理工

令和　年　月　日第　時限施行

微分方程式の基礎 I　まとめの 問 題

担当　林　誠

精密機械工学科

注意事項：途中式をしっかりと書くこと

学科　番号　　　　名前

問題 1． $z'' + az' + bz = 0$ の一般解について，a と b の値をそれぞれ求めよ．(5 点 × 3)

(1) $z = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x}$ が一般解であるならば，

$a =$ -2，$b =$ -8 である．

(2) $z = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}$ が一般解であるならば，

$a =$ 6，$b =$ 9 である．

(3) $z = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$ が一般解であるならば，

$a =$ 6，$b =$ 13 である．

問題 2． 初期値問題

$$y'' + 4y = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$$

の解を求めなさい．(20 点)

g.S.　特・方 $\lambda^2 + 4 = 0$　$\therefore \lambda = \pm 2i$

$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -C_1 = 2$　$\therefore C_1 = -2$

$y' = 4\sin 2x + 2C_2 \cos 2x$

$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2C_2 = 6$　$\therefore C_2 = -3$

求める (IVP) の sol. は

$y = -2\cos 2x - 3\sin 2x$ //

問題 3． $u(x) = \dfrac{1}{x^2}$ を解にもつ次の微分方程式の一般解を求めよ．(20 点)

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 + \frac{1}{x^3} = 0$$

Google Classroom を見よ．

ウラ

問題4． $\cancel{9y''+6y'+y}$ $y''-6y'+25y$ $= 4\cos 5x$ の一般解を未定係数法により求めよ.(20点)

$\underline{\text{Step1}}$ ($Z''-6Z'+25Z=0$ の g.S.)

特・方 $\lambda^2-6\lambda+25=0$

$\therefore \lambda = 3\pm 4i$

g.S. は

$$Z=e^{3x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x)$$

$\underline{\text{Step2}}$ (1つのsol.)

$\eta(x)=A\cos 5x+B\sin 5x$ とおける

$\eta''=-25\eta$ より

$\eta''-6\eta'+25\eta$

$\cancel{=-6\eta'=30A\sin 5x-30B\cos 5x}$

$\equiv 4\cos 5x$

$\therefore A=0,\ B=-\frac{4}{30}=-\frac{2}{15}$

1つのsol. は $\eta=-\frac{2}{15}\sin 5x$

以上より、求めるg.S.は

$$y=Z+\eta$$
$$=e^{3x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x)-\frac{2}{15}\sin 5x$$

//

問題 5. $y''-4y'+4y=\dfrac{xe^{2x}}{x^2+1}$ の一般解を定数変化法により求めよ.(25点)

$\underline{\text{Step1}}$ ($Z''-4Z'+4Z=0$ の g.S.)

特・方 $\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0$

基本解 $y_1=e^{2x},\ y_2=xe^{2x}$

g.S. $Z=(C_1+C_2x)e^{2x}$

$\underline{\text{Step2}}$ ($W(y_1,y_2)$)

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & (1+2x)e^{2x}\end{vmatrix}=e^{4x}$$

$\underline{\text{Step3}}$ (1つのsol.)

$$\eta(x)=C_1(x)e^{2x}+C_2(x)xe^{2x}$$

とおくと、

$$C_1(x)=\int^x \frac{-te^{2t}\times\frac{te^{2t}}{t^2+1}}{e^{4t}}dt$$
$$=-\int^x\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$
$$=-x+\tan^{-1}x$$

$$C_2(x)=\int^x \frac{e^{2t}\times\frac{te^{2t}}{1+t^2}}{e^{4t}}dt$$
$$=\int^x\frac{(1+t^2)'\times\frac{1}{2}}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\log(x^2+1)$$

$$\therefore \eta(x)=(-x+\tan^{-1}x)e^{2x}+xe^{2x}\log\sqrt{x^2+1}$$

以上より、求めるg.S.は

$$y=(C_1+C_2x-x+\tan^{-1}x+x\log\sqrt{x^2+1})e^{2x}$$
$$=(C_1+C_3x+\tan^{-1}x+x\log\sqrt{x^2+1})e^{2x}$$

//

$(C_3=C_2-1)$