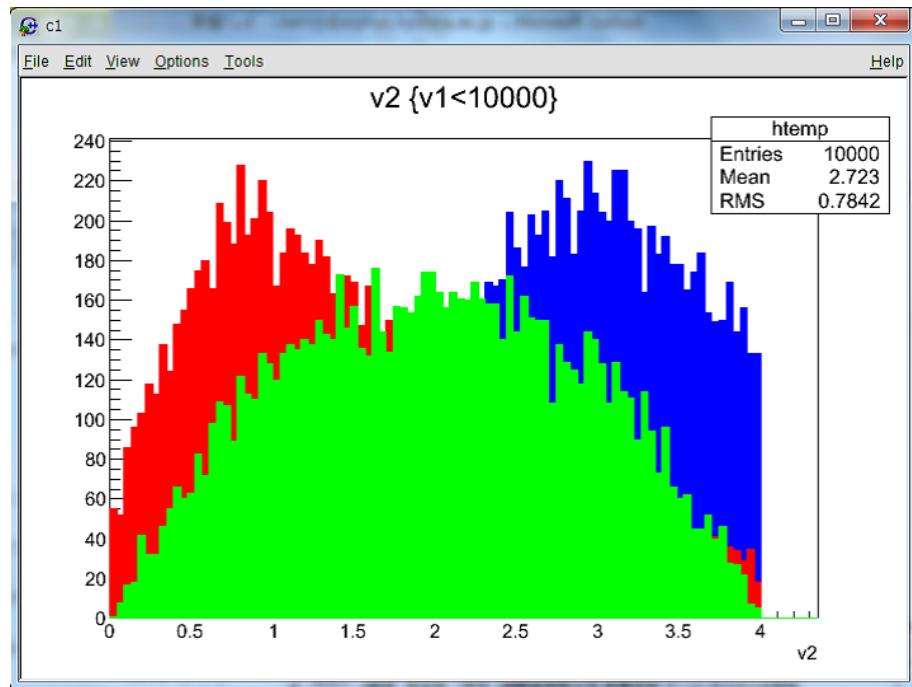


図 A.22: ヒストグラムを塗りつぶしてみたもの

6. 最後に `tree->Draw()` の典型的な使用法を示します：

```
tree->Draw("var_exp","selection","option")
```

`var_exp` には `tree` の中のデータたち (`v1` など) を用いた式が入ります (A.2.1 節の補足参照)。 `selection` にはカットの条件を入れます。 `option` には `SAME` などの描画に関するオプションを指定します。 描画に関する他のオプションは、ROOT のユーザーズガイドを参照してください。

A.2.5 自分でヒストグラムを用意しよう

A.2.1節で少し触れましたが、treeを使ってヒストグラムを描画すると、ROOT自身が勝手にヒストグラムの入れ物 htemp を生成してくれます。ひとつのヒストグラムを軽く編集する程度のことは htempだけでもできますが、複数のヒストグラムを同時に管理・編集するときはどうすればよいのでしょうか？

ヒストグラムの入れ物がないなら自分で作ればいいじゃない。

— ツリー・アントワネット

というわけで、この説では、自分自身でヒストグラムの入れ物を複数作り、そこに tree からヒストグラムを入れるということについて解説をします。

ヒストグラムの入れ物の作り方

1. ヒストグラムの本体を作る上で、最もよく使う形は以下のようになります（改行はスペースの関係上入っているもので、本当は一行に書くべきものです）。

```
TH1D *histo
= new TH1D("histo_name","histo_title",bin,x_min,x_max)
```

これは、histo という入れ物を用意してくださいという命令になっています

- (a) histo_title はヒストグラムのタイトルです。これも自由に設定できます。histo_title はヒストグラムを描画した時に、canvas の上方に表示されています。
- (b) bin にはヒストグラムの bin の数を指定します。
- (c) x_min, x_max はそれぞれヒストグラムの下限と上限を指定します。
- (d) histo の前に付いている*と、new という記述はおまじないだと思っておいてください
- (e) histo_name にはこのヒストグラムの「名前」を書きます。「名前」はその名の通り作成した実体の名前になっています。ROOT 上では実体を変数名 (histo) で呼び出す代わりに、この「名前」を使ってもそれらを呼び出すことができます。名前は何をつけてもいいのですが、よほど理由がない限り変数名と同じにしておいた方が良いでしょう¹¹。

¹¹ 名前と変数名が違うと対応を頭の中で覚えておくか、メモしておく必要が出てきてしまい、面倒です。

2. ROOTにはデータの個数に応じた何種類かのヒストグラムの入れ物の型が用意されています。

TH1C : 各ビンのデータ数の最大値 ≤ 255
 TH1S : 各ビンのデータ数の最大値 ≤ 65535
 TH1I : 各ビンのデータ数の最大値 ≤ 2147483647
 TH1F : 各ビンのデータ数の精度 7桁
 TH1D : 各ビンのデータ数の精度 14桁（上にでてきたもの）

3. 先程は TH1D の作り方を示しましたが、他の型を作りたい場合は TH1D の部分を他のもの（例えば、TH1I など）に変えるだけで、あとは全く同じです。
4. TH1F や TH1D のところで「精度」という言葉が出てきていますが、これは、 $\bigcirc\bigcirc \times 10^x$ の形に書いた時の $\bigcirc\bigcirc$ の部分の桁がいくらであるかという意味です。どれを使うべきか悩んだときはとりあえず TH1D を使っておけば大きな問題はないでしょう。

作ったヒストグラムの入れ物に tree のデータを入れてみる

前節で作成したヒストグラムの入れ物に、tree の中のデータを入れてみましょう。

1. ROOT ファイル `exercise1.root` を開きます。
2. ヒストグラムの入れ物を作ります。今回使用するデータは全部で3万ですので、データをヒストグラムにするだけでしたら TH1S で十分格納できます。とはいってもメモリを節約したいというわけでないのであれば、余裕を見て TH1I や TH1D 等を使っておけばよいと思います。ここでは、「名前」が `h1`、タイトルが `exercise1`、ビン数が 50、横軸の下端が 0、上端が 4 となるような TH1D 型のヒストグラムの入れ物 `h1` を作成します：

```
TH1D *h1 = new TH1D("h1","exercise1",50,0,4)
```

3. この入れ物にデータを詰めてヒストグラムにするには、`tree->Project()` 関数を使用します。tree の中の `v2` に入っているデータをヒストグラムにする場合は、

```
tree->Project("h1", "v2")
```

と入力します。Project()関数の一つ目の引数はデータを入れたいヒストグラムの入れ物の「名前」を指定します（実は、変数名でも大丈夫です。とはいえたがの段階で変数名と「名前」と同じにしてあるので、特にどちらなのかを考える必要はありません。）。二つ目以降の引数は実はtree->Draw()関数の引数と同じです。

4. tree->Project()関数の典型的な使い方を示します（A.2.4節参照）：

```
tree->Project("histo_name", "var_exp", "selection", "option")
```

5. これでヒストグラム（の入れ物）h1にデータが入ったはずですから、canvasに描画してみましょう。ヒストグラムを描くのも、やはりDraw()関数です。

```
h1->Draw()
```

図 A.23 のようなヒストグラムが表示されていれば成功です。

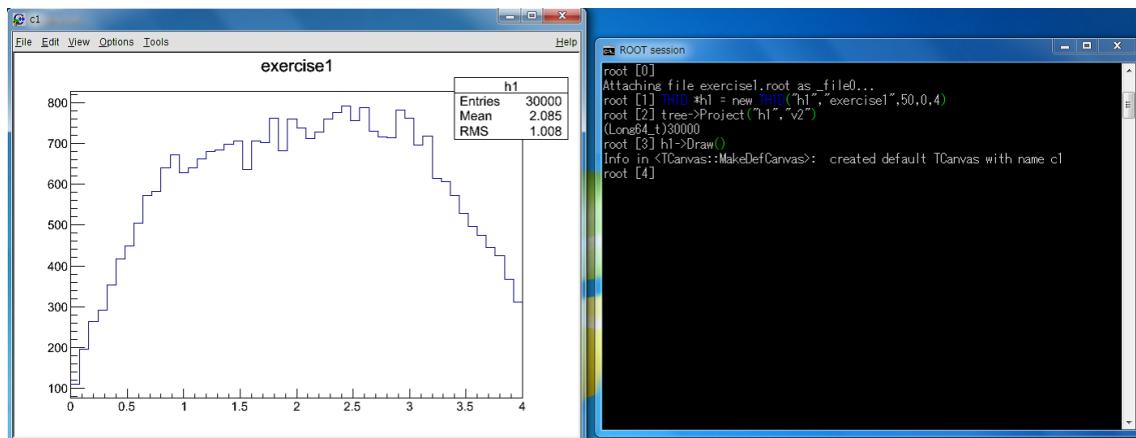


図 A.23: ヒストグラムの作成

6. ヒストグラムの入れ物にtreeのデータを入れて描画するだけのときは、次のようにすることもできます：

```
tree->Draw("v2>>h1", "v1<10000")
```

このようにすると tree のデータがヒストグラムの入れ物に入れて、続いて画面にそれが描かれることになります。

7. `tree->Project()` はヒストグラムの中身を画面に表示する必要がない場合（あるいは表示してはいけない場合¹²）に使用し、`tree->Draw()` はヒストグラムを画面に表示したいときに使うという風に使い分けるとよいでしょう。

¹² 例えば、大量データをヒストグラムに詰めていく場合、いちいち描いていると所要時間が大変なことになります。

A.3 ヒストグラムをフィットしよう

実験においては、得られたデータに対して理論や経験則から導かれる関数を仮定することができます。もし、与えられた関数で実験が説明できるならば、あるパラメータを設定した時、その関数はデータを再現するはずです。そのパラメータを探し、その結果が妥当かどうかを判断するための方法が関数でのフィットなのです¹³。

この節と次の節では ROOT におけるフィットのやり方を説明していきます。

A.3.1 ROOT に用意されている関数でフィット

ROOT にあらかじめ用意されている関数でのフィットを行いましょう。

1. 再び図 A.16 のガウス分布に戻ります。ヒストグラムの線の上で右クリックしてメニューを表示し、Fit を選択します（図 A.24）。

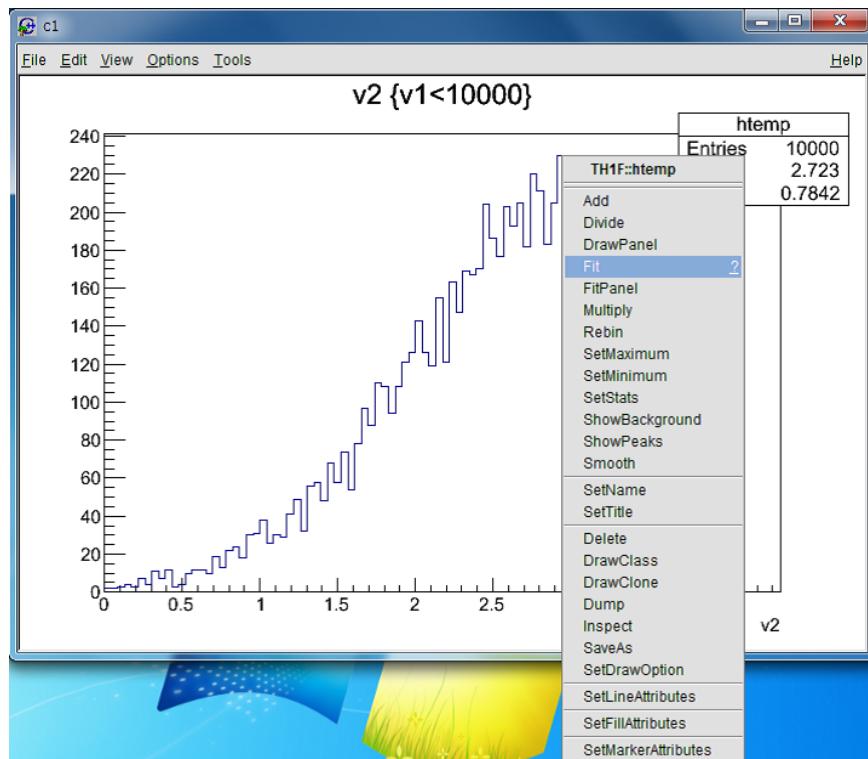


図 A.24: Fit メニューの選択

¹³ 前節でガウス分布やランダウ分布のヒストグラムを見せました。これらの分布が本当にガウス分布やランダウ分布かどうかを知るには、フィットをしてみればよいということです。

2. フィットに関するパラメータ等を設定する窓が開きますので、一番上の欄に `gaus`¹⁴ と入力します（図 A.25）。

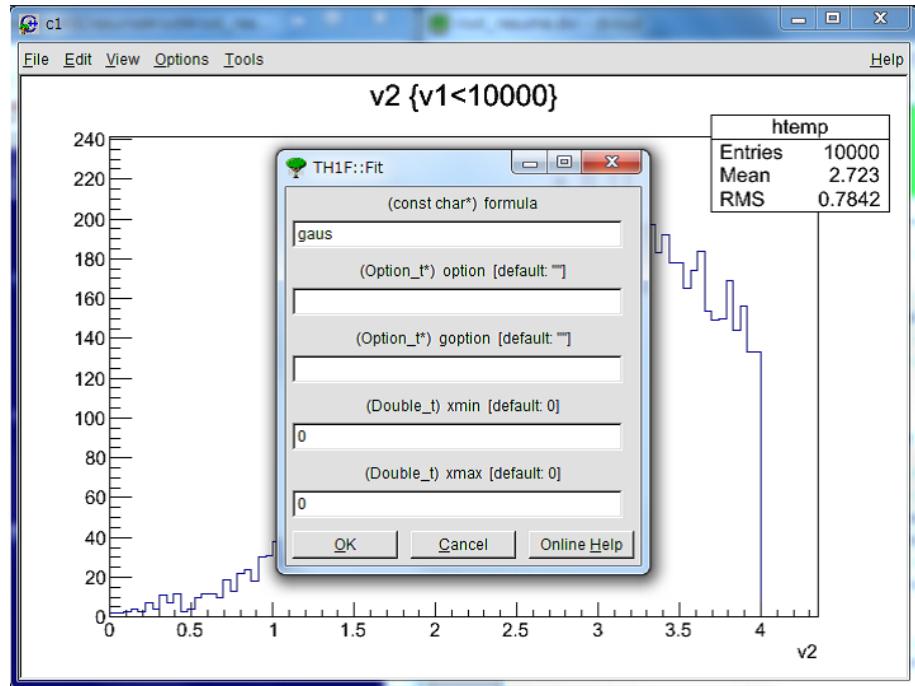


図 A.25: Fit メニュー

3. OKを選択すると、ヒストグラムに沿って何やら線が描かれているのがわかります（図 A.26）。これがこのヒストグラムにフィットされたガウス関数なのです。フィット自体は ROOT が勝手にやってくれるので、特に何もする必要はありません。
4. 以上の操作はコマンドラインでも行うことができます。コマンドラインで行うには、次のように入力します：

```
htemp->Fit("gaus")
```

`htemp` は tree のデータを入れるために ROOT が用意してくれたヒストグラムの入れ物の「名前」です。`Fit()` 関数は、実は右クリックメニューにあった `Fit` と同じもので、ダイアログ¹⁵ で指定できる項目が関数の引数の部分になっています。

¹⁴ 本来は `gauss`ですが、なぜか ROOT では `gaus` と入力するのです。

¹⁵ A.25 で各種パラメータを設定した画面のことです。

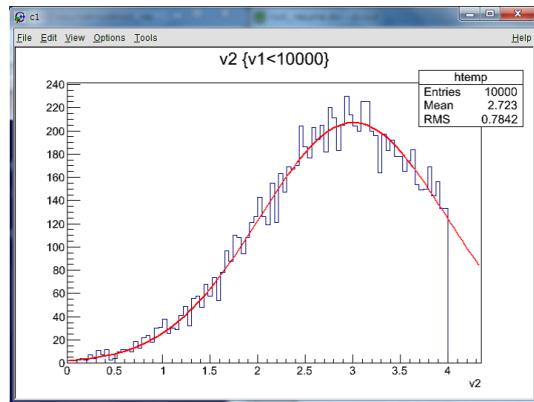


図 A.26: ガウス関数によるフィット結果

5. フィットが終わった後にコマンドラインを見てみると、図 A.27 のようにフィットの結果が表示されています。

```
c:\ ROOT session
root [2] FCN=105.674 FROM MIGRAD    STATUS=CONVERGED    76 CALLS    77
TOTAL
      EDM=3.63939e-007    STRATEGY= 1    ERROR MATRIX ACCURATE
EXT PARAMETER          VALUE        ERROR        STEP         FIRST
NO.   NAME
 1 Constant  2.06987e+002  2.48792e+000  1.04947e-002 -1.43994e-004
 2 Mean      3.00625e+000  1.80735e-002  5.96474e-005 -3.35893e-002
 3 Sigma     9.83873e-001  1.29879e-002  1.47605e-005  1.74326e-001
```

図 A.27: フィットの結果

6. ガウス関数には、次の3つのパラメータがあります：

Constant : ガウス関数の高さを示す定数.

Mean : ガウス関数の平均値（中心値）.

Sigma : ガウス関数の標準偏差.

式で表すと、

$$f(x) = (\text{Constant}) * \exp \left[-\frac{(x - (\text{Mean}))^2}{2(\text{Sigma})^2} \right]$$

という対応になっています。図A.27のValueというものがフィットで決定されたパラメータの値で、ERRORのところにはそのパラメータを決定する際のエラーが表示されます。

7. 同様に図A.18の二次関数分布もフィットをしてみましょう（図A.29）。今度はフィットの関数として、gausの代わりにpol2と指定します。フィットした結果は図A.29です。先程と表示の仕方が若干異なっていますが、読み方はほとんど同じです。p0, p1, p2はそれぞれ多項式の0次、1次、2次の係数を表しています：

$$f(x) = (p0) + (p1) * x + (p2) * x^2$$

8. 関数pol2というのは多項式(polynomial)の二次のもの、すなわち、二次多項式という意味です。ということは

「他の次数の多項式はpolN（Nは0以上の整数）なのか？」

と考えてみたくなります。実は本当にそうなっていて、多項式のフィットはフィットする関数として、polN（Nは0以上の整数）と指定するだけで出来てしまうわけです。

9. ちなみに、polN（N次多項式）のパラメータを式で表すと、

$$f(x) = (p0) + (p1) * x + (p2) * x^2 + \cdots + (pN) * x^N$$

となります。

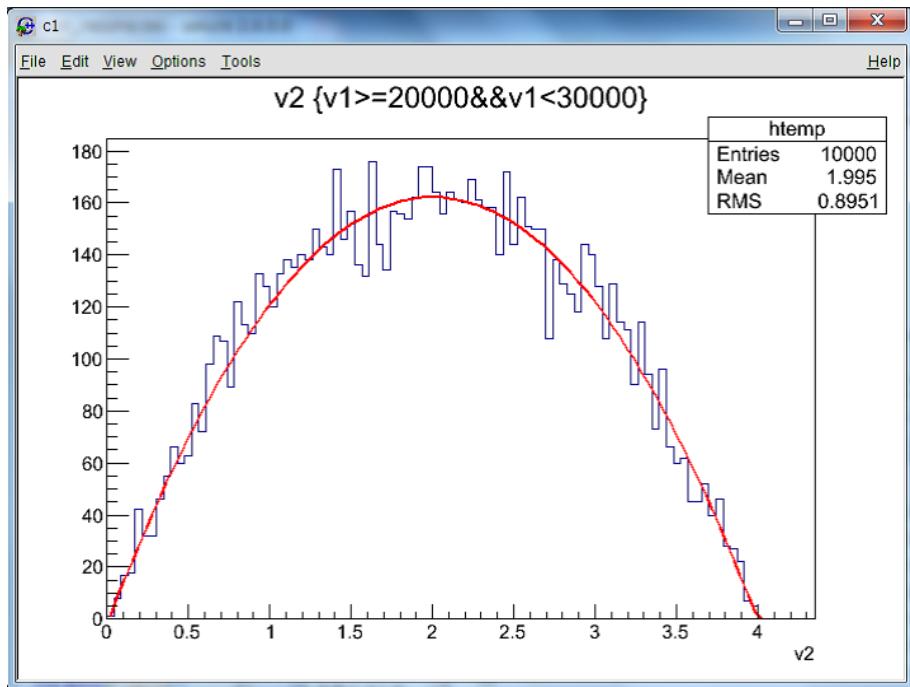


図 A.28: 二次関数分布のフィット

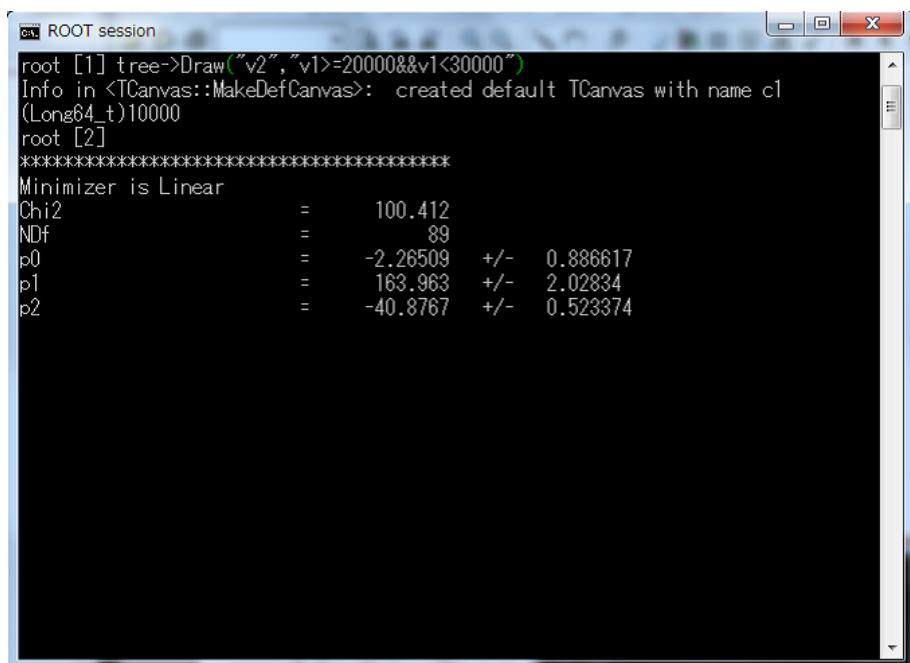


図 A.29: 二次関数分布のフィットの結果

10. 最後に、図 A.17 のランダウ分布のフィットをしましょう。ROOT ではランダウ分布関数も最初から入っていますので、フィット関数の指定を `landau` とするだけでフィットは完了です（図 A.30 と図 A.31）。

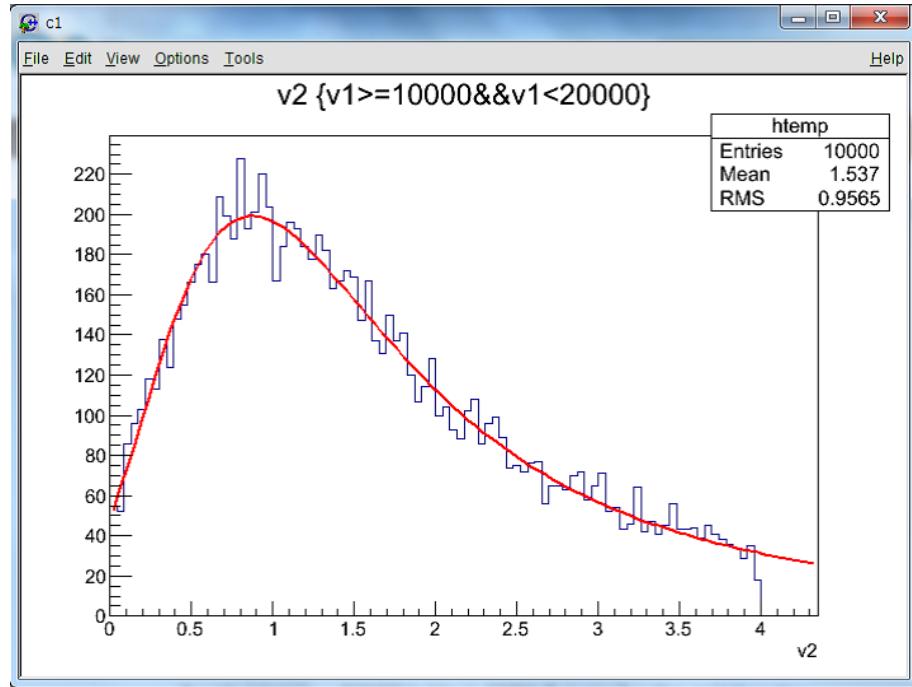


図 A.30: ランダウ分布のフィット

11. ランダウ分布も 3 つのパラメータを持ちます。その中でも一番わかりやすいものは、MPV です。これは分布の中で最も数が多いところ（すなわち山のてっぺんのところ）の位置を与えてくれます¹⁶。この分布関数はガウス関数に比べてややこしいのでここではあまり触れないでおきましょう。

A.3.2 関数の作成

今までのフィットでは ROOT 自身が標準で備えている関数のみ扱ってきました。しかし、現実的には ROOT 自身が持つ関数だけで事足りるということはありません。

ここでは ROOT 上で関数を定義し、その関数でヒストグラムをフィットする方法を紹介します。

¹⁶ 実はちょっとだけずれてるそうです。

参考：<http://root.cern.ch/root/html/TMath.html#TMath:Landau>

```

root [3] FCN=84.102 FROM MIGRAD    STATUS=CONVERGED    113 CALLS    114 T
OTAL
EDM=1.37038e-007    STRATEGY= 1    ERROR MATRIX UNCERTAINTY
2.8 per cent
EXT PARAMETER
NO.   NAME      VALUE        ERROR       STEP      FIRST
1  Constant   1.10196e+003  1.67064e+001  4.52145e-001  5.62435e-005
2  MPV        9.83064e-001  1.14581e-002  -4.41933e-004 -1.76188e-002
3  Sigma       4.90805e-001  8.16092e-003  -1.18919e-004  2.73166e-001

```

図 A.31: ランダウ分布のフィットの結果

関数の作成

ROOTには関数を扱うためのツールとして、TF1というものが用意されています。ここでは、TF1の作成方法と使用法を説明します。ROOTにおいて関数を描画するのは、A.2.5節でヒストグラムの入れ物を作成した時と同じように関数を作成し、Draw()を使用するだけです。

1. 関数 TF1 の実体の作成方法は次のようにになります：

```
TF1 *func = new TF1("name", "formula", x_min, x_max)
```

一つ目の引数はヒストグラムの時と同じように「名前」です。二つ目の引数には関数の具体的な形を記述します（変数はx）。x_min, x_maxはそれぞれ関数の下限と上限です。

2. 例えば、定義域 $[0, 2\pi]$ の sine 関数を作成する場合は、

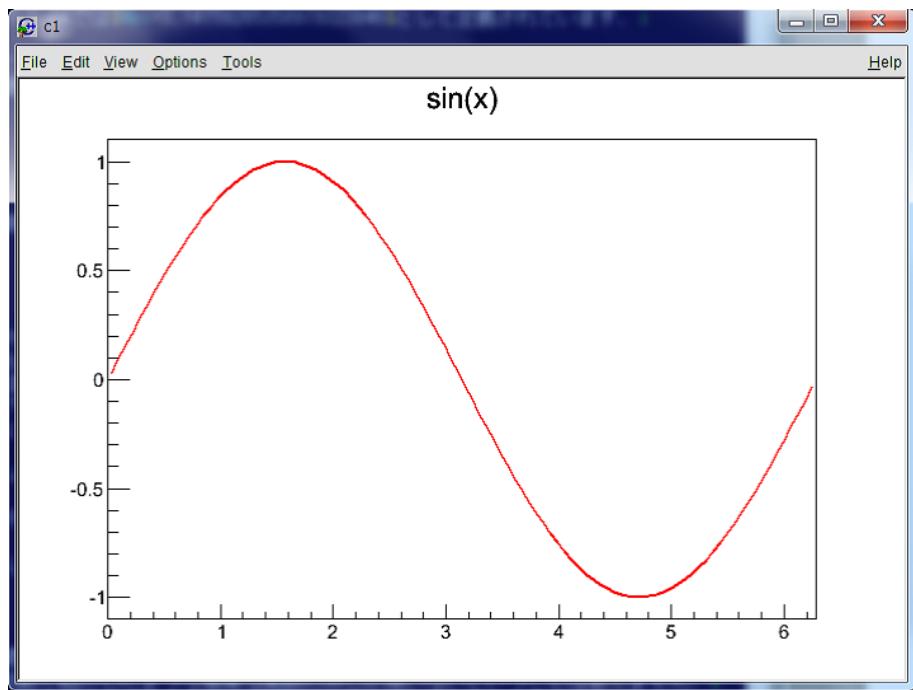


図 A.32: sine 関数

```
TF1 *f1 = new TF1("f1","sin(x)",0,TMath::TwoPi())
```

と入力します¹⁷。関数の変数は x とします。

3. 関数を描くのは簡単で

```
f1->Draw()
```

とするだけです¹⁸。結果を図 A.32 に示します。

パラメータのある関数

ROOT で関数を作成するもっぱらの目的は、その関数を使ってヒストグラムをフィットするためです。フィットを行うためには関数に値が変更できるパラメータが必要になります（でなければいつまで経っても関数がヒストグラムに近づき

¹⁷ `TMath::TwoPi()` というのは 2π の値を返してくれる関数で、ROOT の持つヘッダー `TMath.h` に定義されています。ROOTv5.34 では $\pi = 3.14159265358979323846$ として定義されています。

¹⁸ ヒストグラム、関数に限らず、ROOT 上で何かを描くときは `Draw()` 関数を使用します。

ません). そのため, TF1 はあらかじめパラメータを指定することができるようになっています.

1. 例として, 次のように振幅 a と振動数 b , 位相 c のパラメータをもつ sine 関数を考えます :

$$f(x) = a \sin(bx + c)$$

これを作成するには, 次のように入力します :

```
TF1 *f1 = new TF1("f1","[0]*sin([1]*x+[2])")
```

つまり, パラメータを入れたいところに, $[i]$ ($i > 0$) を埋め込んでいなければよいのです.

2. パラメータを入れたため, それらを設定しないと関数を描くことはできません. パラメータを設定する方法は 2 通りあります.

一つずつ設定する方法

パラメータを一つずつ設定するためには, SetParameter() 関数を使います. 例えば, パラメータ [0] を 3 に設定するには

```
f1->SetParameter(0,3)
```

とします. 一つ目の引数がパラメータの番号, 二つ目が値です. 他のパラメータも同様に設定できます.

一括で設定する方法

パラメータを一括で設定するためには, SetParameters() 関数を使います :

```
f1->SetParameters(3,2,TMath::Pi()/2)
```

左から順に [0], [1], [2] と割り当てられます. これで関数のすべてのパラメータを設定することができます¹⁹.

これらの方法は状況に応じて使い分けましょう.

3. パラメータをいろいろいじって遊んでみてください. また, 自分の好きな関数を定義してみて, パラメータを変えたときどうふるまうのかを見ても面白いかもしれません.

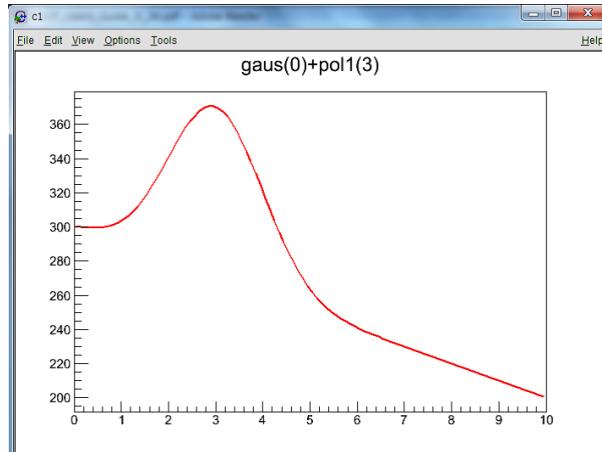
¹⁹ このように, SetParameter() や SetParameters() の引数には式を入れることもできます.

関数の作り方に関する Tips

ROOTにもともと用意されている関数（ガウス分布関数，ランダウ分布関数，多項式）の足し算の関数を作るのは次のようにもできます：

```
TF1 *f1 = new TF1("f1","gaus(0)+pol1(3)",0,10)
```

まず，`gaus+pol1` というのはガウス分布関数と一次多項式を足した関数を作ったことを意味しています。ガウス分布関数と一次多項式のパラメータの数は，それぞれ3つと2つです。その情報を作成時に ROOT 側に教えてあげるのが後ろについている () 印の部分です。パラメータの番号は0から順番に付けていくことになっているので，まず `gaus` の後ろに (0) を付けます。ガウス分布関数は3つのパラメータを持つので，0から2の3つのパラメータを取ります。続いて一次多項式にパラメータを割り当てるために，次のパラメータ番号 (3) を与えてあげます。一次多項式はパラメータ 3, 4 をとります。これで，ガウス関数+一次多項式の合成関数を作成することができました（下図は適当にパラメータを入れています）。



作成した関数でフィット

TF1を用いてヒストグラムのフィットを行うことができます。ここでは，その方法と効能を紹介します。

1. A.3.1節で行ったガウス関数でのフィットを，ROOTであらかじめ用意される方ではなく，自分で定義したガウス関数を使ってやり直してみましょう。まず，treeからガウス分布を抽出します（復習のために，ヒストグラムの入れ物も作ってしまいましょう）。

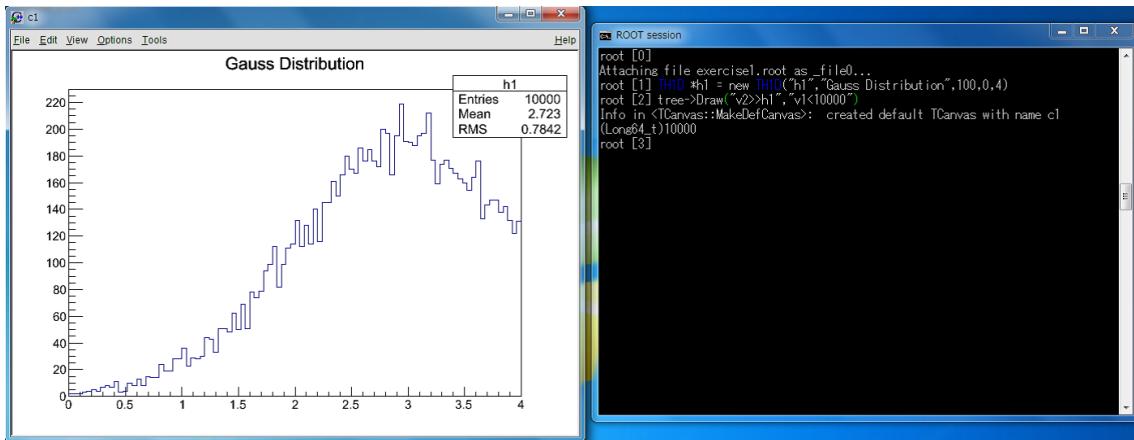


図 A.33: ガウス分布

```

TH1D *h1 = new TH1D("h1","Gauss Distribution",100,0,4)
tree->Draw("v2>>h1","v1<10000")

```

一行目でヒストグラムの入れ物を作り、二行目で tree の中のデータ v2 を入れて、描画しています (A.2.5 節参照). 図 A.33 に出来上がったヒストグラムを示します.

2. 次に関数を用意しましょう. ガウス分布関数は ROOT の中にあらかじめ用意されていますので、簡単には次のように宣言するとよいでしょう :

```

TF1 *f1 = new TF1("f1","gaus",0,4)

```

これとほとんど同じことなのですが、次のように自分で式を書いてもよいです (一度はやってみてください).

```

TF1 *f1
= new TF1("f1","[0]*exp(-(x-[1])*(x-[1])/(2*[2]*[2]))",0,4)

```

3. 用意したガウス関数の実体 f1 を使用してヒストグラムをフィットします. 方法は A.3.1 節と同様に、右クリックメニューから Fit を選択し、formula のところに f1 と指定するだけでもできますが、今回はコマンドラインでやってみましょう. コマンドラインでフィットを行うには、 h1->Fit() 関数を使用します :

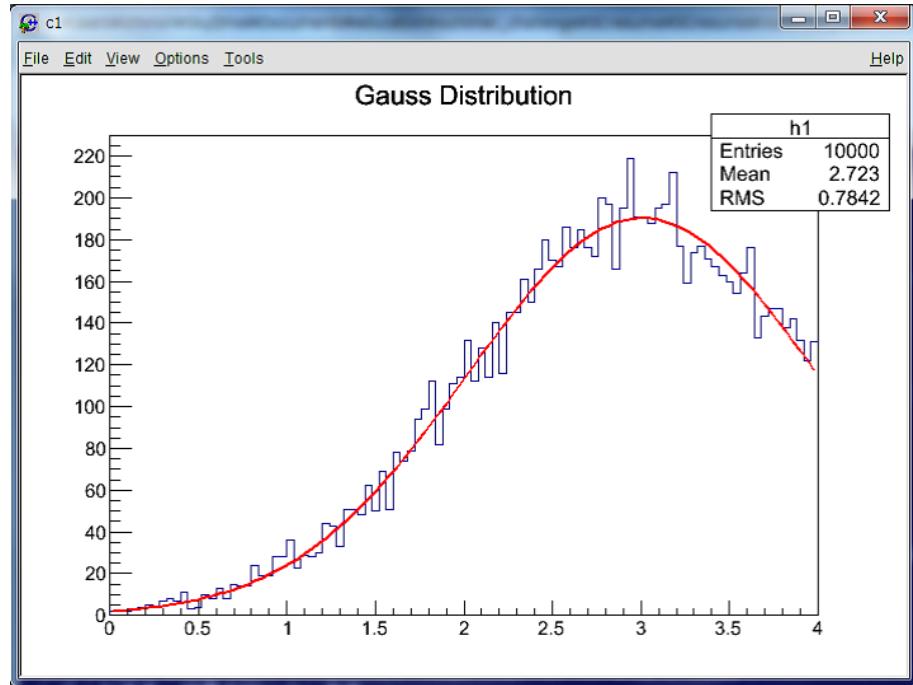


図 A.34: ガウス分布のフィット

```
h1->Fit("f1","","","",0,4)
```

これを入力すると、ROOT が `f1` という関数を用いて、0 から 4 までの範囲で `h1` にフィットしてくれます。結果を図 A.34 に示します。

4. `Fit()` 関数の一般的な使用法は、

```
f1->Fit("fcn_name or formula","option","goption",x_min,x_max)
```

一つ目の引数は関数の「名前」、またはフィットに使用する式です。二つ目と三つ目の引数は、それぞれフィットと描画に関するオプションです（詳細は ROOT のユーザーズガイド参照）。四つ目と五つ目にはそれぞれフィットの下端と上端を指定します。

フィットで求めたパラメータについて

フィットを行った後、コマンドラインに表示されるパラメータの値は、フィットに使用した関数に設定されています。各パラメータには誤差の情報もくつっています。これらの値を一つ一つ取り出す方法を紹介します。

1. A.3.1 節でガウス関数でのフィットを行いました。このとき、ROOT は自動的に `gaus` という「名前」の TF1 型の関数を用意しています。関数 `gaus` のパラメータ `Mean` の値とその誤差を改めて表示したくなった場合、次のように入力します：

```
gaus->GetParameter("Mean")
gaus->GetParError("Mean")
```

`GetParameter()` 関数は、その名の通り指定されたパラメータの値を表示します。`GetParError()` 関数は指定したパラメータのフィットにおけるエラーを返します。

2. 同様に、前節の `f1` の 0 番目のパラメータ [0] を取り出すには

```
f1->GetParameter(0)
f1->GetParErrors(0)
```

とします。



フィットの時に結果を表示して欲しくない状況があります（たとえば、大量のヒストグラムを一度にフィットしたときなど）。こんな時に役立つのが”Q”オプションです。 ”Q”オプションはFit()関数の二番目の引数に指定します。下図はオプションを指定した場合（上）と指定しなかった場合（下）を表しています。

```
root [4] htemp->Fit("gaus")
FCN=105.674 FROM MIGRAD   STATUS=CONVERGED   74 CALLS    75 TOTAL
EDM=3.63941e-007   STRATEGY= 1    ERROR MATRIX ACCURATE
EXT PARAMETER          VALUE        STEP SIZE  FIRST DERIVATIVE
NO.  NAME            VALUE        ERROR      SIZE    DERIVATIVE
  1  Constant       2.06987e+002  2.48792e+000  1.04947e-002 -1.43978e-004
  2  Mean           3.00625e+000  1.80735e-002  5.96474e-005 -3.35910e-002
  3  Sigma          9.83873e-001  1.29879e-002  1.47605e-005  1.74336e-001
(class TFitResultPtr)50346664
root [5] 
```



```
root [5] htemp->Fit("gaus","Q")
(class TFitResultPtr)50346664
root [6] 
```

初期値を設定してからフィット

今までのフィットではヒストグラムの形がきれいだったため、いきなりフィットを実行しても問題なく成功しました。しかし、実際の解析においてはヒストグラムやフィットする関数の形が複雑なせいで、ただ単にフィットを実行してもたいていの場合うまくいきません。

そこで、フィットをする前に、あらかじめ関数のパラメータをうまく調節してあげる必要があります。

1. `%wrokspace%$data$exercise$exercise2.dat` のデータを `maketree.C` を用いて `tree` に変換します (`%wrokspace%$root$exercise2.root` が作成されるはずです)。
2. `ROOT` ファイルを開いて `tree->Print()` し、`Entries` が 20000 であることを確認します。
3. データ `v1` をヒストグラムにしましょう (図 A.35) :

```
tree->Draw("v1")
```

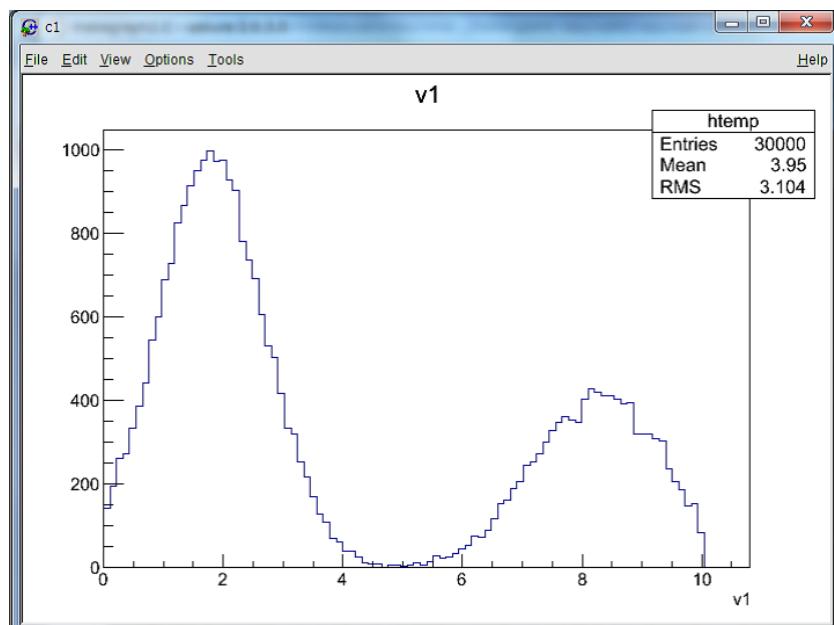


図 A.35: 二つのガウス分布があるヒストグラム

4. このヒストグラムには2つのガウス関数が入っていますので、ガウス関数を二つ足した関数を作ります（「関数の作り方に関する Tips」参照）：

```
TF1 *f1 = new TF1("f1","gaus(0)+gaus(3)",0,10)
```

5. この関数を用いて今までと同じようにフィットすると、ものの見事に失敗します（図 A.36）：

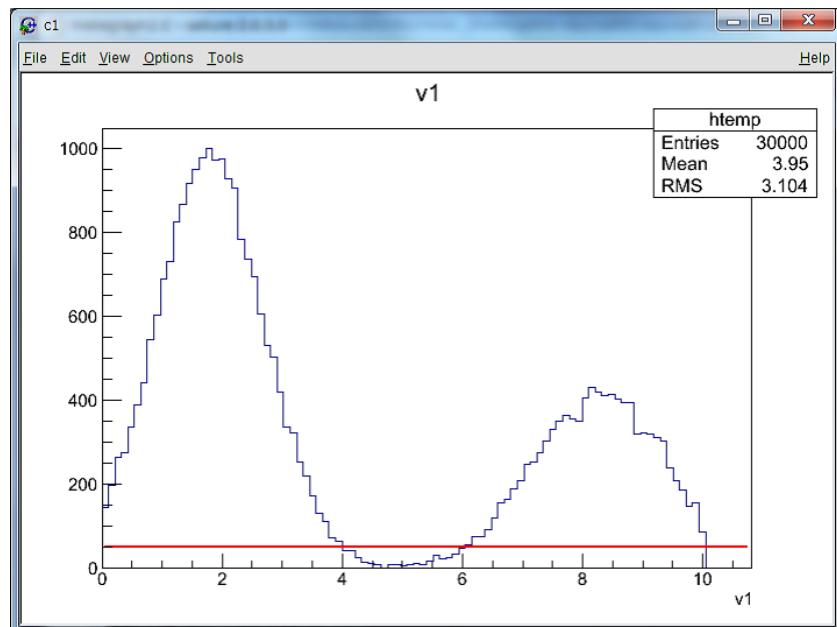


図 A.36: パラメータの初期値を設定しなかった場合

6. そこで関数のパラメータを調節して、ヒストグラムの形に近くなるようにしておきます。ここでは次のようにパラメータを与えておくことにします。

```
f1->SetParameters(1000,2,1,400,8,1)
```

7. ヒストグラムと関数を比較をしてみると図 A.37 のようになります（比較するには `f1->Draw("SAME")` を使いましょう。）。

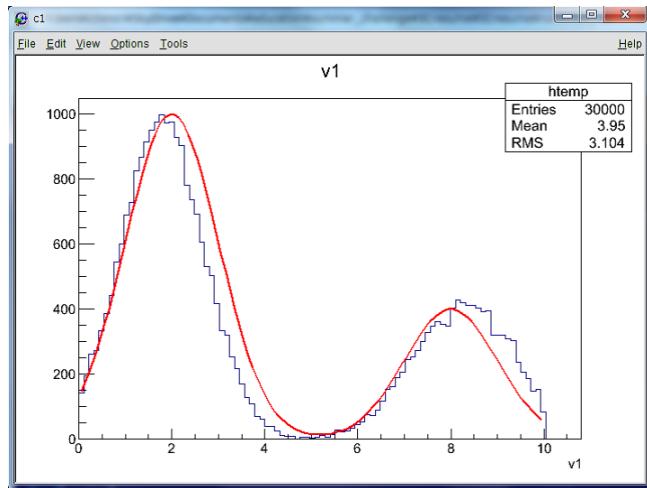


図 A.37: パラメータをセットした関数とヒストグラムの比較

8. だいたい似たような形にすることができたので、もう一度フィットをしてみましょう。すると、今度はちゃんとフィットに成功しました（図 A.38）。

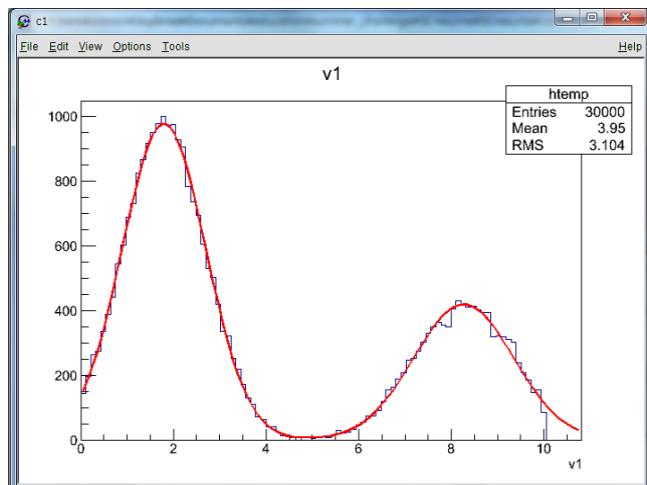


図 A.38: 初期値を与えた場合のフィットの結果

9. このように ROOT にお任せの状態だとフィットできない状況がよくおこりますので、基本的にはパラメータの初期値を設定してからフィットするのが一般的です。

A.4 グラフについて

ここでは ROOT におけるグラフの描き方を紹介します。

A.4.1 グラフを描いてみよう

ROOT におけるグラフというのはたくさんの点の集まりです。つまり、x 座標と y 座標の組み合わせがそろっていれば、どのようなグラフでも描くことができます。

ROOT には誤差無しグラフと誤差ありグラフが両方用意されていますので、順を追って説明します。

誤差のついていないグラフの描き方

%workspace%¥data¥exercise にある exercise3.dat に入っているデータをグラフ化してみましょう。

1. %workspace%¥data¥exercise まで移動して ROOT を起動し,

```
TGraph *tg1 = new TGraph("exercise3.dat")
```

と入力します。これで、tg1 にグラフの中身が入りました。

2. グラフを描くのはやはり Draw() 関数です。ただし、グラフはちょっと特殊で、オプションを正しく設定せずにただ単に tg1->Draw() としただけだと、何も描画してくれません（図 A.39）。
3. グラフの場合は、少なくとも二つのオプション A と P を指定しましょう。これで正しくグラフが描画されます（図 A.40）。

```
tg1->Draw("AP")
```

A は軸を表示するオプション、P はグラフの点を表示するオプションです。

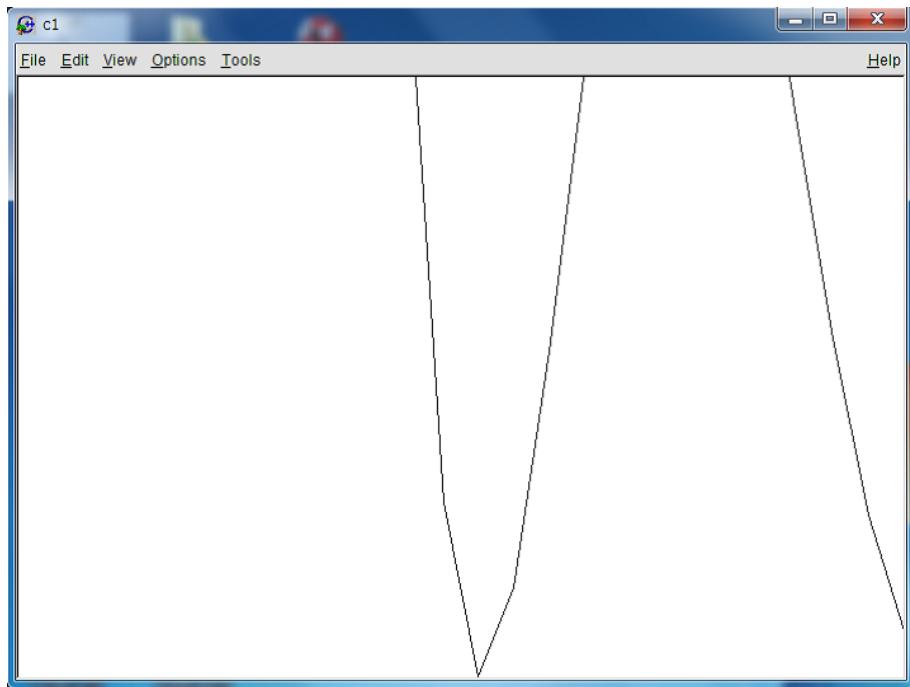


図 A.39: オプションを指定しなかった場合

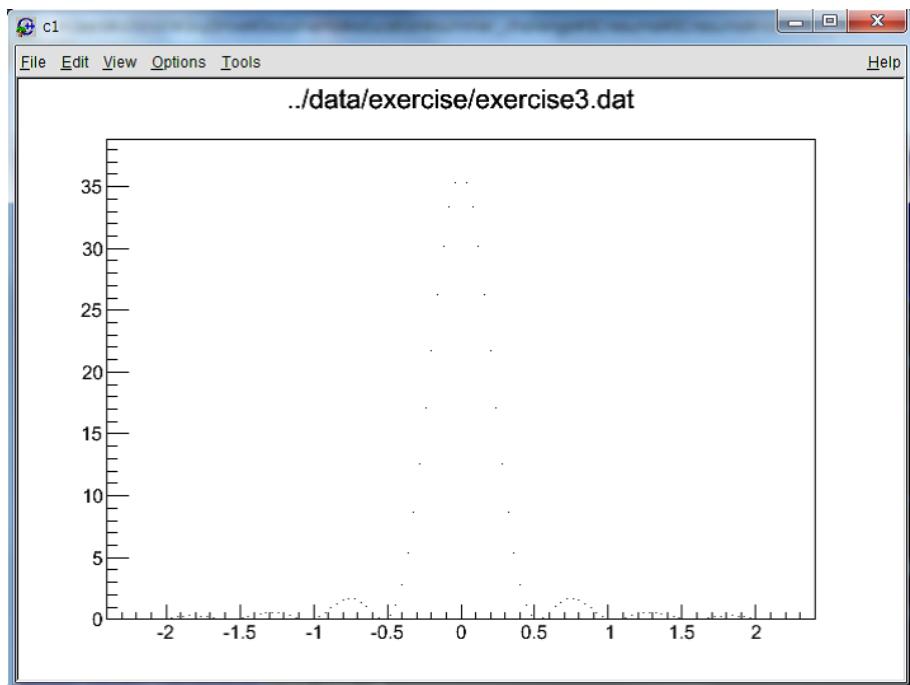


図 A.40: オプションを指定した場合

4. しかし、このままだと点が小さすぎて見づらいので、グラフの点の上で右クリックし、`SetLineAttributes` メニューで点の種類を変更しましょう（図 A.41）。点の種類の変更は一番下にあります。

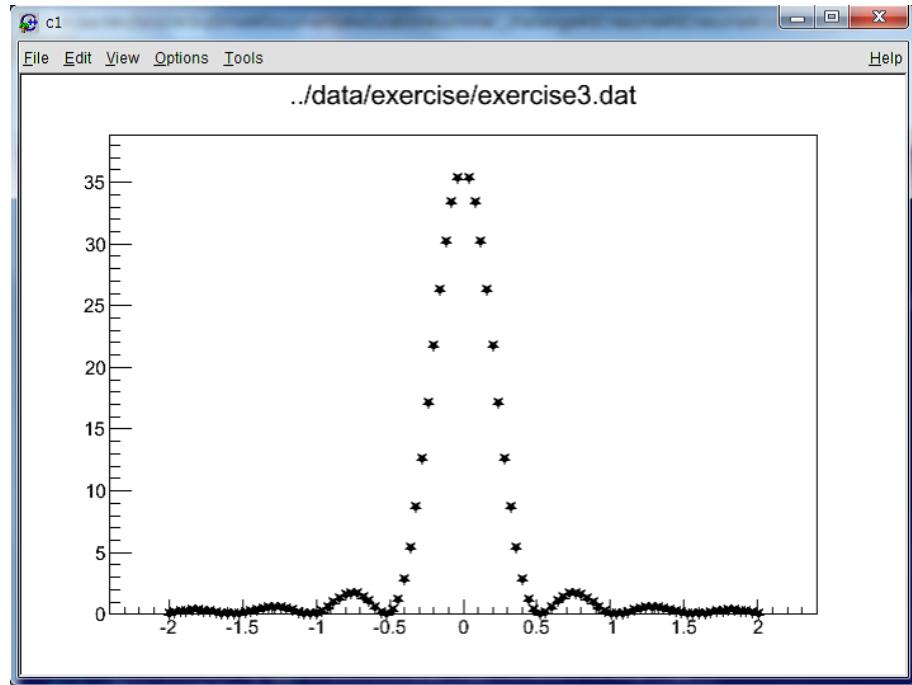


図 A.41: 点の種類を星印に変更

5. グラフを重ね描きするときはさらに注意が必要です。ヒストグラムを重ねて描くときには、`Draw()` のオプションとして `SAME` を指定していました。しかし、グラフを重ねるときは `SAME` ではなく、オプション `P` だけを指定します（二個目以降のグラフにはオプション `A` はつけてはいけません）。`exercise3` のグラフに `exercise4` のグラフを重ね描きしてみましょう。

```
TGraph *tg1 = new TGraph("exercise3.dat")
TGraph *tg2 = new TGraph("exercise4.dat")
tg1->Draw("AP*")
tg2->Draw("P*")
```

結果を図 A.42 に示します。ちなみに、オプション `*` はグラフの点を `*` 印に設定するオプションです。

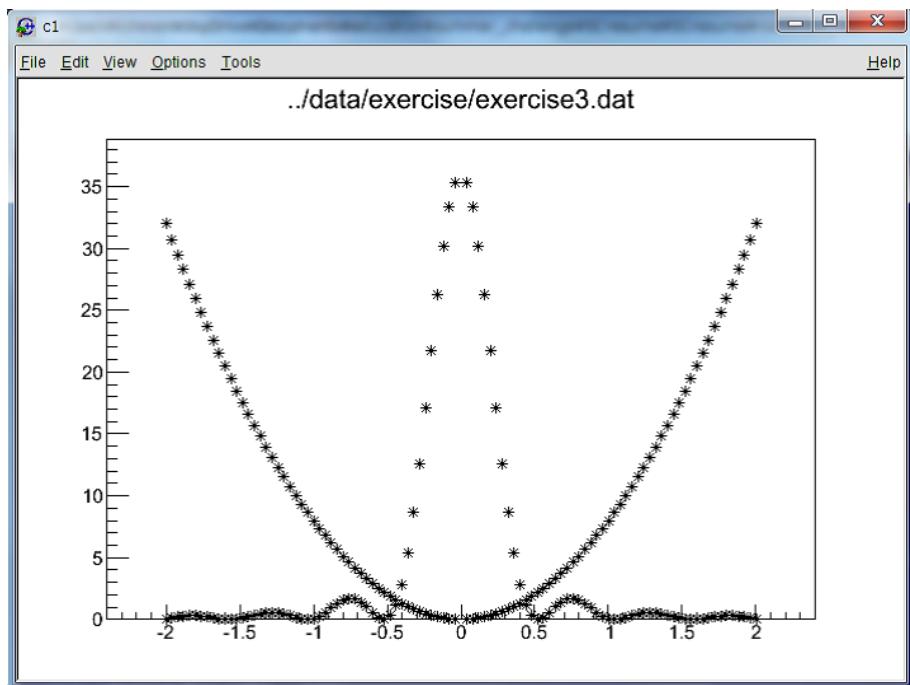


図 A.42: グラフの重ね描き

グラフは (x,y) 座標を指定しなければならないため、データファイルは二列になっています。一列目が x 座標、二列目が y 座標です。 `exercise3.dat` や `exercise4.dat` の中身を確認してみてください。

誤差のついているグラフ

実験で取得したデータには必ず誤差がついています。誤差を後から手で入れずに済むように、ROOTにはあらかじめ誤差の入ったグラフを扱うために `TGraphErrors` というものが用意されています。この説では `TGraphErrors` の扱い方を説明します。

1. `%workspace%$data$exercise` にある `exercise5.dat` を使用します。ファイルから誤差付きのデータを読み込むには、誤差無しグラフのときと同様に、

```
TGraphErrors *tge1 = new TGraphErrors("exercise5.dat")
```

とします。これでグラフの準備は完了です。

2. グラフを描くのも同様に

```
tge1->Draw("AP")
```

先程と同様、`Draw()` 関数を使う時のオプションには気を付けてください。結果は図 A.43 になります。図 A.44 は一番左の点を拡大表示したもので、よく見ると誤差の幅を表すエラーバーがついているのがわかります。

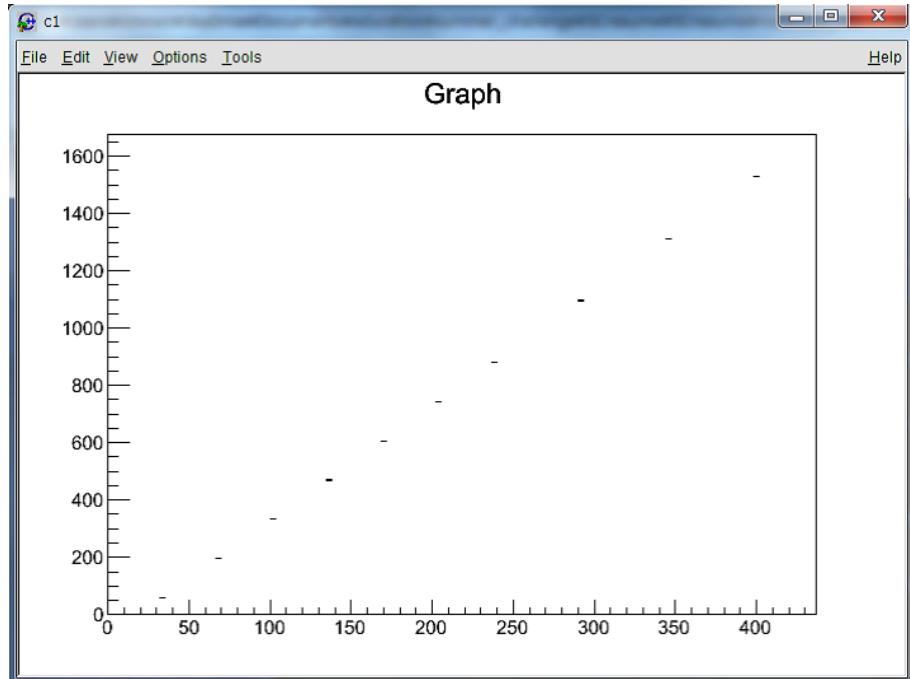


図 A.43: 誤差付きのグラフ。

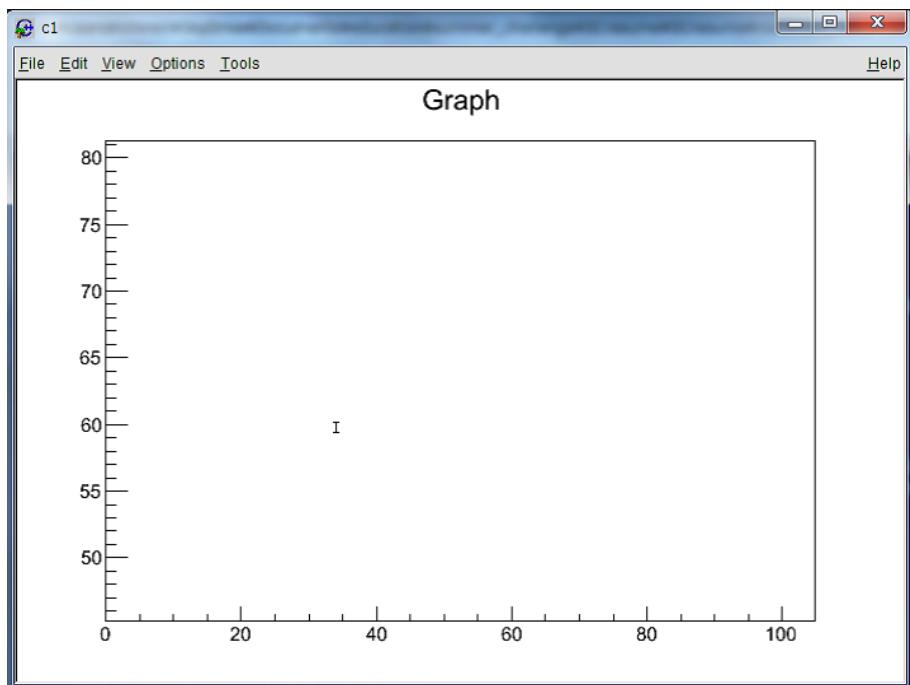


図 A.44: 図 A.43 の一番左の点を拡大したもの.



誤差付きグラフは (x,y) 座標の指定加えて、誤差のデータ (ex,ey) を必要とするため、データファイルは四列になっています。一列目が x 座標、二列目が y 座標、三列目が ex 、四列目が ey です。`exercise5.dat` の中身を確認してみてください。

グラフのフィット

ヒストグラムと同様、グラフもフィットをすることができます。

- 前節で描いた誤差付のグラフをよく見ると直線のように見えます。ですので、一次の多項式 `pol1` を用いてフィットすることにしましょう。
- 一次の多項式はあらかじめ ROOT が用意していますが、復習のために自分で作成してみましょう。作り方は次の二通りです：

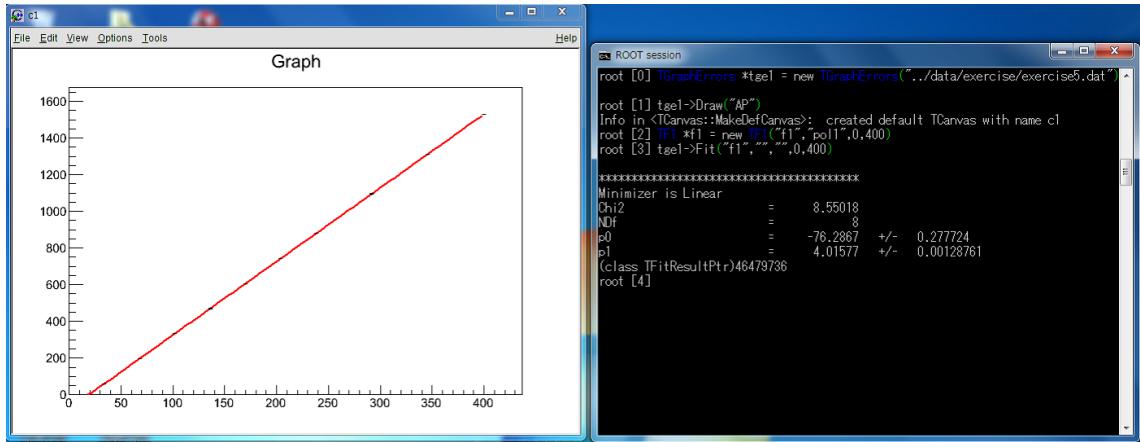


図 A.45: グラフのフィット

```

TF1 *f1 = new TF1("f1","pol1",0,400)
TF1 *f1 = new TF1("f1","[0]+[1]*x",0,400)

```

これで、`f1` という名前の一次関数を作成することができました。

3. グラフのフィットはヒストグラムと全く一緒です：

```
tge1->Fit("f1","","",0,400)
```

結果を図 A.45 に示します。

4. せっかくなので、フィットの結果を眺めてみましょう。パラメータの値を入れて、結果を一次方程式で表すと次のようにになります：

$$y = (4.016 \pm 0.001) * x + (-76.3 \pm 0.3)$$

また、フィットの妥当性を評価するために χ^2 (Chi2) を自由度 (NDF) で割ったものを考えると、

$$\chi^2/\text{NDF} = 1.07$$

となりほぼ 1 に等しいので、悪くないフィットであると考えることができます²⁰.

²⁰ χ^2 についての詳しい話は、第 7 章を参照してください。

…べ、別に逃げたわけじゃないんだからっ！（CV. 釘宮○恵）

A.5 マクロを書いてみよう

ここまで、ROOTに何かをさせるときには、構文をコマンドラインに書いて実行を繰り返すという形をとってきました。簡単なデータを一時的にヒストグラムにするという程度の目的であればそれでも良いかもしれません、実際の解析では、あるパラメータを少しいじっては実行、少しいじっては実行の繰り返しになることがほとんどです。そんな時に、同じスクリプトを何回も何回も手で入れて実行するのは非効率的になります。

そこで、マクロを使用します。マクロというのは、簡単に言うと、今まで一つ一つコマンドラインで打ち込んでいたものを、テキストデータとして書いておくというものです。

A.5.1 マクロの書き方

ROOTのマクロはいろいろなプログラミング言語で書けますが、ここではC・C++言語流の書き方を説明します²¹。

1. テキストエディタを開き、次のように入力します（図A.46）（一行目と二行目は紙面の関係上分けましたが、一行に書いても構いません）：

```
{
TGraphErrors *tge1
= new TGraphErrors("../data/exercise/exercise5.dat");
tge1->Draw("AP");
TF1 *f1 = new TF1("f1","pol1",0,400);
tge1->Fit("f1","","",0,400);
}
```

これは前節で誤差付グラフをフィットした時のコマンドを羅列したものです。このように、コマンドを羅列したものがマクロなのです。

2. マクロを書くときの注意としては、コマンドラインで入力していた時と異なり、各コマンドの最後に';'をつけなければいけないということです²²。
3. %wrokspace%\$macroにマクロを保存します。ここでは、graph_fit.Cという名前で保存したことにします。

²¹ 残念ながら筆者はpythonに詳しくないので、python流の説明はできません。pythonerの方がいらっしゃったらごめんなさい。

²² ';'はC・C++言語において、文の終わりを意味します。

```

C:\Users\ichinori\Dropbox\summer_challenge\macro\graph_fit.C - sakura 2.0.5.0
ファイル(E) 編集(E) 変換(C) 検索(S) ツール(T) 設定(O) ウィンドウ(W) ヘルプ(H) SJIS(CRLF) [CRLF] 8:20
[...] 11 12 13 14 15 16 17 18 19 110 ...
1 {  

2   TGraphErrors *tge1 = new TGraphErrors("../data/exercise/exercise5.dat");  

3   tge1->Draw("AP");  

4   TF1 *f1 = new TF1("f1","pol1",0,400);  

5   f1->Fit("f1","","",0,400);  

6 }[EOF]

```

図 A.46: ROOT のマクロ

4. コマンドプロンプトで %wrokspace%\macro に移動し,

```
root -l graph_fit.C
```

とするか (図 A.47), ROOT を先に開いた後に,

```
.x graph_fit.C
```

と入力します (図 A.48).

5. %wrokspace%\macro\examples ディレクトリに, これまでやってきた内容と同じ動作をするマクロたちが置いてあります. 自分のマクロを作成する際の参考にしてください.

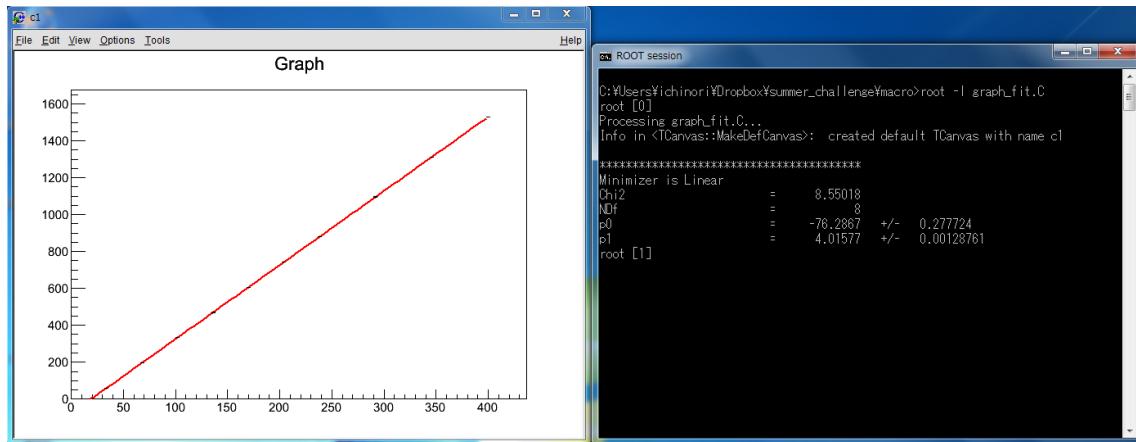


図 A.47: マクロの起動その 1

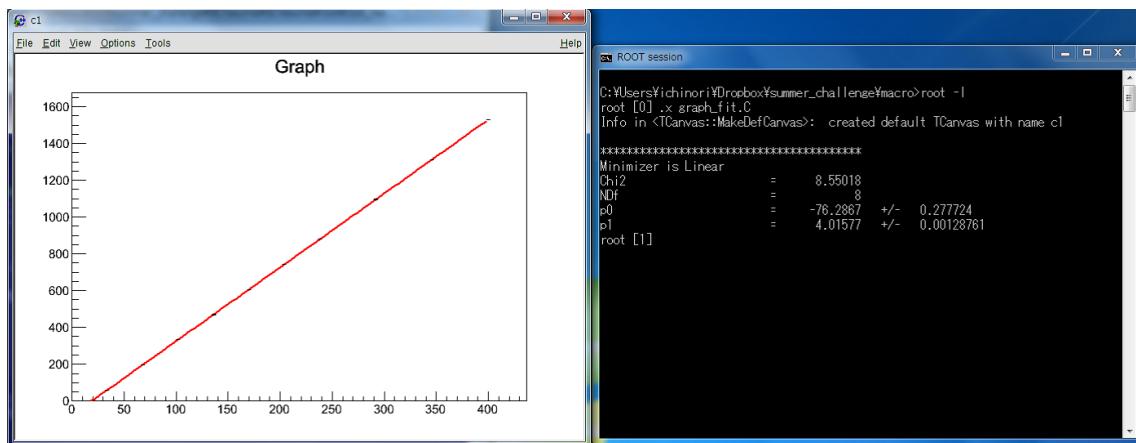


図 A.48: マクロの起動その 2

A.6 終わりに

ここまで内容を一通りこなせるようになれば、ROOTを使ってデータを処理するための基本的な知識は身についたと思っていただいて構いません。もちろんのことながら、この本で述べたことはROOTという巨大なフレームワークの「氷山の一角」にすぎません。例えば、treeの（実に奥深い）仕組みの話や、ファイル入出力の話などはほとんどまるごと省いてしまっています。

ここから先にさらに進んで、ROOTをもっと使いこなしたいと思った場合、まず最初にやらなければならないことはプログラミング言語の勉強です。ROOTはその基礎とするプログラミング言語「C++」の構文をそっくりそのまま使用しています。ですので、C++の勉強をしておけば、新しい機能を使用するときでも使用法を読むだけでマクロやプログラムが書けるようになります。また、ROOTはPythonやRubyといったよりインタラクティブな言語に対するインターフェースをもっているので、そちらの言語からやってみたいという方針でも構いません。いずれにしても、ROOTを使いこなすうえでプログラミング言語は必須のアイテムになります²³。

本書を超えるROOTの使い方について最もよい教科書となるのは、本家本元の提供するROOT取扱い説明書「ROOT User's Guide」です。これはROOTのwebページから無償でダウンロードすることができます。もちろん、ROOTの使い方に関するあらゆることが網羅されているので、もしこれをすべて理解することができればROOTは完全にユーザーの手の内になることでしょう。

とはいって、「ROOT Users Guide」はおよそ500ページにも及ぶ大作ですから、いきなりこれを読み始めるとたちどころに挫折してしまいます。そんなときは、「ROOT ○○ 使い方」などでググって、先人たちの教えを乞いましょう。検索で引っかかるウェブサイトを見れば、ROOTに関するいろいろなTipsを気軽に知ることができます。

²³ 例えば、前節で紹介したマクロは、実際にコマンドラインに入力するものと全く同じものを順番に並べていくだけなので、プログラミング言語の知識をほとんど使っていない場合が多くあります。しかしながら、ひとたびマクロで複雑な処理を行うようなプログラムを書くと、原因不明なエラーが発生してマクロの動作が止まってしまうということがよくあります。これを回避するためには、それぞれのプログラミング言語の仕様に沿ったコードを書く必要があるため、言語に関する知識はやはり必要になってきます。

関連図書

「ROOT User's Guide」は A.6 節で紹介しました。応用的な内容をバリバリ使いたい場合は、こいつを読むことから始めましょう。ただし、C++を知らない人には結構つらいので、難しいことをしようと思ったときは、先にプログラミング言語の勉強をした方がよいでしょう。

C++を解説した書物はびっくりするぐらいたくさん存在しますが、筆者が使った書物（いわゆる独習シリーズ）だけ例として挙げておきます。C++だけでなくC言語の本も同時に挙げているのは、C++がC言語を発展させたものであるため、C言語について学んだ方が理解しやすい、という教育的理由と、実は「独習 C++」が「独習 C」を読まないと理解できない仕様になっている、というどうしようもない理由からです。「独習シリーズ」は違い C++だけで完結した解説を行っている書物もあるかと思いますので、興味のある人は書店で漁ってみてください。さまざまな筆者が思い思いの形で解説したたくさん本があるので、自分に合った良い本がきっと見つかるでしょう。

1. 『ROOT User's Guide』 (<http://root.cern.ch/drupal/content/users-guide>)
2. 『独習 C』 第4版 ハーバート・シルト（著），柏原 正三（監修），トップスタジオ（翻訳）
3. 『独習 C++』 第4版 ハーバート・シルト（著），神林 靖（監修），トップスタジオ（翻訳）

付 錄B 古典場の量子化

B.1 なぜ場の量子論が必要なのか

フラウンフォーファー回折においては光を古典的な波として取り扱った。しかし、光電効果からもどうやら”光子”という粒子が存在しそうである。では光をより正確に記述する理論はなんだろうか。その答えが場の量子論である。以下では場の量子論に触れるため、場の量子化を行った。ただ本来、光はベクトル場で記述されるものであるがベクトル場はやや複雑なため、スカラー場の量子化にした。

B.2 記法・単位

- ・相対論的記法

$$\text{計量テンソル: } g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

反変ベクトル: $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x})$

共変ベクトル: $x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) = g_{\mu\nu} = (x^0, -\mathbf{x})$

内積: $px = p^\mu x_\mu = p_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} p^\mu x^\nu = g^{\mu\nu} p_\mu x_\nu = p^0 x^0 - \mathbf{p}\mathbf{x}$

微分記号: $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu = (\partial/\partial x^0, \partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3) = (\partial/\partial t, \nabla)$

$\partial^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu = (\partial/\partial x_0, \partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3) = (\partial/\partial t, -\nabla)$

$\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$

- ・単位系

以下ではディラック定数 \hbar および光速 c を基準にとる自然単位系を用いる。この単位系では \hbar も c も 1 という無次元の定数となる:

$$\hbar = c = 1 \quad (\text{B.1})$$

B.3 古典場のラグランジュ形式

多粒子系のラグランジアンは、もし粒子同士が相互作用をしてなければ

$$L = \sum_i L(q_i, \dot{q}_i) \quad (\text{B.2})$$

という形を取る。右辺の $L(q_i, \dot{q}_i)$ は 1 自由度の場合のラグランジアンである。これを参考にすると、電場 \mathbf{E} や磁場 \mathbf{H} のような広がった領域に連続に分布する場の系もラグランジュ形式で記述できる。

ここで、 \mathbf{E}, \mathbf{H} やその他の場をまとめて一般的に $\phi(x)$ と記すことにする¹。つまり

$$i \rightarrow x$$

$$q_i \rightarrow \phi(x)$$

のように対応させると、

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (\text{B.3})$$

である。この右辺に現れた $\mathcal{L}(x)$ はラグランジアン密度と呼ばれている。作用は

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (\text{B.4})$$

と書け、最小作用の原理より

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi(x)} - \partial_\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\alpha \phi(x))} = 0 \quad (\text{B.5})$$

という変分方程式となるが、これは変分の公式

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x)} \int d^3x' F(\phi(x')) = \frac{\delta}{\delta \phi(x)} F(\phi(x)) \quad (\text{B.6})$$

により、次のような \mathcal{L} についての微分方程式に書き直せる：

$$\frac{\partial}{\partial \phi(x)} \mathcal{L} - \partial_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha \phi(x))} \mathcal{L} \right] = 0 \quad (\text{B.7})$$

が導かれる。この場合の一般化運動量 $\pi(x)$ は

$$\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)} \mathcal{L}(\phi(x), \dot{\phi}(x), \partial_i \phi(x)) \quad (\text{B.8})$$

¹ x は 4 元ベクトル。 x^μ の μ は省略している。4 元ベクトルと聞いてピンと来ない人は、ファインマン [1] などを参照。

と導入され, ハミルトニアン密度 $\mathcal{H}(x)$ とハミルトニアン H はそれぞれ

$$\mathcal{H}(\pi(x), \phi(x), \partial_i \phi(x)) = \pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(\phi(x), \dot{\phi}(x), \partial_i \phi(x)) \quad (\text{B.9})$$

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\pi(x), \phi(x), \partial_i \phi(x)) = \int d^3x \pi(x) \dot{\phi}(x) - L \quad (\text{B.10})$$

となる.

電磁場もこの形式で記述できる.

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \quad (\text{B.11})$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad (\text{B.12})$$

というラグランジアン密度から出発すると式 (B.7) 式を用いて

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}(x) = 0 \quad (\text{B.13})$$

が求まる. これは, 自由電磁場のマックスウェル方程式である.

問1. 最小作用の原理を用いて式 (B.7) を導いてみよう.

問2. 式 (B.13) から (よく知っている形の?) 自由電磁場の4つのマックスウェル方程式を導いてみよう.

B.4 スカラー場の量子化

量子力学の出発点である同時刻交換関係は

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij} \quad (\text{B.14})$$

であるが, 波動場 ϕ の同時刻交換関係は

$$[\phi(x), \pi(x')] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{B.15})$$

となる. ただし $x^0 = x'^0 (= t)$ である. ここで, 電磁場を量子化することによって光に粒子像が自然に現れることを見たい. しかし電磁場はベクトル場であるので, 数学的取り扱いが複雑である. そこで, 簡単のため1成分のみの場 (スカラー場) を用いて光の粒子像を見る. スカラー場とは, ローレンツ変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$ に対して

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (\text{B.16})$$

と振る舞う場である。電磁場

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \quad (\text{B.17})$$

には、スカラー場

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) \quad (\text{B.18})$$

が対応し、相互作用がない場合のローレンツゲージ²

$$\square A_\mu(x) = 0 \quad (\text{B.19})$$

には

$$\square\phi(x) = 0 \quad (\text{B.20})$$

が対応する。この場合のスカラー場の一般化運動量 $\pi(x)$ は

$$\phi(x) = \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}(x)}\mathcal{L}(x) = \dot{\phi}(x) \quad (\text{B.21})$$

である。

ここで式(B.20)の解の形を見ると。

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{p}, t) \quad (\text{B.22})$$

と $\phi(\mathbf{x}, t)$ をフーリエ展開式(B.7)に代入すると

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + |\mathbf{p}|^2 \right] \phi(\mathbf{p}, t) = 0 \quad (\text{B.23})$$

となる。これは調和振動子の式であり、振動数は

$$\omega_p = |\mathbf{p}| \quad (\text{B.24})$$

である。量子力学における調和振動子のハミルトニアン H_{SHO} は

$$H_{SHO} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2\phi^2 \quad (\text{B.25})$$

と書けて、 ϕ と p を生成消滅演算子でかくと

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger) \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger)$$

²電磁場のラグランジアン式 (B.17) はゲージ変換 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \chi$ にたいして不変である。系の状態を記述する際のこのような任意性を取り除くために A_μ に条件を課す。この操作をゲージ固定という。猪木 [2]などを参照

ϕ と p の交換関係 $[\phi, p] = i$ は

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (\text{B.26})$$

となった. この時ハミルトニアンは

$$H_{SHO} = \omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) \quad (\text{B.27})$$

と書きなおせて

$$[H_{SHO}, a^\dagger] = \omega a^\dagger \quad [H_{SHO}, a] = -\omega a \quad (\text{B.28})$$

が示せる. 式 (B.26), 式 (B.28) の 2 式から

$$|n\rangle \equiv (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (\text{B.29})$$

は H_{SHO} の固有状態でありその固有値は $(n + \frac{1}{2})\omega$ である.

スカラー場の場合に戻ろう. 上の量子力学の議論をそのまま適応する.

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (\text{B.30})$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (\text{B.31})$$

この 2 式の第 2 項の積分変数を $d(-\mathbf{p})$ に書き直すと

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (\text{B.32})$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (\text{B.33})$$

となる. このとき生成消滅演算子の交換関係を

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (\text{B.34})$$

とすれば

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6} \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}} ([a_{-\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}'}] - [a_{\mathbf{p}}, a_{-\mathbf{p}'}^\dagger]) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}')} \quad (\text{B.35})$$

$$= i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{B.36})$$

となり, 式 (B.15) は満たされる.

ハミルトニアンは

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger]) \quad (\text{B.37})$$

と書き換えられる。第2項は定数項であるので、エネルギー・スケールの原点をずらす意味（あるいは真空のエネルギーの意味）しかない。真空のエネルギーは0に取るのが自然なので、以後無視することとする。よって、

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \quad (\text{B.38})$$

これより

$$[H, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger \quad [H, a_{\mathbf{p}}] = -\omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} \quad (\text{B.39})$$

が成り立つ。

ここからは運動量の演算子 P を定義することを目指そう。今考えている系式 (B.18) は並進

$$\phi(\mathbf{x}) \mapsto \phi'(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad (\text{B.40})$$

に対して明らかに不変であるので、この変換を生成子として運動量が保存するはずである。運動量の具体的な形を求めるために、ベクトル \mathbf{a} だけ並進する演算子 $\hat{U}(\mathbf{a})$ を考えよう。すなわち、状態ベクトル $|\psi\rangle$ を \mathbf{a} だけ平行移動させた状態ベクトルが $\hat{U}(\mathbf{a})|\psi\rangle$ と書けるとしよう。このとき場の量 $\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})$ の期待値は、それぞれ、

$$\langle \psi | \phi(\mathbf{x}) | \psi \rangle \mapsto \langle \psi | \hat{U}^\dagger(\mathbf{a}) \phi(\mathbf{x}) \hat{U}(\mathbf{a}) | \psi \rangle \quad (\text{B.41})$$

$$\langle \psi | \pi(\mathbf{x}) | \psi \rangle \mapsto \langle \psi | \hat{U}^\dagger(\mathbf{a}) \pi(\mathbf{x}) \hat{U}(\mathbf{a}) | \psi \rangle \quad (\text{B.42})$$

のように変化するが、 $\hat{U}(\mathbf{a})$ が \mathbf{a} だけ並進する演算子であることから、これらはそれぞれ、

$$\langle \psi | \hat{U}^\dagger(\mathbf{a}) \phi(\mathbf{x}) \hat{U}(\mathbf{a}) | \psi \rangle = \langle \psi | \phi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) | \psi \rangle \quad (\text{B.43})$$

$$\langle \psi | \hat{U}^\dagger(\mathbf{a}) \pi(\mathbf{x}) \hat{U}(\mathbf{a}) | \psi \rangle = \langle \psi | \pi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) | \psi \rangle \quad (\text{B.44})$$

となっているはずである。よって演算子の間の式として、

$$\hat{U}^\dagger(\mathbf{a}) \phi(\mathbf{x}) \hat{U}(\mathbf{a}) = \phi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad (\text{B.45})$$

$$\hat{U}^\dagger(\mathbf{a}) \pi(\mathbf{x}) \hat{U}(\mathbf{a}) = \pi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad (\text{B.46})$$

が成り立つべきである。次に、

$$\hat{U}(\mathbf{a}) = \exp(-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) = 1 - i\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} + O(\mathbf{a}^2) \quad (\text{B.47})$$

として、式 (B.45), 式 (B.46) に代入し、両辺で \mathbf{a} について 1 次の項を比べると、

$$[\mathbf{P}, \phi(\mathbf{x})] = i\nabla\phi(\mathbf{x})[\mathbf{P}, \pi(\mathbf{x})] = i\nabla\pi(\mathbf{x}) \quad (\text{B.48})$$

が得られる。これを満たす \mathbf{P} は容易に見つけることができて、

$$\mathbf{P} = - \int d^3x (\nabla\phi(\mathbf{x}))\pi(\mathbf{x}) \quad (\text{B.49})$$

とすれば良いことがわかる。式 (B.49) を生成消滅演算子を用いて書き直すと、

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3x}{2\pi} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \quad (\text{B.50})$$

以上より、式 (B.39) と式 (B.50) から

$$H a^\dagger |0\rangle = \omega_{\mathbf{p}} a^\dagger |0\rangle \quad (\text{B.51})$$

$$\mathbf{P} a^\dagger |0\rangle = \mathbf{p} a^\dagger |0\rangle \quad (\text{B.52})$$

が成り立つので、 $a^\dagger |0\rangle$ はエネルギー $\omega_{\mathbf{p}}$ 、運動量 \mathbf{p} の光子 1 粒子状態である。光の粒子像が自然に現れた。

参考文献

- [1] ファインマン, レイトン, サンズ, ファインマン物理学 IV, 岩波, 1971
- [2] 猪木慶治・川合光, 量子力学 II, 講談社サイエンティフィク, 1994
- [3] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview, 1995.

付 錄C LED発光原理

LED (Light Emitting Diode) は、電場を印加する事で蛍光を発するエレクトロ・ルミネセンス (EL) によって発光する。まずPN接合において空乏層¹があるため、電子と正孔（ホール）はぶつかることはない。しかしPN接合に順バイアスの電圧²をかけてあげると空乏層によるポテンシャル障壁は減少し、伝導体の中では電子がN側からP側に、価電子帯では正孔が逆の方向に流れる（キャリヤの注入現象）。この移動の途中で電子と正孔がぶつかると結合（再結合）する。再結合の際、高いエネルギー帯の伝導帯にある電子が価電子帯に落ち、正孔と結びつくことになるので、伝導帯と価電子帯のエネルギーギャップ (E_g) の一部を受け取ってフォトンを放出する。これがLEDの発光原理である。エネルギーギャップは半導体によって異なるため、放出されるフォトンは材料特有の波長を持つ。たとえば、GaNであれば青色、GaPであれば赤色という具合である³。以上から分かるように、エネルギーギャップまわりのエネルギーしかフォトンは受け取らないので、黒体放射で説明される白熱電球と比較してLEDは波長の広がりは大きくない。

C.1 直接遷移型と間接遷移型

原理は上の通りであるが、再結合する機構によって発光効率やフォトンの波長が異なる。

直接遷移型半導体

電子、正孔が互いに同じ波数位置にあるために、電子、正孔が直接再結合できる半導体のこと。発光効率が非常に高く、発光デバイスに適している。エ

¹空乏層は電荷の扱い手（キャリヤ）である電子や正孔にとってポテンシャル障壁に感じられる領域のこと。p型半導体とn型半導体をくっつけてあげると、それぞれ他方へ拡散し始める。さて、そもそもp型半導体にはアクセプタと呼ばれる、正孔を与える不純物が、n型半導体にはドナーと呼ばれる、電子を与える不純物が存在する。アクセプタは拡散してきた電子と、ドナーは拡散してきた正孔と結合（再結合）して、それぞれイオン化する。結果的にp型半導体側に負、n型半導体側に正の電荷が生じて、電気二重層を作る。この電気二重層が作る電場が障壁となって拡散が止まってしまい、p型半導体とn型半導体は電気的に絶縁される。

²発光し始める電圧を順方向電圧降下（forward voltage drop）という。たとえば3V。

³ $hc/\lambda = E$ 。実際のLEDは $E = E_g$ ではないが、直接遷移型はおおよそ E_g である。

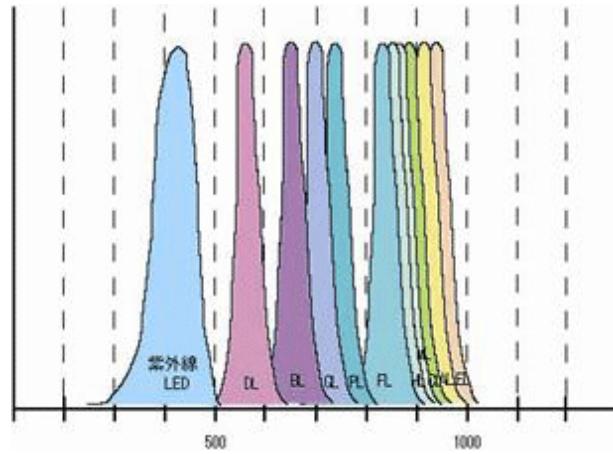


図 C.1: 各種発光ダイオードの発光波長。

エネルギーギャップに相当するフォトンを放出するので、間接遷移型に比べ波長が短い。このことあって再結合の中でも発光再結合に分類される。現在一般的な LED はこのタイプで、例えば GaAlAs、GaN がある。

間接遷移型半導体

電子、正孔が互いに違う波数位置にあるために、フォノン（熱で振動している原子）の協力のもと電子と正孔が再結合できる半導体のこと。言い換えると、正孔より運動量の大きな電子はフォノンにぶつかって、正孔と同じくらいの運動量になる。すると、直接遷移型と同じ状態になるので、同じように電子と正孔がぶつかることで、電子が失うエネルギー分だけフォトンを放出する。このとき、エネルギーギャップ分だけ正孔よりエネルギーが高かった電子はフォノンに幾らかエネルギーを奪われているので、直接遷移型と比較すると、エネルギーギャップ分のフォトンを出すことはない。そのため波長の短い光を得るのには不利である。また、この過程を見るとわかるように、フォノンとの遭遇確率が必要となるので直接遷移型に比べると発光効率は下がってしまう。このため、再結合の中でも非発光再結合に分類される。Si、Ge、GaP、ダイヤモンドはこのタイプである。特に、ダイヤモンドはエネルギーギャップが充分大きいために、間接遷移型でありながら紫外光を出す。

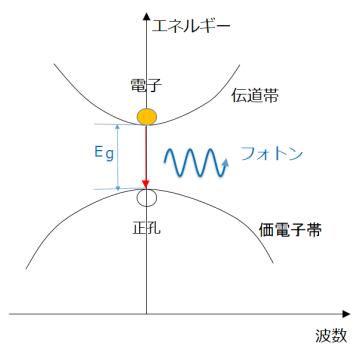


図 C.2: 直接遷移型

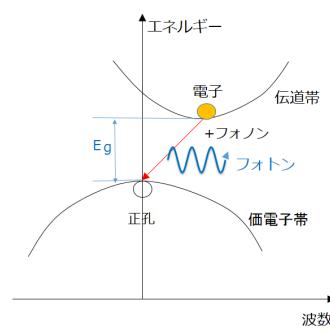


図 C.3: 間接遷移型

付 錄D 電気信号とインピーダンス

D.1 フィルタ回路

コンデンサ、コイルのインピーダンスが周波数依存することを利用すると、特定の周波数を選択して取り出すことができる。ここではコンデンサを用いたフィルタ回路についてみていく。

D.1.1 CR 回路

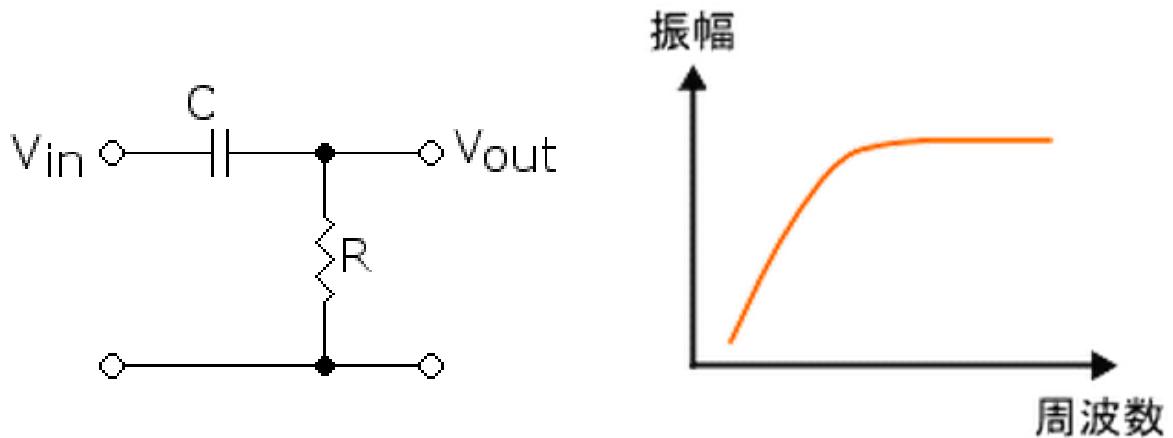


図 D.1: ハイパスフィルター回路

図 D.2: ハイパスフィルター回路
の周波数応答

コンデンサと抵抗を図 D.1 のように接続する。コンデンサのインピーダンスは $1/i\omega C$ より

$$\tilde{V}_{out} = \frac{\tilde{Z}_C}{\tilde{Z}_C + \tilde{Z}_R} \tilde{V}_{in} \quad (D.1)$$

$$= \frac{R}{R + 1/i\omega C} \tilde{V}_{in} \quad (D.2)$$

$$\left| \frac{\tilde{V}_{out}}{\tilde{V}_{in}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (1/\omega RC)^2}} \quad (D.3)$$

これは $\omega \rightarrow 0$ のとき 0 に近づき、 $\omega \rightarrow \infty$ のとき 1 に近づく。つまりこれは低周波は通りにくいが高周波は通りやすい回路、すなわちハイパスフィルターとなる。

D.1.2 RC回路

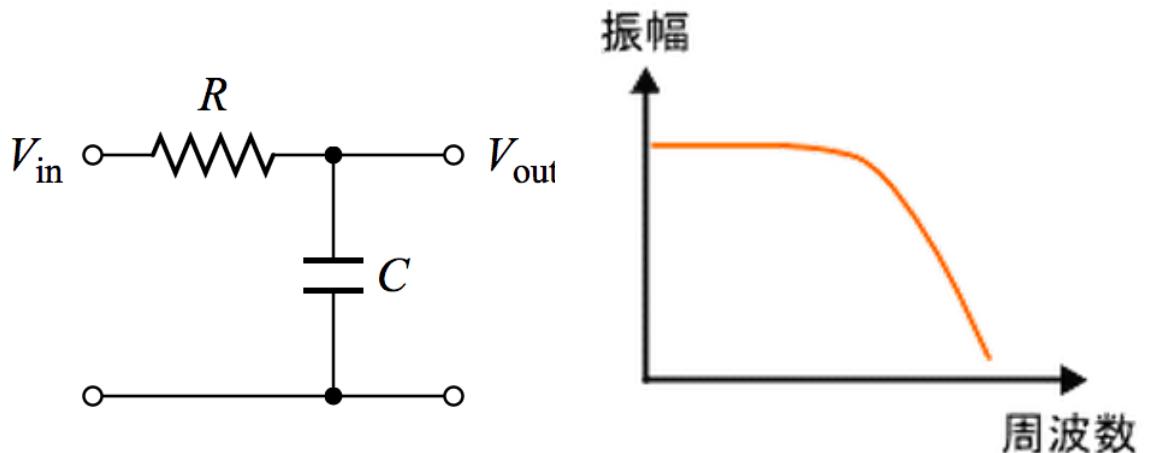


図 D.3: ローパスフィルター回路

図 D.4: ローパスフィルター回路の周波数応答

コンデンサと抵抗を図 D.3 のように接続する。コンデンサのインピーダンスは $1/i\omega C$ より

$$\tilde{V}_{out} = \frac{\tilde{Z}_R}{\tilde{Z}_C + \tilde{Z}_R} \tilde{V}_{in} \quad (D.4)$$

$$= \frac{1/i\omega C}{1/i\omega C + R} \tilde{V}_{in} \quad (D.5)$$

$$\left| \frac{\tilde{V}_{out}}{\tilde{V}_{in}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (D.6)$$

これは $\omega \rightarrow 0$ のとき 1 に近づき、 $\omega \rightarrow \infty$ のとき 0 に近づく。つまりこれは高周波は通りにくいが低周波は通りやすい回路、すなわちローパスフィルターとなる。ローパスフィルター回路は電源電圧の安定化などのために用いられる。

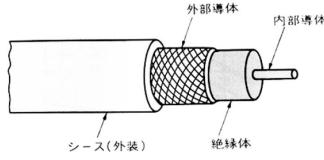


図 D.5: 同軸ケーブルの構造

D.2 同軸ケーブル

今まで配線の長さを気にしたことがないという人も多いだろうが、実は配線の長さが信号の波長に比べて長くなるとこれが無視出来なくなってくる。これは、高周波を扱うときに影響が大きくなってくることを意味する。信号にはゼロから無限大の様々な周波数成分が含まれ、その周波数に応じて伝播媒質の電気特性が変化するために一般には信号は伝搬の過程で歪みを生じてしまう。実験ではこれを防ぐために周波数特性のよいケーブル、同軸ケーブルを用いる。同軸ケーブルの構造は図 D.5 のようになる。

D.2.1 同軸ケーブルのインダクタンス

芯線（内部導体）の径を a 、外部導体の径を b とする。同軸ケーブルは誘電体（絶縁体）部分に磁場を生じる。半径 r のところに出来る磁場 B は、アンペールの法則より

$$2\pi r B_\varphi = \mu I \quad (\text{D.7})$$

$$\therefore B_\varphi = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (\text{D.8})$$

長さ l のケーブルの作る磁束は

$$\Phi = \int_a^b B_\varphi l dr = \int_a^b \frac{\mu Il}{2\pi r} dr \quad (\text{D.9})$$

$$= \frac{\mu Il}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (\text{D.10})$$

単位長さあたりで考えると、 $l=1$ として

$$\Phi = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (\text{D.11})$$

であり、

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt} \quad (D.12)$$

$$= \left(\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right) \frac{dI}{dt} \quad (D.13)$$

これより同軸ケーブル単位長さあたりのインダクタンスは

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (D.14)$$

となる。

裸芯線の場合は $b \rightarrow \infty$ となり log 的に発散することになるが、実際には周りに色々な物体があるので $\ln(b/a) \approx 1$ と粗く近似すると、

$$L \approx \frac{\mu}{2\pi} = 2 \times 10^{-7} [\text{H/m}] = 0.2 [\mu\text{H/m}] \quad (D.15)$$

となる。これは例えば $f = 1\text{MHz}$ 、 $f = 1\text{GHz}$ に対しては、1mあたり

$$|Z| = |i\omega L| \approx 1.3 [\Omega/\text{m}] \quad \text{for } 1\text{MHz} \quad (D.16)$$

$$\approx 1.3 [\text{k}\Omega/\text{m}] \quad \text{for } 1\text{GHz} \quad (D.17)$$

のインピーダンスを示し、影響を無視できなくなる。

D.2.2 同軸ケーブルの静電容量

単位長さあたり $Q[\text{C}]$ の電荷を帯電するとすれば、動径方向の電場は、ガウスの法則より

$$2\pi r l \epsilon E_r = Ql \quad (D.18)$$

$$\therefore E_r = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r} \quad (D.19)$$

これより

$$V = \int_a^b E_r dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \int_a^b \frac{1}{r} dr \quad (D.20)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a} \right) Q \quad (D.21)$$

であるから

$$V = \frac{Q}{C} \quad (D.22)$$

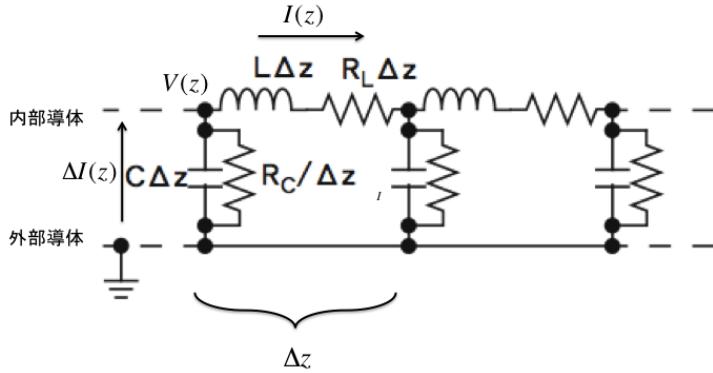


図 D.6: 同軸ケーブルの等価回路

より結局同軸ケーブル单位長さあたりの静電容量は

$$C = 2\pi\epsilon \frac{1}{\ln b/a} \quad (\text{D.23})$$

となる。

裸芯線の場合は先と同様に $\ln(b/a) \approx 1$ と粗く近似すると、

$$C \simeq 2\pi\epsilon = 56 \times 10^{-12} [\text{F/m}] = 56 [\text{pF/m}] \quad (\text{D.24})$$

となる。これは単に配線をしただけでも pF 程度の静電容量が出来てしまう（浮遊容量）ことを示している。

浮遊容量は配線の抵抗値と相まってローパスフィルタとして影響を与える。1mあたりの配線の抵抗値を $R \simeq 0.01\Omega$ だとすると、カットオフ周波数（周波数特性が変化する周波数） $f = \omega/2\pi = 1/2\pi RC$ は

$$f \simeq 280 [\text{GHz}] \quad (\text{D.25})$$

となり、抵抗値が大きくなるとより低い周波数でカットオフが起こるようになる。

D.2.3 同軸ケーブルの等価回路

同軸ケーブルの等価回路は図 D.6 のようになる。繰り返しの 1 単位が長さ Δz の同軸ケーブルの等価回路を表している。また、ケーブルの長さ方向 (z 方向) に流

れる電流を $I(z)$ 、外部導体から内部導体に流れる（コンデンサを流れる）電流を $\Delta I(z)$ とする。 R_C はコンデンサの洩れ抵抗 ($\gg 1/i\omega C$)、 R_L はコイルの直列抵抗 ($\ll i\omega C$) である。

Δz あたりのインピーダンスは、横方向については

$$Z_L = (R_L + i\omega L)\Delta z \quad (\text{D.26})$$

横方向については

$$Z_C = \frac{R_C/\Delta z \times 1/i\omega C\Delta z}{R_C/\Delta z + 1/i\omega C\Delta z} \quad (\text{D.27})$$

$$= \frac{1}{\Delta z} \frac{R_C}{i\omega R_C C + 1} \quad (\text{D.28})$$

となる。

$$\tilde{V}(t, z) = \tilde{V}(z)e^{i\omega t} \quad (\text{D.29})$$

$$\tilde{I}(t, z) = \tilde{I}(z)e^{i\omega t} \quad (\text{D.30})$$

とおくと

$$\Delta \tilde{V}(z) = -\tilde{I}(z)Z_L = -\tilde{I}(z)(R_L + i\omega L)\Delta z \quad (\text{D.31})$$

$$\therefore \frac{d\tilde{V}}{dz} = -\tilde{I}(z)(R_L + i\omega L) \quad (\text{D.32})$$

$$\Delta \tilde{I}(z) = -\frac{\tilde{V}(z)}{Z_C} = -(i\omega C + \frac{1}{R_C})\tilde{V}(z)\Delta z \quad (\text{D.33})$$

$$\therefore \frac{d\tilde{I}}{dz} = -(i\omega C + \frac{1}{R_C})\tilde{V}(z) \quad (\text{D.34})$$

理想的なケーブルでは $R_L \rightarrow 0$ 、 $R_C \rightarrow \infty$ より

$$\frac{d\tilde{V}}{dz} = -i\omega L\tilde{I}(z) \quad (\text{D.35})$$

$$\frac{d\tilde{I}}{dz} = -i\omega C\tilde{V}(z) \quad (\text{D.36})$$

これより

$$\frac{d^2\tilde{V}}{dz^2} = -\omega^2 LC \tilde{V}(z) \quad (D.37)$$

$$\frac{d^2\tilde{I}}{dz^2} = -\omega^2 LC \tilde{I}(z) \quad (D.38)$$

ゆえに

$$\tilde{V}(t, z) = \tilde{V}_0 e^{i\omega(t \pm \sqrt{LC}z)} \quad (D.39)$$

$$\tilde{I}(t, z) = \tilde{I}_0 e^{i\omega(t \pm \sqrt{LC}z)} \quad (D.40)$$

土の-の方だと+ z 方向へ、+の方だと- z 方向への進行波となる。

その速度 v は $v = 1/\sqrt{LC}$ となりこれは ω によらないので、信号の各周波数成分は周波数によらず一定の速度で進行することになる。

D.2.4 同軸ケーブルの信号伝達速度

$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ 、 $C = 2\pi\epsilon \frac{1}{\ln b/a}$ を速度の式に代入すると、

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (D.41)$$

一般的にケーブル内の誘電体にはポリスチレン・ポリエチレン・テフロンなどが用いられる。これらの誘電率は $\epsilon = 2\epsilon_0 \sim 4\epsilon_0$ 程度である。透磁率は物質によってほとんど変わらない($\mu \simeq \mu_0$)ので、

$$v \simeq 0.67 \times c \quad (D.42)$$

となる。ここで

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 [\text{m/s}] = 0.3 [\text{m/ns}]$$

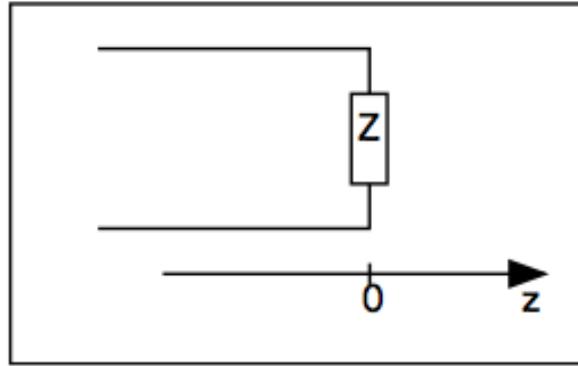
である。

これより、信号はケーブル中を大体 1m を 5ns で伝わることが分かる。

D.2.5 同軸ケーブルのインピーダンス

同軸ケーブルの特性インピーダンスは

$$Z_0 = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} = \frac{\tilde{V}_0}{\tilde{I}_0} \quad (D.43)$$

図 D.7: 同軸ケーブル終端にインピーダンス Z をとりつける

式 (D.35) に式 (D.39)、式 (D.40) を代入し計算すると

$$\frac{\tilde{V}_0}{\tilde{I}_0} = \pm \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{D.44})$$

であるから結局

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{D.45})$$

となる。

$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ 、 $C = 2\pi\epsilon \frac{1}{\ln b/a}$ を代入すると、

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a} \quad (\text{D.46})$$

実験に用いる同軸ケーブルは全て特性インピーダンスが 50Ω になるように作られている。

D.3 信号の反射

インピーダンスが不連続な箇所では信号が一部反射するという現象が起こる。

図 D.7 のように、 Z のインピーダンスを同軸ケーブルの終端に取り付けた場合を考える。式 (D.39)、式 (D.40) より、 $z = 0$ において (以下 \tilde{V} 、 \tilde{I} 等のチルダは省略する)

$$Z = \frac{V}{I} \quad (\text{D.47})$$

$$\therefore Z = \frac{V_+ + V_-}{I_+ + I_-} \quad (\text{D.48})$$

$$\therefore Z = \frac{V_+ + V_-}{I_+ + I_-} = Z_0 \frac{V_+ + V_-}{V_+ - V_-} \quad (\text{D.49})$$

$+z$ 方向へ進んでいた複素振幅 V_+ の波が $z = 0$ で反射し、 $-z$ 方向へ進む複素振幅 V_- の波になったと考える。 V_+ を使って V_- を表すと

$$V_- = V_+ \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \quad (\text{D.50})$$

終端での複素振幅 V は V_+ と V_- の合計なので

$$V = V_+ + V_- = V_+ \left(1 + \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}\right) = V_+ \frac{2}{1 + Z_0/Z} \quad (\text{D.51})$$

となる。

終端に色々な素子を付けてみることを考える。まず、特性インピーダンスと同じインピーダンスを持つ抵抗、すなわち

$$Z = R = Z_0 \quad (\text{D.52})$$

を付けた場合、式 (D.51) より

$$V = V_+ \quad (\text{D.53})$$

となる。一般の抵抗 R では

$$V = V_+ \frac{2}{1 + Z_0/R} \quad (\text{D.54})$$

となる。

ショートした場合は $Z = 0$ より

$$V = 0 \quad (\text{D.55})$$

となり、これは反射波が $-V_+$ であると考えられる。

オープンにすると $Z = \infty$ なので

$$V = 2V_+ \quad (\text{D.56})$$

となり、これは反射波が V_+ であると考えられる。

コンデンサを付けると $Z = 1/i\omega C$ なので

$$V = V_+ \frac{2}{1 + i\omega Z_0 C} \quad (\text{D.57})$$

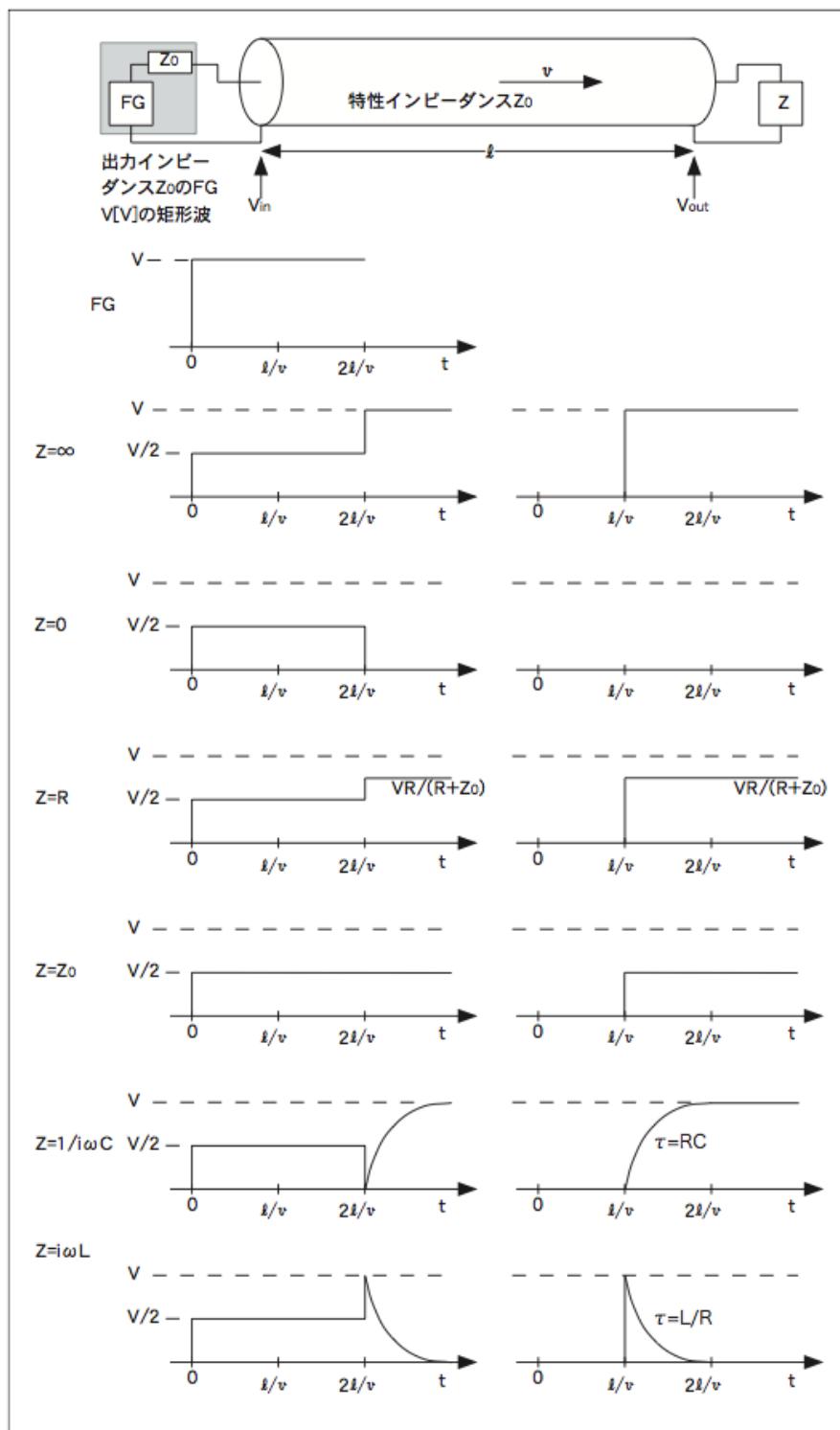
これは先の RC 回路の式に相当し、よって終端での波形は RC 回路のものと同じになると考えればよい。

コイルを付けたときは $Z = i\omega L$ だから

$$V = V_+ \frac{2}{1 + i(Z_0/\omega L)} \quad (\text{D.58})$$

となり、(今回テキストには載せなかつたが) LR 回路の式に相当し、よって波形は LR 回路のものと同じになると考えられる。

有限な長さの同軸ケーブルの終端に Z のインピーダンスを取り付け、反対側からファンクションジェネレーターで矩形波を入れる場合を考える。同軸ケーブル中の信号は有限の速度で伝わり、その時間差も考慮する。上記の入射波と反射波の関係から、それぞれの終端素子の場合に観測される波形は図 D.8 のようになる。これから分かる通り、正しく高速の信号を伝えるには、同軸ケーブルに信号をいれる際に出力インピーダンスを 50Ω として、電流と電圧の関係を同軸ケーブルの特性インピーダンスに合わせておく、さらに終端には 50Ω の抵抗を付け、同軸ケーブルからでた直後にその信号を吸収する必要があることがわかる。

図 D.8: 終端の Z に対する信号の変化

付 錄E コマンドラインでの操作

Windows 上でアプリケーションを操作することを考えてみましょう。例えば、インターネットブラウザ（IE や Firefox, Chrome など）を開くためには、それぞれの実行ファイル（あるいはそのアプリケーションのショートカット）を選択してアプリケーションを起動します。このとき、ユーザーはデスクトップやタスクバーにあるインターネットブラウザのアイコンを探し、それをクリックまたはダブルクリックすることでしょう。このように、グラフィカルな表現を用いて直観的な操作を提供するユーザーインターフェースを GUI (Graphical User Interface) と呼びます。一般的な用途で用いられているオペレーティングシステムは GUI を備えているものがほとんどです（図 E.1）。

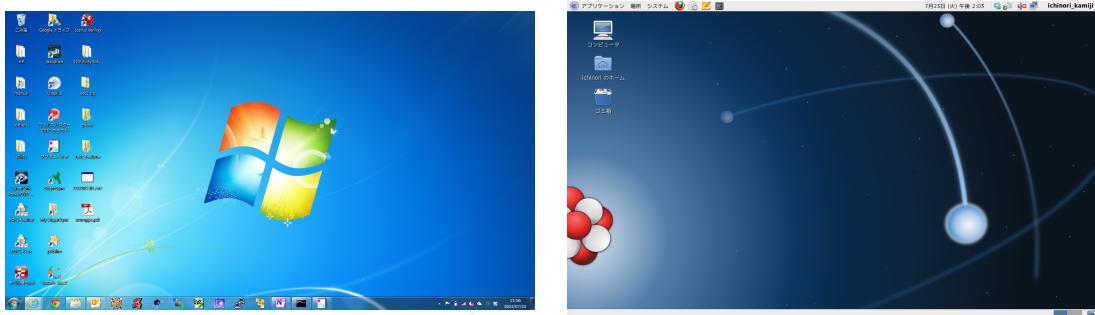


図 E.1: GUI の例。左 : Windows, 右 : Scientific Linux

一方、そういったグラフィカルなインターフェースを提供する代わりに、文字だけを用いてコンピュータのさまざまな機能にアクセスするするインターフェースを CUI (Character User Interface) と呼びます。Windows の場合はコマンドプロンプトが、Linux の場合は例えば GNOME 端末が CUI を採用しています（図 E.2）。

ここでは、ディレクトリの作成とファイルコピーを中心に、Windows と Linux の CUI の基本操作について説明します。

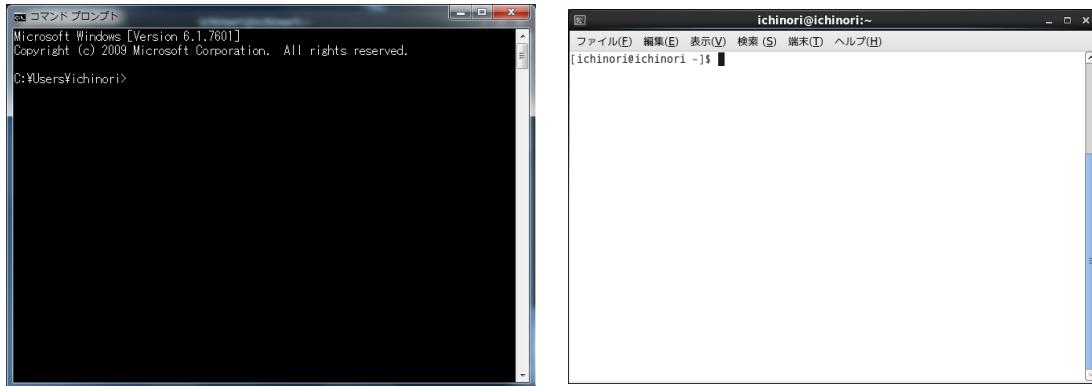


図 E.2: CUI の例. 左: コマンドプロンプト(Windows), 右: GNOME 端末(Scientific Linux)

E.1 Windows の場合

E.1.1 ディレクトリの内容一覧を表示

1. コマンドプロンプトを開くと, デフォルトの設定では C:\Users\Username (Username はコンピュータのユーザー自身の名前) からスタートします. 現在位置は点滅する入力カーソルのある行の先頭にある”>”の前に記されています (今の場合, C:\Users\ichinori です).

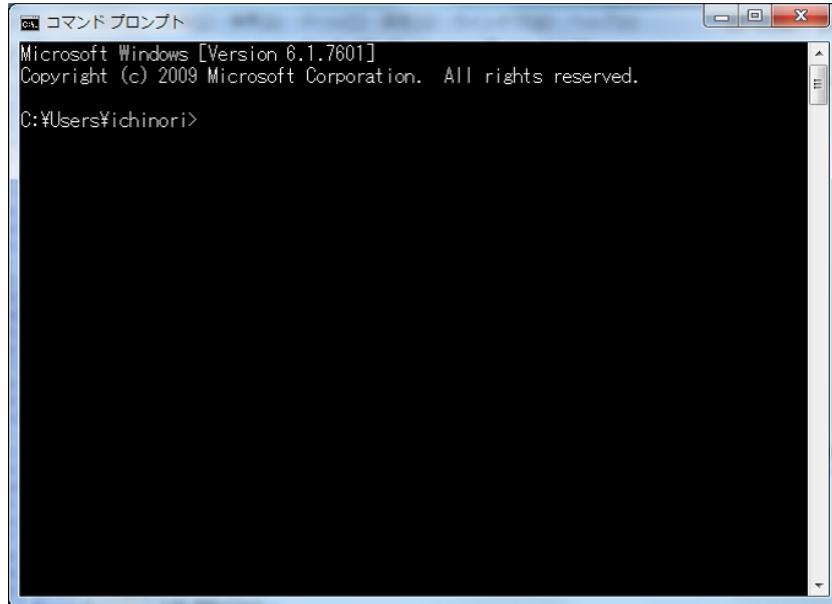


図 E.3: コマンドプロンプトを開いたところ

2. まず、現在のディレクトリにあるファイルやディレクトリの一覧を表示してみましょう。コマンドプロンプトに

```
dir /d
```

と入力します。すると、図 E.4 のように、現在のディレクトリにあるもののリストが表示されます。

```
C:\> cmd コマンドプロンプト
Microsoft Windows [Version 6.1.7601]
Copyright (c) 2009 Microsoft Corporation. All rights reserved.

C:\>Users\ichinori>dir /d
ドライブ C のボリューム ラベルがありません。
ボリューム シリアル番号は A6AA-2EEB です

C:\>Users\ichinori のディレクトリ

[.]           .root_hist      [Favorites]      [Saved Games]
[..]           [Cloud Drive]   gsview32.ini    [Searches]
[.idlerc]      [Contacts]     index.html     [SkyDrive]
[.jaxodraw]    [Desktop]      [Links]        [Videos]
.octave_hist   [Documents]   [Music]        [Virtual Machines]
[.pcb]         [Downloads]   [Pictures]     [Roaming]
[.qucs]        [Dropbox]     [Roaming]

4 個のファイル          32,463 バイト
22 個のディレクトリ    329,294,594,048 バイトの空き領域

C:\>Users\ichinori>
```

図 E.4: ディレクトリの中身を見る : dir コマンド

3. オプション/d を付けずに dir とだけ入力すると、より詳細な情報が表示されます（図 E.5）。

E.1.2 ディレクトリの移動

1. 別のディレクトリに移動するときは cd コマンドを使います。例えば、現在のディレクトリから Documents ディレクトリに移動するには、

```
cd Documents
```

と入力します。移動に成功したら、コマンドの入力カーソルの一番左端の表示が、C:\\$Users\\$Username から C:\\$Users\\$Username\\$Documents に変化しているはずです（図 E.6）。

```
2013/05/28 17:42 <DIR> .pcb
2013/06/20 12:46 <DIR> .aucs
2013/07/21 01:03 <DIR> 11,292 .root_hist
2013/06/06 11:30 <DIR> Cloud Drive
2013/05/16 13:03 <DIR> Contacts
2013/07/24 10:36 <DIR> Desktop
2013/07/15 04:10 <DIR> Documents
2013/07/24 14:11 <DIR> Downloads
2013/07/23 00:55 <DIR> Dropbox
2013/07/24 05:42 <DIR> Favorites
2013/07/23 21:40 11,578 gview32.ini
2013/05/28 17:32 9,511 index.html
2013/06/10 08:57 <DIR> Links
2013/05/16 13:03 <DIR> Music
2013/05/16 13:03 <DIR> Pictures
2012/08/08 22:31 <DIR> Roaming
2013/05/16 13:03 <DIR> Saved Games
2013/05/26 15:39 <DIR> Searches
2013/07/23 00:55 <DIR> SkyDrive
2013/05/16 13:03 <DIR> Videos
2013/06/19 07:01 <DIR> Virtual Machines
4 個のファイル 32,463 バイト
22 個のディレクトリ 329,268,375,552 バイトの空き領域
C:\$Users\$ichinori>
```

図 E.5: dir コマンド（オプションなし）．項目が多すぎて上が切れてしまっている。

```
C:\$Users\$ichinori>cd Documents
C:\$Users\$ichinori\Documents>
```

図 E.6: cd コマンドの使用

2. 一つ上のディレクトリに戻るには,

```
cd ..
```

と入力します。

E.1.3 ディレクトリの作成

1. 新しいディレクトリを作成するには、`mkdir` コマンドを使います：

```
mkdir <directory name>
```

`<directory name>`には作成したいディレクトリの名前を入力します。

2. C:\Users\Username\Documents に新しいディレクトリ `newdir` を作るには,

```
mkdir newdir
```

と入力します（図 E.7）。

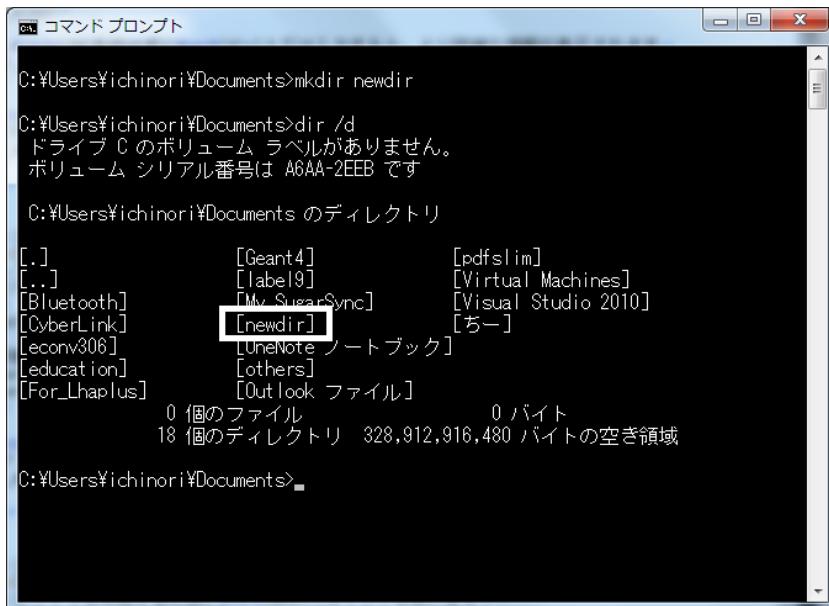


図 E.7: `mkdir` コマンド。新しく作ったディレクトリが作成されている。

E.2 Linuxの場合

E.2.1 ディレクトリの内容一覧を表示

- GNOME 端末を開くと、デフォルトでは/home/Username（Usernameはコンピュータのユーザー自身の名前）からスタートします（図E.8）。Windowsの時と異なり、GNOME端末の入力部左端には~と表示されています。これは、/home/Usernameと全く同じものを指す記号です。



図 E.8: GNOME 端末を開いたところ

- まず、現在のディレクトリにあるファイルやディレクトリの一覧を表示してみましょう。GNOME端末に

```
ls
```

と入力します。すると、図E.9のように、現在のディレクトリにあるもののリストが表示されます。

- オプション-lを付けると、より詳細な情報が表示されます。また、オプション-aを付けると、隠し属性のファイルまで含めたすべてのファイルが表示されます。両方のオプションを同時に指定するには-laとします（図E.10）。



```
ichinori@ichinori:~$ ls
Desktop Downloads Music Public Templates
Documents Dropbox Pictures Src Videos
[ichinori@ichinori ~]$
```

図 E.9: ディレクトリの中身を見る :ls コマンド



```
ichinori@ichinori:~$ ls -la
drwxr-xr-x. 2 ichinori ichinori 4096 5月 24 05:31 2013 .nautilus
drwx-----. 2 ichinori ichinori 4096 5月 24 05:30 2013 .pulse
-rw-----. 1 ichinori ichinori 256 5月 24 05:30 2013 .pulse-cookie
-rw-----. 1 ichinori ichinori 41536 7月 23 14:02 2013 .recently-used.xbel
drwxrwxr-x. 3 ichinori ichinori 4096 5月 24 05:31 2013 .redhat
-rw-rw-r--. 1 ichinori ichinori 1318 7月 21 20:21 2013 .root_hist
-rw-r--r--. 1 ichinori ichinori 1584 7月 16 17:14 2013 .rootlogon.c
drwx-----. 2 ichinori ichinori 4096 7月 16 17:10 2013 .ssh
drwxrwxr-x. 3 ichinori ichinori 4096 7月 12 19:32 2013 .subversion
drwxrwxr-x. 2 ichinori ichinori 4096 5月 31 18:39 2013 .themes
drwx-----. 4 ichinori ichinori 4096 5月 31 18:39 2013 .thumbnails
-rw-----. 1 ichinori ichinori 1676 7月 24 23:38 2013 .xsession-errors
-rw-----. 1 ichinori ichinori 4109 7月 24 22:02 2013 .xsession-errors.old
drwxr-xr-x. 2 ichinori ichinori 4096 5月 24 05:35 2013 Desktop
drwxr-xr-x. 8 ichinori ichinori 4096 7月 21 03:04 2013 Documents
drwxr-xr-x. 5 ichinori ichinori 4096 7月 22 02:34 2013 Downloads
drwx-----. 8 ichinori ichinori 4096 7月 24 22:59 2013 Dropbox
drwxr-xr-x. 2 ichinori ichinori 4096 5月 24 05:35 2013 Music
drwxr-xr-x. 2 ichinori ichinori 4096 5月 24 05:35 2013 Pictures
drwxr-xr-x. 2 ichinori ichinori 4096 5月 24 05:35 2013 Public
drwxrwxr-x. 12 ichinori ichinori 4096 7月 22 01:40 2013 Src
drwxr-xr-x. 2 ichinori ichinori 4096 5月 24 05:35 2013 Templates
drwxr-xr-x. 2 ichinori ichinori 4096 5月 24 05:35 2013 Videos
[ichinori@ichinori ~]$
```

図 E.10: ls コマンド (オプション la). 項目が多すぎて上が切れてしまっている。

E.2.2 ディレクトリの移動

- 別のディレクトリに移動するときは cd コマンドを使います。例えば、現在のディレクトリから Documents ディレクトリに移動するには、

```
cd Documents
```

と入力します。移動に成功したら、コマンドの入力カーソルの一番左端の表示のが、 ~ から Documents に変化しているはずです（図 E.11）。

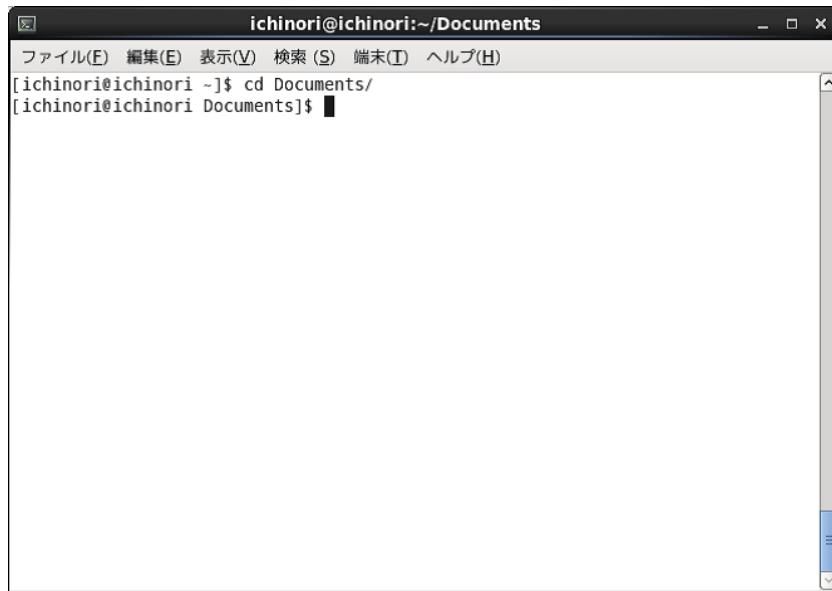


図 E.11: cd コマンドの使用

- 一つ上のディレクトリに戻るには、

```
cd ..
```

と入力します。

E.2.3 ディレクトリの作成

- 新しいディレクトリを作成するには、 mkdir コマンドを使います：

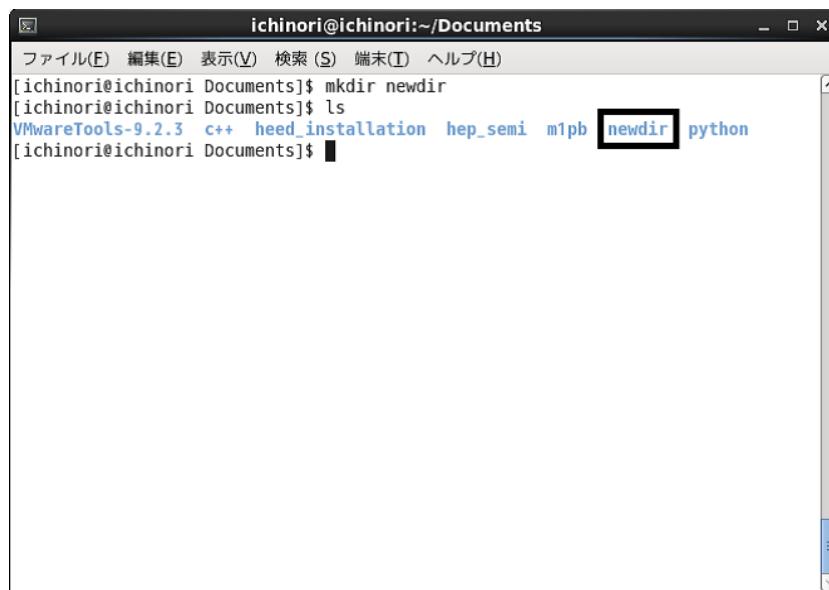
```
mkdir <directory name>
```

<directory name>には作成したいディレクトリの名前を入力します。

2. /home/Username/Documents に新しいディレクトリ newdir を作るには,

```
mkdir newdir
```

と入力します (図 E.12)。



A screenshot of a terminal window titled "ichinori@ichinori:~/Documents". The window has a standard Linux-style title bar with icons for minimize, maximize, and close. The menu bar includes "ファイル(F)", "編集(E)", "表示(V)", "検索(S)", "端末(I)", and "ヘルプ(H)". The main pane shows a command-line session:

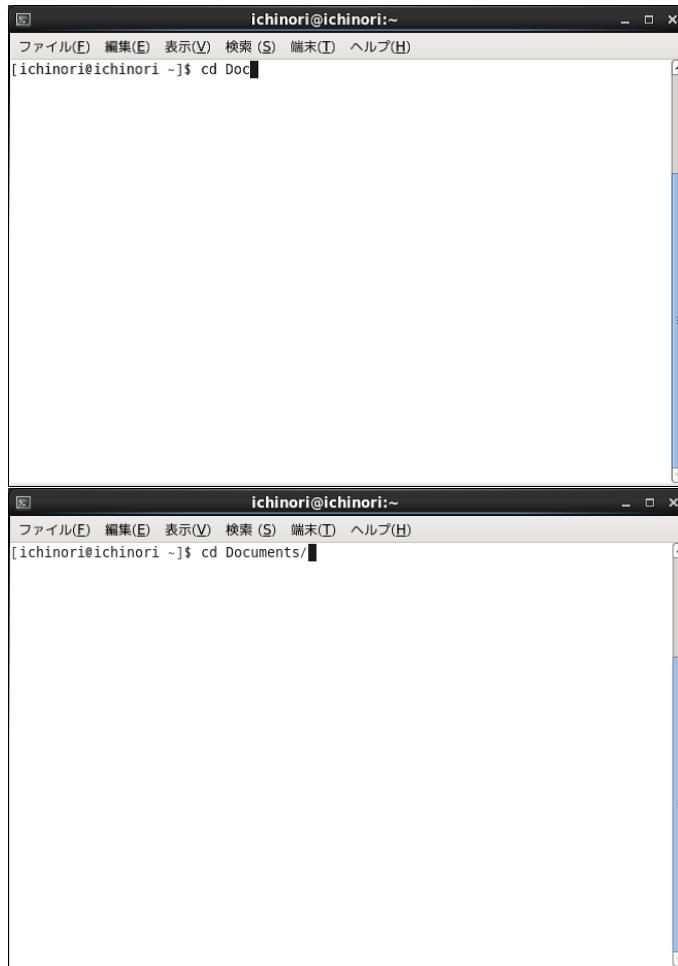
```
ichinori@ichinori Documents]$ mkdir newdir
[ichinori@ichinori Documents]$ ls
VMwareTools-9.2.3  c++  heed_installation  hep_semi  m1pb  newdir  python
[ichinori@ichinori Documents]$
```

The word "newdir" is highlighted with a red rectangle, indicating it is the newly created directory.

図 E.12: mkdir コマンド。新しく作ったディレクトリが作成されている。

CUI の便利機能：tab 補完

例えば、`cd` で他のディレクトリに移動するとき、そのディレクトリの名前が長いと入力するのが一苦労です。そこで、コマンドプロンプトや GNOME 端末には「tab 補完」という機能が備えられています。例として、`~`から `Documents` に移動することを考えます。このとき、`cd Doc` まで入力して（上）キーボードの `tab` キーを押すと、残りの `uments` が自動で補完されます（下）。これが「tab 補完」です。CUI の入力では「tab 補完」を有効に活用してください（`tab` 補完ができるかどうかわからないところであってもとりあえず押してみるようしましょう）。



あとがき

レジュメどうでしたか？長かったです？僕もそう思います。ただ、闇雲に長くしたのではなく、皆さんに学んでほしい、ぜひ身につけて貰いたいと思った内容を盛り込んで行ったら自然とこの長さになりました。

2章のIntroductionは干渉の理論でAdvancedな内容でしたが、3章から6章、Appendixには今回の実験を行うために必要な知識がまとめてあります。MPPC、Electronics、Statistics、ROOT、LED、など多岐にわたる知識がコンパクトにまとまっていて、レジュメだからこそできる特色は出せたのではないかと思っています。もちろん、このレジュメで各分野の内容が尽くされているわけではないので、本格的に学びたいとき、より専門的な知識が必要となったときは各章末の参考文献を当たってみるのも良いでしょう。

サマーチャレンジ期間中にすべての内容を理解することは分量的にも、内容的にも難しかったと思います。しかし、これらの知識を十二分に吸収し、これから実験をする際にサマーチャレンジの経験やこのレジュメを生かしてもらえるとTA冥利に尽きます。

TA一同

スタッフ・TA

スタッフ

石野 雅也

中家 剛

市川 温子

南條 創

河野 能知

TA

齋藤 汐里

田中 駿祐

野口 陽平

Special Thanks

中西 芳枝

赤塚 駿一

芦田 洋輔

平本 綾美

参考文献

- [1] http://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/theses/master/yokoyama_mt.pdf
- [2] <http://www.optigate.jp/basic>
- [3] Malcolm S.Longair, High Energy Astrophysics 2nd Ed.Cambridge University Press
- [4] ledHandbook_01_Kiso.pdf
- [5] http://www.kodenshi.co.jp/seminar/vol_03.html
- [6] H. イバッハ、H. リュート、固体物理学、シュプリンガージャパン