

# 地震学入門

前田 拓人

Version: 2023-03-01



# はじめに

この文書は、地震学を学ぶ大学学部生ならびに研究をこれから始めようという大学院生に向けた地震学の入門レベルのテキストです。地震学は地球物理学あるいは応用物理学としての側面が強く、地震学を解説した教科書の多くは、基礎的な物理学や物理数学を理解していることを前提として作られているようです。しかし、現在の日本の大学では地球科学と地球物理学や工学などの分野融合が進み、学生が同じ期間で学ぶ内容は、以前よりもはるかに広範になりました。その結果として、十分な数理的トレーニングを受けていない状態で地震学を学ぶことになる人が多くいると思われます。

本文書は地震学分野の一部の内容について、大学初年次程度の数学・物理の知識だけで十分に読みこなせるように書かれています。本文書が読者に前提として要求しているのは、1変数・多変数の微分積分と基礎的な線形代数、質点の力学だけです。それ以外のしばしば常識として省略されがちな基礎的な数学や、地震学の基礎をなす弾性体力学のうち、本書で書かれている地震学の内容を理解するのに必要なすべては、この中に含まれています。逆に、様々な物理学・応用物理学の分野で用いられる物理数学の技法を、直感的にイメージしやすい地震学という題材を通じて理解することにも役に立つかもしれません、と期待しています。

この文書は弘前大学理工学部地球環境防災学科における講義ノートとして作られたものです。講義以外の目的に使うことを妨げるものではありませんが、特定の講義のための文言が含まれていたり、特定の環境を前提とした説明が含まれている場合があります。

本文中のいくつかの図は、研究開発法人防災科学技術研究所の地震観測網 MOWLAS によって取得され公開されているデータを元に作成したものです。また、作図の多くに Generic Mapping Tools (GMT; Wessel et al., 2013) を利用しました。記して謝意を表します。

## 著作権について

本文書の著作権は前田拓人に帰属します。本文書の再配布は禁止します。

## 改稿履歴

- 2023-03 公開版初版



# 目次

<b>はじめに</b>	i
<b>第1章 地震学のための弾性体力学入門</b>	1
1.1 ひずみ . . . . .	1
1.1.1 変位と変形 . . . . .	1
1.1.2 ひずみと回転 . . . . .	9
1.1.3 ひずみテンソルの直感的意味 . . . . .	13
1.1.4 ひずみテンソルによる変形場 . . . . .	17
1.2 応力 . . . . .	18
1.2.1 応力・トラクションとその定義 . . . . .	18
1.2.2 応力テンソルの特徴 . . . . .	23
1.3 主応力・主ひずみと座標回転 . . . . .	26
1.3.1 ひずみ・応力の固有値問題 . . . . .	26
1.3.2 応力テンソルの固有値 . . . . .	29
1.3.3 固有ベクトルの特徴 . . . . .	32
1.3.4 ベクトルとテンソルの回転 . . . . .	35
1.3.5 主ひずみ . . . . .	37
1.4 モールの応力円 . . . . .	39
1.4.1 2次元面内におけるトラクションとその回転 . . . . .	40
1.5 弹性体の運動方程式 . . . . .	43
1.5.1 微小立体の運動方程式 . . . . .	43
1.5.2 運動方程式 . . . . .	45
1.5.3 平衡方程式 . . . . .	46
1.6 構成関係式 . . . . .	46
1.6.1 構成関係式の導入 . . . . .	46
1.6.2 弹性体を表現する様々なパラメタとその関係 . . . . .	50
1.7 まとめ . . . . .	53
<b>第2章 地震計測論入門</b>	55
2.1 機械式地震計 . . . . .	55
2.1.1 地震計としての振り子 . . . . .	55

2.1.2	ダンピング（減衰器） . . . . .	57
2.1.3	減衰・強制振動系としての地震計 . . . . .	58
2.2	フーリエ変換の基礎 . . . . .	61
2.2.1	フーリエ級数 . . . . .	61
2.2.2	複素フーリエ級数 . . . . .	63
2.2.3	フーリエ変換 . . . . .	64
2.3	地震計の周波数応答 . . . . .	67
2.3.1	周波数領域の微分方程式と応答関数 . . . . .	67
2.3.2	地震計応答関数の特徴 . . . . .	69
2.4	地震計記録の収録 . . . . .	73
2.4.1	さまざまな地震計とその出力 . . . . .	73
2.4.2	AD 変換と地震収録システム . . . . .	75
<b>第 3 章</b>	<b>地震波動論入門</b>	<b>79</b>
3.1	波動方程式 . . . . .	79
3.1.1	連成振動問題 . . . . .	79
3.1.2	1 次元波動方程式の解とその特徴 . . . . .	84
3.1.3	波動現象を記述する変数とその関係 . . . . .	86
3.1.4	1 次元波動方程式の一般解（ダランベールの解） . . . . .	88
3.2	弾性体力学に基づく地震波動論 . . . . .	91
3.2.1	弾性体の運動方程式の変位による表現 . . . . .	97
3.2.2	地震波の波動方程式(1) ポテンシャルによる表現 . . . . .	98
3.2.3	P 波・S 波の性質 . . . . .	102
3.2.4	地震波の波動方程式(2) 変位の空間微分による表現 . . . . .	103
3.2.5	3 次元平面波・球面波と幾何減衰 . . . . .	104
3.2.6	内部減衰（非弾性減衰） . . . . .	110
3.3	地震波の反射と屈折 . . . . .	112
3.3.1	面内伝播問題と P-SV と SH 波への分解 . . . . .	112
3.3.2	P 波, SV 波, SH 波の特徴 . . . . .	114
3.3.3	地震波の反射 . . . . .	116
3.3.4	境界条件 . . . . .	117
3.3.5	SH 波の屈折 . . . . .	119
3.4	表面波 . . . . .	128
3.4.1	ラブ波とその性質 . . . . .	128
3.4.2	特性方程式の解と分散性波動 . . . . .	132
3.4.3	分散性波動と位相速度・群速度 . . . . .	135
3.4.4	P-SV 変換とレイリー波 . . . . .	137
3.4.5	表面波の観測記録例 . . . . .	137
<b>第 4 章</b>	<b>震源物理学入門</b>	<b>139</b>

---

4.1	断層とそこにかかる力 . . . . .	139
4.1.1	弾性反発説 . . . . .	139
4.1.2	剩余応力（ストレス・グラット）と等価体積力 .	140
4.1.3	シングルカップルとダブルカップル . . . . .	142
4.1.4	断層にかかる応力と断層運動の方向 . . . . .	144
4.2	力源により作られる地震波 . . . . .	147
4.2.1	地震波の初動極性 . . . . .	147
4.2.2	グリーン関数 . . . . .	148
4.2.3	ダブルカップル震源による地震波 . . . . .	152
4.2.4	モーメントテンソルと震源時間関数 . . . . .	157
4.3	断層面の幾何学的表現 . . . . .	159
4.3.1	断層形状と運動を規定する3つの角度 . . . . .	159
4.3.2	震源メカニズム解の決め方とその表現方法 . . . . .	162
4.4	震源スペクトルと有限断層 . . . . .	165
4.4.1	震源時間関数のスペクトル . . . . .	165
4.4.2	有限断層の表現 . . . . .	168
4.4.3	ハスケルモデルの震源スペクトル . . . . .	170
4.4.4	ディレクティビティ . . . . .	171
4.5	断層パラメタとスケーリング則 . . . . .	172
4.6	畳み込みと震源・地球内部構造・地震観測 . . . . .	175
Appendix A	ギリシャ文字とその用法	181



## 第1章

# 地震学のための弾性体力学入門

**弾性体力学**は、有限の大きさを持つ固体とその変形・運動を記述する分野の一部です。力を加えると変形し、その力を取り除くと元の状態に戻るような性質（**弾性**）を持つ物質の運動を扱います。似たような概念に、有限の大きさを持つものに**剛体**というものがありますが、剛体は決して変形しません。そのため、地震波のように地球内部を揺れが伝わっていくこともありません。地震学を理解するためには、変形する固体の力学である弾性体力学を学ぶことが必要なのです。

本章では、地震学を学ぶために必要な弾性体力学のごく初歩の部分を扱います。関連する概念や用語を正しく把握し、基礎方程式である弾性体の運動方程式の意味が理解できるところまでが目標です。

### 1.1 ひずみ

弾性体では、物体全体が移動するだけでなく、変形することによって物体中の任意の2点間の相対位置が変化します。このような、弾性体内の任意の点の移動のことを、弾性体の**変位**といいます。これから、伸び・縮み・ねじれといった弾性体の**変形**を扱いたいのですが、弾性体の変位のなかには、弾性体全体の**平行移動**や**回転**が含まれてしまっています。そのため、弾性体の変形を理解するためには、変位のなかから、本当に変形に寄与している成分だけを抽出することが必要です。

本節では、まず一般的な変位からどのように物体の変形を表すか（ひずみの定義）について学んだのち、ひずみを表す**ひずみテンソル**という量やその意味について学びます。

#### 1.1.1 変位と変形

弾性体内の任意の点  $x$  が、変形などによって動いた量を**変位**と呼び、 $u(x)$  で表すことになります。各点における変位は向き（動いた方向）と大きさ（動いた大きさ）を持っているので、これはベクトルです。しかも、変位は弾性体内の位置  $x$ （これも位置を表すベクトルです）によって異なることがあるため、位置  $x$  の関数でもあります。3次元空間では位置ベクトル  $x$  は3つの要素を持ちますから、変

位ベクトルは3つの変数を持つ多変数関数でもあるのです。

### 数学・物理ノート 1.1: 場

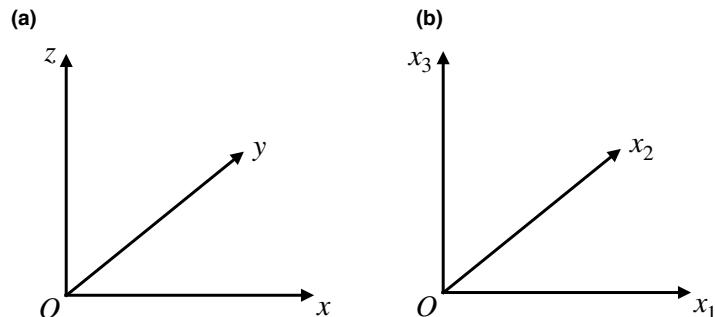
位置によって値が定まる物理量のことを、『場』ということがあります。いま扱っているのは変位の場なので、ひとまとめに変位場と呼びます。『場』は field の和訳語です。高校までの理科では別の訳語「界」が使われていましたが、たとえば電界と磁界は電場や磁場と同じ意味です。

### 数学・物理ノート 1.2: 座標系の表現

これまで3次元空間上の位置といえば左下図のように  $(x, y, z)$  の記号を用いて表すのが普通だっでしょうが、本書では、 $(x, y, z)$  のかわりに下付きの添字を使って、 $x = (x_1, x_2, x_3)$  と右下図のように表します。

このような記法を用いるのは、これから沢山の記号が出てくるのに、位置を表すだけのために3つもアルファベットを使っていては記号が足りないという（切実な）理由のためです。また、番号の添字を変数  $i$  で表すと、たとえば  $x_i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) のような表し方ができ、計算の見通しが良くなるというメリットもあります。 $x_i$  がベクトル  $x$  の  $i$  番目の成分、というものも自然な定義であろう。

ただし、 $xyz$  と添字 123 のどちらを使うかは教科書によっても異なりますので、注意してください。



もし、この変位  $u(x)$  があらゆる場所  $x$  で一様だったらどうでしょうか。そのときには、変位の方向に物体は平行移動するだけで、まったく変形しないことになるでしょう。平行移動以外にも、物体がどこかの軸に沿って回転するような変位の場合にも、物体は変形しません。このように、変位を定義しただけでは、物体の変形を表すのには不十分なのです。そこで、ひずみといいう真の変形のみを表す量を、物体の単位距離あたりの相対変位から回転成分を取り除いたものとして定義します。

そのためにまず、隣接した点との相対変位を取ることで、平行移動の成分をキャンセルしてしまいましょう。図 1.1 のように、物体中に微小な相対位置ベクトル  $\mathbf{d}$  だけ離れた 2 点  $\mathbf{x}_0$  と  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}$  を考えます。それぞれの位置における変形量は  $u(\mathbf{x}_0)$  と  $u(\mathbf{x})$  のように表すことができるでしょう。もしこの 2 つの変形を表すベクトルが平行で同じ長さ、つまり  $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0)$  であったならば、物体は平行移動しているだけで変形しないはずです。逆に、もし物体が変形しているならば、ベクトル  $u(\mathbf{x}_0)$  と  $u(\mathbf{x})$  には違いが生じているはずです。そこで、図 1.1 のように 2 つのベクトルの差を取ることで、相対変位  $\delta u(\mathbf{x})$  を抽出します：

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0) + \delta u(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

もし 2 点間の距離<sup>\*1</sup>  $d = |\mathbf{d}|$  が十分に小さいとすると、テイラー展開によって  $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0 + \mathbf{d})$  を以下のように近似表現できます：

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}) &\simeq u_1(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} d_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} d_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} d_3 \\ u_2(\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}) &\simeq u_2(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} d_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} d_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} d_3 \\ u_3(\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}) &\simeq u_3(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} d_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} d_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} d_3 \end{aligned} \quad (1.2)$$

### 数学・物理ノート 1.3: 等号・不等号のいろいろ

(1.2) 式で用いられている記号  $\simeq$  は、**左辺と右辺が近似的に等しい**という意味です。この場合は、右辺のテイラー展開を 1 次で打ち切っているため、 $|d_i| (i = 1, \dots, 3)$  が十分に小さいときに成立する近似式です。近似式が表されたときには、**どのような近似のもとで成立する式なのか**ということも、とても重要です。この記号は左辺から右辺への計算の過程で用いるため、通常は右辺が近似された（あるいは比例する）量です。逆に左辺が近似された量であることはほとんどありません。等号 (=) の場合はどちらが右辺でどちらが左辺であっても意味は同じでしたが、近似計算のときには注意が必要です。

そのほか、 $\equiv$  は量の**定義**に用いる記号です。本書で  $A \equiv B$  とあつたら、「 $A$  という量を  $B$  で定義する」という意味です。一方、 $\propto$  は左辺が右辺に**「比例する」**ことを表します。

$\ll$  と  $\gg$  は不等号ですが、それぞれ左辺より右辺が**十分に大きい**あるいは**十分に小さい**ということを意味します。「十分に」とは、値が一桁以上違う、あるいは微小量のべき乗の指数が異なるということです。たとえば、1 よりも十分に小さい量  $|a| \ll 1$  に対して、 $|a| \gg |a|^2 \gg |a|^3$  といった具合です。具体的な値を適当に（たとえば  $|a| = 0.1$  とでも）代入し

<sup>\*1</sup> ここでは 2 点間の相対位置をベクトルで表していますから、そのベクトルの絶対値（ベクトルの長さ）を取れば、2 点間の距離になります。

て計算してみれば納得できるでしょう。

### 数学・物理ノート 1.4: 導関数（微分）の定義

関数  $f(x)$  の導関数（微分）は、

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1.3)$$

と定義されます。刻み幅  $h$  だけ離した 2 点間で関数  $f$  の傾きを計算において、その刻み幅を無限に小さくする、というのがその意味でした。関数が連続でなめらかであれば、その傾きを調べる位置が  $x+h$  と  $x$  であろうと、 $x$  と  $x-h$  であろうと、あるいは  $x+h/2$  と  $x-h/2$  であろうと同じ値に収束します。つまり、

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{h} \quad (1.4)$$

です（逆に、これは関数が  $x$  の周りで**連続**であるということを主張しています）。

このことは、 $h$  が十分に小さい時、関数  $f(x)$  が 1 次関数で近似できる、ということを意味しているとも言えるでしょう。関数  $f(x)$  が  $x$  において微分が存在する（微分可能である）ためには、この「関数  $f(x)$  が 1 次関数で近似できる」ことが必要です。 $x$  において不連続であったり、折れ曲がるような関数は微分できません。

もし関数が複数の引数を取る多変数関数である場合には、微分の記号  $d$  の代わりに  $\partial$  を使います。そのときの微分を特に偏微分と呼びます。たとえば関数  $f(x, y)$  を  $x$  と  $y$  についてそれぞれ偏微分した偏導関数は、

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \quad (1.5)$$

のようになります。名前は違いますがその意味するところは 1 変数関数の微分と同じで、わずかに変数  $x$ （あるいは  $y$ ）が変化したときの関数  $f$  の変化率です。

### 数学・物理ノート 1.5: 1変数と多変数関数のテイラー展開

連続かつ無限回微分可能な関数  $f(x)$  に対して、微小量  $\delta x$  だけ離れた場所での値  $f(x + \delta x)$  は、1次のテイラー展開によって

$$f(x + \delta x) \simeq f(x) + \frac{df}{dx} dx \quad (1.6)$$

と表されます。1次のテイラー展開は、 $x$  における  $f(x)$  の値を起点として、 $f(x + \delta x)$  を1次関数で近似したもの、と言ってよいでしょう。

いま扱おうとしている変位は、位置  $x_1, x_2, x_3$  に（ほんとうは更に時間  $t$  にも）依存する多変数関数ですが、そのような場合にも同様に

$$\begin{aligned} f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) \\ \simeq f(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 \end{aligned} \quad (1.7)$$

と書くことができます。右辺の第2項以降は、 $(dx_1, dx_2, dx_3)$  の変化によって関数  $f$  がどれだけ変化したかという量で、**全微分**

$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 \quad (1.8)$$

とも呼ばれます。

もし関数がスカラーではなく、ベクトル  $f(x)$  である場合には、関数の成分ごとに(1.7)式と同様な展開をします。それが(1.2)式で行っている展開です。

なお、数学的には、このような近似がいつでも可能であるという保証はありません。展開される関数が連続かつ微分可能であり、(偏)導関数  $(df/dx, \partial f/\partial x_i)$  も連続、といった条件が必要となります。連続的な媒質(連続体)の連続的な変形を扱っている限りは、この条件が満たされていると思ってよいでしょうが、地震学では断層面や境界面などの**不連続面**も扱います。そのような不連続面をまたいだ物理量の微分は通常は許されません。

前式ではベクトルの一つ一つの成分をばらして計算しましたが、これらは行列とベクトルを使って、まとめて

$$\mathbf{u}(x_0 + \mathbf{d}) = \mathbf{u}(x_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \mathbf{u}(x_0) + \mathbf{J}\mathbf{d} \quad (1.9)$$

と書くことができます。式(1.1)と(1.9)とを見比べると、この行列とベクトルの積  $\mathbf{J}\mathbf{d}$  が相対変位ベクトル  $\delta\mathbf{u}(x)$  の正体であることがわかります。

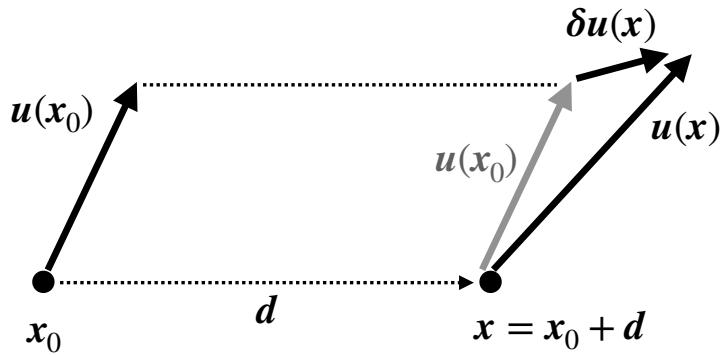


図 1.1 物体の変形を表すベクトル。実黒線矢印が変形を、点線矢印が相対位置ベクトルをそれぞれ表す。

### 数学・物理ノート 1.6: 行列とベクトル

行列  $A$  (成分  $A_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $1 \leq j \leq 3$ ) と縦ベクトル  $b$  (成分  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ) の積は

$$c = Ab = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + A_{13}b_3 \\ A_{21}b_1 + A_{22}b_2 + A_{23}b_3 \\ A_{31}b_1 + A_{32}b_2 + A_{33}b_3 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

と定義されます。行列とベクトルの積の成分は、総和記号  $\Sigma$  を用いると、

$$c_i = \sum_{k=1}^3 A_{ik}b_k \quad (1.11)$$

とコンパクトに書くことができます。また、行列  $A$  とベクトル  $b$  の積を計算することを、行列  $A$  にベクトル  $b$  を作用させるということがあります。 $(1.10)$  を  $b_i$  についての連立方程式として見なすと、その解は形式的に

$$b = A^{-1}c \quad (1.12)$$

のように書くことができます。 $c$  に作用させることによって連立方程式の解を与える行列  $A^{-1}$  を、行列  $A$  の逆行列といいます。逆行列は行列の成分の逆数ではありません。また、あらゆる行列について逆行列が存在するという保証もありません。逆行列については数学・物理ノート 1.13 でも取り扱います。

同様に、行列  $A$  と行列  $D$  の積  $E = AD$  の成分は、

$$E_{ij} = \sum_{k=1}^3 A_{ik}D_{kj} \quad (1.13)$$

と書くことができます。もし行列  $A$  に逆行列が存在すれば、 $D$  を

$$D = A^{-1}E \quad (1.14)$$

あるいは成分で

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^3 (A^{-1})_{ik} E_{kj} \quad (1.15)$$

と書くこともできます。ここで  $(A^{-1})_{ik}$  は行列  $A$  の逆行列の  $ik$  成分のことです。

ところで、行列の縦の大きさ（行数）と横の大きさ（列数）はいつでも同じ（正方行列である）であるとは限りません。 $2 \times 2$  や  $3 \times 3$  のように、たまたま縦横の大きさの同じ行列のことを**正方行列**といいます。ベクトル

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

はそれぞれ 1 行 3 列と 3 行 1 列の行列であると見なすこともできます。

これら 2 つのベクトルの積を行列の掛け算のルールを用いて書くと、

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = (b_1 \quad b_2 \quad b_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \quad (1.17)$$

はベクトルの内積です。しかし、掛け算の順序を逆にした、

$$\mathbf{c}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} (b_1 \quad b_2 \quad b_3) = \begin{pmatrix} b_1 c_1 & b_2 c_1 & b_3 c_1 \\ b_1 c_2 & b_2 c_2 & b_3 c_2 \\ b_1 c_3 & b_2 c_3 & b_3 c_3 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

は  $3 \times 3$  の行列になってしまい、ベクトル同士の内積とは全く異なるものになってしまいます。行列の乗算は順番に注意する必要がありますし、縦ベクトルと横ベクトルは互いに区別しなくてはいけないのです。

## 数学・物理ノート 1.7: 転置行列と対称行列

行列  $A$  の成分を  $A_{ij}$  とするとき、その行列の成分の  $i$  と  $j$  をひっくり返した行列を**転置行列**といい、 $A^T$  で表します。 $2 \times 2$  の行列で陽に書いてみると、

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

に対し,

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

です。この定義により、 $A^T$  の  $ij$  成分は  $(A^T)_{ij} = A_{ji}$  です。もし  $A = A^T$  であるとき、つまり取りうるすべての  $i$  と  $j$  に対して  $A_{ij} = A_{ji}$  であるとき、行列  $A$  は**対称行列**であるといいます。

転置を取れるのは正方行列に限られません。ベクトル

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad (1.21)$$

の転置を取ると、

$$\mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

です。転置によって横ベクトルを縦ベクトルに（あるいは縦ベクトルを横ベクトルに）変換することができるのです。

本章で用いるベクトルのほとんどすべてが縦ベクトルですが、文章中では  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$  のように、縦ベクトルを横ベクトルの転置として表現することがあります。

### 数学・物理ノート 1.8: 単位行列と直交行列

一般には行列同士の乗算の順序は変更できませんが、単位行列

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

は特別です。同じ大きさの行列  $A$  に対して、いつでも

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \quad (1.24)$$

が成り立ちます。単位行列は、その定義から明らかに  $\mathbf{I}^T = \mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$  でもあります。ある行列の転置行列と逆行列が等しいとき、その行列を**直交行列**と呼びます。

ここまでで、物体の変形を測るために、相対位置ベクトル  $\mathbf{d}$  だけ離れた 2 点の変形量の差を取り、平行移動を取り除いた成分  $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$  を抽出しました。しかし、相対変位ベクトル  $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$  そのものは、変形を測る 2 点の位置関係  $\mathbf{d}$  のとり方に依存してしまいます。ある 2 点の位置を決めないと変形が測れないのでは、あらゆる場所の変形を表す指標としてはふさわしくありませんね。では、 $\mathbf{J}$  単独ではどう

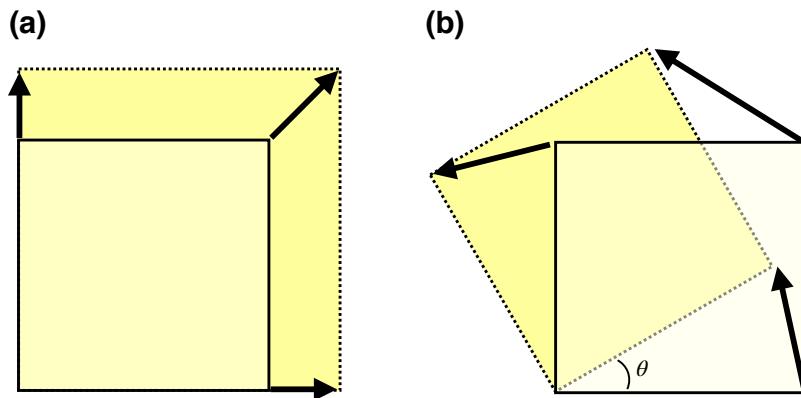


図 1.2 行列  $J$  で表現できる変形の例、(a) 等方膨張、(b) 回転、いずれも実線で描かれた四角形が変形前の物体を、点線が変形後の物体を表す。矢印は変形前後四角形の頂点位置同士を結ぶ変位ベクトルである。

でしょうか。

変形が  $\delta u = Jd$  というふうに変形ベクトルと行列に分解されて表されたということは、「どんな相対位置ベクトル  $d$  に対しても、それを行列  $J$  に作用させることによって、平行運動をキャンセルした成分  $\delta u$  が得られる」ということを意味します。つまり、**変形の勾配（空間微分）からなる行列  $J$**  を知っていれば、あらゆる場所のあらゆる方向に対しての平行運動をキャンセルした成分を知ることができます。したがって、 $J$  のほうがあらゆる変形を表すのにより適した量と言えそうです。ですが、「平行運動をキャンセルした」だけではまだ不十分です。次節では、この行列  $J$  についてもう少し調べていくことにしましょう。

### 1.1.2 ひずみと回転

以下では、変形を表す  $J$  を、便宜上**変位勾配テンソル**と呼びます。**テンソル**という言葉については、とりあえずは行列と同じようなものと思っておけばよいです。さて、その変位勾配テンソルは、変位から平行移動成分を取り除いたものでした。しかし、このなかにもまだ真の変形ではない**回転**の効果が残っています。図 1.2 に、ある 2 つの物体（四角形）の移動・変形を模式的に示します。(a) は物体があらゆる方向に膨張しているので確かに物体が変形していますが、(b) は単に物体が角度  $\theta$  だけ回転しているだけで、変形はしていません。にもかかわらず、四角形の頂点位置における変位を表すベクトル（矢印）は互いに平行ではありません。したがって、前節の「近接 2 点間の変位の差を差し引く」という操作だけでは、回転成分は排除できないのです。

やや天下りですが、図 1.2 に描かれたような変形と回転は、変位が微小である

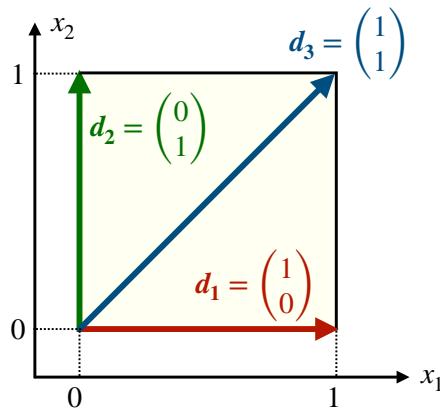


図 1.3 図 1.2 の変形を確認するための単位四角形と左下点を原点とする 3 つの相対位置ベクトル  $d_i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) の定義.

という条件のもとで,

$$J_{(a)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad (a > 1), \quad J_{(b)} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

のように表されることが知られています。次の演習問題で確かめてみましょう。

### 演習問題 1.1: 変位勾配テンソル

図 1.3 のように 2D 平面上に左下の原点  $x_0 = (0, 0)$  から四角形の各頂点までの 3 つの相対位置ベクトル  $d_1 = (0, 1)^T$ ,  $d_2 = (1, 0)^T$ ,  $d_3 = (1, 1)^T$  を変位勾配テンソル (式 (1.25) の  $J_{(a)}$ ,  $J_{(b)}$ ) に作用させて、図 1.2(a), (b) のような変形が現れることを確認しなさい。ただし、基準位置  $x_0$  を原点に固定しているため、式 (1.9) において  $u(x_0) = \mathbf{0}$  としています。

### 数学・物理ノート 1.9: 回転行列

より一般には、2 次元で回転を表す行列は、回転角を  $\theta$  として

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

と書くことができます。この行列に任意のベクトル  $v = (v_1, v_2)^T$  を作用させた結果得られるベクトルは、 $v$  と同じ長さで、かつ原点を中心として角度  $\theta$  だけ反時計回りに回転したものです。

**演習問題 1.2: 微小回転近似**

2 次元の回転行列 (1.26)において、回転角  $\theta$  の大きさが十分に小さいという条件 ( $|\theta| \ll 1$ ) が満たされるときには、 $\cos \theta \simeq 1, \sin \theta \simeq \theta$  と近似できます。このとき、回転行列  $R$  は (1.25) の  $J_{(b)}$  に一致することを確かめなさい。

**演習問題 1.3: 回転行列**

$\theta = \pi/4$  に対する回転行列を以下のベクトルに作用させて、回転行列  $R$  が反時計回りの回転を意味していることを確認しなさい。

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**演習問題 1.4: ベクトルの回転**

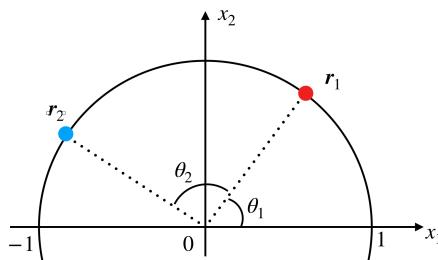
図のように  $x_1-x_2$  座標の原点を中心とする半径 1 の単位円上に、点  $\mathbf{r}_1$  と  $\mathbf{r}_2$  があります。

(i)  $\mathbf{r}_1$  と  $\mathbf{r}_2$  の成分を、それぞれ角度  $\theta_1$  と  $\theta_1 + \theta_2$  に関する三角関数を用いて表しなさい。

(ii) 点  $\mathbf{r}_2$  は、 $\mathbf{r}_1$  が  $\theta_2$  だけ回転したものであるから、角度  $\theta_2$  の回転行列を用いて

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \mathbf{r}_1 \quad (1.27)$$

と表せます。この関係式に (i) の結果を代入することで、三角関数  $\sin(\theta_1 + \theta_2), \cos(\theta_1 + \theta_2)$  の加法定理を証明しなさい。



この結果を一般化すると、変位勾配テンソル  $\mathbf{J}$  の成分  $J_{ij}$  を以下のように分割す

ることで、真の変形と回転成分とを分離できるということが知られています：

$$J_{ij} \equiv \varepsilon_{ij} + \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (i, j = 1 \cdots 3) \quad (1.28)$$

この  $\varepsilon$  をひずみ（歪）テンソル、 $\Omega$  を回転テンソルと呼びます<sup>2</sup>。ひずみテンソルと回転テンソルの成分をすべて書き下してみましょう：

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

ひずみテンソルは対称テンソル<sup>3</sup>で、

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (1.31)$$

の関係があります。このことから、見た目は  $3 \times 3$  の行列で書かれても、独立な成分は（3次元の場合には）6つだけです。一方、回転テンソルは反対称テンソルで、

$$\Omega_{ij} = -\Omega_{ji} \quad (1.32)$$

の関係があります。反対称性を満たすため、対角成分はゼロ ( $\Omega_{ii} = 0$ ) になります<sup>4</sup>。そのため、3次元回転テンソルのうち独立な成分は3つだけです。

これで、変形から平行移動と回転を分離して、真の変形だけを抽出する事ができるようになりました。変形の一般式 (1.9) に (1.28) を代入すると、

$$u(x) = u(x_0) + Jd = u(x_0) + \Omega d + \varepsilon d \quad (1.33)$$

が得られます。右辺第1項は平行移動分、第2項は回転の寄与、そして最後の第3項  $\varepsilon d$  が真の変形を表しています。ひずみテンソルさえわかっていてれば、任意の微小距離間の相対位置ベクトル  $d$  をひずみテンソルに作用させることにより、その2点間の平行移動と回転を除いた真の変形が抽出できるのです。

<sup>2</sup>  $\Omega$  はギリシャ文字  $\omega$  の大文字です。Appendix A にギリシャ文字の一覧があります。

<sup>3</sup> ここでは、対称テンソルとは対称行列と同じようなものと思って構いません。

<sup>4</sup> 反対称性 (1.32) を対角成分に適用してみると、 $\Omega_{ii} = -\Omega_{ii}$  となります。この条件を満たせるのは  $\Omega_{ii} = 0$  のときだけです。

**演習問題 1.5: ひずみ・回転テンソルの定義と対称性**

ひずみテンソルと回転テンソルの対称性 (1.31) と (1.32) を式 (1.29) と (1.30) から確認しなさい。また、ひずみテンソルと回転テンソルの和が変位勾配テンソル  $J$  になることを、成分毎に確かめてみましょう。

**演習問題 1.6: ひずみの計算**

$x_1-x_2$  空間の 2 次元の変位場が

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -x_1 x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

で与えられるとき、その変位場の 2 次元ひずみテンソル成分 ( $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$ ) を求めなさい。

**演習問題 1.7: 3 次元中の 2 次元変位**

前の演習問題で「2 次元の変位場」という表現が出てきました。これは厳密には「変位の  $x_3$  成分がゼロ ( $u_3 = 0$ )」かつ「変位量が  $x_3$  方向に変化しない」ということです。

後者の条件は、 $x_3$  方向への微分がすべてゼロである（変化しないから）ことを意味しています。そのため、2 次元の変形 ( $x_3$  方向に変化しない媒質の変形) のひずみテンソルや回転テンソルは、成分の範囲が  $i, j = 1, 2$  だけの  $2 \times 2$  の行列形式で表されます。

このことを踏まえてひずみテンソルの定義に立ち返り、 $x_1-x_2$  空間の 2 次元の変形の場合に、ひずみテンソルの  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$  以外の成分がすべてゼロになることを確かめなさい。

**演習問題 1.8: 2 次元空間のひずみ・回転テンソル**

$x_1-x_2$  面の 2 次元のひずみテンソルと回転テンソルの独立成分はそれぞれいくつありますか？

**1.1.3 ひずみテンソルの直感的意味**

簡単な例で、ひずみテンソルの成分の意味を考えてみましょう。

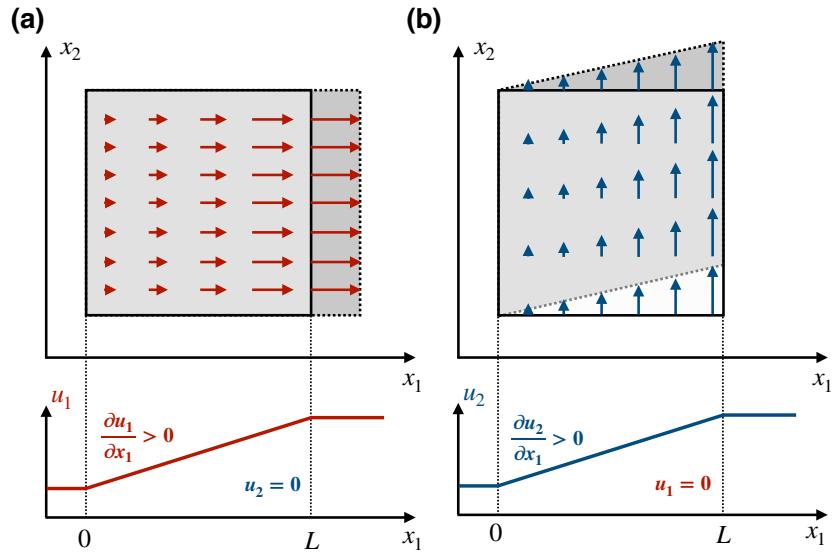


図 1.4 2 次元 \$x\_1\$-\$x\_2\$ 平面における変形の例. それぞれ (a) 伸長 (b) 剪断の場合.

### 法線ひずみ

まず,  $\partial u_1 / \partial x_1 > 0$  であり, かつほかの変位の空間微分がゼロの場合を考えます. このとき, ひずみテンソルは 11 成分だけ値を持ちます:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = 0. \quad (1.34)$$

この場合の変位は回転成分を持たないので, 変形は

$$Jd = \varepsilon d = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial u_1 / \partial x_1) d_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

と表されます. つまり, \$x\_2\$ 方向には一切変形が起きず, \$x\_1\$ 方向に伸びていく<sup>5</sup> のです. もしひずみ成分 \$\varepsilon\_{11}\$ が一定であれば, 距離 \$d\_1\$ が大きいほど, 伸びの量が大きくなります. この変形を模式的に表したのが図 1.4(a) です. この図は, 辺長 \$L\$ の正方形を, 左端を固定して \$x\_1\$ 方向に引張ったときの一様な変形を表しています. 正方形は引張によって \$x\_1\$ 方向に伸びますが, その伸びの変形量は左端の固定端ではゼロで, \$x\_1\$ が大きくなるにつれてだんだん大きくなっています. このように, ひずみテンソルのうち対角成分 \$(\varepsilon\_{11}, \varepsilon\_{22}, \varepsilon\_{33})\$ は, それぞれの方向への伸び縮みを表す指標であり, これを**法線ひずみ (あるいは垂直ひずみ; normal strain)** と呼びます. ひずみ (あるいは変形の微分量) は, 図 1.4(a) 下部のグラフにあるように, **変形の距離あたりの傾き** (あるいは単位距離あたりの変形量) と解釈できます. 逆に, 離れた 2 点においてそれぞれ変形量がわかれば, その間の平均的なひずみは,

$$\text{平均ひずみ} \simeq \frac{(\text{変形量})}{(2 \text{ 点間の距離})} \quad (1.36)$$

<sup>5</sup>  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} > 0$  なので変形量はプラスです.

で概算することができるのです。

### 演習問題 1.9: 地殻変動によるひずみの概算

$x_1$  軸上にあり、200 km 離れた 2 点 A, B を考える。地殻変動により、点 A が  $x_1$  軸上に沿って +1 m、点 B が +5 m それぞれ移動したとき、この点 AB 間の平均的な法線ひずみ量を求めなさい。分母と分子で単位が異なるので注意すること。 $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$  による換算が必要です。

### 体積ひずみ

法線ひずみ成分の和

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.37)$$

は**体積ひずみ**と呼ばれ、単位体積あたりの体積の変化量を表しています。

法線ひずみ成分 ( $\partial u_i / \partial x_i$ ) は、座標軸方向の伸び縮みを表すのでした。したがって、各方向への法線ひずみによって、 $x_1, x_2, x_3$  方向の長さがそれぞれ  $(1 + \varepsilon_{11}), (1 + \varepsilon_{22}), (1 + \varepsilon_{33})$  倍になります。そのとき、体積の変化量は

$$\begin{aligned} &(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33}) \\ &= 1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} \\ &\simeq 1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 1 + \theta \end{aligned} \quad (1.38)$$

です。ただし、ひずみは微小量であることから、微小量なひずみ同士の積はさらに小さく無視できることを用いました。このことから、変形が微小なときには体積ひずみが変形による体積変化量を表しているのです。

### 剪断ひずみ

次に、 $\partial u_2 / \partial x_1 > 0$  で、ほかの変位の微分が全てゼロの場合を考えましょう。このときのひずみテンソルは、

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0 \quad (1.39)$$

です。回転を含めた変形は

$$\mathbf{Jd} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\partial u_2 / \partial x_1) d_1 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

であり、その変形は図 1.4(b) のように表されます。 $x_1$  が増大するにつれて  $x_2$  の正方向に変形していくため、物体がねじれているのがわかるでしょう。このような変形は、**剪断**（せんだん）と呼ばれます。ここでも、変位の空間微分量（図下部のグラフ）が単位距離あたりの変形量になっています。

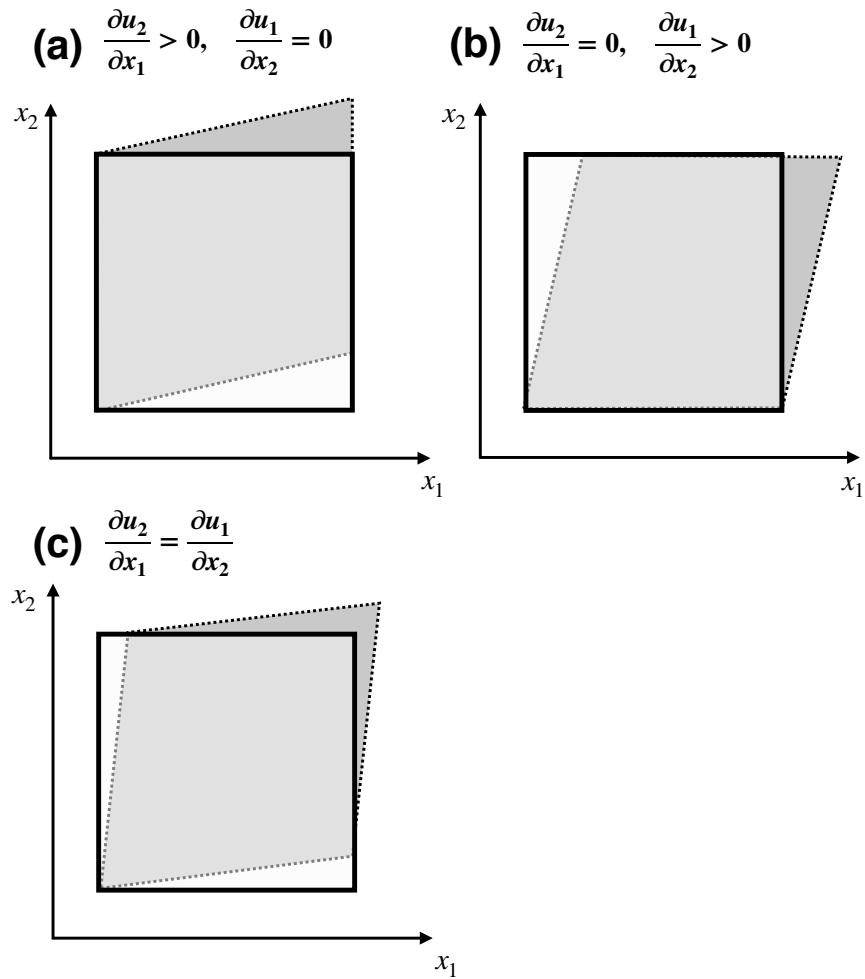


図 1.5 図 1.4(b) で表される剪断変形に等価な 3 つのパターン. (c) だけが回転成分をもたない純粹な変形成分である。

ところで、図 1.4(b) の変形は、本当に純粹な変形だけを表しているでしょうか。 $x_1$  が大きくなるほど（グラフで右にいくほど） $x_2$  方向の変形が大きくなります。ということは、この物体は全体として左回りに回転してしまっているようです。

実際、変位勾配テンソルのかわりにひずみテンソルを用いて回転成分を取り除いたひずみを計算すると、

$$\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{12} d_2 \\ \varepsilon_{12} d_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\partial u_2 / \partial x_1) d_2 \\ (\partial u_2 / \partial x_1) d_1 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

のように、 $x_1$  成分の変位も生じます。この変形前後の形を比較したのが、図 1.5(a) と図 1.5(c) です。図 1.4(b) の変形をすこし右回りに回転することで、純粹な変形だけが抽出されました（図 1.5(c)）。しかしそうすると、もし図 1.5(b) のような変形があったとしても、回転成分を取り去ると、図 1.5(c) に一致してしまいます。図 1.5(b) の変形は  $\partial u_1 / \partial x_2 > 0$  のときに生じますが、これは  $\partial u_2 / \partial x_1 > 0$  の変形と、ひずみの上では区別できないのです。そのことはひずみテンソルの第 12 成分

の定義が

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (1.42)$$

であることからも確認できます。 $\partial u_1 / \partial x_2$  と  $\partial u_2 / \partial x_1$  のどちらが変形に寄与したとしても、回転成分を取り去れば、残された真の変形はまったく同じなのです。

いずれにしても、ひずみテンソルの非対角成分が剪断変形を表していることがわかりました。これらの成分のことを**剪断ひずみ** (shear strain) と呼びます。定義により、ひずみテンソルの成分は、法線ひずみか剪断ひずみかのどちらかに分類されることになります。

まとめると、どちらの例からもひずみテンソル  $\varepsilon_{ij}$  は、*i 方向の座標軸からみた j 方向への変形の単位距離あたりの大きさ（あるいは距離に対する傾き）* です。ただし、ひずみテンソルは対称性  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  があるため、 $i \neq j$  の場合は図 1.5(b) のように勾配は半分になり、そのかわりに  $j$  方向の座標軸からみた  $i$  方向の変形にも同じひずみが現れるのです。

#### 演習問題 1.10: ひずみテンソルと物体の変形

2 次元空間において、変形によって以下のようなひずみテンソルで表されるようなひずみが生じたとします。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

このとき、単位辺長の正方形はどのように変形されるでしょうか。図 1.4 にならってそれぞれ図示しなさい。ただし  $a, b$  は十分に小さい正の数とします。

#### 1.1.4 ひずみテンソルによる変形場

ここまでまとめとして、ひずみテンソルが与えられた場において、 $x_1-x_2$  面内における任意の点がどう変形するかを、図 1.6 に示します。法線ひずみ  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  はそれぞれ  $x_1$  (図 1.6a) と  $x_2$  (図 1.6b) 方向に引き伸ばされるように変形を受け<sup>6</sup>、その両成分が等しい場合 (図 1.6c) には全体として媒質が膨張するように変形します。

一方、剪断ひずみ成分のみが存在する場合 (図 1.6d) には、物体がねじれるように変形しています。この図をよく見ると、変形によって右上一左下方向には引き伸ばされ、右下一左上方向には圧縮されていますね。それらの変形が互いに打ち消しあうことによって、剪断ひずみによる変形では体積が変化しないのです。また、図の中心から左右 ( $x_1$ ) 方向を見ると、媒質が反時計回りに回転しているか

<sup>6</sup>もちろん、 $\varepsilon_{ii} < 0$  の場合には逆に縮む方向に変形を受けます。

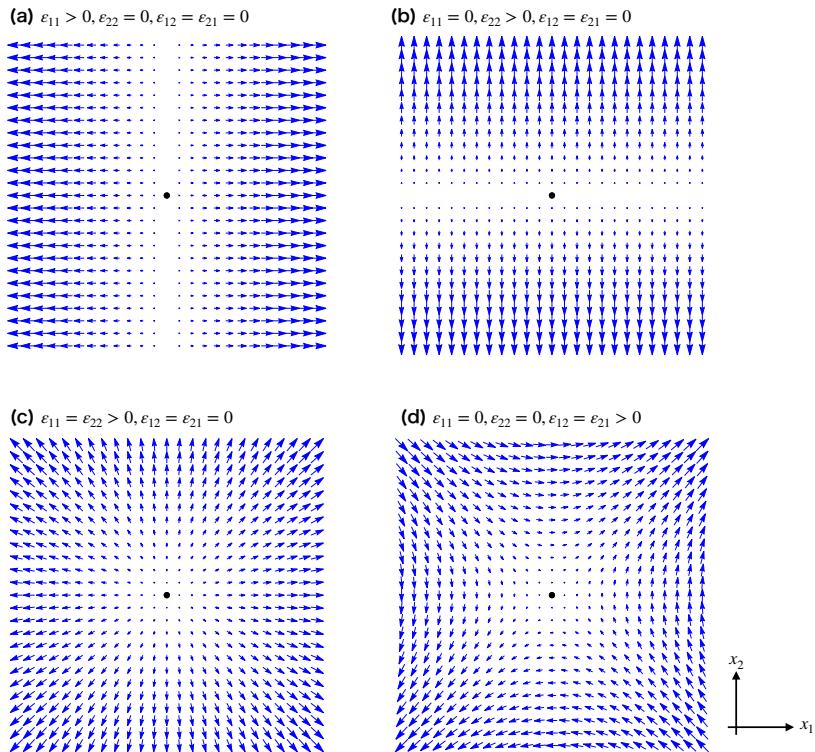


図 1.6 ひずみテンソルによる変形場の例。いずれも中心点を基準位置としたとき、 $x_1-x_2$  面内の各点がうける変形をベクトル（矢印）で示した。

のようですが、上下 ( $x_2$ ) 方向は時計回りに変位していて、互いに打ち消し合うことで媒質全体としては回転していないこともわかるでしょう。

## 1.2 応力

この節では、弾性体の変形をもたらす力である**応力**について学習します。変形を表すひずみが单一の量でなく 6 つの独立成分を持つテンソルであったように、応力もまたテンソル量として表されることと、その物理的意味を学びます。

### 1.2.1 応力・トラクションとその定義

連続体（弾性体）に働きうる力には、2 種類のものがあります。

ひとつは**実体力（体積力；body force）**と呼ばれるもので、弾性体の内部の任意の点に働く外部からの力です。実体力のわかりやすい例としては、**重力**があります。地球上にあるかぎり、弾性体のあらゆる点には  $g$  だけの重力加速度がかかっているため、微小体積  $dV$  にはその場の質量密度  $\rho$  を用いて  $\rho g dV$ <sup>7</sup> だけの実体

<sup>7</sup> 質量  $m$  に対して  $mg$  ではないのかと思うかもしれません、連続体では質量が連続的に分布しているので、「ある点」の重さ  $m$  ではなく、空間平均の密度  $\rho$  が用いられます。実体力は「単位体積あたりの力」で表現するほうが適切なのです。

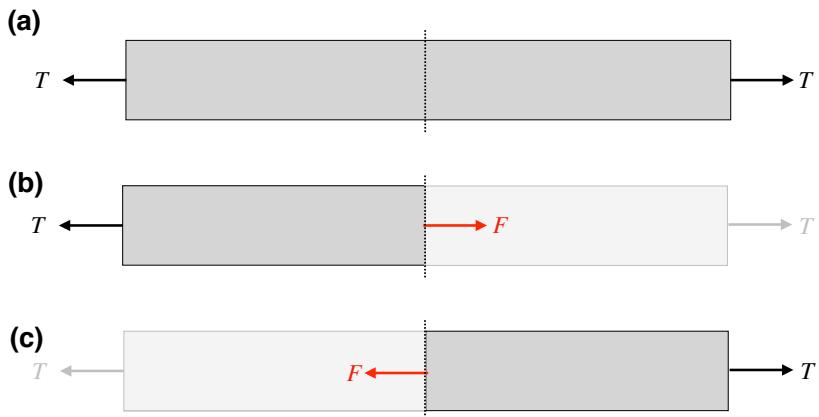


図 1.7 内力を理解するための思考実験. (a) 弹性体の棒の両端に  $T$  の張力がかかるっている. 中心の点線は仮想的な切断面. (b) 仮想切断面の左側とそこにかかる力. (c) 仮想切断面の右側とそこにかかる力.

力がかかります.

もうひとつは、**面力 (surface force)** とよばれる力です。弹性体は、たとえ全体としては静止していても、物体の**内部**にはさまざまな力がかかり、それが総体として釣り合っています。たとえば、図 1.7 のように、一本の棒を左右に張力  $T$  で引っ張ることを考えましょう。この棒は静止して（壊れることなく）釣り合っているものとします。では、その棒を**仮想的に**どこかで真っ二つに切り離してみたらどうでしょうか。もし、その仮想的な断面にまったく力がかかるていなかつたら、棒は 2 つに別れて左右に飛んでいってしまうことでしょう。そうならずには棒が形を保っているということは、その仮想断面をまたいだ両側に、互いに離れまいとする力が働いているのです。このように、物体を仮想的に切断してみたときに現れる、物体内部で働く力を特に**内力**といいます。一方、それと区別して実体力のことを**外力**ということもあります。

ほかにも、たとえば水中の物体には**圧力**（水圧；図 1.8）がかかります。これも（水とその内側の物体を一連の系とみなしたときの）内力のひとつです。水圧はつねに物体表面に垂直に、同じ深さであれば同じ大きさの力が働きます。つまり、同じ深さでも、物体表面の向きが変わると、その面に対してかかる力の向きが変わってしまうのです。

このように、内力である面力は、どのように仮想的な面をとるかによってその力の向きや大きさが変わってきます。弹性体棒の例に戻って、こんどは図 1.9 のように棒を（もちろん仮想的に）斜めに切ったらどうでしょうか。外力は同じですから、面には全体として左右に引っ張り合うような力が働きます。それは面に対して斜めに働いているのです。つまり、この内力は面に垂直な成分と面を横滑りさせるような成分とに分解できます。先程の垂直断面のときとは違いますね。このように、内力とは**物体に仮想的な面を考えたときに面にかかる力**です。その力は、**面のとり方によって異なります**。

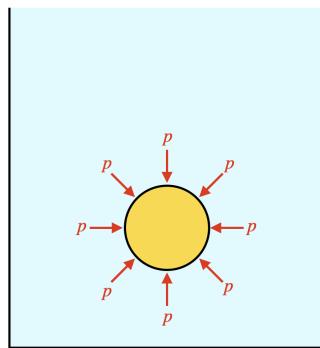


図 1.8 水中の円形物体にかかる水圧  $p$  の模式図。本来は水圧は深さによって異なり、物体上辺と下辺ではその大きさが僅かにことなる（その差の分物体は浮力を受ける）が、ここでは便宜上その違いを省略している。

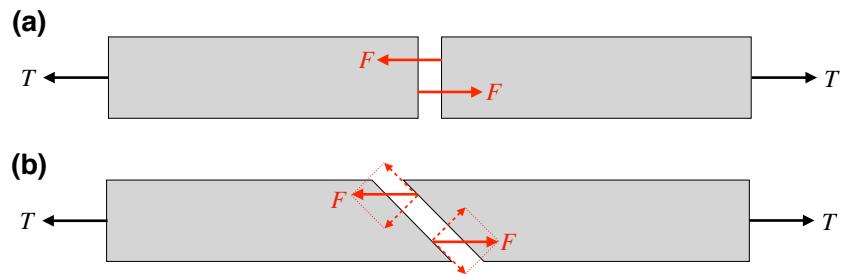


図 1.9 仮想面の方向に応じて変化する内力の模式図。

いま、図 1.10 のように、弾性体のある領域の面<sup>\*8</sup>の一部分の微小な面積要素  $dS$  を取ってきて、そこに働く力全体を  $\mathbf{F}$  としましょう。これまでの議論と同じように、この力  $\mathbf{F}$  は、面の向きによって変わります。それを数学的に表現するためには、まず「面の向き」を表現することが必要ですね。そこで、法線ベクトル  $\hat{\mathbf{n}}$  の出番です<sup>\*9</sup>。法線ベクトルは、考えている面に垂直な方向をもち、かつ大きさが 1 のベクトルです。逆に、あるベクトル  $\hat{\mathbf{n}}$  に垂直な面は、ただ 1 つに定まります。力  $\mathbf{F}$  は、面の向き  $\hat{\mathbf{n}}$  と面の面積  $dS$  に依存する量なのです。ですが、面力をモデル化するときに、有限のサイズ  $dS$  を扱うのは厄介ですね。 $dS$  のサイズが変わると、 $\mathbf{F}$  も変わってしまいます。そこで、面のサイズで規格化をしましょう。トラクション (Traction)  $\mathbf{T}^{(\hat{\mathbf{n}})}$  という量を、

$$\mathbf{T}^{(\hat{\mathbf{n}})} \equiv \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{dS} \quad (1.43)$$

で定義します<sup>\*10</sup>。

<sup>\*8</sup> この図はいかにも弾性体ひとたまりを取ってきた表面のように見えるかもしれません、そうではなく、弾性体の内部一部をくり抜いた物体の表面だと思ってください。

<sup>\*9</sup> ベクトル  $n$  の上についている記号<sup>ハット</sup>はハット (hat) といいます。本書では、ハット記号を長さが 1 で方向だけを表す単位ベクトルの印として使います。

<sup>\*10</sup> 表面力という言葉自体を、このような「面積あたりの表面力」をもって定義するテキストもある

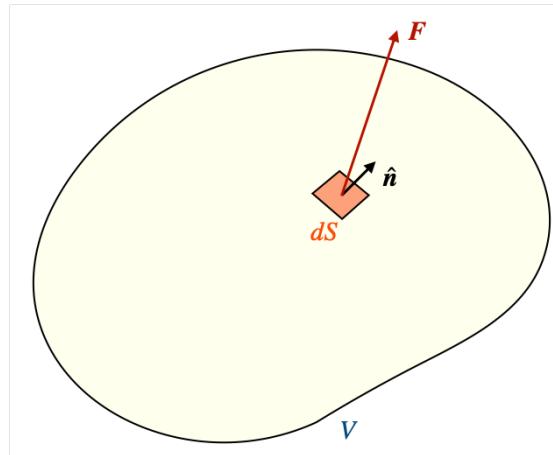


図 1.10 弾性体の塊（体積  $V$ ）と、その面要素  $dS$  に働く力  $F$  の模式図。 $\hat{n}$  は要素  $dS$  の法線ベクトルである。

これは要するに面積あたりの力なのですが、 $dS \rightarrow 0$  の極限をとっているという特徴があります。一見面が複雑な形をしていても、その凸凹のスケールよりも小さな面積  $dS$  の極限をとれば、面を平らな正方形で近似できます。つまり、極限をとることで面の形状を考えず、方向だけを指定すればすむようになります。トラクションの単位は面積あたりの力ですから、SI 単位系であれば  $N/m^2$  の単位をとります。パスカル (Pa) を使うこともあります。この単位は圧力と同じであり、連続体力学では圧力はトラクションの一種、とも言えます。

ところで、トラクションと面は向きも重要です。ここでは、**トラクションを法線ベクトル  $\hat{n}$  の向きの反対側から正の側に向かう力を正** と定義します。つまり、ある面の法線ベクトルの方向（外向き）に膨張する力を正に取るということです。

一方、1つの面要素に対して、それに垂直な法線ベクトルは、面の表側と裏側の2つあります。表側の面の法線ベクトルを  $\hat{n}$  とすると、裏側の面の法線ベクトルは符号を反転して  $-\hat{n}$  です。トラクションは向きをもったベクトルで、法線ベクトルとの関係で方向を定めるのですから、面の向きの正負によって、その力の符号が変化します。具体的には、

$$T^{(-\hat{n})} = -T^{(\hat{n})} \quad (1.44)$$

です。

面力あるいはトラクションとしては、**圧力**がイメージしやすいでしょう。圧力は「面」に垂直に働く力で、その単位は（力/面積）です。圧力は面の外側から内側に向かう力ですから、物質表面に働く圧力  $p$  は、トラクションの符号としては  $T^{(\hat{n})} = -p\hat{n}$  のようにマイナスが付きます。

粘性のない水（流体）の中であれば、圧力は面に垂直な方向しかとりません。しかし、固体中の面力はもうすこし複雑です。面力の大きな特徴は、**力が面積要素の向きに依存する**ということでした。このことを、弾性体内部の小さな立方体を

取り出すことによって考えましょう（図1.11）。 $x_1, x_2, x_3$ それぞれの方向に法線を持つ面（ $x_2-x_3$ 面、 $x_1-x_3$ 面、 $x_1-x_2$ 面）に対しては、トラクション  $\mathbf{T}^{(\hat{n}_1)}, \mathbf{T}^{(\hat{n}_2)}, \mathbf{T}^{(\hat{n}_3)}$  がかかります。ただし、

$$\hat{\mathbf{n}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{n}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{n}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

は各軸方向の法線ベクトルです。

水（完全流体）中の圧力であれば、面にかかるトラクションは常に面の法線方向に平行ですが、弾性体内の力は「ねじれ」を許容するため、それ以外の方向にも力がかかることがあります。トラクションがベクトルですので、たとえば図中の  $\mathbf{T}^{(\hat{n}_2)}$  は、

$$\mathbf{T}^{(\hat{n}_2)} = \begin{pmatrix} T_1^{(\hat{n}_2)} \\ T_2^{(\hat{n}_2)} \\ T_3^{(\hat{n}_2)} \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

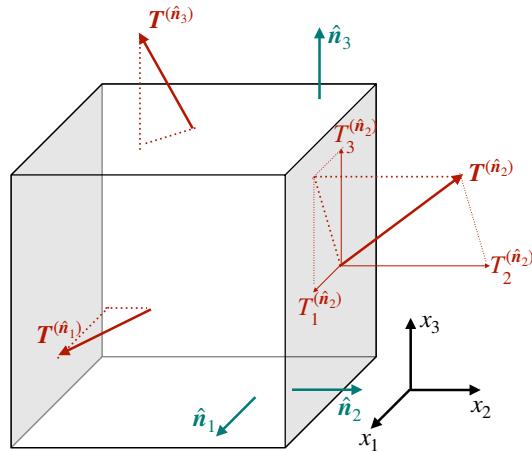
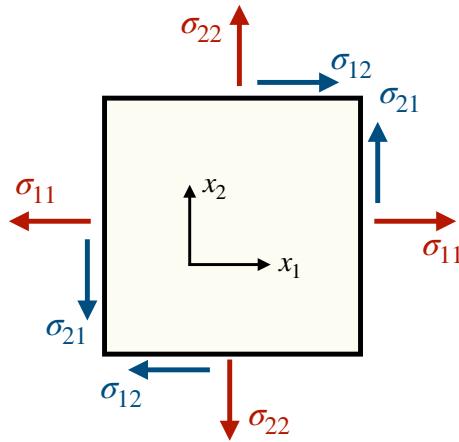
のような3つの成分を持っています。ということは、（トラクションベクトル3つ）×（トラクションの成分3つ）=9の成分があれば、ここにかかる力がすべて記述できるのです。そこで、それらの力を行列のように

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{(\hat{n}_1)} & T_1^{(\hat{n}_2)} & T_1^{(\hat{n}_3)} \\ T_2^{(\hat{n}_1)} & T_2^{(\hat{n}_2)} & T_2^{(\hat{n}_3)} \\ T_3^{(\hat{n}_1)} & T_3^{(\hat{n}_2)} & T_3^{(\hat{n}_3)} \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

とまとめて表記しましょう。これを**応力テンソル**と呼びます<sup>11</sup>。 $\sigma_{ij}$ の意味は、「 $j$ 番目の軸に法線を持つ面にかかるトラクションの  $i$  成分」です<sup>12</sup>。これらのうち、 $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ を**法線応力**（normal stress）、残りの  $\sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}$ を**剪断応力**（shear stress）と呼んで区別することができます。これらの名前の付け方はひずみテンソルと同じで、法線応力は物体を膨張・圧縮させようとする力に、剪断応力はねじれの力にそれぞれ相当します。図1.12に、 $x_1-x_2$ 面内の微小四角形の辺に働く応力テンソルの成分を示しました。図1.11では表現の都合上法線が座標軸正の方向を向いた面の応力（トラクション）しか表示していませんでしたが、実際には反対側の面にも（法線方向が反対なので）逆方向の力がかかります。したがって、法線応力は全体として（符号がプラスの場合には）物質を膨張させる方向の張力なのです。

<sup>11</sup> ギリシャ文字  $\sigma$  ではなく  $\tau$  や英文字  $s, t$  を使う場合もあります。

<sup>12</sup> 文献によっては、応力テンソルの  $i$  と  $j$  の順番が逆転していたり、1つ目と2つ目の添字の意味が逆転していたり、応力テンソルの定義はいろいろのようです。です、この直後で示す応力テンソルの対称性によって、それらは実は「どちらでもいい」ことになります。

図 1.11 弹性体内的微小立体要素に働く力  $T^{(\hat{n}_1)}, T^{(\hat{n}_2)}, T^{(\hat{n}_3)}$  とその成分.図 1.12 弹性体内的  $x_1$ - $x_2$  面内の微小要素に働く応力テンソルの成分.

### 1.2.2 応力テンソルの特徴

応力テンソルの重要な特徴を 2 つ上げておきます。ひとつは**応力テンソルは対称テンソルである**ことです：

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.48)$$

この条件は、弹性体全体が回転しないという条件から導かれます<sup>\*13</sup>。図 1.13 に  $x_1$ - $x_2$  平面内の微小正方形にかかる応力テンソルを示しました。媒質全体が回転しないため<sup>\*14</sup> には、明らかに

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (1.49)$$

<sup>\*13</sup> より厳密には、角運動量の保存則を考える必要がありますが、ここでは簡略化された説明をしています。

<sup>\*14</sup> ひずみの定義で、回転成分をのぞいた真の変形だけを取り扱うことにしたのでした。

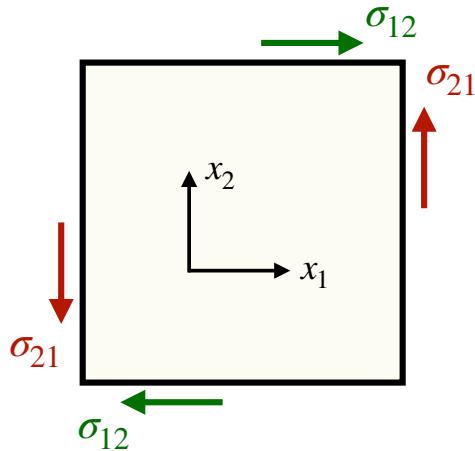


図 1.13 応力テンソルの対称性. 12 平面の（微小）正方形にかかる応力テンソルのうち剪断応力テンソル成分を矢印で示す.

でなければなりません.  $\sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32}$  の対称性も同様に導かれます.

応力テンソルが対称テンソルであることから,  $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32}$  であることがわかります. よって, 応力テンソルの独立な成分は 6 つです.

もうひとつの特徴は, 任意の方向の面（法線ベクトル  $\hat{n}$ ）のトラクション  $T^{(\hat{n})}$  が, 応力テンソルから

$$T_i^{(\hat{n})} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \hat{n}_j \quad (1.50)$$

で求められるということです<sup>15</sup>. これはコーシー (Cauchy) の関係式と呼ばれています. コーシーの関係式は, 応力テンソルの 6 つの独立な成分さえわかれば, 弹性体内に働くあらゆる方向のトラクションを知ることができるということを意味しています.

この関係式は, 釣り合いの状態にある微小三角錐（あるいは 2 次元であれば三角形）のトラクションを考察することで導出できます. ここでは簡単のため, 2 次元の  $x_1-x_2$  平面だけを考えましょう.

まず, 図 1.14 のように  $x_1-x_2$  平面における微小三角形に働く力を考えます. 三角形の 2 辺はそれぞれ  $x_1$  軸と  $x_2$  軸に平行でその長さを  $dx_1$  と  $dx_2$ , もう一つの辺は長さ  $d\ell$  で, その辺（3 次元なら面）の法線ベクトルを  $\hat{n}$ , そこに働くトラクションベクトルを  $T^{(\hat{n})} = (T_1, T_2)$  とします. 残りの 2 つの面に働くトラクションベクトルの成分は, 定義により図のような応力テンソル成分で表現できます.

それでは,  $x_1$  方向と  $x_2$  方向それぞれの力の釣り合いを考えましょう. 面に働く力はトラクションベクトルにその面の面積（この場合は 2 次元なので辺の長さ）

<sup>15</sup> 行列とベクトルの掛け算と同じ計算ルールです.

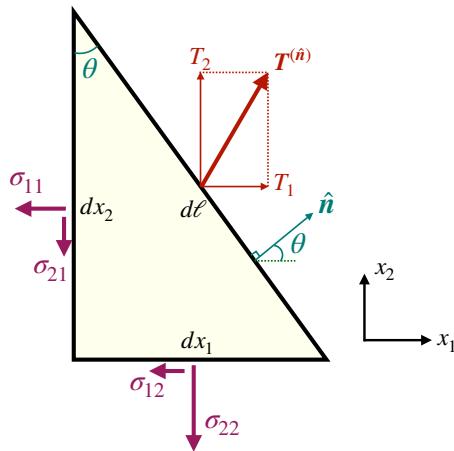


図 1.14 2 次元 12 平面内における微小三角形に働く力の釣り合い.

を乗じたものですから、 $x_1, x_2$  方向それぞれについて、

$$\begin{aligned} T_1 d\ell &= \sigma_{11} dx_2 + \sigma_{12} dx_1 \\ T_2 d\ell &= \sigma_{21} dx_2 + \sigma_{22} dx_1 = \sigma_{12} dx_2 + \sigma_{22} dx_1 \end{aligned} \quad (1.51)$$

です。ただし、第 2 式では応力テンソルの対称性  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  を用いました。

ところで、辺  $d\ell$  の法線ベクトルと  $x_1$  軸のなす角を  $\theta$  とすると、 $\hat{n}_1 = \cos \theta$ ,  $\hat{n}_2 = \sin \theta$  です。一方、辺  $d\ell$  と  $x_2$  軸のなす角も  $\theta$  ですから、

$$\begin{aligned} dx_2 &= d\ell \cos \theta = d\ell \hat{n}_1 \\ dx_1 &= d\ell \sin \theta = d\ell \hat{n}_2 \end{aligned} \quad (1.52)$$

の関係があります。 $(1.52)$  式を  $(1.51)$  に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} T_1 &= \sigma_{11} \hat{n}_1 + \sigma_{12} \hat{n}_2 \\ T_2 &= \sigma_{12} \hat{n}_1 + \sigma_{22} \hat{n}_2 \end{aligned} \quad (1.53)$$

が得られました。これを行列（テンソル）とベクトルの積の形で書くと、

$$T^{(\hat{n})} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{n}_1 \\ \hat{n}_2 \end{pmatrix} = \sigma \hat{n} \quad (1.54)$$

となり、たしかにコーシーの関係式（の 2 次元版）が成立していることが確認できました。

3 次元の場合には、三角形の代わりに三角錐（すい）を用いて考察することになります。煩雑ですが、考え方は 2 次元と同じでそれほど難しくはありません。興味があれば他の弾性体力学の教科書（例えば 中島・三浦, 2014）を参照してください。

### 演習問題 1.11: コーシーの関係式

式  $(1.52)$  と  $(1.51)$  から、コーシーの関係式  $(1.53)$  を導出されることを計算して確かめなさい。

**演習問題 1.12: 応力テンソルとトラクション**

2次元  $x_1-x_2$  平面内の応力テンソルが

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & -10 \\ -10 & -50 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

であるときに、以下の法線応力で与えられる面にかかるトラクションベクトルを求めなさい：

$$\hat{\mathbf{n}}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{n}}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

(注) 1MPa =  $10^6$  Pa.

## 1.3 主応力・主ひずみと座標回転

### 1.3.1 ひずみ・応力の固有値問題

これまでに導入されたひずみテンソルは、弾性体内の2点間の相対位置ベクトル  $\mathbf{d}$  を与えると、その間の（回転を除いた）変形  $\mathbf{u}$  が得られるもの

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{d} \quad \text{あるいは} \quad u_i = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} d_j \quad (1.55)$$

で、応力テンソルは面の法線ベクトル  $\hat{\mathbf{n}}$  を与えると、その面にかかるトラクション  $\mathbf{T}^{(\hat{\mathbf{n}})}$  が得られるもの

$$\mathbf{T}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{n}} \quad \text{あるいは} \quad T_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \hat{n}_j \quad (1.56)$$

でした。この関係は、いざれもあるベクトル  $(\mathbf{d}, \hat{\mathbf{n}})$  を別のベクトル  $(\mathbf{u}, \mathbf{T}^{(\hat{\mathbf{n}})})$  に変換（写像）するもの、とやや抽象的に捉えることができます。また、この変換は、線形であるという顕著な特徴を持っています。

### 数学・物理ノート 1.10: 線形性

ある関数  $f(x)$  が線形であるとは、変数  $a, b$  と定数  $k$  に対して以下の2つの条件を満たすことを言います。

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(a) + f(b) \\ f(ka) &= kf(a) \end{aligned} \quad (1.57)$$

たとえば、 $f(x) = 3x$  は線形ですが、 $f(x) = \sin(x)$  は線形ではありません。

**演習問題 1.13: 線形性の確認**

以下の関数は線形でしょうか。定義を満たすかどうかを確かめて判定しなさい。

- (i)  $f(x) = 3x + 4$
- (ii)  $f(x) = e^x$
- (iii)  $f(x) = x^2 + 3x + 1$

**数学・物理ノート 1.11: 線形変換**

ベクトルをベクトルに変換する関数  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  が、線形性を満たす、すなわち

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) \\ f(k\mathbf{a}) &= kf(\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (1.58)$$

であるとき、この  $f$  のことをベクトルの線形変換といいます。ベクトルの線形変換は 2 階のテンソル  $A$  を用いて、必ず

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad (1.59)$$

と書くことができます。

**演習問題 1.14: 線形変換とテンソル**

- (i) もし関数  $f$  が  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  と書けるとき、その右辺が線形性 (1.58) を満たすことを示しなさい。
- (ii) 任意のベクトル  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  は、各軸方向の単位ベクトル（法線ベクトルに等しい）を用いて、 $\mathbf{x} = x_1\hat{\mathbf{n}}_1 + x_2\hat{\mathbf{n}}_2 + x_3\hat{\mathbf{n}}_3$  と表すことができます。法線ベクトルの定義 (1.45) からこのことを確認しなさい。
- (iii) 前問で得られた関係式を線形性の定義に代入することにより、 $f(\mathbf{x}) = x_1f(\hat{\mathbf{n}}_1) + x_2f(\hat{\mathbf{n}}_2) + x_3f(\hat{\mathbf{n}}_3)$  であることを示しなさい。
- (iv) 関数值  $y = f(\hat{\mathbf{n}}_j)$  の成分を、テンソル成分を用いて  $y_i = f_i(\hat{\mathbf{n}}_j) \equiv A_{ij}$  と置きます。この置き換えにより、任意の線形変換  $f(\mathbf{x})$  がテンソル  $A$  を用いて  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  と書けることを証明しなさい。

以下では、これら 2 つの線形変換のうち応力テンソルを例にとり、かつ  $x_1-x_2$

面内の2次元問題を考えることにしましょう。2次元面内では、(1.56)は

$$\begin{pmatrix} T_1^{(\hat{n})} \\ T_2^{(\hat{n})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{n}_1 \\ \hat{n}_2 \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

と書けます。

すでに学んだように、トラクションベクトルは単位面積あたりの面力で、弾性体ではその方向は面に垂直（法線ベクトル  $\hat{n}$  に平行）とは限りません。もしトラクションベクトルが法線ベクトルに平行であるならば、関係 (1.60) はもっとずっと簡単に

$$\begin{pmatrix} T_1^{(\hat{n})} \\ T_2^{(\hat{n})} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \hat{n}_1 \\ \hat{n}_2 \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

と書けるはずですね。ここで  $\lambda$  は成分をもつ応力テンソルではなく、ただのスカラー量です<sup>16</sup>。この関係 (1.61) は、たとえば粘性のない水中では成立しています。なぜなら、水中では圧力  $p$  と法線ベクトルはつねに平行で、 $\lambda = -p$  と表されるからです。しかし、固体中では剪断応力成分（この場合は  $\sigma_{12}$ ）が存在するため、(1.61) は一般には成立しません。ですが、実は、**固体中でも (1.61) が成立する特別な方向  $\hat{n}$  が必ず存在します**。そのような特別な方向では、(1.60) と (1.61) から

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{n}_1 \\ \hat{n}_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \hat{n}_1 \\ \hat{n}_2 \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

が成立しているのです。その方向に座標軸を取れば、煩雑なひずみや応力が、よりシンプルに記述できそうですね。この関係 (1.61) は、数学的にはテンソル  $\sigma$  の**固有値問題**に相当します。以下では、固有値問題を学びながらこの問題を解き、その物理的意味を明らかにしていくことにしましょう。

### 数学・物理ノート 1.12: 固有値・固有ベクトル

行列（あるいは2階のテンソル） $A$  とベクトル  $x$  が、スカラー量  $\lambda$  に対して

$$Ax = \lambda x \quad (1.63)$$

なる関係を満たすとき、 $\lambda$  を**固有値**、 $x$  を**固有ベクトル**といいます。この関係式から、それを満たす固有値と固有ベクトルを推定する問題のことを、**固有値問題**といいます。

<sup>16</sup>慣例により記号がたまたま重複していますが、あとで出てくるラメの係数とは全く無関係な量です。

### 1.3.2 応力テンソルの固有値

それでは、(1.62)を解いてみましょう。右辺を左辺に移項すると、

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{n}_1 \\ \hat{n}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

が得られます。あるいは、行列とベクトルの積を展開して

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \lambda) \hat{n}_1 + \sigma_{12} \hat{n}_2 &= 0 \\ \sigma_{12} \hat{n}_1 + (\sigma_{22} - \lambda) \hat{n}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.65)$$

と書いてもよいでしょう。これを  $\hat{n}_1$  と  $\hat{n}_2$  に関する連立方程式としてみると、その連立方程式には**自明な解** (trivial solution) として、 $\hat{n}_1 = \hat{n}_2 = 0$  があります。代入してみれば、これが解として成立しているのは明らかですね。

ですが、その自明な解に、はたして物理的な意味があるでしょうか。ベクトル  $\hat{n}$  もともとの意味は、面の法線ベクトルでした。法線ベクトルは長さが 1 のベクトルですから、 $x_1$  軸からの角度を  $\theta$  として

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \hat{n}_1 \\ \hat{n}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

と書けるはずです。しかし、この表現と  $\hat{n}_1 = \hat{n}_2 = 0$  を同時に満たす  $\theta$  は存在しません。つまり、そんな法線ベクトルは存在できず、したがって、自明解は物理的に意味のある解ではないのです。それでは、他に**自明ではない解**は存在しないのでしょうか。

実は、連立方程式の係数が「ある条件」を満たせば、それ以外の解を持ちえます。具体的かつ簡単な例を考えましょう。連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

は、 $x = y = 0$  しか解を持ちません。では、次はどうでしょうか？

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

これも同じ形式を持つ方程式だから  $x = y = 0$  かというと、それは**解の一部**に過ぎません。この方程式を展開してみると、

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 2x + 4y &= 0 \end{aligned} \quad (1.69)$$

ですが、その 2 式目の両辺を 2 で割ると、1 式目とまったく同じであることがわかります。ということは、これは連立方程式のふりをしていますが、実は一つの方程式

$$x + 2y = 0 \quad (1.70)$$

が2回書かれているだけなのです。そこから導かれるのは

$$x = -2y \quad (1.71)$$

という**関係性**だけで、唯一解は存在しません。もちろん  $x = y = 0$  はこの関係性を満たしますから、解のひとつではあります。しかし、 $x = 1, y = -2$  でも、 $x = 2, y = -4$  でも同様に同じ方程式を満たしているのです。このような解を**非自明な解 (non-trivial solution)**といいます。連立方程式が唯一解を持つかどうかは、係数行列の**行列式**から判別できることが知られています。

### 数学・物理ノート 1.13: 逆行列と連立方程式

行列  $A$  を係数にもつ連立方程式

$$Ax = b \quad (1.72)$$

が唯一の解を持つとき、行列  $A$  は逆行列を持ちます。このとき、行列  $A$  は**正則である**といいます。逆行列  $A^{-1}$  は、

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \quad (1.73)$$

を満たす行列（ただし  $I$  は単位行列）で、このとき連立方程式の解は

$$x = A^{-1}b \quad (1.74)$$

と書けます。また、行列  $A$  が逆行列を持つ条件は、その行列式  $\det(A)$  がゼロではないことです。

逆に、 $\det(A) = 0$  のとき、その行列を係数としてもつ定数項がゼロの連立方程式  $Ax = 0$  は、非自明な解を持ちます。

### 数学・物理ノート 1.14: 行列式と逆行列

行列式は2次元の行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

に対しては  $\det(A) = ad - bc$ 、3次元の行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad (1.76)$$

に対しては、 $\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$  です。2次元の場合の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

と表されます。

### 演習問題 1.15: 逆行列

(i) (1.72) の両辺に左から  $A^{-1}$  を掛けることによって、(1.74) を証明しなさい。

(ii) 次の連立方程式が唯一解を持つかどうかを判別しなさい。解をもつ場合には係数行列の逆行列と、連立方程式の解を求めなさい。

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 13 & -27 \\ -91 & 189 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

もし、固有値問題 (1.64) の係数行列の行列式がゼロであれば、この連立方程式が非自明な解をもちます。つまり、その問題が  $\hat{n} = \mathbf{0}$  以外の物理的に意味を持つ解を持てるということになります。そのときに必要とされる条件は、

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda \end{pmatrix} = (\sigma_{11} - \lambda)(\sigma_{22} - \lambda) - \sigma_{12}^2 = 0 \quad (1.78)$$

です。このような固有値問題の係数行列の行列式をゼロにする方程式のことを、**固有方程式**といいます。これは固有値  $\lambda$  に関する 2 次方程式ですから、実数の解は最大で 2 つあります。2 次方程式の解の公式によると、それらは

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( \sigma_{11} + \sigma_{22} \pm \sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 4(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)} \right) \quad (1.79)$$

で、さらに整理すると、

$$\lambda = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (1.80)$$

と表されます。一般に、2 次方程式の実数解の個数は根号内（判別式）の符号によって定まり、解が常に 2 つあるとは限りません。しかしこの場合は、根号内は 2 つの実数の組の 2 乗和で必ず正ですから、**応力テンソルの固有値は常に 2 つ存在することが言えます。**

### 演習問題 1.16: 応力テンソルの固有値

2 次方程式 (1.78) の解が (1.80) であることを証明しなさい。

ひとたび固有値が求まれば、その固有値をもとの固有値問題に代入し、その方程式を満たす固有ベクトルを求めることができます。ただし、方程式は**非自明**であり唯一の解を持ちません。ある固有ベクトルに対して、その定数倍もまた固有ベ

クトルの資格を満たしているのです。今回の場合は、固有ベクトルが**法線ベクトル**であるという物理的な制約条件がありますから、長さが1になるような固有ベクトルを代表に選ぶことにしましょう。そのように選ばれた固有ベクトルは、角度 $\theta$ を用いて(1.66)のように書けるはずです。したがって、固有値問題は(1.80)の2つの解をそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2$ として、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix} &= \lambda_2 \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.81)$$

と、角度 $\theta_1, \theta_2$ を用いて表すことができます。ここで、

$$\hat{n}_1 \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix}, \hat{n}_2 \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix} \quad (1.82)$$

がこの問題の固有ベクトルです。長さが $|\hat{n}_1| = |\hat{n}_2| = 1$ に規格化する、というルールを設けることによって、そのベクトルがかならず角度変数を用いて(1.82)のように書くことができるのです。

### 演習問題 1.17: 固有ベクトルの角度変数表示

ベクトル $\hat{n} = (\hat{n}_1, \hat{n}_2)^T$ の長さが1である( $|\hat{n}| = 1$ )であるとします。  
このとき、

$$\tan \theta = \hat{n}_2 / \hat{n}_1 \quad (1.83)$$

を満たす角度 $\theta$ を用いて

$$\hat{n}_1 = \cos \theta, \quad \hat{n}_2 = \sin \theta \quad (1.84)$$

と表せることを図示によって示しなさい。

### 1.3.3 固有ベクトルの特徴

固有値・固有ベクトルの満たす関係式を成分で表現すると、

$$\sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} \hat{n}_{1j} = \lambda_1 \hat{n}_{1i}, \quad \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} \hat{n}_{2j} = \lambda_2 \hat{n}_{2i} \quad (1.85)$$

です。天下りな操作ですが、(1.85)の第1式と $\hat{n}_2$ との内積を取ってみると、

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} \hat{n}_{1j} \hat{n}_{2i} = \lambda_1 \sum_{i=1}^2 \hat{n}_{1i} \hat{n}_{2i} = \lambda_1 (\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2) \quad (1.86)$$

と書けます。

**数学・物理ノート 1.15: 内積と角度**

2つのベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の内積は、2次元の場合

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \sum_{i=1}^2 a_i b_i \quad (1.87)$$

で定義されます。内積は、2つのベクトルのなす角を  $\phi$  として

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \phi \quad (1.88)$$

という性質を持っています。もしベクトルの長さが  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$  であれば、内積は  $\cos \phi$  そのものになります。

同じように、(1.85) の第2式と  $\hat{\mathbf{n}}_1$  との内積を取ると、

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} \hat{n}_{2j} \hat{n}_{1i} = \lambda_2 \sum_{i=1}^2 \hat{n}_{2i} \hat{n}_{1i} = \lambda_2 (\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2) \quad (1.89)$$

です。この式の左辺で総和記号の添字  $i$  と  $j$  を入れ替え、かつ応力テンソルが対称テンソル ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ) であるということを利用すると、

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} \hat{n}_{2j} \hat{n}_{1i} = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \sigma_{ji} \hat{n}_{2i} \hat{n}_{1j} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} \hat{n}_{2i} \hat{n}_{1j} \quad (1.90)$$

が得られます。この式の右辺は、(1.86) の左辺に完全に等しいです。したがって、(1.86) と (1.89) は等価な式で、その右辺同士もまた等しいことがわかりました。

$$\lambda_1 (\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2) = \lambda_2 (\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2) \quad (1.91)$$

しかし、 $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  は固有方程式である2次方程式(1.85)の互いに異なる解でした。判別式(二次方程式の解の公式の根号内)が正であったため、重解もありえません。したがって、 $\lambda_1 \neq \lambda_2$  であり、かつ(1.91)が成立するためには、

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = 0 \quad (1.92)$$

でなければならないのです。長さ1のベクトル同士の内積は、その2つのベクトルのなす角の  $\cos$  に等しいのですから、応力テンソルの固有ベクトルは、(どんな応力テンソルに対しても) **かならず互いに直交**しているのです。

さて、2つの固有ベクトルが直交しているということは、

$$\theta_2 = \theta_1 \pm 90^\circ \quad (1.93)$$

であるということです。符号はどちらでも良いのですが、ここでは+を採用します。 $\theta_2 = \theta_1$  を  $\hat{\mathbf{n}}_2$  の定義(1.82)に代入すると、

$$\hat{\mathbf{n}}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + 90^\circ) \\ \sin(\theta_1 + 90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \end{pmatrix} \quad (1.94)$$

と書けます。

さて、ここで(1.81)の2本の方程式をまとめて扱うため、2つの法線ベクトル $\hat{n}_1$ と $\hat{n}_2$ を横に並べた行列 $R$ というものを考えます。

$$R \equiv [\hat{n}_1, \hat{n}_2] = \left[ \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

ここで最後の等式では(1.94)を用いました。このようにベクトルを並べた行列を用いると、(1.81)は

$$\sigma[\hat{n}_1, \hat{n}_2] = [\lambda_1 \hat{n}_1, \lambda_2 \hat{n}_2] \quad (1.96)$$

のように書けます。これに(1.95)を用いると、固有値を対角成分を持つ対角行列を用いて、

$$\sigma R = R \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (1.97)$$

と表されます。

### 数学・物理ノート 1.16: 対角行列

行列 $A$ が対角成分 $A_{ii}$ だけ値を持ち、非対角成分は $A_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ) であるとき、この行列は**対角行列**であるといいます。一般の行列を何らかの線形変換によって対角行列を求めるなどを、行列を**対角化する**といいます。

### 演習問題 1.18: 固有値の対角行列を用いた表現

(1.97)式の行列 $R$ と(1.96)式の法線ベクトルの角度変数を用いた表現をそれぞれ代入することで、両式が等価であることを示しなさい。

ここで、行列 $R$ は $\det(R) = 1$ で、その逆行列は

$$R^{-1} = R^T = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \quad (1.98)$$

ですから、 $R$ は直交行列（数学・物理ノート1.8）です。これを用いると、応力テンソルは固有値を対角成分にもつ対角行列を用いて、

$$R^{-1} \sigma R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (1.99)$$

と対角化されます。

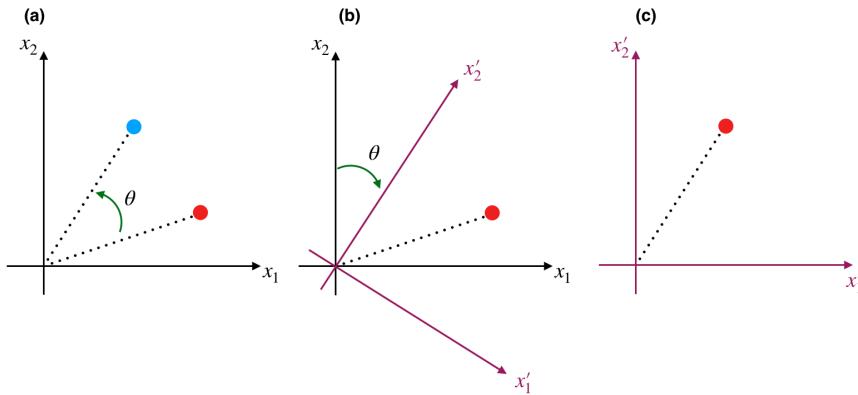


図 1.15 座標の回転と座標系の回転. (a) では、ある位置ベクトルを回転行列によって  $\theta$ だけ回転している。同じ操作は、ベクトルの位置を固定したまま、(b) のように座標系を反対方向に  $\theta$ だけ回転させた  $x'_1-x'_2$  座標系で元の点の位置を表現することもできる。この場合、(c) のように  $x'_1-x'_2$  を紙面水平鉛直に沿うように描画しなおすと、(a)において回転されたベクトルの位置に一致している。

### 1.3.4 ベクトルとテンソルの回転

実は、行列  $R$  は回転行列（数学・物理ノート 1.9）に一致しています。以下では、回転行列を回転角  $\theta$  を引数として  $R(\theta)$  と書くことにしましょう。角度  $\theta$  を引数にもつ回転行列にベクトル  $u$  を作用させる

$$v = R(\theta)u \quad (1.100)$$

と、それによって得られるベクトル  $v$  は、 $u$  を角度  $\theta$ だけ回転したもの（図 1.15(a)）になるのでした。その逆行列は

$$u = R^{-1}(\theta)v \quad (1.101)$$

と書けますが、これは角度  $-\theta$  の回転行列です。したがって、 $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$  が成り立ちます。一方、 $R(-\theta)$  はベクトルではなく座標系を  $\theta$ だけ回転させた、と見ることもできます（図 1.15b）。

この関係を用いると、(1.99) は応力テンソルを回転した座標系で表したものという意味をもつことが分かってきます。以下、そのことを示していきましょう。

#### 演習問題 1.19: 回転行列の逆行列

2×2 の回転行列の逆行列  $R^{-1}(\theta)$  をその成分から直接計算し、 $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$  を示しなさい。

まず、応力テンソルのコーシーの関係式に戻ります：

$$\sigma \hat{n} = T^{(\hat{n})} \quad (1.102)$$

これに対し,  $x_1-x_2$  から反時計回りに  $\theta$ だけ回転された座標系  $x'_1-x'_2$  を考えましょう。法線ベクトルとトラクションベクトルをこの回転後の座標系で表すと, 回転行列を用いて

$$\hat{n}' = \mathbf{R}^{-1}(\theta)\hat{n}, \quad \mathbf{T}'^{(\hat{n}')} = \mathbf{R}^{-1}(\theta)\mathbf{T}^{(\hat{n})} \quad (1.103)$$

と表されます。これをコーシーの関係式に代入すると,

$$\sigma \mathbf{R} \hat{n}' = \mathbf{R} \mathbf{T}'^{(\hat{n}')} \quad (1.104)$$

ですから, 左から回転行列の逆行列を作用させて,

$$(\mathbf{R}^{-1} \sigma \mathbf{R}) \hat{n}' = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{T}'^{(\hat{n}')} = \mathbf{T}'^{(\hat{n}')} \quad (1.105)$$

が得られます。ただしここでは

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (1.106)$$

の関係を用いました。

### 演習問題 1.20: 回転と逆回転の積

(1.106) 式は,  $\theta$ 回転して  $-\theta$ 回転したら元（なにもしない状態）に戻るということを意味しています。直感的には明らかでしょうが, 2次元の回転行列の成分から, 積  $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}$  を具体的に計算し, それが確かに単位行列になることを確かめなさい。

ところで, 回転後の座標系においてもコーシーの関係式は成り立っているはずです。そうであるならば, 回転後の座標系における応力テンソルを  $\sigma'$ と書くと,

$$\sigma' \hat{n}' = \mathbf{T}'^{(\hat{n}')} \quad (1.107)$$

が成立しているはずです。 (1.105) と (1.107) とを比べると, テンソルは座標系の回転によって

$$\sigma' = \mathbf{R}^{-1} \sigma \mathbf{R} \quad (1.108)$$

という変換をうけるということがわかります。

この関係 (1.108) を踏まえてあらためて (1.99) と (1.108) とを比べると, 左辺はまったく同じであることに気が付きます。つまり, (1.99) は応力テンソルを角度  $\theta_1$ だけ回転したものですが, その結果が固有値  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  を用いた対角行列になっています。ということは,  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  は回転された座標系における応力テンソルの成分そのものなのです。このようにして対角化された応力テンソルの対角成分  $\sigma_1 \equiv \lambda_1, \sigma_2 = \lambda_2$  を**主応力**といい, 回転した座標系の軸方向を**主方向**, 主方向に沿った座標軸を**主軸**といいます。

長い議論でしたので, 結果をあらためて整理しておきましょう:

- 応力テンソルは、適当な角度  $\theta$  で回転すると、剪断成分をもたない対角テンソルの形に書くことができる。
- 応力テンソルを対角化するための回転行列は、応力テンソルの固有ベクトルを並べる事によって作ることができる。
- 対角化された応力テンソルの対角成分である主応力の値は、応力テンソルの固有値である。
- 上記を満たすような回転角度が必ず存在することが、数学的に保証されている。

これは 3 次元空間においても全く同じです。任意の応力テンソルは

$$\mathbf{R}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (1.109)$$

のように回転によって対角化されます。ただしこの場合の  $\mathbf{R}$  は 3 次元空間内の回転行列です。この回転行列が応力テンソルの固有ベクトルで作られることも、2 次元と同じです。

#### 数学・物理ノート 1.17: 実対称行列の固有値問題

ここでは応力テンソルに対して、その固有値が実数でかならず 2 つ（2 次元の場合）あり、かつ固有ベクトル同士が直交する、ということを示してきました。しかし、実はその証明に使った条件はたった一つ、**応力テンソルが対称テンソルである**ということだけです。

実はより一般に、実対称行列（成分が実数の対称行列）は、その大きさと同じだけの個数の実数の固有値を持ち、それらの固有値に対応する固有ベクトルは、必ず互いに直交するということが知られています。これは 2 次元だけでなく、3 次元以上でも成立します。3 次元の場合には 3 つの固有ベクトルがあり、それらがすべて互いに直交するのです。また、同じ対角化手法が、対称テンソルであるひずみテンソルと応力テンソルの他、第 4.1.2 節で導入するモーメントテンソルにも適用できます。

応力テンソルの対角成分（法線応力）は、軸方向の引張や圧縮のトラクションを意味する成分でした。本節で導いたことは、剪断が働いているように見える場合であっても、適当な方向に座標軸をとりなおすことによって、圧縮と膨張の力だけでそれを表現することができる、ということなのです。

#### 1.3.5 主ひずみ

これまで応力テンソルを例にしてきましたが、固有値と固有ベクトルによって対角化されるという特徴は、ひずみテンソルについても全く同じように成立します。同じように大きさを 1 に規格化した固有ベクトルから回転行列を作成し、

それによってひずみテンソルを回転すると、固有値を対角成分にもつ対角テンソルが得られます：

$$\mathbf{R}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (1.110)$$

このときの  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  を**主ひずみ**といいます。

### 主ひずみとテンソル回転の例

ひずみテンソルの対角化の具体例として、2次元  $x_1-x_2$  面内において、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad (1.111)$$

を考えましょう。ただしここでは  $\varepsilon_{12} = c > 0$  であるとします。このひずみテンソルによってもたらされる変形場は図 1.6(d) に示されています。

ひずみテンソルの固有値を  $\lambda$ 、固有ベクトルを  $v$  とすると、

$$\begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} v = \lambda v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & c \\ c & -\lambda \end{pmatrix} v = \mathbf{0} \quad (1.112)$$

です。これが非自明な解を持つためには、

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & c \\ c & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - c^2 = 0 \quad (1.113)$$

でなくてはなりません。この解は  $\lambda = \pm c$  です。

次に固有ベクトルを求めましょう。(1.112) に固有値のうち正の値のほうを代入すると、

$$\begin{pmatrix} -c & c \\ c & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.114)$$

ですから、展開して整理すると、どちらも

$$v_{11} = v_{12} \quad (1.115)$$

という関係に帰着します。この条件をみたし、かつ長さが 1 のベクトルは

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) \end{pmatrix} \quad (1.116)$$

です。同様に、もう一つの固有値に対する固有ベクトルは、

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(3\pi/4) \\ \sin(3\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\pi/4) \\ \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \quad (1.117)$$

と求められます。

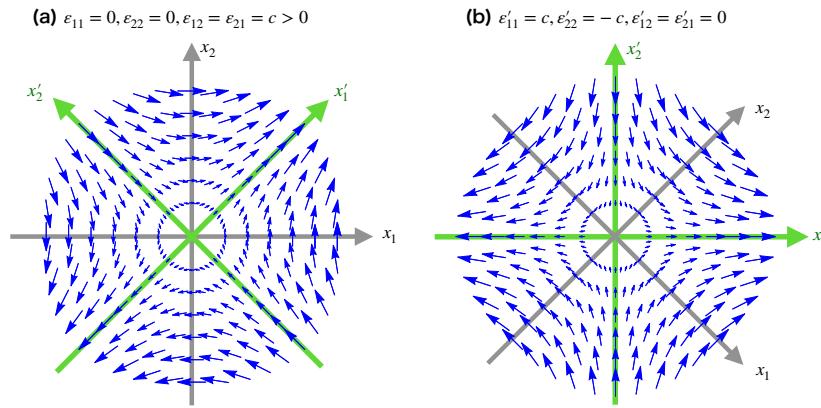


図 1.16 ひずみによる変形場の回転の例.

## 演習問題 1.21: 固有ベクトルの推定

負の固有値  $\lambda = -\varepsilon_{12}$  に対する固有ベクトルが (1.117) であることを証明しなさい。

これらを並べて回転行列を作ると,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} \quad (1.118)$$

が得られます。この行列は  $\pi/4 \text{ rad} = 45^\circ$  回転を表す行列です。これによって、ひずみテンソルは

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \quad (1.119)$$

と対角化されました。

図 1.16(a) に (1.111) のひずみによる変形場を、(b) に回転後の (1.119) による変形場をそれぞれ示します。図 1.16(a) では  $x_1, x_2$  軸の方向には座標軸に直交した変形が得られていますが、図 1.16(b) では、たしかに主方向である  $x'_1$  と  $x'_2$  方向には軸方向にだけ変形しているということがわかるでしょう。また、注意深く図 1.16(a) と (b) を比べると、(a) に対して (b) のベクトル場は 45 度時計回りに回転していることも確認できます。

## 1.4 モールの応力円

### 1.4.1 2次元面内におけるトラクションとその回転

$x_1-x_2$  平面内における2次元の変形を考えます。図1.17のように、法線ベクトル  $\hat{n}$  を持つ面<sup>\*17</sup>を考え、そこに働くトラクションを調べることにしましょう。我々はもうコーシーの関係式を知っていますから、面の法線ベクトルを求め、それを応力テンソルに作用させれば、どんな面に対してもトラクションベクトルを求めることができます。

実用上は、ある角度  $\theta$  が与えられたときに、その角度の面にかかるトラクションの、面に対する法線方向や接線方向のトラクションを調べるということがよくあります。本節では、図示によって法線・接線方向のトラクションを調べることができます。**モール (Mohr) の円**という強力な方法を学びます。

$x_3$  方向を無視した2次元空間での応力テンソルは

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (1.120)$$

です。法線ベクトルは、 $x_1$  軸と面のなす角を  $\theta$  とすれば

$$\hat{n} = (\cos \theta, \sin \theta)^T \quad (1.121)$$

と表されます。したがって、この面に働くトラクションは、コーシーの関係式から

$$T^{(\hat{n})} = \begin{pmatrix} T_1^{(\hat{n})} \\ T_2^{(\hat{n})} \end{pmatrix} = \sigma \hat{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.122)$$

です。

この計算で得られたのは、トラクションの  $x_1$  方向と  $x_2$  方向の成分  $T_1^{(\hat{n})}, T_2^{(\hat{n})}$  です。では、今考えている法線ベクトル  $\hat{n}$  の面の法線方向に働く応力（法線応力）や接線方向に働く応力（剪断応力）はどうでしょうか。それらは、トラクションベクトルの図1.17中の  $v-w$  座標軸方向の値を求めるに相当します。 $x_1-x_2$  座標系と比べて、 $v-w$  座標系は  $+ \theta$  だけ回転しているのですから、 $x_1-x_2$  座標系で表したベクトルを  $v-w$  座標系でみると、あたかも  $- \theta$  だけ反対方向に回転したかのように見えるはずです。つまり、 $x_1-x_2$  座標系で求まったトラクションベクトルを  $- \theta$  だけ回転することにより、法線応力と剪断応力が求まることになります。それぞれの値を  $T_v^{(\hat{n})}, T_w^{(\hat{n})}$  とすると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T_v^{(\hat{n})} \\ T_w^{(\hat{n})} \end{pmatrix} &= R(-\theta) \begin{pmatrix} T_1^{(\hat{n})} \\ T_2^{(\hat{n})} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{(\hat{n})} \\ T_2^{(\hat{n})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.123) \end{aligned}$$

<sup>\*17</sup> 面ではなくて線だろう、と思うかもしれません。2次元の問題ではこの線がは  $z$  方向（紙面の手前と奥行き方向）に延々連続していると仮定しています。ですから、これはあくまでも  $x_1-x_2$  断面を切る面なのです。

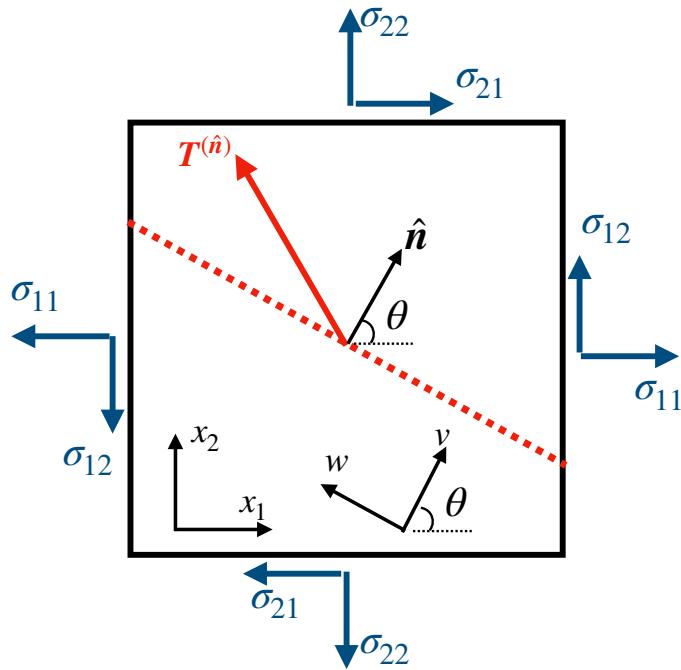


図 1.17 2 次元  $x_1-x_2$  平面内における応力場とその内部に考える面（点線）にはたらくトラクション  $T^{(\hat{n})}$ 。四角形周辺の矢印がこの場に働く応力テンソル成分とその方向を、四角形中の 2 つの座標軸は 12 直交座標系と、面と面に直交する方向からなる  $vw$  座標系。

です。行列の積を展開して具体的に計算してみると、

$$\begin{aligned} T_v^{(\hat{n})} &= \sigma_{11} \cos^2 \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta + 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta \\ T_w^{(\hat{n})} &= -\sigma_{11} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (1.124)$$

であり、三角関数の半角公式

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad (1.125)$$

を利用して整理すると、

$$\begin{aligned} T_v^{(\hat{n})} &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta \\ T_w^{(\hat{n})} &= -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (1.126)$$

が得られます。式 (1.126) は、外部からかかっている応力  $\sigma$  と面（を表す法線）の角度  $\theta$  がわかれば法線応力  $T_v^{(\hat{n})}$  と剪断応力  $T_w^{(\hat{n})}$  がわかる、ということを表しているのです。

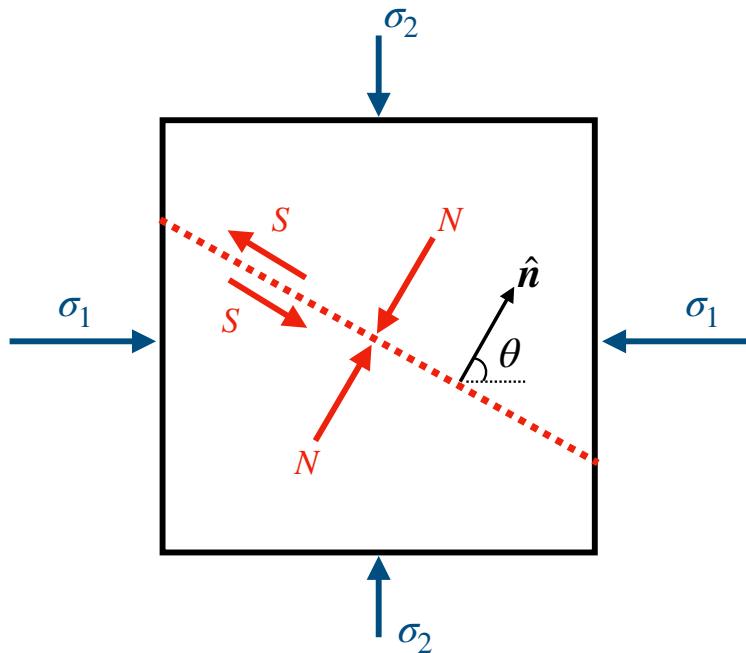


図 1.18 図 1.17 からいくつかの仮定のもと（詳しくは本文）に単純化したレイアウト。

### モールの円とその意味

式 (1.126) だけでも十分有用なのですが、ここではもうすこし簡略化された状況を考えましょう。まず、圧縮を正とする法線応力  $\sigma_1, \sigma_2$  ( $\sigma_1 > \sigma_2$ ) を導入<sup>\*18</sup> し、

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -\sigma_{11} \\ \sigma_2 &= -\sigma_{22} \\ \sigma_{12} &= 0\end{aligned}\tag{1.127}$$

であると仮定します（図 1.18）。剪断応力  $\sigma_{12}$  がゼロというのは強い仮定に思うかもしれません、前節で学んだように、どんな場合でも適切に座標系を回転することで (1.127) を満たすようにできるのでした。つまり、 $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  は主応力です。また、面に対する法線方向の応力を圧縮を正として  $N = -T_v^{(\hat{n})}$ 、剪断方向の応力をそのまま  $S = T_w^{(\hat{n})}$  としましょう。これらの関係を (1.126) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}N &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \\ S &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta\end{aligned}\tag{1.128}$$

より、

$$\left(N - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + S^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2\tag{1.129}$$

が得られます。この式は  $N$ - $S$  軸上の円を表していることから、**モールの円**と呼ばれます。

<sup>\*18</sup> ここでは地震学で用いられる慣習によって圧縮正の（普段とは逆の）符号を用いています。

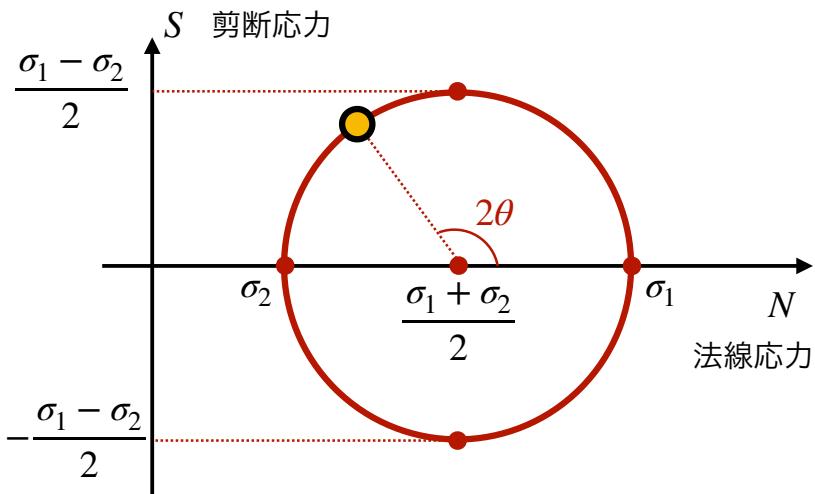


図 1.19 モールの円。円の  $N$  軸から角度  $2\theta$  反時計回りの点の位置が、その面にかかる法線応力と剪断応力を表している。

### 数学・物理ノート 1.18: 円の方程式

$x_1-x_2$  平面で、半径  $r$ 、中心  $(a, b)$  を持つ円の方程式は以下のように表されます。

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (1.130)$$

これは、与えられた外部からの応力  $\sigma_1, \sigma_2$  に対して、任意の角度  $\theta$  の面にかかる法線応力  $N$  と剪断応力  $S$  の組が、円上のどこかに来る、ということを意味しています（図 1.19）。しかも、円上の位置は  $N$  軸から反時計回りに角度  $2\theta$  の位置である、ということもわかります。モールの円を作図することで、内部にかかっている応力を図解により求めることができます。

## 1.5 弾性体の運動方程式

これまでに弾性体に働く力を応力テンソルで記述することができたので、運動方程式を立てられます。

### 1.5.1 微小立体の運動方程式

1つの（あるいは複数の）点について運動方程式が立てられた質点の場合とは異なり、弾性体では弾性体内のあらゆる点が運動をします。そこでまず、弾性体の一部分（場所  $x$ ）から、体積  $dV = dx_1 \times dx_2 \times dx_3$  の直方体を切り出してきて、それについて運動方程式を立てることにしましょう。この部分の元の位置からの変形（変位）を、位置  $x$  と時間  $t$  に依存するベクトル  $u(x, t)$  と書くことすれば、

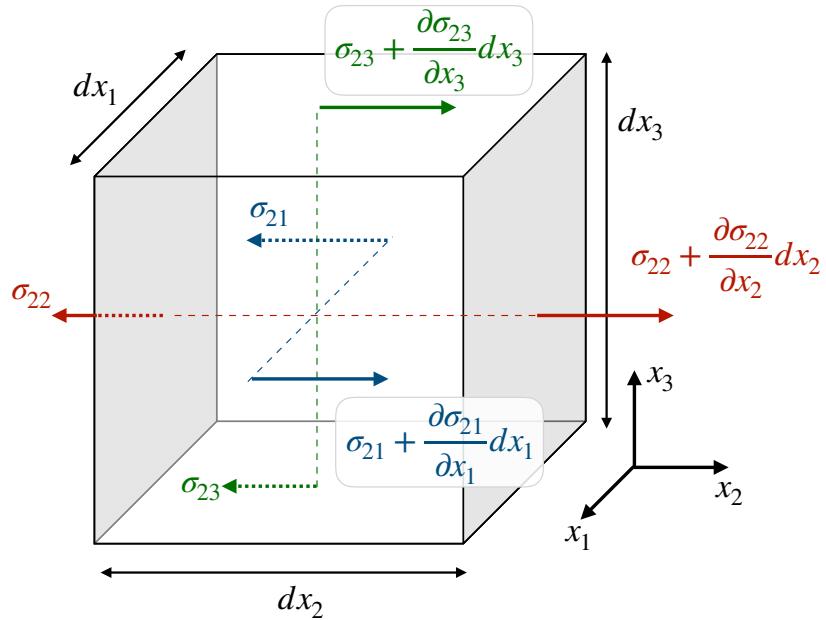


図 1.20 弾性体内的微小体積要素に働く  $x_2$  方向の応力テンソル成分.

運動方程式の左辺は質量と加速度の積として,

$$[\rho(x) dx_1 dx_2 dx_3] \times \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.131)$$

と表せます. ここで  $\rho$  は弾性体の質量密度, つまり単位体積あたりの重さです. 単位体積あたりの重さに体積を乗じることによって, 直方体  $dV$  全体の重さが求められます. 変位の時間に関する 2 階微分が加速度を表していますが, 変位ベクトルは場の量であって, 位置  $x$  にも依存しますから, 常微分ではなく偏微分記号が用いられています.

運動方程式の右辺には, その物体にかかる力をすべて記述する必要があります. 弾性体にかかる力には, 2通りのものがあるのです. 一つが実体力  $f(x, t)$  で, これは単に体積あたりの力です. もう一つは面力です. 面力は, 今考えている直方体  $dx_1 dx_2 dx_3$  の表面 (6つの長方形) すべてに働きますから, それらを重ね合わせる必要があります.

図 1.20 にあらためて立方体  $dx_1 dx_2 dx_3$  にかかる応力を示します. 特に  $x_2$  方向に法線を持つ面 ( $x_1-x_3$  面) にかかる  $x_2$  方向の力を詳しく見ていくことにしましょう. このような面には,  $x_2$  と  $x_2 + dx_2$  の 2つがあります. ひとつめの位置  $x_2$  (図左側) における面は, 法線ベクトルが負の方向を向いていますから, そこにかかる応力ベクトルは,

$$T_2^{(-\hat{n}_2)}(x_2) = -\sigma_{22}(x_2) \quad (1.132)$$

です<sup>19</sup>. もうひとつの面 (右側) にかかる力は, 法線は  $+x_2$  方向ですが, 場所が

<sup>19</sup> 応力テンソルは位置  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  の関数ですが, 見通しを良くするため  $x_2$  以外の引数を

$dx_2$ だけずれていますから、

$$T_2^{(\hat{n}_2)}(x_2 + dx_2) = +\sigma_{22}(x_2 + dx_2) \quad (1.133)$$

のトラクションがかかります。トラクションは面積あたりの力ででしたから、この面の面積をトラクションに乘じて、かつ両方のトラクションの効果を足し合わせることにより、 $x_1-x_3$ 面にかかる $x_2$ 方向の力は

$$\begin{aligned} & \left( T_2^{(\hat{n}_2)}(x_2 + dx_2) + T_2^{(-\hat{n}_2)}(x_2) \right) dx_1 dx_3 = [\sigma_{22}(x_2 + dx_2) - \sigma_{22}(x_2)] dx_1 dx_3 \\ & \simeq \left( \left[ \sigma_{22}(x_2) + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 \right] - \sigma_{22}(x_2) \right) dx_1 dx_3 = \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (1.134)$$

と表されます。ただし、 $dx_2$ が十分小さいという条件のもとで、1次のテイラー展開を行いました<sup>20</sup>。

$x_2$ 方向にかかる力は、まだこれだけではありません。さらに、 $x_1-x_2$ 面 ( $x_3$ 方向に法線を持つ面) の $\sigma_{23}$ と $x_2-x_3$ 面 ( $x_1$ 方向に法線を持つ面) の $\sigma_{21}$ も $x_2$ 方向への力です。上記と全く同じように計算すると、それぞれ

$$\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (1.135)$$

が得られます。すべてをまとめると、 $x_2$ 方向の運動方程式は

$$\begin{aligned} & \rho(x) \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} dx_1 dx_2 dx_3 \\ & = \left[ \frac{\partial \sigma_{21}(x, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}(x, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}(x, t)}{\partial x_3} + f_2(x, t) \right] dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (1.136)$$

と表されます。

### 1.5.2 運動方程式

これまで微小体積要素が満たす運動方程式を考えてきました。さらにその運動方程式の両辺を直方体の体積 $dx_1 dx_2 dx_3$ で規格化することで、体積要素の大きさに依存しない、より一般的な**単位体積当たりの運動方程式**が得られます。 $x_1, x_3$ 方向についても $x_2$ 方向と全く同様に運動方程式を導けます。すべての成分を書き下すと、

$$\begin{aligned} \rho(x) \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{11}(x, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}(x, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}(x, t)}{\partial x_3} + f_1(x, t) \\ \rho(x) \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{21}(x, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}(x, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}(x, t)}{\partial x_3} + f_2(x, t) \\ \rho(x) \frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{31}(x, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}(x, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}(x, t)}{\partial x_3} + f_3(x, t) \end{aligned} \quad (1.137)$$

---

省略しています。

<sup>20</sup>  $\sigma_{22}(x_2 + dx_2) \simeq \sigma_{22}(x_2) + (\partial \sigma_{22}/\partial x_2) dx_2$

です。全部をまとめて、

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + f_i(\mathbf{x}, t) \quad (1.138)$$

のように簡略に表すこともできます。 $(1.137)$  あるいは  $(3.10)$  が、一般的な弾性体の運動を記述する運動方程式です。

弾性体の運動方程式は単位体積あたり方程式任意の点の変形を表し、そこにある力は実体力と応力の空間微分であることがわかりました。応力は変形によってひずんだ弾性体がもとに戻ろうとする内力ですが、それらが全て釣り合っていたら、それ以上変形（運動）は起こりません。運動が起こるのは、応力のバランスが崩れた（応力テンソル成分の空間微分がゼロでなくなった）ときなのです。

### 1.5.3 平衡方程式

弾性体が力学的に釣り合った状態というのも重要です。質点系の力学と同じく、力が釣り合った状態にあれば、弾性体は運動をしませんが、運動が起こらないから応力テンソルがゼロになっているとは限らないのです。運動方程式から加速度項をゼロにした**平衡方程式**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_3} + f_1(\mathbf{x}, t) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_3} + f_2(\mathbf{x}, t) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_3} + f_3(\mathbf{x}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.139)$$

が成立しており、これを満たすように応力と体積力が空間分布することになるのです。

## 1.6 構成関係式

### 1.6.1 構成関係式の導入

運動方程式は、応力テンソル（の空間微分）がわかれれば記述できます。それは、かかっている力（応力テンソルの空間微分）がわかれれば、物体の変形が記述できるということです。では、その応力はどうやって求めるのでしょうか。

物体が変形してひずみがかかると、それによってあらたに内力である応力があらたにかかります。この、ひずみ  $\varepsilon_{ij}$  と応力  $\sigma_{ij}$  との間をつなぐのが、**構成関係式（あるいは構成関係式）** です。構成関係式は、バネにつながれた質点におけるフックの法則 ( $F = -kx$ ) に相当するもので、**物体がひずんだときにどれだけの応力がかかるか** を表現します。構成関係式は実験によって定まるような関係式であって、理論的に導出されるものではありません。ですが、**ひずみが十分に小さい場合**には、質点におけるバネと同じように、応力がひずみの線形関数でよく表され

るということが知られています。このような媒質を**線形弾性体**といいます。以下では、媒質が線形弾性体でよく近似できることを仮定します。

ひずみと応力が最大9個の独立成分を持ち<sup>21</sup>、応力がひずみの線形関数であるということは、たとえば応力テンソルの成分 $\sigma_{11}$ は、

$$\sigma_{11} = a_1 \varepsilon_{11} + a_2 \varepsilon_{12} + \cdots + a_9 \varepsilon_{33} \quad (1.140)$$

のように、ひずみテンソル9つの線形な重ね合わせで書ける、ということです。ということは、すべての応力とひずみの組み合わせには、なんと $9 \times 9 = 81$ 個の係数が必要です。形式的に書くと、構成関係式は

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.141)$$

と表されます。ここで $C_{ijkl}$ は**弾性係数テンソル**と呼ばれるパラメタ<sup>22</sup>で、 $i, j, k, l$ それぞれが1, 2, 3の値をとり得ますから、その個数は確かに $3^4 = 81$ 個あります。

81個もパラメタがあるのかとうんざりするかもしれませんね。でも、心配無用です。すでに調べたひずみテンソルと応力テンソルの対称性に加えて、**弾性体の特徴が方向に依存しない（等方性）**という仮定をすることによって、81個のうち独立なパラメタは、なんと2個まで減らせるということが知られています<sup>23</sup>。その構成関係式は、

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (1.142)$$

と表されます。このような性質をもつ弾性体を、特に**線形等方弾性体**と呼びます。

### 数学・物理ノート 1.19: クロネッカーのデルタ

(3.11) 式に現れる $\delta_{ij}$ はクロネッカー (Kronecker) のデルタと呼ばれ、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (1.143)$$

と定義される量です。この項があることによって、 $i = j$ と $i \neq j$ を場合分けせず一本の式にまとめて書くことができます。もしクロネッカーのデル

<sup>21</sup> すでに述べたように実は独立成分はそれぞれ6つしかないのでした。9つというのはあくまでも数式表現の形式的な数のことです。

<sup>22</sup> これまでのテンソルは行列とまったく同じ扱いをしてきましたが、これは添字が4つもあるので、行列とは明らかに異なります。応力テンソルやひずみテンソルといった2階のテンソル（添字が2つのテンソル）は、ベクトル（添字が1つ）をベクトルに移す線形写像でした。弾性係数テンソルは添字4つをもつ**4階のテンソル**で、2階のテンソルを2階のテンソルに写像する関係を与えるものなのです。添字が多くなって複雑ですが、式(1.141)は行列とベクトルの積（あるいは2階のテンソルによるベクトルの線形写像）の式を拡張した形になっています。

<sup>23</sup> 導出過程はかなり煩雑で難しいため、ここではその結果を正しいと受け入れてもらいます。興味があるなら Aki and Richards (2002) に挑戦することを勧めます。

タを使わずに (3.11) を表現しようとすると、場合分けが必要になり、

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ii} & (i=j) \\ 2\mu\varepsilon_{ij} & (i \neq j) \end{cases}$$

となります。

等方弾性体の弾性係数テンソルは、

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.144)$$

と表すことができるところが知られています。

### 演習問題 1.22: 線形等方弾性体の構成関係式

(1.144) を (1.141) に代入して  $j, l$  について和を取り、クロネッカーのデルタの定義を用いることで、線形等方弾性体の構成関係式 (3.11) が得られることを確認しなさい。

この構成関係式に現れたパラメタ  $\lambda$  と  $\mu$  を、**ラメ (Lamé) の定数** と呼びます<sup>24</sup>。ちょっと分量が多いですが、構成関係式を全成分書き下してみましょう。

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11} = \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \sigma_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22} = \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \sigma_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33} = \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23} = \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \sigma_{13} &= 2\mu\varepsilon_{13} = \mu \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (1.145)$$

ひずみテンソルの定義を通じて、応力がひずみと、あるいは変位と関係づけされました。

構成関係式は、ひずみテンソル成分と弾性係数がわかれば応力テンソルの各成分が求まる、ということを意味しています。一方、これをひずみテンソル成分に

<sup>24</sup> 日本語で「定数」と呼ばれる習慣がありますが、実際には値が一定であるという意味の「定数」ではありません。これらのパラメタは弾性体の特徴を表すもので、弾性体の性質によって（一定ではない）異なる値を取ります。

ついての連立方程式としてみて、ひずみテンソルについて（原理的には<sup>25)</sup> 解くこともできます。一般に

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 D_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (1.146)$$

のような形で構成関係式を表したときに、係数  $D_{ijkl}$  のことを**弾性コンプライアンス**テンソルと呼びます。線形等方弾性体の場合には、

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (1.147)$$

であることが知られています。

### 演習問題 1.23: 弾性コンプライアンス

線形等方弾性体の構成関係式 (3.11) を  $\varepsilon_{ij}$  について解いて (1.147) を証明しなさい。6 元の連立方程式であるが、以下のステップで計算することにより比較的簡単に解くことができます。

- (i)  $i \neq j$  の場合について  $\varepsilon_{ij} = (1/2\mu)\sigma_{ij}$  を満たすことを示しなさい。
- (ii) (3.11) から  $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$  を計算し、それを  $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  を用いて示しなさい。
- (iii) (ii) の結果をあらためて  $i = j$  の場合の (3.11) に代入し整理することで、 $\varepsilon_{ii}$  を応力テンソルだけを用いて表現し、(i) の結果とあわせて (1.147) を証明しなさい。

ともあれ、これで変形があったとき（変位  $u$  が与えられたとき）に、どのような応力がかかるかがわかるようになりました。そしてどのような応力がかかるのかがわかれれば、運動方程式が立てられて、それを解くことでどのような変形が起こるのかもわかるのです。

### フォークト記法

構成関係式は、ある種の行列形式で書き下すこともできます：

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (1.148)$$

<sup>25)</sup> ここでの「原理的には」というのは、ひずみテンソルの 9 つの成分に対して、 $\sigma_{ij} = \dots$  という方程式が 9 本できますから、未知数の数と方程式の本数が等しいため連立方程式が解を持ちうる、ということです。

このように、 $11, 22, 33, 23, 13, 12$  成分の順番に応力・ひずみテンソルを並べて、あたかも擬似的な 6 次元ベクトルのように表すと、構成関係を簡単に表現することができます。この表記法は**フォークト（Voigt）記法**と呼ばれています。剪断ひずみのベクトル化表現に係数 2 がつくのは慣習に基づくものです。ただし、分野によっては、 $\varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}$  ではなく係数行列の  $\mu$  に係数 2 を掛ける定義のしかたもあります。

### 演習問題 1.24: フォークト記法の確認

フォークト記法に基づく構成関係式 (1.148) を展開して、もとの構成関係式 (1.145) に一致することを確認しなさい。

## 1.6.2 弹性体を表現する様々なパラメタとその関係

分野によって、弹性体を表現するパラメタにはいろいろなものが用いられます。そのうち主要なものに、ヤング（Young）率  $E$ 、剛性率  $G$ 、ポアソン（Poisson）比  $\nu$ 、体積弹性率  $K$  があります。

等方弹性体では任意の 2 つのパラメタで残りのパラメタを表現することができるので、どのような組み合わせを選んでも構いません。しかし、パラメタによっては、それ自身に物理的な意味付けがあることがありますので、弹性体力学を応用する分野によって好まれるパラメタが異なります。地震学では、理論的な導出がやりやすいという理由で、ラメの定数  $\lambda$  と  $\mu$  が広く用いられていますが、ラメの定数のうち  $\lambda$  は、単独で物理的な意味を持ちません。

本節では、いくつかの弹性係数とラメの定数との関係をまとめて紹介します。パラメタによって単位（次元）が異なりますので、注意してください。

### ヤング率 $E$

ヤング率は、一方向の引張もしくは圧縮に対するひずみと応力の間の比例定数です。図 1.21 のように、棒状の弹性体に棒の長さ方向（この場合は  $x_3$  方向）に法線応力  $\sigma_{33}$  をかけると、それによって変形が起こります。そのときの  $x_3$  方向の法線ひずみ  $\varepsilon_{33}$  は

$$\varepsilon_{33} = \frac{\delta L}{L} \quad (1.149)$$

と書けるでしょう。ヤング率はこの法線応力と法線ひずみの比として、

$$E \equiv \frac{\sigma_{33}}{\varepsilon_{33}} \quad (1.150)$$

で定義されます。

つまり、ヤング率は「弹性体を引っ張ったときどれだけ伸びやすいか」という指標であり、質点系の力学におけるバネ定数の弹性体への自然な拡張です。ヤン

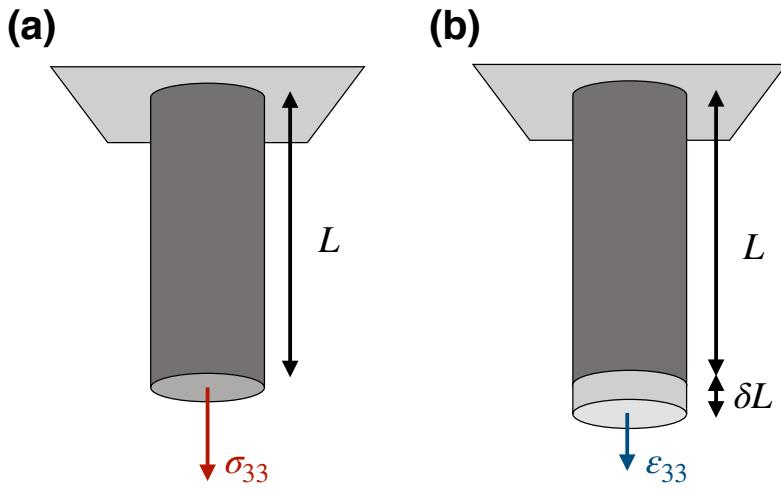


図 1.21 ヤング率の模式図. (a) 変形前とそこにかける応力. (b) 変形により発生したひずみ.

グ率は応力 (SI 単位系で  $\text{N}/\text{m}^2 = \text{Pa}$ ) と無次元のひずみの比ですので、応力と同じ次元 (単位面積あたりの力) を持ります。

ヤング率は、ラメの定数と以下の式で相互変換できることが知られています。

$$E = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu \quad (1.151)$$

### 剛性率 $G$

剛性率はラメの定数  $\mu$  の別名で、 $G = \mu$  です。剛性率は圧力 (あるいは応力) と同じ次元を持ちます。構成関係式のうち、剪断応力と剪断ひずみの関係  $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ) から  $\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}/(2G)$  であることに注目すると、媒質に剪断応力 (物体をねじるような応力) がかかったときに、剛性率が大きいほど剪断ひずみが小さいと言えるでしょう。つまり、剛性率は「物体のねじれにくさの指標」です。

### ポアソン比 $\nu$

図 1.22 のように、有限の大きさの物体に法線応力  $\varepsilon_{33}$  をかけると、物体がその方向に伸びるだけでなく、それに直交する方向にも変形が起こります。ポアソン比は、物体に一方向の応力  $\sigma_{33}$  を与えたとき、その方向に対するひずみ  $\varepsilon_{33}$  と、それに直交する方向のひずみ  $\varepsilon_{11}$  もしくは  $\varepsilon_{22}$  の比として定義されます。

$$\nu \equiv -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} \quad (1.152)$$

無次元のひずみの比ですから、ポアソン比もまた無次元量です。符号がマイナスであるのは定義によります。

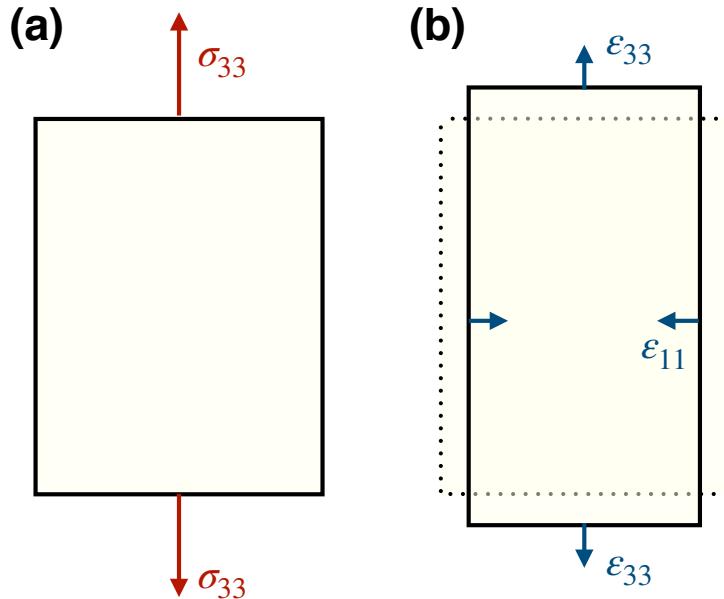


図 1.22 ポアソン比の模式図. (a) 変形前とそこにかける応力. (b) 変形後の様子.

物体を一方向に引っ張って引き伸ばしたとき、ほとんどの物質はそれに直交する方向には縮むため、一般には  $\nu > 0$  であると思って良いでしょう。とはいえ、あらゆる物体に対して  $\nu > 0$  であることが保証されているわけではありません。ポアソン比が負（つまりある方向に引っ張ると他の方向にも膨らむ）の物質もごくまれに存在するし、人工的にも合成されているようです。

ポアソン比はラメの定数を用いると、

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (1.153)$$

と表されることが知られています。

### 体積弾性率 $K$

体積弾性率は、等方的な応力  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$  (図 1.23) に対して、物体がどれだけ体積変化するかを表す指標です<sup>26</sup>。体積変化は  $\theta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$  で表すことができたので、体積弾性率はそれと応力の比

$$K = \frac{\sigma_{11}}{\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}} \quad (1.154)$$

で定義されます。体積弾性率は応力やラメの定数と同じ次元を持ちます。

体積弾性率とラメの定数との換算式は、

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (1.155)$$

<sup>26</sup> 一般には体積弾性率は圧力にたいしてどれだけ体積が縮むか、として定義されるますが、符号が逆の応力に対してどれだけ膨らむか、としても全く同じことです。

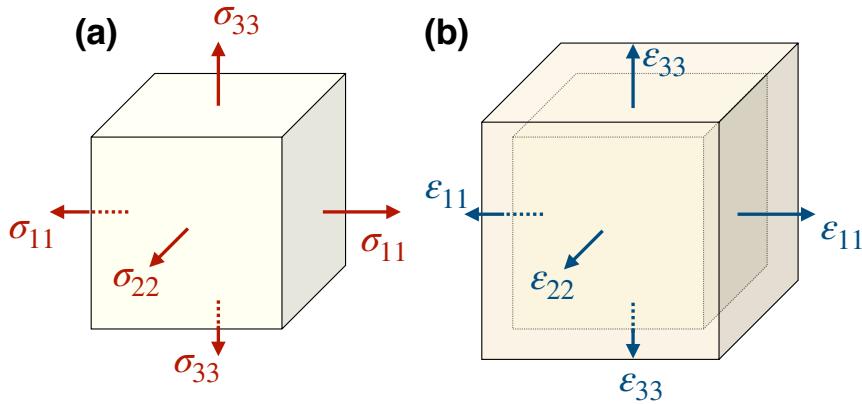


図 1.23 体積弾性率の模式図. (a) 変形前. (b) 変形後.

です。

### 演習問題 1.25: 弾性係数の相互変換

構成関係式 (1.145) に以下の条件をそれぞれ代入することで、ヤング率・ポアソン比・体積弾性率のラメの定数による表現 (1.151), (1.153), (1.155) を導出しなさい。

- (i)  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0, \sigma_{33} > 0, \sigma_{ij} = 0 (i \neq j), \varepsilon_{ij} = 0 (i \neq j)$  のとき,  
 $E = \sigma_{33}/\varepsilon_{33}$
- (ii)  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{11}, \sigma_{11} = \sigma_{22} = 0, \sigma_{ij} = 0 (i \neq j), \varepsilon_{ij} = 0 (i \neq j)$  のとき,  
 $\nu = -\varepsilon_{11}/\varepsilon_{33}$
- (iii)  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}, \sigma_{ij} = 0 (i \neq j), \varepsilon_{ij} = 0 (i \neq j)$  のとき,  
 $K = \sigma_{11}/(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$

## 1.7 まとめ

これまで導入してきた概念と結果を整理しましょう。

- ひずみテンソルの定義

$$\varepsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.156)$$

- 応力テンソルとコーチーの関係式

$$T_i^{(\hat{n})} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \hat{n}_j \quad (1.157)$$

- 構成関係式（線形等方弾性体の場合）

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (1.158)$$

- 運動方程式

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + f_i(\mathbf{x}, t) \quad (1.159)$$

がこれまでに導入、あるいは導出されました。

運動方程式は弾性体内の変位を記述するのですが、その右辺は変位でなく応力テンソルで書かれています。しかし、その応力テンソルはいまや構成関係式によってひずみテンソルと関係づけられ、そのひずみテンソルは定義により変形（変位）の空間微分で与えられます。ということは、運動方程式の右辺が変位の関数になっているのです。あとは外力  $f_i$  さえ与えられれば、原理的には（どうやるかは別として）この方程式を解くことができるはずです。このような状態を、**閉じた系**である、といいます。また、応力とひずみの間の構成関係式には2つの独立な係数（弾性係数）が現れました。これらの係数は、パラメタの選び方によって、弾性体のねじりにくさ、膨張しやすさ等々のさまざま特徴を表します。これらの弾性係数は、建築物等の材料の特性や、地球内部の固体部分の特性を記述するのにも用いられます。

## 第2章

# 地震計測論入門

本節では、古典的な**機械式地震計**を題材に、地震計の原理を学びます。また、それを通じて、地震学の学習で広く用いるフーリエ解析の概念も合わせて習得します。また、地震波形データ解析の基礎にもなるデジタル測定技術についても概観します。

### 2.1 機械式地震計

#### 2.1.1 地震計としての振り子

地震計は地震（地面の動き；**地動**あるいは**地震動**と呼ばれます）を測定する計器です。地面の動きを正しく測るというのは、実は簡単なことではありません。一例として、地表にある小さな石をすこし動かしたときの移動距離を測ることを考えましょう。これなら簡単で、地表に定規をおいて、移動前と移動後の位置の相対距離を測ればよいですね。そのような測定ができるのは、移動した石に対して地面が静止している（とみなしている）からです。もし定規が石に接着剤でくっついてしまっていて、石の移動と同時に定規も動いてしまったら、移動距離は測れません。

地震観測では、まさにこのようなことが起こります。地震計の場合には、それがどんな計器であれ、それが「地面の上に置いて（あるいは地中に埋めて）地動を測る」ものであったなら、地震によって地面が動けば、計器も一緒に動いてしまうのです。逆説的ですが、もしも**地動の影響をうけない空中に静止した点**があれば、その点からの相対的な動きとして、地面の動きを測定することができそうです。このような静止した点<sup>\*1</sup>のことを、**不動点**と呼びます。

ですが、現実世界で地震観測のための不動点は実現できるかというと、空中に

---

<sup>\*1</sup> 「静止した」というのがどのような状態であるかは、実は結構ややこしい話です。もし不動点が地球中心に対して静止していると、地球の自転に置いていかれてしまいますし、太陽系に対して静止していると、地球の太陽に対する公転に置いていかれてしまいます。それらの不動点は、地球上の我々から見ると静止していないように見えてしまうのです。ここでの「静止した」とは、「地震などによって地面が動く前の地面の相対位置を維持している」程度のことだと了解してください。

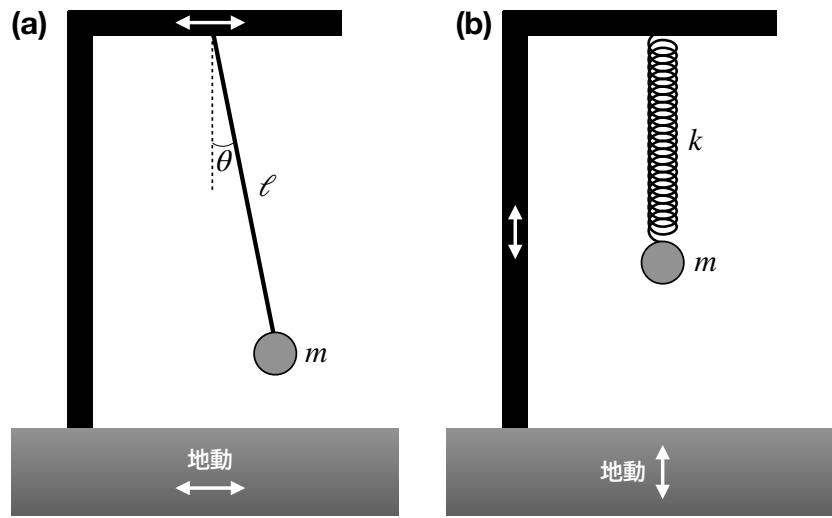


図 2.1 地震計の不動点として働きうる振り子の例。黒い L 字型の棒は図下部の地面と一緒に動く剛体であるとみなす。(a) の振り子は水平方向の地動(白矢印)に対して、(b) は上下方向の地動に対して、ある条件のもとそれぞれ不動点としてふるまう。

質量を浮かせることはできませんから、完璧な不動点を実現するのは難しそうです。そこで、ある程度の質量の質点(おもり)を考えて、それと地面(あるいは地震計)の間を振り子やばねでつないだ系を考えます。そうすると、実はその質点は近似的な不動点になるのです。以下では、思考実験と運動方程式からそのことを確かめていくことにしましょう。

### 演習問題 2.1: 振り子

図 2.1a の振り子の振れ角を  $\theta$ 、振り子の長さを  $\ell$  とし、図 2.1b においては、ばね定数を  $k$ 、おもりが静止状態で重力と釣り合った状態を座標軸原点にとり、そこからのさらなる変位を  $x$  とします。また、質点の重さ  $m$  は(a), (b) で共通であるとし、重力加速度は記号  $g$  で表します。

角度  $\theta$  が充分に小さく、 $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$  と近似できることを前提として、図 2.1a, 2.1b それぞれについて運動方程式を立てなさい。その上で、角周波数  $\omega_0$  を適切に定義することで、2つの運動方程式が本質的に同じ微分方程式になることを示しなさい。さらに、そのときの角周波数を記号  $\ell, g, m, k$  を用いてそれぞれ表しなさい。

力学で振り子の問題を考えるときには、地面を固定しておもりの動きを記述することがほとんどでしょう。しかし、振り子を使って地動を測るには、逆におもりを静止させたまま、地面につながった振り子の台座が動く状況を扱います。台座が動いても、もしさねや振り子に繋がれたおもりがほとんど動かなければ、そ

のときにはおもりが事実上の不動点として扱えるはずです。つまり、（もしそうならば）振り子が地震計になるのです。

もし地震の揺れがきわめて長周期<sup>2</sup>であるならば、台座とおもりはほとんど一緒に動いてしまうでしょう。そのときには、おもりと地面の相対位置の変化はほとんどゼロになってしまいます。つまり、いま考えている振り子は、長周期の地面の動きに対しては地震計としてあまり役に立たなさそうです。

では逆に、十分にすばやい（短周期）地面の動きの場合にはどうでしょうか。おもりと台座の間はばねによって繋がっていますが、非常に素早い台座の動きに対しては、おもりは追従できません<sup>3</sup>。つまり、**短周期の揺れに対しては、おもりが事実上の不動点として扱えるのです。**したがって、振り子は「地動が短周期である」という条件付きで地震計になりそうです。

ここまで思考実験では、極端な場合として、地動が十分に長周期あるいは短周期な場合を考えました。では、「十分に」ではなくほどほど短周期／長周期ではどうなるのでしょうか。それを知るために、この系をあらためて力学の問題として捉えなおして、物理の問題として解く必要があります。

そこで、あらためてここでの目的を、『**任意の周期の地動が与えられたときに、地震計となるおもりの変位量を知る**』ことであると定めましょう。

以下では地動の大きさ（符号付き）を  $u$ 、振り子のおもりの相対変位を  $\xi$  とします<sup>4</sup>。本来であれば、地面の動きは  $x_1, x_2, x_3$  方向の 3 つの自由度がありますから、地動もベクトルで書くべきです。しかし、ここでは問題を簡単にするため、図 2.1 の (a) や (b) のように、一方向だけの地動を考察することにしましょう。振り子を不動点にするといつても、あくまでも近似的な不動点であるから、おもりの変位  $\xi$  と地動  $u$  は完全には一致しません。しかし、ひとたび地動  $u$  とおもり変位  $\xi$  との間の関係が数学的にわかってしまえば、 $\xi$  から本当の地動を復元することが（少なくとも原理的には）可能になります。

## 2.1.2 ダンピング（減衰器）

図 2.1 の振り子では、摩擦の影響を考えていませんでした。ということは、この振り子はいったん動き出したら止まりません。おもりが真の不動点であれば（振り子が一切揺れないならば）ともかく、わずかにでも揺れたら永遠に揺れ続ける<sup>5</sup>

<sup>2</sup> 揺れがゆっくりであることを、その揺れは**長周期**である、といいます。揺れが右（あるいは上）に動いて、左（下）に動いて、戻るまでの時間が 1 周期です。周期の逆数は周波数、それに  $2\pi$  を乗じたものを角周波数といいます。

<sup>3</sup> 納得できなかつたら簡単な実験をしてみると良いでしょう。50cm～1m くらいの糸に消しゴムなどを結んだ簡易振り子を作り、先端のおもりが静止した状態で、糸の端を持った手を素早く水平に動かしてみると、先端のおもりは（手の動きの大きさに比べると）ほとんど動かないことが確認できます。

<sup>4</sup>  $\xi$  はギリシャ文字で、クシイあるいはグザイと読む。Appendix A も参考にしてください。

<sup>5</sup>もちろん現実世界の振り子には何らかのかたちで摩擦が働いていますから、本当に永遠に揺れ続けるということはありません。しかし、地震の揺れが続いているのか、地面の揺れは収まっている振り子が揺れ続けているだけなのかが区別できないようでは、困ってしまいますね。

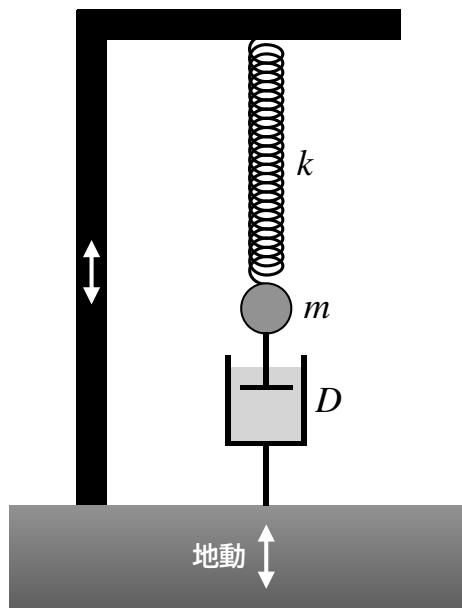


図 2.2 図 2.1b のおもりにダッシュポットを追加した。

というのでは、地震計として役に立ちません。

そこで、おもりの先にダッシュポットと呼ばれる装置をつけることにします（図 2.2）。ダッシュポットは、粘性流体<sup>\*6</sup>で満たされていて、おもりが動こうとしたときには、その速度に比例した抵抗がかかるものとします<sup>\*7</sup>。この抵抗によって、振り子が振動を始めたとしても、やがてその振動は小さくなり、いずれ静止状態に戻ることが期待されます。振り子のこのような運動を、特に減衰振動といいます。

### 演習問題 2.2: 水平動地震計とダンピング

図 2.1a のような横方向に運動する振り子に抵抗を与えるには、どこにどんな装置をつけたらよいでしょうか。図 2.2 のように床とつなげてしまうと、おもりが左右に動くことができなくなってしまいます。ではどうすればよいか、考えて模式図を描いてみなさい。ただし、図 2.2 と全く同じダンピング装置である必要はありません。

### 2.1.3 減衰・強制振動系としての地震計

図 2.2 の模式図にもとづいて、ダッシュポットのついた地震計の運動方程式を立ててみましょう。

<sup>\*6</sup> ここでは粘性流体という言葉の詳しい定義には踏み込みません。単にねばねばどろどろしたものと思ってください。

<sup>\*7</sup> お風呂やプールなど、水のなかで手を広げてすばやく動かしてみると強い抵抗を感じるでしょう。

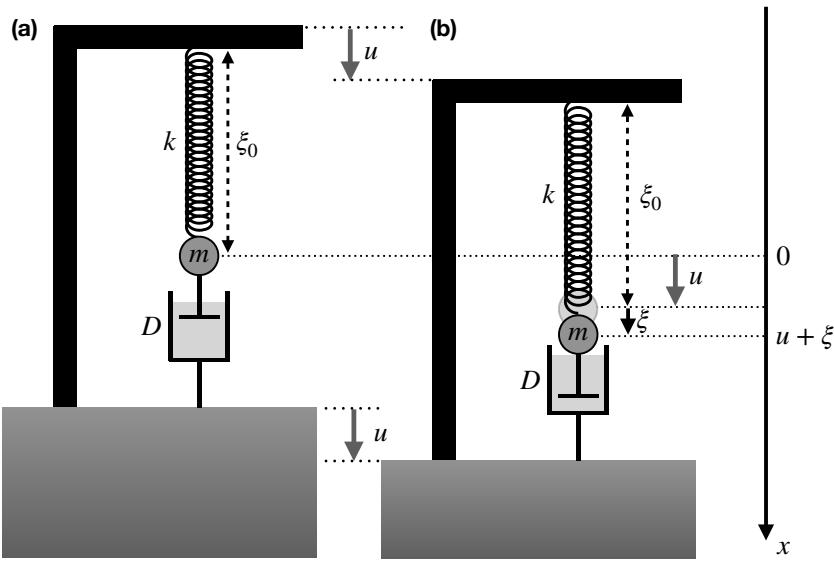


図 2.3 図 2.2 の上下動変位による運動とおもりの位置座標の模式図. (a) 釣り合いの状態. (b) 鉛直下向きに  $u$  だけ変位した場合.

この地震計は、質量  $m$  のおもりがばね定数  $k$  のばねと、係数  $D$  のダッシュポットに繋がっています。ばねの自然長を  $\xi_0$  とし、振り子が釣り合った状態の位置を 0 とする、鉛直下向きの座標系（図 2.3）を取ることにします。そして、地動により地面と地震計全体が  $u$  だけ変位し、かつその変位によりおもりの位置が自然長から  $\xi$  だけ変位した、という状況を考えましょう<sup>8</sup>。図 2.3 から、このときのおもりの位置は、つりあいの位置から  $u + \xi$  の地点にあります。また、ばねによる力は、フックの法則により、ばね定数を  $k$  として  $F = -k\xi$  と表されます。以上から、この質点の運動方程式は、

$$m \frac{d^2}{dt^2} [u(t) + \xi(t)] = -k\xi(t) - D \frac{d\xi}{dt} \quad (2.1)$$

と表されます。右辺第 2 項はダッシュポットによる変位速度に比例した抵抗で、 $D$  は比例係数です。

計算の見通しを良くするため、運動方程式の両辺を  $m$  で割り、おもりの変位  $\xi$  についての方程式に整理しましょう。さらに、

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad h \equiv \frac{D}{2m\omega_0} \quad (2.2)$$

という係数を導入します。これを (2.1) に代入して整理すると、

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\omega_0 h \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi(t) = -\frac{d^2u}{dt^2} \quad (2.3)$$

<sup>8</sup> 先程の思考実験から、理想的な地震計であれば質点は空中に静止している ( $\xi = 0$  である) はずですが、いま考えている系は理想的な地震計とは限らないので、ばねの伸び縮みも考慮するのです。

なる2階の微分方程式が得られました。ここで(2.2)の $\omega_0$ は、ばね $k$ と質量 $m$ の振り子がもつ単振動の角周波数に一致していて、地震計の**固有角周波数**あるいは**自然角周波数**と呼ばれます。また、固有角周波数を $2\pi$ で除した $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ は、**固有周波数**あるいは**自然周波数**と呼ばれます<sup>9</sup>。一方、 $h$ は**ダンピング係数**と呼ばれる量です。ダンピング係数の定義には質量 $m$ や固有角周波数 $\omega_0$ や係数 $1/2$ がありますが、これは係数を**無次元化**してかつ計算を扱いやすくするための工夫にすぎません。重要なのは、ダンピング係数 $h$ はダッシュポットの比例係数 $D$ に比例していること、つまりダッシュポットの抵抗の大きさを表す指標であるということです。おなじばね定数とおもりの振り子であれば、 $h$ が大きいほど抵抗の大きなダッシュポットを使ったことになります。

(2.3)式はすこし複雑な微分方程式ですが、もし地動 $u$ の加速度 $\ddot{u}$ とダンピング係数 $h$ がともにゼロであれば、よく知られた単振動の方程式に一致します。しかしいま扱っている問題は、単振動に加えて地動という強制力が働き（**強制振動**），かつダンピング係数による減衰があります（**減衰振動**）。左辺の第2項が減衰振動を、右辺が強制振動の影響をもたらしているというわけです。

### 演習問題 2.3: 運動方程式の確認

式(2.1)から(2.3)が導出されることを、自分で計算して確かめなさい。

### 演習問題 2.4: 単振動の解

$\ddot{u} = 0$ と $h = 0$ のとき、(2.3)の解は、固有角周波数 $\omega_0$ を角周波数とする单振動 $\xi = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$ あるいは $\xi = c \exp[\pm i \omega_0 t]$ で表されます。これらの解を $\ddot{u} = 0$ と $h = 0$ を仮定した式(2.3)に代入し、これらが解として成立している（左辺=右辺になる）ことを確認しなさい。

この運動方程式は、**地動 $u$ が与えられたときに地震計の変位 $\xi$ はどのようにふるまうか**、を教えてくれます。つまり、もしこの微分方程式を解くことができれば、地震計の変位 $\xi$ を知ることができ、**真の地面の動きと地震計の動きの関係が定量的にわかる**のです。つまり、地震計による地動の測定を理解することは、結局のところ力学における減衰・強制振動の問題を解くことにほかならないのです。

また、微分方程式に $\omega_0$ と $h$ という2つのパラメタがあることから、運動方程式の解のふるまい（地震計の出力結果）は、これらのパラメタ（固有角周波数とダンピング係数）によって変わる、ということも予想できます。これらのパラメタが物理的になにを表していて、その値を変えると地震計の何が変わるのがか、を

<sup>9</sup> Eigenfrequency, あるいは natural frequency の和訳です。

理解することも重要です。

## 2.2 フーリエ変換の基礎

地震計の挙動を支配する微分方程式(2.3)が得られましたから、あとはその解を求めることができれば、地動  $u$  と地震計の出力  $\xi$  の関係、つまり地震計の挙動が原理的にはすべてわかります。ですが、残念ながらその解析解を求めるのは、すこしだけ難しい数学が必要です<sup>10</sup>。ここではそのかわりに、様々な周波数の地動に対して地震計がどのように振る舞うか、という**周波数応答**をフーリエ変換を用いて調べることにしましょう。まずはフーリエ級数とフーリエ変換について、その概略を学びます。

### 2.2.1 フーリエ級数

まずは天下りにフーリエ級数展開を紹介します。証明については物理数学の類書を参考にしてください。

#### 数学・物理ノート 2.1: フーリエ級数

周期  $T$  で繰り返す任意の連続の関数  $u(t)$  は、たくさんの相異なる角周波数をもつ三角関数を用いて

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi k t}{T} + b_k \sin \frac{2\pi k t}{T} \right) \quad (2.4)$$

と書けることが知られています。このような三角関数による関数の級数展開のことを、**フーリエ級数**と呼びます。ここで、係数  $a_k$  と  $b_k$  はフーリエ係数で、元の関数  $u(t)$  と三角関数とから、

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cos \left( \frac{2\pi k}{T} t \right) dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \sin \left( \frac{2\pi k}{T} t \right) dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

によって計算できます。

これは非常に強力な定理で、おおよそ三角関数らしくないどんな関数でも（もちろん地震波形でも）、それが周期関数でさえあれば  $\sin$  と  $\cos$  関数の和で表現できてしまうのだ、ということを主張しています。

一例として、 $a_k = 0$  で、かつ偶数次については  $b_k = 0$ 、奇数次については  $b_1 = 1, b_3 = 1/3, b_5 = 1/5 \dots$  というフーリエ級数を図 2.4 に示します。この場

<sup>10</sup> 本書の範囲を超ますが、和書では長谷川・他(2015)にわかりやすく詳しい解説があります。

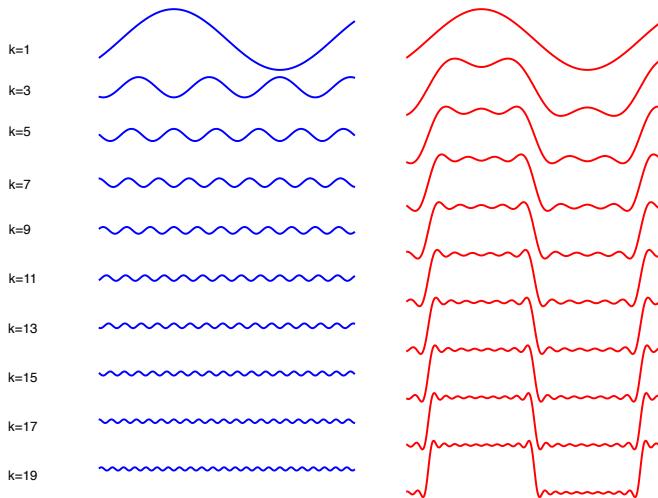


図 2.4 フーリエ級数展開の例。左は次数  $k$  の  $\sin$  波の波形を、右はそれまでの  $\sin$  波の和を表す。

合、次数  $k$  が大きくなると、 $b_k$  の値によって  $\sin$  波の振幅は小さくなっています（図左側）。これらの  $\sin$  関数を次数 1 から  $k$  までのすべて足し合わせた関数は、次数  $k$  が大きくなるほど矩形（四角形）に近づいて行くことがわかります。この例に限らず、振幅  $a_k, b_k$  の大きさを調整することで、（連続な周期関数なら）どんな関数でも三角関数で表せる、というのがフーリエ級数展開なのです。

### 演習問題 2.5: フーリエ級数の実験

`gnuplot (http://www.gnuplot.info)` のような可視化ソフトウェアを用いて、いくつかの三角関数を足し合わせた関数の形がどうなるか観察してみなさい。たとえば、図 2.4 のグラフは、`gnuplot` で `plot sin(x) + sin(3*x)/3 + sin(5*x)/5 + sin(7*x)/7` というコマンドで描くことができます。足し合わせる項の数を増やす（あるいは減らす）とグラフはどのように変化するでしょうか。さらにはほかのフーリエ級数展開の例を調べ、グラフを作ってみましょう。

ところで (2.4) 式をよく見ると、係数  $a_k, b_k$  の次数の  $\cos, \sin$  波は、物理的には角周波数

$$\omega_k \equiv \frac{2\pi k}{T} \quad (2.6)$$

の振動です。つまり、係数  $a_k, b_k$  は、関数  $u(t)$  が持つ角周波数  $\omega_k = 2\pi k/T$ （あるいは周波数  $f_k = k/T$ ）の成分の大きさという意味をもちます。フーリエ級数展開は、周期性をもったあらゆる形の関数が、いろいろな角周波数の波の重み付きの重ね合わせで書けるということを示しているのです。

### 2.2.2 複素フーリエ級数

フーリエ級数は便利なのですが、同じ角周波数  $\omega_k$  に対して  $a_k, b_k$  という 2 つの係数があって、扱いが面倒です。そこで、複素数を導入することで表現をシンプルにした**複素フーリエ級数**を導入しましょう。

#### 数学・物理ノート 2.2: 複素フーリエ級数

適当に複素数の係数  $c_k$  を選ぶことにより、フーリエ級数は

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\omega_k t} \Delta\omega \quad (2.7)$$

$$c_k = \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{i\omega_k t} dt \quad (2.8)$$

のように表すこともできます。ただしここで、 $\Delta\omega = \omega_k - \omega_{k-1} = 2\pi/T$  です。

この表現だと、一つの角周波数に対して一つだけの複素フーリエ係数  $c_k$  が対応していて、よりわかりやすくなりました。ただし、係数  $c_k$  は複素数<sup>11</sup>であり、実部と虚部を決めないといけないので、sin と cos を用いたフーリエ級数と比べて情報量（係数の数）が減ったというわけではありません。複素数の係数  $c_k$  は振幅  $|A|$  と位相（偏角） $\phi$  を用いて

$$c_k = |A_k| e^{i\phi_k} \quad (2.9)$$

のように表せます。ここで、絶対値  $|A_k|$  は関数  $u(t)$  のうち角周波数  $\omega_k$  の震動成分の振幅の大きさを、そして位相角  $\phi_k$  がその角周波数成分の波の位相（角度）のそれを表しているのです。

#### 演習問題 2.6: 複素数の位相と符号

任意の複素数  $z = a + ib$  ( $a, b$  は実数) は、振幅  $|A|$  と位相（偏角） $\phi$  で表すと、 $z = |A|e^{i\phi}$  と書くことができます。ただしここで振幅  $|A| > 0$  は正の実数で、 $\phi$  も実数の角度変数（単位：ラジアン）です。

- (i) 複素数のこれら 2 つの表現を等しいとおくことで、 $|A|$  と  $\phi$  を  $a, b$  を用いて表しなさい。（ヒント：オイラーの公式を使います。）
- (ii)  $z_0 = |A|e^{i\phi}$  に対し、振幅が同じで位相が  $\phi + \pi$  の複素数  $z_1 =$

<sup>11</sup> 三角関数のかわりに複素数を導入するなんて、いったいどこがわかりやすいんだ、と思うかもしれません。しかし、指数関数には微分しても積分しても指数関数のままというたいへんに便利な特徴があるので、計算もぐっと簡単になるのです。

$|A|e^{i(\phi+\pi)}$  があります。 $z_1$  を  $z_0$  を用いて表しなさい。

(iii) 同じように、 $z_2 = |A|e^{i(\phi+2\pi)}$  を  $z_0$  を用いて表しなさい。

(iv) この結果を一般化しましょう。任意の自然数  $k$  に対して、 $z_k = |A|e^{i(\phi+k\pi)}$  を  $z_0$  を用いて表しなさい。

### 演習問題 2.7: 複素フーリエ級数 \*

(2.7) 式の  $e^{i\omega_k t}$  を、オイラーの公式 ( $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ) を用いて展開し、フーリエ級数 (2.4) と比べることで、フーリエ係数  $a_k, b_k$  と複素フーリエ係数  $c_k$  の関係を調べなさい。

ヒント 1: (2.7) 式の総和のうち、 $k = 0$  は別扱いにする必要があります。

ヒント 2:  $c_k$  は複素数で、実部と虚部を持ちます。

### 演習問題 2.8: フーリエ級数のさらに別の形

フーリエ級数は、三角関数の片方だけを使って、たとえば  $\sin$  なら

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \sin(\omega_k t + \theta_k) \Delta\omega \quad (2.10)$$

のようにも表すことができます。ここで  $d_k$  は振幅、 $\theta_k$  は三角関数の位相項です。複素フーリエ級数よりもこの表現のほうが、振幅と位相のずれという直感的な意味がわかりやすいかもしれませんね。この関係式の  $d_k, \theta_k$  と  $a_k, b_k$  (あるいは  $c_k$ ) との関係を求めなさい。

### 2.2.3 フーリエ変換

ここまでフーリエ級数には、「関数が周期  $T$  の周期関数である」という仮定(制約)がありました。その制約すらも外したのが**フーリエ変換**です。

## 数学・物理ノート 2.3: フーリエ変換・フーリエ逆変換

複素フーリエ級数において、 $T \rightarrow \infty$  の極限を取ると、総和を積分に置き換えることができ、

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.11)$$

$$\tilde{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.12)$$

のように表されます。これらの式のうち、(2.12) を**フーリエ変換**、(2.11) を**フーリエ逆変換**と呼びます。

フーリエ級数では離散的な角周波数  $\omega_k$  の係数だった  $c_k$  が、フーリエ変換では連続的な角周波数  $\omega$  の関数となりました。そこで、それを関数  $\tilde{u}(\omega)$  で表しています。ただし、時間と周波数の両方の関数が同じ記号  $u$  のままだと混乱するため、周波数の関数のほうにチルダ記号 ( $\sim$ ) をつけて区別しています<sup>12</sup>。

フーリエ級数をフーリエ変換に発展させることで、「関数が三角関数の重ね合わせで書ける」というシンプルなイメージから、**時間の関数を周波数の関数を相互に変換する**というより一般的な表現になりました。同じ時間の関数（地震波）でも、都合に応じてあるときは周波数の関数として表し、あるときは時間の関数で表すということができるのです。

とはいっても、その意味するところが劇的に変わったわけではありません。式 (2.11) もフーリエ級数と同じく、「時間の関数  $u(t)$  は、さまざまな角周波数をもつ周期関数  $e^{-i\omega t}$  の、 $u(\omega)$  を重みとした重ね合わせで書ける」という意味を持っています。

## 数学・物理ノート 2.4: フーリエ変換のさまざまな定義

フーリエ変換では、その指数関数の肩にある符号の正負や、係数  $1/2\pi$  がどこに現れるかなどの定義が、分野や著者によって千差万別なようです。たとえば (2.11) のかわりに (2.12) 式に係数  $1/2\pi$  がつくこともありますし、両方の式に  $\sqrt{1/2\pi}$  をつける流儀もあります。あるいは、角周波数のかわりに周波数  $f = \omega/(2\pi)$  を用いて、係数  $1/(2\pi)$  がつかなくなるようにするという流儀もあります。

これらはどれが正しいというわけではなく、ただの定義の問題であるので、教科書を読み比べるときには注意して下さい。

<sup>12</sup> 表現のしかたは書籍や論文によって様々ですが、本書では時間の関数をフーリエ変換して得られた周波数（角周波数）の関数にチルダを付して表します。

**演習問題 2.9: 周波数を独立変数とするフーリエ変換**

フーリエ変換 (2.12) と逆変換 (2.11) にそれぞれ  $\omega = 2\pi f$  を代入し、  
フーリエ変換の場合には積分変数を  $\omega$  から  $f$  に置換することで、周波数  
 $f$  を独立変数とするフーリエ変換公式を導出しなさい。

**演習問題 2.10: フーリエ変換とディラックのデルタ関数**

フーリエ変換は、ある時間の関数を周波数の関数に変換するもの、フーリエ逆変換は変換したものを元の関数に戻すものです。ということは、(2.12) 式を (2.11) 式の右辺に代入したら、それは元の関数  $u(t)$  が得られるはずですね。ただしひとつ注意があります。 (2.12) 式の  $t$  は積分で消費されるダミー変数なので、(2.11) の  $t$  とは別の記号として扱わなければいけません。そこで、(2.12) 式において  $t \rightarrow t'$  と変数名を差し替えてから、(2.11) 式に代入してみましょう。その上で、任意の関数  $f$  について下記の特徴をもつ**デルタ（δ）関数**を用いると、フーリエ逆変換でたしかに元の  $u(t)$  が得られることを確かめなさい。

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \quad (2.13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.14)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t' - t) f(t') dt' \quad (2.15)$$

式 (2.15) より、デルタ関数は連続な関数から、積分によって特定の位置（この場合は  $t$ ）での関数の値を取り出す操作に用いられます。詳しくは第4章の数学・物理ノート 4.1 であらためて扱います。

**演習問題 2.11: 実関数のフーリエ変換**

いまの問題では、時間の関数としての  $u(t)$  は地震による揺れですから、虚数部分のない実数です。このような実数のフーリエ変換には、満たすべき条件があります。以下の問題からそれらを明らかにしましょう。ここでは、複素数  $z$  の実部を  $\text{Re}[z]$ 、虚部を  $\text{Im}[z]$  と書くこと（すなわち、 $z = \text{Re}[z] + i\text{Im}[z]$ ）にします。

(i) (2.12) 式の右辺にオイラーの公式を適用し、積分を実部と虚部に分

解すると,

$$\operatorname{Re}[\tilde{u}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos(\omega t) dt \quad (2.16)$$

$$\operatorname{Im}[\tilde{u}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sin(\omega t) dt \quad (2.17)$$

です ( $u(t)$  は実数であることを用いました). このとき,  $\operatorname{Re}[\tilde{u}(\omega)]$  と  $\operatorname{Re}[\tilde{u}(-\omega)]$ , および  $\operatorname{Im}[\tilde{u}(\omega)]$  と  $\operatorname{Im}[\tilde{u}(-\omega)]$  の間に成り立つ関係をそれぞれ示しなさい. なお, 示すべき関係式には, 積分も三角関数も含まれません.

(ii) 複素数  $z = a + ib$  (実部  $a$ , 虚部  $b$  は実数) に対し, 虚部の符号を反転した  $z^* = a - ib$  を  $z$  の複素共役と呼び, もとの複素数の右上に \* をつけて表します. 問1の結果を踏まえ, 実数関数  $u(t)$  のフーリエ変換  $\tilde{u}(\omega)$  が満たすべき「 $\tilde{u}(\omega)$  と  $\tilde{u}^*(\omega)$  の間の関係式」を導きなさい.

## 2.3 地震計の周波数応答

それでは, いよいよ地震計の問題に戻って, その周波数応答を考えていきます.

### 2.3.1 周波数領域の微分方程式と応答関数

式 (2.3) から地震計の応答を探るため, この微分方程式全体をフーリエ変換します. 角周波数を  $\omega$  とすると, 地動  $u(t)$  は, フーリエ変換により

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.18)$$

地震計の出力  $\xi(t)$  は,

$$\xi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.19)$$

と表せます. これらは, 角周波数  $\omega$  の振動成分を  $\tilde{u}(\omega)$  倍あるいは  $\tilde{\xi}(\omega)$  倍したものをすべて重ね合わせることによって, 地動と時間の出力を表現しているという意味を持ちます.

さて, これらの関数を時間について微分してみましょう. たとえば地動については,

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) \tilde{u}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.20)$$

と容易に求められます. これとフーリエ変換の定義式 (2.12) と見比べると,  $\dot{u}(t)$  のフーリエ変換は,  $-i\omega \tilde{u}(\omega)$  であるということがわかりますね<sup>13</sup>. 時間で微分す

<sup>13</sup> 符号が  $-i\omega$  倍なのか  $i\omega$  倍なのかはフーリエ変換の定義に依存します.

るという操作が、フーリエ変換によって角周波数  $-i\omega$  を掛け算する、というより簡単な計算に変わってしまったのです。

この知識を応用すると、(2.3) 全体のフーリエ変換は、

$$(-\omega^2 - 2i\omega\omega_0 h + \omega_0^2) \tilde{\xi}(\omega) = -(-\omega^2)\tilde{u}(\omega) \quad (2.21)$$

と書けます。これを  $\tilde{\xi}(\omega)$  について整理すると、地震計の出力の周波数成分が、

$$\tilde{\xi}(\omega) = \left( -\frac{\omega^2}{\omega^2 + 2i\omega\omega_0 h - \omega_0^2} \right) \tilde{u}(\omega) \quad (2.22)$$

といとも簡単に得られてしまいました。微分方程式を直接解くことは難しくても、そのフーリエ変換は簡単な代数方程式になってしまいます。

### 演習問題 2.12: フーリエ変換と時間微分

式 (2.18) の時間微分を計算して、(2.20) 式になることを確かめなさい。  
さらにもう一度時間で微分すると、 $\ddot{u}(t)$  のフーリエ変換はどう書けるでしょうか。

これまでの議論から、 $\tilde{u}(\omega)$  や  $\tilde{\xi}(\omega)$  は、地動や地震計出力の角周波数  $\omega$  における成分（振幅と位相角）と解釈できます。式 (2.22) によると、角周波数  $\omega$  の地動  $\tilde{u}(\omega)$  は、 $-\omega^2/(\omega^2 + 2i\omega\omega_0 h - \omega_0^2)$  倍されて地震計の出力  $\tilde{\xi}(\omega)$  となります。そこで、その比例係数

$$\tilde{R}(\omega) \equiv -\frac{\omega^2}{\omega^2 + 2i\omega\omega_0 h - \omega_0^2} \quad (2.23)$$

を**地震計の応答関数**と呼ぶことにしましょう。この応答関数が、地動を構成するさまざまな周波数の振動それぞれに対して、地震計がどのようにふるまうかを定めているのです。

応答関数がわかったので、形式的には時間の関数としての地震計の出力  $\xi(t)$  は

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}(\omega) \tilde{u}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u(t') e^{i\omega t'} dt' \right] e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.24)$$

と、地動  $u(t)$  によって表現できます。これを手計算で積分するのは大変そうですが、原理的には、

1. 地動  $u(t)$  をまずフーリエ変換して
2. 応答関数を乗じ
3. そして全体を逆フーリエ変換

すると地震計の出力  $\xi(t)$  が得られるのです。

### 2.3.2 地震計応答関数の特徴

それでは、地震計の特徴を支配する応答関数のふるまいを調べていくことにしましょう。応答関数は複素関数で、少々複雑な形をしています。そこで、まずは周波数についての極限をとってみて、特別な場合についての特徴を調べてみましょう。これまでに考えて地震計と不動点の関係からすると、**地震計は周波数が高ければ地震波を出力し、低ければなにも出力しないと予想された**のでした。そのような特徴が、導かれた応答関数の式からちゃんと示せるでしょうか。

そのことを示すには、まず角周波数の高低を定める基準が必要です。地震計を構成している振り子の**自然角周波数**  $\omega_0$  を基準として用い、それより角周波数  $\omega$  が十分に高いときと十分に低いときの応答関数を求めるにします。応答関数の式 (2.23) から、周波数と固有角周波数との比  $(\omega/\omega_0)$  をくくりだし、 $(\omega/\omega_0) \rightarrow \infty$  と  $(\omega/\omega_0) \rightarrow 0$  の極限を取ります<sup>\*14</sup>。計算してみると、

$$\tilde{R}(\omega) = \begin{cases} -1 & (\omega/\omega_0) \gg 1 \\ (\omega/\omega_0)^2 \rightarrow 0 & (\omega/\omega_0) \ll 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

つまり

$$\tilde{\xi}(\omega) = \begin{cases} -\tilde{u}(\omega) & \omega \gg \omega_0 \\ (\omega/\omega_0)^2 \tilde{u}(\omega) \rightarrow 0 & \omega \ll \omega_0 \end{cases} \quad (2.26)$$

であることがわかります。**角周波数が固有角周波数より十分高いときには、地震計の出力  $\xi$  は地面の変位（の符号を反転したもの）に比例し、十分低いときにはゼロになりました。**思考実験の結果は、たしかに正しかったのです。なお、周波数を「ほどほどに」低くすると、ゼロになる手前では地震計の出力が  $\omega^2 \tilde{u}(\omega)$  に比例することもわかります。固有角周波数よりやや低い周波数では、地震計の出力は地動の変位ではなく、その**加速度に比例**しているのです。

#### 演習問題 2.13: 応答関数の無次元角周波数による表現と極限

式 (2.23) の分母と分子をそれぞれ  $\omega_0^2$  あるいは  $\omega^2$  で割ることで、応答関数を  $(\omega/\omega_0)$  を用いて表しなさい。その上で、(2.25) 式と (2.26) 式の極限を確かめなさい。

応答関数  $\tilde{R}(\omega)$  は角周波数に依存する複素数です。ということは、地震計の出力  $\xi$  は振幅が周波数に依存するだけでなく、**位相**も変わります。

<sup>\*14</sup> このように、同じ次元をもつ物理量で規格化して**無次元化**した量により系の振る舞いを調べるものも常套手段です。

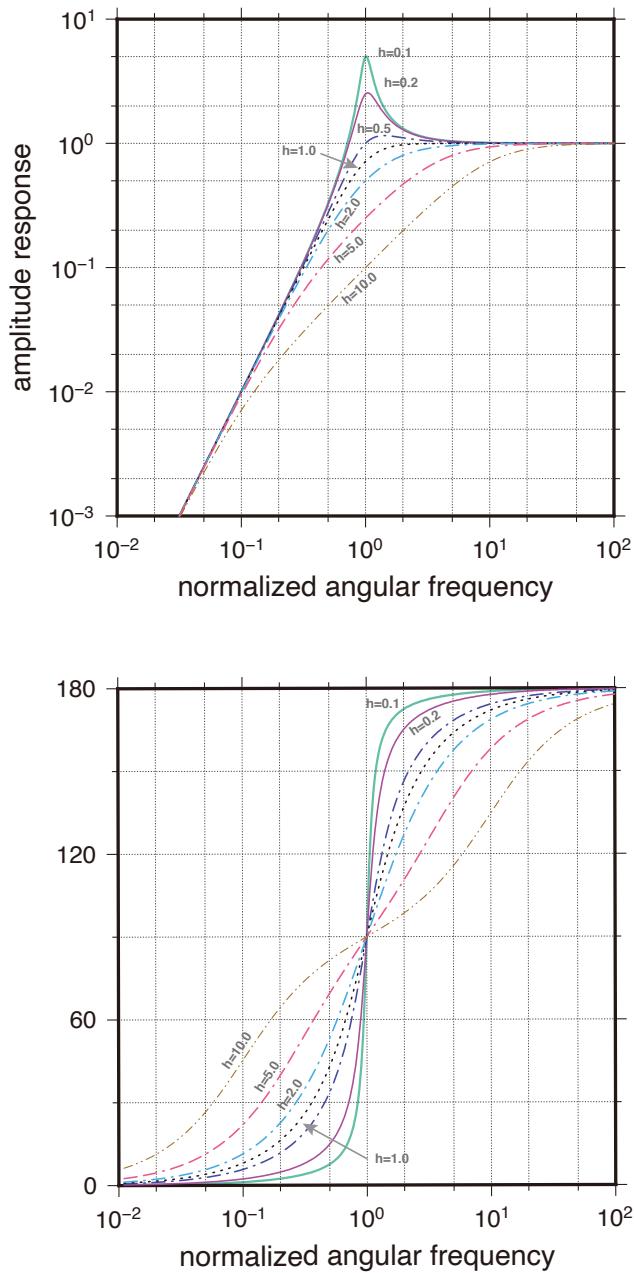


図 2.5 様々なダンピング係数  $h$  に対する機械式地震計の周波数特性. (上) 振幅特性  $|U(\omega/\omega_0)|$ . (下) 位相特性  $\alpha(\omega/\omega_0)$ .

### 数学・物理ノート 2.5: 位相

**位相**という言葉はいろいろなニュアンスで使われますが、ここでは三角関数の角度成分のことを表します。たとえば、時間とともに振動する関数  $u = \sin(\omega t)$  が  $\sin(\omega t + \pi/2)$  になったとき、「位相が  $\pi/2 = 90^\circ$  だけずれた」というように使います。複素数  $z = a + ib$  を振幅と偏角で表した表現  $z = re^{i\theta}$  の  $\theta$  も、オイラーの公式によって  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  ですから、これもやはり位相と呼びます。

振幅と位相の変化をより詳細に調べるため、振幅特性  $|U(\omega)|$  と位相特性  $\alpha(\omega)$  を

$$\tilde{R}(\omega) \equiv |U(\omega)| e^{i\alpha(\omega)} \quad (2.27)$$

のように定義しましょう。それぞれ複素数  $\tilde{R}(\omega)$  の振幅と偏角に相当しますが、それぞれが角周波数  $\omega$  の関数でもあります。(2.23) 式から丹念に計算すると、

$$|U(\omega)| = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{\sqrt{[(\omega/\omega_0)^2 - 1]^2 + [2(\omega/\omega_0)h]^2}} \quad (2.28)$$

$$\alpha(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2(\omega/\omega_0)h}{(\omega/\omega_0)^2 - 1}\right) & \text{for } \omega \leq \omega_0 \\ -\arctan\left(\frac{2(\omega/\omega_0)h}{(\omega/\omega_0)^2 - 1}\right) + \pi & \text{for } \omega \geq \omega_0 \end{cases} \quad (2.29)$$

が得られます。ただし逆正接関数  $\arctan(x)$  の値域を  $-\pi/2 \leq \arctan(x) \leq \pi/2$  とし、位相の値が  $0 \leq \alpha(\omega) \leq 2\pi$  となるように場合分けがされています<sup>15</sup>。

### 演習問題 2.14: 応答関数の振幅と位相

地震計の応答関数 (2.23) から、その振幅特性 (2.28) を導出しなさい。場合分けに注意して、位相特性 (2.29) にも挑戦してみましょう。

図 2.5 に固有角周波数で規格化された周波数の関数としての地震計の応答を示します。ダンピング係数  $h$  の値によって地震計の応答は変わりますが、共通して

- 振幅は規格化された周波数=1 より高周波側で平坦であり、低周波で周波数の2乗に比例する。
- 位相は高周波で 180 度ずれる。(符号が反転する)

という特徴があります。

応答関数は地震計の動きと地動とのあいだの比例係数に相当するものでしたから、その絶対値が 1 の場合に、「地動の大きさ=地震計の動きの大きさ」となります。そのときには、その地震計は理想的なものである言って良いでしょう。その

<sup>15</sup>多くの教科書では、(2.29) の 2 行目だけの式で表現されているようです。arctan 関数は書籍や計算機ツールによってその定義域が異なるため、注意が必要です。

観点からは、機械式地震計は**固有角周波数よりも高周波側で理想に近い特性を持つ**ということがわかります。

#### 演習問題 2.15: 地震計特性の位相と符号の反転

高周波の場合に  $\tilde{R}(\omega) = -1$  になるということは、地面の動きと地震計の出力の符号が反転しているということです。これはなぜでしょうか。元の物理モデル（図 2.2）で、すばやく地面が動いたときのことを考え、その理由を言葉で説明しなさい。

ここまで話はみな最初に思考実験によって想像し、また周波数特性の極限を取ることで予想していたこともあります。しかし、応答関数の関数形状が明らかになったことで、あらゆる周波数における地震計の応答がより**定量的**にわかりました。そのことにより、地震計の記録から適切な信号処理によって地動を（原理的には）回復することができるようになったのです。

#### 演習問題 2.16: 地震計出力から地動の回復

(2.24) 式やその説明を参考に、地震計の出力  $\ddot{x}(t)$  が得られたときに、そこから真の地動を推定するための積分式を書きなさい。

また、応答関数のプロットからはダンピング係数  $h$  によるふるまいの違いもわかります。特にダンピングが小さいと、固有周波数とその周辺の振幅だけが大きくなってしまう。これはいわゆる**共振**現象です。振り子の支点を振り子の固有周期に近い周期で揺すると、振り子の振幅は共振によってどんどん大きくなっていくのです。地震計の記録が共振してしまっては困るので、普通は共振が起こらない程度のダンピング係数が用いられています。

#### 演習問題 2.17: ダンピングと最大平坦特性

ダンピング係数が  $h = 1/\sqrt{2}$  のとき、振幅応答 (2.28) はより単純な形で書けます。このダンピング係数の値を代入して、分母を整理して導出しなさい。

この特別な場合は、**最大平坦特性**あるいは**バターワース特性**と呼ばれ、アナログ・デジタル双方のフィルタ特性として広く用いられています。最大平坦特性では、その名の通り応答関数の平坦な（1に近い）範囲が広くなります。 $h = 0.5, 1/\sqrt{2} \approx 0.707, 1$  の場合について応答関数を計算し、その両対数グラフから特性がたしかに平坦であることを確かめなさい。

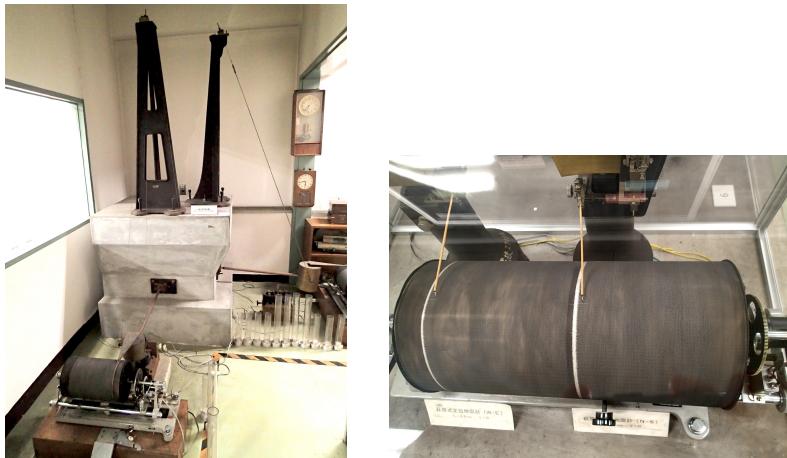


図 2.6 (左) 大森式長周期地震計（東京大学地震研究所地震計博物館所蔵のもを筆者撮影）。1898 年ごろから東京大学本郷キャンパス地下において観測に用いられていたものです。右下の円筒状の金属が振り子とおもりであり、手前は波形記録のためのドラムです。(右) 萩原式変位地震計のドラム部分（同じく東京大学地震研究所所蔵）。

## 2.4 地震計記録の収録

### 2.4.1 さまざまな地震計とその出力

これまでで、当初目標にしていた「地動が与えられたときにおもりの変位量を知ること」は、運動方程式の上では達成されました。しかし、実際の機械で地震計のおもりの変位量をデータとして出力するためには、もうひと工夫が必要です。図 2.6 左に国内で実際に観測に用いられてきた機械式地震計の写真を示します。写真右の振り子が写真手前に伸びている棒に直結しており、その先の細い針が地面と繋がった円筒状のドラムを引っ搔くようになっています。ドラムには「すす」が付けられた紙が巻かれており、一定の速度で回転しています(図 2.6 右に別の地震計のドラム部分の拡大写真を示す)。不動点である振り子と針が地面と直結したドラムを引っ搔くことにより、ドラムに地面と振り子との相対変位の記録が残されるという仕組みです。これを「すす書き」と呼びます。

機械式の地震計が測定しようとしていたのは、地震による**変位**でした。振幅の周波数特性の検討から、変位を測定できるのは**固有角周波数よりも短周期（高周波）**に限られることがわかっています。機械式地震計で長周期の地動変位を測定するためには、固有角周波数を小さくすれば良いのですが、実際にそれを実現するのは技術的にとても大変なことです。

地震計の固有角周波数は  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  でした。機械式地震計で長周期の地動を観測するには、ばね定数  $k$  を小さく（ばねを弱く、やわらかく）するか、あるいはおもりを重くする必要があります。しかし、やわらかく弱いばねでは、そもそもおもりの大きな重量を支えることができないので、そこで、振り子の形状を変更したり、振り子自体を斜めや逆さにするなどの様々な工夫がなされてきまし

た。本書では個別の工夫の技術的詳細には立ち入りませんが、普通の機械式地震計で長周期の地動を観測するのがいかに困難かは、次の問題で実感してもらえるでしょう。

### 演習問題 2.18: 機械式地震計の設計

- (i) ばね定数を  $k = 10.0 \text{ N/m} = 10.0 \text{ kg s}^{-2}$  とする。おもりの質量が  $100 \text{ g} = 1.00 \times 10^{-1} \text{ kg}$  であったとき、このばねとおもりからなる機械式地震計の固有角周波数を求めなさい。単位に注意すること。
- (ii) もし、この地震計を改造して、おもりを差し替えることで固有周期  $T_0 = 100 \text{ s}$  つまり固有角周波数  $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi/100 \text{ rad/s}$  にするには、おもりは何  $\text{kg}$  になるでしょうか。
- (iii) さらに、これらの改造前後の固有角周波数をもつ地震計を、ばねのかわりに振り子（図 2.1a）で実現する場合、その振り子の糸の長さ  $\ell$  をそれぞれ求めなさい。ただし、計算を簡単にするため、重力加速度の近似値を  $g = 10.0 \text{ ms}^{-2}$  としてよい。

現在ではこのようなすす書きによる記録方式はほぼ用いられておらず、デジタルデータによる記録に置きかわっています。しかし、巨大地震というのはそう頻繁に発生するものではありません。20世紀中盤までにこのような計器で記録された巨大地震の記録はたいへん貴重なもので、現在でもそれらの記録の解析が続けられています。

近年では、帰還回路によって地震計の出力を振り子の運動にフィードバックし、どのような周期の揺れが来たとしても、振り子ができるだけ動かないようにする **帰還型地震計（フィードバック型地震計）** が広く用いられるようになりました。帰還型地震計の応答は本書の扱う範囲を超えますが、人間が持ち運べるサイズで、周期数百秒といった超長周期の地動を高精度に推定できる**広帯域地震計**が開発され、地球内部構造や巨大地震の断層破壊過程の推定に活躍しています。

帰還型ではない通常の地震計としては、現代では地震計の出力を電気信号に変換する**電磁式地震計**が主流です。電磁式地震計には様々なタイプがありますが、代表的なものは機械式地震計のおもりがコイルになっており、その周辺に磁石が置かれている（磁場が存在する）ようなものです。地動によってコイルが動くと、電磁誘導によってコイルに電流が流れます。そうやって発生した電気信号を電圧計などで測定することにより、地動を測定することができます。ただし、電磁誘導によって発生する電圧はコイルの速度に比例します。そのため、電磁式地震計で測定されるのは地動の変位ではなく、**変位速度**<sup>16</sup> です。そのため、これら

<sup>16</sup> 弾性体の変位の時間微分が変位速度、粒子速度と呼ばれることがあります。略して単に「速度」とだけ書くことが多い、地震学では地震の揺れが伝わる速さ（地震波速度）もありますが、変位速度と地震波速度はまったく違う物理量ですので、混同しないようにしてください。

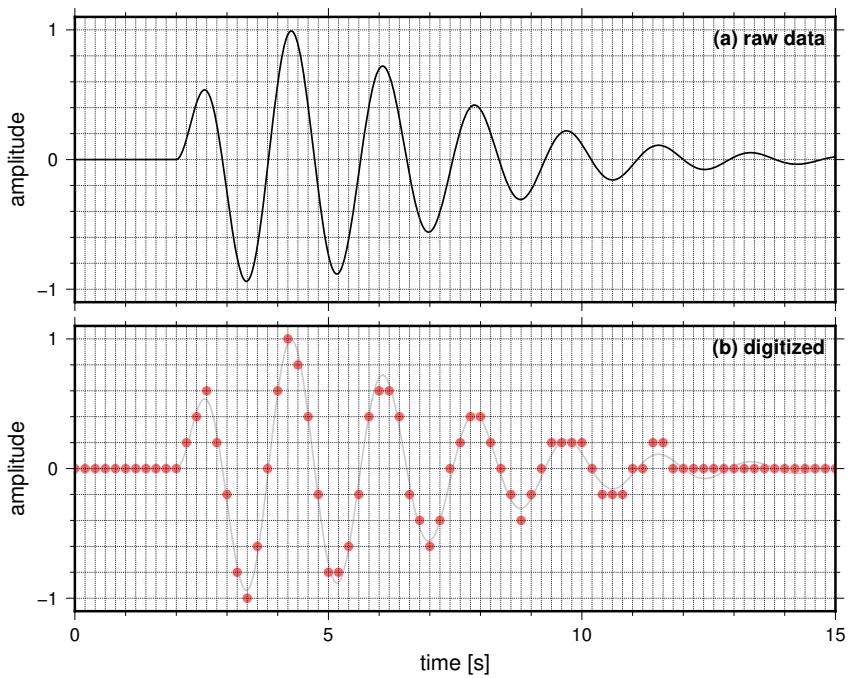


図 2.7 連続信号の AD 変換の模式図. (a) アナログの元記録. (b) アナログ記録を  $\Delta t = 0.2$  s,  $\Delta A = 0.2$  で AD 変換した結果.

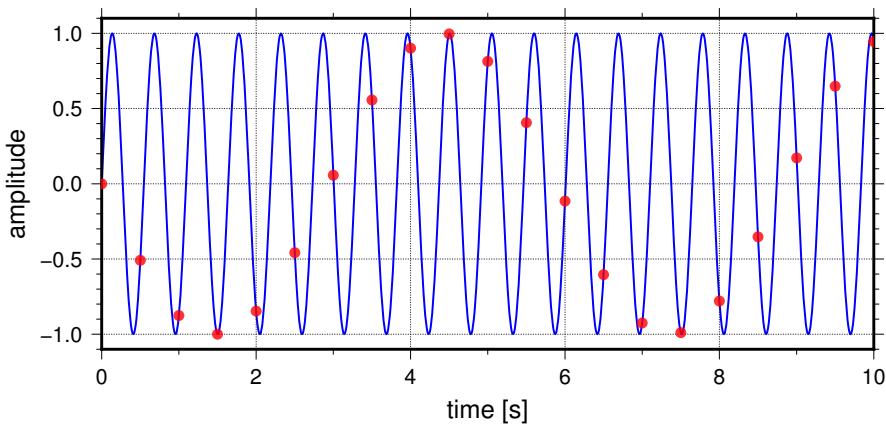


図 2.8 高周波信号の粗いサンプリングによって生ずるエイリアシングの例.

は**速度型地震計**とも呼ばれます。

## 2.4.2 AD 変換と地震収録システム

現代の地震計はほとんどすべてが電気信号を出力するのですが、その電気信号をそのままデータ解析に使うことはほとんどありません。アナログ—デジタル変換（AD 変換）をして、コンピュータで解析可能なデータとして収録するのが一般的です。AD 変換をするということは、アナログで連続な記録である電圧を、離

散的（とびとび）な値にするということでもあります。

図2.7に離散化の模式図を示します。図2.7(a)の黒線のような信号をデジタル化するためには、時間のサンプリング間隔  $\Delta t$  と、振幅の最小値（解像度） $\Delta A$  を設定する必要があります。時間間隔  $\Delta t$  ごとに地震波形の値を取得するのはもちろんですが、振幅も離散化しなければいけません。振幅をデジタル化するということは、波形にものさしを当てて、その目盛りの数を読むようなものです。したがって、その結果は本質的に離散的な整数値なのでせう<sup>\*17</sup>。たとえば、図2.7(b)は、実線で描かれた波形を、時間のサンプリング間隔  $\Delta t = 0.2\text{s}$ 、振幅の解像度  $\Delta A = 0.2$  で離散化したものです。サンプリング間隔や解像度が粗いと、元の波形と完全に一致した波形が得られません。この場合は特に振幅の小さくなる波形後半で本来の波形からのズレが目立つようになっています。それは、グラフ縦軸方向の離散化間隔である解像度に対して、地震波振幅が十分に大きいとは言えなくなつたためです。

このような離散化に伴う誤差を避けるためには、十分に細かく時間と振幅をサンプリングすればよいのです。しかし、振幅を非常に細かくサンプリングするのはそもそも技術的に困難があるうえ、細かくした分変数1つあたりに必要とされるコンピュータの記憶容量も増えてしまいます。また、一定の時間長のデータ量がサンプリングの細かさに比例して増えることも明らかでしょう。ですから、振幅も時間も、解像度をいくらでも細かく、というわけにはいかないのです。現在では、1変数当たり24から27bit（おおむね  $\pm 2^{23} \sim \pm 2^{26}$  の範囲の整数値が記録できる）程度、時間については100Hz–200Hzのサンプリング周波数（1秒あたり100–200個のデータ）が広く用いられています。

さて、時間のサンプリング間隔には、もうひとつ重要な制約があります。それは、「サンプリング間隔  $\Delta t$  で記録できる信号の周波数は  $f \leq 1/(2\Delta t)$  に限られる」というものです。これはナイキストの定理と呼ばれます。

ここではナイキストの定理についての数学的な証明の代わりに、直感的な説明をしておくことにしましょう。「波」というものは、振幅が上がって下がってもとに戻る現象です。それを記録するためには、波の1周期あたり、振幅が上がるぶんと下がるぶん、少なくとも2つの点が必要なのです。つまり、離散化間隔  $\Delta t$  の2倍よりも長い周期  $T$  の波しか正しく収録できないということになります。 $f = 1/T$  ですから、

$$2\Delta t \leq T = \frac{1}{f} \iff f \leq \frac{1}{2\Delta t} \quad (2.30)$$

となる。これがナイキストの定理が要求していることです。

では、もしもこの条件が満たされなかつたらどうなるでしょうか。そのような状況の例を、図2.8に示しました。高周波の本当の信号（実線）を、ナイキストの

<sup>\*17</sup> ものさしでも1mm以下の細かな長さを読み取れる、と思うかもしれない。しかしそのときには、実は頭の中で0.1mm単位の目盛りを思い浮かべて、その目盛りを読んでいることに相当する。つまり、目盛りの間まで読んでいるつもりでも、より小さな振幅解像度を用いて離散的な整数値にしていることに変わりはないのです。

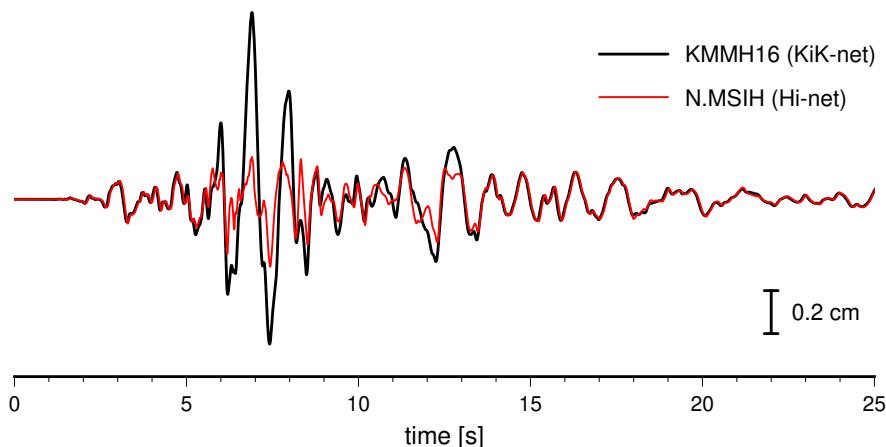


図 2.9 2016 年熊本地震時に熊本県益城町における同一地点において 2 つの地震計で観測された記録の比較。太線は基盤強震観測網 KiK-net 地震計（観測点 KMMH16），細線は高感度地震観測網 Hi-net 地震計（N.MSIH）のいずれも上下動記録。比較のため双方の記録を変位に変換し、フィルタ処理により周波数 1 Hz の記録のみを表示している。

定理を満たさないような粗いサンプリング間隔で離散化すると、元の信号には含まれないはずの低周波の見かけの信号が現れてしまうのです。この現象はエイリアシング (aliasing) と呼ばれています。これはたまたまではなく、エイリアシングはナイキストの定理が満たされないときにかならず起こる現象です。エイリアシングによって現れる低周波の信号は本当の信号ではない、避けるべき見かけのものです。といっても、地震による地動で、「ある周期よりも短周期では地面が動かないようにする」ということができるわけではありませんね。そこで、エイリアシングを避けるため、観測されたデータを AD 変換する前に、ナイキスト周波数より高い周波数成分の信号をフィルタ<sup>\*18</sup>によって十分小さくするか、あるいは信号に含まれる周波数成分（の逆数）よりも充分細かいサンプリング間隔を取ることが必要となります。

#### 演習問題 2.19: 地震波形のエイリアシング

図 2.7 の赤点は、0.2 秒間隔で青線の波形を離散化したものです。この間隔をもっと粗くして読み取り、その点だけのグラフを描いてみてることで、エイリアシングが起こることを自分の手で確認してみなさい。間隔 1 ~1.4 秒くらいが良いでしょう。

<sup>\*18</sup> フィルタとは、特定の周波数成分だけを取り出したり、あるいは一定以上・一定以下の周波数成分を信号から取り除いたりするデータ処理のことです。電気回路によってアナログデータに対して行うことも、AD 変換されたデジタルデータに対して信号処理を行うこともできます。

では、こんどは地震波振幅が大きかったらどうでしょうか。地震計を構成するばねや振り子は有限の振れ幅しか持てませんから、記録が振り切れ（飽和し）てしまいます<sup>\*19</sup>。あるいは、デジタルデータの収録機器が想定している上限振幅を超えてしまう場合もあります。

図2.9に典型的な飽和波形の例を示します。この地震波形は、2016年熊本地震の本震（マグニチュード7.3）の記録を熊本県益城町で観測した記録です。この観測点は震源直近であり、とても大きな揺れに襲われた地点です。太線は大きな揺れを観測するのに適した**強震計**の記録、細線は小さな揺れに適した**高感度地震計**の記録です。これらの地震計は同じ場所に設置されており、双方の地震計が正しい記録を収録していれば、その波形は全く同じになるはずです。ところが、高感度地震計では記録が振り切れてしまい、もっとも大きな振幅が観測された時刻の波形が、正しいと思われる強震計の記録から大きく乖離しています。よく見ると、地震波が到達した最初の部分では2つの地震計の記録はよく一致しているのですが、振幅が大きくなつたところで赤線が大振幅に追随できなくなっています。震源近傍における高感度地震計の記録では、このようなことがしばしば起こります<sup>\*20</sup>。

もちろん、この波形のような飽和した波形をそのまま地震学のデータ解析に用いることはできません。<sup>\*21</sup>

<sup>\*19</sup> 飽和を表す *saturation* から、俗に「サチる」と言う

<sup>\*20</sup> このことは、強震計が高感度地震計よりも優れているということを意味しているわけではありません。強震計は大地震の記録で飽和しないかわりに、小さな記録は解像度が足りなくてよく見えません。互いに得意分野が違うのです。

<sup>\*21</sup> ただし、地震波が到達した瞬間の時刻はわかるので、P波到着時刻を用いた震源決定には使えます。

## 第3章

# 地震波動論入門

本章では、地震波を記述する物理学である弾性体力学を用いた地震波の表現を学び、さらにそこから導かれる（あるいは知られている）地震波の特徴を学んでいきます。まずは質点系の力学から**波動方程式**とその解の導出をし、その上で「波」の物理的な特徴とそれを表現するための基礎的な諸量について理解します。その後、弾性体中の波動である地震波の特徴について調べていくことにしましょう。

### 3.1 波動方程式

固体の変形を考える上で、まずは最も簡単そうな**棒の伸び縮み**を例に考えましょう。細くて長い棒を両側から引っ張ったり押したりすることをイメージしてみてください。硬い棒であつたら目に見えるほどはっきりとは変形しないかもしれませんが、**まったく**変形しないわけではないでしょう。まるでバネのように、押せばわずかに縮むし、引っ張ればわずかに伸びるはずですね。そこで、まずは固体そのものをたくさんの中と質点で近似し、その運動を考えてみます。そのうえで、その極限を取ることで**連続体（弾性体）**の概念に接続することで、「波」を表す微分方程式を導き、その性質を調べます。

#### 3.1.1 連成振動問題

いま、長さ  $L$  の十分に長いバネが、 $N$  個の同じ質量  $m$  を持つ質点によって等間隔に分割されて直列に接続されている状況（図 3.1）を考えます。ここでは簡単のため、全長  $L$  は十分長く、端から離れたところの運動を扱います。つまり、バネの先端の影響は考えないことにしましょう。また、バネを  $N$  個の質点で分割した際のバネの自然長を  $\ell = L/N$  とし、そのときのバネ定数を  $k(\ell)$  とします。バネ定数はその長さに依存する（後出）ため、バネ定数を引数として自然長をとる関数として表しています。

これは、質点系の力学において**連成振動**と呼ばれる種類の問題です。繋がれたおもりのどれか一つをそっと動かすと、そのおもり一つだけではなく、バネによって繋がれた周囲のおもりも移動します。これは固体の**変形**に対応するような現象

です。あるいは、任意の場所のおもりを素早く揺らすと、その振動がバネを通じて次々と遠方に伝わっていくでしょう。これが、波の伝播に対応するのです。

この系の運動を調べるため、 $i$ 番目の質点のつり合いの状態からの変位を  $r_i$  として、その質点の運動方程式を書き下してみましょう。 $i$  番目の質点につながっているのは、 $i+1$  と  $i-1$  番目の質点につながる両側のバネだけです。いまは重力などの遠隔力は考えていませんから、直接つながったこの2つのバネからの力だけを考えればよいでしょう。ただし、両隣の質点も運動によって変位しているかもしれません。そこで、 $i+1$  番目（右側）と  $i-1$  番目（左側）の質点の変位をそれぞれ  $r_{i+1}$ 、 $r_{i-1}$  とすると、 $i$  番目の質点の運動方程式は、

$$m \frac{d^2 r_i}{dt^2} = k(\ell)(r_{i+1} - r_i) - k(\ell)(r_i - r_{i-1}) \quad (3.1)$$

と表されます。これが、（両端の壁からは十分に離れた）あらゆる質点について成立しているのです。

### 演習問題 3.1: 運動方程式の確認

位置の  $i$  番目と  $i \pm 1$  番目の質点の位置  $r_{i-1}, r_i, r_{i+1}$  から、質点同士の相対距離を計算し、そこから運動方程式 (3.1) の成立を確認しなさい。

さて、このおもりの合計質量  $M = m \times N$  は一定かつ全長  $L$  は不变のまま、どんどん分割数を増やしていくことで、連続な物質に近づけていくことにしましょう。そのような操作をするためには、まず分割数を変えたときに、バネの強さ  $k(\ell)$  がどう変わるかを知る必要があります。

そこで、まずバネの特徴を整理しよう。バネ定数が  $k_1$  と  $k_2$  のバネ2本を直列に接続して合成バネを作ると、その合成バネ定数は

$$K = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \quad (3.2)$$

で表されます（次の演習問題参照）。もし  $k_1 = k_2 \equiv k$  ならば、 $K = k/2$  です。ということは、バネは直列接続されることによって、弱くなるのです。

### 演習問題 3.2: バネの直列接続

2本直列したバネにかかる力を考察することにより、(3.2) を証明しなさい。

バネを分割するには、バネの接続の逆を考えればよいでしょう。バネが分割されてその自然長が短くなると、その長さに反比例してバネ定数は強くなります。基準として、自然長が単位<sup>1</sup>長 (= 1) のバネのバネ定数を  $G$  と定義すると、その

<sup>1</sup> このときの長さの単位はなんでも構いませんが、それに応じて  $G$  の単位が変わります。バネ定

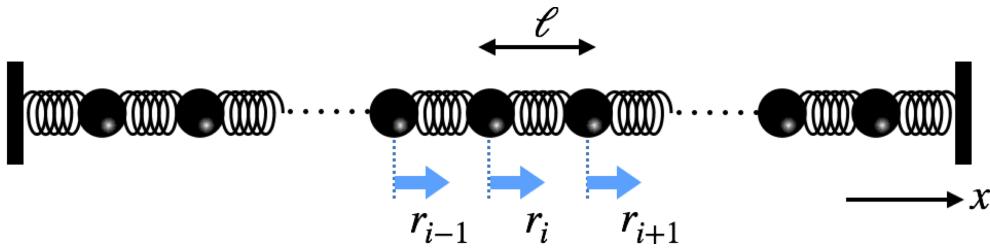


図 3.1 連成振動問題の設定

材質からなる任意の自然長  $\ell$  のバネ定数は

$$k(\ell) = \frac{G}{\ell} \quad (3.3)$$

と書けるでしょう。

さて、さらに分割数  $N$  が増えるとどうなるでしょうか。質点の質量はどんどん小さくなり、隣り合う質点同士の相対距離はどんどん短くなっています。そうすると、一つ一つの質点はどんどん微視的な存在になっていき、やがて隣接した質点同士は互いに区別できなくなってしまうでしょう。巨視的な目でこの系全体をみると、ありとあらゆるところに質点が存在し、そのあるところは縮み、あるところは伸びることによって、あらゆる場所が連続的に運動しているように見えてくるでしょう。このような物体の捉え方を**連続体**といい、多数の質点の系の極限を取ることで連続体を導くこの方法を、**連続体極限**といいます。

連続体極限によってひとつひとつの質点が認識できないほど細かくしてしまうと、運動方程式 (3.1) のようにそれらを質点の番号  $i$  で区別することは得策ではなくなります。そこで、その代わりに質点がどこにあるかを、位置  $x$  で表すことにしましょう。 $i$  番目の質点の変位  $r_i(t)$  は、連続体極限のもとで、その質点の位置  $x$  と時間  $t$  における**変位**  $u(x, t)$  に置き換えられるのです。この変位  $u(x, t)$  は、位置  $x$  と  $t$  にもともとあった質量が  $u$ だけ移動した、ということを意味します<sup>2</sup>。分割を無限に細かくしていった結果、 $x$  軸上のあらゆるところに質点があるため、変位  $u$  は連続関数になります。

このような連続体極限のもとで、運動方程式は、

$$\frac{m}{\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{\ell} \left( \frac{u(x + \ell, t) - u(x, t)}{\ell} - \frac{u(x, t) - u(x - \ell, t)}{\ell} \right) \quad (3.4)$$

と書けます。ただしここで、 $r_{i+1} = u(x + \ell)$ ,  $r_{i-1} = u(x - \ell)$  を用いました。また、変位  $u$  が位置と時間の変数になったので、時間に関する微分を偏微分記号に置き換えています。また、ここでは両辺をあえて  $\ell$  で割っています。この意味はすぐ後で明らかになります。

数  $k$  の単位を  $N/m$  とすると、たとえば単位長が 1cm なら  $G$  の単位は  $N/m/cm$ , 1 km なら  $N/m/km$  です。

<sup>2</sup> この説明はラグランジュ (Lagrange) 的な描像です。だが、流体と違い、弾性体の変形量は一般に小さいと仮定できるケースが多いです。大変形を議論する場合を除いて、オイラー (Euler) 的か的かを明示的に区別する必要はありません。

分割を細かくしていくと、あらゆる場所に質点が連続的に分布するようになります。そこで、単一質点の質量の代わりに、単位距離あたりの質量である**質量密度**

$$\rho \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m}{\ell} \quad (3.5)$$

に置き換えるのが妥当でしょう<sup>3</sup>。いまは全ての質点の重さ  $m$  が等しいとしますが、もし質点によって重さが異なる場合には、質量密度は位置の関数  $\rho(x)$  になります。なお、分割をどんどん細かくしていく  $N \rightarrow \infty$  の極限では、 $\ell \rightarrow 0$  となるが、分割によって質量  $m$  も同時に小さくなるため、密度は一定の値に収束します。

ここで、ひずみ

$$\varepsilon(x, t) \equiv \frac{u(x + \ell/2, t) - u(x - \ell/2, t)}{\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\ell \rightarrow 0) \quad (3.6)$$

という量を定義します。これは変位の空間微分ですから、バネによる**単位距離あたりの伸び縮みの度合い**を表すものです。正であれば伸び、負であれば縮んでいることになります。このひずみの定義を運動方程式 (3.4) に代入してみると、

$$\frac{m}{\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\ell} \left\{ G\varepsilon \left( x + \frac{\ell}{2}, t \right) - G\varepsilon \left( x - \frac{\ell}{2}, t \right) \right\} \quad (3.7)$$

が得られます。右辺に現れた単位距離あたりのバネ定数とひずみの積を、**応力**  $\sigma$  として以下のように定義しましょう：

$$\sigma(x, t) \equiv G\varepsilon(x, t). \quad (3.8)$$

この関係は、質点系の運動方程式 (3.1) における復元力  $F = -k(x_i - x_{i-1})$  の連続体力学版です。

これらの量を踏まえて  $\ell \rightarrow 0$  の極限をとると、変位  $u(x, t)$  の満たす方程式として、

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \sigma(x, t) &= G\varepsilon(x, t) = G \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.9)$$

が導かれます。最初に考えていたのは離散的な質点の運動方程式でしたが、思考実験いでその分割を細かくしていく操作によって、物体内の任意の場所  $x$  と時間  $t$  における変形  $u$  を表現する偏微分方程式が得られました。

### 数学・物理ノート 3.1: 弹性体の運動方程式と構成関係式

本節で得られた方程式 (3.9) は、より一般の 3 次元空間中の弹性体の運

<sup>3</sup> 質量密度はしばしば密度と略されます。

動方程式

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + f_i(\mathbf{x}, t) \quad (3.10)$$

と線形等方弾性体の構成関係式

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.11)$$

の特別な場合にほかなりません。つまり、ここまで質点系の連成振動の極限で導かれたのは、1次元弾性体の運動方程式と構成関係式なのです。

ここから応力  $\sigma$  の定義を運動方程式に代入すると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.12)$$

と書くことができます。このような方程式、より一般的には

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (3.13)$$

を、速度  $c$  の **1次元波動方程式** と呼びます。本節で導いた連成振動の連続体極限の場合には、 $c = \sqrt{G/\rho}$  です。

### 不均質媒質中の波動方程式

ここではバネ定数  $k$  が場所によらず一定であるという前提で波動方程式を導出しましたが、バネ定数が場所によって異なる場合には、 $G = G(x)$  と書けるため、波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( G(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3.14)$$

となります。ただしこの場合も、 $G$  の空間変化率  $\partial G / \partial x$  が緩やかである場合には、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( G(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{dG}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} + G(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.15)$$

と書き下したときに第1項が第2項よりも十分に小さくなるために無視することができ、速度  $c = \sqrt{G/\rho}$  だけが場所に依存する波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \simeq \frac{G(x)}{\rho(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.16)$$

で近似することができます。

### 3.1.2 1次元波動方程式の解とその特徴

ここからは、波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.17)$$

が成立することを前提として、その特徴を調べていきましょう。

波動方程式は時間  $t$  と空間  $x$  に関する偏微分方程式ですから、その解  $u$  も時間と空間の関数  $u(x, t)$  のはずです。このような**偏微分方程式**を解くために、波動方程式の解  $u$  が時間だけの関数  $T(t)$  と、空間だけの関数  $X(x)$  からなる

$$u(x, t) = T(t)X(x) \quad (3.18)$$

と仮定して、波動方程式 (3.17) を満たす  $T(t), X(x)$  を探してみましょう。これは偏微分方程式を解く際に広く使われるテクニックで、**変数分離法**といいます。

仮定した解 (3.18) を (3.17) に代入すると、

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = c^2 \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (3.19)$$

が得られます。

#### 演習問題 3.3: 変数分離計算の確認

式 (3.19) が波動方程式から得られることを計算して確かめなさい。

ここで、式 (3.19) の左辺は時間だけの関数、右辺は空間だけの関数のはずです。それらが相等しいということは、左辺

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (3.20)$$

と右辺

$$c^2 \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (3.21)$$

は時間の関数でも空間の関数でもなく、ただの定数でなければなりません。そこでこれを  $\gamma$  と置く

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = c^2 \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \equiv \gamma \quad (3.22)$$

ことにしましょう。そうすると、この微分方程式は 2 本の常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dt^2} &= \gamma T(t) \\ \frac{d^2 X}{dx^2} &= \frac{\gamma}{c^2} X(x) \end{aligned} \quad (3.23)$$

に簡略化されます。これらの微分方程式はそれぞれ 1 変数（それぞれ  $t$  と  $x$ ）だけに依存する常微分方程式です。偏微分方程式を適切な仮定によってより解きやすい常微分方程式に帰着させる、というのが変数分離法なのです。

さらにこの場合は、得られた常微分方程式が単振動などでよく見慣れた単純な微分方程式になりました。その意味は、ある関数を時間か空感で 2 階微分したものと自分自身が（比例係数を交えて）同じになるというものです。そのような特徴を持つ関数といえば、指数関数（あるいは三角関数）ですね。ですから、これらの常微分方程式は

$$\begin{aligned} T(t) &= e^{\pm\sqrt{\gamma}t} \\ X(x) &= e^{\pm(\sqrt{\gamma}/c)x} \end{aligned} \tag{3.24}$$

を特解として持つのです。したがって、この微分方程式解の特徴は  $\gamma$  の符号によって特徴づけられます。以下では  $\gamma$  の符号で場合分けして、その特徴を考えることにしましょう。

#### 演習問題 3.4: 常微分方程式の特解

式 (3.24) が (3.23) の解になっていることを代入して確かめなさい。

##### (i) $\gamma > 0$ の場合

$\gamma > 0$  のとき、時間に関する微分方程式の解は、境界条件で定まる定数を  $a, b$  として、

$$T(t) = ae^{\sqrt{\gamma}t} + be^{-\sqrt{\gamma}t} \tag{3.25}$$

となります。しかし、これは  $a, b$  がゼロでない場合には、時間が  $t \rightarrow \pm\infty$  で振幅が無限大になってしまいますね。いま考えているのは地震波が伝わる現象であるので、地震波の振幅が無限大になる、というのは物理的にありえません。ということで  $\gamma > 0$  の場合はいま考える問題の解として不適当です。

##### (ii) $\gamma = 0$ の場合

このときの解は  $T(t)$  も  $X(x)$  もただの定数です。それでは波が伝播しません。これも不適当です。

##### (iii) $\gamma < 0$ の場合

残る可能性は  $\gamma < 0$  です。このときは  $\sqrt{\gamma}$  が純虚数になりますから、実数  $\omega$  を用いて  $\gamma \equiv -\omega^2$  書き直しましょう。すると、このときの解は、定数を  $a, b, c, d$  として

$$\begin{aligned} T(t) &= ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t} \\ X(x) &= ce^{i(\omega/c)x} + de^{-i(\omega/c)x} \end{aligned} \tag{3.26}$$

と書くことができます。さらに、 $X(x)$  の指数関数に現れた変数の組を  $\omega/c \equiv k$  と再定義しましょう。すると、最終的に一次元波動方程式の解は、

$$\begin{aligned} u(x, t) &= T(t)X(x) = \left( ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t} \right) \left( ce^{ikx} + de^{-ikx} \right) \\ &= (ac)e^{i(kx+\omega t)} + (bd)e^{-i(kx+\omega t)} + (bc)e^{i(kx-\omega t)} + (ad)e^{-i(kx-\omega t)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

と書けました。この解に現れる指数関数は、オイラーの公式 ( $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ) により、

$$e^{i(kx \pm \omega t)} = \cos(kx \pm \omega t) + i \sin(kx \pm \omega t) \quad (3.28)$$

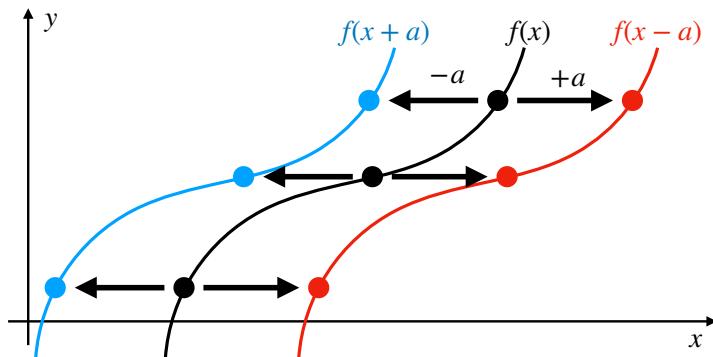
と表せます。つまり、波動方程式の解は、時間  $t$  と空間  $x$  の組み合わせ  $kx \pm \omega t$  を引数にもつ三角関数で書ける、ということがわかりました。

### 3.1.3 波動現象を記述する変数とその関係

波動方程式の解の代表例として  $\cos(kx \pm \omega t)$  を考えましょう。これは  $x$  と  $t$  の関数ですが、どちらか片方に注目して考えるのが簡単です。まず、数学の基礎として、次の事実を押さえておきましょう。

#### 数学・物理ノート 3.2: 関数の平行移動

関数  $f(x)$  と正の値  $y$  に対し、 $f(x+a)$  は  $x$  軸上のマイナス方向への、 $f(x-a)$  はプラス方向への、大きさ  $a$  の平行移動を意味します。



これは適当な関数（たとえば  $f(x) = \cos(x)$ ）に対して、 $f(x+1), f(x-1)$  のように引数をずらした関数のグラフを描いてみればすぐに納得できるでしょう。

では、解の特徴を調べていきます。まずは時間  $t$  は固定して、空間方向  $x$  について着目してみましょう。いま考えている解は、 $\cos(kx \pm \omega t) = \cos(k[x \pm ct])$  と書けます（ $k$  の定義  $k = \omega/c$  を用いました）。まず、時間が  $t = 0$  という特別な場合を考えると、この関数は  $\cos(kx)$  ですから、この関数は  $x$  軸方向に長さ

$$\lambda \equiv \frac{2\pi}{k} \quad (3.29)$$

の単位で繰り返し振動していることがわかります。この繰り返す振動の 1 つの長さを**波長**といいます。そして  $t \neq 0$  のときには、その振動が  $ct$  の大きさだけ  $x$  軸の負・正の方向にそれぞれ平行移動していくのです。単位時間  $t = 1$ あたりの移動量が  $c$  ですから、 $c$  は  $\cos(kx)$  が移動する**伝播速度**に該当します<sup>4</sup>。 $\cos(k[x + ct])$  が  $x < 0$  の方向の、 $\cos(k[x - ct])$  が  $x > 0$  の方向への伝播です。このように波動方程式にしたがって情報（この場合は振動）が伝わる現象のことを、**波動現象**といいます。また、このときの  $k$  を**波数**といいます。これは、 $k = 2\pi/\lambda$  が、「単位距離（ここでは  $2\pi$ ）のなかに波長がいくつ分に入るか」という意味を持つことに由来します。

こんどは逆に、空間  $x$  を固定し、時間  $t$  について着目してみましょう。同じ解を時間について整理してみると、 $\cos(kx \pm \omega t) = \cos(\omega[t \mp x/c])$  です。これは、解が時間軸  $t$  に沿って時間長

$$T \equiv \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.30)$$

の長さ（**周期**）をもつ波であることを示しています。このときの  $\omega$  は（与えた記号から予想していたとおりでしょうが）角周波数です。

$x \neq 0$ においては、時間  $t$  に対して  $\pm x/c$  だけの時間分、関数が平行移動します。これは、距離  $x$  だけ離れたところに波が到着するのに  $x/c$  だけの時間がかかるということを意味しています。あたりまえのことにも思えるかもしれません、今考えている速度  $c$  は、自分たちで「これが速度である」と仮定した量ではなく、波動方程式の解として自然に現れたものであることに注意してください。ここで確かめたのは、その量  $c$  が確かに速度としての性質を備えており、これが波の伝播速度であるとしてよい、ということなのです。

このように、波動伝播は、空間方向に  $\cos(kx)$ 、時間方向に  $\cos(\omega t)$  という関数<sup>5</sup>で振動することによって表されます。ですが、そのときの波数  $k$  と角周波数  $\omega$  は独立に決められるものではありません。波動方程式を変数分離法で解こうとした結果、

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (3.31)$$

という関係が自然に現れたのでした。このような波数と角周波数を結ぶ関係式のことを、一般に**分散関係式**と呼びます。**分散**という言葉の意味は、第 3.4 節で明らかになります。

ところで、これまで波の速度は簡単のため  $c$  という記号を使ってきましたが、もともとの連成振動の問題に戻ると、これは単位長さあたりのバネ定数  $G$  と質量密度  $\rho$  を用いて、 $c = \sqrt{G/\rho}$  でした。このことは、波の伝わる速さは**弾性体が固**

<sup>4</sup> 高校生の頃、速さとは絶対値のスカラーで、速度は符号（あるいは方向）付きのベクトル量で違うものだ、と習ったかもしれません。ところが、地震学の分野ではこの 2 つをあまりちゃんと区別していないかもしれません。英語でも speed（速さ）も velocity（速度）もスカラーラー量に対して使われています。ここでも慣例に従い、「速度」という言葉を使います。

<sup>5</sup>  $\sin(\omega t)$  でも  $e^{i\omega t}$  でもよい。

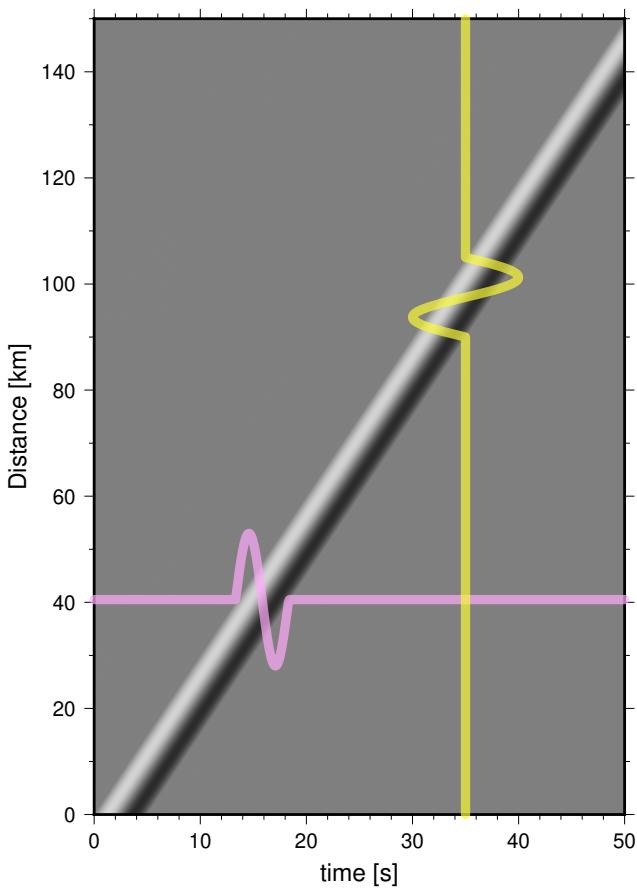


図 3.2 1 次元波動伝播。ここでは周期 5 秒の sin 波が速度 3.0 km/s で伝わっていく様子を示している。図中の線は、距離 40 km における時間の関数としての波動と、時間 35 秒における空間の関数としての波動である。

いほど速く、密度が大きい（重い）ほど遅いということを意味しています。ここで扱った弾性体の問題は、バネと質点の極限から得られた簡易的なものではあります、この「固いほど速く重いほど遅い」というのはこれから学ぶ地震波（弾性波）にも共通する重要な特徴です。またこのことは、地震波の速度がわかると、そこから物質の物性（ここではバネ定数あるいは密度）に関する情報が得られる、ということも示唆しているのです。

### 3.1.4 1 次元波動方程式の一般解（ダランベールの解）

実は、1 次元波動方程式 (3.17) の一般解は、任意の 1 変数関数  $f$  と  $g$  を用いて、

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (3.32)$$

と表されることが知られています。これはダランベールの解と呼ばれます。第 1 項と第 2 項の意味するところは前節と同じで、初期状態の波形  $f(x + c \cdot 0) = f(x)$  と  $g(x + c \cdot 0) = g(0)$  がまったく崩れることなく、それぞれ  $x$  の正方向と負方向

に速さ  $c$  で伝播することを表しています。

関数  $f(x - ct)$  が波動方程式の解になっていることを、直接代入して確かめてみましょう。新しい変数  $\xi$  を  $\xi \equiv x - ct$  で定義すると、合成関数の微分公式により、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\end{aligned}\quad (3.33)$$

です。これを波動方程式に代入すると、たしかにこの関数が波動方程式を満たす（左辺=右辺になる）ことが確かめられます。

### 演習問題 3.5: 波動方程式に対するダランベールの解

(3.33) を波動方程式 (3.17) に代入して、関数  $f(x - ct)$  が波動方程式を満たすことを確かめなさい。式 (3.33) は 1 階の微分だけを示していますが、波動方程式に代入するにはもう 1 階の微分が必要です。また同様に  $\eta \equiv x + ct$  という変数変換によって、関数  $g(x + ct)$  も波動方程式を満たすことを示しなさい。

ところで、波動方程式を正面から解いてみたら指数関数（あるいは三角関数）が現れたのに、一般解は任意の関数だと言われると不思議に思わないでしょうか。実は、このことはフーリエ変換でうまく説明できます。任意の関数  $f(x - ct)$  は

$$f(x - ct) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega \quad (3.34)$$

のようにフーリエ変換で表されます。 $e^{ikx}$  が余計についていると思うかもしれません、 $\tilde{f}(\omega) e^{ikx}$  をひとまとめに考えれば、フーリエ変換の定義に即していることがわかるでしょう。ということで、三角関数や指数関数で解が表されるのと、任意の関数で解が表されるということは互いに矛盾しないのです。

あらためて、1 次元の波動伝播の様子を図 3.2 に示しました。波は時間と空間の関数であること、波動が一定速度で伝わっていくことが読み取れるでしょうか。地震の観測は地震計で行いますから、空間上のある 1 点で、時間については事実上の連続関数として地震波を観測します<sup>6</sup>。一本一本の地震の記録は、図 3.2 の横線のような時間の関数ですが、たくさん地震計の記録を距離順に並べれば、図 3.2 のように地震波が空間方向に伝わっていく様子が確認できます。図 3.3 にそのような観測記録の例を示しました。このような地震波形の表示法を**レコードセクション**と呼びます。図 3.2 と見比べると、時間・空間の関数として地震波が広がっている様子が確認できるでしょう。ただし、波の山谷は非常に複雑で、このスケールだと色の黒い部分（振幅の大きい部分）が広がっていることしかわかりません。このことは、地球内部が  $\rho$  や  $G$  の定数で表せるような単純なものではなく、**不均**

<sup>6</sup> このような時間の関数のことを**時系列**といいます。

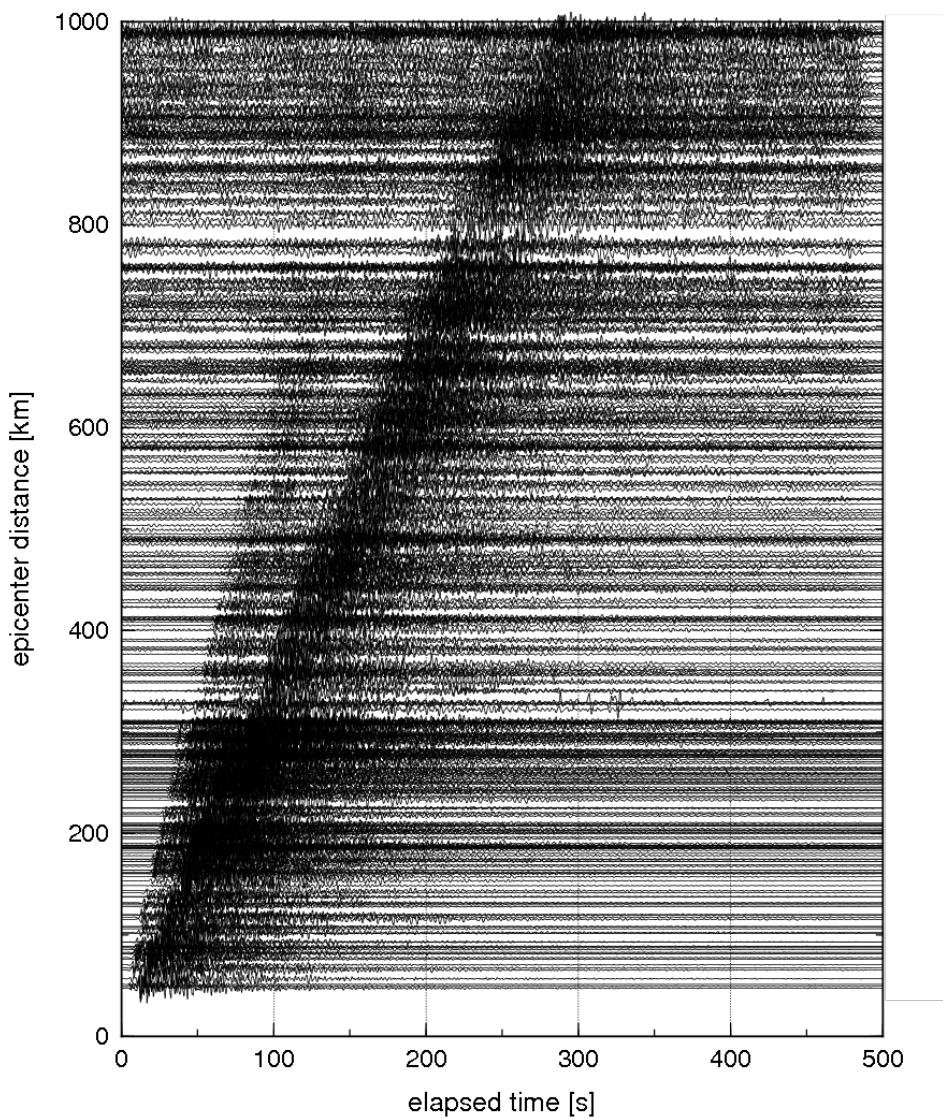


図 3.3 防災科学技術研究所 Hi-net の地震計で観測された関東地方の地震の地震波伝播の様子（レコードセクション）。各観測点で観測された上下動速度記録を、震央位置からの水平距離（震央距離）に応じて位置を調整して表示している。

質であることを証拠です。ちなみに、振幅の小さい最初の波と、その後の大きな波の2つが確認できますが、これがP波とS波です。本節で扱った波動方程式は一つの速度の波の解しかなく、P波とS波の区別はありませんでした。これは、そもそも考えた問題が1次元での1方向の運動であるから、ということに起因しています。

本節では、連成振動の問題の考察から、弾性体の運動方程式の1次元版を導出し、それが波動伝播を表す波動方程式となることを学びました。では、2次元や3次元ではどうでしょうか。2次元以上になると、弾性体が膨張・圧縮を受けて変形するか、ねじれをうけて変化するかの区別が起こり、それに伴って2つの異なる

速さを持つ波が現れます。これが地震波でいうところの P 波と S 波です。また、波の伝播は関数の平行移動だけでなく、その振幅が伝播距離に応じて変化するようになります。

次節以降では、バネの振動問題からは離れて、本格的な弾性体力学に沿ってこれらの特徴を明らかにしていきます。

## 3.2 弹性体力学に基づく地震波動論

ここから先の議論ではベクトルとテンソル量の扱いが多く、沢山の添字総和記号が現れます。そこで、それを省略する記法とベクトル解析について、まず学んでおきましょう。

### 数学・物理ノート 3.3: 総和規約と座標の表しかた

以下の議論では、ベクトルやテンソルの成分を表すため、たくさんの添字が現れます。たとえばベクトル  $x$  の成分  $x_1, x_2, \dots$  のようなものです。添字記法はすべての成分について成立する式をまとめて書くのに優れています。しかしながら、弾性体力学にはたくさんの添字とそれにともなうたくさんの総和記号が出てきて、表現がとても鬱陶しいものになります。そこで、以降では**総和規約**（あるいは、インシュタインの和の規約、縮約記法など）とよばれる一種の省略記法を採用します。それは、『同じ項の中で同じ添字が複数ある場合には、その添字について和を取る』というルールです。これは弾性体力学や地震学だけでなく、さまざまな物理の分野で共通に使われる一般的なルールです。和を取る添字の範囲は、**添字番号 1 から、その問題で考えている次元まで**とします。数学としては曖昧なようですが、「3 次元空間の問題を考えるときに 1 から 3 まで和を取る」「2 次元のときには 1 と 2 について和を取る」、ということで誤解の余地はないでしょう。

たとえば、 $a_i b_i$  は、3 次元空間では

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (3.35)$$

を表しています。これはベクトルの内積  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  を総和規約で表したもので、2 次元空間の問題を考えているときには、第 3 項  $a_3 b_3$  は不要になります。以下では特に断りのない限り 3 次元空間を考えているものとします。

和を取る変数  $i$  は、総和記号のダミー変数と同じ扱いであるので、 $i$  である必要はありません。 $a_i b_i = a_j b_j = a_p b_p = a_q b_q$  といったように、なんでも構わないので、慣例としては  $i, j, k, l, p, q, r, s$ あたりがよく使われます。「なんでも」と言いましたが、記号の重複には注意が必要です。た

とえば、 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$  という量を総和規約であわらすことを考えましょう。  
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$  ですから、同様に  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = c_i d_i$  です。したがって

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = a_i b_i c_i d_i$$

としたら正しいでしょうか。右辺にそのまま総和規約を適用すると、  
 $(a_i b_i)(c_i d_i) = a_1 b_1 c_1 d_1 + a_2 b_2 c_2 d_2 + a_3 b_3 c_3 d_3$  ですから、意図した  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$  とは違うものになってしまいました。これはダミー変数を重複して使ったことが原因です。ひとつの項のなかに複数の総和規約が存在するときには、互いに異なるダミー変数を使ってあげる必要があります。たとえば  $j$  を使うことにはすれば、

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = a_i b_i c_j d_j \quad (3.36)$$

なら正しい結果が得られます。ダミー変数の選択は総和規約に特有の問題ではありません。総和記号を使うときにも同じ注意が必要です。

ところで、総和規約が適用されるのは、複数の項の掛け算とは限りません。たとえば  $a_{kk}$  は、記号はひとつだけですが「同じ項の中に同じ添字が複数ある」という条件を満たしますから、

$$a_{kk} = \sum_{k=1}^3 a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad (3.37)$$

のことです。さらに、微分も

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (3.38)$$

のように書くことができます。これはベクトルの発散  $(\nabla \cdot \mathbf{u})$  です。

一方、単独の項には総和規約は適用されません。たとえば

$$a_i + b_i \quad (3.39)$$

は  $i$  について和を取ってはいけません。+ と - 記号で区切られた項は互いに「別の項」だからです。

総和規約を用いると、行列  $\mathbf{A}$  (成分  $A_{ij}$ ) と  $\mathbf{B}$  (成分  $B_{ij}$ ) の掛け算は

$$C_{ij} = A_{ik} B_{kj} \quad (3.40)$$

と書けます ( $k$  について和を取る) し、行列  $A$  とベクトル  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  の掛け算は

$$c_i = A_{ij} x_j \quad (3.41)$$

のようにすっきりと書ける ( $j$  について和を取る) のです。逆に、上式のような添字表現を見たときに、これらが行列の掛け算、行列とベクトルの掛け算であると認識できるようになるまで練習が必要です。

もしテンソルや行列の  $(k, k)$  成分を和を取らずに表現したいときには、「和を取らない」と式中にその旨を明示することにします。ただしそのようないふねは例外的で、本書には存在しません。

### 演習問題 3.6: 総和規約の練習

以下では、 $A, B, C$  をそれぞれ  $3 \times 3$  の行列、 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  を 3 次元縦ベクトルとします。行列・ベクトルの成分は、 $(i, j = 1, 2, 3)$  を用いて、 $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$  ならびに  $u_i$  と表現します。また、任意の行列やベクトル、その計算結果の成分を  $(\mathbf{X})_{ij}$  のようにも表します。たとえば、 $(A)_{ij}$  は行列  $A$  の  $ij$  成分である  $A_{ij}$  に等しく  $(A)_{ij} = A_{ij}$ 、 $(A\mathbf{u})_i$  は行列  $A$  とベクトル  $\mathbf{u}$  の積  $A\mathbf{u}$  の第  $i$  成分、という意味です。転置行列はもとの行列の  $ij$  成分が  $ji$  成分になったものですから、 $(A^T)_{ij} = A_{ji}$  です。

これらの表記法を踏まえ、以下の行列やベクトルの指定された成分（あるいは、結果がスカラー値になる場合はその値）を、例にならって総和規約を用いて表わしなさい。

- (例)  $(A\mathbf{u})_i = A_{ij}u_j$
- (i)  $(A^T B)_{ij}$
- (ii)  $\mathbf{v} \cdot (A\mathbf{u})$
- (iii)  $(A^T B\mathbf{u})_i$
- (iv)  $(ABC)_{ij}$

ヒント：3 つの要素からなる複雑なものは、まずその 3 つの行列・ベクトルのうち 2 つが乗算されたものを、別の行列やベクトルに置き換えて考えてみるとよいでしょう。

### 数学・物理ノート 3.4: ナブラ記号と勾配・発散・回転

空間についての微分は、**ナブラ** ( $\nabla$ ) という記号で表すことがあります。その定義は

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \quad (3.42)$$

です。これは**微分演算子**で、 $\nabla$ だけでは意味を持たず、これになにかの変数を**作用**させると、その変数の空間微分がなされる、というものです。

スカラー関数  $\phi(\mathbf{x})$  と、ベクトル関数  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  に対して、

$$\text{grad}\phi \equiv \nabla\phi \equiv \left( \frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \right) \quad (3.43)$$

を  $\phi$  の**勾配** (gradient)，

$$\text{div}\mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \frac{\partial A_k}{\partial x_k} \quad (3.44)$$

をベクトル  $\mathbf{A}$  の**発散** (divergence)，そして

$$\text{rot}\mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} \equiv \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \quad (3.45)$$

をベクトル  $\mathbf{A}$  の**回転** (rotation) といいます。rot の代わりに curl が使われることもある。発散と回転の定義に現れた・と  $\times$  はそれぞれベクトルの内積と外積です。さらに、

$$\nabla^2 \equiv \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (3.46)$$

をラプラシアン (Laplacian) といいます。ラプラシアンは、AINSHU タインの総和規約を用いると

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \quad (3.47)$$

とも書くことができます。

スカラー関数の勾配は、文字通り  $x_i$  方向への関数の傾きを表すベクトルです。ベクトルの発散と回転は弾性体の変形と関連付けると理解しやすいでしょう。変位ベクトル  $\mathbf{u}$  の発散

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (3.48)$$

は、変形にともなう弾性体の体積変化を表す量です。一方、弾性体の変形をひずみと剛体回転に分けたときの回転テンソル

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.49)$$

は、ベクトル  $\mathbf{u}$  の回転の  $i$  軸と  $j$  軸に直交する成分の値の  $1/2$  に相当します。このように、ベクトル場（より具体的には変位場）の発散と回転は、弾性体の膨張収縮・回転と大きく関係しています。なお、弾性体の方程式を立てるときに剛体回転成分を取り除いたからといって、弾性体の局所的な変位の回転がすべてゼロ

になるというわけではありません。

### 数学・物理ノート 3.5: 勾配・発散・回転に関するいくつかの公式

ベクトルの計算に関しては膨大な数の公式があるが、ここでは本書で用いるものだけピックアップします。まず、複数の種類の演算を組み合わせる場合：

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) &= \nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}\end{aligned}\quad (3.50)$$

また、ベクトル  $\mathbf{A}$  に対して、

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (3.51)$$

が成立します。さらに公式 (3.51) において  $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B}$  と置き換えることで、

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla[\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B})] - \nabla^2(\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2(\nabla \times \mathbf{B}) \quad (3.52)$$

も得られます。最後の等式では (3.50) を用いました。同じ式は、

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}) \quad (3.53)$$

とも書けます。これに (3.51) を代入することで、

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}] = -\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{B}) \quad (3.54)$$

も成立します。

公式 (3.50) は、「回転の発散がゼロ」「勾配の回転がゼロ」という物理的な意味を持ちます。

### 演習問題 3.7: ベクトル解析 1

公式 (3.50) が成立していることを、勾配・発散・回転の成分による定義 (3.43), (3.44), (3.45) を代入することにより示しなさい。

### 演習問題 3.8: ベクトル解析 2\*

公式 (3.51) が成立していることを、 $x_1$  成分について計算して示しなさい。

$x_1$  成分といつても、右辺の  $(\nabla \cdot \mathbf{u})$  や  $(\nabla \times \mathbf{u})$  の計算には 3 成分全てが

必要です。その勾配や回転演算の  $x_1$  成分だけを取ること。

### 演習問題 3.9: ベクトル解析 3

公式 (3.51) が成立していることを前提として、公式 (3.52) と (3.54) を証明しなさい。

### 演習問題 3.10: ベクトル解析 4

スカラー関数  $\phi$  を

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1$$

とするとき、 $\nabla \cdot (\nabla \phi)$  を求めなさい。

### 数学・物理ノート 3.6: レヴィ=チヴィタ (Levi-Civita) 記号

本書では陽に扱いませんが、ベクトルの外積を総和規約を用いて表すために、レヴィ=チヴィタ (Levi-Civita) 記号  $\varepsilon_{ijk}^a$  を以下のように定義します。

$$\begin{cases} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1 \\ \text{それ以外の } \varepsilon_{ijk} = 0 \end{cases}$$

この記号を用いると、3次元ベクトル  $a, b$  の外積の第  $i$  成分は、

$$(a \times b)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

と簡単に表すことができます。成分による外積の定義と比較すれば簡単に確かめられるでしょう。さらに、このレヴィ=チヴィタ記号には、以下の関係が成り立つことが知られています。

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ipq} = \delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}$$

---

<sup>a</sup> たまたま記号が同じだけで、ひずみテンソルとは全く関係ありません。なお、この記号にはいろいろな名前があり、エディントンのイプシロン (Eddington's epsilon)とか、交代記号と記している書物もあるようです。これらは名前が違うだけで、みな同じものです。

### 3.2.1 弾性体の運動方程式の変位による表現

弾性体の運動方程式とベクトル解析の知識を使うと、弾性体の運動を司る運動方程式(3.10)と、ひずみ一応力の関係式である構成関係式(3.11)を、変位のみの微分方程式で表すことができます。添字で表した量の計算練習を兼ねて、少し丁寧にやってみましょう。

まず、運動方程式と構成関係式を総和規約を用いて成分で表現すると、

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}(x, t)}{\partial x_j} + f_i(x, t) \quad (3.55)$$

と

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.56)$$

です。総和規約により、運動方程式では添字  $j$  について、構成関係式では右辺第1項の  $k$  についてそれぞれ和を取っています。 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタで、 $i = j$  のときだけ値1をとり、その他の場合は0になります。また、ひずみテンソルの定義は

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.57)$$

でした。ひずみテンソルは並行移動と剛体回転を除いた弾性体の真の変形を単位距離あたりの比率として表したものでした。

ここでは、簡単のため外力である体積力  $f$  は考えない ( $f = 0$ ) ことにしましょう。また、媒質は無限に広がっていて、かつ**均質**であるとします(**無限均質媒質**)。ここでの媒質とは、弾性体を規定するパラメタ  $\rho, \lambda, \mu$  の空間分布のことで、それらが**均質**(一定)であることを仮定する、という意味です<sup>7</sup>。

運動方程式の右辺にある応力に、構成関係式(3.11)を代入して整理してみます：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} [\lambda \delta_{ji} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \lambda \delta_{ji} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= \delta_{ji} \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

ここで、右辺第1項の  $\delta_{ji}$  は、 $i = j$  のときだけ1で他はゼロです。したがって、この項に含まれる  $j$  は  $j = i$  のときだけを考えれば良いですね。したがって、この項は

$$\delta_{ji} \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right).$$

<sup>7</sup> 均質(homogeneous)の対義語は**不均質**(inhomogeneous/heterogeneous)です。場所によって弾性体の特徴が異なることを意味します。もちろん実際の地球は不均質ですが、簡単のため特別なケースを考えていることになります。

と簡略化されます。第3項には  $\partial u_j / \partial x_j$  がありますが、この  $j$  は総和規約によつて和を取るためのダミー変数ですから、その変数のアルファベットが  $j$  である必然性はないでした。たとえば  $\partial u_j / \partial x_j = \partial u_k / \partial x_k$  です。すると、第1項と第3項はまとめられて、かつ発散(3.44)で表せることもわかります：

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}).$$

残った  $x_i$  方向への微分は、 $i = 1, 2, 3$  の3成分をベクトルとして扱えば、これは勾配の  $i$  成分です。第2項は2階微分の和ですから、変位  $u_i$  のラプラシアンです：

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \mu \nabla^2 u_i$$

ここまで、運動方程式は、ベクトルの方程式として

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.59)$$

と表せました。さらに公式(3.51)を用いると、最終的に運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (3.60)$$

のようにまとめられます。この方程式は応力やひずみテンソルを介さない変位だけの微分方程式であり、媒質と初期条件・境界条件が与えられれば、(原理的には)変位について解くことができる**閉じた系**になっています。

### 演習問題 3.11: 弹性体の運動方程式の導出

弹性体の運動方程式の応力による表示から構成関係式を代入して、変位による表現(3.60)が得られるまでの計算を自分の手でフォローしてみましょう。特にクロネッカーのデルタに関する操作は、読んだだけではわかりにくいでしょう。納得できなかつたら、成分をすべて書き出してみると、計算の練習にもなるし理解にもつながるでしょう。

### 3.2.2 地震波の波動方程式(1) ポテンシャルによる表現

いよいよ弹性体の運動方程式が地震波の伝播を表す波動方程式を含んでいることを示していきましょう。引き続き外力  $f = \mathbf{0}$  であり、かつ弹性係数  $\lambda$  と  $\mu$  は空間一様である無限均質媒質を仮定します。

突然かつ天下りですが、ベクトル解析には**ヘルムホルツの定理**と呼ばれる定理があります。その内容は、『無限遠方でその振幅が充分に小さくなる任意のベクトル場  $\mathbf{u}$  は、スカラーポテンシャル  $\phi$  の勾配ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の回転との和で表すことができる』というものです。これを式で書くと、

$$\mathbf{u} = \text{grad}\phi + \text{rot}\mathbf{A} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.61)$$

です。本節ではこの定理を活用して、地震波の方程式を導出していきます。

### 数学・物理ノート 3.7: ヘルムホルツの定理の証明

(注) 本ノートの証明はやや形式的ですので、(3.61) を定理として受け入れて先に進んでも不都合はありません。証明が気になる読者のみ読めば十分です。

任意のベクトル場  $\mathbf{V}$  に対し、 $c = \nabla \cdot \mathbf{V}$  とします。また、スカラー場  $\phi$  をポアソン方程式

$$\nabla^2 \phi = c \quad (3.62)$$

の解として定義しましょう。この定義により、

$$\nabla \cdot (\mathbf{V} - \nabla \phi) = \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla^2 \phi = c - c = 0 \quad (3.63)$$

です。

ところで、一般に任意のベクトル場  $\mathbf{A}$  に対して

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (3.64)$$

ですから、(3.63) 式は、

$$\mathbf{V} - \nabla \phi = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.65)$$

を満たすベクトル場  $\mathbf{A}$  が存在することを意味しています。左辺第 2 項を移項すると、任意のベクトル場  $\mathbf{V}$  がスカラー場  $\phi$  とベクトル場  $\mathbf{A}$  を用いて

$$\mathbf{V} = \nabla \phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.66)$$

と表すことができる事が示されました。

ヘルムホルツの定理に基づき、弹性体の変位  $\mathbf{u}$  を(3.61)式のようにスカラーポテンシャルによって記述される部分と、ベクトルポテンシャルによって記述される部分に分けて記述しましょう。以下、これら 2 つの部分がそれぞれ異なる物理的な意味を持つことを示していきます。

まず、ベクトル解析の公式(3.50)を用いると、変位の発散と回転は

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \nabla \cdot \nabla \phi \\ \nabla \times \mathbf{u} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.67)$$

と書けます。

**演習問題 3.12: ヘルムホルツの定理**

(3.67) 式を公式 (3.50) とヘルムホルツの定理 (3.61) から確かめなさい。

(3.67) は、変位の発散 ( $\nabla \cdot \mathbf{u}$ ) はスカラーポテンシャルの項のみによってもたらされていることを示しています。ところで、変位の発散は体積変化 (3.48) を表す量でした。したがって、スカラーポテンシャルによって記述される地震波は、弾性体の体積変化を伴う波であるといえるでしょう。逆に、ベクトルポテンシャルによる地震波変位は、弾性体の体積変化に寄与しないのです。

ヘルムホルツの定理による変位のポテンシャルへの分解 (3.61) を弾性体の運動方程式 (3.60) に代入すると、

$$\nabla \left( (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + \nabla \times \left( \mu \nabla^2 \mathbf{A} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (3.68)$$

であることが示されます。

**演習問題 3.13: 弹性体の運動方程式のポテンシャル分解**

(3.61) を弾性体の運動方程式 (3.60) に代入することで、(3.68) 式を導出しなさい。ベクトル解析の公式 (3.50) と (3.54) を使う。

この方程式 (3.68) が満たされる（つまり、ポテンシャル  $\phi$  と  $\mathbf{A}$  により表現した変位が弾性体の運動方程式の解である）ためには、(3.68) の括弧内の式がそれぞれゼロであればよいでしょう：

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= 0 \\ \mu \nabla^2 \mathbf{A} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.69)$$

両辺を密度  $\rho$  で割って、もうすこし見やすく整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \phi, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.70)$$

が得られます。1次元の場合と異なり、空間微分がラプラシアン ( $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ ) に変わっていますが、これらは3次元の波動方程式です。その速度はそれぞれ

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (3.71)$$

です。つまり、変位を回転なしのスカラーポテンシャルと発散なしのベクトルポテンシャルに分けたとき、それぞれがもたらす変位が P 波 (Primary Wave) と S

**波 (Secondary Wave)** に対応しているということがわかったのです。それらの波の速度が互いに異なるということもわかり、P 波は速度  $\alpha$  で、S 波は  $\beta$  で伝播することが判明しました。

波動方程式の解としてスカラーポテンシャル  $\phi$  とベクトルポテンシャル  $A$  が求まれば、それらから P 波と S 波の変位が

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_P &= \nabla\phi \\ \mathbf{u}_S &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.72)$$

のようにそれぞれ求まります。

地震学で取り扱う多くの弾性体（岩石）の多くの状態について、2つのラメの定数の間には  $\lambda \approx \mu$  という近似関係があることが知られています。 $\lambda = \mu$  の弾性体媒質のことを、特に**ポアソン媒質**と呼びます。ポアソン媒質の P 波の速さは  $\alpha = \sqrt{3}\beta \approx 1.73\beta$  です。ほとんどの物質について  $\lambda > 0$  であると考えてよいですが、理論的な下限は  $\lambda \geq -(2/3)\mu$  です<sup>8</sup>。この下限においても、P 波の伝播速度は S 波よりもかならず速いことが示されます。

#### 演習問題 3.14: P・S 地震波速度比

$\lambda = \mu$ ,  $\lambda = 0$  および  $\lambda = -(2/3)\mu$  のそれぞれの場合について、P 波速度と S 波速度の比を求めなさい。

#### 演習問題 3.15: 地震波速度からラメの係数（剛性率）の推定

大陸地殻の構成物質の密度はおおむね  $\rho = 2.7 \text{ g/cm}^3 = 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、P 波速度は  $5.0 \text{ km/s} = 5.0 \times 10^3 \text{ m/s}$  程度です。ポアソン媒質を仮定して、この媒質の剛性率  $\mu$  を求めなさい。単位の換算に注意すること。 $\mu$  の SI 系単位は Pa（パスカル）で、 $\text{N/m}^2$  に等しいです。

<sup>8</sup> 等方弾性体を記述するパラメタはラメの定数のほかに、体積弾性率  $\kappa$  やポアソン比  $\nu$  などがあります。そのなかで、体積弾性率は等方的な一様な圧力（あるいは張力）を弾性体に与えたときの圧縮率（あるいは膨張率）で、ポアソン比は物体を一方向に引っ張ったときに、それに直交する方向にどれだけ縮むか、という指標です。これらは、ラメの係数と  $\kappa = (3\lambda + 2\mu)/3$ ,  $\nu = \lambda/[2(\lambda + \mu)]$  という関係にあることが知られています。

弾性体に圧力をかけたときにそれが膨らんだり、逆に張力をかけたのに圧縮することはありません。つまり、体積弾性率は  $\kappa \geq 0$  であることが物理的に要求されます。この条件から、ラメの定数  $\lambda$  の範囲  $\lambda \geq -(2/3)\mu$  が得られます。剛性率  $\mu$  は、せん断応力に対する変形のしにくさを表す指標であり、かならず  $\mu \geq 0$  です。

ところで、媒質を一方向に引っ張ったとき、それに直交する方向では媒質は縮もうとするのが普通です。たとえばゴムの棒のような柔らかい物質を思い切り引っ張ったときのことを想像してみるとよいでしょう。ということは、ほとんどの物質でポアソン比  $\nu$  は正であり、したがってポアソン比とラメの係数との関係式から  $\lambda \geq 0$  です。しかし、ごく稀にそうでない物質（あるの方向に引っ張ると全方位に膨張するような物質）も存在し、そのような媒質では、 $\lambda$  が負の値をとりうるのでです。

### 数学・物理ノート 3.8: 単位の接頭辞

具体的な単位が出てきたところで、量の大きさを表す接頭辞をまとめおきましょう。主に  $10^3$  毎に、よく使う範囲のものとだけを記します。ここにあるものはすべて**常識**として知って（覚えて）いなければなりません。

名前	ナノ	マイクロ	ミリ	センチ	ヘクト	キロ	メガ	ギガ	テラ
記号	n	$\mu$	m	c	h	k	M	G	T
大きさ	$10^{-9}$	$10^{-6}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^2$	$10^3$	$10^6$	$10^9$	$10^{12}$

### 3.2.3 P 波・S 波の性質

我々はすでにもう、波動方程式が 1 次元問題で  $u = f(x_1 - ct)$  ( $c$  は波の伝播速度) という形の解（ダランベールの解）を持つことを知っています。そこで、 $x_2, x_3$  方向はとりあえず気にしないことにして、得られた地震波の波動方程式の解を

$$\phi = f(x_1 - \alpha t), \quad A = g(x_1 - \beta t) \quad (3.73)$$

と置いてみましょう。この解の形は、P 波も S 波も  $x_1$  方向にのみ伝播する波であり、その振幅は  $x_2, x_3$  方向には（理論上）無限一様に広がっているということを意味しています<sup>9</sup>。このような波動を**平面波**と呼びます。解が  $x_1$  にしか依存しないため、 $\partial/\partial x_2 = \partial/\partial x_3 = 0$  です。このときの P 波の変位は、

$$\mathbf{u}_P = \nabla\phi = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, 0, 0 \right) \quad (3.74)$$

となります。つまり、 $x$  方向に伝播する P 波は  $x_1$  方向（波の伝播方向）にのみ振動します。P 波は、振動する方向と伝播する方向が等しく、かつ  $\nabla \cdot \mathbf{u}_P \neq 0$  で体積変化をする**縦波**（あるいは**粗密波**）です。

一方 S 波は、ベクトル  $g$  の成分を  $g = (g_1, g_2, g_3)$  と置くと、回転の定義より

$$\mathbf{u}_S = \nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}, \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1}, \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) = \left( 0, -\frac{\partial g_3}{\partial x_1}, \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right) \quad (3.75)$$

です。最後の等式はベクトルポテンシャル  $g$  が  $x_1$  と  $t$  にしか依存しないことから導かれます。この場合の S 波は、 $x_2-x_3$  面内（波の伝播方向と直交する面）で振動しながら  $x_1$  方向に伝播する**横波**（あるいは**剪断波**）であることもわかります。

図 3.4 に 2 次元バネの振動で生じる P 波（縦波）と S 波（横波）の伝播の様子を示します。進行方向（図中上方向）に対して振動方向が互いに直交していることが確認できるでしょう。

<sup>9</sup> 現実世界で波が無限に広がっているというのはもちろんありえない仮定ですが、ある領域に伝わってくる波を考えるとき（そしてその外側は考慮の外であるとき）には、平面波の到来を仮定することがよくあります。

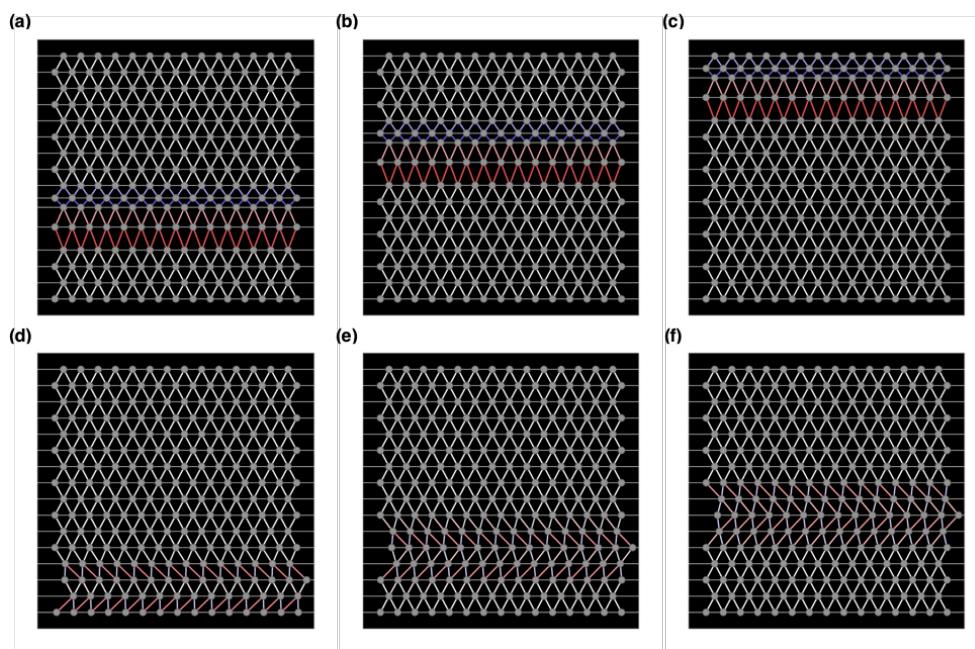


図 3.4 2 次元バネの平面波振動の様子. (a-c) が疎密波を, (d-f) が剪断波をそれぞれ表す. (a) と (d), (b) と (e), (c) と (f) はそれぞれ同じ時間における振動である.

#### 演習問題 3.16: P 波・S 波の成分表示

式 (3.73) のかわりに,

$$\phi = f(x_2 - \alpha t), \quad A = g(x_2 - \beta t) \quad (3.76)$$

である場合を考えましょう.

- (i) この場合, 波はどの方向に伝播するでしょうか.
- (ii) 本節の議論にならって, (3.76) のポテンシャルに対する P 波および S 波の変位を求めなさい. それはそれぞれどの方向に振動をするでしょうか.

#### 3.2.4 地震波の波動方程式 (2) 変位の空間微分による表現

前節では, 変位場をスカラーとベクトルポテンシャルに分解することによって, それぞれが P 波と S 波の波動方程式を満たすことを導きました. ポテンシャル表現はあとで地震波の伝播特性を調べる際に便利な道具ではあります, それぞれの地震波が波動方程式を満たすことを示すだけなら, より直接的な方法もあります.

弾性体の運動方程式 (3.60) の両辺に対して発散と回転を取ると, それぞれが波

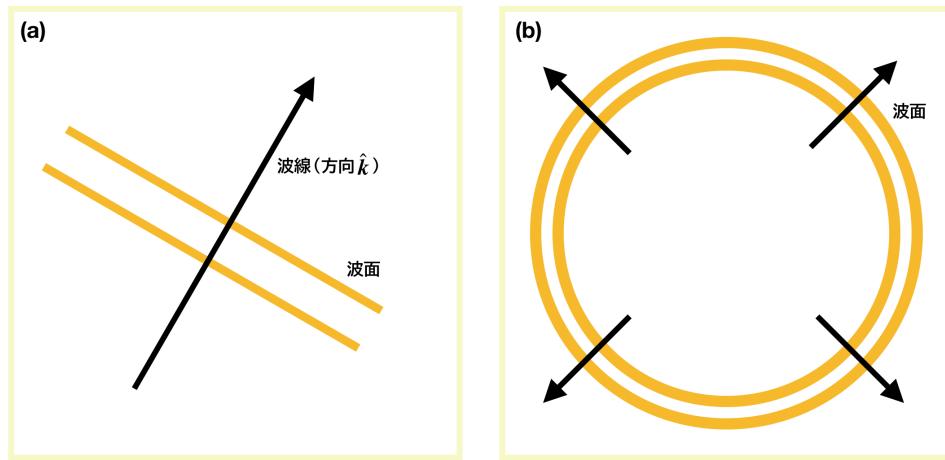


図 3.5 平面波 (a) と球面波 (b) の模式図.

動方程式

$$\frac{\partial^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad \frac{\partial^2 (\nabla \times \mathbf{u})}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (3.77)$$

を満たすことを示すことができます。変位の発散が P 波、回転が S 波にそれぞれ対応しているのです。

#### 演習問題 3.17: 変位を用いた波動方程式

弾性体の運動方程式の両辺の発散と回転を計算し、(3.77) を証明しなさい。

#### 3.2.5 3 次元平面波・球面波と幾何減衰

ここで一旦 P 波と S 波という区別からは離れて、3 次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi = c^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \right) \quad (3.78)$$

に従う波の特徴について考察しましょう。

##### 平面波

これまでに学んだように、1 方向に伝播する波であるなら、1 次元の波動方程式の解と同じ形 ( $f(x_i - ct)$  あるいは  $\exp[i(kx_i - \omega t)]$ ) が成立します。では、任意の方向に伝播する平面波はどうでしょうか。

天下りに答えを与えてしまうと、それは

$$\psi = A \exp[i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - \omega t)] \quad (3.79)$$

のような形をしています。ここで  $A$  は振幅を表す定数です。実際にこの解の形を波動方程式に代入すると、3次元波動方程式の分散関係式

$$\omega^2 = c^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \quad (3.80)$$

が得られます。

### 演習問題 3.18: 3次元波動方程式の分散関係

(3.79) を波動方程式 (3.78) に代入することで、(3.80) を示せ。

ここで、 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$  という波数ベクトルを導入すると、その大きさ

$$k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \quad (3.81)$$

は、1次元波動の波数とまったく同じように扱えます。つまり、波長  $\lambda$  とは  $k = 2\pi/\lambda$  の関係があり、分散関係式は  $\omega = ck$  と簡略化されるのです。波数ベクトル  $\mathbf{k}$  の方向

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (3.82)$$

は、波の伝播する方向を表しています（図 3.5）。

例として、 $x_1-x_2$  面内で速度  $c$  で伝播する波

$$\psi = A \sin(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t) \quad (3.83)$$

を考えましょう（図 3.6）。上の議論から、 $k = \omega/c = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  であるので、 $x_1$  軸と波の伝播方向のなす角を  $\theta$  とすると、

$$k_1 = k \cos \theta, \quad k_2 = k \sin \theta \quad (3.84)$$

あるいは、 $i$  番目の座標軸の方向の単位ベクトルを  $\hat{x}_i$  とすると、

$$k_i = \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i \quad (3.85)$$

と書くことができます。後者の表現は3次元の一般の波動伝播でも有効です。

また、波数ベクトルを角周波数で除した量

$$\mathbf{p} = \mathbf{k}/\omega \quad (3.86)$$

は速度の逆数の次元をもち、**スローネス (Slowness) ベクトル**と呼ばれます。スローネスベクトルの方向は波数ベクトルの方向と同じ、つまり地震波の伝播方向と同じですので、速度をベクトル成分に分解するよりもその逆数であるスローネスベクトルのほうが便利なことがあります。その大きさを取ると、

$$|\mathbf{p}|^2 = \frac{1}{c^2} \quad (3.87)$$

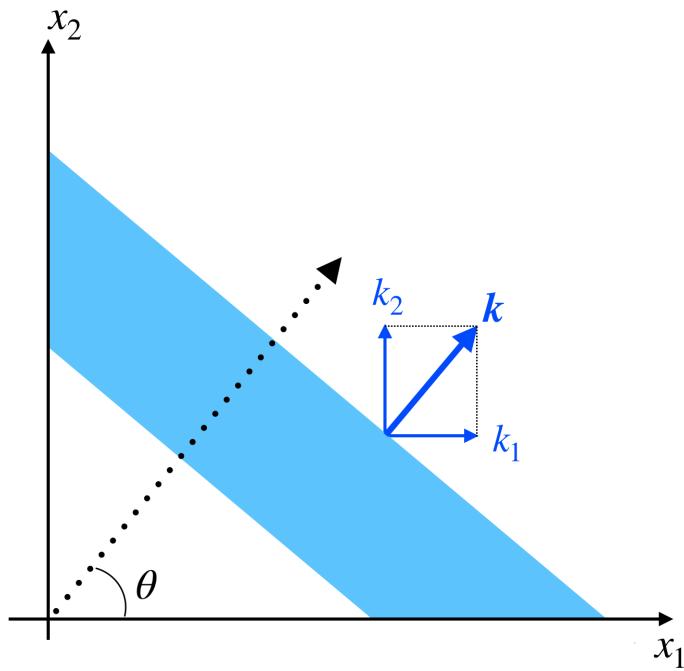


図 3.6 2 次元 \$x\_1-x\_2\$ 面内で伝播する波の方向と波数ベクトルの模式図。

です。波の伝播する方向（それぞれの場所でのスローネスペクトルの方向）に沿つて引いた線を**波線**といいます。波線は波の伝播してきた経路を表しています。また、それに直交する平面もしくは曲面のことを**波面**といいます（図 3.5a）。平面波はある場所で同じ方向に伝播しているため、その波面は平面、波線は直線となります。

#### 演習問題 3.19: 平面波の表現

\$x\_1-x\_2\$ 面内で伝播する平面波の振幅が

$$u = \cos\left(\frac{x_1}{8} - \frac{\sqrt{3}x_2}{8} - \omega t\right)$$

で表されるとします。ただし、空間座標 \$x\_1\$ および \$x\_2\$ の単位は km、時間の単位は s であるとします。

- (i) \$\omega = 1 \text{ rad/s}\$ のとき、波の伝播する速さを求めなさい。単位を付すこと。
- (ii) 波の進行方向を \$x\_1-x\_2\$ 面内のどのような方向でしょうか。

### 演習問題 3.20: 変位ポテンシャルと平面波

$x_1-x_3$  面内で伝播する地震波のスカラー・ポテンシャル  $\phi$  とベクトル・ポテンシャル  $A$ （正確には 3 次元ベクトル・ポテンシャル  $A$  の第 2 成分  $A_2 \equiv A$ ）が、以下のように平面波解で表されるとします。

$$\phi = \phi_0 \exp \left[ i \left( \frac{\pi}{2\sqrt{3}} x_1 + \frac{\pi}{6} x_3 - 2\pi t \right) \right]$$

$$A = A_0 \exp \left[ i \left( \frac{\sqrt{3}\pi}{4} x_1 + \frac{\pi}{4} x_3 - 2\pi t \right) \right]$$

ただし、 $\phi_0$  と  $A_0$  は定数です。変数  $x_1$  および  $x_3$  の単位は km,  $t$  の単位は s であるとします。

- (i) このポテンシャルを持つ P 波と S 波の伝播速度を求めなさい。
- (ii) P 波および SV 波の振動方向を、それぞれベクトルの成分表記で表現しなさい（例：P 波  $(0, 1, 0)$ 、SV 波  $(1, 0, 0)$ ）。ただし、振動方向を表すベクトルはその絶対値を 1 に規格化して示すこと。

### 波のエネルギー

ここで、この後の議論に用いるため、地震波のもつエネルギーについて考察しておきます。弾性体がもつ力学的なエネルギーには**運動エネルギー**と**ポテンシャルエネルギー**の 2 つがあり、その和を総エネルギーといいます。

質量  $m$  の質点が速度  $v$  で運動しているときの運動エネルギーは、 $\frac{1}{2}m|v|^2$  です。弾性体の場合には、あらゆる場所に質量があり、したがってエネルギーもあらゆる場所に存在します。そこで、単位体積あたりの**エネルギー密度**を考えることにしましょう。弾性体の変位を  $u$  とすると、力学的エネルギー密度  $K$  は、

$$K = \frac{1}{2}\rho \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \quad (3.88)$$

と表されます。

いっぽう、弾性体でポテンシャルエネルギーに相当するものは、**ひずみエネルギー**といいます。ひずみエネルギーは、外力が弾性体に仕事をしたときに弾性体に蓄えられるエネルギーで、その値は

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij} \quad (3.89)$$

と表されます<sup>10</sup>。

<sup>10</sup> 細和規約が適用されています。

### S波のエネルギー

地震波のエネルギーについて考察するため、ここでは  $x_2$  方向に振動し  $x_1$  方向に伝播する角周波数  $\omega$  の S 波平面波を考えましょう。この波の変位は、

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= A \sin(kx_1 - \omega t) \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.90)$$

と表せます。 $u_2$  の時間微分は  $\dot{u}_2 = -A \cos(kx_1 - \omega t)$  ですから、運動エネルギー密度は

$$K = \frac{1}{2} \rho |\dot{u}_2|^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \cos^2(kx_1 - \omega t) \quad (3.91)$$

と表せそうです。しかし、エネルギーなのに  $\cos$  関数によりその振幅が時間変動するというのはおかしいですね。実は、波のエネルギーというのは時々刻々の値ではなく、1 周期 ( $=2\pi/\omega$ ) 分について時間平均してはじめて得られるのです。実際に計算してみると

$$\bar{K} \equiv \int_0^{2\pi/\omega} E_K dt = \frac{1}{4} \rho \omega^2 A^2 \quad (3.92)$$

が得られます。これが運動エネルギー密度です。

一方、ひずみエネルギーも変位から計算できます。この場合ゼロではない歪成分は  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$  だけですから、

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{1}{2} k A \cos(kx_1 - \omega t) \quad (3.93)$$

です。このひずみに対応する応力テンソルは

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu \varepsilon_{12} = \mu k A \cos(kx_1 - \omega t) \quad (3.94)$$

ですので、ひずみエネルギーは

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{21} \varepsilon_{21}) = \frac{1}{2} \mu k^2 A^2 \cos^2(kx_1 - \omega t) \quad (3.95)$$

となります<sup>11</sup>。運動エネルギー密度と同様に時間平均を取ると、

$$\bar{W} \equiv \int_0^{2\pi/\omega} E_W dt = \frac{1}{4} \mu k^2 A^2 \quad (3.96)$$

が得られました。したがって、総エネルギー密度は、

$$\bar{E} \equiv \bar{K} + \bar{W} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 + \frac{1}{4} \mu k^2 A^2 \quad (3.97)$$

と表現されます。ここから、総エネルギー密度が地震波振幅の 2 乗に比例することが帰結されます。

---

<sup>11</sup> ひずみや応力の 12 成分と 21 成分は同じ値ですが、足し上げるときには両方の寄与を考慮しなければいけないことに注意してください。

### 運動エネルギー密度とポテンシャルエネルギー密度の等価性

運動エネルギー密度とポテンシャルエネルギー密度は別のものに見えますが、この間には密接な関係があります。地震波は波として伝播していますから、波数と角周波数には**分散関係式**  $k = \omega/\beta$  が成立していなければなりません。さらに S 波速度が  $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$  であることから  $\mu = \rho\beta^2$  であることに注意すると、ポテンシャルエネルギーである平均ひずみエネルギーは、

$$\overline{W} = \frac{1}{4}\mu k^2 A^2 = \frac{1}{4}(\rho\beta^2) \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 = \frac{1}{4}\rho\omega^2 A^2 = \overline{K} \quad (3.98)$$

となり、**運動エネルギー密度とポテンシャルエネルギー密度が等しいことが導かれます。**したがって総エネルギー密度は

$$\overline{E} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \quad (3.99)$$

であり、ここから、地震波のエネルギー密度は**周波数の 2 乗と振幅の 2 乗に比例する**ということがわかります。

### 演習問題 3.21: P 波のエネルギー

$x_1$  方向に伝播する P 波

$$u_1 = A \exp[i(kx_1 - \omega t)], \quad u_2 = u_3 = 0 \quad (3.100)$$

(ただし  $k = \omega/\alpha$ ) の場合にも同じことが示せます。平均運動エネルギー密度と平均ひずみエネルギー密度をそれぞれ計算してみなさい。

### 球面波

地震波は主として地震断層運動によって生まれ、その振動が震源から周辺に広がっていく現象です。震源は厳密には点ではなく有限の大きさを持つ断層ですが、波が広がる領域は一般にそれよりはるかに広いです。ということは、波は図 3.5b のように震源から等方的に広がって行くべきではないでしょうか。

このような特定の場所から広がっていく波を、3 次元では**球面波**、2 次元では**円筒波**と呼びます。図 3.5b では円のように描かれていますが、実際の 3 次元空間では球面的に広がっています。このような球面波を表す波動方程式の解もあって、中心からの距離を  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  として

$$\psi = A \frac{\exp[i(kr - \omega t)]}{r} \quad (3.101)$$

が波動方程式を満たします<sup>12</sup>。ここで波数  $k$  の定義は平面波と同じです。座標原点を波源に取ると、この波の波数ベクトル  $\mathbf{k}$  は中心から外向きに波が広がってい

<sup>12</sup>  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  であることに注意して、波動方程式の  $x_i$  の微分を実行すれば示すことができます。数学的に特に難しいというわけではないが、やや面倒です。

く方向を表しています。 $k$  は中心から放射状に向いているため、場所によって向きが異なっていることに注意してください。

球面波のごくごく一部だけを大きく拡大すると、その部分の波面の曲がりはほとんど無視できます。つまり、**波の伝播過程のごく一部だけを取り出せば、それを平面波として扱うことができる**のです。

ところで、球面波と平面波の大きな違いが、項  $1/r$  の存在です。これを**幾何減衰** (geometrical spreading) といいます。幾何減衰は地震波のエネルギーからも理解できます。前節で学んだ通り、地震波のエネルギーは、その振幅の 2 乗に比例します。震源で一定のエネルギー  $E$  で輻射されたエネルギーが、震源からの距離  $r$  では、球面上  $4\pi r^2$  の面積に広がっているのです。したがって、単位面積あたりのエネルギーは  $1/r^2$  に比例して小さくなります。振幅はエネルギーの平方根に比例しますから、**3 次元空間での地震波の振幅は距離に反比例して小さくなる**のです。

地表面を 2 次元的に広がる波<sup>\*13</sup> では、地表に沿った円筒の円周が  $2\pi\Delta$  (ただしここでの  $\Delta = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  は水平面内の距離) に比例しますから、その振幅は**距離の平方根に反比例**して小さくなります。実際、2 次元の波動方程式の円筒波解は、近似的<sup>\*14</sup> に

$$\psi \simeq A \frac{\exp[i(kr - \omega t)]}{\sqrt{\Delta}} \quad (3.102)$$

と書けます。

#### 演習問題 3.22: 幾何減衰の評価

震源からの距離 1 km と 100 km では実体波の振幅は何倍違いますか。  
震央距離が 1 km と 100 km の表面波ではどうでしょうか。

#### 3.2.6 内部減衰（非弾性減衰）

幾何減衰とは異なる、もう一つの地震波の減衰メカニズムについて説明しておきましょう。地震波は弾性体の運動ですからエネルギーを持っていますが、その波としてのエネルギーはやがて媒質の熱エネルギーとして吸収されて失われることになります<sup>\*15</sup>。したがって、地震波のエネルギーは時間あるいは距離とともに減衰し、それにより地震波の振幅も減衰していくことになるのです<sup>\*16</sup>。このよ

<sup>\*13</sup> 後述する表面波や、海面を広がる津波もこれに該当します。

<sup>\*14</sup> 3 次元とは違い、2 次元空間では波動方程式の厳密解は三角関数や指数関数では書き表せません。2 次元空間の波動方程式はベッセル関数やハンケル関数と呼ばれる特殊関数を解に持ち、その遠方における近似解として三角関数が現れるのです。

<sup>\*15</sup> これは、エネルギー保存則が成立していないと主張しているのではありません。熱エネルギーと地震波のエネルギーを合計すればエネルギーは保存するはずです。ただし、媒質に吸収されたエネルギーを直接測る方法はありません。

<sup>\*16</sup> もしこのメカニズムによる減衰がなかつたらどうなるでしょうか。摩擦のない系の振り子がずっとゆれ続けるように、減衰のない地球で地中に放出される地震波の振動エネルギーは未來永劫

うなメカニズムの減衰のことを**内部減衰**あるいは**非弾性減衰**といいます。非弾性という言葉の通り、この減衰は弾性体力学の範疇では記述することができません。

そこで、「エネルギーが時間あるいは距離とともに減衰する」という事実を元に、弾性体力学から得られた波動の解に、さらなる減衰項を定性的に付け加えることにしましょう。そのときの減衰を表す指標を、**Q 値**<sup>17</sup>といいます。

Q 値は、地震波が一周期 ( $T$ ) だけ振動する際に、そのエネルギー  $E$  が  $\Delta E$  だけ減じたとして、その減衰率を

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\pi}{Q} \quad (3.103)$$

と定義されます。適当な時間  $t$  と  $t + T$  の時間のエネルギーを比べればよいから、

$$\Delta E = E(t) - E(t + T) \quad (3.104)$$

ですので、(3.103) は、

$$\frac{E(t) - E(t + T)}{T} \frac{T}{E(t)} = \frac{2\pi}{Q} \quad (3.105)$$

と書けるでしょう。この左辺第1項は、エネルギーの時間変化率  $-\frac{dE}{dt}$  の近似表現になっていることに注意すると、先の定義から

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2\pi}{QT} E = -\frac{\omega}{Q} E \quad (3.106)$$

が得られます。この微分方程式は  $E_0$  を定数として

$$E(t) = E_0 \exp \left[ -\frac{\omega}{Q} t \right] = E_0 \exp \left[ -\frac{\omega}{cQ} x \right] \quad (3.107)$$

と書けます。最後の等式では波の伝播速度を  $c$  として  $x = ct$  の関係を用いました。

地震波のエネルギーは振幅の2乗に比例しますから、3次元空間の実体波の振幅  $u$  は

$$u(x, t) = \frac{u_0}{r} \exp \left[ -\frac{\omega}{cQ} x \right] \exp[i(kr - \omega t)] \quad (3.108)$$

のように、幾何減衰と内部減衰の2つの効果によって減衰していきます。

内部減衰を表す Q 値は**無次元**の値で、地殻からマントルでは数十から数百程度の値を取ります。定義から、Q 値はその値が大きいほど減衰が小さいことに注意してください<sup>18</sup>。周波数 1 Hz 以上の高周波では弱い周波数依存性を示しますが、低周波ではおおむね一定の値を取るとされています<sup>19</sup>。もし Q 値が周波数によらず一定だと、振幅の減衰は周波数に依存し、高周波ほど減衰が大きくなります。

---

消えることがありません。地震は日本列島の下だけでも一日に 200 個程度起きていますが、その一つ一つの地震のエネルギーが消えることなく、日々の地震のエネルギーがどんどん地球全体に蓄積されて…

<sup>17</sup> もともとは電気回路の言葉 Quality factor に起源をもつようです。しかし、地震学では Quality factor ということはあまりなく、単に Q 値呼びます。

<sup>18</sup> このため、Q 値の逆数である  $Q^{-1}$  値を用いる人も多い。

<sup>19</sup> ただし Q 値の推定は地震波速度の推定に比べて難しいことが知られています。

**演習問題 3.23: 内部減衰**

震源から距離 10 km と距離 100 km における地震波の振幅は何倍違うでしょうか。幾何減衰と内部減衰両方の効果を考えて答えなさい。ただし、地震波の速度を  $c = 5 \text{ km/s}$ , Q 値を  $Q = 200$  とする。角周波数は  $\omega = 0.1 \text{ rad/s}$  と  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  の 2 通りについて検討し、減衰の周波数依存性を調べなさい。

### 3.3 地震波の反射と屈折

これまででは地震波の波動方程式を導出するため、「一様で無限に広がりかつ均質な弾性体」という理想的な状況を考えてきました。ですが、現実の地球は第一近似としてすら無限一様ではありません。一般には地球内部はその地震学的構造が深さに依存する**成層構造**をしており、地表から深くなるにつれて（一般には）地震波は速く伝わるようになることが知られています。また、地表という**境界面**があることも見逃せない。一般に地表より上に地震波は到達できません<sup>\*20</sup>から、地表に到達した地震波は、地表面で**反射**して再び地中に向かうことになります。地表ほど強烈な境界ではありませんが、地中にもたとえばモホ面、660 km 不連続面、あるいは CMB (Core-Mantle Boundary) など、その上下で地震波速度が急変する内部境界面も複数あります。これらの**不均質構造**が存在することによって、地震波の振る舞いはより複雑になるのです。図 3.7 に無限均質媒質と、地表及びいくつかの内部境界面を持つ媒質における地震波伝播の様子を示します。後者は現実の地球構造から比べるとまだ随分単純なモデルなのですが、それでも無限均質媒質に比べると地震波の挙動が大変複雑になっていることがわかると思います。本節では、地表面と速度不連続面の存在を考えて、地震波の**反射・屈折・透過**について考えていきます。

#### 3.3.1 面内伝播問題と P-SV と SH 波への分解

**数学・物理ノート 3.9: 空間偏微分の省略記法**

以下では、

$$\partial_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad (3.109)$$

のような偏微分の略号を用いることにします。これは様々な変数で微分するときによく使われる省略記法です。総和規約も引き続き有効です。この

<sup>\*20</sup> 敵密に言うと、空中の音波 (P 波) に変換することができます。しかし、その変換効率はとても小さいので、普通は無視して構いません。

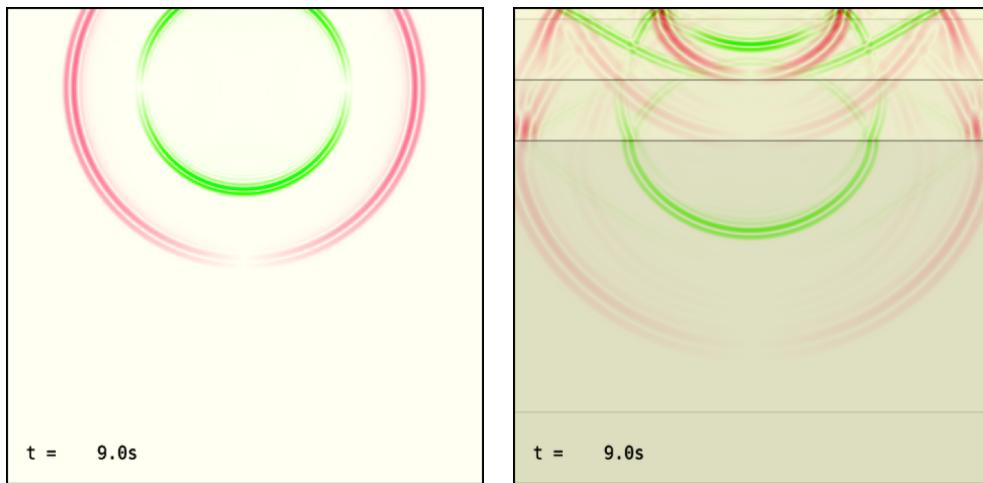


図 3.7 無限均質媒質（左）と地表をもつ水平成層構造（右）における地震波シミュレーションの例。赤色が弾性変位速度の発散を、緑色が回転の絶対値をそれぞれ示す。

記法を用いると、たとえばベクトル  $\mathbf{u}$  の発散は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_i u_i \quad (3.110)$$

のように書くことができます。

まず、弾性体の変位場をポテンシャルで表示しましょう。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \nabla\phi(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1\phi \\ \partial_2\phi \\ \partial_3\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \\ \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \\ \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.111)$$

以下では、地震波が  $x_1-x_3$  平面 ( $x_3$  は鉛直方向) 内だけで伝播することを仮定します。地震発生（震源）から観測点までの地震波の伝播を考えるとき、**地震波が観測点に向かって真っ直ぐ進む**のであれば、その方向を  $x_1$  軸に取ればこの仮定は正しいです<sup>21</sup>。そのようなとき、スカラー及びベクトルポテンシャルは  $(x_1, x_3, t)$  の関数として書けるので、 $x_2$  方向の微分はゼロになります。すると、S 波は P 波と互いに干渉する成分とそうでない成分の 2 つに分割できることを示していきます。

変位ベクトルをポテンシャルで書き下すと、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \partial_1\phi - \partial_3 A_2 \\ \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \\ \partial_3\phi + \partial_1 A_2 \end{pmatrix} \quad (3.112)$$

<sup>21</sup> 逆に言えば、波がまっすぐ進まないような複雑な媒質では以下の議論は適用できません。

と書けるでしょう。このうち  $x_1$  と  $x_3$  成分に現れるのはスカラーポテンシャル  $\phi$  とベクトルポテンシャルの  $x_2$  成分  $A_2$  であり、その両方が両成分に絡まり合っています。しかし、 $x_2$  成分にはベクトルポテンシャルの  $x_1, x_3$  成分だけが出現し、 $x_1, x_3$  方向とは完全に独立になっています。そこで、 $x_2$  成分はわざわざポテンシャルを用いず、変位  $u_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3$  に戻してしまいましょう。そうすると、残るベクトルポテンシャルの成分は  $A_2$  だけなので、わざわざ成分名をつける必要がなさそうです。そこで、以下では  $A \equiv A_2$  と表記を簡略化します。ここまでをまとめると、変位は

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \partial_1 \phi - \partial_3 A \\ 0 \\ \partial_3 \phi + \partial_1 A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \phi \\ 0 \\ \partial_3 \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\partial_3 A \\ 0 \\ \partial_1 A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.113)$$

と書けました。最初の後がスカラーポテンシャルの微分による項なので P 波、残り 2 つが S 波です。S 波のうち  $(-\partial_3 A, 0, \partial_1 A)$  を SV 波、のこりの  $(0, u_2, 0)$  を SH 波といいます。

弾性体の運動方程式に  $\partial_2 = 0$  の仮定を代入すると、

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \beta^2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) \quad (3.114)$$

が得られます。つまり、SH 波  $u_2$  は、単独で  $x_1-x_3$  平面内の S 波の波動方程式を満たしているのです。一方、P 波と SV 波はそんなに単純ではありません。

#### 演習問題 3.24: P-SV-SH

ベクトル形式の運動方程式 (3.60) に  $x_1-x_3$  面内伝播 ( $\partial/\partial x_2 = 0$ ) を仮定することで、SH 波の振幅  $u_2$  が波動方程式 (3.114) を満たすことを示しなさい。

### 3.3.2 P 波, SV 波, SH 波の特徴

前節に現れた P 波、SV 波、SH 波をそれぞれ

$$\mathbf{u}^P \equiv \begin{pmatrix} \partial_1 \phi \\ 0 \\ \partial_3 \phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^{SV} \equiv \begin{pmatrix} -\partial_3 A \\ 0 \\ \partial_1 A \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^{SH} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.115)$$

と置きます。

式から明らかなように、SH 波は  $x_2$  方向にのみ振動します。逆に、 $x_2$  方向には SH 波しか現れません。この特徴から、SH 波は P 波や SV 波とは独立に扱うことができます。一方、P 波と SV 波は  $x_1-x_3$  面内で同時に現れます。そのため、以降で議論するような反射・屈折の際には P 波と SV 波の相互変換が起こります。

それぞれの波の振動方向を調べましょう。 $x_1-x_3$  面内に伝播している平面波と

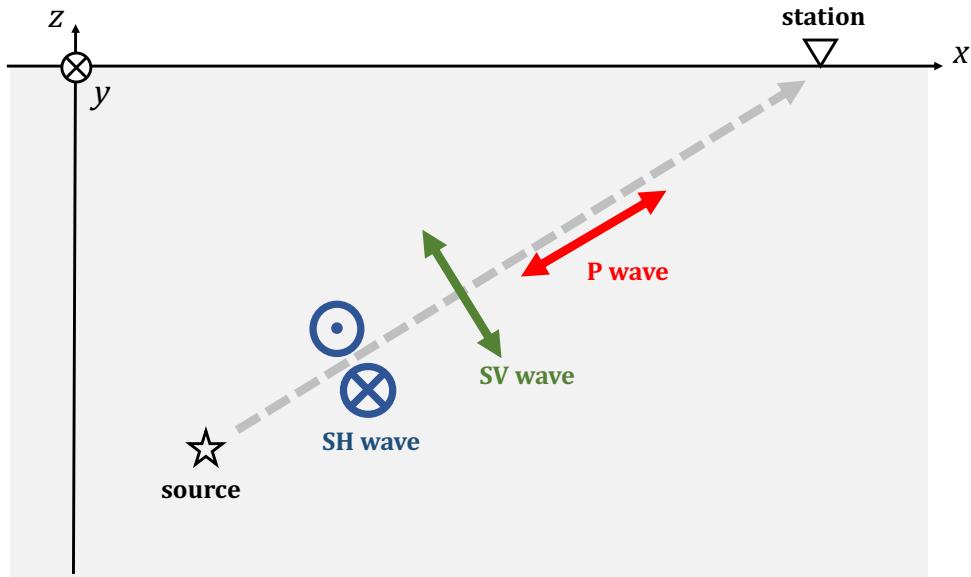


図 3.8  $x_1-x_3$  面内にて震源（星印）から観測点（逆三角形）に向かう地震波（点線）の P 波・SV 波・SH 波の振動方向。これは振動方向を表すための模式図であり、SH 波が SV 波より遅いということではないので、注意すること。

して、スカラー・ベクトルポテンシャルをそれぞれ

$$\begin{aligned}\phi(x_1, x_3, t) &= \phi_0 \exp [i(k_1 x_1 + k_3 x_3 - \omega t)] \\ A(x_1, x_3, t) &= A_0 \exp [i(k_1 x_1 + k_3 x_3 - \omega t)]\end{aligned}\quad (3.116)$$

と置きます。これを (3.115) に代入すると、P 波と SV 波の変位は、

$$\mathbf{u}^P = i \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ k_3 \end{pmatrix} \phi(x_1, x_3, t), \quad \mathbf{u}^{SV} = i \begin{pmatrix} -k_3 \\ 0 \\ k_1 \end{pmatrix} A(x_1, x_3, t) \quad (3.117)$$

と書けます。このことから、P 波はベクトル  $(k_1, 0, k_3)$  に、SV 波は  $(-k_3, 0, k_1)$  に比例する、つまり、P 波と SV 波はそれぞれベクトル  $(k_1, 0, k_3)$  と  $(-k_3, 0, k_1)$  に比例した振動方向を持っていることがわかりました。波数ベクトルは  $\mathbf{k} = (k_1, 0, k_3)$  ですので、P 波の振動方向のベクトルは波数ベクトルに平行です。一方、P 波の振動方向を表すベクトルと SV 波の振動方向を表すベクトルの内積が

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k_3 \\ 0 \\ k_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.118)$$

であることから、その振動方向は  $x_1-x_3$  面内で波の伝播方向に直角です。そのため、図 3.8 のように  $x_1-x_3$  面内で斜めに波が伝播している場合、SV 波は上下動振幅を持ちます<sup>22</sup>。一方、SH 波は常に  $x_2$  成分しか持ちませんから、その振動方向は常に地表面（水平面）に常に平行です。前節までで、S 波は P 波に直交した振動方向を持つということは示したが、ここではそれをさらに P 波と同じ鉛直断面

<sup>22</sup> S 波は「横波」といいますが、横にだけ振動するわけではありません。

内で振動する SV 波と、それに直交する水平成分だけの SH 波に分解したことになります。

ここまでわかったことを言葉でまとめます。言葉と数式の表現との対応が付けられるか、確認してください。

- 地震波は P 波・SV 波・SH 波に分けることができます。
- S 波を SV 波と SH 波に分けたとき、SH 波は波の伝播する鉛直断面に垂直で、かつ地表面に平行な振動をします。
- SV 波は波の伝播する鉛直断面内で、波の進む方向に直交した方向に振動します。
- P 波は波の伝播する鉛直断面内で、波の進む方向に振動します。

### 3.3.3 地震波の反射

#### SH 波の反射

ここからは、地表面や速度境界面があったときの地震波の振る舞いを調べていきましょう。

まず、最も簡単な状況の一つとして、SH 波が斜め下から地表面に入射することを考えます。図 3.9 のように、SH 波の鉛直下方から測った入射角を  $\theta$ 、反射角を  $\theta'$  とします。前節で学んだように、SH 波の振幅  $u_2$  は波動方程式

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \beta^2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) \quad (3.119)$$

を満たします。そのときの解を平面波

$$u_2(x_1, x_3, t) = A \exp [i(k_1 x_1 + k_3 x_3 - \omega t)] \quad (3.120)$$

としましょう。この解を波動方程式に代入して整理すると、分散関係式

$$k_1^2 + k_3^2 = \frac{\omega^2}{\beta^2} \quad (3.121)$$

が得られます。さらに波数の大きさ  $k \equiv \sqrt{k_1^2 + k_3^2} = \omega/\beta$  は、波長を  $\lambda$  として  $2\pi/\lambda$  に等しいのでした。これらの解は、与えられた角周波数  $\omega$  と SH 波の速さ  $\beta$  に対して、 $(A, k_1, k_3)$  が定まれば、一意に定まります。そこで、これらのパラメタを持つ平面波のことを、以下では「 $(A, k_1, k_3)$  の波」と呼ぶことにします。

図 3.9 の状況では、 $x_3 = 0$  の地表面に  $(A^{\text{inc}}, k_1^{\text{inc}}, k_3^{\text{inc}})$  の波が入射し、反射波  $(A^{\text{ref}}, k_1^{\text{ref}}, k_3^{\text{ref}})$  が生成されたものとしましょう<sup>23</sup>。入射波の鉛直方向から測った入射角  $\theta$  は、波数ベクトル成分と  $k_1^{\text{inc}} = k^{\text{inc}} \sin \theta$ ,  $k_3^{\text{inc}} = k^{\text{inc}} \cos \theta$ , あるいは

$$\theta = \arctan \left( \frac{k_1^{\text{inc}}}{k_3^{\text{inc}}} \right) \quad (3.122)$$

<sup>23</sup> inc は incident, ref は reflection の略です。

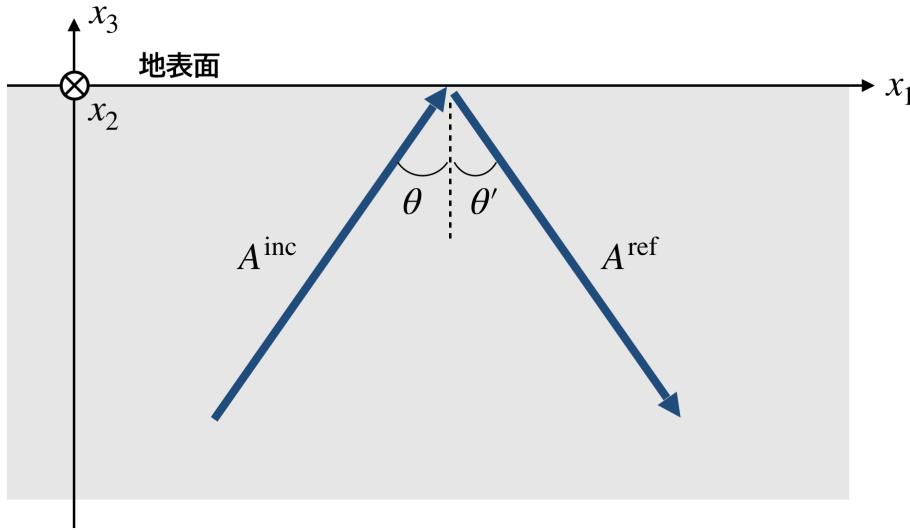


図 3.9 SH 波の反射問題のジオメトリ.

の関係があります。反射波の波数成分と反射角  $\theta'$  も同じように表せるので、このとき入射波と反射波は、

$$\begin{aligned} u_2^{\text{inc}}(x_1, x_3, t) &= A^{\text{inc}} \exp \left[ i \left( k_1^{\text{inc}} x_1 + k_3^{\text{inc}} x_3 - \omega t \right) \right] \\ &= A^{\text{inc}} \exp \left[ i \omega \left( \frac{\sin \theta}{\beta} x_1 + \frac{\cos \theta}{\beta} x_3 - t \right) \right] \\ u_2^{\text{ref}}(x_1, x_3, t) &= A^{\text{ref}} \exp \left[ i \left( k_1^{\text{ref}} x_1 - k_3^{\text{ref}} x_3 - \omega t \right) \right] \\ &= A^{\text{ref}} \exp \left[ i \omega \left( \frac{\sin \theta'}{\beta} x_1 - \frac{\cos \theta'}{\beta} x_3 - t \right) \right] \end{aligned} \quad (3.123)$$

と表されます。なおここでは地表面は水平であり、地形の凹凸の影響は考えないものとします。ただし、反射波の波数  $x_3$  成分の符号に注意してください。反射波は下向きに伝播しているため、符号が逆転しています。

このとき、反射波の振幅  $A^{\text{ref}}$  と、反射角  $\theta' = \arctan(k_1^{\text{ref}}/k_3^{\text{ref}})$  は  $A^{\text{inc}}$  と  $\theta$  を用いてどのように表されるでしょうか。図 3.9 からはなんとなく  $A^{\text{ref}} = A^{\text{inc}}$ ,  $\theta' = \theta$  のような気がするかもしれないし、事実その通りなのですが、最初なので丁寧に解いてみましょう。

### 3.3.4 境界条件

地表面に当たった場所での SH 波は、入射波と反射波の合成波として書くことができるでしょう。

$$u_2(x_1, x_3, t) = u_2^{\text{inc}}(x_1, x_3, t) + u_2^{\text{ref}}(x_1, x_3, t) \quad (3.124)$$

ここから反射波の振幅と反射角を決めるためには、地表面における**境界条件**が必要です。弾性体の表面における境界条件は、『表面におけるトラクションベクトル

がゼロであること』です。トラクションとは、ある面が与えられたときに、その面に掛かる単位面積あたりの力のことでした。もし地表面でなにかしらの力がかかっていたら、表面は（運動方程式に従って）変形し、力がかからないところで最終的に静止するでしょう。つまりこれは地表面が自由に動けるということであり、**自由端**の境界条件に相当します。このような条件を満たす境界を、とくに**自由表面**と呼びます<sup>24</sup>。

弾性体力学のコーシーの関係式により、ある面にかかるトラクションはその面の法線ベクトルを応力テンソルに作用させることで得られます。 $x_3 = 0$  の水平面の法線ベクトルは  $\hat{n} = (0, 0, 1)$  と書けるので、

$$\mathbf{T}^{(\hat{n})} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (3.125)$$

です。境界条件の要請からはこれらの成分がすべてゼロになるのですが、そもそも SH 波は  $x_2$  方向の振動成分しか持たないため、 $\sigma_{13}$  と  $\sigma_{33}$  は地表面か否かにからわざ常にゼロです。実質的に必要とされる条件は  $\sigma_{23} = 0$  だけです。

### 演習問題 3.25: SH 波地表反射の応力条件

等方弾性体の構成関係式から、弾性体の変位が  $\mathbf{u} = (0, u_2, 0)$  のとき  $\sigma_{13}$  と  $\sigma_{33}$  がゼロであることを示しなさい。

残る条件は

$$\sigma_{23} = \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 \quad (3.126)$$

のみです。地中の剛性率は  $\mu \neq 0$  ですから、結局  $x_3 = 0$  の面において  $\partial_3 u_2 = 0$  がこの場合に必要となる境界条件であることがわかりました。式 (3.124) にこの条件を適用し、 $x_3 = 0$  を代入すると<sup>25</sup>、

$$i \left( k_3^{\text{inc}} A^{\text{inc}} e^{ik_1^{\text{inc}} x} - k_3^{\text{ref}} A^{\text{ref}} e^{ik_1^{\text{ref}} x} \right) e^{-i\omega t} = 0 \quad (3.127)$$

が得られます。これが任意の  $x_1$  で成立するためには、

$$k_1^{\text{inc}} = k_1^{\text{ref}}, \quad k_3^{\text{inc}} = k_3^{\text{ref}}, \quad A^{\text{inc}} = A^{\text{ref}} \quad (3.128)$$

<sup>24</sup> 地球の地表面の上には空気があり、空気は  $\alpha \approx 314 \text{m/s}$  で P 波（音波は P 波の一種と考えてよい）が伝播する弾性体として取り扱えます。そのため、厳密なことを言うと地表は自由表面ではありません。しかし、空気は流体であるため S 波が通らない（空気を圧縮膨張させることはできても、ねじることはできない）ので、地表面は SH 波に対しては完全な自由表面たりえます。また、P 波を考える場合にも、地表面より下とのインピーダンスコントラスト（後述）が十分に大きいため、空気層のことは事実上無視できる場合がほとんどです。

<sup>25</sup> 条件の適用順に注意。 $u(x_1, x_3, t)$  に先に  $x_3 = 0$  を代入してしまってはそもそも  $x_3$  で微分できません。微分してから  $x_3 = 0$  を代入する必要があります。

が必要です。かくして、当初の予想通り**反射波の振幅は入射波に等しく、反射波の反射角は入射角に等しい** ( $\theta = \theta'$ ) ことが確かめられました。このような反射の振る舞いを**全反射**と呼びます。SH 波の地表反射は、その入射角によらず常に全反射します。

このときの地表面における振幅を求めてみましょう。地表振幅は入射波と反射波の和で表せるので、

$$\begin{aligned} u_2(x_1, x_3 = 0, t) &= u^{\text{inc}}(x_1, x_3 = 0, t) + u^{\text{ref}}(x_1, x_3 = 0, t) \\ &= 2A^{\text{inc}} e^{i(k_1^{\text{inc}} x_1 - \omega t)} \end{aligned} \quad (3.129)$$

となります。つまり、**地表面では振幅が 2 倍になります**。これは、「自由端条件における反射の場合、反射点における振幅は入射振幅の 2 倍になる」という法則を、地震波について厳密に示したことに相当します。

SH 波の場合、地表だけでなく、核・マントル境界 (Core-Mantle Boundary; CMB) でも同様に反射を起こします。主に溶けた金属鉄とニッケルからなる外核内では S 波は伝播することができず、CMB に到達した SH 波は、自由表面と同じように全反射するのです。そのため、地表と CMB を幾度も繰り返し反射した波が観測されています。図 3.10 に広帯域地震観測網 F-net で観測されたそのような CMB 反射波 (ScS 波) の多重反射の記録の例を示しました。

### 3.3.5 SH 波の屈折

今度は地表ではなく、異なる剛性率と密度をもつ媒質境界に SH 波が鉛直方向から測った角度  $\theta_1$  で入射する状況を考えましょう。それぞれの媒質（媒質 1、媒質 2 とする）での剛性率と密度をそれぞれ  $\mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2$  とし、S 波の速さを  $\beta_1 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}, \beta_2 = \sqrt{\mu_2/\rho_2}$  とします。また、便宜上境界面は  $x_3 = 0$  の位置にあるとします<sup>26</sup>。

この境界への入射波と反射波は、自由表面における反射と同様に

$$\begin{aligned} u_2^{\text{inc}}(x_1, x_3, t) &= A^{\text{inc}} \exp \left[ i \left( k_1^{\text{inc}} x_1 + k_3^{\text{inc}} x_3 - \omega t \right) \right] \\ &= A^{\text{inc}} \exp \left[ i \omega \left( \frac{\sin \theta_1}{\beta_1} x_1 + \frac{\cos \theta_1}{\beta_1} x_3 - t \right) \right] \\ u_2^{\text{ref}}(x_1, x_3, t) &= A^{\text{ref}} \exp \left[ i \left( k_1^{\text{ref}} x_1 - k_3^{\text{ref}} x_3 - \omega t \right) \right] \\ &= A^{\text{ref}} \exp \left[ i \omega \left( \frac{\sin \theta'_1}{\beta_1} x_1 - \frac{\cos \theta'_1}{\beta_1} x_3 - t \right) \right] \end{aligned} \quad (3.130)$$

と書けます。ただし、ここでは区別のため入射角を  $\theta_1$ 、反射角を  $\theta'_1$  としました。

これらに加えて、媒質 2 には地震波が**透過**します。そこで、透過した波の伝播方向の角度を  $\theta_2$  とし、その変位を

$$u_2^{\text{trn}}(x_1, x_3, t) = A^{\text{trn}} \exp \left[ i \left( k_1^{\text{trn}} x_1 + k_3^{\text{trn}} x_3 - \omega t \right) \right] \quad (3.131)$$

---

<sup>26</sup> この条件は必須ではありませんが、こうすると計算が少しラクになるのです。

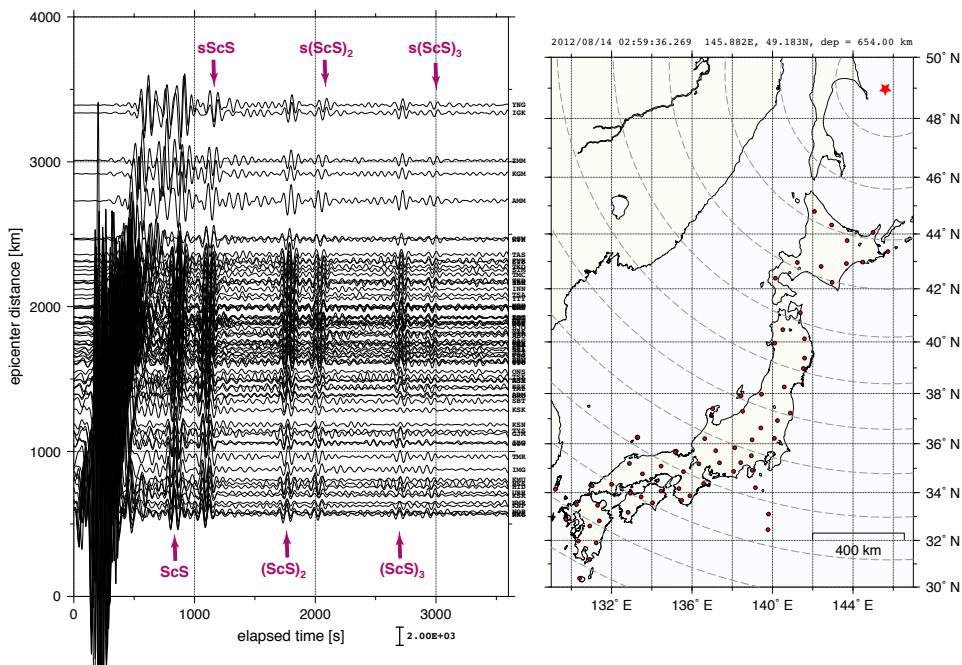


図 3.10 2012 年 8 月にオホーツクで発生した深発地震 (M7.7; 右の地図中星印) の防災科学技術研究所 F-net による波形記録。トランスマース成分 (水平面上で震源と観測点を結ぶ線に直交する方向; 本節の  $x_2$  方向に相当) の周期 50–100 秒帯域の地震波速度波形振幅を距離順に並べている。矢印で示したのが SH 波が CMB で反射してきた波 (ScS) と、一旦地表で反射してから CMB で反射した波 (sScS), およびそれらの地表・CMB における多重反射波である。地図中の点線は震源からの 200 km 毎の水平面内における等距離線を表す。地図中の丸印は F-net の観測点位置を表す。

$$= A^{\text{trn}} \exp \left[ i\omega \left( \frac{\sin \theta_2}{\beta_2} x_1 + \frac{\cos \theta_2}{\beta_2} x_3 - t \right) \right] \quad (3.132)$$

としましょう<sup>27</sup>.

固体内部における境界条件は、『変位とトラクションが境界面の上下で連続であること』です。地中内部の境界では内力であるトラクションは必ずしもゼロにはなりません。ですが、面にかかる力が境界面をまたいで急激に変化するようなことはないのです。また、地震波の振幅もそこで不連続に変化しない<sup>28</sup> はずです。これらの条件を式で書き表すと、

$$u_2^{\text{inc}}(x_1, x_3 = 0, t) + u_2^{\text{ref}}(x_1, x_3 = 0, t) = u_2^{\text{trn}}(x_1, x_3 = 0, t) \quad (3.133)$$

$$\sigma_{23}^{\text{inc}}(x_1, x_3 = 0, t) + \sigma_{23}^{\text{ref}}(x_1, x_3 = 0, t) = \sigma_{23}^{\text{trn}}(x_1, x_3 = 0, t) \quad (3.134)$$

となります。 $(3.134)$  は変位と剛性率を用いて書き表す（構成関係式とひずみの定

<sup>27</sup> trn は透過を表す英単語 transmission の略です。

<sup>28</sup> もしも境界で不連続な変化が起きていたら、そこには亀裂が発生するということです。ここでは、そんなことは起こらないということを要請しています。

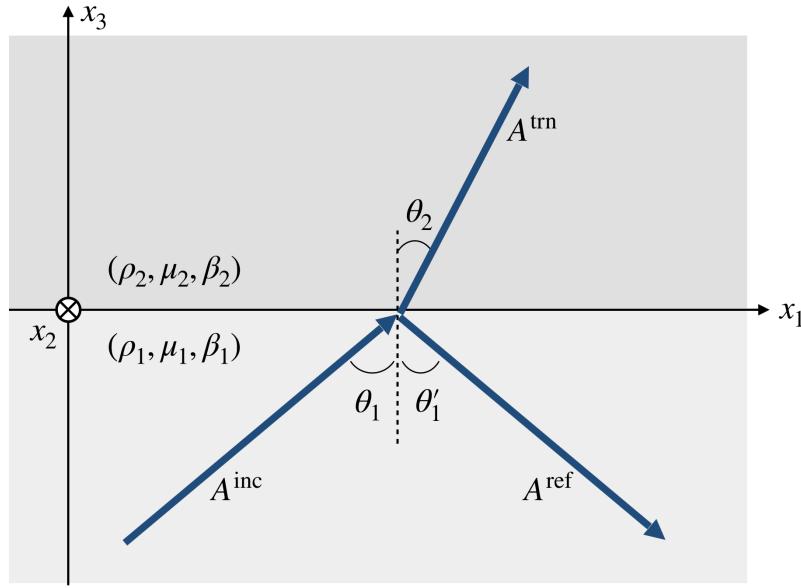


図 3.11 SH 波の反射・透過問題のジオメトリ.

義を代入する) と,

$$\mu_1 \frac{\partial u_2^{\text{inc}}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} + \mu_1 \frac{\partial u_2^{\text{ref}}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = \mu_2 \frac{\partial u_2^{\text{trn}}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} \quad (3.135)$$

のように表せます<sup>29</sup>.

まず、変位の境界条件から考えましょう。式 (3.133) に (3.130) と (3.132) を代入して整理すると、以下の方程式が得られます。

$$A^{\text{inc}} e^{i\omega x_1 \sin \theta_1 / \beta_1} + A^{\text{ref}} e^{i\omega x_1 \sin \theta'_1 / \beta_1} = A^{\text{trn}} e^{i\omega x_1 \sin \theta_2 / \beta_2} \quad (3.136)$$

これが任意の  $x_1$  で成立するためには、

$$p \equiv \frac{\sin \theta_1}{\beta_1} = \frac{\sin \theta'_1}{\beta_1} = \frac{\sin \theta_2}{\beta_2} \quad (3.137)$$

でなくてはなりません。これは、有名なスネル (Snell) の法則です。地震波は、水平な速度不連続面で反射・屈折しても、 $\sin \theta / \beta$  が変化しないという重要な性質を持ちます。これは複数の層があっても同じです。したがって、この量

$$p = \frac{\sin \theta}{\beta} \quad (3.138)$$

は地震波の伝播経路（波線）に沿って常に一定の値を持つという特徴があるのです<sup>30</sup>。 $p$  は地震波の遅さ（速さの逆数）の  $x$  成分であることから、スローネスある

<sup>29</sup>  $\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0}$  は、「 $u_2$  を  $x_3$  で微分した後に  $x_3 = 0$  を代入する」という意味です。

<sup>30</sup> この特徴は S 波に限らない。P 波でも同様です。

いはレイ(波線)パラメータなどと呼ばれます<sup>31</sup>。スネルの法則から、速度不連続境界であってもSH波の反射角は入射角に等しい( $\theta_1 = \theta'_1$ )ことがわかります。一方、透過波の角度(屈折角と呼ばれる)はスネルの法則によって決まります。スネルの法則が成立することを受け入れると、変位に関する境界条件(3.133)は

$$A^{\text{inc}} + A^{\text{ref}} = A^{\text{trn}} \quad (3.139)$$

と単純化されます。

### 演習問題 3.26: スネルの法則

$\beta_2/\beta_1 = 1.2$  のとき、 $\theta_2$  を  $\theta_1$  の関数として、 $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$  の範囲でグラフを描きなさい。

スネルの法則から、 $\beta_1$  と  $\beta_2$  の間の大小関係と  $\theta_1, \theta_2$  の大小関係は同じです。より高速度な媒質に波が入射すると角度は大きく、低速度な媒質に入射すると角度は小さくなります。これがたくさんの層で繰り返されると、結果として波は速度の遅い方へ遅い方へ、と曲がっていくのです。

次に、応力の境界条件を考えましょう。(3.135)に(3.130)と(3.132)を代入して整理すると、以下の方程式が得られます。

$$\frac{\mu_1}{\beta_1} \cos \theta_1 A^{\text{inc}} - \frac{\mu_1}{\beta_1} \cos \theta_1 A^{\text{ref}} = \frac{\mu_2}{\beta_2} \cos \theta_2 A^{\text{trn}} \quad (3.140)$$

ただしここではスネルの法則のところで明らかになった $\theta'_1 = \theta_1$ を適用済みです。S波の速さの定義から、 $\mu_1 = \rho_1 \beta_1^2, \mu_2 = \rho_2 \beta_2^2$ でしたから、上式は

$$\rho_1 \beta_1 \cos \theta_1 (A^{\text{inc}} - A^{\text{ref}}) = \rho_2 \beta_2 \cos \theta_2 A^{\text{trn}} \quad (3.141)$$

となります。

式(3.139)と(3.141)は、「 $A^{\text{inc}}$  が与えられたときの  $A^{\text{ref}}$  と  $A^{\text{trn}}$  に関する連立方程式」と見ることができるでしょう。これを解いてみると、

$$A^{\text{ref}} = \frac{\rho_1 \beta_1 \cos \theta_1 - \rho_2 \beta_2 \cos \theta_2}{\rho_1 \beta_1 \cos \theta_1 + \rho_2 \beta_2 \cos \theta_2} A^{\text{inc}} \quad (3.142)$$

$$A^{\text{trn}} = \frac{2 \rho_1 \beta_1 \cos \theta_1}{\rho_1 \beta_1 \cos \theta_1 + \rho_2 \beta_2 \cos \theta_2} A^{\text{inc}} \quad (3.143)$$

のように、反射波と透過波の振幅を入射振幅 × 比例係数の形で書くことができました。このときの比例係数

$$R \equiv \frac{\rho_1 \beta_1 \cos \theta_1 - \rho_2 \beta_2 \cos \theta_2}{\rho_1 \beta_1 \cos \theta_1 + \rho_2 \beta_2 \cos \theta_2} \quad (3.144)$$

<sup>31</sup> レイパラメータは地震波の伝播経路(波線)を追跡したり、P波・S波の到達時刻(走時)から震源を決定する際、さらにはそこから地球内部構造を推定する際にもきわめて重要な役割を果たす。

$$T \equiv \frac{2\rho_1\beta_1 \cos \theta_1}{\rho_1\beta_1 \cos \theta_1 + \rho_2\beta_2 \cos \theta_2} \quad (3.145)$$

は、それぞれ**反射係数**と**透過係数**と呼ばれます。式の形から明らかなように、反射波と透過波の振幅は、入射波のそれぞれ  $R$  倍と  $T$  倍になりますが、その倍率は入射角によって変化します。

### 演習問題 3.27: 反射係数と透過係数の導出

(3.139) と (3.141) の連立方程式を解いて反射係数 (3.144) と透過係数 (3.145) を導出しなさい。

反射係数にも透過係数にも、地震波の速度と媒質の密度  $Z \equiv \rho\beta$  がセットになって現れます。密度と速度の積  $Z$  は**音響インピーダンス**と呼ばれる量で、反射係数も透過係数も媒質間のインピーダンスの比（インピーダンスコントラスト）

$$\frac{\rho_2\beta_2}{\rho_1\beta_1} \equiv \frac{Z_2}{Z_1} \quad (3.146)$$

によって定まる量です。地震波速度の比ではなく、インピーダンスコントラストが反射・透過係数を決めるのです<sup>\*32</sup>。

### 演習問題 3.28: 透過・反射係数とインピーダンスコントラスト

- (i) 反射係数 (3.144) と透過係数 (3.145) を、入射角  $\theta_1$ 、反射角  $\theta_2$  およびインピーダンスコントラスト  $\zeta_{21} \equiv Z_2/Z_1$  の関数として表わしなさい。
- (ii)  $\rho_1 = \rho_2$  のとき、 $\beta_2/\beta_1 = \zeta_{21}$  です。このとき、スネルの法則 (3.137) と逆三角関数を利用して、(i) の答えをさらに入射角  $\theta_1$  とインピーダンスコントラスト  $\zeta_{21}$  だけの関数として表わしなさい。
- (iii)  $\zeta_{21} = 1.1, 1.5, 2.0$  の各場合について、反射係数と透過係数を入射角  $\theta_1$  の関数としてグラフに描きなさい。

### 鉛直下方からの入射

SH 波が深部から地表に向かって鉛直に伝播してくることを考えましょう。鉛直入射  $\theta_1 = 0$  とすると、スネルの法則から S 波速度にかかわらず  $\theta_2 = 0$  が言える。その場合の透過係数 3.145 は、

$$T(\theta_1 = 0) = \frac{2\rho_1\beta_1}{\rho_1\beta_1 + \rho_2\beta_2} = \frac{2}{1 + (\rho_2\beta_2/\rho_1\beta_1)} = \frac{2}{1 + Z_2/Z_1} \quad (3.147)$$

<sup>\*32</sup> とはいって、多数の岩石の速度・密度の測定からは、地震波速度の大きさと密度の大きさは概ね比例し、かつ速度のコントラストのほうが密度のコントラストより大きい、ということがわかっています (Birch, 1961)。したがって、第一近似としてはインピーダンスコントラストのことを地震波速度比と考えても差し支えないでしょう。

と単純化されます。

一般に、地殻の標準的な速度に比べて地表付近の地盤はずつと柔らかく、地震波速度は遅い（あるいはインピーダンスが小さい）です。そこに地震波が入射すると、透過係数はインピーダンスコントラスト  $\rho_2\beta_2/\rho_1\beta_1$  の変化に応じて  $T = 1$  ( $\rho_1\beta_1 = \rho_2\beta_2$ ) から  $T = 2$  ( $\rho_2\beta_2 \rightarrow 0$ ) までの値を取ります。よく言われる「地盤が悪いところはよく揺れる」というのは、地震波動論的には「インピーダンスコントラストが大きいところは透過係数が 1 より大きく、入射地震波動が増幅される」ということなのです。ただし、この透過係数はあくまでも境界ひとつだけの増幅率であり、実際の地盤でのトータルでの増幅率が最大でもたかだか 2 倍に収まる、ということではありません。実際の地盤は多数の層からなり、地震波はインピーダンスコントラストを感じるごとにどんどん振幅を変えていきます。また、そのときの層の厚さと地震波の波長に応じて増幅率も変わるため、結果として地盤による地震波の増幅率は強い周波数依存性を持つことになります。

#### 数学・物理ノート 3.10: 積和記号

総和記号  $\Sigma$  に比べると利用頻度は小さいですが、積和記号  $\prod$  は

$$\prod_{i=1}^N a_i \equiv a_1 a_2 \cdots a_N \quad (3.148)$$

で定義されます。

#### 演習問題 3.29: SH 波の入射と透過

図 3.11 のように、水平な境界に地震波 (SH 波) が入射する状況を考えましょう。境界面下側の媒質は  $\rho_1 = 3000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu_1 = 30 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  であり、境界面上側の媒質は  $\rho_2 = 4000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu_2 = 40 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  であることがわかっているとします。

(i) 図 3.11 のように入射波が  $\theta_1$  の入射角で境界面に入射するとき、透過波の伝播方向を表す角度  $\theta_2$  は、 $\theta_1$  と比べて大きいでしょうか、小さいでしょうか、それとも等しいでしょうか。またそれはなぜですか。

(ii) 境界面に鉛直に SH 波が入射する、つまり  $\theta_1 = 0$  である場合を考えます。このとき、透過波の振幅は入射波の振幅の何倍になりますか。

**演習問題 3.30: 反射屈折とエネルギー**

図 3.11 の反射屈折の問題を、エネルギーの観点から考えましょう。ここでは、簡単のため  $\rho_1 = \rho_2$  とし、インピーダンスコントラストが  $Z_2/Z_1 = \beta_2/\beta_1$  であるとします。また、 $\theta_1 = 0$  の鉛直入射を考えます。

波が単位時間あたりに移動させるエネルギーの量（エネルギー流束という）は、波の伝播速度とエネルギーの積に比例します。波の速度は波長  $\lambda$  に比例します ( $v = f\lambda$ ) し、波のエネルギーは振幅  $A$  の 2 乗に比例します。したがって、波のエネルギー変化を表す量は、 $\lambda A^2$  に比例する、と言えるでしょう。

(i) 媒質 1 の波（入射波・反射波）と第 2 層の波（透過波）の波長をそれぞれ  $\lambda_1, \lambda_2$  とします。このとき、第 2 層の波長  $\lambda_2$  を、 $\lambda_1$  と音響インピーダンス  $Z_1, Z_2$  を用いて表しなさい。なお、反射や透過において、波の周波数（あるいは角周波数）は変わりません。

(ii) 反射波の振幅  $A^{\text{ref}}$  と透過波の振幅  $A^{\text{trn}}$  を、入射波の振幅  $A^{\text{inc}}$  および音響インピーダンス  $Z_1, Z_2$  を用いて表しなさい。

(iii) 反射波と透過波のエネルギー流束の和  $\lambda_1(A^{\text{ref}})^2 + \lambda_2(A^{\text{trn}})^2$  を、問題 (i), (ii) で得られた関係を用いて簡略化し、その結果が入射波のエネルギー流束  $\lambda_1(A^{\text{inc}})^2$  とどのような関係にあるか調べなさい。また、その得られた結果の物理的な意味を説明しなさい。

**臨界角**

入射角がどんどん大きくなつたら、反射・透過波はどのようにふるまうでしょうか。SH 波が地震波速度の速い領域から遅い領域に入射する場合 ( $\beta_1 > \beta_2$ ) は、 $\theta_1 > \theta_2$  であるため、常に透過波が存在します。しかし、低速度領域から高速度領域に入射する ( $\beta_1 < \beta_2$ ) 場合には、ある特定の入射角

$$\theta_c = \arcsin \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \quad (3.149)$$

でもって屈折角が  $90^\circ = \pi/2$  に到達してしまいます。このような角度を**臨界角**といいます。

**演習問題 3.31: 臨界角**

屈折角が  $90^\circ = \pi/2$  であるという条件とスネルの法則 (3.137) から、臨界角が (3.149) であることを示しなさい。

地震波の速度は一般には深いほど早いため、このような状況は地震波が震源からより深い方に伝播していく際によく起こります（図 3.12）。波線は速度境界（点線）でスネルの法則によって遅い側に折れ曲がりますが、入射角が大きくなると

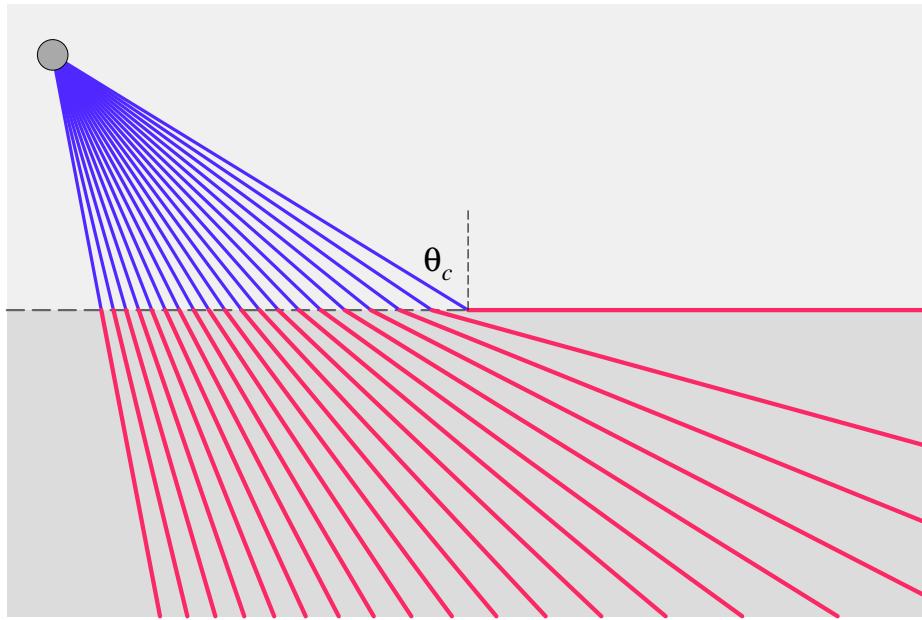


図 3.12 上の低速度領域から下の高速度領域に、地震波が入射した場合の屈折の様子。丸印を震源位置とする。もっとも入射角の大きな波線（右端）が、ちょうど臨界角に達している。

透過波が境界面に沿って伝播するようになります。このような状態の透過波のことを特にヘッドウェーブと呼びます。ヘッドウェーブをもたらす波の入射角が臨界角  $\theta_c$  です。

臨界角を超えると、スネルの法則を満たすような角度は一見存在しないようですが、実は複素関数まで拡張すれば、そのような解も数学的に取り扱うことができます。そのために、透過波の表現を  $\theta$  ではなく、レイパラメータ  $p = \sin \theta / \beta$  を用いて書き直しましょう。

入射波の波数は、

$$\begin{aligned} k_1^{\text{inc}} &= \omega \sin \theta_1 / \beta_1 = \omega p \\ k_3^{\text{inc}} &= \omega \cos \theta_1 / \beta_1 = \omega \sqrt{(1/\beta_1)^2 - \sin^2 \theta_1 / \beta_1^2} = \omega \sqrt{\beta_1^{-2} - p^2} \equiv \omega \eta_1 \end{aligned} \quad (3.150)$$

と書けます。ただしここで、 $\eta_1 \equiv \sqrt{\beta_1^{-2} - p^2}$  と定義しました。同様に  $\eta_2 \equiv \sqrt{\beta_2^{-2} - p^2}$  とすると、入射波・透過波・反射波は

$$\begin{aligned} u_2^{\text{inc}}(x_1, x_3, t) &= A^{\text{inc}} \exp [i\omega(px_1 + \eta_1 x_3 - t)] \\ u_2^{\text{ref}}(x_1, x_3, t) &= A^{\text{ref}} \exp [i\omega(px_1 - \eta_1 x_3 - t)] \\ u_2^{\text{trn}}(x_1, x_3, t) &= A^{\text{trn}} \exp [i\omega(px_1 + \eta_2 x_3 - t)] \end{aligned} \quad (3.151)$$

と書けます。ここから全く同様に反射・透過係数を求めると、

$$R = \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \quad (3.152)$$

$$T = \frac{2\mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \quad (3.153)$$

となります。これらは、元の表現 (3.144) や (3.145) と数学的に等価です。

### 演習問題 3.32: $\eta$ を用いた反射透過係数

反射透過係数 (3.152), (3.153) を、変位およびトラクションの境界条件から導出しなさい。

もし入射角  $\theta_1$  が臨界角  $\theta_c$  より大きかったらどうなるでしょうか。スネルの法則から、

$$p = \frac{\sin \theta_1}{\beta_1} > \frac{\sin \theta_c}{\beta_1} = \frac{\sin(\pi/2)}{\beta_2} = \frac{1}{\beta_2} \Leftrightarrow p > \frac{1}{\beta_2} \quad (3.154)$$

であるので、 $\beta_2^{-2} - p^2 < 0$ 、すなわち  $\eta_2$  が純虚数になってしまいます。そこで、根号内の符号を反転させた実数値  $\hat{\eta}_2$  を用いて

$$\eta_2 \equiv i\sqrt{p^2 - \beta_2^2} \equiv i\hat{\eta}_2 \quad (3.155)$$

として、 $\eta_2$  が虚数であることを明確にしましょう。これを反射係数 (3.152) に代入すると、

$$R = \frac{\mu_1\eta_1 - i\mu_2\hat{\eta}_2}{\mu_1\eta_1 + i\mu_2\hat{\eta}_2} \quad (\theta_1 > \theta_c) \quad (3.156)$$

となります。この反射係数の絶対値は

$$|R| = 1 \quad (\theta_1 > \theta_c) \quad (3.157)$$

であるので、臨界角を超えた入射で、地震波は全反射すると言えます。ただし、(3.156) は複素数であるので、その偏角のぶんだけ入射波の位相がずれることになります。

### 演習問題 3.33: 臨界角を超えた反射係数

式 (3.157) の証明を正直に計算して行おうとするとなかなか大変です。ここでは、以下のような一般化を使って証明してみよう。

(i) 入射角が臨界角を超えた場合の反射係数の分母と分子は、ある複素数  $z$  とその複素共役  $z^*$  で、 $R = z^*/z$  のような形を満たしていること、つまり反射係数の分子は分母の複素共役になっていることを示しなさい。

(ii) 複素数  $z$  を振幅  $r$  ( $r > 0$ ) と偏角  $\theta$  を用いて  $x_3 = re^{i\theta}$  と表したとき、 $R = z^*/z$  を簡略化しなさい。オイラーの公式による三角関数への展開は使わず、分数を使わずに指数関数で表すと良いでしょう。

(iii) (ii) の結果から  $|R|$  を  $r$  と  $\theta$  のうち必要な変数を用いて表現し、そ

の結果から  $|R| = 1$  であることを示しなさい。

臨界角を超えた波は、境界から離れることなくまっすぐ横に進んでいきます。  
 $\eta_2 = i\hat{\eta}_2$  を透過波の表現 (3.151) に代入すると、

$$\begin{aligned} u_2^{\text{trn}}(x_1, x_3, t) &= A^{\text{trn}} \exp [i\omega(px_1 + i\hat{\eta}_2 x_3 - t)] \\ &= A^{\text{trn}} \exp [-\hat{\eta}_2 x_3] \exp [i\omega(px_1 - t)] \quad (3.158) \end{aligned}$$

となります。この透過波は速度境界に沿って水平方向に伝播し、その振幅は  $x_3$  方向に指数関数的に減衰します。このように、鉛直方向に振幅分布を持ち、水平方向に伝播する波を **エバネッセント波** (evanescent waves) といいます。

## 3.4 表面波

これまでに、SH 波が地表面では全反射をおこすことや、高速度から低速度にする際には増幅すること、また速度境界面ではスネルの法則に従って屈折することなどを学びました。図 3.13 は、地表付近に低速度層のある 2 層構造における SH 波伝播の数値シミュレーションのスナップショットです。経過時間が短いあいだ ( $t=5$  s,  $25$  s) は震源から輻射された波が低速度層内で幾度も反射したり、下層に透過した地震波がより速く伝播する様子が見えますが、やがて時間が経つと、低速度内にトラップされた地震波が「地表面に沿って」伝播していくようです。

このように、弾性体の表面に沿って伝播する波を、**表面波** (surface waves) といいます。特に SH 波が作る表面波のことを**ラブ (Love)** 波、P-SV 波がつくる表面波を**レイリー (Rayleigh)** 波と区別して呼びます<sup>33</sup>。

### 3.4.1 ラブ波とその性質

図 3.14 に示したような 2 層構造構造を考えましょう。上層は厚さ  $H$  であり、S 波速度  $\beta_1$ を持ちます。下層の S 波速度は一様でその値が  $\beta_2$  であるとしましょう。ここでは慣例に従い、地表面を  $x_3 = 0$  として、 $x_3$  軸は鉛直下向きを正にとることにします。前節とは  $x_3$  軸の方向が逆ですので、注意してください。

このときに、水平に伝播する波動方程式の解を、

$$\begin{aligned} u_{(1)} &= V_{(1)}(x_3) \exp [i(kx_1 - \omega t)] \quad (x_3 \leq H) \\ u_{(2)} &= V_{(2)}(x_3) \exp [i(kx_1 - \omega t)] \quad (x_3 > H) \end{aligned} \quad (3.159)$$

であると仮定します。また、この波の伝わる速さ（位相速度）を  $c = \omega/k$  とする<sup>34</sup>。SH 波なのでその変位は  $x_2$  成分なのですが、 $x_1, x_3$  成分は現れないでの、

<sup>33</sup> どちらも人名で、それぞれの存在を理論的に示した Augustus Edward Hough Love と John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh にちなんで名付けられました。

<sup>34</sup> 「位相」速度という名前を使うのは、表面波にはもうひとつ別の速度があるためです。このことについては後述します。

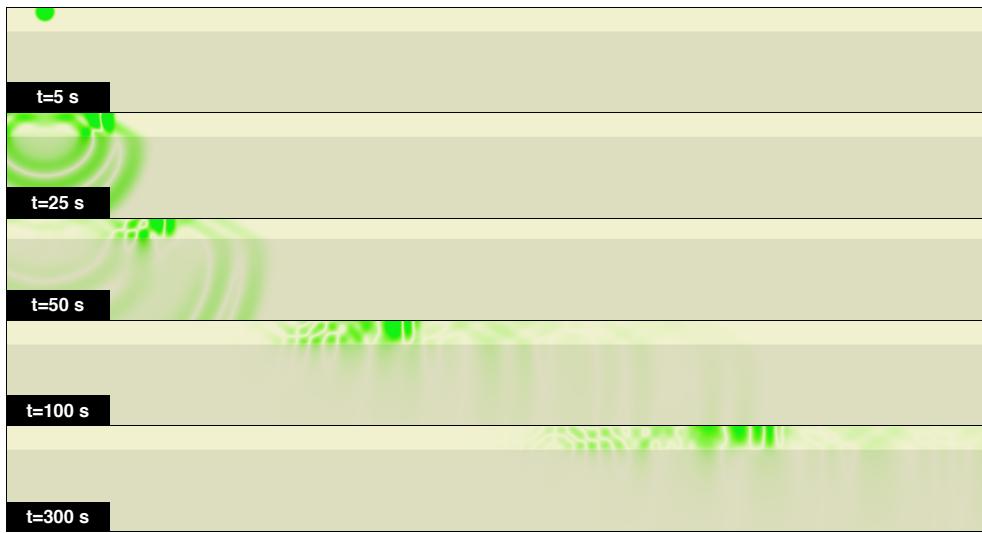


図 3.13 2 層構造における SH 波伝播シミュレーションのスナップショット.

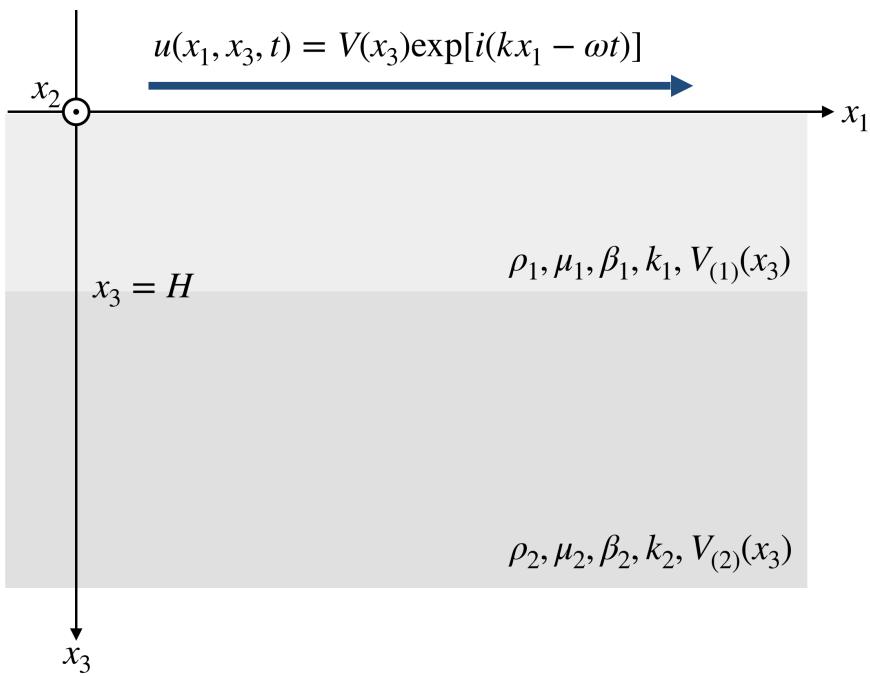


図 3.14 ラブ波のための二層構造モデル.

単に  $u$  と表記しました。一方、上層と下層の変位を区別するのに (1), (2) と括弧付きの下付き添字を用いています。

ここで仮定された解は、鉛直方向に  $V_{(1)}(x_3), V_{(2)}(x_3)$  で与えられるような振幅の重みをもちらながら、水平方向に伝播する波です。以下では、形式的に置いた (3.159) に対して、波動方程式（弾性体の運動方程式）や境界条件を満たすことを要請することで、その解がどのような特徴を持っているのかを調べていくことにしましょう。

まず、 $u_{(1)}$ ,  $u_{(2)}$  はそれぞれ波動方程式の解を満たすのですから、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_{(1)}}{\partial t^2} &= \beta_1^2 \left( \frac{\partial^2 u_{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_{(1)}}{\partial x_3^2} \right) \\ \frac{\partial^2 u_{(2)}}{\partial t^2} &= \beta_2^2 \left( \frac{\partial^2 u_{(2)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_{(2)}}{\partial x_3^2} \right)\end{aligned}\quad (3.160)$$

です。各層の S 波の波数  $k_1 = \omega/\beta_1$  と  $k_2 = \omega/\beta_2$  を用いると、波動方程式から

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V_{(1)}}{\partial x_3^2} &= (k^2 - k_1^2) V_{(1)}(x_3) \equiv -\omega^2 \eta_1^2 V_{(1)}(x_3) \quad \left( \eta_1^2 \equiv \frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c^2} \right) \\ \frac{\partial^2 V_{(2)}}{\partial x_3^2} &= (k^2 - k_2^2) V_{(2)}(x_3) \equiv -\omega^2 \eta_2^2 V_{(2)}(x_3) \quad \left( \eta_2^2 \equiv \frac{1}{\beta_2^2} - \frac{1}{c^2} \right)\end{aligned}\quad (3.161)$$

が得られます。

これらの微分方程式 (3.161) の解は、形式的に

$$\begin{aligned}V_{(1)}(x_3) &= C_1 \exp[i\omega\eta_1 x_3] + C_2 \exp[-i\omega\eta_1 x_3] \\ V_{(2)}(x_3) &= D_1 \exp[i\omega\eta_2 x_3] + D_2 \exp[-i\omega\eta_2 x_3]\end{aligned}\quad (3.162)$$

と書けるでしょう。ただしここで  $C_1, C_2, D_1, D_2$  は定数です。仮定した解の形式 (3.159) と合わせると、これらは鉛直 ( $x_3$ ) 上下方向に伝播する波を表すような解に見えます。

しかし、我々がいま探しているのは、表面付近に局在して水平方向に伝播する解でした。特に下層で上下方向に SH 波が伝播するのは、調べようとしている表面波の解ではありませんね。

そこで、そのような解は候補から除外してしまいましょう。そのためには、エバネッセント波と同じような条件

$$\eta_2^2 = \frac{1}{\beta_2^2} - \frac{1}{c^2} < 0 \quad (3.163)$$

を要請します。

さらに

$$\eta_2 = i\hat{\eta}_2, \quad \hat{\eta}_2 = \sqrt{k^2 - k_2^2} > 0 \quad (3.164)$$

と書き直します。すると、 $x_3 > H$  における  $V_{(2)}(x_3)$  の解は、

$$V_{(2)}(x_3) = D_1 \exp[i\eta_2 x_3] + D_2 \exp[-i\eta_2 x_3] = D_1 e^{-\hat{\eta}_2 x_3} + D_2 e^{\hat{\eta}_2 x_3} \quad (3.165)$$

となります。このとき、 $V_{(2)}(x_3)$  の大きさは、深さとともに指数関数的に変動します。だが、深さ  $x_3 \rightarrow \infty$  で振幅が無限大に大きくなるなんてことは、あり得るでしょうか。数学的な解としては存在しますが、振幅が無限大の地震波を作るためには無限大のエネルギーが必要となり、物理的にはおかしいですね。そこで、**無限遠では十分に小さくなる解を選択して、 $D_2 = 0$** 、すなわち

$$V_{(2)}(x_3) = D_1 e^{-\hat{\eta}_2 x_3} \quad (3.166)$$

を解として採用します。

ところで、 $\eta_2$  は純虚数でした。波数  $k, k_2$  を地震波速度で書き直してみると、(3.163) は、

$$\eta_2^2 = \frac{\omega^2}{\beta_2^2} - \frac{\omega^2}{c^2} < 0 \Leftrightarrow c < \beta_2 \quad (3.167)$$

です。つまり、上記のように深さとともに指数関数的に減衰するような解を選んだということは、表面波の速度が下層の S 波速度よりも遅いということと等価なのです。また、(3.163) のような条件は、SH 波の入射角が臨界角を超えたときに起こるのでした。まとめると、ラブ波は SH 波が低速度層内で臨界角を超えた角度で伝播するときに現れる、S 波よりも遅い波群なのです。

次に、上層についても考察しましょう。そのためには、地表 ( $x_3 = 0$ ) と速度境界 ( $x_3 = H$ ) における境界条件を用います。必要となる境界条件は、

**地表においてトラクションが 0**

$$\mu_1 \left. \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = 0 \quad (3.168)$$

**境界面において変位が連続**

$$u_{(1)}(x_3 = H) = u_{(2)}(x_3 = H) \quad (3.169)$$

**境界面においてトラクションが連続**

$$\left. \mu_1 \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x_3} \right|_{x_3=H} = \left. \mu_2 \frac{\partial u_{(2)}}{\partial x_3} \right|_{x_3=H} \quad (3.170)$$

の 3 つでした。(3.168) から  $C_1 = C_2$  がただちに求まりますから、これをまとめて  $C \equiv C_1 = C_2$  と置きましょう。それを条件 (3.169) に代入すると、

$$2C \cos(\eta_1 H) = D e^{-\hat{\eta}_2 H} \quad (3.171)$$

が得られます。

#### 演習問題 3.34: 境界条件の導出

オイラーの公式から得られる  $\cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$  を用いて、条件 (3.171) を導出しなさい。

次の条件 (3.170) に目を向けて。計算を進めると、

$$2C\mu_1\eta_1 \sin(\eta_1 H) = \mu_2 D \hat{\eta}_2 e^{-\hat{\eta}_2 H} \quad (3.172)$$

です<sup>35</sup>。右辺に (3.171) を代入して整理すると、最終的に

$$\tan(\eta_1 H) = \frac{\mu_2 \hat{\eta}_2}{\mu_1 \eta_1} \quad (3.173)$$

<sup>35</sup> ここでは、 $\sin \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/(2i)$  を用いました。

が得られました。この式はこれ以上形式的には簡単になりません。これがラブ波が満たすべき条件であり、**特性方程式**と呼ばれます。

### 3.4.2 特性方程式の解と分散性波動

#### 分散性

角周波数とラブ波の位相速度、S波速度を用いて表現すると、特性方程式は

$$\tan \left( \omega H \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c^2}} \right) = \frac{\mu_2 \sqrt{1/c^2 - 1/\beta_2^2}}{\mu_1 \sqrt{1/\beta_1^2 - 1/c^2}} \quad (3.174)$$

と書けます。この方程式に現れる変数のうち、 $H, \mu_1, \mu_2, \beta_1, \beta_2$  は構造によって与えられるものです。残るは角周波数  $\omega$  とラブ波の位相速度  $c$  のみです。ということは、特性方程式とは、角周波数  $\omega$  を与えると位相速度  $c$  が求まる方程式だ、といえるでしょう。位相速度  $c$  が決まると自動的に波数  $k = \omega/c$  も決まるので、これは**分散関係式**の一種です。これまでの P 波や S 波の単純な分散関係とは異なり、ラブ波の位相速度  $c$  は周波数によって異なります。このように、周波数によって伝播速度が異なることを、**分散性**といいます。

#### 解の範囲

これまで、 $\hat{\eta}_2 > 0$  であることを要請してきましたが、 $\eta_1$  についてはなんの条件も考えてきませんでした。定義  $\eta_1 = \sqrt{k_1^2 - k^2}$  から、 $\eta_1$  は実数 ( $k_1^2 \geq k^2$ ) もしくは純虚数 ( $k_1^2 < k^2$ ) のどちらかです。

仮に、 $\eta_1$  が純虚数であるとしましょう。その場合、特性方程式において  $\eta_1 \equiv i\eta_1^*$  ( $\eta_1^* > 0$ ) を代入すると、

$$\tan(i\eta_1^* H) = i \tanh(\eta_1^* H) = \frac{\mu_2 \hat{\eta}_2}{i\mu_1 \eta_1^*} \quad (3.175)$$

$$\Leftrightarrow \tanh(\eta_1^* H) = -\frac{\mu_2 \hat{\eta}_2}{\mu_1 \eta_1^*} < -1 \quad (3.176)$$

が得られます。

#### 数学・物理ノート 3.11: 双曲線関数

双曲線関数とは、以下のようなものです：

$$\cosh(x) \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (3.177)$$

$$\sinh(x) \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (3.178)$$

$$\tanh(x) \equiv \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (3.179)$$

双曲線関数は、たとえば  $(\cosh(x))' = \sinh(x)$  のように、三角関数と類似

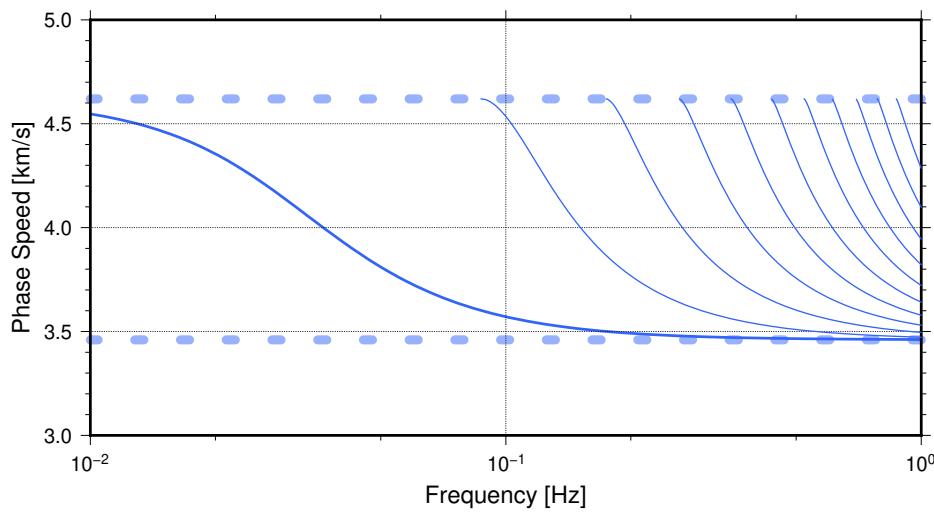


図 3.15 ラブ波位相速度の分散曲線.  $\beta_1 = 3.46 \text{ km/s}$ ,  $\beta_2 = 4.62 \text{ km/s}$ ,  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $H = 30 \text{ km}$  の場合. 太線が基本モード. 細線は左から順に  $n = 1$ ,  $n = 2 \dots$  の高次モードである. 横点線は上層と下層の S 波速度である.

した特性を持っています.

### 演習問題 3.35: 双曲線関数と三角関数

双曲線関数の定義とオイラーの公式から以下の公式を示しなさい：

$$\cosh(ix) = \cos(x), \quad \sinh(ix) = i \sin(x), \quad \tanh(ix) = i \tan(x) \quad (3.180)$$

$$\cos(ix) = \cosh(x), \quad \sin(ix) = i \sinh(x), \quad \tan(ix) = i \tanh(x) \quad (3.181)$$

また、これらの公式を使って特性方程式の表現 (3.176) を導きなさい.

双曲線関数  $\tanh(x)$  は、任意の  $x$  に対して  $-1 \leq \tanh(x) \leq 1$  であることが知られており、したがって (3.176) は解がありません。つまり、 $\eta_1$  が純虚数になるような範囲ではラブ波が存在しないのです。よって、 $\eta_1$  は実数でなくてはなりません。このことから  $k_1 \geq k$  であり、位相速度を用いて書くと、 $\beta_1 \leq c$  という条件が得られます。

$\eta_2$  に関する条件もまとめて、ラブ波が存在する範囲は、 $\beta_1 \leq c \leq \beta_2$  です。つまり、ラブ波の位相速度は、上層と下層の S 波速度の間だけであることが示されました。

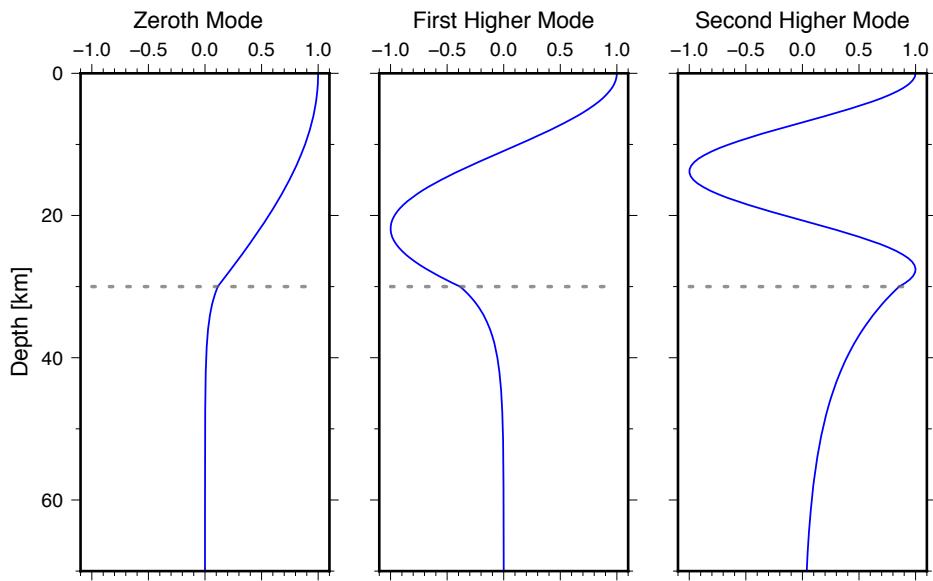


図 3.16 図 3.15 と同じ構造モデルにおけるラブ波位相速度の  $f = 0.2 \text{ Hz}$  における固有関数  $V(x_3)$  の形状。左から基本モード、1次・2次の高次モードを示す。固有関数の振幅の絶対値は定まらないため、地表振幅を 1 としている。

### 基本モードと高次モード

特性方程式に含まれる  $\tan$  は周期関数ですので、その解は一つではありません。

$$\eta_1 H = \arctan \left( \frac{\mu_2 \hat{\eta}_2}{\mu_1 \eta_1} \right) + n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.182)$$

がみな解を持ち得ます。特に  $n = 0$  の解を基本モード、 $n > 0$  は  $n$  次の高次モードと呼びます。図 3.15 と図 3.16 にラブ波の位相速度の周波数依存性（分散曲線）と、深さ方向の振幅関数  $V_*(x_3)$ （固有関数）の例を示します。各モードとも周期が長いほど位相速度が  $\beta_2$  に近く、短いほど  $\beta_1$  に近い。またそのときの固有関数は周期が長いほど深い部分まで振幅が染み出している。同じ周期でも、モードの次数が高くなると上層内で固有関数が複数回振動するようになります。ただし、高次モードはいつでも存在するとは限りません。周波数が高くなるほど存在できるモードの数が増えていきます。これは、気柱や元の振動問題と同じように、複数の振動パターンが存在できるのと同じことです。

表面波は地表付近に振幅が局在するという特徴から、特に震源の深さが浅い地震でよく励起されます。また、比較的長周期で卓越するという特徴も知られています。そのため、同じ地震の地震波でも短周期と長周期成分のみを抽出した波形では、それぞれに卓越する波の種類が大きく異なってきます。表面波は地表に沿って 2 次元的に広がるため、幾何減衰も小さく、水平距離  $r$  の平方根に反比例 ( $\sim 1/\sqrt{r}$ ) に比例して小さくなります。そのため、長周期かつ遠方で表面波は最もよく卓越するのです。

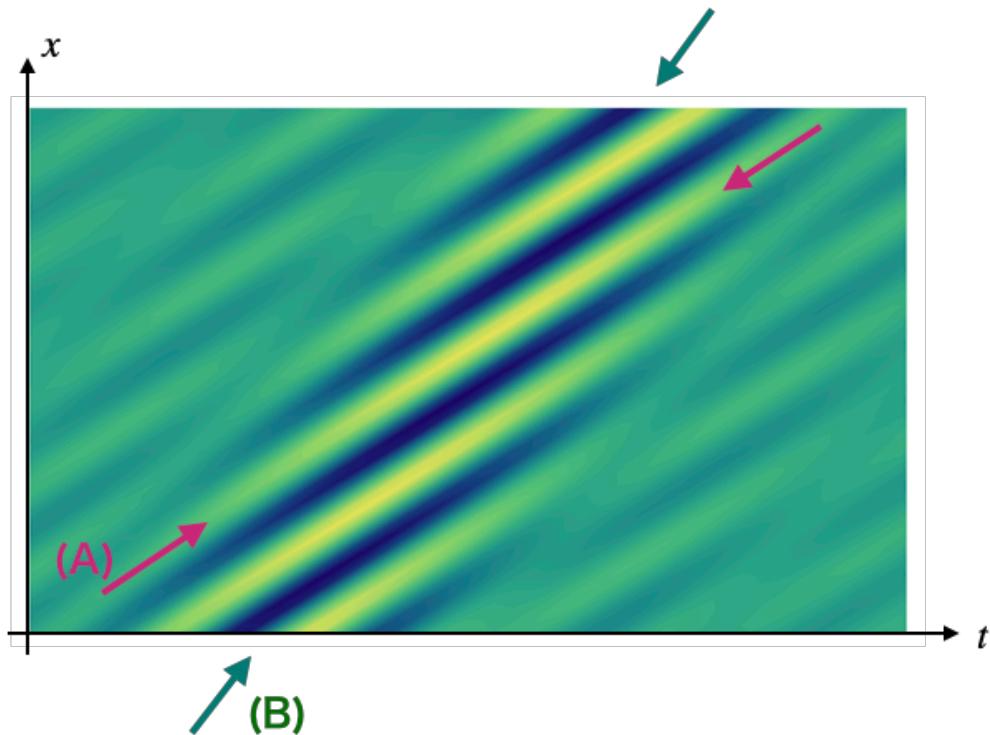


図 3.17 分散性の波の伝播の様子。濃淡が波の位相（山谷）を表す。(A), (B) がそれぞれ位相速度と群速度で伝播する波に相当する。

### 3.4.3 分散性波動と位相速度・群速度

地震波は波が波数  $k = \omega/c$  ( $c$  は地震波の位相速度) で伝わる現象なので、ある方向  $x$  に伝わる波をフーリエ変換で表現すると、

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\omega) \exp [i(kx - \omega t)] d\omega \quad (3.183)$$

のように書くことができます。これまで一つの角周波数の波  $\exp [i(kx - \omega t)]$  を考えていたが、それをあらゆる周波数について重み  $\tilde{u}(\omega)$  をつけて足し合わせただけです。実体波 P 波・S 波なら  $c$  として P 波速度  $\alpha$  や S 波速度  $\beta$  が入るだけなのですが、地表に沿って伝わる表面波の波数（あるいは位相速度）は角周波数によって異なります。

実体波の地震波速度は、深くなるほど一般に早くなります。表面波は地表に沿って伝播するが、地表だけが揺れているわけではありません。実際には、概ね波長の  $1/4$  程度の深さまでが表面波により振動します。表面波の周期が長くなると、それに伴い波長が長くなるため、より深い部分まで揺れます。つまり、より深い構造の影響をうけ、その速度が早くなるのです<sup>36</sup>。

#### 位相速度と群速度

波動が分散性をもつとき、その速度には 2 種類の互いに異なるものが生じます。

<sup>36</sup>もちろんこれは非常に単純化した話なので、例外もあります。

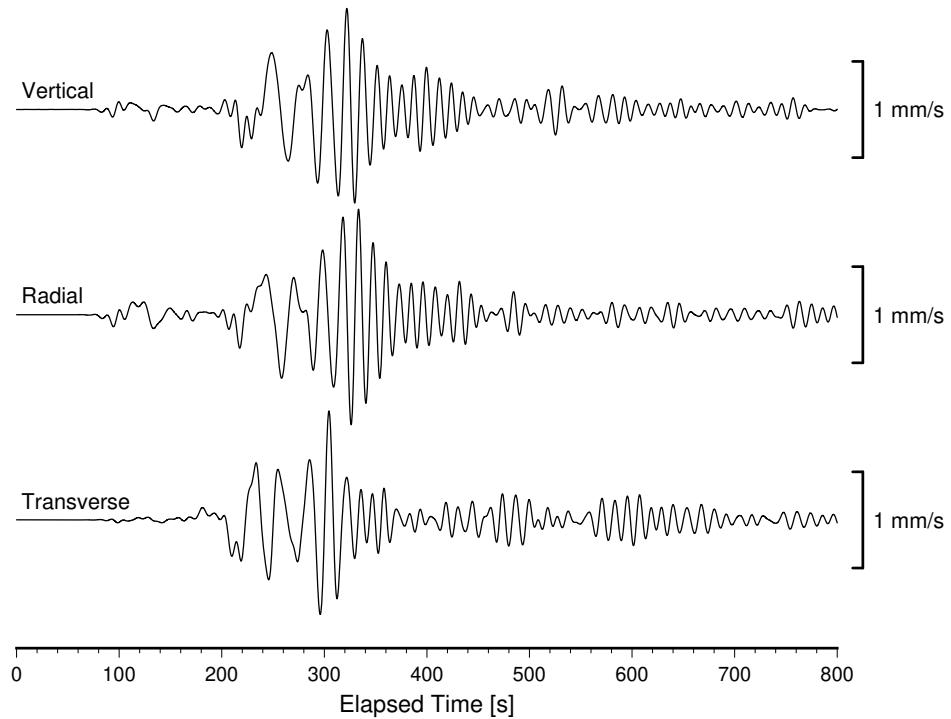


図 3.18 2004 年紀伊半島沖地震 ( $M_W = 7.5$ ) の青森県泊（とまり）観測点 N.TMRF における 3 成分地震波形（周波数 0.005–0.1 Hz）。最上段は上下動、残りは水平動の記録だが、水平動についてはラディアルとトランスバース方向に回転してある。上下動とラディアル成分にはレイリー波が、トランスバース成分にはラブ波が記録されている。

まず、簡単のため 2 つの周波数の波の重ね合わせを考えましょう：

$$u(t) = \cos[(k + \delta k)x - (\omega + \delta\omega)t] + \cos[(k - \delta k)x - (\omega - \delta\omega)t] \quad (3.184)$$

ここで  $\omega \gg \delta\omega$  であることを仮定します。三角関数の加法定理を用いると

$$\begin{aligned} \cos[(k \pm \delta k)x - (\omega \pm \delta\omega)t] &= \cos[(kx - \omega t) \pm (\delta kx - \delta\omega t)] \\ \cos(kx - \omega t) \cos(\delta kx - \delta\omega t) &\mp \sin(kx - \omega t) \sin(\delta kx - \delta\omega t) \end{aligned} \quad (3.185)$$

ですから、辺々足し合わせて

$$u(t) = 2 \cos(kx - \omega t) \cos(\delta kx - \delta\omega t) \quad (3.186)$$

が得られます。これは、速度  $c = \omega/k$  で伝播する波と、別の速度  $U = \delta\omega/\delta k$  で伝播する波の組み合わせになっています。

このような分散性の波の伝播の様子を図 3.17 に示しました。一つ一つの波の山谷が伝わる速度 ( $c$ ; 図中 A に相当) と、波全体が塊として伝播する速度 ( $U$ ; 図中 B に相当) が互いに異なっています。このような 2 つの速度を、それぞれ**位相速度**と**群速度**といいます。実体波は（基本的には<sup>37</sup>）分散がありませんから、この 2

<sup>37</sup> 実は、減衰を持つ媒質を粘弾性体として扱うと、実体波も分散性をもつことが帰結され、それを

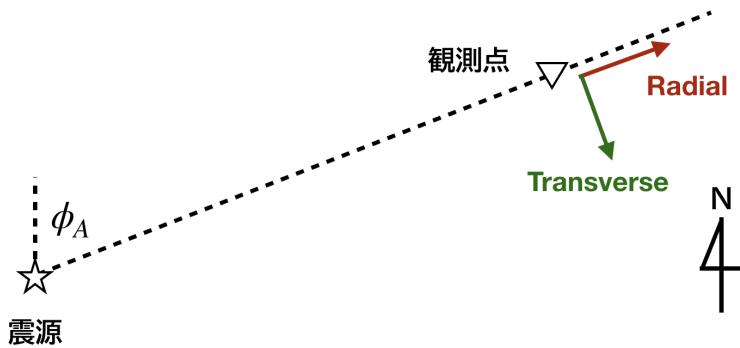


図 3.19 観測点におけるラディアル (Radial) およびトランスバース (Transverse) 方向の定義。トランスバース方向の正の向きは定義により逆向きであることもある。

つの速度は区別されませんが、表面波では厳密に使い分ける必要があります。ここで示したのは 2 つの波の重ね合わせの場合ですが、より一般には群速度は角周波数の波数での微分

$$U = \frac{\partial k}{\partial \omega} \quad (3.187)$$

で与えられます。

### 3.4.4 P-SV 変換とレイリー波

ここまででは SH 波とラブ波について扱ってきましたが、P 波や SV 波が地表・境界に到達すると、P 波の一部が SV 波に、SV 波の一部が P 波に**変換**を起こします。非常に煩雑ではあるが、そこでも必要となるのは地表においてトラクションがゼロになることと、境界面でトラクションおよび変位が連続になる、という境界条件のみで、互いの変換効率を記述することができます。地表面が存在すると、SH 波においてラブ波が発生した場合と同じように、P-SV 波の組み合わせでも表面波（レイリー (Rayleigh) 波）が生成されます。レイリー波は複数の層がなくとも地表面さえあれば発生しますが、成層構造があることによってその位相速度が分散性を持つようになる特徴はラブ波と共通です。ラブ波にせよレイリー波にせよ、位相速度が周波数に依存するという特徴から、逆に地下の成層構造の特徴を推定することが可能です。

### 3.4.5 表面波の観測記録例

図 3.18 に表面波の観測例として 2004 年紀伊半島地震における青森県内の広帯域地震計記録を示します。震源までの震央距離が大きくなると、実体波は幾何減

---

物理分散といいます。しかし物理分散の度合いは表面波の分散よりもとても小さいです。その取扱いは本書の範囲を超えるので、詳しくは Aki and Richards (2002)などを参照してください。

衰と内部減衰の効果を大きく受けます。しかし、低周波に卓越して2次元的に伝播する表面波は幾何減衰の影響が小さく、結果として遠方では表面波がより卓越することになります。図では、より表面波を強調するため、低周波帯の**フィルタ**<sup>\*38</sup>を適用しています。また、水平動の地震系記録は、本節の $x_1$ 方向に相当する震源から観測点に向かう方向（ラディアル方向）と、それに直交したトランスバース方向（ $x_2$ に相当）に回転しています。ラディアルとトランスバース方向の定義は図3.19を参照のこと。

上下動とラディアル方向において地震発生からの経過時刻200～400秒、トランスバース方向において200～350秒に卓越している振動が表面波であり、それぞれレイリー波とラブ波です。よく見ると、ラブ波のほうが少しだけ早く到來していることがわかるでしょう。また、レイリー波とラブ波とともに、200秒付近の最初の振動は長周期であるのに、だんだんと短周期の揺れが卓越していきます。これが**分散**の効果です。長周期帯では一般に周期が長いほうが表面波の速度が速い傾向があります。これは、周期が長く波長が長い表面波のほうが、より弾性体として硬い（P波・S波速度の速い）地球深部構造の影響を受けるためです。

---

<sup>\*38</sup> 信号処理の一種で、特定の周波数帯の波だけを取り出すことができます。

## 第4章

# 震源物理学入門

これまで、外力はゼロであり、かつすでに地中を伝播している地震波が存在しているという条件の下で、地震波の種類・特性について学んできました。しかし、これだけで**地震の発生**を記述できるでしょうか。答えはもちろん否です。たとえば、今この瞬間に地球内部で一つも地震が起きていない、という状況を考えましょう。そのときはたしかに弾性体の運動方程式で外力がゼロの状態が実現しています。しかし、それでは地球内部の運動はすべて釣り合ってしまい、そこから動かないのです<sup>\*1</sup>。震源で地震（断層運動が）が起こることについては、また別の記述が必要となるのです。

本章では、地震現象を力学的に表現する方法を学びます。続けて、震源で発生した地震波が数学的にどのように表現されるかを理解することを通じて、逆に地震波形記録から震源についてどのような情報が得られるのかを学んでいくことにしましょう。

### 4.1 断層とそこにかかる力

#### 4.1.1 弹性反発説

地震計が開発され、現代的な意味での地震学が始まったのはおおよそ19世紀末です。その時代には、1891年の濃尾地震による地表断層(Koto, 1893)の出現や、1906年のサンフランシスコ大地震によるサンアンドreas断層の大きな横ずれがきっかけとなり、『断層にまたがって長期間かけて蓄積したひずみのエネルギーが断層運動によって解放される現象が地震である』というレイドの**弹性反発説**(Elastic Rebound Theory)が提唱されました。

弹性反発説では、地震の原因を地殻変動等による変形とそれに伴うひずみに求めます。いま、図4.1(a)のように、ある断层面をまたいで地表が逆方向に変形することを考えてみましょう。変形が小さいうちは、地球は連続体としてふるまい、地面はそれぞれの方向に引っ張られつつも、断层面は互いにくついた状態を維

---

<sup>\*1</sup> バネにおもりがつながっていても、「誰もおもりを引っ張らなかつたら」なにも起こらない、ということです。

持しています（図4.1b）。これは、断層面では面と面の間に強い**摩擦力**が働いていると考へてもよいでしょう。一方、断層の周辺では変形が大きくなっています。そのような状態が続くと、岩石が耐えられなくなるほどひずみが大きくなると（あるいは静止摩擦係数を超えるような力が断層面に働くと）、断層をまたいだ両側が互いに別の方向に急激にすべり動き、たまたまひずみを解消します。このときの急激な運動（断層運動）によって震動が周囲に広がる現象が地震だ、と考えられました。

#### 4.1.2 剰余応力（ストレス・グラット）と等価体積力

弾性反発説が示唆するような急激な現象は、これまで仮定していた**線形弾性体**の限界をはるかに超えています。線形弾性体では、つねにひずみに比例した応力がかかるだけであり、「あるところで弾性体が耐えられなくなつて破壊する」というようなシナリオは内包していないのです。一方、運動方程式自体はその変形が微小であるという仮定さえ満たせば、間違っているわけではありません。問題は線形弾性体の構成関係式にあるのです。

まず、運動方程式は正しいとして、そのまま使います。

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad (4.1)$$

ただし、ここで  $\tau_{ij}$  は地球内部の**真の応力**です。媒質にかかる真の応力テンソル  $\tau_{ji}$  が正しく与えられれば、運動方程式によって弾性体の運動（地震波）を記述することができます。しかし、地震が起こる場所周辺では、線形弾性体の構成関係式

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.2)$$

で予想される応力  $\sigma_{ij}$  は、**真の応力**とは異なるのです。

そこで、線形弾性体で予想される応力と真の応力の差を、形式的に

$$\Gamma_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \tau_{ij} \quad (4.3)$$

と表すことにします。このような量を**剰余応力（ストレス・グラット; Stress glut）**といいます。これを運動方程式(4.1)に代入すると、

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}}{\partial x_j} \quad (4.4)$$

と書けます。ここで、

$$f_i \equiv -\frac{\partial \Gamma_{ji}}{\partial x_j} \quad (4.5)$$

とおくと、運動方程式は見慣れた形の

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i \quad (4.6)$$

に帰着されました。つまり、剩余応力項は、見かけ上は**体積力**と同じような働きをするのです。非線形な断層運動によって生じた地震波は、その断層運動と**等価**な体積力（これを**等価体積力**といいます）項を持つ線形弾性体の運動方程式の解と等価であることがわかりました。非線形な破壊現象を正面から扱わなくとも、線形弾性体の範囲で、破壊に等価な力を評価することはできるのです。

弾性体が釣り合っているだけでは地震波は発生しませんが、断層運動という（等価な）**力**がかかることによって地震波が励起され、それが地球内部に広がっていくのです。等価体積力の根源となる  $\Gamma_{ij}$  は、応力の剩余項であったのですから、震源における応力変化が地震波をもたらしている、ということも想像がつくでしょう。

ところで、震源は広大な地球の中でごく限られた領域です。ですから、ひとつの地震を考えるときには、その震源域以外のほとんどすべての空間では、線形弾性体の仮定がよく成り立っているはずですね。つまり、剩余応力が存在するのは震源のごくごく近傍だけであり、かつそれは**遠方からみたらほとんど点**だと言えそうです。そこで、そのように剩余応力が局在している、という状況を

$$\Gamma_{ij} = M_{ij}\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad (4.7)$$

のように**ディラックのデルタ関数**を用いて表しましょう。

#### 数学・物理ノート 4.1: ディラックのデルタ関数

デルタ関数  $\delta(x)$  は、任意の関数  $g(x)$  に対して

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)g(x)dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx &= 1, \quad \delta(x) = 0 \quad (\text{for } x \neq y) \end{aligned} \quad (4.8)$$

を満たすものです。引数が時間  $t, \tau$  になっても、あるいは 3 次元空間になってもこの特徴は変わりません。3 次元であれば

$$\begin{aligned} g(y) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ \iiint_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= 1, \quad \delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{for } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

で、積分が多重積分になることだけが異なります。この特徴から、デルタ関数  $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$  は、震源が  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$  にある、ということを示しているのです。

3 次元デルタ関数は、体積積分することで値が 1 になりますから、その次元は  $1/(体積)$  です。したがって、 $M_{ij}$  は応力の単位  $N/m^2$  に体積を乗じた、Nm の次元をもつ。これは力 × 距離の**モーメント**に対応する次元ですので、この  $M_{ij}$  を**モーメントテンソル**と呼びます。

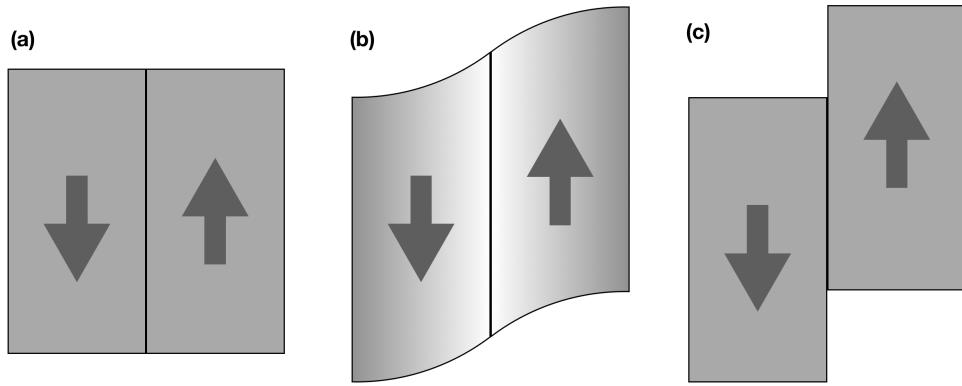


図 4.1 弾性反発説による地震発生のコンセプトモデル。

### 演習問題 4.1: ディラックのデルタ関数

1 次元のデルタ関数  $\delta(x)$  について、その定義に基づいて以下の積分を実行しなさい。ただし、(iii) の答えには積分記号は含まれず、関数  $f$  や値  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ならびに総和記号はそのまま使って良いものとします。

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos(x) dx$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} e^x \{ \delta(x-1) + \delta(x+2) \} dx$$

$$(iii) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sum_{n=1}^{\infty} \delta(x - x_n) dx$$

以上から、地震の震源を理解するための弾性体力学に基づくアプローチは、

- 断層運動がどんなモーメントテンソル（あるいは等価体積力）で表されるのか
- 等価体積力が与えられたときにどのような地震波が生じるのか
- 地表で観測された地震波からモーメントテンソルや等価体積力の情報をいかに抽出するのか

に集約されます。

### 4.1.3 シングルカップルとダブルカップル

断層運動を記述する力とは、どのようなものでしょうか。レイドが弾性反発説を提唱した際に主張したのは、図 4.2(b) のように、断層面の運動に沿って力が働くというものでした。これは単独の体積力ではなく、断層面をまたいだ微小距離離れた 2 点に互いに反対方向の力が働く、というものです。実は、これこそが先

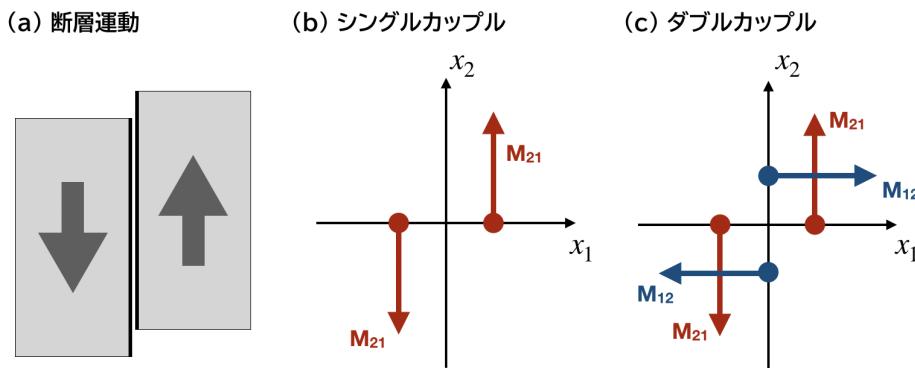


図 4.2 断層運動の模式図 (a) と、その断層運動を記述する等価体積力の候補としてのシングルカップル (b) およびダブルカップル (c).

に導入したモーメントテンソル（の第(1,2)成分）にほかならないことが示されています。また、このように組み合わせで働く力をことを、**シングルカップル**と呼びます。

シングルカップルの力の向きは断層の動く方向に一致していますから、これは一見自然なモデルのように見えます。しかし、図 4.2(b) で本当に断層運動が起こるでしょうか。

$x_1$  方向に互いに少しずれた点で逆方向の力が働いているのですから、これでは媒質が回転してしまいます。実は、地震の断層運動は図 4.2(c) のような力の組み合わせによって記述できる、ということがわかっています<sup>2</sup>。この力源は、力の組み合わせであるモーメント ( $M_{ij}$ ) が 2 つ組み合わされていることから、**ダブルカップル**型震源といいます。ダブルカップル型の震源は一見複雑ですが、座標系を 45 度回転させると、図 4.3 のように 2 つの膨張・圧縮を表すモーメントで記述できます（第 1.3 節）。意外かもしれません、断層運動は断層面から斜め 45 度に傾いた方向への膨張と圧縮によって表現されます。

地震断層を表すのがシングルカップルかダブルカップルのどちらであるか、ということについては、過去に長い論争がありました。当時の観測では後述する P 波初動の振動極性だけではなかなか決着がつかず、最終的に断層運動がダブルカップル型の力源で表現できることが理論的に確かめられたのは、1960 年代になってからでした。その時代になると、コンピュータで地震波形を理論的に合成して観測記録と比較する研究が盛んに行われるようになり、以後はダブルカップル力源による震源のモデルは広く受け入れられるようになりました。

ところで、図 4.2(c) のダブルカップルの力は、もし断層運動が図 4.4(a), (c) どちらであってもまったく同じです。ということは、これらの 2 つの断層は**力学的**

<sup>2</sup> その証明は本書の範囲を超えるため行いません。興味ある読者は Aki and Richards (2002) などの進んだ教科書を参照してください。

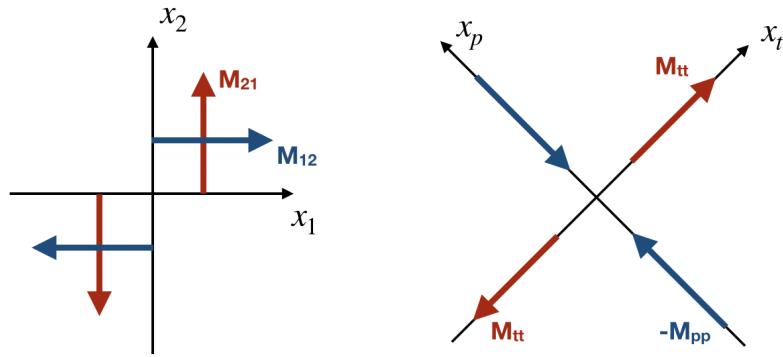


図 4.3 ダブルカップル型震源を表す力源の等価な 2 つの表現。

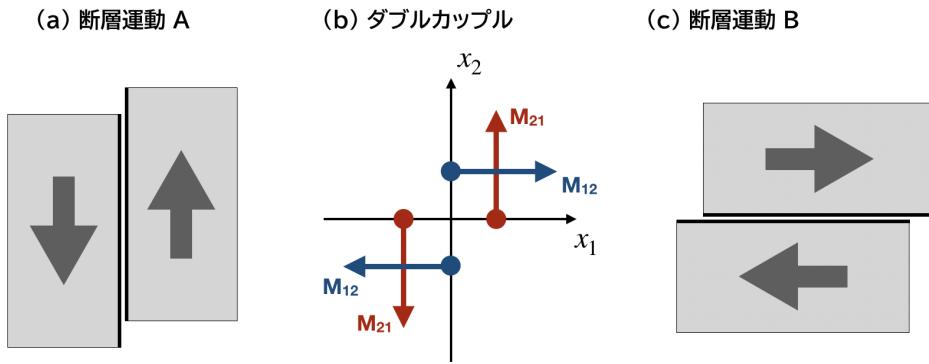


図 4.4 同じダブルカップル型力源を満たす 2 つの断層運動。

に区別ができないのです。地震が小さな**点震源**とみなせる場合、その地震波から断層面を一意に決めるることは（追加情報が使える一部の例外を除いて）本質的に困難なのです。

#### 4.1.4 断層にかかる応力と断層運動の方向

ダブルカップル型の力源、特に図 4.3 右側のような断層面に斜めに働く力というのは直感的には理解しにくいことです。そこで、ここで一旦弾性体力学に戻って、膨張や圧縮の力が働いている弾性体の内部の応力を考察してみましょう。

##### 2 次元面内におけるトラクションとその回転

ここでは、 $x_1-x_2$  平面内における 2 次元の変形を考えます。図 4.5 のように、弾性体の内部に仮想的な断層面（法線ベクトル  $\hat{n}$ ）を考え、そこに働くトラクションを調べます。

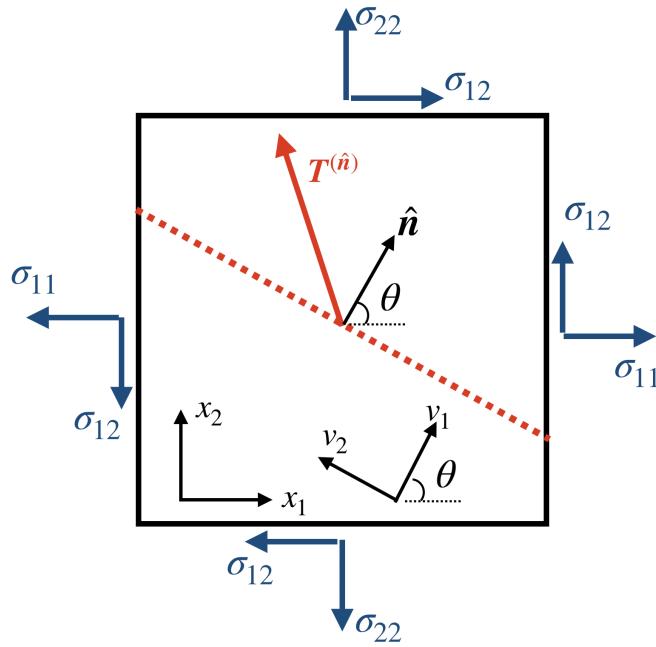


図 4.5 2 次元  $x_1-x_2$  平面内における応力場とその内部に考える断層面（点線）にはたらくトラクション  $T^{(\hat{n})}$ 。四角形周辺の矢印がこの場に働く応力テンソル成分とその方向を、四角形中の 2 つの座標軸は  $x_1-x_2$  直交座標系と、面と面に直交する方向からなる  $v_1-v_2$  座標系。

2 次元空間の応力テンソルは

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

です。法線ベクトルは、 $x_1$  軸と面のなす角を  $\theta$  とすれば

$$\hat{n} = (\cos \theta, \sin \theta)^T \quad (4.11)$$

です。したがって、この面に働くトラクションは、コーシーの関係式から

$$T^{(\hat{n})} = \begin{pmatrix} T_1^{(\hat{n})} \\ T_2^{(\hat{n})} \end{pmatrix} = \sigma \hat{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

で得ることができます。

この計算で得られたトラクションの成分は、 $x_1$  方向と  $x_2$  方向の成分  $T_1^{(\hat{n})}, T_2^{(\hat{n})}$  です。しかし、今はある面（断層面）に働く力を知りたいのです。それならば、座標軸方向における力の成分ではなく、**面に垂直な方向の力（法線応力）や面に沿った方向の力（剪断応力）** のほうが有用でしょう。そこで、図 1.17 中の  $v_1-v_2$  座標軸のように、座標系を角度  $\theta$  だけ回転させます。それによって、面に垂直な向き  $v$  と面に沿った向き  $w$  成分のトラクションを以下のように計算できるのです。

$$\begin{pmatrix} T_{v1}^{(\hat{n})} \\ T_{v2}^{(\hat{n})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{(\hat{n})} \\ T_2^{(\hat{n})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

これを具体的に計算してみると、

$$\begin{aligned} T_{v1}^{(\hat{n})} &= \sigma_{11} \cos^2 \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta + 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta \\ T_{v2}^{(\hat{n})} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{12}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (4.14)$$

が得られます。

### 演習問題 4.2: 断層面に働くトラクション

トラクションの定義からはじめて、(4.14) の導出の計算を確かめなさい。

さらに、三角関数の半角公式

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \quad (4.15)$$

を利用して整理すると、

$$\begin{aligned} T_{v1}^{(\hat{n})} &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta \\ T_{v2}^{(\hat{n})} &= -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (4.16)$$

が得られます。式(4.16)は、外部からかかっている応力  $\sigma$  と面（を表す法線）の角度  $\theta$  がわかれば、断層面に働く法線応力  $T_{v1}^{(\hat{n})}$  と剪断応力  $T_{v2}^{(\hat{n})}$  がわかる、ということを示しています。

### 断層面の向き

ここで話を簡単にするため、応力場が

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

と主応力  $\sigma_1, \sigma_2$  だけの剪断応力なしで表される状況を考えてみましょう。これは必ずしも特別な場合を考えたというわけではありません。どのような応力場であっても、座標系を適切に回転することによって、応力テンソルが対角成分だけ値を持つような状態にできるのです（第1.3節）。このとき、法線応力と剪断応力は

$$\begin{aligned} T_{v1}^{(\hat{n})} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \\ T_{v2}^{(\hat{n})} &= \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (4.18)$$

と単純化されます。

さて、外部の応力  $\sigma_1, \sigma_2$  が与えられたとき、もっとも剪断応力の絶対値が大きくなるのはどのような角度の断層面でしょうか。剪断応力の絶対値は  $|\sin 2\theta|$  に比例するのですから、 $\theta = \pm 45^\circ (= \pi/4)$  のときに剪断応力の絶対値がもっとも大きくなります。

このことを図4.3に当てはめて考えてみましょう。図4.3右の  $t$  軸と  $p$  軸をそれぞれ  $x_1, x_2$  軸とみなせば、ここに働く応力  $M_{tt}, -M_{pp}$  はちょうど  $\sigma_1, \sigma_2$  に対

応します。そのような力が働くたとき、もっとも剪断応力が強く働くのが  $x_t$  から  $\pm 45^\circ$  方向の  $x_1, x_2$  軸方向なのです。このように、弾性体は**圧縮・膨張の応力に対して、剪断応力は斜めに最も効率よく働く**、という特徴を持っているのです。

ただし、実世界で本当に断層の向きが力の向きと  $45^\circ$  の方向にあるかというと、必ずしもそうとは限りません。断层面には**摩擦**がかかります。そして、摩擦がどれだけ大きく効くかには、断层面にかかる法線応力が影響しています。断层面の摩擦係数と法線応力によって、もっとも滑りやすい断层面の方向が変わることが知られているのです。

### 演習問題 4.3: 断层面に働く法線応力と剪断応力

$\sigma_{11} = -30 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_{22} = -20 \text{ GPa}$  のとき、断层面に働く法線応力と剪断応力を断层面の向き  $\theta$  の関数としてプロットしなさい。また、法線応力と剪断応力それが最大になる  $\theta$  について、図 1.17 のような断层面とそこにかかるトラクションの模式図を描きなさい。ただし、断層の向き  $\theta$  と、そこにかかるトラクション  $T^{(n)}$  の向きに注意すること。

## 4.2 力源により作られる地震波

### 4.2.1 地震波の初動極性

震源断層に働く力を推測する上で重要な観測量のひとつに、P 波が到達した瞬間に地面が上に運動するか下に運動するか、という**初動極性**があります。すでに学んだように、P 波は地震波の進行方向に沿って振動します。地表付近では地震波速度が遅いため、P 波が地表に近づくにつれて、スネルの法則に従って地震波の伝播方向（波線の方向）はどんどん鉛直に近づいていきます。そのため、P 波は一般に上下動成分の地震計記録に卓越します。震源で最初に外向きに押す（膨張する）方向に振動した P 波は地表では上向きに、内向きに引く（圧縮する）方向に振動した P 波は下向きに、それぞれ振動するのです。

図 4.6 は、ある地震の震央付近の上下動波形の拡大図を示しています。観測点によって、初動の振動方向（**初動極性**）は上向きであったり下向きであったりまちまちに見えます。しかし、実はこの振動極性の上下のパターンには、図 4.7 のようにはつきりとした地域性があるのです。

これは震源断層からの地震波の輻射が**非等方的**であるために起こる現象です。逆に、これらの情報を用いて、等価体積力の向きを推定することができ、そこから断層運動の情報を抽出することができるのです。図 4.7 の地震の場合、震央の北東・南西では上向きに、北西・南東では下向きにそれぞれ揺れが始まっています。つまり、この地震は、北東・南西方向に膨張し、北西・南東方向には収縮させるような力が働いている、と想像できます。

しかし、このことをこれ以上精密に議論するためには、そもそも弾性体内で力

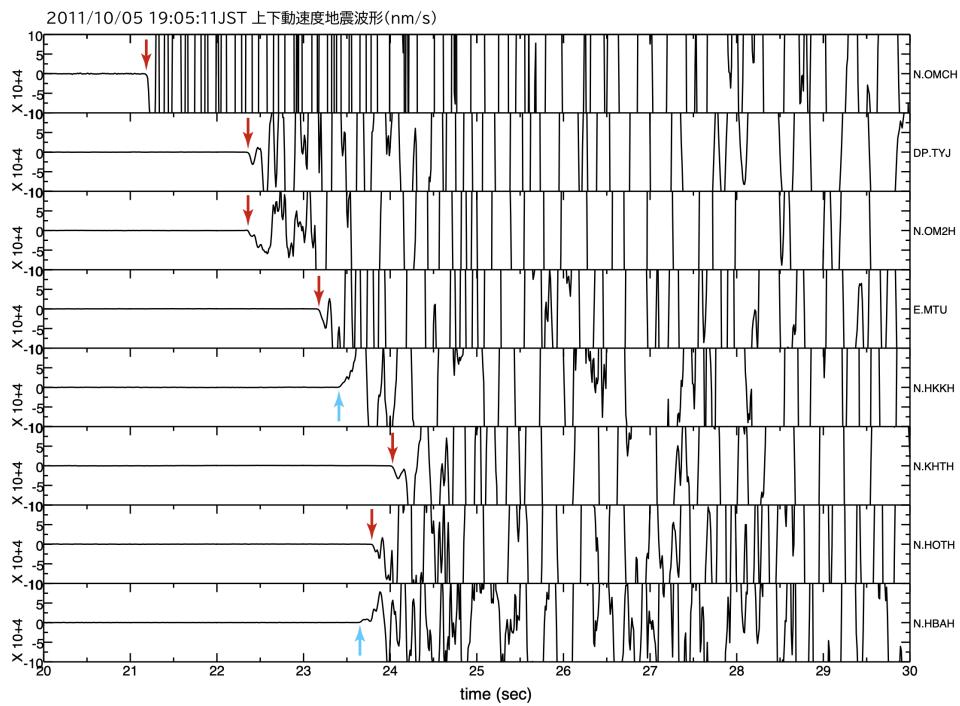


図 4.6 2011 年 10 月 5 日富山県の地震 ( $M_W=5.2$ ) の地震波上下動速度波形初動部分の拡大図。波形の矢印の向きが初動の極性を表す。

が働いたときにどのような地震波が生じるかを知らなければなりません。そこで、ここからは弾性体の運動方程式に立ち戻って、力源から輻射される地震波の解を表現する方法と、その解の特徴を調べていくことにしましょう。

### 4.2.2 グリーン関数

運動方程式によって地震波（弾性体の変位）が定まるということは、 $\rho, \lambda, \mu$  で定まる地球内部構造の下で、力源  $f$  が与えられたときに、変位  $u$  が生ずるということです。そこで、任意の力  $f$  が与えられたときの地震波（弾性体の変位）を容易に計算するために、グリーン（Green）関数<sup>3</sup>という考え方を導入します。

#### グリーン関数の定義・意味・効用

グリーン関数は、任意の場所  $\xi$  と時間  $\tau$  において  $k$  方向にかかった力

$$f_i(x, t) = \delta_{ik} \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) \quad (4.19)$$

に対する運動方程式の解として定義されます<sup>4</sup>。ただし、式 (4.19) の最初の  $\delta$  はクロネッカーデルタ ( $i = k$  のときだけ 1, ほかは 0) であるが、2 つ目と 3 つ目はディラックのデルタ関数であることに注意してください。見た目が似ているの

<sup>3</sup> 数学者ジョージ・グリーンにちなむ。人名であって色名ではない。

<sup>4</sup> 正確には、これは「線形弾性体の運動方程式のグリーン関数」です。グリーン関数は物理学の他分野でも（さまざまな方程式系に対して）用いられる一般的なものです。

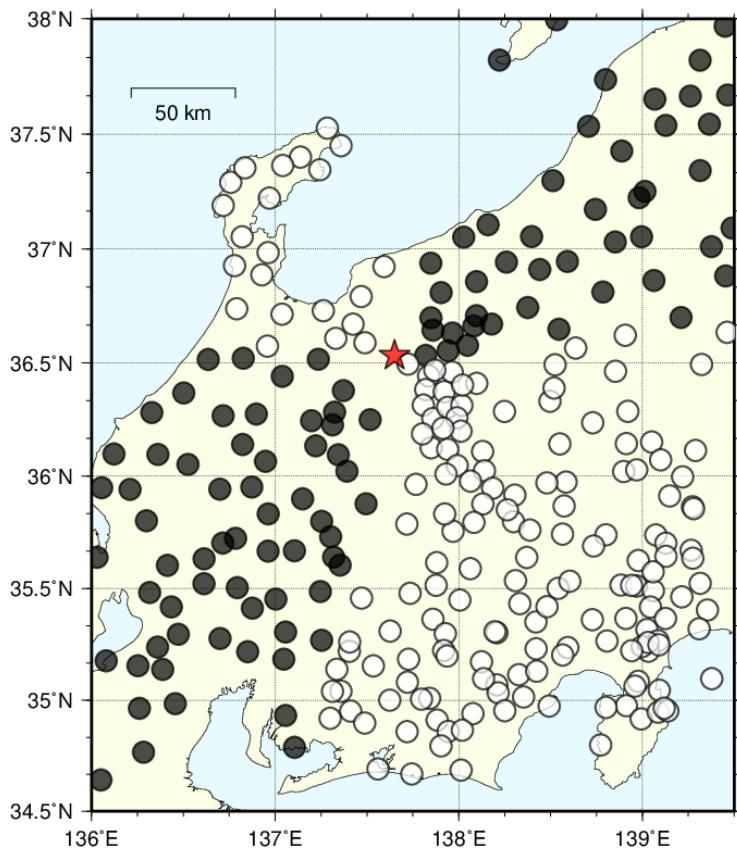


図 4.7 2011 年 10 月 5 日富山県の地震 ( $M_W=5.2$ ) の各観測点における P 波初動極性の分布図。白丸が初動極性下向き、黒丸が上向きをそれぞれ表す。

でややこしいですが、添字があるほうがクロネッカーのデルタ、関数のように括弧の引数をとるのがディラックのデルタ関数です。

$\xi, \tau$  における  $k$  方向の力によって生じた変位のグリーン関数の  $i$  成分を  $G_{ik}(x, t; \xi, \tau)$  と書きます<sup>5</sup>。すると、定義によりこのグリーン関数は線形弾性体の運動方程式

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \mu \nabla^2 u_i + f_i \quad (4.20)$$

の特別な場合

$$\rho \frac{\partial^2 G_{ik}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial G_{jk}}{\partial x_j} \right) + \mu \nabla^2 G_{ik} + \delta_{ik} \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) \quad (4.21)$$

を満たしています。

いま、上記を満たすようなグリーン関数が（何らかの方法で）求められたとしましょう。それを用いると、任意の震源に対する弾性体の変位がグリーン関数を用い

<sup>5</sup> 力が  $k$  方向にしか働かなくとも、変位は  $i = 1, 2, 3$  のすべての方向に生じうるので、これらは区別しなければいけません。また、変位を観測する場所と時間  $x, t$  と力源の場所と時間  $\xi, \tau$  を区別するため、関数引数の間にセミコロン “;” が入っています。

て表現できます。そのことを示すために、やや技巧的ですが、任意の力  $f(x, t)$  の  $i$  成分を、ディラックのデルタ関数を用いて

$$f_i(x, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \int f_k(\xi, \tau) \delta_{ik} \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) d\tau d\xi \quad (4.22)$$

と表しましょう。この被積分関数のなかに現れるクロネッカーのデルタとデルタ関数の組み合わせは、グリーン関数が満たす運動方程式(4.21)にそっくりですね。そこで、運動方程式(4.21)の両辺に  $f_k(\xi, \tau)$  を乗じて、さらに  $\xi$  と  $\tau$  で積分すると、

$$\rho \frac{\partial^2 F_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \right) + \mu \nabla^2 F_i + f_i(x, t) \quad (4.23)$$

$$F_i \equiv \iiint_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{ik}(x, t; \xi, \tau) f_k(\xi, \tau) d\tau d\xi \quad (4.24)$$

となります<sup>6</sup>。

ところで、今求めていたのは一般の任意の力源  $f(x, t)$ （シングルフォースと呼びます）による変位です。ということは、それは一般の運動方程式(4.20)を満たしているはずです。(4.20)と(4.23)を見比べると、(4.23)は運動方程式そのものです。つまり、

$$u_i(x, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{ik}(x, t; \xi, \tau) f_k(\xi, \tau) d\tau d\xi \quad (4.25)$$

であることがわかります<sup>7</sup>。

グリーン関数は、**特定の場所・特定の時間に力が瞬間的にかかったときの弾性変位の応答**という意味を持ちます。その応答関数がひとたびわかつてしまえば、あとはそこから任意の力に対する応答を作れるのです。たとえば力の大きさが増減したらグリーン関数の振幅をそれに比例して増減させればよいですし、力がかかる時間が前後にずれたら、変位が生ずる時間もおなじようにずらせば良いでしょう<sup>8</sup>。どんな力がどこにどれだけの大きさでかかっても、グリーン関数と実際に掛かった力の掛け合わせ（の足し合わせ=積分）で表せるのです。グリーン関数さえわかつてしまえば、もういちいち運動方程式を個別に解く必要がなくなる、というわけなのです。

### グリーン関数と P・S 波

ここでは、グリーン関数を理論的に導出することはせずに、結果だけを借用してその特徴を議論します。無限均質（ $\rho, \lambda, \mu$  が一定）の媒質においては、グリー

<sup>6</sup>  $F_i$  は  $k$  については和を取る（総和規約）ので注意。

<sup>7</sup> 実は、この説明は弾性体におけるグリーン関数の厳密な証明にはなっていません。本来は、地表や断層面などの境界面と境界条件についての繊細な取り扱いが要求されます。詳しくは Aki and Richards (2002) などにより進んだ議論を参照してください。

<sup>8</sup> こう言えるのは運動方程式が線形だからです。もし運動方程式に変位の 2 乗・3 乗といった量に関わる項が含まれていたら、こう簡単にはいきません。地震動を記述するひずみが非常に小さく、応力と歪のあいだの関係式（構成関係式）が線形であるからこそ、グリーン関数が有用なのです。

ン関数の解析解が以下のように求められています：

$$\begin{aligned} G_{ik}(x, t; \xi, \tau) = & \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2 r} \hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_k \delta\left(t - \tau - \frac{r}{\alpha}\right) \\ & + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2 r} (\delta_{ik} - \hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_k) \delta\left(t - \tau - \frac{r}{\beta}\right) \\ & + \frac{1}{4\pi\rho r^3} (3\hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_k - \delta_{ik}) \int_{r/\alpha}^{r/\beta} t' \delta(t - \tau - t') dt' \quad (4.26) \end{aligned}$$

ここで、 $r \equiv |x - \xi|$  は力源と位置  $x$  のあいだの距離、 $\hat{\gamma}$  は力源から位置  $x$  に向かう方向の単位ベクトルで、 $\hat{\gamma}_i = (x_i - \xi_i)/r$  です。このグリーン関数は 3 つの項の足し合わせからなります。第 1 項が P 波で、第 2 項が S 波です。第 3 項は**近地項** (near-field term) と呼ばれる項で、弾性体の**永久変位**に関わる項です。P 波と S 波はいったん波が通り過ぎたら弾性体は元の位置に戻ります ( $t \rightarrow \infty$  で振幅がゼロになる) が、この近地項はそうなりません。地震に伴う地殻変動を表現するのがこの近地項です。明らかに、近地項は距離  $r$  の 3 乗に反比例して小さくなります。これは P 波・S 波の振幅とくらべて、地殻変動は距離とともに急激に小さくなることを意味しています。

#### 演習問題 4.4: 幾何減衰と近地項の振幅の比較

P 波の幾何減衰  $1/(4\pi\rho\alpha^2 r)$ 、と近地項の振幅  $1/(4\pi\rho r^3)$  を比較してみましょう。 $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$ 、 $\alpha = 5000 \text{ m/s}$  を仮定し、距離  $r = 1 \text{ m}$  から  $r = 100000 \text{ m} = 100 \text{ km}$  までの範囲でこれらの値を両対数グラフでプロットしてみなさい。距離  $r = 1, 10, 100 \text{ km}$  で P 波の幾何減衰項と近地項の振幅はそれぞれ何倍違うでしょうか。

グリーン関数の P 波・S 波の部分をもっと詳しく見てましょう。それぞれ、 $1/(4\pi r)$  に比例して振幅が小さくなる項がかかっています。これは、波源でのエネルギーがエネルギーを保存しながら球面状に広がっていく**幾何減衰**です。幾何減衰項は、弾性体のグリーン関数の一部として、自然に組み込まれているのです。それぞれの項の最後にあるディラックのデルタ関数は、距離  $r$  の観測点においては時刻  $t = \tau + r/\alpha$  に P 波が、 $t = \tau + r/\beta$  に S 波がそれぞれ到達することを示しています。逆に、それ以外の時間には地震波は一切到達しません<sup>9</sup>。最後に残った  $\hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_k$  と  $(\delta_{ik} - \hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_k)$  が、力の方向 ( $\delta_{ik}$  により  $k$  軸の方向に力がかかる) と観測点の方向 ( $\hat{\gamma}_k$ ) との関係で決まる**輻射パターン**です。図 4.8 に図中上向き方向に力がかった場合の P・S 波の輻射パターンを示します。P 波は力に沿った方向に、S 波はそれに直交した方向に、それぞれ振幅が大きくなり、また符号も変わりうることが確認できるでしょう。

<sup>9</sup> ただしこれは媒質が無限均質だからです。実際の地球は層構造をしているし、層の中にも不均質があるので、観測される地震波はもっと複雑です。ただしそのような複雑な場合には、そもそも解を式で書き下すことができません。

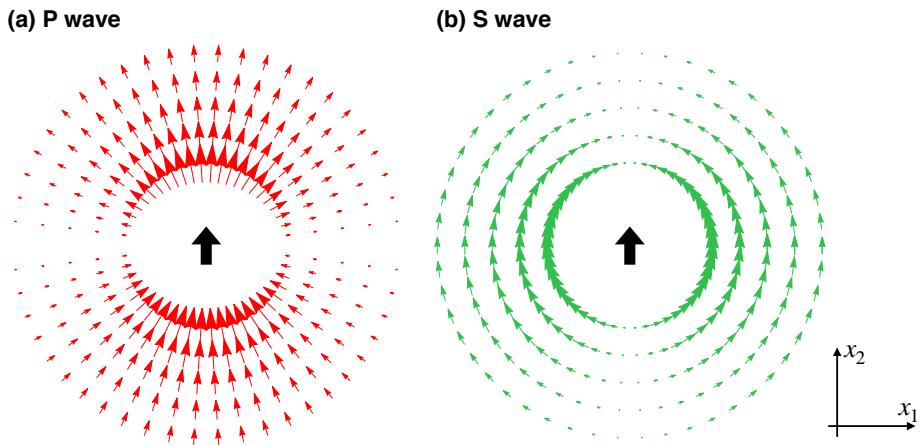


図4.8 体積力  $f$  が図中  $x_2$  方向に働くいたときの P 波と S 波の輻射パターン。力の働く方向を含む平面内に、P 波（左）と S 波（右）の振動方向と振幅の大きさを矢印で示す。

#### 演習問題 4.5: 体積力による P 波の輻射パターン

いま、震源において大きさ 1 の力  $f = \hat{e}$  ( $|\hat{e}| = 1$ ) が働くと仮定します。また、力の方向と震源から観測点に向かう方向とがなす角を  $\theta$  とします。このとき、P 波と S 波の振幅の第  $i$  成分は  $u_i^P \propto \hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_k \hat{e}_k$  と  $u_i^S \propto (\delta_{ik} - \hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_k) \hat{e}_k$  にそれぞれ比例します。

- (i) 上式から、P 波の変位ベクトルが  $\mathbf{u}^P \propto \hat{\gamma} \cos \theta$  であることを示しなさい。
- (ii) 同様の検討を S 波について行い、S 波の変位ベクトルを  $\hat{e}$ ,  $\hat{\gamma}$  と  $\theta$  を用いて表しなさい。クロネッカーデルタを答えに残してはいけません。
- (iii) もし  $\hat{\gamma} = \hat{e}$  であるとき、S 波の振幅はどうなるか論じなさい。

### 4.2.3 ダブルカップル震源による地震波

#### モーメントテンソルによる地震波の表現

単独の力（シングルフォース）によってどのような地震波が出るかがわかったので、いよいよ断層運動を表すダブルカップル震源から出る地震波について考察しましょう。

シングルカップルにせよダブルカップルにせよ、いつでも 2 つの相異なる方向に向かう同じ大きさの力が微小距離だけ離れてかかっています。原点から力の支点に向かう方向と力の方向が直交しているとき、弾性体全体を回転させようとするモーメント（力と距離の積）がかかります。このようなモーメントは、（力の方向 3 通り） $\times$ （力が離れている方向 3 通り）で計 9 通りの組み合わせがあります（図 4.9）。たとえば、 $M_{12}$  とは、『 $x_2$  方向に微小な距離離れた  $x_1$  方向の力の組

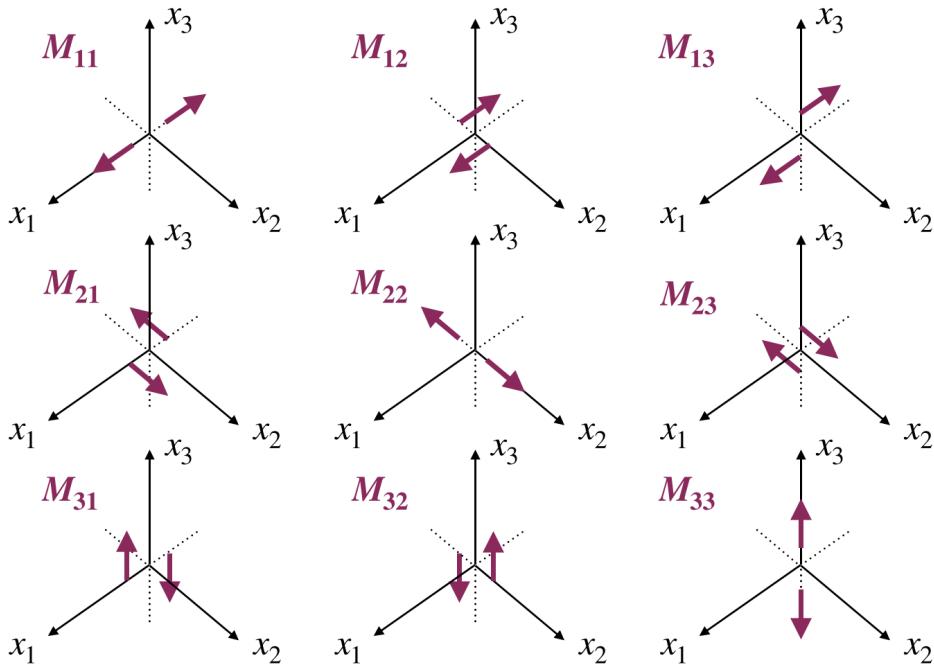


図 4.9 モーメントテンソルの定義。

み合わせ』のことです。

シングルカップルから出る地震波は、シングルフォースのグリーン関数を重ね合わせるだけで簡単に計算できます。たとえば  $M_{12}$  による力は、 $x_2$  方向の単位ベクトルを  $\hat{n}_2$  として、

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) &= G_{i1}\left(\mathbf{x}, t; \xi + \frac{d}{2}\hat{n}_2, \tau\right) f_1(\xi, \tau) - G_{i1}\left(\mathbf{x}, t; \xi - \frac{d}{2}\hat{n}_2, \tau\right) f_1(\xi, \tau) \\ &= \frac{G_{i1}\left(\mathbf{x}, t; \xi + \frac{d}{2}\hat{n}_2, \tau\right) - G_{i1}\left(\mathbf{x}, t; \xi - \frac{d}{2}\hat{n}_2, \tau\right)}{d} (f_1(\xi, \tau)d) \\ &\rightarrow \frac{\partial G_{i1}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)}{\partial \xi_2} M_{12}(\xi, \tau) \quad (d \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (4.27)$$

となります。しかし、このようなひとつのモーメントだけでは、断層が  $x_1-x_2$  平面内で回転してしまいます。そうさせないためには、もう一つのシングルカップル  $M_{21}$  が  $M_{12}$  と同じ大きさ ( $M_{12} = M_{21}$ ) で同時に作用すればよいのです。そのときの地震波の変位は、 $M_{12}$  と  $M_{21}$  からの地震波を重ね合わせて（ダブルカップル），

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\partial G_{i1}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial G_{i2}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)}{\partial \xi_1} \right) M_{12}(\xi, \tau) \quad (4.28)$$

のようになります。点震源で仮定できるどのような地震断層も、6 つの独立なモーメントテンソル成分の組み合わせで記述することができます。図 4.2(a) の地震断

層は、モーメントテンソルが

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & M_{xy} & 0 \\ M_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M_0 & 0 \\ M_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

という特別な場合に相当します。

(4.28) 式において、グリーン関数の微分を計算して近地項を無視すると、実体波は

$$u_i^F(x, t) = \frac{\hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_p \hat{\gamma}_q}{4\pi\rho\alpha^3 r} \dot{M}_{pq} \left( t - \tau - \frac{r}{\alpha} \right) + \frac{(\delta_{ip} - \hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_p) \hat{\gamma}_q}{4\pi\rho\beta^3 r} \dot{M}_{pq} \left( t - \tau - \frac{r}{\beta} \right) \quad (4.30)$$

と表されます<sup>10</sup>。シングルフォースによる地震波と同じように、幾何減衰  $1/(4\pi r)$  に比例して振幅が遠くなり、また変位はモーメントテンソルの時間微分に比例します。幾何減衰項の分子にある量が地震波の**輻射パターン**ですが、そのパターンはシングルフォースによる地震波とは異なっています。

### ダブルカップル震源による P 波と S 波の輻射特性と断層面

図 4.10 に断層運動を表すダブルカップル震源による P 波と S 波の輻射特性的角度依存性を示します。P 波は断層の運動から斜め 45 度ずれた方向に、S 波は断層運動の方向とそれに直交した方向に、それぞれ振幅のピークをもつ**四象限型**の輻射パターンを持ちます。特に P 波は 4 つのピークで、振幅の極性（押しか引きか）が互い違いに現れるという特徴があります。これこそが、地震波観測記録で現れていた P 波の初動極性のパターン（図 4.7）そのものなのです。図との比較から、この地震の断層面は図 4.7 の振動極性の境界に沿った方向であると推定できるのです。

ただし、それだけでは断層面はひとつには決まりません。ダブルカップル型震源の導入時にも述べた通り、力源から求める地震の断層面の候補は常に 2 つあります。この場合（図 4.7）の断層面は西北西–東南東か、北北東–南南西か、どちらでしょうか。どちらも同じように振動極性の境界になっています。ダブルカップル型の力源をもたらす 2 つの断層面は常に互いに直交しており、片方の断層面に対してもう一つのことを**補助面**といいます。地震波の P 波極性だけからでは、どちらが断層面でどちらが補助面かを決めることは、残念ながらできません。

では、地震学ではどうあっても断層面をひとつに決められないのでしょうか。実はこの 2 つの断層面が区別できないのは**点震源**の仮定をしているからです。震源が有限の断層面であることを考慮すれば（つまり、有限の断層面を考慮できるくらい近くでの観測記録を元にすれば）、地震の破壊が時間とともに広がっていく効果や、あるいは余震の分布からも断層面を推定することができます。余震は本震の断層面上で断層すべりが大きくなかった場所で多く発生することが知られており、余震の位置を詳細に決めることで、断層面の形状が浮かび上がってくる

<sup>10</sup> 上付き添字の F は Far-field の略で、近地項を無視したことを意味しています。なお、この式の導出は本書では行いません。

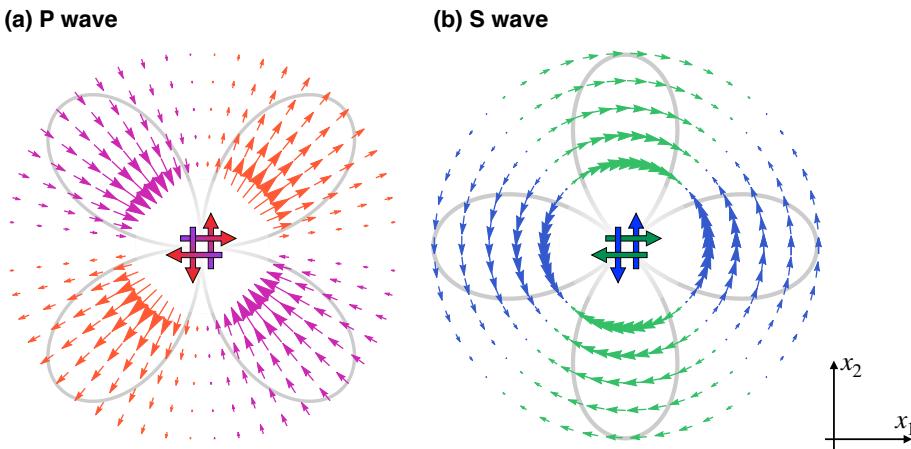


図 4.10  $x_1-x_2$  面内のダブルカップル震源（図中央矢印）による P 波と S 波の輻射特性（矢印）。P 波・S 波内の矢印の色の違いは、押し引きあるいは剪断の極性の違いをそれぞれ表す。灰色線は輻射される地震波の等距離における角度分布を表す。

(ことが多い) のです。ところが、余震の数は本震発生後の時間のべき乗に反比例して減っていきます（**大森公式**）。そのため、特に巨大地震発生後はできるだけ早く現地に入り、**臨時余震観測**を行うことでその地震の特徴を調べることが重要になってくるのです。

### P 軸・T 軸・Null 軸

ダブルカップル型の力源についてもう少し用語を学んでおきましょう。ここではふたたび図 4.3 の  $M_{12} = M_{21}$  のダブルカップル震源に注目します。

この震源で働く力は、 $x_1$ （横）方向と  $x_2$  方向（縦）の力の複雑な組み合わせですが、適切に座標系を選ぶと、全体として右上と左下に断層を引っ張る力と、右下と左上から圧縮する力の 2 つに分解できます。あらゆるダブルカップル震源のモーメントテンソルは、適当に座標系を取ると、互いに直交する 2 つの方向への膨張・圧縮のモーメントで記述できることが知られています<sup>\*11</sup>。この圧縮方向と膨張方向の座標軸を、それぞれ P 軸・T 軸といいます<sup>\*12</sup>。図 4.10 の P 波の輻射パターンと比べてみると、P 波は P 軸の方向に引き波、T 軸の方向に押し波が発生します。この 2 つの軸に直交する方向を Null 軸あるいは B 軸と呼びます。Null 軸の方向には P 波が全く輻射されません。実はこの P 軸・T 軸・Null 軸は、それぞれの方向に  $x', y', z'$  なる座標系をとると、モーメントテンソル (4.29) が、ある大きさ  $M_0$  を用いて

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

<sup>\*11</sup> ひずみや応力テンソルの対角化とまったく同じです。第 1.3 節参照。

<sup>\*12</sup> Pressure と Tension の頭文字です。

のように書くことのできる方向なのです。 $(4.29)$  のモーメントテンソルだけに限らず、あらゆる方向のダブルカップル震源が $(4.31)$  の形に座標変換できます。

このときの $M_0$  が**地震モーメント**であり、断層面の面積 $S$ と滑り量 $D$ から

$$M_0 = \mu D S \quad (4.32)$$

によって決まる量であることがわかっています。また、**モーメントマグニチュード** $M_W$  が

$$M_W = \frac{1}{1.5} (\log(M_0[\text{Nm}]) - 9.05) \quad (4.33)$$

によって地震モーメントと関連付けられています<sup>13</sup>。なお、モーメントマグニチュード $M_W$  は無次元の量であり、 $(4.2.3)$  式の係数 1.5 や 9.05 は地震モーメントを記述する単位系によって異なることに注意が必要です。そのため、式の $M_0$ には単位を付して表現してある) $(4.2.3)$  は SI 単位系 ( $M_0$  の単位は Nm) の場合ですが、もし $M_0$  を CGS 単位系の dyn·cm で表現したときには、

$$M_W = \frac{1}{1.5} \log(M_0[\text{dyn} \cdot \text{cm}]) - 10.7 \quad (4.34)$$

で計算されます。

#### 数学・物理ノート 4.2: CGS 単位系

CGS 単位系は、長さ・重さ・時間の基本単位をそれぞれ cm, g, s で計量する単位系のことです。近年は m, kg, s を基本単位とする SI 単位系 (MKS 単位系ともいう) が標準となりましたが、古い文献では CGS 単位系が使われていることもあります。CGS 単位系での力の単位は dyn (ダイン) といい、 $\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$  に相当します。その他、CGS 単位系における速度の  $\text{kine}=\text{cm}/\text{s}$  (カイン)、加速度の  $\text{gal}=\text{cm}/\text{s}/\text{s}$  (ガル) は、地震波振幅の単位として今でも用いることがあります。

<sup>13</sup> モーメントマグニチュードは本質的には地震モーメントの常用対数なのですが、1.5 や 9.05 といった係数がかかっています。これらは歴史的な経緯によるものです。モーメントマグニチュードが提案されるよりはるか前から、地震そのものの規模を表す量としてのマグニチュードが提案されていました。そのひとつであるリヒター (Richter) マグニチュードは、「震源から特定の距離においた特定の地震計で観測された地震波の振幅の常用対数」として定義されたものでした。後発のモーメントマグニチュードは、これらの既存のマグニチュードの値と大きく齟齬が起きないように係数が定められたのです。地震波の振幅の対数から決めるマグニチュード (ローカルマグニチュード) は推定が簡単で速報性に優れるため、今でも様々なものが各地で使われています。気象庁による地震情報のマグニチュード (気象庁マグニチュード $M_J$ ) もそのうちの一つです。

**演習問題 4.6: 地震の大きさ**

ある地震とくらべて、断層の長さも幅もすべり量もそれぞれ 10 倍の大きさの地震が起きたとします。その大きな地震の地震モーメントは何倍になりますか。モーメントマグニチュードは相対的にいくつ大きくなるでしょうか。ただし、剛性率は一定であるとします。

**演習問題 4.7: 地震のエネルギー換算**

マグニチュード  $M$  の地震によって放出されるエネルギー（単位：J（ジュール））は、経験的に

$$\log_{10} E(M) = 1.5M + 4.8 \quad (4.35)$$

で与えられることが知られています (Gutenberg and Richter (1955) の経験式から単位換算)。これを使って、地震のマグニチュードとエネルギーの関係を、馴染みのあるカロリー (cal) 単位を経由して換算してみましょう。カロリーにはいくつかの定義がありますが、ここでは  $1 \text{ cal} = 4.184 \text{ J}$  とします。

(i) 人間の脂肪  $1 \text{ kg}$  は、約  $7200 \text{ kcal} = 7.2 \times 10^6 \text{ cal}$  とされています。 $1 \text{ kg}$  の脂肪を消費するエネルギーに相当する地震のマグニチュードを、小数点第 1 位まで計算して求めなさい。

(ii) 第 2 次世界大戦中に広島に投下された原子爆弾のエネルギーは TNT 火薬約 15 キロトン ( $\text{kt}$ ;  $1 \text{ t}$  は  $1000 \text{ kg}$  なので  $1.5 \times 10^7 \text{ kg}$ ) ぶんに相当すると言われています。TNT 火薬はダイナマイトなどに使われる高性能爆薬の名称で、その爆発で放出されるエネルギーは、TNT 火薬  $1 \text{ kg}$ あたり約  $10^6 \text{ cal}$  です。これらを踏まえて、マグニチュード 9.0 の 2011 年東北地方太平洋沖地震のエネルギーが、広島に投下された原子爆弾何個分に相当するかを求めなさい。

**4.2.4 モーメントテンソルと震源時間関数****震源時間関数と地震モーメント・モーメントマグニチュード**

モーメントテンソルは場所と時間両方の関数です。場所については単に震源位置を表すだけですが、時間依存性はその震源位置でかかる等価体積力（あるいはモーメント）の時間変動を表しています。

モーメントテンソルの時間についての共通した変動を変数分離して、

$$M_{ij}(x, t) \equiv m_{ij}(x)M(t) \quad (4.36)$$

のように書くことがあります。ここで、 $m_{ij}$  は地震モーメント  $M_0$  で規格化した

### モーメントテンソル

$$m_{ij} = M_{ij}/M_0 \quad (4.37)$$

です。地震モーメントはモーメントテンソルから、

$$M_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i,j=1}^3 M_{ij}^2} \quad (4.38)$$

によって計算されます。この定義では、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = M_0 \quad (4.39)$$

になります。この地震モーメントは、(モーメントテンソルが断層運動を表す場合には) 断層面積やすべり量と(4.32)に関係付けられ、また(4.2.3)によってモーメントマグニチュードとも関係づけられます。したがって、 $M(t)$ が断層運動の時系列と大きさを規定し、残されたモーメントテンソルの成分  $m_{ij}$  が断層運動の形状を規定することになるのです。

このときの時間変動部分  $M(t)$  は**モーメント関数**あるいは**モーメント時間関数**などと呼ばれます。このモーメント関数は、(座標系を適切に取れば) 時間とともに変動し、最終的にゼロではない一定の値に収束します。

このことは、断層運動と等価体積力の関係を考えると理解しやすいでしょう。地震とは、断層がある状態から別の状態にずれ動いたのちに静止する現象です。このような運動をもたらす外力(等価体積力)はどんなものでしょうか。

非線形な断層の破壊部分以外は弾性体を考えていたのですから、もし断層運動が終わったあとに等価体積力がゼロになってしまったら、地震波を放出したあとで弾性体は地震前の釣り合いの位置に戻ってしまいます。実際の断層運動がそうならないということは、等価体積力は断層破壊が終わったあとにもゼロには戻らず、あらたな釣り合い状態が保たれているということなのです。

一方、観測される  $P$  波の振幅は、

$$\begin{aligned} u_i^{FP}(x, t) &= \frac{\hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_p \hat{\gamma}_q}{4\pi\rho\alpha^3 r} \dot{M}_{pq} \left( t - \tau - \frac{r}{\alpha} \right) \\ &= \frac{\hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_p \hat{\gamma}_q}{4\pi\rho\alpha^3 r} m_{pq} \dot{M} \left( t - \tau - \frac{r}{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

によってモーメント関数の微分に比例しています。この  $\dot{M}(t)$  を特に**震源時間関数**と呼ぶことがあります。

### モーメントマグニチュードの求めかた

地震波の変位波形が震源時間関数に比例し、その震源時間関数の時間積分が地震モーメントです。さらにその対数がモーメントマグニチュードに比例しています。そこで、 $P$  波もしくは  $S$  波の初動のパルスを抽出し、あらかじめ推定しておいた幾何減衰や断層の輻射パターンの効果を補正して、それを時間積分すれば地

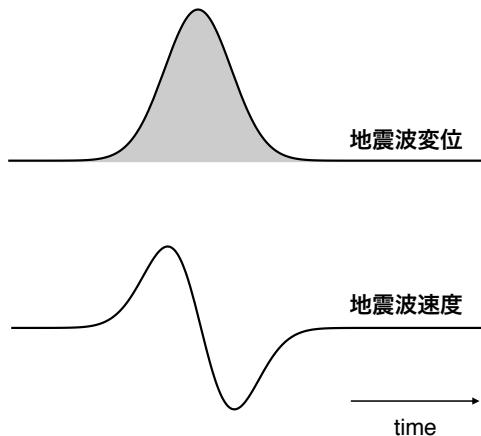


図 4.11 地震波変位波形初動パルスと地震モーメントとの関係（上）。地震波形がモーメント関数の時間微分なので、初動波形の面積（時間積分；図中灰色部分の面積）が地震モーメントに比例する。下はその時間微分で、地震波の速度波形に対応する。

震モーメントが求まることになります（図 4.11）。ただし、そのためには震源の位置と輻射パターンが事前にわかつていなければなりません。また、地震波の後続層は地球内部構造によって反射・屈折等により乱されているため、この解析方法は適用できず、初動パルスだけを切り出さなければなりません。

近年では計算機の発達によって、地震波形そのものを計算によって作り出し（理論波形）、逆問題によって観測ともっともよく適合する理論波形を与える  $M_{ij}$  を直接推定することができるようになりました。その場合、グリーン関数に地球内部構造の影響を（ある程度<sup>14)</sup>）考慮した上で波形全体を用いることができます。そうしてモーメントテンソルが求まってしまえば、そこから輻射パターンと地震モーメントを推定することができます。

## 4.3 断層面の幾何学的表現

### 4.3.1 断層形状と運動を規定する 3 つの角度

断層面は地中に埋没した（第一近似として）長方形で、その断層面が特定の方向にずれ動くのが地震です。これらを記述するのに、図 4.12 のような 3 つの角度パラメータを用います。

まず、断層の上端が水平面（地表面）においてどちらを向いているかを表すのが走向（strike） $\phi_s$  です。この角度は北向きを  $0^\circ$  として時計回りに測るものとし、その取りうる値は  $0^\circ$ – $360^\circ$  です。次に断層がどれだけ傾いているかを表すのが傾

<sup>14)</sup> 一般には深さとともに密度および弾性係数が変化する 1 次元構造が用いられます。それを一步進めて、3 次元的に不均質な構造でモーメントテンソルを推定するという問題は現在の第一線の研究テーマの一つです。

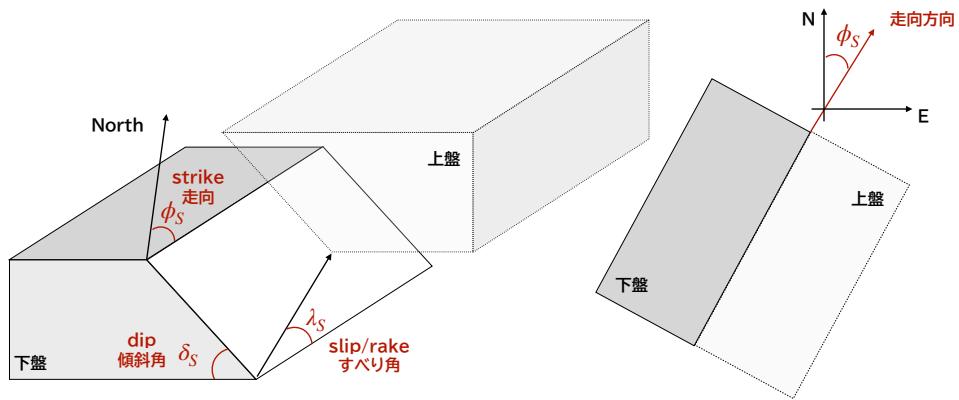


図 4.12 断層面を表現する 3 つの角度パラメタの定義。図中の斜め面が断層面であり、この場合は右側に上盤が存在する。すべり角  $\lambda_s$  は下盤からみた上盤の動いた方向として定義する。右図は断層を真上から見た図。

**斜角 (dip)**  $\delta_s$  です。 $\delta = 0^\circ$  のとき断層面は水平、 $90^\circ$  のとき鉛直です。これら 2 つが断層面の形を決めるパラメタで、断層面の長さ  $L$  と  $W$  および  $\phi_s, \delta_s$  から地表に平行な上端を持つ長方形形状の面が一つに定ります。

最後に**すべり角 (slip; rake ともいいます)**  $\lambda_s$ <sup>\*15</sup> は、断層面の**上盤 (hanging wall)** 側が**下盤 (footwall)** 側に対してすべる角度です。すべり角は走向に平行な向きを  $0^\circ$  とします。角度範囲は  $0^\circ\text{--}360^\circ$ 、もしくは  $-180^\circ\text{--}+180^\circ$  で記述することもあります。

主な断層運動の様子を図 4.13 に示します。 $\lambda = 0^\circ$  のとき**左横ずれ断層**、 $\lambda = 180^\circ$  のとき**右横ずれ断層**と呼ばれます。図にあるような鉛直に切り立った断層は  $\delta = 90^\circ$  に対応します。 $\lambda = 90^\circ, 270^\circ$  は縦ずれ断層で、上盤側がずり下がる**正断層 (normal fault)** は  $\lambda = 270^\circ$ 、ずり上がる**逆断層 (reverse fault)** が  $\lambda = 90^\circ$  に相当します。もちろん、これらの角度パラメタの値はあくまでも代表的なものであり、たとえば傾斜角が  $90^\circ$  から  $1^\circ$  でもずれたら横ずれ断層とは呼ばない、などということはありません。また、あらゆる断層がこれらのどれか一つに該当するとも限りません。「左横ずれ成分をもつ逆断層」のような組み合せも起こり得ます。

一般の震源はモーメントテンソルで表されるのですから、3 つの角度パラメタで表した断層運動も、もちろんモーメントテンソルに対応付けられます。具体

<sup>\*15</sup> これらの角度パラメタは英語名称がなかば日本語化しており、日本語名よりもストライク・ディップ・レイクと呼ばれることが多いようです。

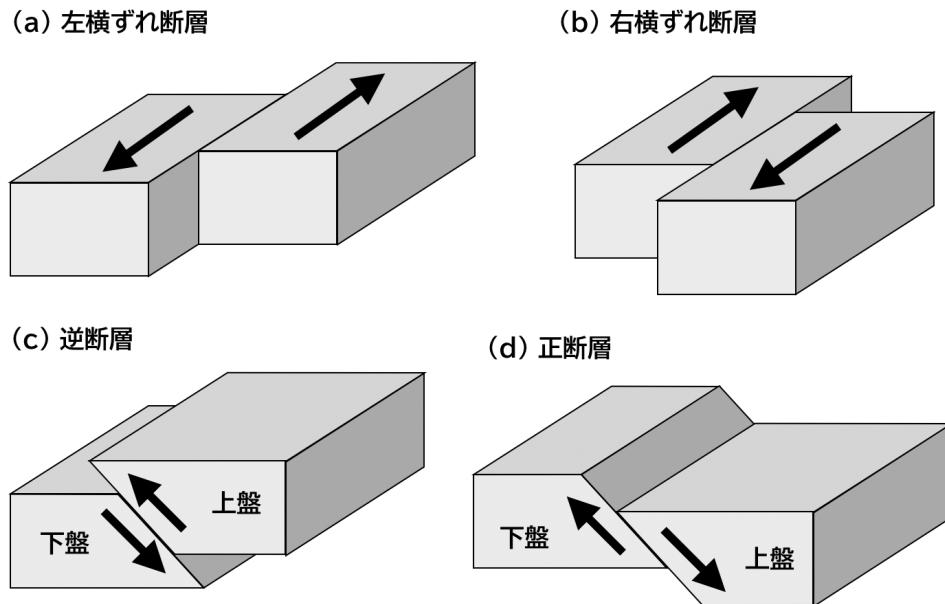


図 4.13 主な断層運動の種類. (a) 左横ずれ断層 ( $\lambda = 0^\circ$ ) (b) 右横ずれ断層 ( $\lambda = 180^\circ$ ) (c) 逆断層 ( $\lambda = 90^\circ$ ) (d) 正断層 ( $\lambda = 270^\circ$ )

的には,

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= -M_0 [\sin \delta_S \cos \lambda_S \sin(2\phi_S) + \sin(2\delta_S) \sin \lambda_S \sin^2 \phi_S] \\
 M_{12} &= +M_0 [\sin \delta_S \cos \lambda_S \cos(2\phi_S) + \frac{1}{2} \sin(2\delta_S) \sin \lambda_S \sin(2\phi_S)] \\
 M_{13} &= -M_0 [\cos \delta_S \cos \lambda_S \cos \phi_S + \cos(2\delta_S) \sin \lambda_S \sin \phi_S] \quad (4.41) \\
 M_{22} &= +M_0 [\sin \delta_S \cos \lambda_S \sin(2\phi_S) - \sin(2\delta_S) \sin \lambda_S \cos^2 \phi_S] \\
 M_{23} &= -M_0 [\cos \delta_S \cos \lambda_S \sin \phi_S - \cos(2\delta_S) \sin \lambda_S \cos \phi_S] \\
 M_{33} &= +M_0 [\sin(2\delta_S) \sin \lambda_S]
 \end{aligned}$$

です (Aki and Richards, 2002). ただし, 座標系の第 1 軸は北向き, 第 2 軸を東向き, 第 3 軸は鉛直下方を正にする深さ軸です.

#### 演習問題 4.8: 断層面の幾何学

$(\phi_S, \delta_S, \lambda_S) = (30^\circ, 30^\circ, 45^\circ)$  の断層運動の模式図を図 4.13 に倣って描きなさい. 逆に, 図 4.13 の各断層運動の走向・傾斜・すべり角の概算を図から読み取りなさい.

### 演習問題 4.9: 断層の角度パラメータとモーメントテンソル

- (i)  $\phi_S = \pi/2, \delta_S = \pi/4, \lambda_S = \pi/2$  のとき, モーメントテンソルを求め, その値を行列形式で示しなさい. 三角関数はすべて具体的な値を計算して,  $\sin$  や  $\cos$  を残してはいけません.
- (ii) このモーメントテンソルが表す断層運動の種類を述べなさい.
- (iii) このモーメントテンソルの震源の発震機構解（ビーチボール）を図示しなさい.

#### 4.3.2 震源メカニズム解の決め方とその表現方法

前節で学んだように, 地震波には断層運動の方向による輻射パターンがあり, 特に P 波の初動はそれによって「押し」か「引き」かのパターンが現れます. この「押し」と「引き」の方向の中心軸が, ダブルカップル震源を表す表現の一つである P 軸と T 軸であるのでした. したがって, P 波振幅は P 軸周辺では引き, T 軸周辺では押しとなります. また, P 軸にも T 軸にも直交する方向はヌル軸 (B 軸) と呼ばれ, その方向には P 波は放射されていません. この初動の押し引きが観測点まで保存されるため, 逆に震源においてどの方向には押し（引き）で P 波が輻射されたかを調べることができます. そこから  $\phi_S, \delta_S, \lambda_S$  の組を, ダブルカップル震源の不確定性である 2 種類の候補にまで絞り込むことができます. このようにして求まった地震断層のパラメタのことを, **震源メカニズム解**（あるいは**発震機構解**）と呼びます.

「引き」の振動極性を持つ部分を白, 「押し」の部分を黒で塗り分け, その境界線（断層面の方向・補助面の方向をそれぞれ含む線. これらの線によって作られる面を**節面**という）を実線で描いたものを, **震源球**（あるいはその形状になぞらえて, **ビーチボール**）と呼びます. 震源球上のある点の P 波振動極性は, その点を通過して伝播し, 最終的に到達した観測点においても同じであるはずです. ということは, 逆に地震観測点においてその P 波振動極性を判定し, そこで観測された P 波が震源のどの方向に輻射されたものであるかを地球内部構造の知識から推定し<sup>16</sup>, 震源球面上にその方向をプロットすることができます. それをたくさんの観測点について行えば, 震源球上で「押し」と「引き」を最もよく分ける境界線（節面）を引くことができるでしょう. 節面が決まるということは, すなわち断層面と補助面が決まるということですので, そこから走向・傾斜角・すべり角が定まります. このようにして, P 波の押し引きの分布から震源メカニズム解を決めることができます. ただし, 十分な観測点の記録がないとメカニズム解が決まらないのはもちろんのことです. 単に点数が多いだけでなく, 震源を取り囲むように観測点が配置されていることも重要です.

<sup>16</sup> これは地下構造を知つていれば, 波線がどのような経路を通ってくるかが推定できます. これを**波線追跡**といいます.

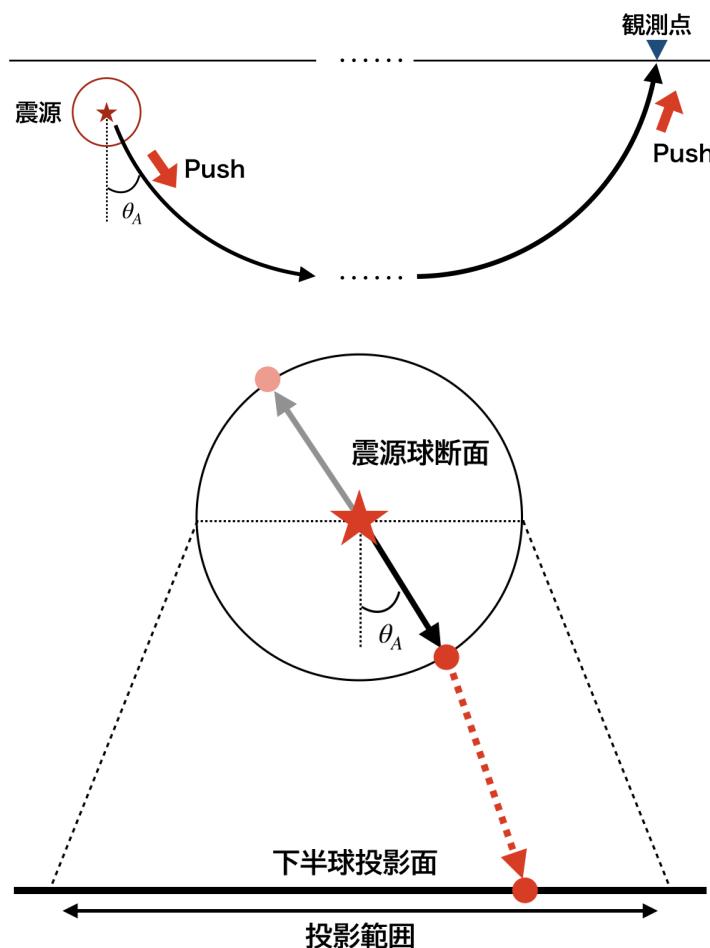


図 4.14 地震波の波線と観測点の位置関係（上）および、波線の方向による震源球の投影のしかた（下）

ところで、3次元の球体というのは、実際のデータ処理でも可視化する上でも取り扱いにくいですね。そこで、この震源球を**等積投影法**や**等角投影法**といった地図投影法を用いて2次元的に表現するのが一般的です（図 4.14）。普通は、震源球の下半球側（地球でいうところの南半球）を2次元平面の円内に投影します。水平面よりも下側に波線が輻射される場合（図中  $\theta_A$ ；ただし鉛直下方から測った角度を射出角  $\theta$  とする）は、その角度に応じて、投影点の中心を  $\theta = 0$  として、射出角が大きくなるほど動径成分が大きくなるように<sup>17</sup>、また震源からみて観測点に向かう方位角（北が上で時計回り）を角度成分を持つように点を打ちます。この点に対して押し引きの情報を（通常は黒と白のシンボルで）プロットするのです。

もし地震波が水平面より上向きに射出されていた場合（図 4.14 灰色矢印）には、その方向の震源球の中心に対する対称な点（たとえば北極に対してなら南極方向）を投影します。これは、P波の輻射パターンが震源球の中心に関して対称である

<sup>17</sup> 具体的には、等積投影の場合は射出角  $\theta$  に対して投影中心からの距離が  $r = \sqrt{2} \sin(\theta/2)$  に点を打つ。

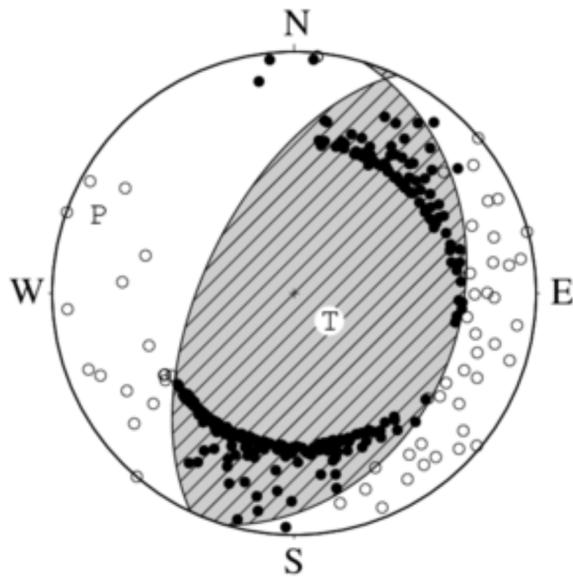


図 4.15 令和元年 6 月山形県沖の地震 (M6.7) の初動読み取りに基づく発震機構解 (気象庁ホームページより). 黒丸と白丸が下半球投影された P 波の押しと引きの方向をそれぞれ示す. 灰色の網掛け部分が観測記録を最もよく説明するダブルカップル型震源の押しの部分で, 白色と網掛けの境界線が断層面とその補助面を投影したものである. P 軸と T 軸の方向は文字で示されている.

(図??) ことによります. この手続きと同じことを多数の観測点について繰り返し, できるだけ多くの点の極性が理論極性と一致するように節面の方向を推定します (図 4.15). たとえば図 4.15 の地震の場合には, 東北東一西南西に圧縮方向を持つ逆断層であることがわかる. 断層面の候補は東に向かって低角で傾き下がるものと西に向かって高角で傾き下がるもの 2 つが候補ですが, そのどちらが本当の断層面であるかは, この図からはわかりません.

### CMT 解析と非ダブルカップル成分

ここでは断層面の剪断すべりによる地震を記載するものとしてモーメントテンソルを導入したが, もともとモーメントテンソルは**任意の**剩余応力を表現するものでした. したがって, モーメントテンソルは断層運動以外の震源も記述できる強力なものです. たとえば,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & M_0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

は, 震源において膨張 ( $M_0 > 0$ ) もしくは圧縮 ( $M_0 < 0$ ) の力が働く**等方震源**です. 等方震源は震源の体積変動を伴い, 断層運動とはまた異なった地震波の放射パターンをもつ<sup>18</sup>. さらに, 体積変動は伴わないがダブルカップルの断層運動で

<sup>18</sup> 容易に想像されるように, 完全な等方震源からは P 波しか輻射されません.

も記述できない Compensated Linear Vector Dipole (CLVD)<sup>\*19</sup> という種類の震源も存在します。これらの非ダブルカップル震源は、マグマの貫入や流体の移動など、断層の脆性破壊以外の地震のメカニズムの指標として活用されています。

地球の内部構造についての知識があれば、グリーン関数とその空間微分は事前に計算しておくことができます。たくさんの観測点における地震波形とグリーン関数の空間微分の比較をすることで、地震のモーメントテンソル成分  $M_{pq}$  を直接推定することができる。これを Centroid Moment Tensor (CMT) 解析といいます。この解析は地震波形が低周波に卓越するマグニチュード 5 程度以上の地震について定常的に行われています（図??）。

P 波極性でメカニズムを決める場合、普通は地震が断層運動であることを仮定するためダブルカップル震源しか求まりませんが、地震波の波形全体を逆問題により説明することでモーメントテンソル成分を直接推定する CMT 解析ならば、非ダブルカップル成分も推定することができます。

非ダブルカップル型の運動には、体積変動をともなう膨張・圧縮の成分と、体積は変動しないが断層運動では説明できない Comprehensive Linear Vector Dipole (CLVD) という成分があります。火山などでは断層運動で説明できないこれらの成分が卓越することがあります。一方、純粹な断層運動であっても、地球内部構造モデルの仮定が正しくないと見かけの体積変動や CLVD 成分が現れることもあります。その正確な推定は難しいようです。

## 4.4 震源スペクトルと有限断層

ダブルカップル型震源の仮定から得られた地震波の表現を通じて、観測される地震動の初動極性の空間分布から断層の方向に関わるパラメタ（走向・傾斜・方位角）が得られることを学びました。では、地震の大きさそのものについてはどうでしょうか。CMT 解析によって全モーメントテンソル成分が求められればよいですが、そうでないときにもっと簡便な指標はないのでしょうか。

実は、観測される記録のフーリエ変換の別名である**スペクトル**が有用な指標となります。ここでは、いくつかの単純なモデルで地震波形のスペクトルの特徴を調べていくことにしましょう。

### 4.4.1 震源時間関数のスペクトル

遠方における点震源の波形は、P 波について

$$u_i^{FP}(t) = \frac{\Omega_{ipq}}{4\pi\rho\alpha^3 r} m_{pq} \dot{M} \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) \quad (4.43)$$

と表されます（(4.40) 式）。ただしここで  $\Omega_{ipq} = \gamma_i \gamma_p \gamma_q$  は震源における輻射パターンを表します。また、簡単のため地震発生時刻  $\tau = 0$  としました。この式は

---

<sup>\*19</sup> この用語は日本語化されていないようです。

輻射パターンと地震波速度  $\alpha$  を S 波のものに差し替えると、そのまま S 波に対しても成立します。

地震波  $u_i^{FP}$  の時間変動は、もっぱら震源時間関数  $\dot{M}(t)$  の時間変化に依存していますね。そこで、いくつかの典型的な  $\dot{M}(t)$  の形状を仮定し、そのフーリエ変換を求めてみましょう。

### 箱型関数

震源時間関数が満たすべき条件は、時間が  $t \rightarrow \infty$ において  $M(t) \rightarrow M_0$  です ((4.39) 式)、あるいは等価な条件として

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{M}(t) dt = M_0 \quad (4.44)$$

でした。その条件を満たす最も簡単な  $\dot{M}(t)$  として、

$$\dot{M}(t) = \begin{cases} M_0/T & \text{for } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (4.45)$$

を考えましょう。これが先の条件を満たすのは積分すれば明らかです。モーメント関数  $M(t)$  は

$$M(t) = \int_{-\infty}^t \dot{M}(t') dt' \quad (4.46)$$

で与えられます<sup>20</sup>。その具体的な形は

$$M(t) = \begin{cases} M_0 t / T & \text{for } 0 \leq t \leq T, \\ M_0 & \text{else} \end{cases} \quad (4.47)$$

となります。

それでは、震源時間関数  $\dot{M}(t)$  のフーリエ変換  $\tilde{M}(\omega)$  を、その定義にのっとって計算してみましょう。

$$\tilde{M}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{M}(t) e^{i\omega t} dt \quad (4.48)$$

ここで  $\dot{M}(t)$  は  $0 \leq t \leq T$  の区間でしか値を持たないため、それ以外の区間は積分に寄与しません。結果として、震源時間関数のスペクトルは

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\omega) &= \int_0^T \frac{M_0}{T} e^{i\omega t} dt = \frac{M_0}{T} \int_0^T e^{i\omega t} dt = \frac{M_0}{T} \left[ \frac{1}{i\omega} e^{i\omega t} \right]_0^T \\ &= \frac{M_0}{T} \frac{e^{i\omega T} - 1}{i\omega} = \frac{M_0}{T} \frac{e^{i\omega T/2}}{\omega/2} \frac{e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2}}{2i} \\ &= M_0 e^{i\omega T/2} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \quad (4.49) \end{aligned}$$

であることがわかります<sup>21</sup>。

<sup>20</sup> これは微分と積分が相補的な関係であることを示す微分積分学の基本定理の一つの形です。

<sup>21</sup> スペクトルに現れた  $\sin$  関数とその引数の比の形は sinc 関数とよばれます。

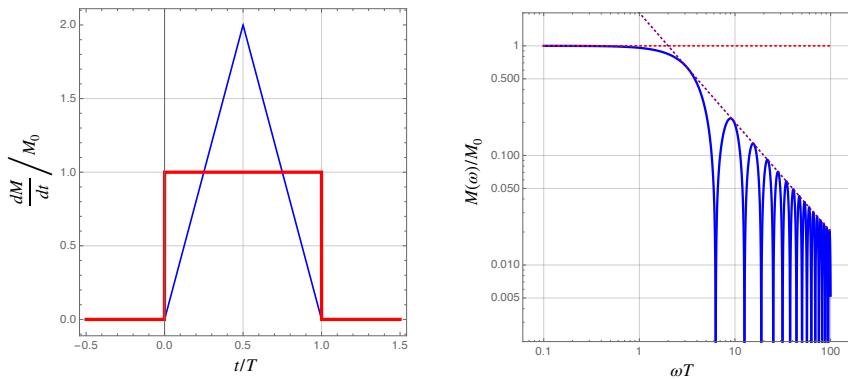


図 4.16 (左) モーメント時間関数. 箱型関数 (太線) と三角形関数 (細線). それらの面積が同じになるように調整されている. (右) 箱型関数に対する震源時間関数  $\dot{M}(t)$  とそのスペクトル形状. 点線は高周波および低周波側の包絡線 (式 (4.50)) を表す.

このスペクトル振幅を両対数表示で図 4.16 に示します. 角周波数  $\omega$  が  $1/T$  に比べて十分大きいときと小さいとき, このスペクトルの振幅はそれぞれ

$$\left| \tilde{M}(\omega) \right| \sim \begin{cases} M_0 & \text{for } \omega T \ll 1 \\ M_0 \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right| \simeq \frac{2M_0}{\omega T} & \text{for } \omega T \gg 1 \end{cases} \quad (4.50)$$

となります.  $\sin$  関数による振動の包絡線 (図中点線) の交点のことを**コーナー周波数** (あるいはコーナー角周波数) と呼びます. この場合のコーナー角周波数  $\omega_c$  は

$$\omega_c = \frac{2}{T} \quad (4.51)$$

です. つまり, 震源時間関数のスペクトルから, その低周波極限の絶対値を求めることによって地震モーメントが, 高周波におけるスペクトル振幅の傾きのコーナー周波数からは震源時間関数の継続時間が, それぞれ求まるのです.

#### 演習問題 4.10: 震源スペクトル

- (i) (4.49) 式においてその絶対値の  $\omega \rightarrow 0$  の極限を取ることにより, 震源時間関数のスペクトルの低周波極限から地震モーメントが推定できることを証明しなさい.
- (ii) 同じことを, フーリエ変換の定義

$$\tilde{M}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{M}(t) e^{i\omega t} dt \quad (4.52)$$

に直接  $\omega \rightarrow 0$  の極限をとることで示しなさい.

### 三角形関数

震源時間関数  $\dot{M}(t)$  が箱型関数であるということは、観測される P 波、S 波のパルス形状も箱型になるということ（式(4.43)）です。しかし、実際に観測される波形とはどちらかというと三角形パルスのほうがよく合っています。そこで、もうすこし複雑になりますが、

$$\dot{M}(t) = \begin{cases} 4M_0 t/T^2 & \text{for } 0 \leq t \leq T/2, \\ -4M_0 t/T^2 + 4M_0/T & \text{for } T/2 < t \leq T, \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (4.53)$$

を考えましょう（図 4.16）。積分区間が  $(-\infty, \infty)$  から  $[0, T]$  になるのは箱型関数と全く同様ですが、三角形関数の場合にはさらに積分区間を  $[0, T/2]$  と  $[T/2, T]$  に分割して、それぞれ計算する必要があります。計算は丹念に積分を実行するだけなので途中は省略して結果を示すと、

$$\tilde{M}(\omega) = M_0 e^{i\omega T/2} \frac{\sin^2(\omega T/4)}{(\omega T/4)^2} \quad (4.54)$$

となります。このときのコーナー角周波数は  $\omega_c = 4/T$  で、スペクトルの包絡線は、

$$|\tilde{M}(\omega)| \sim \frac{M_0}{1 + \omega^2/\omega_c^2} \quad (4.55)$$

のバタワース (Butterworth) 型関数で近似できることが知られています。この震源スペクトルを **オメガ<sup>2</sup>乗 ( $\omega^2$ ) モデル** と呼びます。

#### 4.4.2 有限断層の表現

一つの遠方から点とみなせる震源（点震源）における断層運動はダブルカップル力源で表されることを学んできました。しかし、地震モーメント  $M_0 = \mu D S$  に断層の面積  $S$  がかかっていることからもわかるように、地震の震源が「点」であるというのはあくまでも近似にすぎません。震源から観測点までの距離が断層の大きさよりも十分に遠ければ、断層のサイズは相対的に無視できますが、もちろんそうでない場合もあります。

地震の断層サイズは地震の規模  $M_0$  の増大とともに平均的には大きくなっています。たとえば 2011 年東北地方太平洋沖地震の震源断層は長さ約 400 km、幅約 200 km にも及びます。このような巨大な断層サイズを「点」とみなすのは、たとえ地球の裏側からだとしても難しいでしょう<sup>\*22</sup>。そこで、本節では点震源の近似をすこし緩めて、**一様な断層運動をもつ有限サイズの断層の破壊**によって生じる地震波について検討しましょう。

---

<sup>\*22</sup> とはいえる、実際の震源断層では、地震波を強く輻射する領域（アスペリティ）は断層面積の大きさとくらべてぐっと局在化しています。東北地方太平洋沖地震の場合にも、特に長周期の地震波の励起源は一点とみなしてよく近似できる、とした研究成果もあります。ここではあくまで「サイズ」だけの議論をしていると考えてください。

ここで考えるのは、長方形の断層が、その長辺に沿って端から端まで一定の速度（破壊伝播速度）で破壊が進展していく、というものです（図 4.17）。このような震源破壊モデルを、提案者の名前にちなんで**ハスケルモデル**といいます。

このモデルでは、断層運動のメカニズム（断層形状とすべりの方向、あるいは断層パラメタの走向・傾斜・方位角）はまったく同じですが、図の断層の長辺方向に沿った場所によって破壊が始まる時間が異なります。

このような場合の地震波は、それぞれの震源位置からの寄与を全部足しあわせることによって合成できます。もともとのグリーン関数を定める(4.25)式は、時間・空間的に広がった体積力の分布に対して、それぞれの場所からの観測点までの伝播がグリーン関数による重ね合わせで書ける、というものでした。ここではそれを拡張しましょう。

まず、モーメント関数  $M(t)$  を拡張して、

$$M(t) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mu D(\xi, t) d\xi \quad (4.56)$$

という断層面上での面積分で表すことにします。ここで  $D$  は断層面上の位置  $\xi$  と時刻  $t$  におけるすべり量を表す関数です。ある瞬間のすべり量を断層面上に沿って足し合せたものが  $M(t)$  になっています。積分領域は無限大ですが、これは断層面が無限に大きいということを意味しているわけではありません。一定の領域より外側では常に断層すべりが  $D = 0$  であるとして、断層面の範囲を指定できます。これに対して  $t \rightarrow \infty$  にすれば、地震モーメント  $M_0$  になるのはこれまでと同じです。この時間微分（震源時間関数）は、

$$\dot{M}(t) = \mu \iint_{-\infty}^{\infty} \dot{D}(\xi, t) d\xi \quad (4.57)$$

です。ただしここで  $\mu$  は断層面に沿って一定であるとし、積分の外にくくりだしました。

いま、断層面の長さ方向を  $\xi$  軸とし、その方向にそって原点から破壊伝播速度  $v$  で  $\xi$  の正方向に破壊が伝播するとしましょう。また、一つ一つの点での破壊は、破壊が始まった瞬間から時間  $T_r$  の箱型関数で書けるとします。さらに、断層面上の幅方向を  $\eta$  軸とします。断層の長さは  $L$ 、幅は  $W$  としましょう。このときのすべり量の分布  $\dot{D}$  は、

$$\dot{D}(\xi, \eta, t) = \frac{D_0}{T_r} B\left(t - \frac{\xi}{v}, T_r\right) B(\xi, L) B(\eta, W) \quad (4.58)$$

と書けます。ただしここで  $B$  は箱型関数

$$B(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (4.59)$$

で、また  $D_0$  は各点におけるすべり量です。式(4.58)の最初の  $B(t - \xi/v, T_r)/T_r$  はそれぞれの位置における（破壊伝播の時間遅れを考慮した）時間長  $T_r$  の破壊を、

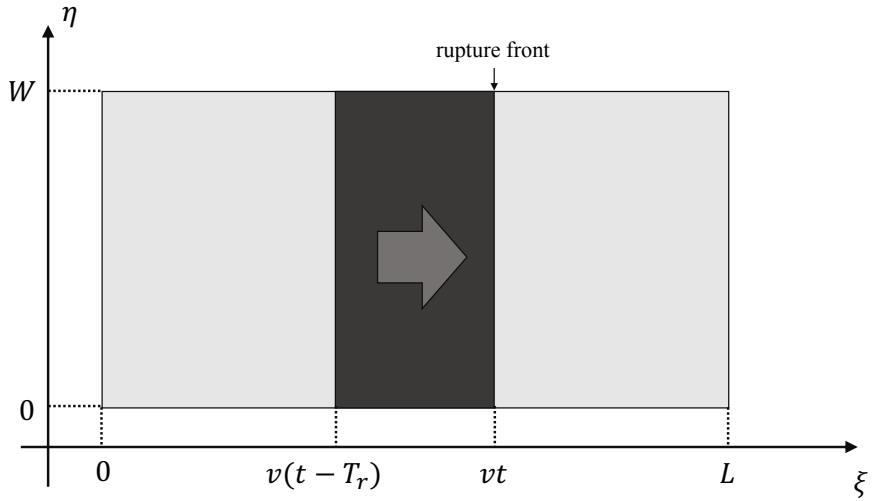


図 4.17 破壊伝播モデルのレイアウト.

残りの 2 つ  $B(\xi, L)B(\eta, W)$  は断層の長さと幅を規定する役割を持ちます。すべり量が断層面の外で常にゼロとなることで、実効的に断層面サイズが  $L \times W$  であることを表しています。震源時間関数を積分してみると、

$$\begin{aligned}\dot{M}(t) &= \mu \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{D_0}{T_r} B\left(t - \frac{\xi}{v}, T_r\right) B(\xi, L)B(\eta, W) d\xi d\eta \\ &= \frac{\mu D_0}{T_r} \left( \int_{-\infty}^{\infty} B(\eta, W) d\eta \right) \int_{-\infty}^{\infty} B\left(t - \frac{\xi}{v}, T_r\right) B(\xi, L) d\xi \\ &= \frac{\mu D_0 W}{T_r} \int_{-\infty}^{\infty} B\left(t - \frac{\xi}{v}, T_r\right) B(\xi, L) d\xi \quad (4.60)\end{aligned}$$

となります。次に、積分を破壊の先端  $\xi = vt$  に沿って行うため、 $\xi$  から  $\tau$  に変数を変換します。 $d\xi = v d\tau$  であることと、 $B(\xi, L) = B(v\tau, L) = B(\tau, L/v)$  であることを用いると、

$$\dot{M}(t) = \frac{\mu D_0 W v}{T_r} \int_{-\infty}^{\infty} B(t - \tau, T_r) B(\tau, L/v) d\tau \quad (4.61)$$

で、断層全体に破壊が行き渡る時間を  $T_d \equiv L/v$  とすると、最終的に

$$\dot{M}(t) = \mu D_0 L W \frac{1}{T_r T_d} \int_{-\infty}^{\infty} B(t - \tau, T_r) B(\tau, T_d) d\tau \quad (4.62)$$

が得られました。両辺を積分すると、 $M_0 = \mu D_0 L W = \mu D_0 S$  となって、もとの地震モーメントの定義とも整合します。

#### 4.4.3 ハスケルモデルの震源スペクトル

このモデルのスペクトルは、

$$\tilde{M}(\omega) = \mu D_0 L W \frac{\sin(\omega T_r/2)}{\omega T_r/2} \frac{\sin(\omega T_d/2)}{\omega T_d/2} \quad (4.63)$$

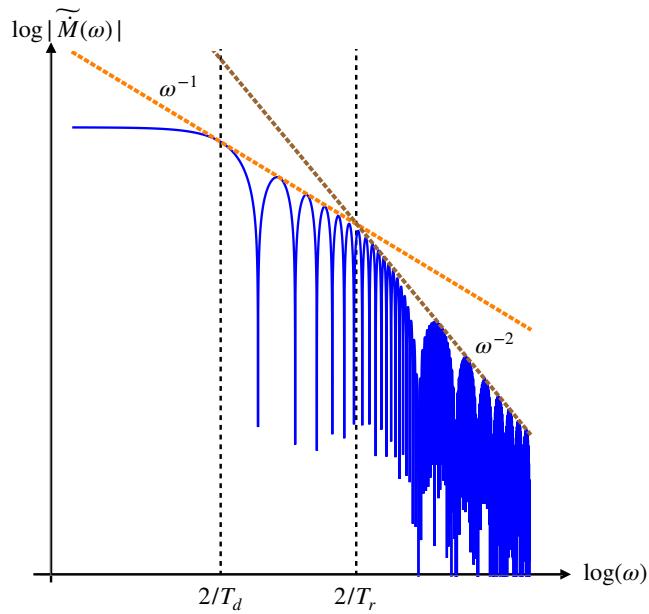


図 4.18 ハスケルモデルの震源時間関数のスペクトルの模式図。

であることが知られています。その概形は図 4.18 のようになります。

このスペクトルには、2 つの特徴的な時間としてそれぞれの点の破壊時間（ライズタイム） $T_r$  と断層全体に渡る破壊継続時間  $T_d$  があり、それぞれがスペクトルの折れ曲がり点に一致します。ただし、 $\omega \rightarrow 0$  の振幅が地震モーメント  $M_0 = \mu D_0 L W = \mu D_0 S$  に対応するという事実に変わりはありません。このような 2 つの折れ曲がり点を実際の観測データから推定するのは容易ではありません。現実的には、2 つのコーナー角周波数の間（相乗平均  $2/\sqrt{T_r T_d}$ ）を単一のコーナー角周波数として推定することが多いようです。

#### 4.4.4 ディレクティビティ

震源における震源時間関数は、有限の破壊伝播によってスペクトルのコーナーを持つことがわかりました。一方、観測点で見たときには、この破壊伝播にかかる時間の長さというのは（見かけ上）互いに異なることがあります。

簡単な例として、図 4.17 の  $\xi$  軸上の、 $\xi \gg L$  および  $\xi \ll 0$  の観測点 A, B を考えましょう。震源で破壊が  $\xi = 0$  で始まる時刻を  $t = 0$  とすると、 $t = L/v = T_d$  で  $\xi = L$  まで断層破壊が伝播します。では、 $\xi = 0$  と  $\xi = L$  で輻射された地震波（仮に速さ  $\alpha$  の P 波としよう）が観測点 A に到達する時間差はどうでしょうか。観測点位置を  $\xi = X$  とすると、 $\xi = 0$  の波は  $t = X/\alpha$  に、 $\xi = L$  の波は破壊が  $L$  まで到達する時間とそこからの距離を考えて、 $t = T_d + (X - L)/\alpha$  に到達します。そうすると、見かけの破壊継続時間は

$$T_d^{(A)} = \left( T_d + \frac{X - L}{\alpha} \right) - \frac{X}{\alpha} = T_d - \frac{L}{\alpha} = L \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (4.64)$$

のように、真の破壊継続時間より短くなるのです。一方、 $\xi \ll 0$  の観測点 B においては、

$$T_d^{(B)} = L \left( \frac{1}{v} + \frac{1}{\alpha} \right) \quad (4.65)$$

のように見かけの破壊継続時間が長くなってしまいます。このことが、観測される記録のスペクトル形状（と振幅）に大きな影響を及ぼします。これを、地震波輻射の**ディレクティビティ（指向性）**と呼びます。方向によって見かけの破壊継続時間が異なりますが、その中で解放される地震モーメントは  $M_0$  で共通です。そのため、見かけの継続時間が短いほどその最大振幅は大きく、逆に継続時間が長いほど小さくなります。それだけではなく、ディレクティビティは地震波の卓越周波数にも影響を及ぼします。継続時間の長短に応じて、震源スペクトル（図 4.18）のコーナー周波数  $2/T_d$  の位置が変化するのです。見かけの継続時間の短くなる破壊の進行方向ではコーナー周波数が高く、結果として観測される地震動の卓越周波数も高くなります。逆に、破壊が遠ざかる方向に位置する観測点においては卓越周波数は低下します。これは空中の音波におけるドップラー効果と同じ現象です。

## 4.5 断層パラメタとスケーリング則

これまでで、震源を記述する主なパラメタとして、

- 走向・傾斜・すべり角  $(\phi_S, \delta_S, \lambda_S)$ ：断層形状とすべり方向
- 断層長さ  $L$ , 幅  $W$ , すべり量  $D$
- モーメントテンソル  $M_{ij}$

といった断層の形状と運動を規定するパラメタ<sup>23</sup>、

- モーメント関数  $M(t)$  と震源時間関数  $\dot{M}(t)$
- ライズタイム  $T_r$ , 破壊継続時間  $T_d$
- 破壊伝播速度  $v_r$

といった断層破壊の時系列に関する関数とそのパラメタが現れました。震源時間関数の面積（時間積分）あるいは  $M(\infty)$  が地震モーメントに一致すること、長方形の断層では  $M_0 = \mu D S = \mu D L W$  であることも学びました。

では、震源を特徴づけるこれら数多くのパラメタは、みな独立なのでしょうか。観測された地震波形の解析結果から、実は、特定のパラメタ間には一定の関係があることが知られています。これを**スケーリング則**と呼びます。主なスケーリング則には、

1.  $L \sim 2 \times W$
2.  $D \propto L$

---

<sup>23</sup> モーメントテンソルには断層運動の大きさも入っているが便宜上ここに分類しました。

$$3. T_r \propto T_d$$

があります。それぞれ

1. 断層長は断層幅の倍程度の値を取る<sup>24</sup>.
2. 断層長の大きな地震は断層のすべり量も大きい。
3. 断層全体が破壊するのにかかる継続時間  $T_d$  が長いと断層上一点の破壊にかかる時間（ライズタイム） $T_r$  も長い。

ということを意味しています。地震モーメント  $M_0$ （あるいはモーメントマグニチュード  $M_W$ ）が大きな地震というのは、断層すべり  $D$  も断層長と幅  $L, W$  もみな大きくなることによって  $M_0$  が大きくなるのであって、どれか一つが極端に大きいあるいは小さいということはめったに起こらないのです。このことは、断層運動は、その大きさにかかわらず同じようなふるまいをする、**自己相似性**のある現象であることを示唆しています。

スケーリング則は、単に 1 組のパラメタ間の関係を規定するだけにとどまりません。それぞれのパラメタが他の関係式を通じてさらに様々なスケーリング則を演繹することができます。その一例として、コーナー周波数のスケーリング則を導いてみましょう。

いま、ある地震（断層サイズ  $S = LW$ 、すべり量  $D$ 、地震モーメント  $M_0$ ）A と、断層長が  $b$  倍になった別の地震 B との関係を考えます。地震 B ではスケーリング則から断層幅  $W' = bW$ 、すべり量  $D' = bD$  が期待されるので、その断層面積  $S'$  は

$$S' = L'W' = b^2S \quad (4.66)$$

また地震モーメントは

$$M'_0 \sim \mu(bD)(bL)(bW) = b^3\mu DLW = b^3M_0 \quad (4.67)$$

となります。この 2 つから、地震モーメントは断層面積  $S$  に対して

$$M_0 \propto S^{3/2} \quad (4.68)$$

というあらたなスケーリング則が得られました。

一方で断層長が  $b$  倍になったので、（破壊伝播速度が大きく変わらないとする）破壊継続時間は  $T'_d \sim bT_d$  になるでしょう。破壊継続時間とライズタイムのスケーリング則から、 $T'_r \sim bT_r$  も言えます。ライズタイムとコーナー周波数は反比例しますから、地震 B のコーナー周波数  $f'_c$  は地震 A のコーナー周波数  $f_c$  と比べて

$$f'_c = f_c/b \quad (4.69)$$

---

<sup>24</sup> これには例外も多く、特に内陸の巨大地震については幅に上限があるらしいこともわかってきています。

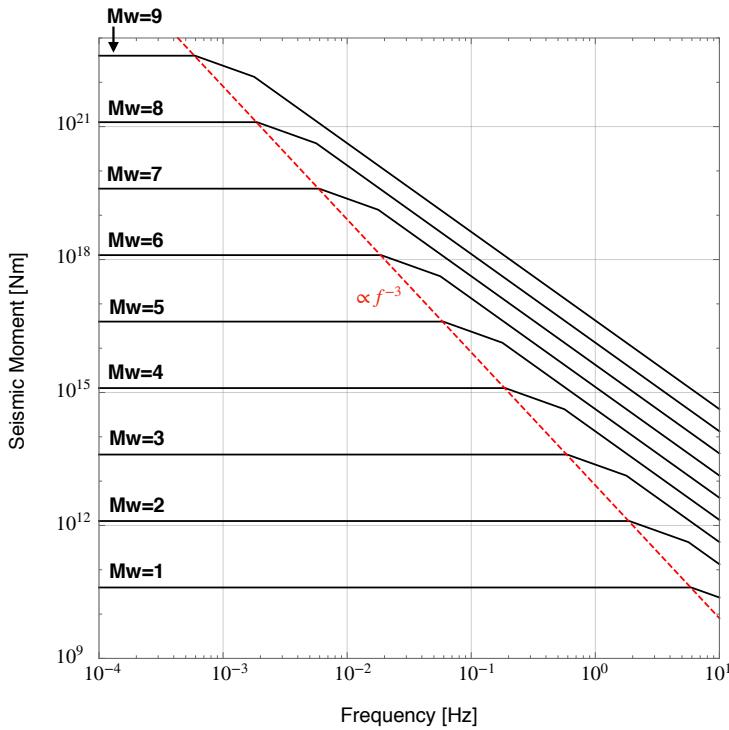


図 4.19 スケーリング則とハスケルモデルから期待される  $M_w = 1 \sim 9$  の震源時間関数スペクトルの形状。

となります。式(4.67)と(4.69)とから、

$$\frac{f'_c}{f_c} = \left( \frac{M_0}{M'_0} \right)^3 \quad (4.70)$$

つまり、

$$f_c \propto M_0^{-1/3} \quad (4.71)$$

なるスケーリング則が得られました。マグニチュードが大きくなるほど、その地震モーメントの  $1/3$  乗に比例してコーナー周波数が小さくなることが期待されます。この結果は、大雑把に言うと**地震が大きいほど低周波が卓越する**、ということを示しています。図 4.19 にハスケルモデルから期待される表面波<sup>25</sup>と実体波の震源時間関数のスペクトル形状を示します。地震モーメントが大きくなると、スペクトルの低周波極限の振幅が増大します。しかし、スケーリング則によって地震モーメントの増大とともにコーナー周波数が低下します。その結果、高周波地震波のスペクトル振幅は、地震モーメント（あるいはマグニチュード）が大きくなつてもあまり変わらないのです。逆に、観測される地震波形は、マグニチュードが大きくなるほど低周波の振幅が卓越するようになります。

<sup>25</sup> 表面波から得られる震源スペクトルについては本書では扱っていませんが、P・S 波（実体波）と同様に、その波形のスペクトルから震源時間関数を抽出することができます。

もし低周波信号を観測できない短周期地震計で地震波の振幅を観測したとするとき、一定以上のマグニチュードでは、観測される振幅がマグニチュードとともに増大しなくなる頭打ち現象が起こります。気象庁マグニチュードに代表される特定の周期の地震波振幅に基づいて推定されるマグニチュードにはこの頭打ちの問題がついてまわり、一定以上大きな地震のマグニチュードを正しく推定できないことが知られています。モーメントマグニチュードは地震モーメントの値そのものを推定するので、この問題は起こりません。しかし、その推定には地震波形解析が必要で、速報性には欠けるのです。

スケーリング則について、ひとつ注意すべきことがあります。それは、これらはあくまでオーダーを推定する程度の法則であり、個々の地震についてはばらつきがとても大きいのだ、ということです。たとえば  $L \sim 2W$  が成り立っているべきだから  $L = 3W$  には絶対ならないかというと、そんなことはありません。ですが、 $L = 200W$  の地震、というのではないだろう、というくらいのものと考えるのがよいでしょう。

地震一つ一つは複雑な現象ですが、スケーリング則は**複雑な地震現象が持つ共通の特徴**といえるものです。しかし、普通の地震が満たすスケーリング則に従わない振動現象群が存在することもわかつてきました。それが**スロー地震**とよばれる一連の現象です。スロー地震は西南日本のフィリピン海プレートの沈み込み帯に代表される世界中の（比較的）若い沈み込み帶で特に活発に発生する現象です。西南日本においては、過去の南海・東南海地震の震源域を取り囲むように深部低周波微動（卓越 2-10 Hz 程度）・超低周波地震（卓越 20-50 s 程度）そして数週間（場所によっては数ヶ月）にわたって継続するスロースリップイベントとよばれる現象が、数ヶ月に一度の頻度で発生しています。これらの地震モーメントと継続時間  $T_d$  との関係は、通常の地震では  $T_d \propto M_0^{1/3}$  となるべき<sup>26</sup>ところ、スロー地震では  $T_d \propto M_0$  となることが明らかにされました。どうやら様々なスロー地震はそれら同士が**普通の地震とは異なる共通の特徴**を持つ現象であるらしいのです。これらのスロー地震が一体なぜ起ころのか、あるいは隣接する南海・東南海地震のような巨大地震発生との関係については、現在も活発に研究が進められているところです。

## 4.6 署み込みと震源・地球内部構造・地震観測

これまでの議論でしばしば現れた形の積分

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \equiv f(t) * g(t) \quad (4.72)$$

は**署み込み積分** (convolutional integral) と呼ばれ、そのスペクトルに特別な性質があります。

---

<sup>26</sup>  $T_d \propto 1/f_c$  である。

$C(t)$  のフーリエ変換を求めてみよう。

$$\begin{aligned}\tilde{C}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} C(t)e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)e^{i\omega t} d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}e^{i\omega\tau} d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{i\omega(t-\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau dt \quad (4.73)\end{aligned}$$

ここで  $s = t - \tau$  の変数変換をすると、

$$\tilde{C}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\omega(s)} ds \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau = \tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega) \quad (4.74)$$

となり、なんと関数  $f$  と  $g$  のフーリエ変換のただの掛け算になってしまいました。周波数領域での 2 つの関数の掛け算は時間領域でそれらの畳込みになります。

#### 演習問題 4.11: 畳み込み

逆に、時間領域での 2 つの関数の掛け算  $f(t)g(t)$  は、周波数領域での畳込み積分になります。上記の議論の  $t$  と  $\omega$  を入れ替えることにより、これを示しなさい。

このような関係を満たす関数の一つに、グリーン関数があります。グリーン関数 (4.26) の右辺は、すべて時間と震源における破壊時間の差である  $t - \tau$  の組み合わせでできています。空間位置についても、均質媒質の場合には観測点位置と震源位置との差ベクトル（の絶対値） $r = |\mathbf{x} - \xi|$  だから  $\mathbf{x} - \xi$  だけで記述できます。ということは、グリーン関数は  $G_{ik}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) = G_{ik}(\mathbf{x} - \xi, t - \tau)$  という 2 つの相対距離・相対時刻だけで記述できるのです。すると、力源  $f_k$  によって作られる地震波は、グリーン関数によって

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{ik}(\mathbf{x} - \xi, t - \tau) f_k(\xi, \tau) d\tau d\xi \quad (4.75)$$

と書けます。これは、時間・空間双方についての畳込みなのだ。ということは、地震波を時間と空間についてフーリエ変換すると、それは（震源の項に関わるスペクトル）×（伝播に関わるグリーン関数のスペクトル）という単純な掛け算で表せるということになる<sup>27</sup>。

さらに、観測点における真の地動変位  $\mathbf{u}$  と地震計によって得られた記録  $\xi$  との関係は、地震計の特性  $R$  を用いて周波数領域で

$$\tilde{\xi}(\omega) = R(\omega)\tilde{u}(\omega) \quad (4.76)$$

---

<sup>27</sup> 現実の複雑な地球では空間方向にはもっと複雑で、単純な畳み込みでは記述できません。しかし、時間についてはかわらず畳み込み積分で表現できます。

と書けたのでした（第2章）<sup>\*28</sup>。ということはこれもまた罠み込みで、時間領域では

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t - \tau) u(\tau) d\tau \quad (4.77)$$

と書くことができます。

したがって、地震の記録は、震源の効果（Source effect） $S(t)$ 、地中の伝播経路の効果（Path effect） $P(t)$ 、そして観測の効果（Instrumental effect） $I(t)$ <sup>\*29</sup>3つの効果すべての罠込みとして、

$$\xi(t) = I(t) * P(t) * S(t) \quad (4.78)$$

のように形式的に表されます<sup>\*30</sup>。観測記録のなかには、震源の情報、地球内部構造と波動伝播の情報、浅部の增幅効果や観測機器の影響の情報、すべてが渾然一体として含まれているのです。そのような複雑な記録から、あるときは震源での効果を、またあるときは構造の影響だけを効果的に抽出する方法が様々に存在します。複雑な地震波形記録から創意工夫によって地震現象や地球内部に関する様々な情報が取り出せることは、地震学の大きな学問的魅力である、と言えるでしょう。

<sup>\*28</sup> 第2章では簡単のため单一成分のスカラー量だけを扱ったが、ここでは地動変位も地震計出力も3成分をもつベクトルとして扱っている。

<sup>\*29</sup> 本書では地震計の応答の効果しか扱いませんでしたが、地殻浅部での地震波の增幅効果をサイト增幅特性として、それより深部の構造とは別扱いすることもあります。その場合にはサイト增幅の効果も罠み込みに含まれ、ます。

<sup>\*30</sup> あくまでも「形式的」な表現なので、ベクトルであることを無視しています。



## 参考文献

- Aki, K. and P. G. Richards (2002), *Quantitative Seismology*, University Science Books.
- Birch, F. (1961), The velocity of compressional waves in rocks to 10 kilobars: 2., *Journal of Geophysical Research*, 66(7), 2199–2224, doi:10.1029/jz066i007p02199.
- Gutenberg, B. and C. F. Richter (1955), Magnitude and energy of earthquakes, *Nature*, 176(4486), 795–795, doi:10.1038/176795a0.
- Koto, B. (1893), On the cause of the great earthquake in central Japan, 1891, *The Journal of the College of Science, Imperial University, Japan*, 5, 295–353.
- Wessel, P., W. H. F. Smith, R. Scharroo, J. Luis, and F. Wobbe (2013), Generic Mapping Tools: Improved Version Released, *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 94(45), 409–410, doi:10.1002/2013EO450001.
- 中島淳一・三浦哲 (2014), 『弾性体力学：変形の物理を理解するために』, フロー式物理演習シリーズ 16, 共立出版。
- 長谷川昭・佐藤春夫・西村太志 (2015), 『地震学』, 現代地球科学入門シリーズ, 共立出版。



## Appendix A

# ギリシャ文字とその用法

ここでは地震学を中心とした地球物理学の用例を主に示します。()内の文字は数式にはあまり用いられません。[]内は異体字です。

大文字	小文字	読み方	使われ方の例
(A)	$\alpha$	アルファ	小文字はP波速度に用いられる。
(B)	$\beta$	ベータ	小文字はS波速度に用いられる。
$\Gamma$	$\gamma$	ガンマ	$\Gamma$ 関数・工学的剪断ひずみ $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ .
$\Delta$	$\delta$	デルタ	微小量を表す。大文字は震央距離にも用いられる。
(E)	$\epsilon [\varepsilon]$	イプシロン	微小量の表示。小文字はひずみテンソルに用いられる。
(Z)	$\zeta$	ゼータ	—
(H)	$\eta$	イータ	粘性率に用いることがある。
$\Theta$	$\theta$	シータ	角度変数に用いられる。
(I)	$\iota$	イオタ	—
(K)	$\kappa$	カッパ	体積弾性率に用いる。
(\Lambda)	$\lambda$	ラムダ	波長、ラメの定数。
(M)	$\mu$	ミュー	ラメの定数(剛性率)。
(N)	$\nu$	ニュー	ポアソン比。
(\Xi)	$\xi$	グザイ	—
(O)	$\circ$	オミクロン	—
$\Pi$	$\pi$	パイ	小文字は円周率、大文字は積和記号。
(P)	$\rho$	ロー	小文字は質量密度として用いる。
$\Sigma$	$\sigma$	シグマ	大文字は和記号、小文字は応力テンソルに用いられる。
(T)	$\tau$	タウ	小文字は応力テンソルとして用いられる。
(\Upsilon)	$\upsilon$	ウプシロン	—
$\Phi$	$\phi [\varphi]$	ファイ	角度変数・ポテンシャル関数。
(X)	$\chi$	カイ/チー	SH波のポテンシャル関数に用いることがある。
$\Psi$	$\psi$	プサイ	角度変数やポテンシャル関数に用いる。
$\Omega$	$\omega$	オメガ	小文字は角周波数に用いる。