Die Black-Scholes-Optionspreisformel –

Eine Herleitung mit Hilfe des Prinzips der risikoneutralen Bewertung

von

Lutz Hahnenstein, Sascha Wilkens und Klaus Röder*

– Fassung vom 11. Dezember 2000 –

* Dipl.-Kfm. Lutz Hahnenstein und Dipl.-Wirtschaftsmath. Sascha Wilkens, wissenschaftliche Mitarbeiter am Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre, insbesondere Finanzierung der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, Universitätsstraße 14-16, 48143 Münster, Tel.: (0251) 83-22026 und -22455, Fax: (0251) 83-22690, e-mail: 16luha@wiwi.uni-muenster.de und 16sawi@wiwi.uni-muenster.de.

Prof. Dr. Klaus Röder, Inhaber des Lehrstuhls für Betriebswirtschaftslehre, insbesondere Finanzierung der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, Universitätsstraße 14-16, 48143 Münster, Tel.: (0251) 83-22033, Fax: (0251) 83-22690, e-mail: Klaus.Roeder@wiwi.uni-muenster.de.

Inhalt

1. Einführung

Eine Option gibt ihrem Inhaber das Recht, ein bestimmtes Gut (Basisinstrument oder Underlying) zu einem vorab festgelegten Preis (Basispreis oder Strike) innerhalb oder am Ende einer bestimmten Frist (Laufzeit) zu erwerben oder zu veräußern. Steht dem Inhaber das Recht auf den Erwerb des Gutes zu, so liegt eine Kaufoption (Call), andernfalls eine Verkaufsoption (Put) vor. Falls das Recht während der gesamten Laufzeit in Anspruch genommen werden darf, spricht man von einer amerikanischen Option; eine europäische Option kann vom Inhaber ausschließlich am Verfalltag ausgeübt werden. Als Underlying börsengehandelter Optionen sind insbesondere Aktien, Devisen, Rohstoffe bzw. Waren und Zinsinstrumente gebräuchlich. Daneben besitzen jedoch auch andere, nicht notwendigerweise börsengehandelte Zahlungsansprüche den Charakter von Optionen. So kann etwa das Eigenkapital einer haftungsbeschränkten Kapitalgesellschaft als Call auf das gesamte Unternehmensvermögen gedeutet werden. Wird eine Zahlungsverpflichtung an die Gläubiger fällig, die den Wert des gesamten Unternehmensvermögens überschreitet, so verfällt der Anspruch der Eigentümer wertlos. Auch die für eine Unternehmung bestehende Möglichkeit, ein bestimmtes Investitionsprojekt durchzuführen, kann als (Real-)Option interpretiert werden. In diesem umfassenderen Sinne können letztlich alle bedingten Ansprüche (engl.: state contingent claims) auf zukünftige Zahlungen als Optionen bzw. Portfolios aus Optionen aufgefasst werden.

Das Problem der Bestimmung eines theoretisch richtigen, „fairen“ Preises für derartige bedingte Ansprüche ist Gegenstand der Optionspreistheorie, die für viele Bereiche der betrieblichen Finanzwirtschaft große Bedeutung besitzt und deren Erkenntnisse in jüngster Zeit auch zunehmend auf die Investitionstheorie ausstrahlen. Im Jahre 1973 erzielten *Fischer Black* und *Myron Scholes* in der Entwicklung einer Lösung für das Optionsbewertungsproblem einen entscheidenden Durchbruch. Ihre mittlerweile berühmte Black-Scholes-Formel stellt bis heute das zentrale Werkzeug zur Optionsbewertung in einem zeitstetigen Modellrahmen dar. In Anerkennung seiner Verdienste wurde *Myron Scholes* im Jahre 1997 – zusammen mit *Robert C. Merton*, der ebenfalls als einer der Väter der modernen Optionspreistheorie angesehen werden kann und der u. a. für seine ebenfalls 1973 publizierten Modellpräzisierungen und -ergänzungen geehrt wurde – mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet. *Fischer Black* wurde die Ehrung nur deshalb nicht zuteil, weil er im Jahre 1995 verstarb (vgl. *Wenger/Kaserer*, 1998, S. 29).

Obwohl die Black-Scholes-Formel aufgrund ihrer immensen Bedeutung für Theorie und Praxis mittlerweile einen festen Platz im Curriculum der betrieblichen Finanzwirtschaft einnimmt, bleibt der Zugang zu dieser immer noch vielen Studierenden, Praktikern und Lehrenden verschlossen. Die Formel selbst wird häufig als „black box" empfunden. Dies hat seine Ursache in den anspruchsvollen mathematischen Hilfsmitteln und Notationen (z. B. die Wärmeaustauschgleichung der Physik oder die stochastische Integrationstheorie mit dem sog. Itô-Theorem), die in den Originalbeiträgen von *Black/Scholes* (1973) und *Merton* (1973) verwendet werden. Angesichts dieser Schwierigkeiten wird in der deutschsprachigen Lehrbuchliteratur zur betrieblichen Finanzwirtschaft teilweise auf eine Herleitung ganz verzichtet (vgl. z. B. *Drukarczyk*, 1993, S. 608 f.; *Kruschwitz*, 1999, S. 266 f.), teilweise wird eine solche nur bruchstückhaft präsentiert (vgl. z. B. *Perridon/Steiner*, 1999, S. 325 ff.; *Franke/Hax*, 1999, S. 369 ff. oder *Spremann*, 1996, S. 647 ff.). *Uhlir/Steiner* (2000, S. 238 ff. i. V. m. 323 ff.) leiten in ihrem Lehrbuch zur Wertpapieranalyse die Black-Scholes-Formel in Anlehnung an *Cox/Ross/Rubinstein* (1979) als Grenzfall aus dem auf *Sharpe* (1978, S. 366 f.) zurückgehenden binomialen Optionspreismodell her. Auch die beiden „klassischen" Einführungsbeiträge zur Optionspreistheorie von *Kruschwitz/Schöbel* (1984) und *Kesting/Schulte-Mattler* (1992a, 1992b) stellen das Binomialmodell zur Verdeutlichung der Grundidee in den Mittelpunkt und gehen auf den komplexen Grenzübergang zur Black-Scholes-Formel nur am Rande ein, da dieser wiederum eine Vielzahl mathematischer Sätze und Hilfsmittel erfordert (vgl. zu einer präzisen Darstellung z. B. *Musiela/Rutkowski*, 1998, S. 40 ff.).

In diesem Beitrag wird dagegen eine direkte Herleitung der Black-Scholes-Formel zur Bewertung einer Kaufoption europäischen Typs auf eine Aktie vorgestellt, die auf dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung basiert und die mit elementaren mathematisch-statistischen Hilfsmitteln auskommt. Diese Art der Bewertung, deren Grundgedanke auf *Cox/Ross* (1976) zurückgeht, wird deshalb als „risikoneutral" bezeichnet, weil die Bestimmung des theoretisch richtigen Barwertes eines bedingten Anspruchs unter bestimmten Bedingungen ohne Beschränkung der Allgemeinheit unter der Fiktion erfolgen kann, dass alle Wirtschaftssubjekte risikoneutral wären. Eine

Formel für die korrespondierende europäische Verkaufsoption kann leicht analog oder mit Hilfe der sog. Put-Call-Parität gewonnen werden. Die in dem Lehrbuch zur Kapitalmarkttheorie von *Loistl* (1993, S. 188 ff.) präsentierte, auf *Borch* (1984) zurückgehende Herleitung weist mit dem hier beschrittenen Vorgehen insofern eine gewisse Ähnlichkeit auf, als auch dort die Annahme eines log-normalverteilten Aktienkurses den Ausgangspunkt bildet und von der Substitutionsregel der Integralrechnung Gebrauch gemacht wird. Allerdings fehlt dort der Bezug zum Prinzip der risikoneutralen Bewertung. Ein solcher findet sich in den englischsprachigen Lehrbüchern zu Finanzderivaten von *Stoll/Whaley* (1993, S. 200 ff.) und *Hull* (2000, S. 251 i. V. m. S. 268 ff.). Die dort präsentierten Darstellungen sind jedoch sehr unübersichtlich und zudem fehlerhaft.

Das Ziel dieses Beitrags besteht darin, eine Herleitung der Black-Scholes-Formel zu liefern, die auf dem ökonomisch einleuchtenden Prinzip der risikoneutralen Bewertung basiert und von einem (angehenden) Wirtschaftswissenschafter mit mathematisch-statistischer Grundausbildung nachvollzogen werden kann. Der Beitrag will die bereits existierenden einführenden Beiträge durch das Aufzeigen eines alternativen, stärker wahrscheinlichkeitstheoretisch geprägten Zugangs zu diesem zentralen Resultat der Optionspreistheorie ergänzen und damit auch eine Lücke in der (Lehrbuch-)Literatur schließen.

Zunächst wird die im Modell unterstellte Aktienkursverlaufshypothese näher erläutert (Abschnitt 2.1). Aus der formalen Darstellung der Kursdynamik resultiert dabei eine sehr einfache Verteilungsannahme für den zukünftigen Aktienkurs. Im Anschluss wird das Prinzip der risikoneutralen Bewertung vorgestellt, dessen Anwendbarkeit für die Herleitung gegeben sein muss (Abschnitt 2.2). Abschnitt 3 bildet mit der direkten Entwicklung der Black-Scholes-Formel aus den Annahmen den Kern des Beitrags. Die Ausführungen werden anhand eines durchgehenden Zahlenbeispiels verdeutlicht. Abschnitt 4 enthält einige abschließende Bemerkungen zu den Anwendungsgebieten der Black-Scholes-Formel sowie den Forschungsrichtungen im Bereich der Derivate.

2. Annahmen

2.1. Modellierung des Aktienkurses

2.1.1. Geometrische Brownsche Bewegung

Der Preis bzw. Kurs einer Aktie A im Zeitpunkt $t \in [0; T]$ sei im Folgenden mit S_t bezeichnet. T kennzeichnet den Zeitpunkt, an dem die zu bewertende europäische Call-Option auf diese Aktie verfällt. Der Zeitraum $T - t$ soll – wie in der Praxis üblich – in Jahren gemessen werden. Im Zeitpunkt t ist zwar der aktuelle Aktienkurs auf dem Wertpapiermarkt beobachtbar, die aus Sicht dieses Zeitpunkts in der Zukunft liegenden Kurse sind im Zeitpunkt t jedoch unsicherheitsbehaftet. Um eine konkrete Formel für die Bewertung der Option im Zeitpunkt $t = 0$ ableiten zu können, ist eine – nach Möglichkeit realitätsnahe und mathematisch einfach handhabbare – Annahme über die zukünftige Aktienkursentwicklung unabdingbar. Für die hier betrachtete europäische Option mit Fälligkeit im Zeitpunkt $t = T$ ist es dabei von zentraler Bedeutung, eine Aussage über die Verteilung des Aktienkurses bei Fälligkeit (S_T) treffen zu können.

Die Normalverteilung mit Mittelwert a und Varianz b^2 sei im Weiteren mit $N(a; b^2)$ bezeichnet, Dichte- und Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung seien durch

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad \text{und} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\, du \qquad (1)$$

definiert.

Die Modellierung der Entwicklung des Aktienkurses im Zeitablauf erfolgt mit Hilfe eines stochastischen Prozesses. Um einen solchen realitätsnah zu konstruieren, wird unterstellt, dass der Aktienkursverlauf einem Trend sowie einem unsicheren Einfluss

(„Noise“) unterliegt. Konkret wird ein auch als *Brownsche Bewegung* (kurz: BM, engl.: Brownian Motion) bekannter Prozess der Form

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz \quad \text{mit} \quad \mu \in IR\,, \ \sigma > 0 \tag{2}$$

angenommen. Die stochastische Differentialgleichung (2) charakterisiert das Verhalten der *relativen Aktienkursänderung* bzw. der *Aktienrendite* im Zeitablauf. Die beiden Parameter μ und σ werden als Drift bzw. Volatilität bezeichnet. Hier soll lediglich eine intuitive Interpretation von (2) anhand der Betrachtung eines kleinen Zeitintervalls Δt erfolgen. (Vgl. z. B. *Klump*, 1985, S. 183, zur genauen Definition und den Eigenschaften der BM vgl. z. B. *Hull*, 2000, S. 220 ff. oder *Nielsen*, 1999, S. 5 ff.)

Mit ΔS_t als Kursänderung in einem kleinen Zeitintervall Δt – z. B. gemessen als Bruchteil eines Jahres – gilt:

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \Delta z \quad \Leftrightarrow \quad \Delta S_t = \mu \cdot S_t \cdot \Delta t + \sigma \cdot S_t \cdot \Delta z\,. \tag{3}$$

Ausgehend von einem im Zeitpunkt t beobachtbaren Aktienkurs S_t wird erwartet, dass sich dieser innerhalb von Δt zum einen um $\mu \cdot S_t \cdot \Delta t$ ändert – die Größe $\mu \cdot \Delta t$ ist also der Erwartungswert der Aktienrendite für ein Zeitintervall Δt. Zusätzlich zu diesem Trend unterliegt der Aktienkurs einem zufälligen Einfluss: Definiert man die Größe Δz über

$$\Delta z := \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t} \quad \text{mit} \quad \varepsilon \sim N(0;1)\,, \tag{4}$$

so gibt $\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}$ die Standardabweichung der Aktienrendite im Zeitintervall $\sqrt{\Delta t}$ an. Zusammenfassend ist damit festzuhalten, dass die relative Aktienkursänderung bzw. die Aktienrendite innerhalb eines kleinen Zeitintervalls Δt gemäß

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta S_t}{S_t} \sim N\left(\mu \cdot \Delta t; \sigma^2 \cdot \Delta t\right) \tag{5}$$

einer Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu \cdot \Delta t$ und Varianz $\sigma^2 \cdot \Delta t$ unterliegt.

Der Ausdruck (2) beschreibt das Rendite- und damit auch das Kursverhalten der Aktie beim Grenzübergang $\Delta t \to 0$, d. h. für ein infinitesimales Fortschreiten der Zeit. Somit gibt μ in (2) den Erwartungswert der stetigen Aktienrendite an. (Vgl. zur stetigen Verzinsung etwa *Luderer/Würker*, 1997, S. 102 f.). Für den Aktienkurs selbst wird damit ein exponentieller Kursverlauf erwartet. σ ist für $\Delta t \to 0$ als sog. Momentan-Standardabweichung der stetigen Aktienrendite zu deuten.

Der Aktienkursprozess, der sich aus der Renditemodellierung gemäß (2) ergibt, wird auch als *Geometrische Brownsche Bewegung* (kurz: GBM, engl.: Geometric Brownian Motion) bezeichnet. Es sei angemerkt, dass der Grund für die Modellierung der Aktienrendite gemäß (2) bzw. (3) anstatt des eigentlichen Aktienkursprozesses darin zu sehen ist, dass bei der Annahme einer BM für die Aktienrendite das Auftreten negativer Aktienkurse ausgeschlossen ist.

Beispiel. *Abb. 1* zeigt den simulierten Kursverlauf für eine Aktie A, deren Kursentwicklung binnen eines Jahres – ausgehend von einem aktuellen Kurs von $S_0 = 100$ (GE) – durch eine GBM mit den Parametern $\mu = 12\,\%$ p.a. und $\sigma = 20\,\%$ p. a. (bei stetiger Verzinsung) beschrieben wird.

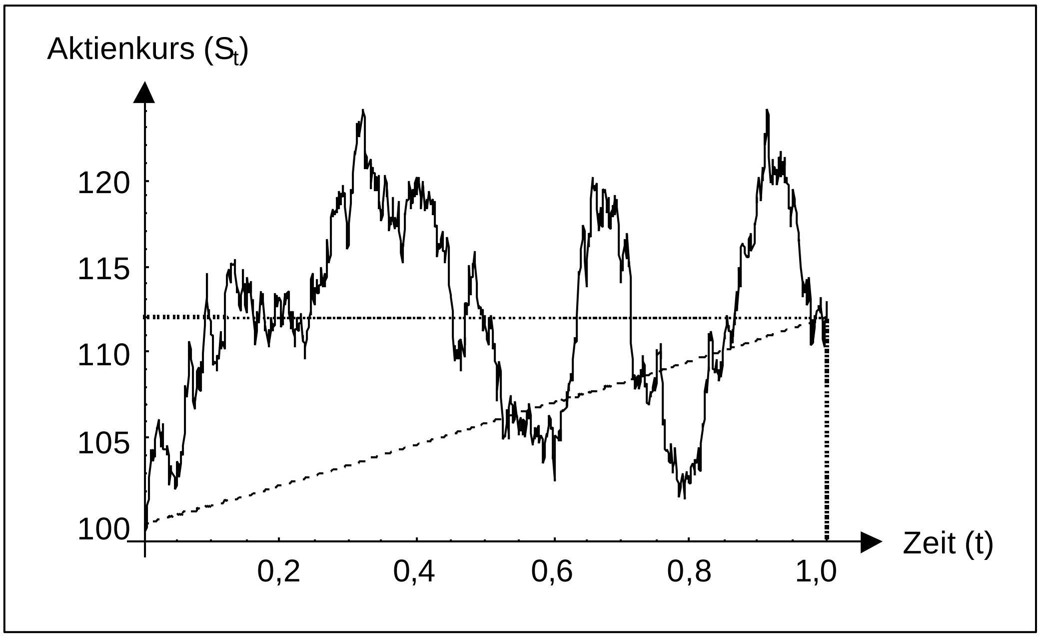

Abb. 1: Geometrische Brownsche Bewegung als Modellprozess für die Aktienkursentwicklung

2.1.2. Log-normalverteilte Aktienkurse

Nachdem im vorigen Abschnitt die Modellierung des Aktienkurses eingeführt wurde, wird im Folgenden der logarithmierte Aktienkursprozess betrachtet, aus dem Typ und Parameter der Kursverteilung im Fälligkeitszeitpunkt T der Option unmittelbar ablesbar sind. Mit Hilfe des sog. Lemmas von Itô (vgl. z. B. *Hull*, 2000, S. 229 ff., *Nielsen*, 1999, S. 52 ff. oder *Klump*, 1985, S. 183 ff.) kann aus (2) die Prozessgleichung für $\ln(S_t)$ als

$$d\ln(S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot dt + \sigma \cdot dz \tag{6}$$

bestimmt werden. Während bei der Modellierung gemäß (2) eine BM für die stetige Aktienrendite unterstellt wurde, erhält man über (6) eine BM für den logarithmierten Aktienkurs selbst – beide Prozesse beschreiben dabei jedoch denselben Aktienkursverlauf.

Für die angestrebte Bewertung der europäischen Kaufoption wird lediglich eine Aussage über die Aktienkursveränderung zwischen $t = 0$ und $t = T$ benötigt. Wie hier nicht näher dokumentiert werden soll (vgl. dazu z. B. *Hull*, 2000, S. 225 ff.), folgt aus den elementaren Eigenschaften des Prozesses (6):

$$\ln(S_T) \sim N\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T; \sigma^2 \cdot T\right). \tag{7}$$

D. h. der logarithmierte Aktienkurs am Verfalltag der Option, $\ln(S_T)$, ist normalverteilt mit den Parametern

$$E(\ln(S_T)) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T \text{ und} \tag{8}$$

$$\mathrm{Var}(\ln(S_T)) = \sigma^2 \cdot T. \tag{9}$$

(Vgl. zu diesen Parametern z. B. auch *Franke/Hax*, 1999, S. 369 oder *Loistl*, 1993, S. 193 u. 195.)

Um nun mit Hilfe von (7) zu einer Aussage über die Verteilung von S_T zu gelangen, vergegenwärtige man sich, dass eine Zufallsvariable genau dann log-normalverteilt ist, wenn ihr Logarithmus naturalis $\ln(S_T)$ normalverteilt ist – mit den Parametern $E(\ln(S_T))$ und $Var(\ln(S_T))$. Für die standardisierte Zufallsvariable folgt dann eine Standard-Normalverteilung:

$$\frac{\ln(S_T)-E(\ln(S_T))}{\sqrt{Var(\ln(S_T))}} \sim N(0;1). \tag{10}$$

Mit P als Wahrscheinlichkeitsmaß gilt für die Verteilungsfunktion $G(s_T)$ der Zufallsvariablen S_T (vgl. z. B. *Bosch*, 1992, S. 275, 263; im Weiteren werden Zufallsvariablen mit Großbuchstaben, Realisationen mit Kleinbuchstaben bezeichnet):

$$G(s_T) = P(S_T \le s_T) = P(\ln(S_T) \le \ln(s_T)) = \Phi\left(\frac{\ln(s_T) - E(\ln(S_T))}{\sqrt{Var(\ln(S_T))}}\right). \tag{11}$$

Über $\ln(x)' = \frac{1}{x}, x > 0$ erhält man unter Beachtung der Tatsache, dass die Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung φ der ersten Ableitung der Verteilungsfunktion Φ entspricht, mittels Kettenregel aus (11) die ausschließlich für positive Werte erklärte Dichtefunktion $g(s_T)$ des log-normalverteilten Aktienkurses zur Zeit T zu

$$g(s_T) = G'(s_T) = \varphi\left(\frac{\ln(s_T)-E(\ln(S_T))}{\sqrt{Var(\ln(S_T))}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{Var(\ln(S_T))}} \cdot \frac{1}{s_T}, \tag{12}$$

bzw. ausgeschrieben:

$$g(s_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot Var(\ln(s_T))}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln(s_T)-E(\ln(S_T)))^2}{2 \cdot Var(\ln(S_T))}\right) \cdot \frac{1}{s_T},\ s_T > 0. \tag{13}$$

Einsetzen von (8) und (9) führt auf:

$$g(s_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln\left(\frac{s_T}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \right)^2 \right) \cdot \frac{1}{s_T}, \quad s_T > 0. \tag{14}$$

Formel (14) zeigt noch einmal, dass gemäß der Modellierung nach Abschnitt 2.1.1. lediglich Aktienkursen größer null eine positive Wahrscheinlichkeitsmasse zugeordnet wird. Man beachte, dass im Gegensatz zur Normalverteilung für die Log-Normalverteilung aufgrund ihrer Rechtsschiefe Mittelwert, Median und Modus nicht übereinstimmen – vgl. hierzu auch die nachfolgende *Abb. 2*.

Ein Call wird am Verfalltag nur dann ausgeübt, wenn die Realisation des Aktienkurses über dem Basispreis K liegt, d. h. die Option am Verfalltag einen positiven inneren Wert $(S_T - K)$ besitzt; andernfalls verfällt der Call wertlos. Die Ausübungswahrscheinlichkeit lässt sich aus der Verteilungseigenschaft des Aktienkurses durch Einsetzen von (8) und (9) in (11) sowie aufgrund der Symmetrie der Standard-Normalverteilung, $1 - \Phi(u) = \Phi(-u)$, wie folgt ermitteln:

$$\begin{aligned} P(S_T > K) &= 1 - G(K) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(K) - E(\ln(S_T))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\ln(S_T))}} \right) \\ &= \Phi\left(-\frac{\ln(K) - \ln(S_0) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \right) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \right). \end{aligned} \tag{15}$$

Beispiel. Betrachtet werde erneut die Aktie A; die modelltheoretische Verteilung des Aktienkurses in einem Jahr $(t = 1)$ ist in *Abb. 2* veranschaulicht. Zu bestimmen sei nun die Ausübungswahrscheinlichkeit für eine in einem Jahr verfallende europäische Call-Option auf die Aktie A bei einem Basispreis von $K = 110$.

Einsetzen der gegebenen Werte in (15) liefert

$$P(S_T > 110) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{100}{110}\right) + \left(0{,}12 - \frac{0{,}2^2}{2}\right) \cdot 1}{0{,}2\sqrt{1}}\right) \approx \Phi(0{,}0234) \approx 0{,}5093 \mathrel{\hat{=}} 50{,}93\,\%\,.$$

Die Ausübungswahrscheinlichkeit ist in *Abb. 2* als Fläche unter der Dichtefunktion $g(s_T)$ gekennzeichnet.

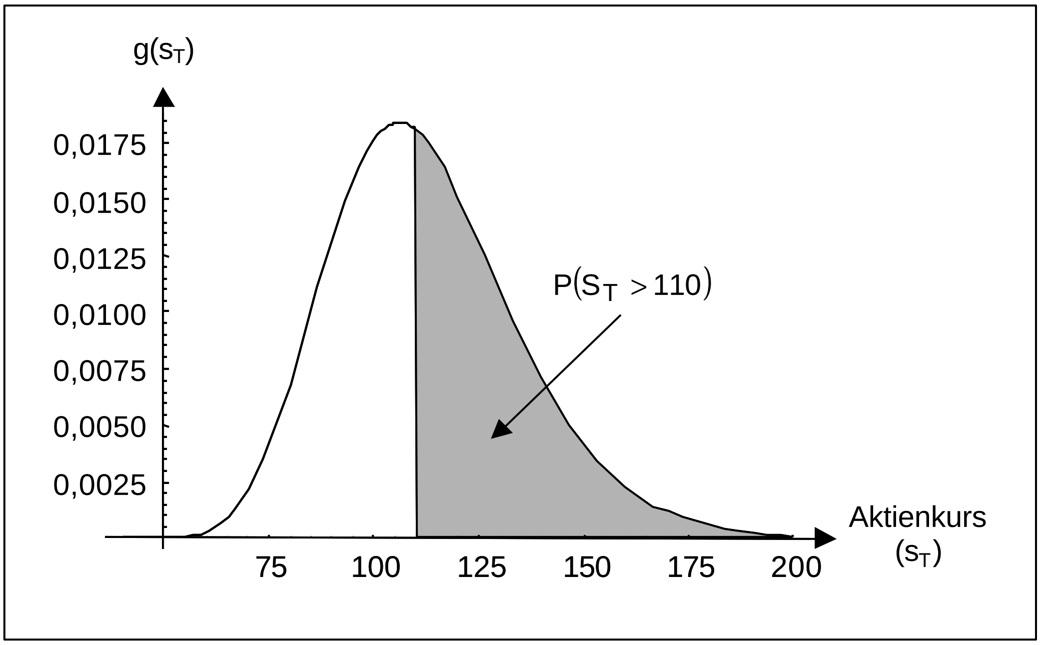

Abb. 2: Modelltheoretische Log-Normalverteilung des Aktienkurses

2.2. ANWENDBARKEIT DES PRINZIPS DER RISIKONEUTRALEN BEWERTUNG

Nachdem die Frage nach der unterstellten Verteilung des Aktienkurses bei Fälligkeit der Option geklärt ist, wollen wir uns dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung zuwenden, welches insbesondere unter folgenden Annahmen anwendbar ist:

- Auf dem Wertpapiermarkt wird neben einer Aktie A auch ein risikoloses Wertpapier mit konstanter, sicherer stetiger Verzinsung r gehandelt.

- Der Handel auf dem betrachteten Wertpapiermarkt verläuft kontinuierlich, d. h. ohne zeitliche Unterbrechungen, und vollkommen friktionsfrei. Insbesondere existieren keine Transaktionskosten und Steuern.

- Beide Wertpapiere sind beliebig teilbar und Leerverkäufe sind uneingeschränkt möglich. Weiter sei von Dividendenzahlungen in der Periode $[0;T]$ abstrahiert.

- Der Kurs der Aktie A folgt einer durch (2) bzw. (6) beschriebenen GBM.

Der Wert einer europäischen Kaufoption auf die Aktie A mit Basispreis K ist im Fälligkeitszeitpunkt T eine unsicherheitsbehaftete Größe, die mit C_T bezeichnet sei. Dieser hängt von der Höhe des Aktienkurses S_T bei Fälligkeit ab. Es gilt:

$$C_T = \max(S_T - K; 0). \tag{16}$$

Gesucht ist der theoretisch richtige, „faire“ Wert der Kaufoption C_0 im Zeitpunkt t = 0, d. h. derjenige Preis, zu dem diese Kaufoption in $t = 0$ auf dem Wertpapiermarkt gehandelt werden müsste.

Wenn ein aus der Aktie A und dem risikolosen Wertpapier zusammengesetztes Portfolio konstruiert werden kann, welches sich im Zeitablauf derart umschichten lässt, dass das Portfolio bei Fälligkeit der Kaufoption in $t = T$ bei jeder möglichen Aktienkursrealisation genau den gleichen Wert besitzt wie die Kaufoption, dann muss der gesuchte Preis der Kaufoption dem Preis in $t = 0$ dieses Portfolios entsprechen. Man spricht von einem selbstfinanzierenden Duplikations- oder Replikationsportfolio bzw. auch von einer Bewertung durch Duplikation. Der Preis der Kaufoption ergibt sich aus dem Gesetz des Einheitspreises („law of one price“), wonach identische Zahlungsansprüche bei Arbitragefreiheit den gleichen Preis aufweisen müssen. Wäre dieses Gesetz verletzt und würde die Kaufoption zu einem anderen als genau diesem Preis gehandelt, so könnten rational handelnde Marktteilnehmer, die die Fehlbewertung unmittelbar erkennen würden, risikolose Arbitragegewinne realisieren.

Derartige Profitmöglichkeiten können auf einem friktionsfreien Wertpapiermarkt jedoch nicht (dauerhaft) existieren.

Aus einer bestehenden Duplikationsmöglichkeit ergibt sich für die Bewertung der Call-Option folgende Konsequenz: Wenn tatsächlich ein die Kaufoption duplizierendes Portfolio aus Aktie und risikolosem Wertpapier konstruiert werden kann, dann muss der Preis der Option bei *jeder* möglichen Risikoneigung der Marktteilnehmer dem Preis dieses Duplikationsportfolios entsprechen. Die Präferenzen der Marktteilnehmer spiegeln sich lediglich im Aktienkurs S_0 und im risikolosen Zinssatz r wider und gehen damit nur indirekt in den fairen Call-Preis C_0 ein. Insofern spielt die Risikoneigung der Marktteilnehmer für die Bewertung der Call-Option keine Rolle; diese ist präferenzfrei. Insbesondere kann unter diesen Umständen bei der Bewertung der Call-Option ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch Risikoneutralität der Wirtschaftssubjekte unterstellt werden (vgl. *Cox/Ross*, 1976, S. 153; *Trautmann*, 1995, Sp. 1481). Die Fiktion einer risikoneutralen Welt stellt dann keine Beeinträchtigung der Aussagekraft des Bewertungsergebnisses dar, so dass die sich einstellenden Bewertungsergebnisse nicht nur in einer risikoneutralen, sondern auch in der realen Welt gelten (vgl. *Hull*, 2000, S. 249).

Bei der nachfolgenden Herleitung der Black-Scholes-Formel zur Bewertung der Call-Option wird eine risikoneutrale Welt unterstellt. Damit wäre eigentlich zunächst einmal zu zeigen, wie das selbstfinanzierende Duplikationsportfolio, dessen Existenz für die Gültigkeit des nachfolgend ermittelten Optionspreises in der realen Welt unterstellt werden muss, aussieht und wie es in Abhängigkeit von der Aktienkursentwicklung im Zeitablauf umgeschichtet wird. Da dieser Nachweis selbst, der auf den eingangs dieses Abschnitts genannten Eigenschaften des betrachteten Wertpapiermarkts und der Annahme einer GBM für den Aktienkurs basiert und der für die Optionspreistheorie zweifellos von fundamentaler Bedeutung ist, jedoch für die nachfolgende Herleitung nicht benötigt wird (und zudem mathematisch anspruchsvoll ist), sei hier nur auf die Literatur (vgl. *Irle*, 1998, S. 231 ff.) verwiesen.

3. Herleitung

Der faire Preis C_0 einer europäischen Call-Option zum Zeitpunkt $t = 0$, die in $t = T$ zum Kauf einer Aktie A zum Basispreis K berechtigt, kann grundsätzlich bestimmt werden, indem der Erwartungswert des Wertes der Call-Option bei Fälligkeit mit einem stetigen risikoadjustierten Zinssatz s auf den Zeitpunkt $t = 0$ diskontiert wird:

$$C_0 = e^{-s \cdot T} \cdot E(C_T). \qquad (17)$$

Dabei bezeichnet $E(\,.\,)$ den Erwartungswertoperator. Der Kalkulationszinssatz s spiegelt den Erwartungswert der Rendite einer Alternativanlage gleichen Risikos wider. Dieser – auch als Risikozuschlagsmethode bekannte – Bewertungsansatz stellt eine in der Investitionstheorie sehr gebräuchliche Vorgehensweise dar. Der Erwartungswert des Wertes der Call-Option bei Fälligkeit ist leicht zu bestimmen. Mit $g(s_T)$ als Dichtefunktion der log-normalverteilten Zufallsvariablen S_T aus Formel (6) ergibt sich der Erwartungswert von C_T zu (vgl. zum Erwartungswert der Funktion einer Zufallsvariablen z. B. *Bosch*, 1992, S. 198 ff.):

$$\begin{aligned} E(C_T) = E(\max(S_T - K; 0)) &= \int_0^\infty \max(s_T - K; 0) \cdot g(s_T)\, ds_T \\ &= \int_K^\infty (s_T - K) \cdot g(s_T)\, ds_T. \end{aligned} \qquad (18)$$

Fraglich ist allerdings, wie der für (17) benötigte, dem Risiko der Call-Option adäquate Zinssatz s bestimmt werden soll. Hier hilft die Fiktion einer risikoneutralen Welt weiter: Wenn auf dem betrachteten Wertpapiermarkt alle Teilnehmer risikoneutral wären, existierten keine Risikoprämien. Die Erwartungswerte der Renditen aller gehandelten Wertpapiere entsprächen dem risikolosen Zins (vgl. *Cox/Ross,* 1976, S. 153). Damit entspräche auch der für die Call-Option adäquate risikoadjustierte Zinssatz s dem stetigen risikolosen Zinssatz r:

$$s = r. \qquad (19)$$

Wird auch bei der Bestimmung des Erwartungswerts des Call-Werts die Fiktion einer risikolosen Welt zugrunde gelegt und der Erwartungswertoperator in einer risikoneutralen Welt mit $\hat{E}(.)$ bezeichnet, so ergibt sich der gesuchte Call-Wert zu (vgl. *Hull*, 2000, S. 251; *Irle*, 1998, S. 154; *Smithson*, 1998, S. 225 sowie auch *Nippel*, 1996, S. 110):

$$C_0 = e^{-r \cdot T} \cdot \hat{E}(C_T). \tag{20}$$

Man kann den Erwartungswert in einer risikoneutralen Welt (kurz: den risikoneutralen Erwartungswert) als Sicherheitsäquivalent deuten. Um dieses zu ermitteln, ist anstelle der realen Dichtefunktion $g(S_T)$ die risikoneutrale Dichtefunktion $\hat{g}(S_T)$, d. h. die sich unter der Fiktion allgemeiner Risikoneutralität ergebende Dichtefunktion zu verwenden. Da in einer risikoneutralen Welt keine Risikoprämien existieren, entspricht auch der Erwartungswert der stetigen Rendite der Aktie A dem risikolosen Zinssatz:

$$\mu = r. \tag{21}$$

Mit (21) erhält man aus (14) die folgende risikoneutrale Dichtefunktion des Aktienkurses bei Fälligkeit der Option:

$$\hat{g}(s_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln\left(\frac{s_T}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \right)^2 \right) \cdot \frac{1}{s_T}, \quad s_T > 0. \tag{22}$$

Die risikoneutrale Ausübungswahrscheinlichkeit einer europäischen Call-Option ergibt sich mit $\hat{P}$ für das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß durch die Verwendung von (22) in (15):

$$\hat{P}(S_T > K) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}\right). \tag{23}$$

Beispiel. Bei einem risikolosen stetigen Zins von $r = 4\,\%$ p. a. erhält man für die Option aus dem vorigen Beispiel über (23) eine risikoneutrale Ausübungswahrscheinlichkeit von

$$\hat{P}(S_T > 110) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{100}{110}\right) + \left(0{,}04 - \frac{0{,}2^2}{2}\right) \cdot 1}{0{,}2\sqrt{1}}\right) \approx \Phi(-0{,}3766) \approx 0{,}3523 \mathrel{\hat{=}} 35{,}23\,\%.$$

Abb. 3 zeigt den Zusammenhang zwischen der Aktienkursverteilung im realen und im risikoneutralen Fall anhand der Kursmodellierung aus den vorigen Beispielen: Wie die logarithmische Notierung des Aktienkurses auf der Abszisse deutlich werden lässt, bewirkt der Übergang von der realen in eine risikoneutrale Welt lediglich eine Linksverschiebung der Dichtefunktion der Aktienkursverteilung (vgl. zu einer ähnlichen Darstellung etwa *Pfennig*, 1998, S. 42 ff.). Der Verschiebung der Dichtefunktion liegt eine Transformation der Brownschen Bewegung nach (6) zugrunde, die zwar die Drift verändert – $\left(\mu - \sigma^2/2\right)$ wird in $\left(r - \sigma^2/2\right)$ überführt –, jedoch ohne Auswirkungen auf die Volatilität bleibt. (Dieser Umstand kann formal mit Hilfe des Satzes von Girsanov gezeigt werden; vgl. *Irle*, 1998, S. 153 f. sowie ausführlich *Zimmermann*, 1998, S. 134 ff.)

Damit erklärt sich auch die rechnerisch festgestellte geringere Ausübungswahrscheinlichkeit des Calls bei Risikoneutralität; die Differenz $P(S_T > K) - \hat{P}(S_T > K)$ ist in *Abb. 3* als Fläche gekennzeichnet.

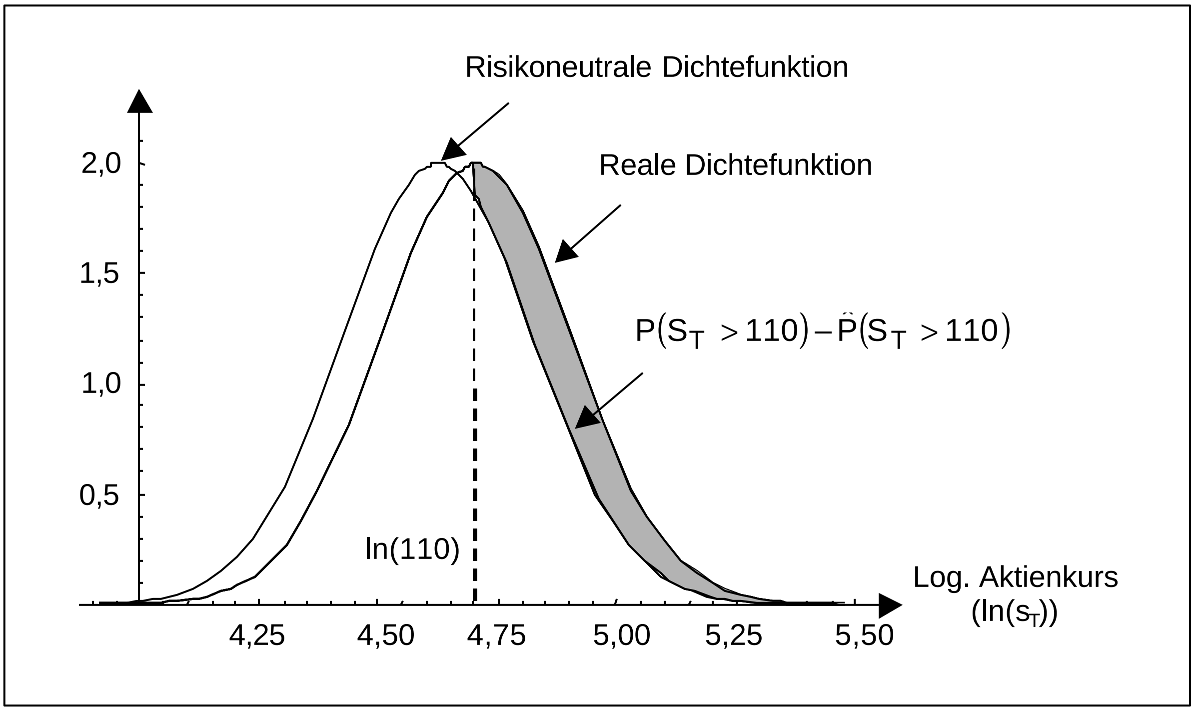

Abb. 3: Risikoneutrale Bewertung durch Verschiebung der Dichtefunktion für die logarithmierten Aktienkurse

Analog zu (18) ergibt sich mit (22) der risikoneutrale Erwartungswert von C_T zu:

$$\hat{E}(C_T) = \int_K^\infty (s_T - K) \cdot \hat{g}(s_T)\, ds_T = \int_K^\infty s_T \cdot \hat{g}(s_T)\, ds_T - K \cdot \int_K^\infty \hat{g}(s_T)\, ds_T \,. \qquad (24)$$

Um zum Optionswert C_0 zu gelangen, ist dieser Ausdruck gemäß (21) mit dem risikolosen Zinssatz r zu diskontieren:

$$\boxed{C_0 = e^{-r \cdot T} \cdot \hat{E}(C_T) = \underbrace{e^{-r \cdot T} \cdot \int_K^\infty s_T \cdot \hat{g}(s_T)\, ds_T}_{=:B_1} - K \cdot e^{-r \cdot T} \cdot \underbrace{\int_K^\infty \hat{g}(s_T)\, ds_T}_{=:B_2} \,. \qquad (25)}$$

Formel (25) lässt den ökonomischen Kern der Black-Scholes-Optionspreisformel transparent werden: Der faire Optionspreis C_0 ist nichts anderes als der mit Hilfe des risikolosen Zinssatzes ermittelte Barwert eines Sicherheitsäquivalents. Dieses Sicherheitsäquivalent ist der unter der Fiktion allgemeiner Risikoneutralität ermittelte Erwartungswert des Wertes der Call-Option bei Fälligkeit.

Nachfolgend werden die Terme B_1 und B_2 näher betrachtet und mit Hilfe der risikoneutralen log-normalen Aktienkursverteilung explizit berechnet. Als Ergebnis dieser Umformungen ergibt sich die Black-Scholes-Optionspreisformel.

Für B_2 erhält man durch Einsetzen von (22):

$$\begin{aligned} B_2 &= \int_K^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot s_T \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln\left(\frac{s_T}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \right)^2 \right) ds_T \\ &= \int_K^\infty \frac{1}{s_T \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} \cdot \varphi\left(\frac{\ln\left(\frac{s_T}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \right) ds_T. \end{aligned} \tag{26}$$

Nun wird das Argument von φ durch v ersetzt. Mit Hilfe der Substitutionsregel (vgl. etwa *Luderer/Würker*, 1997, S. 367 f.) erhält man:

$$\begin{aligned} v = f(s_T) &:= \frac{\ln(s_T) - \ln(S_0) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \quad \wedge \\ \frac{dv}{ds_T} &= \frac{1}{s_T \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} \Leftrightarrow s_T \cdot \sigma \cdot \sqrt{T} \cdot dv = ds_T. \end{aligned} \tag{27}$$

und damit bei Verwendung der Symmetrieeigenschaft der Standard-Normalverteilung folgenden Ausdruck für (26):

$$\int_{f(K)}^{\infty} \varphi(v)\,dv = \int_{\frac{\ln(K)-\ln(S_0)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}}^{\infty} \varphi(v)\,dv = 1-\int_{-\infty}^{\frac{\ln(K)-\ln(S_0)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}} \varphi(v)\,dv$$

$$= 1-\Phi\left(\frac{\ln(K)-\ln(S_0)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}\right) = \Phi\left(-\frac{\ln(K)-\ln(S_0)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}\right) \tag{28}$$

$$= \Phi\underbrace{\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}\right)}_{:=d_2}.$$

Nun betrachte man den Term B_1 und setze wiederum (22) ein:

$$B_1 = e^{-r\cdot T}\cdot\int_K^{\infty}\frac{s_T}{\sqrt{2\pi}\cdot s_T\cdot\sigma\cdot\sqrt{T}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\ln\left(\frac{s_T}{S_0}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}\right)^2\right)ds_T$$

$$= e^{-r\cdot T}\cdot\int_K^{\infty}\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{T}}\cdot\varphi\left(\frac{\ln\left(\frac{s_T}{S_0}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}\right)ds_T. \tag{29}$$

Auch hier wird gemäß (27) substituiert. Allerdings ist zusätzlich das verbleibende s_T unter Verwendung der Umkehrfunktion zu f folgendermaßen zu ersetzen:

$$s_T = f^{-1}(v) = \exp\left(\sigma\cdot\sqrt{T}\cdot v+\ln(S_0)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T\right)$$

$$= S_0\cdot\exp\left(\sigma\cdot\sqrt{T}\cdot v+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T\right). \tag{30}$$

Die Variablensubstitution in (29) liefert folgendes Ergebnis:

$$e^{-r \cdot T} \cdot \int_{f(K)}^{\infty} f^{-1}(v) \cdot \varphi(v)\, dv$$

$$= e^{-r \cdot T} \cdot S_0 \cdot e^{r \cdot T} \cdot \int_{\frac{\ln(K) - \ln(S_0) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\infty} \exp\left(\sigma \cdot \sqrt{T} \cdot v - \frac{\sigma^2 \cdot T}{2} \right) \cdot \varphi(v)\, dv \,. \tag{31}$$

Durch Ausschreiben der Funktion φ und Zusammenfassen der Exponentialterme erhält man mittels binomischer Formel:

$$\begin{aligned} &\frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\frac{\ln(K) - \ln(S_0) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2} + \sigma \cdot \sqrt{T} \cdot v - \frac{\sigma^2 \cdot T}{2} \right) dv \\ &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\frac{\ln(K) - \ln(S_0) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}}^{\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{2} \left(v - \sigma \cdot \sqrt{T} \right)^2 \right) dv. \end{aligned} \tag{32}$$

Mit einer zweiten Substitution,

$$u = v - \sigma \cdot \sqrt{T} \quad \wedge \quad \frac{du}{dv} = 1 \Leftrightarrow du = dv \,, \tag{33}$$

ergibt sich aus (32):

$$\frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\frac{\ln(K) - \ln(S_0) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} - s \cdot \sqrt{T}}^{\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{2} u^2 \right) du = S_0 \cdot \int_{\frac{\ln(K) - \ln(S_0) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T - \sigma^2 \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}}^{\infty} \varphi(u)\, du \quad . \tag{34}$$

Mit den bereits aus der Behandlung von B_2 bekannten Umformungen erhält man schließlich:

$$S_0 \cdot \left(1 - \int_{-\infty}^{\frac{\ln(K) - \ln(S_0) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}} \varphi(u)\, du \right) = S_0 \cdot \Phi\left(- \frac{\ln(K) - \ln(S_0) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \right)$$

$$= S_0 \cdot \Phi\underbrace{\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \right)}_{:= d_1}. \tag{35}$$

Damit ist gezeigt, dass sich (25) in die nachfolgende Darstellung überführen lässt:

$$C_0 = S_0 \cdot \Phi(d_1) - K \cdot e^{-r \cdot T} \cdot \Phi(d_2) \text{ mit} \tag{36}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \text{ und } d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}\,.$$

Das Ergebnis der Umformungen entspricht der Black-Scholes-Formel (vgl. *Black/Scholes*, 1973, S. 644, Gleichung (13)).

Beispiel. Für die europäische Aktien-Call-Option aus den vorigen Beispielen erhält man mit Hilfe von (36) einen Wert von

$$\begin{aligned} C_0 &= 100 \cdot \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{100}{110}\right) + \left(0{,}04 + \frac{0{,}2^2}{2}\right)\cdot 1}{0{,}2\sqrt{1}} \right) - 110 \cdot e^{-0{,}04 \cdot 1} \cdot \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{100}{110}\right) + \left(0{,}04 - \frac{0{,}2^2}{2}\right)\cdot 1}{0{,}2\sqrt{1}} \right) \\ &\approx 100 \cdot \Phi(-0{,}1766) - 110 \cdot e^{-0{,}04} \cdot \Phi(-0{,}3766) \\ &\approx 100 \cdot 0{,}4299 - 110 \cdot 0{,}9608 \cdot 0{,}3532 \\ &\approx 5{,}66 \text{ (GE)}. \end{aligned}$$

4. Schlussbetrachtung

Abschließend sei noch einmal darauf hingewiesen, dass eine in Anlehnung an *Cox/Ross* (1976) unter der Fiktion allgemeiner Risikoneutralität vorgenommene Bewertung nur dann auch zu außerhalb einer risikoneutralen Welt gültigen Ergebnissen führt, wenn die Möglichkeit der Duplikation des zu bewertenden Anspruchs besteht und wenn zudem Arbitragefreiheit herrscht. Nur unter diesen Umständen lässt sich der faire Preis allein aus den exogen gegebenen Preisen anderer Wertpapiere ermitteln. Diese Bedingung lässt bereits die prinzipiellen Grenzen optionspreistheoretischer Bewertung sichtbar werden: Wenn die Bewertung eines Anspruchs durch Duplikation möglich ist, dann ist dieser letztlich redundant. Insofern stellt die Black-Scholes-Formel ein Instrument zur Ableitung fairer Preise von Optionen dar, deren Existenz bei Unterstellung der Richtigkeit der Modellannahmen nicht gerechtfertigt werden kann. Jeder Marktteilnehmer könnte dann nämlich die von ihm gewünschte Option aus Underlying und risikolosem Wertpapier – quasi als „homemade option" – selbst herstellen. Ein eigenständiger Handel von Optionskontrakten wäre überflüssig. Die Notwendigkeit, Optionen als eigenständige Wertpapiere zu handeln, besteht nur dann, wenn diese gerade nicht aus anderen gehandelten Wertpapieren perfekt dupliziert werden können. Ist dies jedoch der Fall, so ist das Black-Scholes-Bewertungsergebnis grundsätzlich anzuzweifeln (vgl. zu dieser Dilemma-Situation *Zimmermann*, 1998, S. 240 f.).

Trotz der offenkundigen, realiter vorliegenden Prämissenverletzungen erfreut sich die Black-Scholes-Formel in der Praxis großer Beliebtheit und ihr Anwendungsgebiet wurde bzw. wird im Laufe der Zeit immer weiter ausgedehnt (vgl. etwa zur Bewertung von realen, mit Investitionsprojekten verbundenen Handlungsspielräumen *Brealey/Myers*, 2000, S. 619 ff., sowie zur Berechnung von Prämien für Kreditausfallrisiken im Bankgeschäft *Hartmann-Wendels/Pfingsten/Weber*, 2000, S. 667 ff.). Daneben kommt insbesondere den numerischen Verfahren zur Wertevaluierung bei komplex strukturierten Derivaten, z. B. pfadabhängigen Optionen auf mehrere Underlyings, eine große praktische Bedeutung zu, da hier in der Regel keine geschlossenen Bewertungsformeln gefunden werden können (vgl. hierzu z. B. *Wilkens*, 2000). Einen aktuellen Überblick über die seit den bahnbrechenden Beiträgen von

Black/Scholes (1973) und *Merton* (1973) rapide angewachsene optionspreistheoretische Forschung vermitteln die Beiträge von *Chance* (1999) und *Sundaresan* (2000).

Literatur

Black, F./Scholes, M., The Pricing of Options and Corporate Liabilities, in: Journal of Political Economy, Vol. 81 (1973), S. 637-654.

Borch, K., A Note on Option Prices, in: The Financial Review, Vol. 12 (1984), S. 124-127.

Bosch, K., Statistik-Taschenbuch, München/Wien 1992.

Brealey, R./Myers, S., Principles of Corporate Finance, 6th ed., Boston u. a. 2000.

Chance, D., Research Trends in Derivatives and Risk Management since Black-Scholes, in: The Journal of Portfolio Management, Vol. 25 (1999), S. 35-45.

Cox, J./Ross, S., The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, in: Journal of Financial Economics, Vol. 3 (1976), S. 145-166.

Cox, J./Ross, S./Rubinstein, M., Option Pricing: A simplified Approach, in: Journal of Financial Economics, Vol. 7 (1979), S. 229-263.

Drukarczyk, J., Theorie und Politik der Finanzierung, München 1993.

Franke, G./Hax, H., Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt, 4. Aufl., Berlin u. a. 1999.

Hartmann-Wendels, T./Pfingsten, A./Weber, M., Bankbetriebslehre, 2. Aufl., Berlin u. a. 2000.

Hull, J., Options, Futures, & Other Derivatives, 4th ed., Upper Saddle River 2000.

Irle, A., Finanzmathematik. Die Bewertung von Derivaten, Stuttgart 1998.

Kesting, H./Schulte-Mattler, H., Herleitung der Black-Scholes-Formel aus dem binomialen Optionspreismodell, in: WiSt – Wirtschaftswissenschaftliches Studium, 21. Jg. (1992a), S. 167-171.

Kesting, H./Schulte-Mattler, H., Das binomiale Optionspreismodell, in: WiSt – Wirtschaftswissenschaftliches Studium, 21. Jg. (1992b), S. 211-215.

Klump, R., Wiener-Prozesse und das Itô-Theorem, in: WiSt – Wirtschaftswissenschaftliches Studium, 14. Jg. (1985), S. 183-185.

Kruschwitz, L./Schöbel, R., Eine Einführung in die Optionspreistheorie, (I), (II) und (III), in: WISU – Das Wirtschaftsstudium, 13. Jg. (1984), S. 68-72, S. 116-121 und S. 171-176.

Loistl, O., Kapitalmarkttheorie, 3. Aufl., München/Wien 1994.

Luderer, B./Würker, U., Einstieg in die Wirtschaftsmathematik, 2. Aufl., Stuttgart 1997.

Merton, R., Theory of Rational Option Pricing, in: The Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4 (1973), S. 141-183.

Musiela, M./Rutkowski, M., Martingale Methods in Financial Modelling, 2nd ed., Berlin u. a. 1998.

Nielsen, L., Pricing and Hedging of Derivative Securities, Oxford 1999.

Nippel, P., Alternative Sichtweisen der Marktbewertung im CAPM, in: WiSt – Wirtschaftswissenschaftliches Studium, 25. Jg. (1996), S. 106-111.

Perridon, L./Steiner, M., Finanzwirtschaft der Unternehmung, 10. Aufl., München 1999.

Pfennig, M., Optimale Steuerung des Währungsrisikos mit derivativen Instrumenten, Wiesbaden 1998.

Sharpe, W., Investments, Englewood Cliffs 1978.

Smithson, C., Managing Financial Risk: A Guide to Derivative Products, Financial Engineering, and Value Maximization, 3rd ed., New York u. a. 1998.

Spremann, K., Wirtschaft, Investition und Finanzierung, 5. Aufl., München/Wien 1996.

Steiner, P./Uhlir, H., Wertpapieranalyse, 4. Aufl., Heidelberg 2000.

Stoll, H./Whaley, R., Futures and Options. Theory and Applications, Cincinnati (OH) 1993.

Sundaresan, S., Continuous-Time Methods in Finance: A Review and an Assessment, in: The Journal of Finance, Vol. 55 (2000), S. 1569-1622.

Trautmann, S., Optionsbewertungsmodelle, in: Gerke, W., Steiner, M. (Hrsg.), Handwörterbuch des Bank- und Finanzwesens, 2. Aufl., Stuttgart 1995, Sp. 1475-1488.

Wenger, E./Kaserer, C., Präferenzfreie Bewertung derivativer Finanztitel. Zur Nobelpreisverleihung für Wirtschaftswissenschaften an Myron Scholes und Robert C. Merton, in: WiSt – Wirtschaftswissenschaftliches Studium, 27. Jg. (1998), S. 29-32.

Wilkens, S., Zur Eignung numerischer Verfahren für die Optionsbewertung. Mit einer ausführlichen Einführung in Derivatehandel und -bewertung, Karlsruhe 2000.

Zimmermann, H., State-Preference Theorie und Asset Pricing. Eine Einführung, Heidelberg 1998.