

Institut National des Sciences Appliquées de Lyon



Mécanique

Cours – Travaux Dirigés

FIMI – 1^{re} année

Équipe pédagogique de physique

2023–2024

Malgré tout le soin que nous y avons apporté, ce document peut sûrement être amélioré. Certains des chapitres sont présents sous une première version cette année.

Vous pouvez signaler d'éventuelles erreurs ou faire part de vos remarques à
laure.raffaelly@insa-lyon.fr et florent.dalmas@insa-lyon.fr

TABLE DES MATIÈRES

Semestre 1	7
Introduction	9
I Qu'est-ce que la mécanique ?	11
II La Mécanique Classique et ses limites	11
III Définitions	12
IV Correction des applications directes du cours	16
1 Statique du solide	17
I Notion de force	19
II Équilibre d'un point	29
III Moment d'une force	31
IV Ensembles de forces	37
V Application à la statique du solide	40
VI Stabilité des équilibres	42
VII Correction des applications directes du cours	43
2 Cinématique	57
I Définitions préalables	59
II Position d'un point matériel	59
III Vitesse d'un point matériel	62
IV Accélération d'un point matériel	65
V Mouvements simples du solide	67
VI Changements de référentiels	70
VII Complément : Démonstration de $\frac{d\vec{u}_T}{d\ell} = \frac{\vec{u}_N}{R}$	74
VIII Fiche (à remplir !) de révision des systèmes de coordonnées	75
IX Correction des applications directes du cours	76
Semestre 2	83
3 Introduction à la dynamique – Grandeurs cinétiques	85
I Qu'est-ce que la dynamique ?	85
II Les grandeurs cinétiques du point matériel	86
III Les grandeurs cinétiques d'un solide	88
IV Le principe d'inertie	89
V Exemples d'application	90
4 Dynamique, lois de Newton	93
I Lois de Newton	95
II Dynamique des mouvements simples du solide	99
III Oscillations en mécanique	102
IV Correction des applications directes du cours	110

5	Dynamique – Théorèmes énergétiques	121
I	Travail et puissance d'une force	123
II	Énergie cinétique pour un point matériel	126
III	Énergie potentielle	128
IV	Energie mécanique	130
V	Application à la stabilité d'un équilibre	133
VI	Théorèmes énergétiques dans le cas des mouvements simples du solide	135
VII	Correction des applications directes du cours	138

Nous vous rappelons 3 objectifs généraux de formation de la physique :

1. Acquérir et maîtriser des connaissances durables dans différents domaines de la physique
 - Maîtriser des concepts scientifiques et les lois physiques associées
 - Maîtriser des concepts technologiques
 - Décrire et expliquer des phénomènes
 - Maîtriser le formalisme mathématique adapté
 - Etre rigoureux
2. Développer une démarche scientifique
 - Analyser le problème posé, identifier les paramètres pertinents, émettre des hypothèses
 - Identifier les outils utiles et les mettre en œuvre
 - Avoir un esprit critique sur le résultat obtenu
3. Développer son degré d'autonomie (en lien avec le PPP)
 - Rechercher sa propre méthode d'apprentissage et de résolution de problèmes
 - Développer son esprit critique, se poser des questions
 - Rechercher des informations complémentaires dans différentes sources
 - Développer sa curiosité, en abordant par soi-même des problématiques nouvelles
 - Appréhender les différents aspects d'une problématique (y compris ses dimensions humaines/sociétales)
 - Construire son propre projet en relation directe avec le PPP au FIMI
 - Développer une pensée autonome (susceptible d'être exposée, argumentée...)

Dans cette optique, vous trouverez dans ce document polycopié :

1 : Le cours Au début de chaque chapitre vous trouverez un tableau récapitulatif des objectifs de chaque chapitre en termes de *savoir* et de *savoir-faire*. Ceci doit vous guider dans l'apprentissage de votre cours. Vous y trouverez également les outils mathématiques nécessaires à l'appropriation du cours et à ses applications. Vous pourrez vous reporter à vos cours d'OMNI si nécessaire.

2 : Les exercices

- *Un premier niveau* constitué d'exercices de compréhension et d'application directe du cours, qui sont au fil du cours. Ils sont destinés à tester votre degré de compréhension du cours après les explications données en amphi et après un premier travail personnel. Ces exercices sont corrigés pour vous permettre de travailler seul chaque semaine. Vous pourrez compléter votre compréhension et apprentissage du cours en faisant les QCM en ligne sur la page Moodle « Physique 1A toutes filières ».
- *Un deuxième niveau* constitué par des exercices dont certains seront traités en TD. Ces exercices vous permettent de travailler les fondamentaux du cours. C'est leur résolution qui, en vous confrontant à des problèmes d'application des notions essentielles, vous permettra une véritable assimilation de ces notions. L'acquisition de vos connaissances doit être fondée sur un travail personnel préalable important, afin que vous puissiez tirer parti au mieux de l'aide que peut vous apporter votre conférencier pendant les TD. Certains de ces exercices pourront être traités en DM. En début de chaque série d'exercices sont indiqués les objectifs travaillés dans cette série. Pour chaque exercice, à côté de son titre, vous pouvez trouver une ou des lettres renvoyant aux objectifs travaillés plus particulièrement dans l'exercice en question.
- Des éléments de correction des exercices qui peuvent vous permettre de vérifier vos résultats, mais qui ne sont pas développés ni démontrés se trouvent à la fin du polycopié.

SEMESTRE 1

INTRODUCTION

Objectifs

- déterminer si un système mécanique est dans des conditions relativistes (relativité restreinte)
- distinguer solide et fluide par un critère de forme (ou d'évolution)
- déterminer la masse totale d'un système à l'aide de sa masse volumique (y compris lorsqu'il n'est pas homogène)
- décomposer un système complexe en sous-parties

Prérequis

- énoncer la définition du barycentre d'un système (discret ou continu) (OMNI, chapitre Vecteurs)
- déterminer la position du barycentre d'un système (discret ou continu) (OMNI, chapitre Intégration)
- sommer des vecteurs (MATHS et OMNI)
- intégrer une fonction scalaire (MATHS)

Sommaire

I	Qu'est-ce que la mécanique ?	11
II	La Mécanique Classique et ses limites	11
II.1	Historique	11
II.2	Hypothèses (implicites) de la mécanique classique	11
III	Définitions	12
III.1	Système matériel	12
III.2	Masse	13
III.3	Barycentre (rappels d'OMNI)	14
IV	Correction des applications directes du cours	16

I Qu'est-ce que la mécanique ?

C'est l'étude du **mouvement** d'un objet à partir de la connaissance **des actions** qu'il subit. Chaque problème de mécanique va donc comporter deux sous-parties préparatoires : d'une part la modélisation de son mouvement, d'autre part l'étude de l'ensemble des forces qui s'exercent sur l'objet. C'est la mise en relation de ces deux parties qui pourra conduire à la résolution du problème.

Le but du cours de mécanique de première année est de présenter les lois qui lient le mouvement d'un point matériel aux actions mécaniques qu'il subit.

Nous commencerons par l'étude de l'équilibre (**statique**) d'un système (chapitre 1) et par la modélisation de ses interactions avec d'autres systèmes (forces, moments). Le système (=objet étudié) pourra être un point matériel, un solide ou un système de solides (cf. plus loin pour les définitions plus précises).

La **cinématique** (chapitre 2) sera l'étude descriptive des mouvements indépendamment de leur cause. L'objectif de la cinématique est de faire le lien entre la position, la trajectoire, la vitesse et l'accélération de l'objet étudié.

La **dynamique du point et du solide** (chapitres 3 et 4) permettra ensuite de faire le lien entre le mouvement et les interactions. Nous verrons au chapitre 5 qu'une étude **énergétique** du système permet aussi de lier mouvement et forces. Pour les mouvements de solide, nous nous limiterons cette année au cas de deux mouvements simples : translation et rotation autour d'un axe fixe.

Remarque : dans une étude mécanique, on ne tient pas compte des effets de la température et des échanges de chaleur. C'est la thermodynamique qui généralise l'étude énergétique des systèmes en prenant en compte à la fois ses propriétés mécaniques et thermiques.

II La Mécanique Classique et ses limites

II.1 Historique

La mécanique est une des branches les plus anciennes de la physique. Pendant très longtemps elle est restée descriptive et qualitative car les outils mathématiques nécessaires à son développement n'existaient pas. Elle a véritablement pris son essor grâce aux efforts entre autres de Galilée (1564-1642) et surtout de Newton (1642-1727) qui en a formulé les lois fondamentales. Cette mécanique, dite mécanique classique ou mécanique newtonienne, joue un rôle fondamental en physique, puisque par exemple la physique statistique reprend ses fondements pour expliquer les notions de température, chaleur, pression, entropie ...

Cependant au XIXème siècle, les limitations de la mécanique classique sont apparues lors de l'étude de la vitesse de la lumière. La mécanique relativiste, due à Einstein (1915), est venue compléter la mécanique classique, qui apparaît alors comme une approximation de la mécanique relativiste, d'autant meilleure que la vitesse des objets est faible devant la vitesse de la lumière : $v \ll c \approx 3.10^8 \text{ ms}^{-1}$.

Au début du XXème siècle, les progrès de la physique nucléaire et de la physique du solide ont permis de montrer que la mécanique classique n'était plus opérante dans le domaine atomique, en raison de l'aspect ondulatoire des particules (photons, électrons...) et de la quantification de leurs énergies. Ainsi sont nées la mécanique ondulatoire (Louis de Broglie) et la **mécanique quantique** (Dirac, Pauli, Heisenberg...). Aujourd'hui la théorie la plus complète est la mécanique quantique relativiste, s'appuyant sur la théorie de la relativité restreinte et permettant de rendre compte des phénomènes faisant intervenir des vitesses proches de celle de la lumière à des échelles atomiques. Notons qu'il n'existe cependant pas encore actuellement de théorie qui permette de faire la synthèse entre la théorie de la relativité générale, prenant en compte les effets de gravitation, et les autres théories physiques. Si bien que n'existe pas encore de théorie fédérant, d'une manière unitaire, tous les phénomènes physiques intervenant à toutes les échelles (notamment sub-atomique).

Cependant il n'est nul besoin de recourir à la mécanique relativiste ou à la mécanique quantique pour un très grand nombre de phénomènes physiques : la mécanique classique, qui fait l'objet de ce cours, suffit, mais il est important de bien connaître son domaine de validité.

II.2 Hypothèses (implicites) de la mécanique classique

Le tableau suivant présente brièvement les quatre hypothèses implicites de la mécanique classique, avec leur éventuelle remise en cause et leur éventuel domaine de validité.

Hypothèses	Remise en cause	Domaine de validité
Temps universel	1905 Einstein : Relativité restreinte	$v \ll c = 3.10^8 \text{ ms}^{-1}$
Espace euclidien ¹	1916 Einstein : Relativité générale	Distance \gg rayon de Schwarzschild ²
Précision illimitée sur position ET vitesse	1926 Heisenberg, Schrödinger, etc : Mécanique Quantique	Distance \gg longueur d'onde de De Broglie ³
Continuité de l'espace et du temps	?	-

Exercice 1

En utilisant les liens dans la note de bas de page, calculer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de Broglie pour une voiture sur autoroute.

III Définitions

Nous avons vu que la mécanique étudie le mouvement d'un objet. Nous allons détailler ici le type d'objets étudiés et leurs caractéristiques.

III.1 Système matériel

Définition	Système
L'objet d'étude en mécanique (et plus généralement en sciences, cf plus tard aussi en thermodynamique) s'appelle un système . Évidemment, avant de commencer un problème de mécanique, il va falloir dire de quoi on parle, donc définir le « système » . Ce peut être un point, un solide, un fluide, ou un ensemble de points ou de solides.	

On le note souvent entre accolades : { Système}.

Ce système peut avoir plusieurs caractéristiques : il peut être **déformable** (si la distance entre deux points de ce système varie) ou **indéformable** (si la distance entre deux quelconques de ses points ne varie pas). Ce peut être un système **fermé** (dans ce cas la quantité de matière du système est constante) ou un système **ouvert** (la quantité de matière peut varier, comme par exemple une voiture qui rejette des gaz d'échappement).

Définition	Fluide
On appelle fluide tout corps qui prend la forme du récipient qui le contient et qui n'a donc pas de forme propre. Parmi les fluides on distingue les liquides (qui appartiennent avec le solide aux phases condensées de la matière et qui ont un volume propre) et les gaz (qui prennent le volume de leur récipient).	

Les fluides seront peu étudiés en mécanique 1A.

Définition	Solide
Un solide est un volume de matière caractérisé par une forme propre. Un solide peut-être déformable ou non. On appelle solide indéformable un solide dont la distance entre ses points reste constante, la forme et les dimensions restant alors toujours identiques. Malgré le fait qu'un solide strictement indéformable n'existe pas (cf. remarque ci-après), nous supposerons toujours dans ce cours que les solides sont indéformables.	

Remarque : La distinction entre déformable et indéformable dépend du matériau considéré, de la température, de l'échelle de temps considérée en regard de la vitesse de déformation et surtout de la précision qui nous intéresse. Ainsi, un glacier sera en général considéré comme un solide déformable à l'échelle de quelques dizaines d'années, voire de l'année, mais pas à l'échelle de quelques heures.

Définition	Point matériel (ou masse ponctuelle)
Lorsque les dimensions du solide deviennent négligeables devant les autres distances considérées, on parle de masse ponctuelle ou point matériel . Le système étudié est alors modélisé par un point de l'espace, occupant donc un volume nul, et portant toute la masse du système.	

En pratique, c'est une hypothèse très souvent justifiée : par exemple il est souvent possible, pour étudier son mouvement, d'assimiler un caillou que l'on jette à un point matériel ; la même approximation peut être faite pour étudier le mouvement d'un satellite en orbite autour de la Terre. Dans ce cas, le mouvement du solide est uniquement décrit par son mouvement de translation, tout mouvement de rotation sur lui-même n'ayant aucun sens pour un point matériel (voir partie sur les mouvements simples du solide).

Autres systèmes plus complexes : Un système peut aussi être constitué de plusieurs solides ou bien de plusieurs points matériels (dans ce dernier cas on parle de « système de points »), ces systèmes complexes (cf. 2A) pouvant être déformables ou non.

1. « Dans un plan, par un point distinct d'une droite, il existe une et une seule droite parallèle à cette droite ». Ce postulat, admis par Euclide (et que l'intuition soutient !) n'est pas vérifié pour d'autres géométries.... Ainsi la surface d'une sphère est un espace non euclidien, puisque par exemple les méridiens qui se coupent aux pôles de la sphère sont des courbes parallèles dans cet espace ... Demandez à votre prof de maths !

2. Le rayon de Schwarzschild (cf) http://fr.wikipedia.org/wiki/Rayon_de_Schwarzschild de la Terre vaut environ 1 cm et celui du soleil 3 km. Il est dans les 2 cas très inférieur au rayon de ces astres : les effets de la relativité générale sont négligeables dans le système solaire.

3. La longueur d'onde de de Broglie (http://fr.wikipedia.org/wiki/Hypoth%C3%A8se_de_Broglie) pour une bille est par exemple de l'ordre de 10^{-32} m : Les effets de la mécanique quantique sont négligeables pour tous les objets macroscopiques.

III.2 Masse

Définition

Masse

La masse est, comme la charge, une propriété fondamentale de la matière, mais contrairement à la charge c'est une grandeur toujours **positive**.

L'unité S.I. de la masse est le **kilogramme (kg)**.

En mécanique classique, on fait l'hypothèse que la masse est une grandeur **conservative** (c'est à dire que la masse totale d'un système fermé est constante) et une grandeur **extensive** (cf chapitre Grandeurs physiques, dimensions et unités).

Remarque : En dehors de la mécanique classique, la masse n'est plus une grandeur conservative ni extensive. Par exemple la masse de 4 atomes d'hélium est différente de la masse d'un atome de carbone qui contient pourtant autant de neutrons, de protons et d'électrons que les 4 atomes d'hélium. D'autre part, la collision entre un électron (de masse m_e), et un positron (de masse m_e) peut donner un muon (de masse $\approx 207 m_e$) si les vitesses sont suffisamment élevées. Grâce à sa définition de la masse au repos $E = m_0 c^2$, Einstein permet de passer de la notion de masse à celle d'énergie. C'est en effet l'énergie qui serait la grandeur conservative et extensive de la physique, à condition de ne pas oublier de prendre en compte aussi l'énergie des photons (rayonnement). De ce fait, c'est l'énergie qui devrait jouer le rôle fondamental que l'on donne classiquement et historiquement à la masse. Cependant, si on se restreint à des phénomènes dans lesquels n'interviennent pas les interactions entre matière et rayonnement, et si de plus on reste dans le cadre non relativiste de la mécanique classique, pour lequel la masse est quasi-identique à la masse au repos, alors la masse ne peut plus se transformer en énergie et on retrouve dans ce cadre restreint les deux propriétés de grandeur conservative et extensive.

Par extensivité, la masse m d'un système de N points matériels est la somme des masses de chacun de ces points. De même, un solide peut être considéré comme un système de points : il suffit de diviser le solide en petits volumes « élémentaires » $\delta\tau$, chacun de ces volumes pouvant être considéré comme un point matériel de masse δm . La masse m du solide est la somme des masses élémentaires et s'écrit donc

$$m = \sum \delta m = \int_{solide} dm$$

Le passage d'une somme discrète à une intégrale fera l'objet d'un chapitre d'OMNI. Pour un solide ou un fluide, on peut alors définir en chaque point M la **masse volumique** $\rho(M)$: pour cela, on s'intéresse à un tout petit volume $\delta\tau$ localisé autour du point M , avec δm la masse de ce petit volume. On définit alors :

$$\rho(M) = \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\delta\tau} = \frac{dm}{d\tau}$$

et on a donc :

$$m = \int_{solide} \rho(M) d\tau$$

Il est intéressant de noter qu'en physique, cela n'a aucun sens de faire tendre $\delta\tau$ vraiment vers 0. En effet, à l'échelle microscopique, la matière est discontinue : elle est modélisée par un assemblage de particules élémentaires, occupant un volume a priori tellement faible qu'on ne respecte plus les hypothèses de la mécanique classique. À cette échelle, les notions même de position et de volume occupé sont à reprendre (cf. modèle de la matière en mécanique quantique). Si toutefois on tente de conserver notre représentation classique à cette échelle microscopique (par exemple on donne 10^{-15} m comme le rayon classique de l'électron), la masse volumique oscillerait entre des valeurs nulles et des valeurs extrêmement élevées (voir figure 1). Faire tendre un volume vers 0 veut dire en fait que le volume $\delta\tau$ est assez petit (mais pas trop !) pour qu'on puisse le considérer comme homogène. On dit qu'on est alors au niveau **mésoscopique** (de « mesos » moyen/intermédiaire et « skopein » observer/regarder), intermédiaire entre le microscopique et le macroscopique.

Interprétation détaillée de la figure 1 : La mesure de la masse volumique revient donc à faire l'expérience de pensée suivante : dans le système à étudier, on prélève par exemple un cube de côté a . On relève la masse $M(a)$ du volume prélevé et on calcule le rapport $\rho_{moyen} = M(a)/a^3$. On recommence le procédé avec des cubes de côté a de plus en plus petit. L'expérience montre que l'allure du tracé de ρ_{moyen} en fonction de a est donné par la Figure 1. Cette courbe a la particularité de présenter un plateau, pour lequel ρ_{moyen} devient constant, indépendant de la forme du volume prélevé et du centre M du volume prélevé. C'est l'existence de ce plateau qui permet de dire que l'on a bien défini la densité de masse ou masse volumique en M . La zone sur laquelle ρ_{moyen} est constant définit l'échelle mésoscopique.

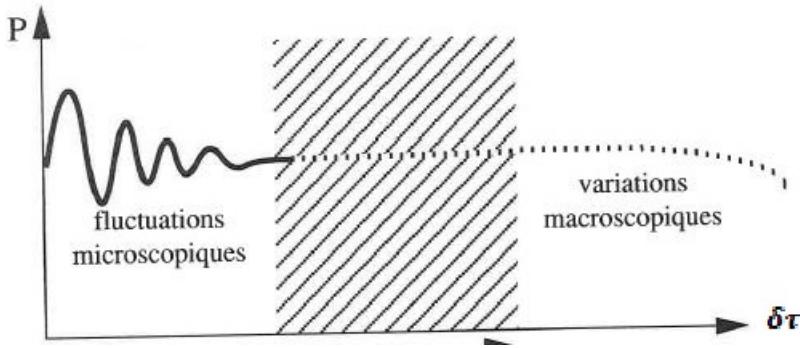


Figure 1 – Définition du niveau mésoscopique : C'est la zone hachurée dans la figure ci-dessus entre les fluctuations microscopiques et les variations macroscopiques. Le volume élémentaire $\delta\tau$ n'est ni « trop petit » ni « trop grand ». $\delta\tau$ représente le volume sur lequel est moyenné la propriété P (par exemple la masse volumique). (source : Hydrodynamique physique, E. Guyon, J.P. Hulin, L.Petit, InterEditions CNRS)

Le remplacement de la structure réelle de la matière (le modèle lacunaire de la matière) par les propriétés de la matière à l'échelle mésoscopique que l'on prolonge jusqu'à l'échelle microscopique, définit le **modèle continu de la matière**. Dans ce modèle, on peut indifféremment considérer que la matière peut être subdivisée en un nombre discret de volume $\delta\tau$ de taille finie quelconque ou bien en un nombre infini de volumes élémentaires $\delta\tau = d\tau \rightarrow 0$, chacun assimilé à un point matériel.

III.3 Barycentre (rappels d'OMNI)

Un point est particulièrement important pour décrire le mouvement d'un système : son barycentre. Le barycentre est aussi appelé **centre de masse** ou **centre de gravité**, et on verra qu'il coïncide aussi avec le centre d'inertie du système qui sera défini ultérieurement.

a Barycentre d'un système de n points matériels

Définition

Barycentre

Soit un système de n points matériels A_1, A_2, \dots, A_n de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n . Par définition, le barycentre de ce système est l'unique point G tel que $\sum_i m_i \overrightarrow{GA}_i = \overrightarrow{0}$.
On peut montrer que quel que soit le point O , on a alors :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OA}_i}{\sum_i m_i}$$

Exercice 2

1. Démontrer la relation ci-dessus donnant \overrightarrow{OG} à partir de la définition de G .
2. Donner les expressions littérales des coordonnées cartésiennes (x_G, y_G, z_G) du barycentre d'un système de points pondérés.
3. Quel est le barycentre de 2 points A et B de même masse m ? Démontrez-le.
4. Donner les coordonnées du barycentre des 4 points suivants : $A_1(1, 1, 3)$, $A_2(1, -2, 1)$, $A_3(-2, -1, 0)$ et $A_4(-2, 2, -1)$ de masses $m_1 = 200 \text{ g}$, $m_2 = 50 \text{ g}$, $m_3 = 100 \text{ g}$ et $m_4 = 300 \text{ g}$

b Barycentre d'un solide

Définition

Barycentre d'un solide

Pour pouvoir définir le barycentre d'un solide de masse m , il faut le découper en petits volumes élémentaires à l'échelle mésoscopique. Chaque petit volume $\delta\tau(M)$ est centré sur un point M et a pour masse $\delta m(M)$. On peut alors ramener le solide à un système de points matériels et définir le barycentre G du solide tel que $\sum_{(tous\ les\ points\ M)} \delta m \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{0}$ ou encore :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_M \delta m \overrightarrow{OM}}{\sum_M \delta m} = \frac{\sum_M \delta m \overrightarrow{OM}}{m}$$

Cette somme est en général écrite sous forme d'intégrale sur tout le volume du solide :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\iiint_{solide} \delta m \overrightarrow{OM}}{\iiint_{solide} \delta m} = \frac{1}{m} \iiint_{solide} \rho(M) \overrightarrow{OM} d\tau}$$

Remarque : Le barycentre d'un système n'est pas forcément un point du système. Par exemple le barycentre d'un arc n'appartiendra pas à l'arc lui-même.

IV Correction des applications directes du cours

Exercice 1 : 10^{-38} m

Exercice 2 : a) Décomposer chaque vecteur $\overrightarrow{GA_i}$ à l'aide de la relation de Chasles impliquant le point O .
On obtient : $\sum_i m_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_i m_i \overrightarrow{GO} = \overrightarrow{0}$, b) $x_G = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$, $y_G = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$, $z_G = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$, c) le milieu du segment AB, $\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB}}{2}$ d) $(-11/13, 12/13, 7/13)$

CHAPITRE

STATIQUE DU SOLIDE

Objectifs

- schématiser et paramétriser (choix de la base adaptée) un problème mécanique simple
- connaître les forces usuelles (force gravitationnelle, poids, force électrostatique, force électromagnétique, force de tension d'un fil, force de rappel élastique d'un ressort, force de contact entre deux solides, poussée d'Archimède, force de Laplace)
- calculer le moment d'une force par rapport à un axe ou à un point
- appliquer le principe fondamental de la statique pour déterminer des forces inconnues sur un solide ou pour déterminer les caractéristiques géométriques d'un équilibre
- expliquer qualitativement l'action d'un moment et identifier si un ensemble de forces est équivalent à une action nulle, un couple ou une force unique
- expliquer ce qu'est une force intérieure et justifier la nullité de la résultante et du moment résultant des forces intérieures
- juger de la stabilité d'un équilibre à partir du moment résultant

Prérequis

- projeter un vecteur sur un axe (OMNI)
- calculer un produit vectoriel (OMNI)

Sommaire

I Notion de force	19
I.1 Systèmes en interaction. Notion de force	19
I.2 Interactions élémentaires	20
I.3 Forces à l'échelle macroscopique	22
II Équilibre d'un point	29
II.1 Principe des actions réciproques ou 3ème loi de Newton	29
II.2 Principe fondamental de la dynamique ou 2ème loi de Newton	29
II.3 Équilibre d'un point	30
II.4 Conclusion	30
III Moment d'une force	31
III.1 Introduction au concept de moment	31
III.2 Moment d'une force par rapport à un point.	31
III.3 Moment d'une force par rapport à un axe.	34
IV Ensembles de forces	37
IV.1 Introduction	37
IV.2 Ensemble de forces équivalent à un couple (cas b)	37
IV.3 Ensemble de forces équivalent à une action nulle (cas a)	38
IV.4 Ensemble de forces équivalent à une seule force (cas c)	38
IV.5 Propriété sur la résultante des moments	39
V Application à la statique du solide	40
V.1 Forces intérieures et forces extérieures	40
V.2 Conditions d'équilibre d'un solide : équations de la statique	40
V.3 Méthodologie	41
VI Stabilité des équilibres	42
VII Correction des applications directes du cours	43

La statique est l'étude de l'équilibre. On dit qu'un système est à l'équilibre s'il existe un référentiel galiléen¹ dans lequel il est immobile.

Nous introduirons tout d'abord le concept de forces pour modéliser les interactions entre des systèmes physiques. Puis nous nous intéresserons à l'équilibre tout d'abord d'un point, puis d'un solide.

I Notion de force

I.1 Systèmes en interaction. Notion de force

Définition	Systèmes en interaction
Deux systèmes (S1) et (S2) sont dits en interaction mécanique lorsqu'une modification quelconque de la position ou du mouvement intervenant dans le système (S1) introduit une modification du mouvement dans le système (S2) et inversement. Dans ce cas on dit que (S1) exerce une action mécanique sur (S2) et vice-versa.	

Par exemple :

- Deux aimants placés l'un près de l'autre sont en interaction : si on tourne un des aimants, l'autre aura tendance à tourner également.
- Un satellite est en interaction avec la Terre : lorsque celle-ci se déplace, le satellite va la suivre (et réciproquement).
- Le phénomène de marée est dû principalement à l'interaction Terre-Lune.
- La déformation de la boule de pâte à modeler tombant sur le sol est due à l'action du sol sur la pâte à modeler.

Bien sûr les interactions peuvent exister sans que les systèmes bougent, mais pour les mettre en évidence il faut qu'il y ait mouvement : ce sont les observations de la modification du mouvement qui ont permis d'étudier les actions mécaniques. Pour caractériser cette notion d'interaction, on introduit le concept de force.

Définition	Force
Une force est donc définie comme une modélisation d'une action mécanique capable de modifier le mouvement d'un corps (et donc éventuellement de le déformer) : c'est le postulat qu'énonce la deuxième loi de Newton déjà vue au lycée ($\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$) et qui sera à nouveau étudiée au second semestre.	

Propriétés	Force : dimension et unité
On rappelle l'équation aux dimensions de la force :	

$$\dim(F) = MLT^{-2}$$

L'unité S.I. de la force est le **newton (N)** : $1\text{ N} = 1\text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Comme les interactions sont directives et peuvent être attractives ou répulsives, un simple scalaire ne suffit pas à décrire totalement ces interactions.

Propriétés	Forces : description
Chaque force peut être caractérisée par : <ul style="list-style-type: none">• un point d'application• un vecteur force caractérisé soit par ses trois composantes, soit par<ul style="list-style-type: none">– une norme (= intensité de la force)– une direction– un sens (attention à ne pas confondre sens et direction, cf OMNI)	

Une force ne pourra être complètement définie que si ces 4 caractéristiques sont connues.

Définition	Résultante des forces
On appelle résultante des forces la somme des forces appliquées à un système. Attention, il s'agit bien évidemment d'une somme vectorielle.	

1. Les notions de référentiel et de référentiel galiléen seront définis dans le chapitre 3.

Exercice 1

Soit $\vec{f}_1(f_{1x}, f_{1y}, f_{1z})$ et $\vec{f}_2(f_{2x}, f_{2y}, f_{2z})$ deux forces faisant entre elles un angle orienté $\alpha = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$. Donner l'expression de $\|\vec{f}\| = \|\vec{f}_1 + \vec{f}_2\|$ en fonction d'abord des coordonnées, puis en fonction de $\|\vec{f}_1\|, \|\vec{f}_2\|, \alpha$. Dans quel cas peut-on dire que la somme des normes des vecteurs est égale à la norme de la somme des vecteurs ?

ATTENTION : Contrairement au mouvement, les forces sont définies indépendamment du référentiel considéré. La notion de référentiel sera développée dans le chapitre 2, mais on peut déjà donner sa définition. On appelle **référentiel** \mathfrak{R} un solide de référence (réel ou fictif) muni d'une horloge définissant le temps. Le référentiel permet donc de situer un évènement dans l'espace et le temps.

I.2 Interactions élémentaires

Toutes les forces observées dans l'univers sont dues à uniquement quatre interactions élémentaires appelées aussi interactions **fondamentales**.

a Interaction gravitationnelle

Définition

Interaction gravitationnelle

Soient deux corps dont les dimensions peuvent être considérées comme suffisamment petites pour pouvoir les assimiler à deux points matériels P_1 et P_2 de masse respective m_1 et m_2 et distants de d . Newton a montré que la force d'interaction qui agit entre ces deux corps possède les caractéristiques suivantes :

- sa direction est celle qui joint les deux corps,
- son amplitude est proportionnelle à m_1 et m_2 et inversement proportionnelle au carré de d .
- elle est toujours attractive,

C'est ce que l'on écrit avec la relation suivante :

$$\vec{F}_g_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{d^2} \vec{u}_{12}$$

- $\vec{F}_g_{1 \rightarrow 2}$ est la force d'interaction gravitationnelle exercée par le corps (1) sur le corps (2)
- G est la constante de gravitation, dimensionnée, dont la valeur dans le système international vaut $6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
- $\vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{P_1 P_2}}{P_1 P_2} = \frac{\overrightarrow{P_1 P_2}}{d}$ est le vecteur unitaire de la droite joignant les deux corps supposés ponctuels, orienté du corps (1) vers le corps (2). (Le signe « - » indique donc que la force est toujours attractive, puisque $m_1 > 0$ et $m_2 > 0$)

C'est cette interaction qui est responsable de la force de gravitation entre tous les objets, même non ponctuels : On supposera ici qu'on peut alors utiliser la même expression avec d distance entre les centres de gravité (barycentres) des deux corps.

Exercice 2

Faire un schéma pour illustrer la définition de l'interaction gravitationnelle, en y faisant apparaître les différentes grandeurs et points évoqués dans la définition ci-dessus et le vecteur $\vec{F}_g_{1 \rightarrow 2}$. Que pouvez-vous dire de la force gravitationnelle exercée par le corps de masse m sur la terre ?

b Interaction électromagnétique

Définition

Interaction électromagnétique

Considérons deux charges électriques q_1 et q_2 immobiles placées dans le vide. Nous supposerons là encore qu'elles sont de taille suffisamment petite pour pouvoir les assimiler à deux charges **ponctuelles** localisées en P_1 et P_2 et distantes de d . La force de type électromagnétique qui s'exerce entre elles présente de grandes similitudes avec la force de gravitation :

- sa direction est celle qui joint les deux charges,
- son amplitude est proportionnelle à q_1 et de q_2 et inversement proportionnelle au carré de la distance d ,
- MAIS contrairement à l'interaction gravitationnelle, elle peut être attractive (si les charges sont de signes opposés) ou répulsive (si les charges sont de même signe).

Ce résultat s'exprime par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}e_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \vec{u}_{12}$$

- $\vec{F}e_{1 \rightarrow 2}$ est la force d'interaction électromagnétique exercée par le corps (1) sur le corps (2),
- La constante dimensionnée ε_0 s'appelle la permittivité du vide ; elle vaut $8,842 \cdot 10^{-12}$ USI.
- $\vec{u}_{12} = \frac{\vec{P}_1 \vec{P}_2}{P_1 P_2} = \frac{\vec{P}_1 \vec{P}_2}{d}$ est le vecteur unitaire de la direction joignant les deux charges, orienté de la charge (1) vers la charge (2).

Exercice 3

Faire deux schémas pour illustrer la définition de l'interaction électromagnétique, en y faisant apparaître les différentes grandeurs et points évoqués dans la définition et le vecteur $\vec{F}e_{1 \rightarrow 2}$: l'un avec des charges de même signe et l'autre avec des charges de signes opposés. Donner l'équation aux dimensions de ε_0 dans le système international. Déduisez-en son unité.

C'est cette force qui est responsable, par exemple, des interactions entre les électrons et les protons. Un simple calcul montre que l'interaction électrostatique à l'échelle atomique l'emporte très largement sur l'interaction de gravitation. Par exemple pour le couple (proton, électron), le rapport des deux forces est de l'ordre de $10^{39}!$ (Ceci justifie par exemple les hypothèses faites dans le modèle de Bohr pour décrire l'atome d'hydrogène, cf. cours de chimie).

Exercice 4

En utilisant par exemple la masse molaire de l'hydrogène, trouver l'ordre de grandeur de la masse du proton. Sachant que la masse d'un électron est mille fois plus petite que la masse du proton et connaissant l'ordre de grandeur de la charge élémentaire (chapitre 1 électricité), retrouver sans calculatrice l'ordre de grandeur donné ci-dessus.

Remarque : Comme la force électromagnétique (de même que la force de gravitation) varie en d^{-2} , sa portée est très grande par rapport à celle des autres interactions qui varient en d^{-n} , avec $n > 2$.

c Interaction nucléaire forte

Définition

Interaction nucléaire forte

L'interaction nucléaire forte assure la **cohésion entre quarks** (particules élémentaires constituants les nucléons) et est donc responsable à la fois de la cohésion des nucléons et des noyaux.

Par exemple, la cohésion des noyaux atomiques dans lesquels voisinent des protons (charges positives) et des neutrons (non chargés) ne peut se faire que grâce à l'existence de forces d'interaction attractives à très courte portée : ce sont les forces d'interaction nucléaire fortes. Leur portée n'est que de l'ordre de 10^{-15} m et elles deviennent négligeables dès que les distances considérées deviennent grandes devant celles du noyau. A ces échelles, la dynamique classique n'est plus en mesure de décrire correctement la matière : le modèle de l'interaction nucléaire forte relève de la mécanique quantique.

d Interaction nucléaire faible

Définition

Interaction nucléaire faible

Il s'agit là également de forces agissant à une échelle atomique. Ces forces se manifestent lors de la **désintégration radioactive du neutron**.

Leur portée est encore plus limitée que celles des interactions fortes, puisqu'elle ne dépasse pas environ 10^{-17} m. Là encore, il est nécessaire d'utiliser la mécanique quantique pour modéliser cette interaction.

Propriétés

4 interactions fondamentales

Ces quatre interactions fondamentales permettent d'expliquer tous les processus physiques et chimiques et toutes les forces à notre échelle (cf. prochain paragraphe).

Remarque : Actuellement, seules les 3 dernières interactions fondamentales ont été unifiées, mais aucune théorie unifiée ne permet de décrire ces quatre interactions. C'est l'un des grands défis de la physique moderne que de trouver une description unique de toutes ces forces.

Pour en savoir plus, par exemple : <http://physicsmasterclasses.org/exercises/ddlmdp/fr/index.html>

I.3 Forces à l'échelle macroscopique

La physique classique traite les problèmes au niveau macroscopique. Si toutes les forces macroscopiques sont à l'origine dues aux interactions fondamentales, il est par contre souvent impossible d'exprimer analytiquement le lien entre la force macroscopique et l'interaction fondamentale. Par exemple : si mon livre ne passe pas à travers la table, c'est grâce à l'interaction électromagnétique entre les nuages électroniques des atomes de la table et ceux du livre. Cependant, un calcul exact de la force d'interaction de la table sur le livre à partir de l'interaction électrostatique est bien évidemment très difficile à faire. Pour cette raison, on va la plupart du temps utiliser des **lois phénoménologiques**, c'est-à-dire **basées sur l'expérience** pour décrire les interactions à l'échelle macroscopique.

Les forces macroscopiques peuvent être classées en deux catégories : les forces d'interaction à distance et les forces de contact.

a Forces à distance

Définition

Forces d'interaction à distance

Les **forces d'interaction à distance**, qui apparaissent lorsque les systèmes considérés ne sont pas en contact (cas de l'interaction Terre – pomme par exemple).

a.1 Le poids

Définition

Poids

Considérons un objet d'étendue négligeable par rapport à la Terre (et que l'on peut donc considérer comme localisé en un seul point M). On montre expérimentalement que la **force de pesanteur** ou **poids** de cet objet est proportionnel à sa masse. On définit donc le poids comme

$$\vec{P} = m \vec{g}(M)$$

où $\vec{g}(M)$ s'appelle l'accélération de pesanteur en M .

Par définition, la direction de \vec{g} fixe la verticale et son sens indique le bas. On considérera en première approximation que la norme de \vec{g} vaut $9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ au niveau de la mer.

Remarque 1 : Une valeur approchée de l'accélération de la pesanteur terrestre peut se déterminer analytiquement à partir de l'interaction gravitationnelle. On peut montrer (cf 2A théorème de Gauss) que l'attraction gravitationnelle de la terre considérée à symétrie sphérique sur un objet de masse m à l'altitude z vaut : $\vec{F} = \frac{GmM_T}{(R_T+z)^2} \vec{u}$, où \vec{u} est un vecteur unitaire dirigé vers le centre de la terre. Au voisinage du sol, on a donc une valeur théorique de $\|\vec{g}\| \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Cependant, il est important de noter que la définition du poids est totalement phénoménologique, et correspond à l'expérience commune de pesée (ou l'expérience qui est utilisée par les maçons pour déterminer la verticale avec un fil à plomb). Ce n'est donc pas exactement la résultante de l'attraction gravitationnelle de la Terre sur l'objet localisé en M . Le référentiel Terrestre n'étant pas galiléen, vous verrez en deuxième année que la verticale n'est pas exactement dirigée vers le centre de la Terre !

Remarque 2 : On montrera ultérieurement que le point d'application du poids pour un système étendu est le barycentre du système.

Attention, dans le langage courant, le poids est confondu avec la masse. Ces deux grandeurs sont à distinguer absolument en physique, elles n'ont pas la même dimension.

Exercice 5

1. Dans le langage courant, on dit qu'un homme pèse 80 kg : quelle est sa masse ? quel est son poids ?
2. Quelle est l'unité SI du poids ? de la masse ?
3. Dans les quelques lignes ci-après, placer les termes « masse » et « poids » aux endroits adéquats : Le/La —— d'un objet est le/la même partout, le/la —— dépend de l'endroit où l'objet se trouve.
4. Pourquoi, aux jeux olympiques de Mexico, a-t-on légèrement modifié la masse du disque dans l'épreuve de lancer ?

a.2 La force électromagnétique (dite force de Lorentz) Si les objets chargés ne sont pas ponctuels, il peut être compliqué de calculer la force électromagnétique entre ces objets à partir de l'interaction élémentaire. Dans ce cas on utilisera plutôt directement le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} .

Définition

Force de Lorentz ou électromagnétique

Si une charge électrique q_0 se déplace avec une vitesse \vec{v} dans une zone de l'espace où règne à la fois un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} , cette charge subit une force d'interaction dite de Lorentz :

$$\vec{F} = q_0(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

où $\vec{F}_e = q_0\vec{E}$ est la force électrique et $\vec{F}_m = q_0\vec{v} \wedge \vec{B}$ est la force magnétique sur la charge q_0 .

Les champs électrique et magnétique, déjà vus en Première, seront étudiés en détail en 2ème année, mais un cas particulier peut déjà être explicité ici. Le champ \vec{E} vu par une charge fixe q_0 au point M et créé par une seule charge q au point P peut en effet être obtenu directement à partir de l'interaction élémentaire électromagnétique (ou loi de Coulomb, cf. b) : dans ce cas $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\vec{PM}}{(PM)^3}$.

Remarque : Lorsque de plus, les charges q et q_0 se déplacent, on peut montrer que la loi de Coulomb conduit, en se plaçant dans le cadre de la relativité restreinte, à une expression analytique de \vec{B} . Historiquement l'expression du champ magnétique et de la force de Lorentz ont bien sûr été obtenues expérimentalement avant la théorie de la relativité !

a.3 Force de Laplace La force de Laplace est la force, d'origine magnétique, ressentie par un fil conducteur lorsqu'il est parcouru par un courant en présence d'un champ magnétique. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons uniquement à caractériser cette action en considérant sa manifestation macroscopique.

Considérons une expérience, généralement appelée « Rails de Laplace ». Deux rails conducteurs, rectilignes, parallèles et horizontaux sont branchés sur un générateur de tension continu. Le circuit est fermé par un barreau cylindrique placé en travers des deux rails (voir figure 1.1). Le tout est immergé dans un champ magnétique uniforme orthogonal au plan des rails.

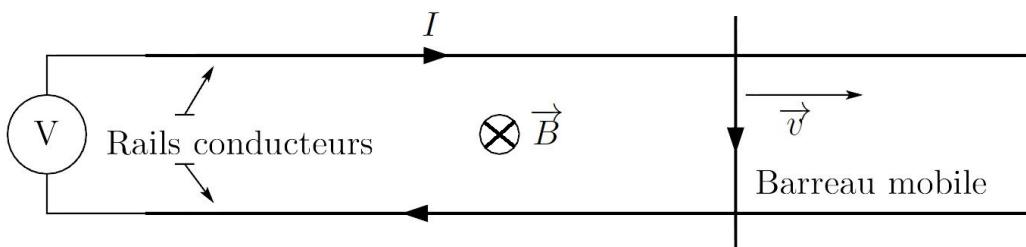
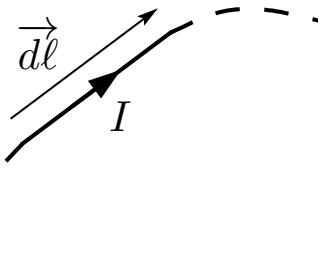


Figure 1.1 – Rails de Laplace : un circuit constitué de deux rails fixes et d'un barreau mobile est alimenté par un générateur. En présence d'un champ magnétique orthogonal au plan des rails, le barreau se déplace dans un sens qui dépend du signe du courant et du sens du champ magnétique

Lorsqu'on allume le générateur, le circuit est parcouru par un courant et on observe alors que le barreau se met à rouler le long des rails, mettant ainsi en évidence l'existence d'une force agissant sur lui. En multipliant les expériences, on constate de plus que :

- En l'absence de courant, il ne se passe rien.
- En l'absence de champ magnétique, il ne se passe rien.
- Si on renverse le sens du courant, le barreau se déplace dans l'autre sens.
- De même, si on renverse le sens du champ magnétique, le barreau se déplace dans l'autre sens.
- Si le champ magnétique est tangent au plan des rails, il ne se passe rien.

En poussant encore les analyses à un niveau quantitatif, on met en évidence que la force subie par le barreau est proportionnelle au courant, à la composante du champ magnétique normale au plan des rails, et à la longueur de la portion du barreau parcourue par le courant. On détermine finalement la loi suivante :



Définition

Force de Laplace élémentaire

Une portion élémentaire d'un conducteur filiforme de longueur $d\ell$ infiniment petite parcourue par un courant I et immergée dans un champ magnétique \vec{B} subit une force élémentaire dite « de Laplace » :

$$d\vec{F}_L = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

où le vecteur $\vec{d\ell}$ a pour norme $d\ell$, est tangent au conducteur filiforme et est orienté dans le sens conventionnel de I positif (voir figure ci-dessus).

On détermine la force totale agissant sur un conducteur de longueur finie en faisant la somme des forces élémentaires s'exerçant sur chaque portion élémentaire du conducteur.

b Forces de contact

Tous les objets touchant le système (S) exercent potentiellement une force sur lui.

Définition

Forces de contact

Les **forces de contact** sont les forces qui apparaissent lorsque le système est en contact avec un autre objet (solide déformable ou non ou liquide ou gaz). On introduit alors par exemple la notion de force de frottement ou de forces pressantes (cas des liquides).

b.1 Force de tension d'un fil

Définition

Force de tension d'un fil

Lorsque qu'un solide est accroché à un fil sans raideur **tendu**, on modélise la force de tension \vec{T} exercée par le fil sur le solide par une force de direction celle du fil, dirigée du solide vers le fil, et qui admet comme point d'application le point de contact.

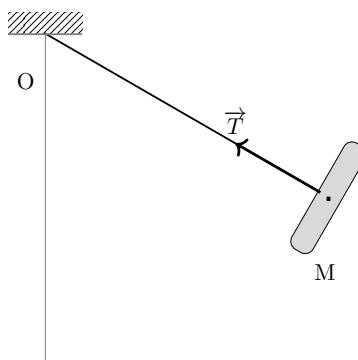


Figure 1.2 – Tension d'un fil

Propriétés

Fil détendu ?

Sa norme s'annule lorsque le fil est détendu.

Exercice 6

Sur la figure 1.2, positionnez un repère cartésien et un repère cylindrique. Déterminez l'expression de la force \vec{T} de tension du fil dans ces deux repères en fonction entre autres de la norme du vecteur $\|\vec{T}\|$.

b.2 Force de rappel élastique d'un ressort Soit un ressort à spires non jointives dont une extrémité notée O est fixe et auquel on accroche un solide à l'autre extrémité. La force \vec{F} exercée par le ressort sur le solide est appelée « force de rappel élastique ». Lorsqu'un ressort n'est ni étiré, ni comprimé, il est dit « à vide » ; dans ce cas il n'exerce aucune force sur le solide. Sa longueur est alors appelée « longueur à vide » et souvent notée ℓ_0 .

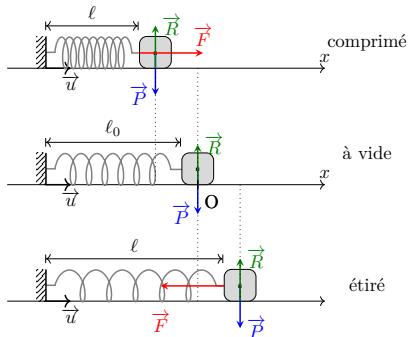


Figure 1.3 – Force de rappel d'un ressort

Dans la limite des déformations élastiques du ressort (pour des déformations du ressort suffisamment petites), l'expérience montre que la force de rappel exercée par le ressort est :

- de direction celle du ressort,
- de sens opposé à l'allongement,
- de norme proportionnelle à l'allongement du ressort (loi de Hooke).

Définition

Force de rappel élastique d'un ressort : loi de Hooke

Soit \vec{u} un vecteur unitaire colinéaire au ressort, orienté du point fixe du ressort vers le solide. Soit ℓ la longueur du ressort, ℓ_0 sa longueur lorsque le ressort n'est pas étiré (à vide). L'allongement algébrique du ressort est alors donné par $\ell - \ell_0$: si $\ell - \ell_0 > 0$ le ressort est étiré, si $\ell - \ell_0 < 0$ le ressort est comprimé. La force exercée par le ressort sur son extrémité peut donc se modéliser par

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}$$

avec k une constante positive, appelée constante de raideur du ressort. Cette loi expérimentale ne reste valable que pour les petites déformations.

Si on choisit un repère (O, x) où \vec{u}_x est un vecteur unitaire colinéaire au ressort, on a alors

$$\vec{F} = -k(x - x_0) \vec{u}_x$$

et cette relation reste valable :

- quelle que soit l'origine choisie sur l'axe. Si on choisit comme origine l'extrémité fixe du ressort on a $x_0 = \ell_0$. On peut aussi choisir comme origine la position « à vide », on a alors $x_0 = 0$ et $\vec{F} = -kx\vec{u}_x$.
- quel que soit le sens du vecteur \vec{u}_x , mais l'intérêt de l'orienter comme sur la figure 1.3 est que $x > 0$.

Point méthode

Écrire la force de rappel d'un ressort

Écrire la force de rappel d'un ressort en fonction des données d'un problème est indispensable pour toute situation où un ressort est utilisé. Comment s'y prendre sans se tromper ?

- Évidemment, faire un schéma !
- Positionner un vecteur unitaire colinéaire au ressort et une origine (si possible orienté comme dans la figure 1.3, s'il est déjà imposé, il faudra s'adapter).
- Faire apparaître sur le schéma la longueur ℓ du ressort et sa longueur à vide ℓ_0 .
- Faire le lien entre ces grandeurs ℓ et ℓ_0 , les coordonnées de l'extrémité libre du ressort et les données du problème. Attention ℓ et ℓ_0 sont des longueurs toujours positives, alors qu'une coordonnée est une grandeur algébrique : soyez attentifs aux éventuels signes !
- Vérifiez le signe de $\ell - \ell_0$ et la cohérence du sens de la force de rappel du ressort avec le fait que le ressort soit étiré ou comprimé.

Exercice 7

Donner l'expression de la force de rappel du ressort dans les trois cas présentés à la figure 1.4. On pourra utiliser x , ℓ_0 et \vec{e}_x .

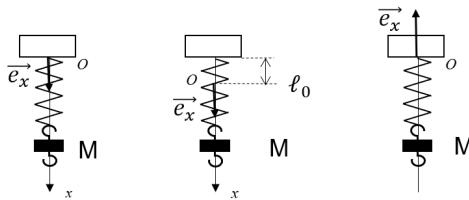


Figure 1.4 – Différentes possibilités de positionner le repère

Exercice 8

Soit un ressort mobile dans le plan horizontal xOy , de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 , dont une extrémité est accrochée en un point fixe A_0 . À son autre extrémité M est accroché un point matériel de masse m . Donner l'expression de la force exercée par le ressort sur le point matériel M en fonction de k , ℓ_0 , A_0 et M . Si on prend A_0 comme origine, donner l'expression de la force en fonction des coordonnées cylindriques de M .

Remarque : on verra qu'il existe une autre mise en œuvre de ressort appelé ressort spirale et dont l'effet est décrit par un moment.

b.3 Cas de deux solides en contact

Définition

Réaction d'un support

Lorsque deux solides sont en contact, par exemple un système (S) et son support (S_o) (cf. Figure 1.5), la réaction \vec{R} du support sur (S) peut être décomposée en deux parties :

- d'une part une **composante normale** \vec{R}_N au support qui empêche (S) de passer à travers le support et est donc nécessairement dirigée du support vers (S),
- d'autre part une **composante tangentielle** \vec{R}_T qui modélise **les frottements solide/solide** et est donc toujours opposée à la vitesse éventuelle $\vec{v}(S/S_o)$ de glissement de (S) par rapport à (S_o).

Si (S) glisse sur (S_o) : Expérimentalement, on montre que lorsqu'un solide glisse sur un autre solide, $\|\vec{R}_T\|$ et $\|\vec{R}_N\|$ sont proportionnelles (en d'autres termes « plus on appuie et plus ça frotte »). On a donc

$$frottements_{support} = \|\vec{R}_T\| = \mu_d \|\vec{R}_N\|$$

où μ_d est un coefficient de proportionnalité positif (appelé **coefficient de frottement dynamique**) qui dépend de l'état de surface des deux surfaces en contact. Bien sûr, plus la surface du support est lisse et plus μ_d est petit. Par exemple, pour la glace, on prendra en général $\mu_d = 0$ et le contact est alors dit « sans frottement ».

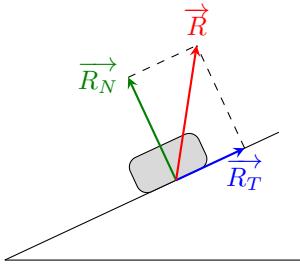


Figure 1.5 – Contact entre 2 solides

Si le solide est immobile sur son support : On montre expérimentalement que $\|\vec{R}_T\|$ et $\|\vec{R}_N\|$ ne sont plus proportionnelles, mais on a alors

$$\text{frottements}_{\text{support}} = \|\vec{R}_T\| \leq \mu \|\vec{R}_N\|$$

où μ est le **coefficient de frottement statique**. Le sens et la norme de \vec{R}_T ne peuvent donc pas dans ce cas être déterminés directement à partir de \vec{R}_N et \vec{v} . (En fait \vec{R}_T est opposé au sens du « glissement potentiel », c'est-à-dire au mouvement qui aurait lieu s'il n'y avait pas de frottement.)

Remarque 1 : En dynamique comme en statique, \vec{R}_T et \vec{R}_N sont a priori des inconnues qui ne peuvent être complètement déterminées qu'une fois connue l'ensemble des autres grandeurs mécaniques, y compris les lois horaires du mouvement. La résolution du problème de mécanique passe alors par des manipulations mathématiques permettant d'éliminer \vec{R}_T et \vec{R}_N , mais qui sont plus simples dans le cas de la dynamique (proportionnalité des normes) que de la statique.

Exercice 9

1. Un solide glisse sur un support et décolle à un instant t . Que peut-on dire de \vec{R}_N à l'instant où le solide quitte le support ?
2. Un solide glisse dans une glissière accrochée au plafond. Dans quel cas a-t-on \vec{R}_N vers le haut ? vers le bas ?

Remarque 2 : Les deux composantes $\|\vec{R}_N\|$ et $\mu \|\vec{R}_N\|$, avec $\mu \|\vec{R}_N\|$ dans toutes les directions normales à \vec{R}_N , définissent un cône appelé cône de frottement. Lorsque le solide est immobile avec $\|\vec{R}_T\| = \mu \|\vec{R}_N\|$, on dit qu'on est à la limite du glissement. Dans le cas général le solide est immobile avec $\|\vec{R}_T\| < \mu \|\vec{R}_N\|$ et \vec{R} est alors à l'intérieur du cône de frottement.

Remarque 3 : On observe généralement que le coefficient de frottement en statique (à l'équilibre) μ est différent de celui que l'on mesure en dynamique (lors d'un mouvement) μ_d . En première approximation, on prendra toutefois en général $\mu = \mu_d$. Ces coefficients liés à l'état des surfaces sont très complexes et peuvent éventuellement dépendre de nombreux paramètres : vitesse, température, environnement, ... (C'est la différence entre μ et μ_d qui explique qu'il est plus facile de déboucher une bouteille après avoir mis en rotation son bouchon, ou pourquoi, lorsqu'on pousse une armoire, le plus dur est de la mettre en mouvement)

b.4 Forces pressantes Il s'agit des forces observées en présence d'un fluide, c'est à dire d'un liquide ou d'un gaz. (Rappel : on appelle **fluide** tout corps qui prend la forme du récipient qui le contient et qui n'a donc pas de forme propre.) Par exemple l'eau d'un aquarium exerce sur les parois de celui-ci des forces dites forces pressantes ou forces de pression. Ces forces trouvent leur origine dans le mouvement brownien des molécules du fluide. Lorsque ces molécules viennent heurter les parois du récipient qui les contient, elles leur communiquent une partie de leur quantité de mouvement. Ceci provoque une force résultante sur ces parois. Comme le mouvement des molécules est de direction aléatoire, en l'absence de mouvement d'ensemble du fluide, la **résultante de toutes les forces élémentaires** produites par toutes les molécules sur une surface **a comme direction la normale à la paroi et est dirigée du fluide vers le système**.

Définition

Poussée d'Archimède

L'ensemble des forces pressantes exercées par un fluide en équilibre sur un solide qui s'y trouve immergé se réduit à une force unique, dite « poussée d'Archimède », verticale, ascendante, appliquée au centre de gravité du fluide déplacé et d'intensité égale au poids de ce fluide déplacé.

$$\vec{\Pi} = -\rho_{fluide} V_{déplacé} \vec{g}$$

où ρ_{fluide} est la masse volumique du fluide, $V_{déplacé}$ le volume du fluide déplacé par le système et \vec{g} l'accélération de la pesanteur.

Remarque :

Le point C , **centre de gravité du fluide déplacé**, est appelé centre de poussée. Il est en général **différent du centre de gravité du solide** (sauf si le fluide et le solide sont tous les deux homogènes).

Exercice 10

Un ballon météorologique a une masse à vide de 7,5 kg et emporte 12 kg d'appareillage scientifique. Il est gonflé à l'hélium et atteint alors un diamètre de 5 m. Peut-il décoller ?

masse volumique de l'air : $1,16 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;

masse volumique de l'hélium : $0,16 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

b.5 Force de frottement visqueux ou frottement fluide Lorsque qu'il existe un mouvement entre le fluide et le solide, on constate de plus que le fluide en contact avec un élément de surface dS du solide exerce une force tangente de frottement à la surface dS du solide immergée. Vous verrez ultérieurement que ces frottements fluides sont associés à la notion de viscosité. Les effets de la viscosité ne se voient que dans la dynamique des fluides, qui ne sera étudiée en détail qu'en département. Nous retiendrons simplement que pour un corps en mouvement dans un fluide, aux forces de pression s'ajoutent alors des forces de frottement fluide de résultante **de même direction que le mouvement, et de sens opposé à la vitesse du solide**. La valeur de cette force de frottement fluide est assez complexe et dépend en particulier de la forme du solide et si l'écoulement est turbulent ou laminaire.

- Si l'écoulement est laminaire (c'est-à-dire à faible vitesse) on pourra généralement considérer avec une bonne approximation que la force est proportionnelle à la vitesse du solide :

$$\vec{f} = -\lambda \vec{v}$$

avec λ coefficient de proportionnalité positif.

- Si l'écoulement est turbulent (à grande vitesse) on considérera généralement que la force est proportionnelle au carré de la vitesse du solide :

$$\vec{f} = -k \|\vec{v}\| \vec{v}$$

avec k coefficient de proportionnalité positif dépendant de la forme du solide.

Il existe d'autres forces macroscopiques (comme par exemple la tension superficielle) que nous ne décrirons pas dans ce cours. Elles seront, si besoin, introduites avec leurs caractéristiques dans les exercices.

Exercice 11

A l'aide du cours, remplir le tableau ci-dessous. Toutes les cases contenant un « ? » ne peuvent pas être remplies en début d'exercice, elles correspondent aux inconnues que vous pourrez peut-être déterminer ultérieurement.

Force	Expression vectorielle ?	direction	sens	norme	Pt d'application	Contact ou à distance ?	Inconnues ?
Poids							-
Gravitation							-
Force électrique							-
Force magnétique							-
Tension d'un fil	-			?			$\ \overrightarrow{T_{fil}}\ $
Rappel d'un ressort							-
Frottement fluide					?		-
Frottement solide	-			?	?		$\ \overrightarrow{R_T}\ $
Réaction normale	-			?	?		$\ \overrightarrow{R_N}\ $
Réaction du support	-	?		?	?		R_x, R_y, R_z
Poussée d'Archimède							-

II Équilibre d'un point

Anticipons un peu sur le chapitre 4 avec les lois de Newton. Les 2ème et 3ème lois vont nous être ici utiles pour étudier l'équilibre d'un point. Ces lois seront étudiées plus en détails au second semestre.

II.1 Principe des actions réciproques ou 3ème loi de Newton

Théorème

Troisième loi de Newton

Considérons deux points (A) et (B) en interaction. Soit $\overrightarrow{F_{AB}}$ la force exercée par (A) sur (B) et soit $\overrightarrow{F_{BA}}$ la force exercée par (B) sur (A). Le principe des actions réciproques, ou principe de l'action et de la réaction, ou encore 3ème loi de Newton, stipule que **ces deux forces sont opposées et portées toutes deux par la droite (AB)**.

$$\overrightarrow{F_{AB}} = -\overrightarrow{F_{BA}}$$

Attention : Cette loi est valable quel que soit le référentiel et quel que soit le mouvement du système.

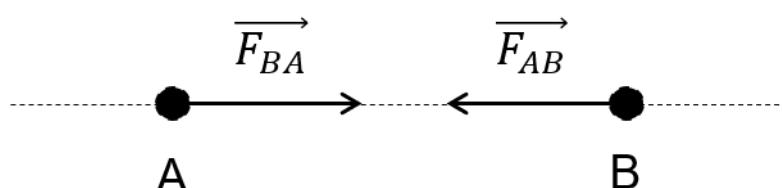


Figure 1.6 – Principe des actions réciproques

Cette loi indique par exemple que la force que votre corps exerce sur la chaise sur laquelle vous êtes assis est opposée à la force que la chaise exerce sur vous. Ces deux forces ont donc même direction, des sens opposés et des normes égales.

II.2 Principe fondamental de la dynamique ou 2ème loi de Newton

Pour étudier l'équilibre d'un point, nous allons également avoir besoin de la 2ème loi ou principe fondamental de la dynamique :

Théorème

Deuxième loi de Newton ou PFD

Dans un référentiel **galiléen**, la somme vectorielle des forces $\Sigma \vec{F}$ qui s'exercent sur un point matériel est reliée à sa quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ par la relation :

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

et pour un point de masse m constante on obtiendra alors :

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

avec \vec{a} l'accélération du point étudié.

II.3 Équilibre d'un point

Nous verrons plus en détail au prochain chapitre la notion d'accélération. Mais on peut déjà comprendre que si un point est à l'équilibre dans un référentiel, cela signifie que sa position par rapport à ce référentiel ne varie pas. Donc sa vitesse reste constamment nulle dans ce référentiel et son accélération est également nulle.

On peut donc énoncer le principe fondamental de la statique (PFS) pour un point.

Théorème

Principe fondamental de la statique (PFS) pour un point

Un point est en équilibre si et seulement si la somme vectorielle des forces qui s'appliquent sur lui est nulle.

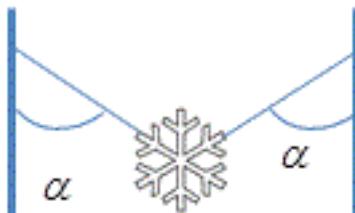
$$\text{À l'équilibre d'un point} \quad \sum \vec{F} = \vec{0}$$

L'étude de l'équilibre d'un point peut être l'occasion de déterminer

- la position d'équilibre d'un point en déterminant les paramètres géométriques de l'équilibre,
- ou l'expression d'un ou de plusieurs forces s'exerçant sur ce point.

Exercice 12

Une décoration de Noël de masse m est accrochée symétriquement au-dessus d'une rue par deux câbles sans raideur. Calculez la tension de chaque câble en fonction de m et α .



II.4 Conclusion

Tout problème de mécanique sera entièrement faux s'il manque une force ou si une seule des caractéristiques des forces est fausse. Il est donc indispensable de connaître parfaitement les lois phénoménologiques ci-dessus. Nous vous encourageons d'une part à remplir le tableau bilan de l'exercice 11 une fois que vous aurez appris votre cours et d'autre part à suivre la méthodologie suivante en début de tout exercice de mécanique.

- Choisir et indiquer le **système** { S }.
- Faire un **bilan des forces** : lister les forces **appliquées au système** : Commencer par les interactions à distance, puis les forces de contact (lister tous les objets qui touchent le système).
- Indiquer pour chaque force leurs 4 caractéristiques : donner tout ce qui est connu et indiquer **quelles caractéristiques sont inconnues** (s'aider pour cela du tableau ci-dessus). Lorsque certaines de ces caractéristiques sont inconnues, introduire le nom de la grandeur littérale qui sera utilisée pour modéliser cette inconnue et ses composantes.
- Faire un **schéma** (cf. fiche méthode sur les qualités d'un schéma dans le poly « Démarche scientifique et concepts fondamentaux »).

III Moment d'une force

III.1 Introduction au concept de moment

Vous avez sans doute déjà remarqué que pour soulever un gros rocher, on peut utiliser une barre métallique et faire un bras de levier pour « démultiplier » la force. L'effet sera d'autant plus intéressant que la longueur du bras de levier sera importante. Dans ce cas, on voit immédiatement que la seule notion de force ne suffit pas à décrire complètement l'action mécanique, mais qu'il faut en plus considérer une grandeur qui implique les deux notions de force et de distance. C'est la notion de moment d'une force.

Pour préciser cette notion on peut remarquer que la direction avec laquelle on applique la force sur le levier va influer sur l'effet mécanique : il faut donc en plus tenir compte de l'angle entre la force et la direction considérée. Enfin l'action mécanique de la force se manifeste par une rotation de l'objet auquel elle est appliquée. Cette rotation peut avoir lieu dans n'importe quelle direction et dans n'importe quel sens, d'où l'introduction d'une nouvelle grandeur vectorielle : le moment d'une force par rapport à un point.

Nous verrons également que lorsque les forces restent dans un plan ou que le mouvement de rotation est contraint autour d'un axe fixe, une simple grandeur scalaire, dérivée de la notion de moment par rapport à un point peut suffire : c'est le moment d'une force par rapport à un axe.

III.2 Moment d'une force par rapport à un point.

On a vu qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point soit à l'équilibre est que la somme des forces qui lui est appliquées soit nulle. Cette relation est appelée « Principe Fondamental de la Statique pour un point » (ou « PFS pour un point »). Nous pourrons généraliser dans la dernière partie de ce chapitre cette relation au barycentre d'un solide : il est immobile si la somme des forces **extérieures** au système est nulle. Pour résumer :

- pour un point à l'équilibre on a $\sum \vec{F} = \vec{0}$ (PFS pour un point) (1)
- pour le barycentre d'un système à l'équilibre on a $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ (2)

Toutefois, cette dernière relation est insuffisante pour décrire l'équilibre d'un système : par exemple si j'écrase de la pâte à modeler avec deux forces opposées, son barycentre ne bougera pas, mais elle sera déformée. Même pour un solide indéformable, cette relation est insuffisante : prenons le cas d'une barre rigide AB , on sait expérimentalement que si on applique deux forces \vec{F}_A et \vec{F}_B telles que $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ comme sur la Figure 1.7, son barycentre G reste immobile, mais la barre tourne autour de G dans le sens horaire. Ainsi (2) est une condition nécessaire mais pas suffisante de l'équilibre d'un solide.

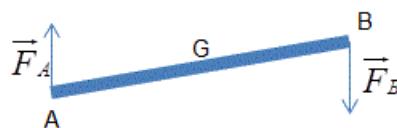


Figure 1.7 – Solide soumis à deux forces \vec{F}_A et \vec{F}_B

En effet pour qu'un solide soit à l'équilibre, il ne faut pas seulement que le barycentre soit immobile, mais aussi **chacun de ses points** : il faudrait donc théoriquement écrire la relation (1) pour tous les points du solide ! L'objectif de cette partie est de trouver une condition nécessaire de l'équilibre d'un solide plus simple que l'écriture du PFS pour chaque point du solide. Pour cela nous allons devoir introduire une nouvelle grandeur : le **moment** d'une force.

a Droite d'action d'une force

Définition

Droite d'action d'une force

La droite définie par le point d'application de la force et le vecteur \vec{F} est appelée **droite d'action** de \vec{F} , ou support de \vec{F} .

La position de cette droite d'action va jouer un rôle important dans ce chapitre : reprenons la figure 1.7, la barre ne tourne que si les forces sont décalées, c'est-à-dire si les droites d'action de \vec{F}_A et \vec{F}_B ne sont pas confondues.

b Définition du moment d'une force par rapport à un point

Considérons une force, appliquée en un point M . Soit A un point de l'espace (Figure 1.8).

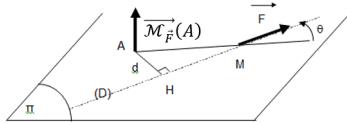


Figure 1.8 – Moment de \vec{F} par rapport à A

Définition

Moment d'une force par rapport à un point

On définit le **moment de la force \vec{F} par rapport au point A** par le produit vectoriel

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(A) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

Attention à apprendre correctement cette formule en connaissant le sens des différents termes intervenant dans la formule : A est le point par rapport auquel on calcule le moment et M est le point où s'applique la force \vec{F} .

Appelons :

- (D) la droite d'action (ou support) de la force \vec{F}
- H la projection de A sur (D)
- d la distance AH , appelé **distance à la droite d'action** ou **bras de levier**.
- θ l'angle **orienté** entre \overrightarrow{AM} et \vec{F}

Propriétés

Moment, dimension

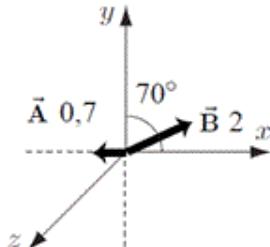
La norme du moment est donc **le produit du bras de levier d par la norme $\|\vec{F}\|$** de la force, en effet :

$$\|\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(A)\| = \|\overrightarrow{AM}\| \|\vec{F}\| |\sin(\theta)| = d \cdot \|\vec{F}\|$$

La dimension d'un moment est ML^2T^{-2} et son unité S.I. le N · m (Newton mètre).

Exercice 13

1. Calculer le moment en $C(a, 2a, 3a)$ de la force $\vec{F}(f, 3f, -f)$ qui s'applique en $B(2a, 0, -a)$ (A.N. $a = -1 \text{ m}$ et $f = 1 \text{ N}$)
2. Sur la figure ci-dessous, dessiner $\vec{A} \wedge \vec{B}$ et calculer $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|$. (\vec{B} est dans le plan (O, x, y) , fait un angle de 70° avec l'axe (Oy) et \vec{A} est de norme 2, est sur l'axe (O, x) et est de norme 0,7).
3. Revoir les exercices d'OMNI sur le produit vectoriel.



c Propriétés

On notera immédiatement divers points importants (voir cours d'OMNI).

Propriétés	Moment nul
Si le point A appartient à la droite d'action de la force, le moment de \vec{F} par rapport à A sera nul : il n'y aura pas d'action de rotation engendrée par \vec{F} .	

Propriétés	Ordre des vecteurs
Comme le produit vectoriel n'est pas commutatif, il est impératif de bien considérer l'ordre des vecteurs dans la définition du moment.	

Propriétés	Bras de levier
La distance d , le bras de levier, c'est à dire la distance entre le point A et la droite d'action de la force, intervient de façon directe dans la valeur du moment. C'est donc cette distance qui va jouer le rôle essentiel et non pas la distance AM .	

En d'autres termes, **le moment de \vec{F} par rapport à A est indépendant du point d'application M , dès lors que M appartient à la droite d'action de \vec{F}** . On voit ici que la notion de droite d'action est finalement plus importante que la notion de point d'application pour l'étude des moments : il n'est pas forcément utile de fixer le point d'application, et il est parfois pertinent de faire « glisser la force sur sa droite d'action » pour simplifier le calcul du moment de la force. Cette notion de « glisseur » sera approfondie en 2A.

Exercice 14

Soit \vec{F} une force de droite d'action (D).

- En utilisant le calcul vectoriel et deux points P et P' de (D) , montrer que son moment par rapport à un point A quelconque ne dépend pas du point d'application choisi sur (D) .
- En utilisant le calcul vectoriel, montrer que le moment de \vec{F} par rapport à un point A sur sa droite d'action (D) est nul.

d Interprétation

Nous démontrerons au chapitre suivant le lien exact entre le moment d'une force et le mouvement de rotation du solide. Nous pouvons cependant dès maintenant sentir expérimentalement toutes les informations contenues dans ce **vecteur moment**. Faisons l'expérience de pensée suivante : un solide accroché au point A est soumis à une force \vec{F} en $M \neq A$ (cf Figure 1.9).

- La **direction** du moment en A est perpendiculaire à \vec{F} et à \overrightarrow{AM} (propriété du produit vectoriel) : la direction du moment nous permet de connaître le plan du mouvement créé par \vec{F} et inversement.

- Le **sens** du moment est lié au sens du mouvement induit par la force \vec{F} (propriété du produit vectoriel) : la règle de la main droite avec le pouce sur le vecteur moment nous donne le sens de \vec{M}_F et donc du mouvement induit avec la paume de la main droite (\vec{F} étant dirigé de la paume vers l'extrémité des doigts), et inversement.
- Nous verrons plus en détail au chapitre 5 le rôle de la **norme** du vecteur moment sur le mouvement, mais expérimentalement on voit que plus la norme du moment est grande (force et/ou distance de la droite d'action à A grande) plus l'effet sur le mouvement sera important.

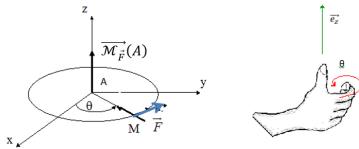


Figure 1.9 – Sens et direction du vecteur moment

III.3 Moment d'une force par rapport à un axe.

a Définition

Reprendons le cas du § b : une force \vec{F} , de droite d'action (D) et un point A . Soit un axe $(\Delta) = (A, \vec{k})$ de direction quelconque \vec{k} , passant par A . Nous verrons que pour caractériser l'effet de la force \vec{F} vis à vis d'une rotation par rapport à cet axe (Δ) , il est pertinent d'introduire le moment de la force par rapport à l'axe (Δ) , c'est-à-dire la composante de $\vec{M}_F(A)$ sur l'axe (Δ) .

Définition

Moment d'une force par rapport à un axe

Soit un axe $(\Delta) = (A, \vec{k})$ de direction quelconque \vec{k} , passant par A et une force \vec{F} , de droite d'action (D). on définit le moment de la force \vec{F} par rapport à l'axe Δ par

$$\mathcal{M}_{\vec{F}}(\Delta) = \vec{M}_{\vec{F}}(A) \cdot \vec{k} = (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{k}$$

Le moment par rapport à l'axe Δ , $\mathcal{M}_{\vec{F}}(\Delta)$ s'exprime donc à l'aide du produit mixte $(\vec{AM}, \vec{F}, \vec{k})$.

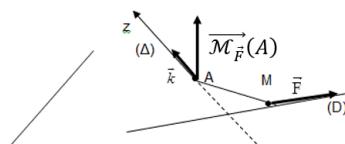


Figure 1.10 – Composante du moment $\vec{M}_{\vec{F}}(A)$ sur l'axe (Δ)

Cette définition du moment par rapport à un axe semble plus compliquée que la définition du moment par rapport à un point, mais cela présente l'avantage de manipuler des grandeurs **scalaires** plutôt que vectorielles.

Le moment par rapport à un axe (Δ) est un scalaire (algébrique) égal à la composante sur (Δ) du moment par rapport à un point qui est un vecteur. Soit dans la base cartésienne $(\vec{u}_x; \vec{u}_y; \vec{u}_z)$:

$$\vec{M}_{\vec{F}}(A) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\vec{F}}(Ax) \\ \mathcal{M}_{\vec{F}}(Ay) \\ \mathcal{M}_{\vec{F}}(Az) \end{pmatrix}$$

Exercice 15

On considère, dans un repère $(O; x, y, z)$, le point $A(0, 2a, -a)$ et le point $B(a, a, a)$. En B est appliquée une force \vec{F} dont les composantes sont $(-2f, -f, f)$. On considère par ailleurs un axe (Δ) passant par A et orienté selon un vecteur unitaire \vec{k} ayant comme composantes $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$. Déterminer :

- le moment de \vec{F} par rapport à A (composantes et norme),
- le moment de \vec{F} par rapport à l'axe (Δ) .

A.N. : $a = 1 \text{ m}$ et $f = -50 \text{ N}$

b Intérêt

Dans la majorité des exercices de statique cette année, les droites d'actions des forces appartiendront toutes à un même plan, par exemple (xOy) . Tous les moments des forces seront donc parallèles à l'axe (Oz) perpendiculaire à ce plan et il n'est donc pas utile de redonner l'information de direction du moment à chaque fois.

En effet, dans le cas le plus général $\overrightarrow{\mathcal{M}_F}(A)$ est un vecteur à trois composantes, mais si on prend $\vec{F}(F_x, F_y, 0)$ s'appliquant en $M(x, y, 0)$ et un point $A(x_A, y_A, 0)$, alors $\overrightarrow{\mathcal{M}_F}(A) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = [(x - x_A)F_y - (y - y_A)F_x]\vec{e}_z$ n'a qu'une composante sur \vec{e}_z .

Il suffit donc dans ce cas de manipuler uniquement un scalaire (algébrique) : la composante sur l'axe (Oz) du moment de la force \vec{F} au point A qui sera notée : $\overline{\mathcal{M}_F}(Az) = \overrightarrow{\mathcal{M}_F}(A) \cdot \vec{e}_z$. On appellera **cette composante sur \vec{e}_z le moment de la force \vec{F} par rapport à l'axe (Az)** .

Point méthode

Problème dans un plan

On retiendra que dans le cas particulier (très fréquent) où les forces sont dans un plan perpendiculaire à l'axe (Δ) , il est souvent plus commode d'utiliser le moment par rapport à l'axe (Δ) que le moment par rapport à un point.

c Propriétés

Plusieurs points sont à signaler :

Propriétés

Sens de la rotation

Comme l'axe (Δ) est orienté, le signe positif ou négatif du moment scalaire $\overline{\mathcal{M}_F}(\Delta)$ renseigne sur l'effet de la force \vec{F} sur le sens de la rotation.

Exercice 16

Sur la figure du paragraphe d) suivant, quel est le sens du moment de la force \vec{F} par rapport au point A ? Quel est le signe du moment de \vec{F} par rapport à l'axe (Az) ?

Propriétés

Point sur l'axe de rotation

Le moment de \vec{F} par rapport à l'axe (Δ) est indépendant du point considéré sur l'axe Δ .

En effet, si A et A' sont deux points du même axe $(\Delta) = (A, \vec{k}) = (AA')$, on a :

$(\overrightarrow{A'M} \wedge \vec{F}).\vec{k} = ((\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM}) \wedge \vec{F}).\vec{k} = (\overrightarrow{A'A} \wedge \vec{F}).\vec{k} + (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}).\vec{k}$. Or $\overrightarrow{AA'}$ et \vec{k} sont colinéaires ; donc $(\overrightarrow{A'A} \wedge \vec{F}).\vec{k} = 0$. Et finalement : $(\overrightarrow{A'M} \wedge \vec{F}).\vec{k} = (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}).\vec{k}$

En pratique, on peut donc choisir pour A le point I , projeté orthogonal sur l'axe du point d'application de \vec{F} .

Propriétés

Moment nul

Le moment de \vec{F} par rapport à l'axe Δ est nul :

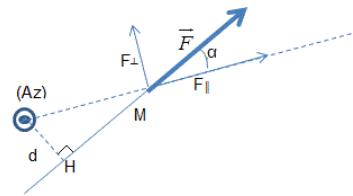
- si le support de \vec{F} coupe l'axe Δ (d est alors égal à 0)
- si le support de \vec{F} est parallèle à Δ (\vec{k} est perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathcal{M}_F}(A)$).

Exercice 17

Montrer les deux propriétés ci-dessus par un calcul vectoriel du moment par rapport à l'axe.

d Méthodes de calcul du moment par rapport à un axe

On suppose que la force \vec{F} et le point A sont dans un plan muni d'un repère cartésien (O, x, y) ou d'une base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Comme le moment $\mathcal{M}_{\vec{F}}(A)$ est parallèle à \vec{e}_z , on a $|\mathcal{M}_{\vec{F}}(Az)| = \|\mathcal{M}_{\vec{F}}(A)\|$. Appelons α l'angle $(\overrightarrow{AM}, \vec{F})$.



On a alors 3 méthodes possibles pour calculer le moment $\mathcal{M}_{\vec{F}}(Az)$:

Point méthode

On utilise les coordonnées. Par exemple, avec les coordonnées cartésiennes, on a $\vec{F}(F_x, F_y, 0)$, $A(x_A, y_A, 0)$, $M(x, y, 0)$. Donc :
$$\mathcal{M}_{\vec{F}}(Az) = ((x - x_A)F_y - (y - y_A)F_x)$$

Exercice 18

Faire le même calcul en cylindriques en prenant le point O sur l'axe (Az) .

Point méthode

2ème méthode : Bras de levier

On calcule d'abord la valeur absolue du moment par rapport à l'axe qui est égale au produit de la norme de la force par le bras de levier (=la distance à la droite d'action) et on détermine le signe avec la règle de la main droite (cf propriétés c).
$$|\mathcal{M}_{\vec{F}}(Az)| = \|\mathcal{M}_{\vec{F}}(A)\| = \|\overrightarrow{AM}\| \|\vec{F}\| |\sin(\alpha)| = d \|\vec{F}\|$$

Pensez à dessiner le bras de levier sur le schéma.

Point méthode

3ème méthode : Décomposition de la force

On décompose d'abord la force \vec{F} en une composante parallèle \vec{F}_{\parallel} à \overrightarrow{AM} et une composante perpendiculaire \vec{F}_{\perp} à \overrightarrow{AM} . Puis on calcule
$$|\mathcal{M}_{\vec{F}}(Az)| = \|\mathcal{M}_{\vec{F}}(A)\| = \|\overrightarrow{AM}\| \|\vec{F}\| |\sin(\alpha)| = \|\overrightarrow{AM}\| \|\vec{F}_{\perp}\|$$
 : la valeur absolue du moment par rapport à l'axe est égale au produit de distance AM par la composante perpendiculaire de la force. Le signe est ensuite déterminé avec la loi de la main droite (cf propriétés c).

Exercice 19

Comparer cette dernière méthode avec l'exercice 18.

e Exemple calcul du moment du poids pour le pendule

Soit un système classique en mécanique appelé pendule (cf Figure 1.11), à savoir une masse m située au niveau d'un point M et attachée par un fil à un point fixe O . Calculons maintenant le moment du poids appliqué en M par rapport à l'axe (Oz) . On fera attention sur le schéma à la cohérence entre l'orientation de l'angle θ et celle de l'axe z .

1ère méthode (coordonnées) : $\vec{P}(mg, 0, 0); O(0, 0, 0); M(x, y, 0)$.

$$\mathcal{M}_{\vec{P}}(Oz) = -ymg$$

(Le signe est donc obtenu directement : si $y > 0 \implies \mathcal{M}_{\vec{P}}(Oz) < 0$ et si $y < 0 \implies \mathcal{M}_{\vec{P}}(Oz) > 0$)

2ème méthode (bras de levier) :
$$|\mathcal{M}_{\vec{P}}(Oz)| = d \|\vec{P}\| = |y| mg$$
. Si $y > 0$ le poids fait tourner dans le sens trigonométrique ($-\vec{e}_z$ avec la règle de la main droite).

On en déduit : $\mathcal{M}_{\vec{P}}(Oz) = -ymg$

3ème méthode (décomposition de la force) :
$$|\mathcal{M}_{\vec{P}}(Oz)| = r \|\vec{P}\| |\sin \theta|$$
. Si $\theta > 0$ le poids fait tourner dans le sens trigonométrique ($-\vec{e}_z$ avec la règle de la main droite).

On en déduit : $\mathcal{M}_{\vec{P}}(Oz) = -rmg \sin \theta = -ymg$

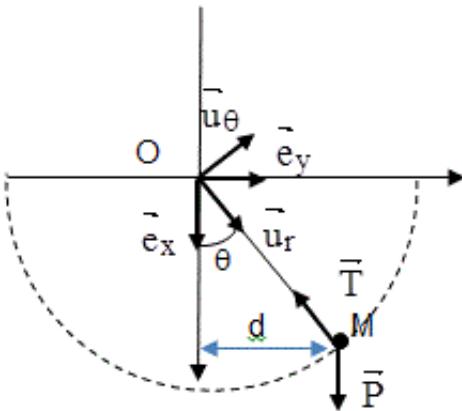


Figure 1.11 – Pendule

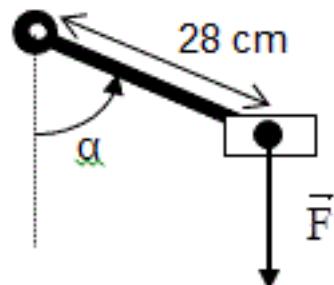
Exercice 20

Un cycliste exerce une force constante \vec{F} de norme 200 N sur la pédale de sa bicyclette.

Donner la grandeur et le signe du moment de la force par rapport à l'axe du pédalement dans le cas $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 62^\circ$ et $\alpha = -33^\circ$ (cf. figure ci contre).

Entraînez-vous à utiliser les trois méthodes. On prendra comme sens positif de rotation celui des aiguilles d'une montre.

Pour quelle position de la pédale ce moment est-il nul ?



Force \vec{F} appliquée sur le pédalement

IV Ensembles de forces

IV.1 Introduction

Un système mécanique quelconque, qu'il s'agisse d'un solide, d'un point matériel ou d'un ensemble plus complexe, est généralement soumis simultanément à plusieurs forces \vec{F}_i , chacune appliquée au point P_i . Deux vecteurs vont nous permettre de caractériser cet ensemble de forces :

- la **résultante des forces** (= somme vectorielle des forces) $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$
- le **moment résultant** (= somme vectorielle des moments) par rapport à un point A quelconque $\vec{\mathcal{M}}(A) = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i(A)$

Il va donc falloir calculer ces deux vecteurs, pour des ensembles de forces très divers. Nous allons donner ci-dessous un certain nombre d'exemples, mais dans la pratique tous les ensembles de forces se ramènent en fait aux 4 cas suivants :

Cas a : La somme des forces et la somme des moments est nulle.

Cas b : La somme des forces est nulle mais pas la somme des moments.

Cas c : Il existe un point par rapport auquel la somme des moments est nulle mais pas la somme des forces.

Cas d : Aucune des deux sommes n'est nulle.

Les cas b et c montrent clairement que **la somme des moments des forces n'a donc rien à voir avec le moment de la somme des forces** : attention à ne pas les confondre !

IV.2 Ensemble de forces équivalent à un couple (cas b)

Prenons par exemple le cas de la Figure 1.7. On a $\vec{F}_B + \vec{F}_A = \vec{0}$ mais, en choisissant un point C quelconque, $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_A}(C) = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_A}(C) + \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_B}(C) = \vec{CA} \wedge \vec{F}_A + \vec{CB} \wedge \vec{F}_B$ soit $\vec{\mathcal{M}}(C) = \vec{CB} \wedge (\vec{F}_A + \vec{F}_B) + \vec{BA} \wedge \vec{F}_A = \vec{BA} \wedge \vec{F}_A$.

La somme de ces deux forces est nulle, mais la somme des deux moments n'est pas nulle (sauf dans le cas très particulier où \overrightarrow{AM} est colinéaire à $\overrightarrow{F_A}$, cf. cas a). Nous sommes dans le **cas b**, et on dit que les forces forment un couple de forces.

Par généralisation, on appelle **couple de forces** tout ensemble de forces tel qu'il existe au moins un point C tel que :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i(C) \neq \vec{0}$$

Les exemples de couples de forces sont très courants : les frottements d'une roue sur son axe forment par exemple un couple de forces : il y a une infinité de forces élémentaires (toutes opposées au mouvement de rotation par définition de la force de frottement) qui s'opposent deux à deux mais qui ont toutes un moment par rapport à un point de l'axe de sens opposé au sens de rotation.

Propriété des couples : soit un système de forces \vec{F}_i , de points d'application P_i , équivalent à un couple. Soit A et B deux points quelconques.

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}(B) &= \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i(B) = \sum_i \overrightarrow{BP}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_i (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}_i) \wedge \vec{F}_i = \overrightarrow{BA} \wedge \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \overrightarrow{AP}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{\mathcal{M}}(A) \text{ puisque} \\ \sum_i \vec{F}_i &= \vec{0} \text{ (ce système de forces est un couple).} \end{aligned}$$

Propriétés

Moment d'un couple

Le moment d'un couple ne dépend pas du point par rapport auquel il est calculé : en général, on ne le précise donc pas et on parle simplement du moment du couple $\vec{\mathcal{M}}_{couple}$.

Dans le cas d'un couple créé par un grand nombre de forces, par exemple les frottements d'une roue sur son axe, plutôt que de représenter l'infinité de forces élémentaires, on représente juste le couple par une flèche courbe (cf. figure 1.12).



Figure 1.12 – Schématisation d'un couple créé par un grand nombre de forces élémentaires

IV.3 Ensemble de forces équivalent à une action nulle (cas a)

Prenons par exemple 2 charges q_A et q_B en interaction électrostatique $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{AB^2} \vec{r}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$, donc $\vec{F} = \sum \vec{F} = \vec{0}$. Il s'agit donc d'un couple, mais d'un couple très particulier

car $\vec{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{FA} \rightarrow \overrightarrow{B}}(A) = \vec{0} = \vec{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{FB} \rightarrow \overrightarrow{A}}(A)$ donc $\vec{\mathcal{M}}_{couple}(A) = \vec{\mathcal{M}}_{couple} = \vec{0}$: la somme des forces ET la somme des moments est nulle.

On montrera que ceci se généralise à toutes les interactions intérieures à un système (cf V.1). Un ensemble de forces est équivalent à une **action nulle** s'il existe au moins un point C tel que :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i(C) = \vec{0}$$

IV.4 Ensemble de forces équivalent à une seule force (cas c)

Prenons cette fois l'exemple du poids d'un système de masse totale m_{tot} constitué de N points P_i de masse m_i . La résultante du poids est $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{g} = m_{tot} \vec{g}$. Le moment résultant au point A (= la somme de tous les moments au point A) vaut :

$$\vec{\mathcal{M}}(A) = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge (m_i \vec{g}) = \sum_i (m_i \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{g}) = (\sum_i m_i \overrightarrow{AM}_i) \wedge \vec{g} = m_{tot} \overrightarrow{AG} \wedge \vec{g} = \overrightarrow{AG} \wedge m_{tot} \vec{g}$$

par définition du barycentre G . Si on calcule le moment résultant au point G , $\vec{\Gamma}(G) = \vec{0}$.

Ainsi, tout se passe comme si l'ensemble des N poids des N points était équivalent à une seule force s'appliquant au point G . On a donc l'habitude de parler du poids (au singulier) d'un objet, mais il ne faut pas oublier qu'il s'agit en réalité d'une infinité de forces élémentaires s'appliquant sur chaque petit volume élémentaire du solide. Cet ensemble de forces est donc un exemple du **cas c** : la somme des moments est nulle si on les calcule en G (mais est non nulle en un autre point).

Ceci peut se généraliser à un ensemble de forces toutes colinéaires : on peut dans ce cas toujours trouver un point tel que le moment en ce point soit nul. Plusieurs autres systèmes de forces peuvent se réduire à une **force unique** s'appliquant en un point C , c'est à dire vérifiant :

$$\sum_i \vec{F}_i \neq \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i(C) = \vec{0}$$

Voir par exemple l'exercice 21 ci-dessous.

Propriété essentielle : Soit un système de forces \vec{F}_i , de points d'application P_i , pour lequel on a trouvé un point P_0 tel que le moment résultant par rapport à P_0 est nul. Soit A un point quelconque. On a :

$$\vec{\mathcal{M}}(A) = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i(A) = \sum_i \overrightarrow{AP}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_i (\overrightarrow{AP}_0 + \overrightarrow{P_0P}_i) \wedge \vec{F}_i = \overrightarrow{AP}_0 \wedge \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \overrightarrow{P_0P}_i \wedge \vec{F}_i$$

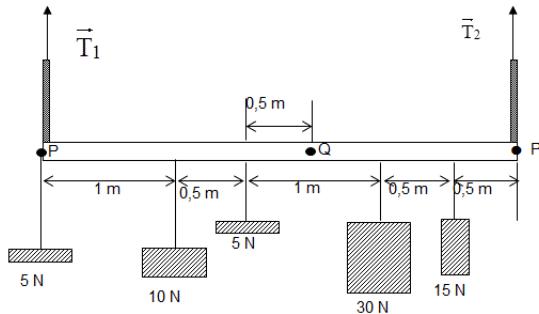
Comme $\sum_i \overrightarrow{P_0P}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{\mathcal{M}}(P_0) = \vec{0}$, on a donc simplement : $\vec{\mathcal{M}}(A) = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i(A) = \overrightarrow{AP}_0 \wedge \sum_i \vec{F}_i = \overrightarrow{AP}_0 \wedge \vec{F}$ où l'on reconnaît le moment de la résultante des forces appliquée en P_0 . **Tout se passe donc comme si ce système de forces était équivalent à une force unique égale à la résultante des forces \vec{F} s'appliquant en P_0 .**

Exercice 21

Montrer qu'un ensemble de forces dont les supports se croisent en A est équivalent à une force unique dont on donnera le point d'application.

Exercice 22

- Caractériser en grandeur et direction, après avoir défini des axes de référence, le moment de chaque poids de la figure ci dessous par rapport au point P , puis par rapport au point Q .
- Positionner le barycentre des forces G , c'est à dire le point appartenant à (PP') où s'applique le poids total du système.
- On suppose que la masse de la barre horizontale sur laquelle sont fixés les poids est négligeable. Calculer les tensions T_1 et T_2 des barres supportant l'ensemble.



IV.5 Propriété sur la résultante des moments

Attention, la résultante des moments par rapport à un point dépend en général du point considéré. Cherchons la relation entre le moment par rapport à A et le moment par rapport à A' :

$$\vec{\mathcal{M}}'(A') = \sum_i \overrightarrow{A'M}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_i (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM}_i) \wedge \vec{F}_i = (\overrightarrow{A'A} \wedge \sum_i \vec{F}_i) + \vec{\mathcal{M}}(A) \text{ donc : } \vec{\mathcal{M}}'(A') = (\overrightarrow{A'A} \wedge \vec{F}) + \vec{\mathcal{M}}(A)$$

Cette loi très générale sera à utiliser en deuxième année ; elle nous permet ici de retrouver immédiatement les propriétés suivantes, déjà énoncées :

Conséquences :

- La résultante des moments dépend donc en général du point considéré (cas c ou d).

2. Si la résultante des forces est nulle ($\vec{F} = \vec{0}$), c'est-à-dire dans le cas d'un couple (cas b) alors la résultante des moments ne dépend pas du point considéré. $\vec{\mathcal{M}}(A') = \vec{\mathcal{M}}(A)$ (Dans ce cas on ne précise donc pas le point.). Si $\vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}(A) = \vec{0}$ (cas a) alors la résultante des moments est nulle quel que soit le point choisi.
3. s'il existe un point A où la résultante des moment est nulle ($\vec{\mathcal{M}}(A) = \vec{0}$) , c'est-à-dire dans le cas c, alors tout se passe comme si la résultante des forces s'applique en A et alors DANS CE CAS SEULEMENT la résultante des moments est égale au moment de la résultante des forces. $\vec{\mathcal{M}}_C = (\vec{CA} \wedge \vec{F})$

V Application à la statique du solide

Nous allons voir que l'introduction de la notion de moment va nous permettre de décrire l'équilibre d'un solide de manière beaucoup plus simple que d'écrire le Principe Fondamental de la Statique pour chaque point du solide.

V.1 Forces intérieures et forces extérieures

Définition	Forces intérieures ou extérieures
Les forces subies par les différents éléments matériels d'un système peuvent avoir pour origine soit les autres éléments de ce solide, soit des éléments extérieurs au solide : dans le premier cas on parlera de forces intérieures , dans le second de forces extérieures .	

Soit P_i un point du système : on notera $\vec{F}_{i\ int}$ la somme des forces exercées sur P_i par les autres points du système (= les actions intérieures au système) et $\vec{F}_{i\ ext}$ la somme des forces exercées sur P_i par des objets extérieurs au système. La résultante des forces s'exerçant sur ce point est donc $\vec{F}_i = \vec{F}_{i\ int} + \vec{F}_{i\ ext}$.

Soit deux points A et B en interaction. La troisième loi de Newton (cf. chapitre 4 et II.1) stipule que $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ (la force exercée par (A) sur (B)) et $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ (la force exercée par (B) sur (A)) sont deux forces opposées, portées toutes deux par la droite (AB).

La résultante de ces deux forces, $\vec{F}_{A \rightarrow B} + \vec{F}_{B \rightarrow A}$ est donc nulle.

Calculons maintenant le moment résultant de cet ensemble de deux forces par rapport à un point O quelconque :

$$\vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{A \rightarrow B}}(O) + \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{B \rightarrow A}}(O) = \vec{OA} \wedge \vec{F}_{B \rightarrow A} + \vec{OB} \wedge \vec{F}_{A \rightarrow B}$$

$$\text{Soit } \vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{OB} \wedge (\vec{F}_{B \rightarrow A} + \vec{F}_{A \rightarrow B}) + \vec{BA} \wedge \vec{F}_{B \rightarrow A}$$

Or $\vec{F}_{A \rightarrow B} + \vec{F}_{B \rightarrow A} = \vec{0}$ et $\vec{BA} \wedge \vec{F}_{B \rightarrow A} = \vec{0}$ (car les deux vecteurs sont colinéaires) donc :

$$\vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{0}$$

Ce résultat est bien entendu généralisable à n'importe quel nombre de points en interaction et en particulier à tous les points P_i d'un système ou d'un solide : pour chaque interaction entre le point P_i et P_j , $\vec{F}_{i \rightarrow j} + \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{i \rightarrow j}}(O) + \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{j \rightarrow i}}(O) = \vec{0}$, donc lorsque l'on somme sur tous les points :

Propriétés	Forces intérieures
<ul style="list-style-type: none"> • La somme de toutes les forces intérieures d'un solide (ou d'un système) est nulle. • La somme de tous les moments de toutes les forces intérieures d'un solide (ou d'un système) est nulle. 	$\vec{F}_{int} = \sum_i \vec{F}_{i\ int} = \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}_{int} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{i\ int} = \vec{0}$

Ces deux résultats sont **toujours vrais**, que le système soit à l'équilibre ou non, que le référentiel soit galiléen ou non, que le système soit déformable ou non car ils sont basés uniquement sur la troisième loi de Newton.

V.2 Conditions d'équilibre d'un solide : équations de la statique

Soit un système constitué de N points P_i de masse m_i . Si le système est immobile dans un référentiel galiléen, le PFS pour chacun de ses points s'écrit : $\vec{F}_i = \vec{0}$, donc on sommant sur tous les points P_i .

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_{i\ int} + \sum_i \vec{F}_{i\ ext} = \sum_i \vec{F}_{i\ ext} = \vec{0} \text{ car } \sum_i \vec{F}_{i\ int} = \vec{0}$$

De plus, pour tout point A, $\vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{AP}_i \wedge \vec{0} = \vec{0}$.

En sommant sur tous les points P_i :

$\sum_i \overrightarrow{AP}_i \wedge \overrightarrow{F}_i = \sum_i \overrightarrow{AP}_i \wedge (\overrightarrow{F_{int}} + \overrightarrow{F_{ext}}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_{int}}(A) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{ext}}(A) = \overrightarrow{\mathcal{M}_{ext}}(A) = \overrightarrow{0}$, où $\overrightarrow{\mathcal{M}_{int}}(A) = \sum_i \overrightarrow{AP}_i \wedge \overrightarrow{F_{int}} = \overrightarrow{0}$
car la somme sur tout le système des moments des forces intérieures est toujours nulle comme on l'a vu au paragraphe précédent.

Ainsi, si le système est à l'équilibre, on a montré que la somme sur tout le système des moments des forces extérieures $\overrightarrow{\mathcal{M}_{ext}}(A) = \sum_i \overrightarrow{AP}_i \wedge \overrightarrow{F}_{ext}$ est nulle.

Propriétés

Principe fondamental de la statique

On a donc montré ici que **si un solide est à l'équilibre** dans un référentiel galiléen, alors :

- La somme des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle :

$$\overrightarrow{F}_{ext} = \sum_i \overrightarrow{F}_{i,ext} = \overrightarrow{0}$$

- Leur moment par rapport à un point A quelconque est nul :

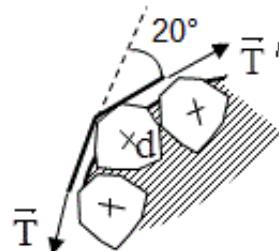
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext}(A) = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_{i,ext}(A) = \overrightarrow{0}$$

Ces deux relations constituent le Principe Fondamental de la Statique (PFS) d'un solide.

Ceci se traduit concrètement par le fait qu'il n'y a pas de force résultante qui puisse engendrer un mouvement de translation ou de moment résultant qui puisse créer un mouvement de rotation.

Exercice 23

Petit problème d'orthodontie : Quels sont la valeur et le sens de la force F qui s'exerce sur la dent saillante d sachant que la tension du fil est de 15 N ?



V.3 Méthodologie

D'une façon générale, les deux équations vectorielles de l'équilibre d'un solide (nullité de la résultante des forces et de leur moment en un point) fournissent 6 équations scalaires dans un espace tridimensionnel. Dans des cas simples (cf. exercices), ce nombre peut se réduire : par exemple pour des problèmes plans, ce nombre d'équations se réduit à 3. On voit donc que dans le cas où le nombre d'inconnues est supérieur à 6 (3 en 2D) l'équilibre d'un système ne suffira pas à les déterminer. Il peut être alors judicieux d'étudier plusieurs systèmes (ou sous-systèmes).

Nous vous proposons donc la méthodologie ci-dessous pour la statique du solide.

- Définir le système { S }.
- Nommer le référentiel (en général référentiel terrestre) et vérifier qu'il est bien galiléen.
- Lister les forces **extérieures** avec leurs 4 caractéristiques : indiquer lesquelles sont inconnues et expliciter tout ce qui est connu.
- Schéma **obligatoire** avec toutes les forces, les inconnues étant représentées « au hasard ». Représenter aussi les couples par une « flèche en rond » (cf Figure 1.12) .
- Choix d'un système de coordonnées **judicieux** (= projections simples) .
- Si équilibre -> projeter les 2 équations de la statique sur les axes.
- Compter les relations (6 en 3D mais 3 en 2D) et les inconnues, éventuellement penser à considérer un autre système s'il y a plus d'inconnues que de relations.
- Quand on a assez d'équations, résoudre le système et répondre à la question posée.
- Vérifier que votre résultat est plausible (dimensions, signes, ordres de grandeur, évolution, ...).

Remarque : dans les problèmes posés en 1A, on peut (en cherchant bien) toujours trouver autant d'équations que d'inconnues. Mais dans les problèmes réels, il arrive souvent que l'on ait plus d'inconnues que d'équations. On dit que le problème est « hyper-statique » et il faut introduire les lois de déformation des milieux pour le résoudre.

Exercice 24

Soit un solide à l'équilibre soumis à 3 forces coplanaires. Démontrer que ces 3 forces sont soit concourantes, soit parallèles.

VI Stabilité des équilibres

Une fois que l'on a déterminé la position d'équilibre d'un système, la question suivante que l'on peut se poser est celle de sa stabilité.

Définition

Stabilité d'un équilibre

Soit un système à l'équilibre dans une position donnée. Une perturbation va écarter le système de sa position d'équilibre.

- Si le système tend à revenir à sa position d'équilibre lorsqu'il en est écarté, il s'agit d'une position d'**équilibre stable**.
- Si au contraire, le système s'éloigne encore plus de sa position d'équilibre lorsqu'il en est écarté, il s'agit d'une position d'**équilibre instable**.
- Si le système s'immobilise dans une nouvelle position d'équilibre très proche, il s'agit d'un **équilibre indifférent**.

L'étude de la stabilité des équilibres peut soit se faire de manière qualitative : on imagine un petit déplacement autour de la position d'équilibre et on étudie l'effet des différentes forces et moments sur l'objet étudié : ont-elles ou non tendance à le ramener vers sa position d'équilibre initial ou au contraire à l'en éloigner davantage ? Elle peut aussi se faire de manière quantitative par l'étude de l'évolution spatiale de l'énergie potentielle du système. Cet aspect sera développé dans le chapitre 5 consacré à l'énergie.

VII Correction des applications directes du cours

Exercice 1 : $\|\vec{f}_1 + \vec{f}_2\|^2 = (f_{1x} + f_{2x})^2 + (f_{1y} + f_{2y})^2 + (f_{1z} + f_{2z})^2$ $\|\vec{f}_1 + \vec{f}_2\|^2 = \|\vec{f}_1\|^2 + \|\vec{f}_2\|^2 + 2\|\vec{f}_1\|\|\vec{f}_2\|\cos\alpha$

La somme des normes égale la norme de la somme uniquement si les deux vecteurs sont colinéaires dans le même sens, c'est-à-dire $\alpha = 0$.

Exercice 2 :

$$\overrightarrow{F}_{g_{objet \rightarrow terre}} = -G \frac{m_{terre} m_{objet}}{d^2} \vec{u}_{terre-objet}$$

(avec d distance entre les centre de gravité de la terre et de l'objet. C'est donc l'opposé de l'attraction de la terre sur le corps de masse m . La force est la même mais l'effet est négligeable à cause de l'inertie de la terre (cf § I.2)

Exercice 3 : $[\varepsilon_o] = I^2 T^4 L^{-3} M^{-1}$, unité : $A^2 m^{-3} kg^{-1} s^4 = C^2 m^{-3} kg^{-1} s^2$

Exercice 4 : $mp = 1 \text{ g}/(\text{nombre d'Avogadro}) \sim 10^{-27} \text{ kg}$, $me \sim 10^{-30} \text{ kg}$, $q \sim 10^{-19} \text{ C}$, on retrouve un rapport de 10^{39} sans avoir besoin de connaître la distance qui se simplifie.

Exercice 5 : $m=80 \text{ kg}$, $P=784 \text{ N}$ ($\sim 800 \text{ N}$). L'unité SI de poids est le newton, celle de masse est le kilogramme. La masse d'un objet est la même partout, le poids dépend de l'endroit où l'objet se trouve. Mexico étant à 2400 m d'altitude l'accélération de la pesanteur à Mexico city est la plus faible de toutes les capitales mondiales ($g_{mexico} = 9,776 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ contre $9,800 < g < 9,825$ en Europe). Pour conserver un poids équivalent, la masse du disque a donc été augmentée.

Exercice 6 : En prenant un axe x vertical vers le bas, y horizontal vers la droite et z vers le lecteur, on définit un angle θ entre la verticale et le fil. On a alors $\vec{T} = -\|\vec{T}\| \cos\theta \hat{i} - \|\vec{T}\| \sin\theta \hat{j}$ et en coordonnées cylindriques : $\vec{T} = -\|\vec{T}\| \vec{e}_r$.

Exercice 7 : De gauche à droite, on a : $\vec{F} = -k(x - \ell_0) \vec{e}_x$; $\vec{F} = -kx \vec{e}_x$ et $\vec{F} = -k(x + \ell_0) \vec{e}_x$

Exercice 8 : $\vec{F} = -k(\|\vec{A}_o \vec{M}\| - \ell_o) \frac{\vec{A}_o \vec{M}}{\|\vec{A}_o \vec{M}\|}$, $\vec{F} = -k(r - \ell_o) \vec{e}_r$

Exercice 9 : a) $\vec{N} = \vec{0}$ b) \vec{N} est vers le haut si par exemple le système n'est soumis que à son poids et à \vec{N} . \vec{N} est vers le bas si par exemple un opérateur extérieur pousse le système vers le haut.

Exercice 10 : oui (la poussée d'Archimède > poids He + poids ballon + poids appareils)

Exercice 11 : Voir cours

Exercice 12 : Système : décoration, référentiel : sol (galiléen), Forces : $\vec{P}, \vec{T}_1, \vec{T}_2$ Par symétrie, $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\| = \|\vec{T}\|$. PFD à l'équilibre : $\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$ Projection sur la verticale : $2\|\vec{T}\| \cos\alpha = mg$

Exercice 13 : a) $\vec{C} \wedge \vec{B} \wedge \vec{F} = (14, -3, 5)fa = (-14, 3, -5)Nm$ b) $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est dirigé sur (-Oz), $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = 0,48$

Exercice 14 : 1) $\mathcal{M}_{\vec{F}}(A) = \vec{AP} \wedge \vec{F} = \vec{AP}' \wedge \vec{F} + \vec{P}'\vec{P} \wedge \vec{F} = \vec{AP}' \wedge \vec{F}$
2) $\mathcal{M}_{\vec{F}}(A) = \vec{AM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ car \vec{AM} et \vec{F} sont colinéaires.

Exercice 15 : $\vec{AB} \wedge \vec{F} = (1, -5, -3)fa$; $\|\vec{AB} \wedge \vec{F}\| = \sqrt{35}|af|$; $(\vec{AB} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{k} = +6/\sqrt{2}fa$

Exercice 16 : sur (+Az), positif

Exercice 17 : Soit M le point d'application de la force et P le point d'intersection entre (Δ) et le support de la force : $\mathcal{M}_{\vec{F}}(Az) = (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z = (\vec{AP} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z + (\vec{PM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z = (\vec{e}_z \wedge \vec{AP}) \cdot \vec{F} + (\vec{PM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z = \vec{0} + \vec{0}$
Si la force est parallèle à Δ , $\mathcal{M}_{\vec{F}}(Az) = (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z = \vec{AM} \cdot (\vec{F} \wedge \vec{e}_z) = \vec{AM} \cdot (\vec{0})$

Exercice 18 : $\mathcal{M}_{\vec{F}}(Az) = rF_\theta$

Exercice 19 : $\|\vec{AM}\| = r$ et $F_\theta = F_\perp$

Exercice 20 : Le moment de \vec{F} vaut : a) +56 N.m b) +49 N.m c) -30 N.m. Ce moment est nul lorsque la manivelle du pédalier est verticale.

Exercice 21 : Le moment en A de chaque force est nul. Le moment résultant est donc nul en A, cet ensemble de force est donc équivalent à une force unique (=la résultante des forces) s'appliquant en A)

Exercice 22 : 1°) En numérotant de 1 à 5 les masses de la gauche vers la droite, et en définissant un repère ($P ; x, y, z$) comme sur la figure 2 , on voit que les moments de tous les points , par rapport à P ou à Q, sont portés par l'axe Oz vers le devant de la feuille, la mesure algébrique de leur composante sur Oz étant la suivante :

a) par rapport à P : $M_1 = 0 \text{ N.m} ; M_2 = -10 \text{ N.m} ; M_3 = -7,5 \text{ N.m} ; M_4 = -75 \text{ N.m} ; M_5 = -45 \text{ N.m}$; (comme l'axe Oz est vers le haut, le sens positif pour les moments est donc le sens trigonométrique).

b) par rapport à Q : $M_1 = +10 \text{ N.m} ; M_2 = +10 \text{ N.m} ; M_3 = +2,5 \text{ N.m} ; M_4 = -15 \text{ N.m} ; M_5 = -15 \text{ N.m}$.

2°) Barycentre des poids : G , tel que, en prenant l'origine en P, $PG \cdot \sum m_i = \sum m_i PA_i$: soit : $PG_x = 2,115 \text{ m}$ ($PG_y = PG_z = 0$).

3°) $PG \cdot T_1 = P'G \cdot T_2$ et $T_1 + T_2 = P$; $T_1 = 25,7 \text{ N}$ et $T_2 = 39,3 \text{ N}$

Exercice 23 : $F = 2T \cos 80^\circ = 5,21 \text{ N}$

Exercice 24 : Supposons que les supports de \vec{F}_1 et \vec{F}_2 se coupent en O, le moment de \vec{F}_1 en O et celui de \vec{F}_2 en O sont nul. Comme on a équilibre, la somme des moments en O est nulle, donc le moment de \vec{F}_3 est nul aussi : les 3 forces sont concourantes en O. Supposons maintenant que les supports de \vec{F}_1 et \vec{F}_2 ne se coupent pas : comme elles sont coplanaires, cela implique qu'elles sont donc parallèles. Comme on a équilibre $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$, les 3 forces sont donc parallèles.

Annexe : Étude des liaisons (tous les cas, dont cas d)

Dès que deux objets sont en contact, ils interagissent l'un avec l'autre et cette interaction peut a priori être modélisée par une force résultante \vec{F} et un moment résultant $\vec{\mathcal{M}}$. De manière simple s'il n'y a aucun contact entre deux objets, aucun effort de contact ne peut être transmis et $\vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}} = \vec{0}$. Si maintenant les deux objets sont soudés l'un à l'autre, tous les efforts sont transmis, et a priori les 3 composantes de \vec{F} sont non nulles ainsi que les 3 composantes de $\vec{\mathcal{M}}$. Il existe de nombreux cas intermédiaires suivant les mouvements sans frottements autorisés.

Un solide indéformable dans l'espace peut se déplacer librement dans un mouvement qu'on peut décomposer suivant 6 éléments indépendants : 3 translations et 3 rotations autour d'axes fixes dans les trois directions d'une base liée à notre espace à 3 dimensions (cf. Figure 1.13).

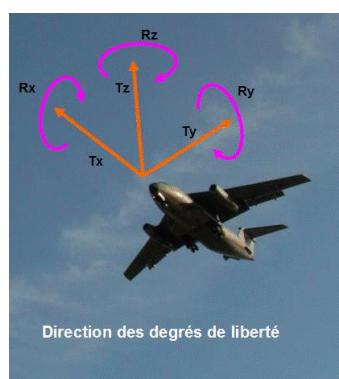


Figure 1.13 – Les 6 degrés de liberté pour un avion

Établir une **liaison mécanique** entre un objet (l'avion par exemple) et un autre objet (le sol par exemple) consiste à éliminer (ou générer) un ou plusieurs des 6 degrés de liberté possibles entre ces deux objets par l'action d'une force résultante ou d'un moment résultant dans cette (ces) direction(s).

On appelle **liaisons parfaites** des liaisons qui ne font intervenir aucun frottement. Au contraire, lorsque des frottements existent, ces frottements peuvent se traduire par une force résultante de frottements ou bien par un moment résultant des forces de frottement ou bien par les deux.

Une étude détaillée des liaisons sera faite en deuxième année. Nous allons juste donner ici quelques exemples de liaisons utiles à l'étude de système mécaniques simples. Les dénominations ne sont pas à connaître. Pour toute liaison rencontrée en exercice, les mouvements autorisés sans frottement vous seront donnés dans l'énoncé : vous pourrez donc en déduire vous-même les composantes nulles de la force résultante et du moment résultant

de l'action de contact. En effet, les composantes non nulles de l'action d'une liaison correspondent aux mouvements bloqués ou freinés par cette liaison.

a Liaison encastrement :

Si l'on **supprime les 6 degrés de liberté** entre deux objets, on dit qu'ils sont encastrés (ou soudés l'un à l'autre) : tous les efforts se transmettent, il ne reste aucun degré de liberté entre les deux objets. Exemple : poutre encastrée dans un mur : le mur empêche la poutre de tomber, d'être arrachée du mur, de tourner, de pivoter, etc. Les 6 degrés de liberté sont bloqués par cette liaison et la réaction du mur doit a priori être modélisée par une force résultante ; à trois composantes ET un moment résultant à trois composantes, soit 6 inconnues. Il peut s'avérer que l'exercice permette finalement de trouver que certaines de ces composantes sont nulles mais a priori l'action du mur sur la poutre comporte **6 inconnues**.

Remarque : Quand on étudie la réaction d'une liaison on se soucie peu de savoir comment le mur peut générer un moment opposé à la flexion ou la torsion de la poutre car on cherche seulement à connaître l'action mécanique globale. Toutefois, il faut savoir qu'il s'agit toujours localement de forces distribuées sur la surface de contact mur/poutre située à l'intérieur du mur. Par exemple, sur la figure 1.14, on voit comment le moment du mur sur la poutre peut avoir une composante sur l'axe perpendiculaire au plan de la figure.

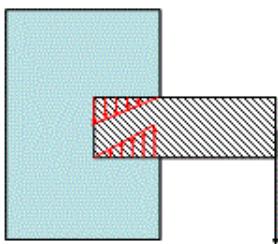


Figure 1.14 – Liaison encastrement

b La liaison rotule :

Si l'on **supprime les 3 translations** entre deux objets, mais que l'on laisse les 3 rotations libres sans frottement, on parle de la liaison rotule parfaite. Dans ce cas la réaction du mur doit être modélisée par une force résultante \vec{F} à trois composantes, mais on sait que les trois composantes du moment résultant sont forcément nulles ($\vec{\mathcal{M}} = \vec{0}$) puisque le mur n'exerce aucune action sur les mouvements de rotation. Il y a donc **3 inconnues**, les 3 composantes de \vec{F} .

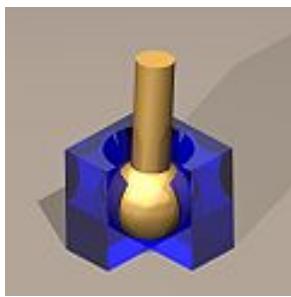


Figure 1.15 – Schéma de principe d'une liaison rotule

c La liaison pivot :

Si l'on **supprime tous les degrés de liberté à l'exception de la rotation autour d'un axe**, on parle de liaison pivot. Si (Oy) est l'axe de la rotation, la liaison pivot peut exercer toutes les forces dans toutes les directions nécessaires pour résister à tous les mouvements de translation ; la liaison pivot exerce également les moments nécessaires par rapport aux axes (Ox) et (Oz) pour résister à la mise en rotation autour de ces axes. Par contre, le moment des actions mécaniques exercées par le pivot par rapport à son axe (Oy) est toujours nul en l'absence de frottement (liaison pivot parfaite). Il y a donc **5 inconnues**, les 3 composantes de \vec{F} et $\vec{\mathcal{M}}$ (Ox) et $\vec{\mathcal{M}}$ (Oz).

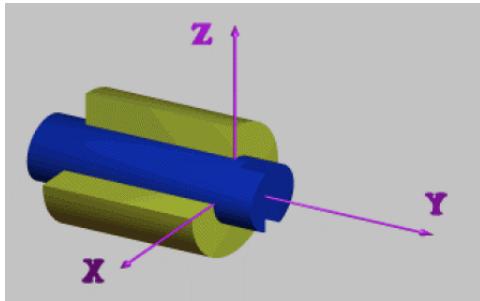


Figure 1.16 – Schéma de principe d'une liaison pivot autour de l'axe OY.

d La liaison ponctuelle :

Si l'on supprime **une seule translation entre deux objets** on parle de la liaison ponctuelle. Il faut noter que cette liaison ne fonctionne que dans un sens, en traction la liaison disparaît. Son nom vient du fait qu'il s'agit théoriquement d'un contact en un seul point : contact sphère/plan par exemple. S'il n'y a pas frottement et que les 5 autres mouvements ne sont donc pas affectés par cette liaison, les 5 composantes correspondantes de la réaction (2 composantes pour la force et 3 pour le moment) seront nulles et seule la composante de \vec{F} perpendiculaire au support sera non nulle. Il y a donc **une seule inconnue** à déterminer.



Figure 1.17 – Schéma de principe d'une liaison ponctuelle

EXERCICES de TD

Que dois-je savoir faire à la fin de ce chapitre ?

- Calculer le moment d'une force par rapport à un point ou un axe : **M**
- Rechercher une position d'équilibre : **P**
- Déterminer l'expression d'une force : **F**
- Étudier la stabilité d'un équilibre : **S**
- Résoudre un problème : **R**

Ressources Moodle

Page Moodle « Physique 1A toutes filières », onglet « Mécanique »

- Vidéos méthodologie : comment projeter une force et comment calculer le moment d'une force par rapport à un axe
- QCM
 - Statique : questions de cours et applications
 - Calcul : vecteurs, produits vectoriel et scalaire
 - Projection de forces
 - Calcul des moments

Point méthode

Rappel méthodologie

- Définir le système $\{S\}$.
- Nommer le référentiel et vérifier qu'il est bien galiléen.
- Lister les forces **extérieures** avec leurs 4 caractéristiques : indiquer lesquelles sont inconnues et expliciter tout ce qui est connu.
- Schéma **obligatoire** avec toutes les forces, les inconnues étant représentées « au hasard ». Représenter aussi les couples par une « flèche en rond » (cf Figure 1.12).
- Choix d'un système de coordonnées **judicieux** (= projections simples).
- Si équilibre -> projeter les 2 équations de la statique sur les axes.
- Compter les relations (6 en 3D mais 3 en 2D) et les inconnues, éventuellement penser à considérer un autre système s'il y a plus d'inconnues que de relations.
- Quand on a assez d'équations, résoudre le système et répondre à la question posée.
- Vérifier que votre résultat est plausible (dimensions, signes, ordres de grandeur, évolution, ...).

Exercice 1 : Problème masse-ressort (P, S)

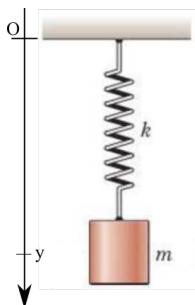


Figure 1.18 – Système Masse – ressort

On considère une masse m suspendue à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 (Figure 1.18). Déterminer la position d'équilibre y_{eq} de la masse considérée comme ponctuelle.

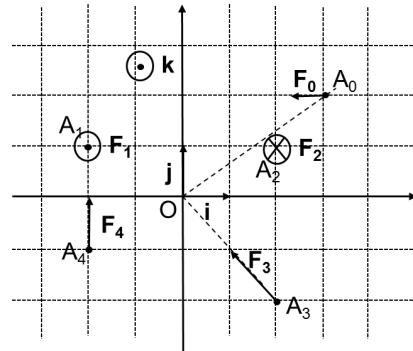
Identifier la nature de cet équilibre à partir de la résultante des forces.

Remarque : au second semestre, on montrera que la position d'équilibre, ainsi que sa stabilité pourront être déterminées grâce à l'étude de l'énergie potentielle du système.

Exercice 2 : Calculs de moments (M)

L'espace est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les forces \vec{F}_i de norme F_i qui s'appliquent en des points A_i du plan $z = 0$. Calculez les moments suivants :

1. $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_0}(O)$
2. $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_1}(O)$
3. $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_2}(O)$
4. $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_4}(O)$
5. $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_0}(A_3)$



Exercice 3 : Pendules électrostatiques (M, P)

Deux billes A et B, de même masse m , supposées ponctuelles, sont suspendues chacune à un fil sans masse de longueur ℓ . Les deux fils sont solidaires d'un support et fixés en un même point O . Les deux billes sont chargées avec la même charge $+q$; elles s'écartent alors l'une de l'autre et le dispositif s'immobilise dans une position d'équilibre où chaque fil fait un angle α avec la verticale.

Déterminer α en supposant qu'il est petit. Vous ferez une estimation de l'ordre de grandeur avant d'utiliser la calculette.

Application numérique : $q = 10^{-7} \text{ C}$, $m = 20 \text{ g}$, $\ell = 30 \text{ cm}$.

Exercice 4 : Hamac (M, P, R)

Imaginez un hamac tendu entre deux arbres à l'aide de deux cordes. Afin d'éviter que les cordes se rompent, ce qui pourrait être dommageable pour votre sieste, est-il préférable que l'angle entre l'arbre et la corde soit grand ou petit ?

On supposera que les normes des tensions des deux cordes sont identiques ainsi que les angles des cordes avec la verticale. Aidez-vous d'un schéma pour répondre à la question.

Exercice 5 : Intérêt d'un système à poulies (F)

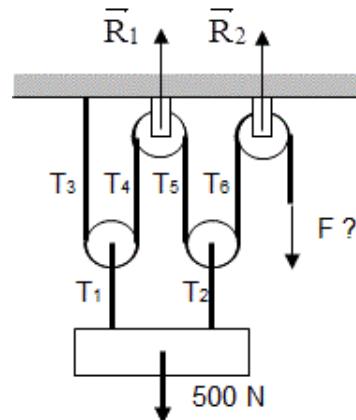
On considérera la masse des poulies et des câbles négligeable devant la masse du bloc à soulever.
Examiner successivement l'équilibre :

- du solide de poids 500 N (Les attaches sur la masse à soulever sont symétriques par rapport à son centre de masse)
- de chaque poulie,

et déterminer :

- les normes $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$. des tensions dans la corde.
- la force F minimale que doit exercer l'opérateur pour soulever le poids.
- les normes R_1 et R_2 des réactions sur les axes des poulies supérieures.

Conclusion pratique ?

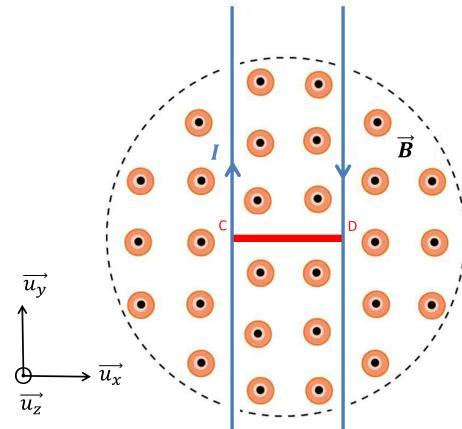


Exercice 6 : Équilibre d'un barreau dans un champ magnétique

Un petit barreau métallique CD de masse $m = 1 \text{ g}$ et de longueur $L = 10 \text{ cm}$ est assujetti à glisser sans frottements le long de deux rails conducteurs verticaux, en restant lui-même horizontal. Il est parcouru par un courant d'intensité I que l'on peut régler grâce un générateur variable.

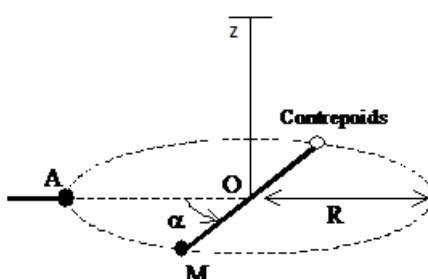
Lorsqu'on place le dispositif dans un champ uniforme horizontal ($\vec{B} = B\hat{u}_z$ sur la figure ci-contre), le barreau ne tombe plus à condition d'ajuster l'intensité du courant à la valeur $I_0 = 5 \text{ A}$.

Question : Quelle est l'intensité du champ \vec{B} ? (On prendra $g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$.)



Exercice 7 : Balance de Coulomb² (M, P)

Une boule métallique de masse M est fixée à l'extrémité d'une tige isolante et un contre-poids de même masse M est fixé à son autre extrémité. La tige est suspendue en son milieu O à un fil de torsion vertical (d'axe (Oz)) de constante de torsion C : Cela signifie que le fil exerce sur la tige un moment de « rappel » $\mathcal{M}(Oz) = -C\alpha$ lorsque le fil est tourné d'un angle α (orienté par l'axe (Oz)). Ce système étant au repos, on amène une boule métallique A tenue par une tige isolante au contact de la boule M . On électrise les deux boules simultanément de sorte qu'elles soient pourvues de la même charge Q . La boule A est maintenue en place et la boule M s'éloigne sous l'action de la force de Coulomb. À l'équilibre, l'angle $(OA, OM) = \alpha$. En supposant que α est petit, déterminer sa valeur. Vous ferez une estimation de l'ordre de grandeur avant d'utiliser la calculette.



2. La balance de Coulomb a été mise au point par Charles-Augustin Coulomb, lui permettant de faire de nombreuses mesures des intensités des forces électrostatiques et donc d'énoncer sa fameuse loi d'interaction en 1785.

Exercice 8 : Mesure du coefficient de frottement (P, F)

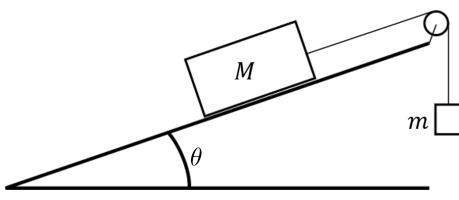


Figure 1.19 – Mesure de coefficient de frottement.

Un dispositif permettant de mesurer le coefficient de frottement est représenté sur la Figure 1.19, où un objet de masse connue M , relié par un fil à un contrepoids de masse m , est posé sur un plan incliné d'un angle θ que l'on peut faire varier. La poulie est considérée comme idéale (pas d'inertie ni de frottements).

1. Le système étant à l'équilibre, exprimer les composantes normales et tangentielle de la réaction du support en fonction des données du problème. Discuter le sens de la composante tangentielle de cette réaction.
2. On note f le coefficient de frottement entre l'objet et le plan incliné. Trouver la ou les conditions reliant f , θ , M et m afin de trouver une configuration d'équilibre.
3. A partir d'une position d'équilibre, on modifie l'angle θ et on observe une limite de glissement pour $\theta_{\text{lim}} = \pi/6$. Déterminer f et le sens dans lequel le solide va glisser dans les 2 cas suivants (sur deux matériaux différents) : (Vous ferez une estimation de l'ordre de grandeur avant d'utiliser la calculette.)
 - (a) $M = 1\text{kg}$ et $m = 250\text{g}$
 - (b) $M = 500\text{g}$ et $m = 400\text{g}$

L'équilibre était-il trouvé pour des angles plus grands ou plus petits que θ_{lim} ?

Exercice 9 : Gymnaste en équilibre ? (Extrait IE2-2012) (M, P, S)

On modélise la situation de gauche (figure 1.20a) par le schéma suivant (figure 1.20b) :

Les deux barres homogènes AB et BC sont fixées (encastrement) l'une à l'autre à angle droit en B , et leurs longueur et masse sont respectivement notées L_1, m_1 et L_2, m_2 . L'angle α repère l'angle entre AB et l'horizontale.

Montrer que la réaction du sol est verticale, puis exprimer l'angle α_0 d'équilibre en fonction des paramètres du problème. Sans calcul, discuter de la stabilité de cet équilibre.

NB : on pensera à exprimer l'angle entre BC et l'horizontale en fonction de α .

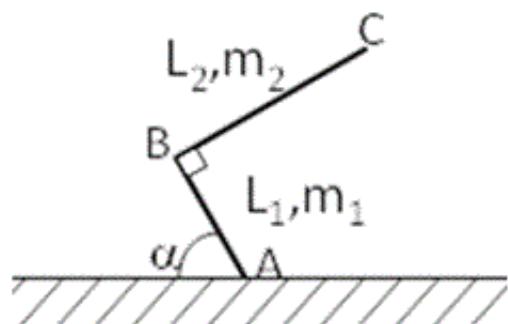


Figure 1.20 – Gymnaste en équilibre

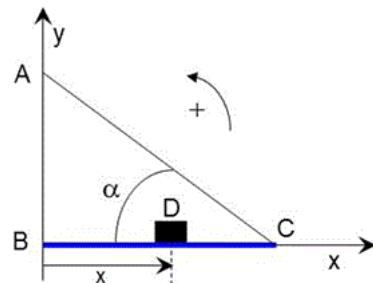
Exercice 10 : Équilibre d'une étagère (M, F)

Une étagère d'épaisseur négligeable est articulée en B par l'intermédiaire d'une rotule.

L'étagère qu'on peut assimiler à une barre homogène de masse M et longueur ℓ est maintenue en C par l'intermédiaire d'un fil inextensible fixé en A .

Au point D tel $BD = x$, repose un objet de masse m assimilé à un point matériel (cf. figure).

À l'équilibre, l'étagère est horizontale. On pose : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \alpha$.

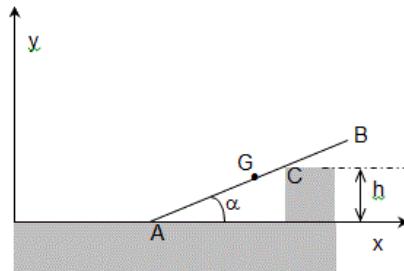


1. Représentez sur un schéma les forces appliquées au système constitué par l'ensemble {barreBC + objetD}.
2. Donnez l'expression du moment de chacune des forces par rapport à un axe convenablement choisi.
3. Exprimer la tension du fil en fonction de M , m , ℓ , x , g et α . La rupture du fil AC correspond à une certaine tension du fil notée T_{max} . Déterminez la position x_0 de l'objet D qui correspond à la limite de rupture du fil. Les données sont à prendre parmi M , m , ℓ , x , g , T_{max} et α .
4. Inversement, quelle doit être la tension maximale T_{max} que doit pouvoir supporter le fil pour éviter qu'il ne rompe quelle que soit la position de l'objet sur l'étagère ?
5. Donner l'expression de la réaction du mur en B .

Exercice 11 : Équilibre d'une barre sur une marche (M, F)

Une barre homogène AB , de centre de gravité G , de masse m et de longueur $2a$, est posée en équilibre sur une marche de hauteur $h < a$.

Le contact en C sur la marche est sans frottement et le contact de l'extrémité A sur le sol se fait avec frottement. L'inclinaison de la barre par rapport au sol horizontal est donnée par l'angle α (cf. figure).

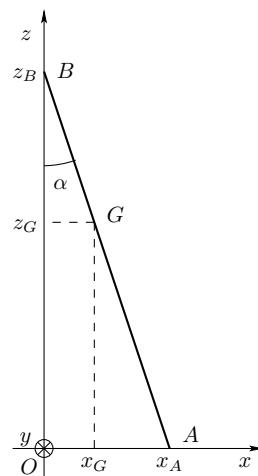


1. Préciser les différentes forces agissant sur la barre AB et écrire les deux équations vectorielles d'équilibre de la barre.
2. Représenter les directions (ou supports) des trois forces qui agissent sur la barre AB .
3. La réaction du sol au point A est notée \vec{R}_A et on pose : $\vec{R}_A = T\vec{e}_x + N\vec{e}_y$
Déterminer en fonction de m , g , a , h et α :
 - le module de la réaction au point C
 - les composantes de la réaction en A .
4. À quelle condition la barre bascule-t-elle ?

Exercice 12 : Équilibre d'une échelle simple (M, P, F, S)

On considère une échelle de longueur L et de masse m posée sur un sol plat et appuyée contre un mur vertical. On se donne un repère $(Oxyz)$ tel que représenté sur la figure, avec $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base orthonormée directe associée. Pour simplifier, on assimile l'échelle à une droite dans le plan (xOz) .

L'échelle est en contact (liaisons ponctuelles) avec le sol en $A(x_A, 0, 0)$ et le mur en $B(0, 0, z_B)$. Elle fait un angle α avec le mur. De plus, elle est considérée inhomogène. Ainsi, son centre de gravité se trouve au point G de coordonnées $(x_G = \gamma x_A, 0, z_G = (1 - \gamma) z_B)$ avec γ un réel strictement compris entre 0 et 1.



1. Dans un premier temps, on considère que **le sol et le mur sont lisses**.

- Montrer que si les contacts se font sans frottement, l'échelle ne peut pas rester appuyée obliquement sur le mur.
 - Afin de maintenir l'équilibre, on ajoute un fil de tension horizontal, inextensible et de masse négligeable, à une hauteur $z_B/2$. Exprimer la réaction en A et B ainsi que la tension T du fil en fonction de m , g , L , α et γ .
2. On considère désormais que **le sol est rugueux** (le mur reste lisse) et que l'échelle n'est plus maintenue par un fil. On rappelle que l'échelle ne glisse pas en A si l'inégalité $|R_{Ax}| \leq \mu |R_{Az}|$, avec μ le coefficient de frottement statique.
- Établir une inégalité sur $\tan \alpha$ pour que l'échelle soit effectivement à l'équilibre. En déduire l'existence d'un angle critique α_c au-delà duquel l'échelle glisse.
 - On donne $\mu = 0,8$. Évaluer α_c (en degré) pour $\gamma = 0,2$, $\gamma = 0,5$ et $\gamma = 0,8$.
 - Pour une meilleure stabilité de l'échelle, vaut-il mieux que son centre de gravité soit proche de A ou de B (ou aucun des deux) ?
 - Inversement, exprimer la condition sur α pour qu'un homme de masse M puisse monter en haut de l'échelle.
 - Faire l'application numérique pour un homme de 70 kg et un enfant de 30 kg en prenant $\mu = 0,8$, $m = 20$ kg et $\gamma = 0,5$. (Vous ferez une estimation de l'ordre de grandeur avant d'utiliser la calculette.)

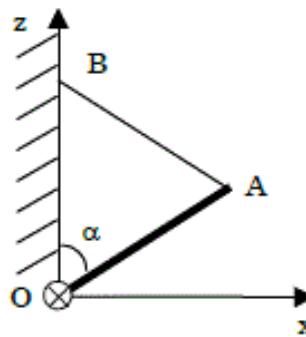
Exercice 13 : Équilibre d'une tige (M, F)

Les axes horizontaux (Ox) et (Oy) et l'axe vertical ascendant (Oz) forment un trièdre trirectangle. Une fine tige rectiligne OA du plan (xOz) peut tourner sans frottement autour de l'axe (Oy) . Son centre de masse G est au milieu de OA et l'intensité de son poids est P .

Un fil AB souple inextensible et de masse négligeable, dont la longueur AB est égale à OA , relie l'extrémité A de la tige au point B de l'axe (Oz) , au-dessus de O , comme l'indique la figure. À l'équilibre, l'angle \widehat{BOA} a pour valeur α .

Les données étant P et α , exprimer :

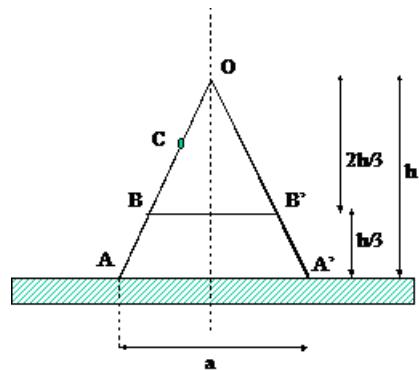
- la tension T du fil AB
- les mesures algébriques R_x , R_y , R_z des composantes cartésiennes de la réaction d'axe subie en O par la tige OA .



Exercice 14 : Échelle double (M, F, R)

Une échelle double comporte deux parties rectilignes identiques OA et OA' articulées sans frottement en O . Chaque partie a un poids \vec{P} , appliquée en son milieu. Une corde BB' , inextensible, de masse négligeable, relie les deux parties de l'échelle, de telle sorte que $OB = 2/3OA$, $OB' = \frac{2}{3}OA'$.

L'échelle repose sur un sol horizontal, sans frottements appréciables. Elle prend une position d'équilibre pour laquelle la distance AA' des pieds de l'échelle est a et la hauteur de O au-dessus du sol est h .



1. Calculer les intensités des forces suivantes en fonction de P , a et h :

- N_0 : réaction du sol sur chacun des pieds A et A'
- T_0 : tension de la corde
- R_0 : réaction en O de chacune des parties de l'échelle sur l'autre.

2. Un homme de poids \vec{Q} est supposé juché en C tel que $OC = OA/3$. Calculer les intensités des forces suivantes en fonction de P , Q , a et h :

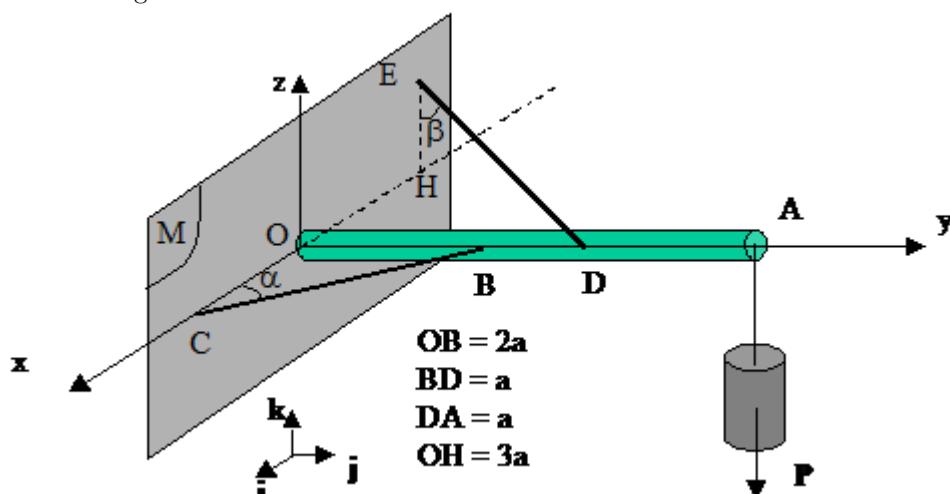
- N : réaction du sol en A
- N' : réaction du sol en A'
- T : tension de la corde
- R : réaction en O .

Exercice 15 : Équilibre d'une barre (M, F)

Sur la surface plane verticale d'un mur M , on considère l'axe horizontal ($x'OX$) et l'axe vertical ascendant ($z'OZ$), d'unitaires respectifs \vec{i} et \vec{k} . En O est fixée une rotule sphérique permettant à une tige fine et rigide de tourner autour de O .

On suspend en A un corps de poids P . Deux tendeurs BC et DE relient la tige au mur, de telle sorte que la tige (OA) soit perpendiculaire au plan M .

On appelle (Oy) d'unitaire \vec{j} , le support de (OA) orienté de O vers A et on pose $OA = 4a$. B est le milieu de OA . OC est porté par l'axe ($x'x$) avec $\overline{OC} > 0$. On note α , l'angle (OCB). D est le milieu de AB . E se projette orthogonalement en H sur ($x'x$), avec $\overline{HE} > 0$ et $\overline{HO} = 3a$. On note β l'angle (HED). On négligera le poids de la tige et des tendeurs devant P .



1. Déterminer, en fonction de P , α et β , les tensions T_D et T_B des tendeurs, ainsi que les composantes X , Y et Z dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de la réaction de la rotule sur la tige.
2. Application numérique : les données étant $P = 10$ N, $\alpha = 60^\circ$ et $\beta = 30^\circ$, calculer les tensions des tendeurs T_D et T_B , les composantes X , Y et Z , ainsi que la norme de \vec{R} .

Exercice 16 : Balise en mer (F)

On souhaite réaliser une balise en mer grâce à une poutre en bois parallélépipédique lestée par un bloc d'acier

à l'une de ses extrémités (poutre : hauteur H , longueur = largeur = ℓ). Le but est de faire dépasser la poutre d'une hauteur h dans l'air (cf. figure 1.21).

1. Faire un bilan des forces s'exerçant sur la balise (poutre +lest).
2. En déduire l'expression littérale du volume V_{lest} du lest d'acier nécessaire pour que la poutre dépasse d'une hauteur h dans l'air.
3. Calculer pour finir la masse et le volume d'acier nécessaire pour faire un lest permettant d'obtenir $h = 5\text{dm}$. (Vous ferez une estimation de l'ordre de grandeur avant d'utiliser la calculette.)

Données : $H = 4\text{ m}$, $\ell = 2\text{ dm}$, $\rho_{eaudemer} = 1025 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho_{bois} = 620 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho_{acier} = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$

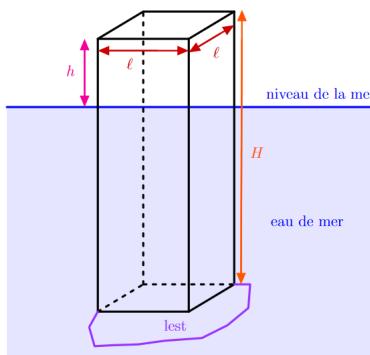


Figure 1.21 – Balise en mer

Exercice 17 : Équilibre de deux ressorts couplés (extrait IEFS1 2022-23)

L'accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ USI}$ est considérée comme connue sans incertitude.

On se propose de faire la mesure de la constante de raideur k d'un ressort en utilisant un montage de deux ressorts supposés identiques. À noter pour ces ressorts qu'un étirement maximal $\Delta\ell_{max} = 20\text{ cm}$ ne doit pas être dépassé sous peine de les endommager.

Les deux ressorts, supposés identiques, sont de longueur à vide ℓ_0 , de constante de raideur k et de masse négligeable. On réalise avec ces ressorts et deux masses marquées identiques, de même masse $m_1 = m_2 = m$, le montage ci-contre.

Les masses sont équipées de crochets sur deux côtés opposés, qui permettent de facilement les accrocher (cf. TP). La distance entre les points d'accroche est de $L = (30,15 \pm 0,05) \text{ mm}$ (mesure faite au pied à coulisse) et leur centre de masse est au milieu à une distance $\frac{L}{2}$.

Le premier ressort est suspendu à un point fixe O , pris comme origine du repère cartésien $(O; \vec{u}_x; \vec{u}_y; \vec{u}_z)$, avec \vec{u}_y choisi selon la verticale descendante.

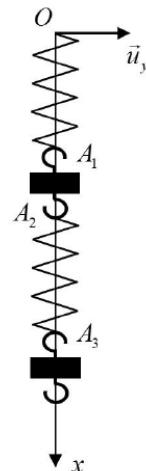
On suspend la première masse à son autre extrémité $A_1(x_1; 0; 0)$.

Dans le crochet du bas de cette première masse, on glisse l'autre extrémité du deuxième ressort en $A_2(x_2; 0; 0)$.

Enfin on accroche la deuxième masse sur l'autre extrémité $A_3(x_3; 0; 0)$ du deuxième ressort.

1. Montrer qu'à l'équilibre x_1 et x_3 vérifient

$$\begin{cases} x_{1eq} = a_1 \frac{mg}{k} + b_1 L + c_1 \ell_0 \\ x_{3eq} = a_2 \frac{mg}{k} + b_2 L + c_2 \ell_0 \end{cases}$$



où a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 et c_2 sont des coefficients numériques à déterminer. **Vous veillerez à rédiger en détails la méthode suivie et à justifier tous vos résultats.**

2. Soit m_{max} la masse maximale à utiliser permettant d'atteindre l'éirement maximal autorisé $\Delta\ell_{max}$ pour au moins un des ressorts. Déterminer l'expression littérale de m_{max} en fonction notamment de $\Delta\ell_{max}$ et de k .
3. Lors de la réalisation de l'expérience de la question 1 on obtient les mesures suivantes : $\ell_0 = (8,50 \pm 0,20)$ cm, $x_{3eq} = (48,4 \pm 0,3)$ cm et $m = 99,0$ g. La masse est connue à 2% près. Obligatoirement à partir d'un calcul différentiel, déterminer une expression littérale de l'incertitude sur la mesure de k et en déduire la valeur de k sous la forme $k = (\dots \pm \dots)$ unité. Est-ce que ces mesures respectent bien l'éirement maximal autorisé ?

Exercice 18 : Problème ouvert : dimensionner un dynamomètre (R, M, F)

Vous êtes ingénieur chez Jeulin et vous êtes en charge de l'évolution des dynamomètres circulaires tels que ceux que vous avez utilisé en TP (cf. figure 1.22 vue de face et de profil).

Ces dynamomètres circulaires sont constitués d'un ressort de torsion spirale, d'une poulie, d'un fil avec crochet et d'un disque gradué. La force à mesurer est appliquée verticalement à un fil entouré autour d'une poulie solidaire d'un ressort à spirale (cf figure 1.22 de gauche avec la mesure du poids de la masse suspendue). On rappelle que l'action de ce type de ressort spirale en torsion peut se modéliser par un couple de rappel du type $-C\theta$ exercé sur l'objet accroché à l'extrémité libre (ici la poulie), C étant la constante de torsion du ressort et θ l'angle entre l'extrémité fixe et l'extrémité libre du ressort.

Votre fournisseur Sodemann vous propose des ressorts spirales avec des constantes de torsion dont les valeurs sont dans le tableau ci-dessous. Le diamètre de la poulie peut être ajusté (mais avec un maximum de 7 cm pour permettre la lecture sur le disque support gradué qui a, lui, un diamètre de 15 cm).

Tableau des constantes de torsion pour des ressort spirales chez le fournisseur Sodemann

C (N · mm)	12	32	53	60	75	104	134

Votre mission est de dimensionner un dynamomètre pouvant mesurer jusqu'à 10 N avec la meilleure précision possible et une disposition similaire à celui de la figure 1.22 quant aux graduations : proposer un choix argumenté de ressort (quelle constante de torsion C ?) et de poulie (quel rayon ?) permettant de répondre au cahier des charges.

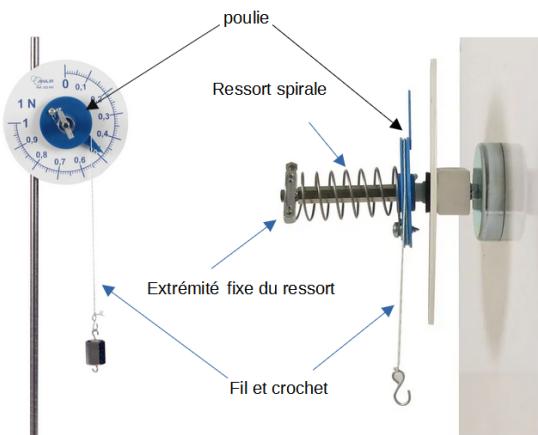


Figure 1.22 – Vue de face (à gauche) et de profil (à droite) d'un dynamomètre

CHAPITRE

2

CINÉMATIQUE

Objectifs

- citer le référentiel d'étude, et le nommer s'il est un référentiel usuel
- représenter la direction et le sens des vecteurs unitaires des bases cartésienne, cylindrique et Frénet
- décomposer le vecteur position dans les bases cartésienne, cylindrique et les vecteurs vitesse et accélération dans les bases cartésienne, cylindrique et Frénet
- expliquer qualitativement l'effet de la vitesse sur l'évolution de la position ainsi que l'effet de l'accélération sur l'évolution de la vitesse, en distinguant les rôles de ses composantes « normales » et « tangentes »
- déterminer les vecteurs position, vitesse ou accélération à partir de la donnée d'un de ces trois vecteurs (et d'éventuelles conditions en un point particulier).
- décrire/caractériser des mouvements simples du point (uniforme, circulaire, rectiligne, uniformément accéléré ...) et du solide (rotation et translation), en particulier connaître la définition de la vitesse angulaire pour les mouvements circulaires.
- étudier le mouvement relatif de deux référentiels (cas général pour la composition des vitesses, mais composition des accélérations uniquement dans le cas d'un mouvement de translation rectiligne uniforme entre les 2 référentiels)

Prérequis

- représenter, avec leurs paramètres et leur base, les trois systèmes de coordonnées usuels (OMNI)
- écrire les dérivées des vecteurs de base des coordonnées cartésiennes et cylindriques (OMNI)
- calculer un produit vectoriel (OMNI)
- donner l'expression de la trajectoire à partir des lois horaires dans les cas simples (OMNI)

Remarque : On ne demande pas de savoir calculer un rayon de courbure

Sommaire

I	Définitions préalables	59
I.1	Temps	59
I.2	Référentiels	59
II	Position d'un point matériel	59
II.1	Repérage de la position de P (rappel)	60
II.2	Lois horaires du mouvement	61
II.3	Abscisse curviligne	61
III	Vitesse d'un point matériel	62
III.1	Définition	62
III.2	Expressions dans les différents repères	62
III.3	Exemples de mouvements	63
IV	Accélération d'un point matériel	65
IV.1	Définition	65
IV.2	Expressions dans les différents repères	65
IV.3	Exemples de mouvements	67
V	Mouvements simples du solide	67
V.1	Mouvement de translation	68
V.2	Mouvement de rotation autour d'un axe fixe.	68
VI	Changements de référentiels	70
VI.1	Généralités	70
VI.2	Description du problème	70
VI.3	Loi de composition des vitesses par changement de référentiel	71
VI.4	Loi de composition des accélérations par changement de référentiel pour un mouvement de translation	72
VII	Complément : Démonstration de $\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{\vec{u}_N}{R}$	74
VIII	Fiche (à remplir !) de révision des systèmes de coordonnées	75
IX	Correction des applications directes du cours	76

Introduction : La cinématique est l'étude des mouvements indépendamment des causes qui les produisent. Son but est donc de décrire géométriquement ces mouvements sans les expliquer.

I Définitions préalables

I.1 Temps

Le temps est une grandeur scalaire mesurée par une horloge. Cette horloge est fondée sur un processus cyclique qui se répète d'une manière identique. Il devient alors possible de dater une succession d'événements et de mesurer le temps écoulé (ou encore la durée) entre deux événements en le comparant à la période de l'horloge (mesure directe par comparaison).

Remarque : Comme on l'a vu dans le chapitre d'introduction, la mécanique newtonienne repose sur l'hypothèse d'un temps absolu, c'est-à-dire indépendant du référentiel (voir définition ci-après) choisi pour décrire le mouvement. En mécanique relativiste cette hypothèse n'est plus conservée : vous avez vu en Terminale que deux horloges en mouvement relatif l'une par rapport à l'autre ne mesurent pas les mêmes durées entre 2 mêmes événements (phénomène de « dilatation des durées »). Mais nous considérerons ici le temps comme absolu, infini, continu et homogène.

I.2 Référentiels

Lorsqu'on cherche à décrire un mouvement, on se heurte à une première difficulté : un insecte, immobile sur le pare-brise d'une voiture en mouvement, apparaîtra au repos pour un observateur dans la voiture et au contraire mobile pour un observateur lié à la Terre. De même, le quai est immobile par rapport à la gare mais en mouvement par rapport au train qui démarre. La notion de mouvement n'a donc de sens que si on définit **le référentiel** par rapport auquel on étudie le mouvement. Il conviendra donc de toujours prendre soin de définir le référentiel utilisé lors de la résolution d'un problème de mécanique.

Définition	Référentiel
On appelle référentiel \mathfrak{R} un solide de référence (réel ou fictif) muni d'une horloge définissant le temps. Le référentiel permet donc de situer un événement dans l'espace et le temps. Toute étude du mouvement donc toute étude de cinématique et/ou de dynamique n'a de sens que si le référentiel est précisé !	

On étudie de nombreux mouvements à notre échelle dans le référentiel dit « **du sol** » (ou « **terrestre** » ou « **du laboratoire** »).

Mais par exemple pour le mouvement d'un satellite géostationnaire (c'est-à-dire immobile par rapport au sol) celui-ci ne convient clairement pas : on se place en général dans le référentiel **géocentrique** : celui-ci est un solide fictif lié au centre de la Terre et à 3 étoiles lointaines supposées fixes.

Pour étudier le mouvement des planètes autour du soleil, on se place plutôt dans le référentiel **de Copernic**, lié cette fois au barycentre du système solaire et à 3 étoiles lointaines supposées fixes, ou parfois du référentiel **héliocentrique**, lié au centre du soleil et à 3 étoiles lointaines supposées fixes. Il est à noter que ces deux derniers référentiels sont très proches mais non strictement identiques (en effet la distance centre du soleil-barycentre du système solaire est de l'ordre du rayon du soleil).

Remarque : Bien sûr, n'importe quel référentiel d'étude est possible, mais son choix peut s'avérer plus ou moins judicieux : il n'est pas faux d'étudier le mouvement des astres du système solaire dans le référentiel lié au sol, et donc de dire que le soleil tourne autour de la Terre. C'est seulement bien plus compliqué dès lors qu'on s'intéresse au mouvement des autres planètes et donc non pertinent !

Cf. <http://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9trogradation>

Dans toute la suite de ce chapitre, toutes les grandeurs définies dépendront du référentiel choisi \mathfrak{R} , même si on ne le précise pas.

II Position d'un point matériel

Soit un point matériel P . Connaître le mouvement de P dans le référentiel \mathfrak{R} , c'est connaître la position de ce point matériel dans \mathfrak{R} à chaque instant. On notera $M(t)$ le point mathématique du référentiel \mathfrak{R} qui coïncide à la date t avec le point matériel P . On dit que $M(t)$ est le point coïncidant avec P à la date t ou simplement que $M(t)$ est la **position** dans \mathfrak{R} du point matériel P en fonction de t .

II.1 Repérage de la position de P (rappel)

Comme vu en cours d'OMNI, il existe plusieurs manières de repérer la position $M(t)$ dans \mathfrak{R} du point matériel P (cf Figure 2.1).

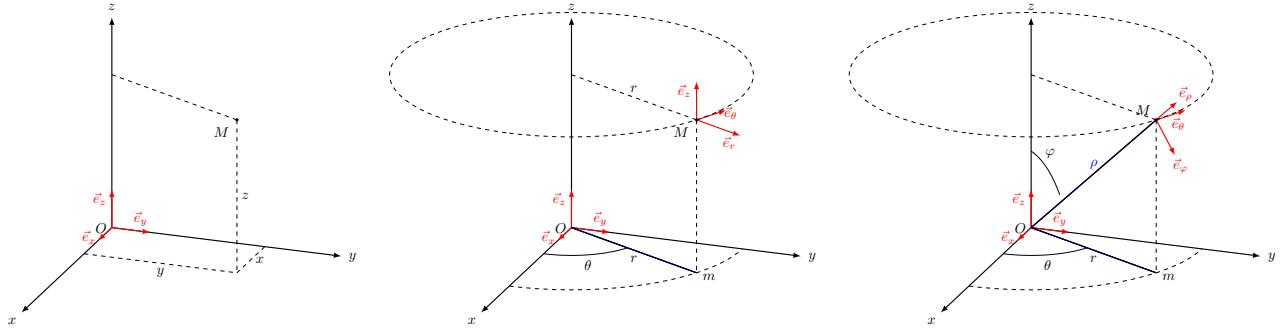


Figure 2.1 – Systèmes de coordonnées (cf. poly OMNI) a) coordonnées cartésiennes b) cylindriques c) sphériques

Définition

Coordonnées cartésiennes

Dans ce cas, $M(t)$ est repéré par ses coordonnées x, y, z dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fixe dans \mathfrak{R} . On écrit :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z$$

Définition

Coordonnées cylindriques

Dans ce cas, $M(t)$ est repéré dans un repère **local** orthonormé direct $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ par ses coordonnées r, θ, z (avec $r > 0, 0 < \theta < 2\pi$ et $z \in \mathbb{R}$). On écrit :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{e}_r + z(t) \vec{e}_z$$

Propriétés

Liens coordonnées cartésiennes et cylindriques

On a donc

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta)$$

ATTENTION : Si \vec{e}_z est un vecteur constant, au contraire les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ dépendent du point $M(t)$, ils ne sont donc généralement **pas fixes** dans \mathfrak{R} ! On omet pourtant en général de l'expliciter du fait de la lourdeur des notations : par convention, on sait que le repère local cylindrique est mobile par rapport au référentiel lié au repère cartésien.

Définition

Vecteurs position et déplacement

- Le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ est appelé **vecteur position** à la date t , mesuré depuis l'origine O .
- De plus si P est en M à la date t et en M' à la date t' , $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$ est appelé **vecteur déplacement** du point matériel P entre les dates t et t' pendant la durée $t' - t$.

Exercice 1

Soit un point M de coordonnées cartésiennes $(3, 4, 5)$. Donner les coordonnées cylindriques du point M et exprimer le vecteur \overrightarrow{OM} dans la base cylindrique.

Remarque 1 : il existe de nombreuses autres manières de repérer la position du point matériel. On peut par exemple citer l'utilisation de l'abscisse curviligne, qui est définie à condition que l'on connaisse déjà la trajectoire (voir § II.3)

Remarque 2 : Si le point matériel se déplace dans un plan, on peut choisir l'axe (Oz) perpendiculairement à ce plan, et utiliser alors soit les coordonnées cartésiennes $x(t), y(t)$ dans un repère fixe $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, soit les coordonnées polaires $r(t), \theta(t)$ dans un repère local $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

II.2 Lois horaires du mouvement

Si le point matériel se déplace, alors une au moins des trois coordonnées de $M(t)$ varie (en d'autres termes la position ou encore le point coïncidant change).

Définition	Équations horaires
Quel que soit le système de coordonnées choisi, les expressions des 3 coordonnées en fonction du temps définissent parfaitement le mouvement dans \mathbb{R} et sont appelées « équations horaires du mouvement ». Ce sont les représentations paramétriques d'une courbe paramétrée (cf. OMNI) où le paramètre est le temps t .	

Définition	Trajectoire
Le support de cette courbe paramétrée (cf. OMNI : l'espace image de la courbe paramétrée) est appelé trajectoire dans \mathbb{R} . La trajectoire est donc l'ensemble des points coïncidants M de \mathbb{R} que parcourt le point matériel au cours du temps.	

Propriétés	Trajectoires particulières
<ul style="list-style-type: none"> Si la trajectoire est une droite ou un segment on dit que le mouvement est rectiligne. Si la trajectoire est un cercle ou une portion de cercle, on dit que le mouvement est circulaire. Si la trajectoire est une courbe quelconque, on parle de trajectoire curviligne. 	

Exercice 2

Donner la trajectoire du point dont les équations horaires du mouvement sont données ci-dessous ($a, b, c, d, e, f, \phi, \omega$ sont des constantes et $t > 0$) :	
1) $\begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = \frac{gt^2}{2} + v_{0y}t \\ z(t) = c \end{cases}$	2) $\begin{cases} x(t) = a \cos(\omega t + \phi) \\ y(t) = b \cos(\omega t + \phi) \\ z(t) = c \end{cases}$
4) $\begin{cases} x(t) = a \cos(\omega t) \\ y(t) = b \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ z(t) = c \end{cases}$	3) $\begin{cases} r(t) = a\sqrt{t} \\ \theta(t) = b \\ z(t) = c\sqrt{t} + d \end{cases}$
5) $\begin{cases} r(t) = a \\ \theta(t) = \ln(t^2 + 2) \\ z(t) = c \end{cases}$	

Remarque : la trajectoire contient moins d'informations que les équations horaires : il manque l'information de la position sur la trajectoire en fonction du temps. Plusieurs points peuvent avoir la même trajectoire mais pas le même mouvement s'ils ne sont pas au même point de la trajectoire au même instant : c'est par exemple le cas d'un train sur des rails : les rails fixent la trajectoire mais pas le mouvement !

II.3 Abscisse curviligne

Si on connaît la trajectoire et le sens du mouvement, alors on peut parfaitement repérer un point par sa position sur la trajectoire. Il suffit de définir arbitrairement une origine M_0 (position à $t = t_0$) et d'orienter la trajectoire dans le sens du mouvement.

Définition	Abscisse curviligne
On appelle alors abscisse curviligne $\ell(t)$ la longueur de l'arc $\ell = \overline{M_0 M}$.	

Soit M la position à la date t et M' la position à la date $t' = t + dt$. Si dt tend vers 0, M et M' sont très proches, donc

$$\overline{MM'} = \overline{M_0 M'} - \overline{M_0 M} = \ell(t + dt) - \ell(t) = \delta\ell \approx \|\overrightarrow{MM'}\|$$

Si on définit $\vec{u_T}$ le **vecteur unitaire tangent** à la trajectoire dans le sens du mouvement (cf. Figure 2.2), on a donc :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} \approx \overrightarrow{dOM} = d\ell \vec{u_T}$$

En effet

$$\|\overrightarrow{dOM}\| = \|\overrightarrow{MM'}\| = \overline{MM'} = d\ell$$

et donc

$$\vec{u_T} = \frac{\overrightarrow{dOM}}{d\ell}$$

Remarque : vous trouverez le plus souvent dans la littérature l'abscisse curviligne algébrique notée $s(t)$. Avec cette notation, le sens de $\vec{u_T}$ n'est pas imposé par le sens du mouvement, mais choisi par convention, et $\ell = |s|$.

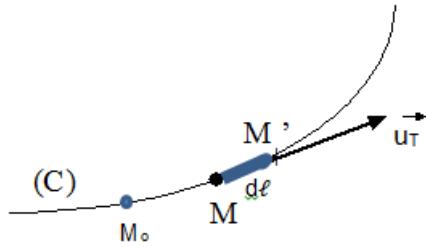


Figure 2.2 – Abscisse curviligne et vecteur unitaire tangent

III Vitesse d'un point matériel

III.1 Définition

Définition

Vitesse scalaire moyenne

Soit M_1 la position du point matériel à l'instant t_1 et M_2 sa position à l'instant t_2 , la **vitesse scalaire moyenne** est égale à la distance totale parcourue entre les dates t_1 et t_2 divisée par la durée mise pour la parcourir.

Définition

Vitesse instantanée

Si M est la position du mobile à l'instant t et M' sa position à l'instant $t + \delta t$, le **vecteur vitesse instantanée** (souvent appelé par abus simplement « la vitesse ») est défini par :

$$\overrightarrow{v} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\delta t}$$

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\delta OM}}{\delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

Interprétation : la vitesse est donc le taux de variation du vecteur position par unité de temps.

En fait, au lieu de O , il est possible de prendre n'importe quel autre point fixe A_0 du référentiel :

$$\frac{d\overrightarrow{A_0M}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{A_0O}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \overrightarrow{v}$$

Pour être plus précis on utilise quelquefois la notation suivante : $\overrightarrow{v}(M/\mathfrak{R}) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathfrak{R}}$ pour indiquer le référentiel utilisé.

Attention : En physique la « vitesse » désigne donc le vecteur vitesse instantanée alors qu'en langage courant il s'agit de la norme de ce vecteur, voire parfois de la moyenne de cette norme (=vitesse scalaire moyenne). Prenez garde à la confusion possible !

Exercice 3

Quand a-t-on le droit d'utiliser $\|\overrightarrow{v}\| = \frac{d}{t}$?

III.2 Expressions dans les différents repères

a Composantes en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{e_x} + y(t)\overrightarrow{e_y} + z(t)\overrightarrow{e_z}$$

donc :

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{dx(t)}{dt}\overrightarrow{e_x} + \frac{dy(t)}{dt}\overrightarrow{e_y} + \frac{dz(t)}{dt}\overrightarrow{e_z}$$

(car $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ sont constants), expression que l'on écrira sous la forme :

$$\boxed{\overrightarrow{v}(t) = \dot{x}(t)\overrightarrow{e_x} + \dot{y}(t)\overrightarrow{e_y} + \dot{z}(t)\overrightarrow{e_z}}$$

Remarque 1 : $\dot{x}(t)$ désigne la dérivée première de la fonction $x(t)$ par rapport au temps, de la même façon $\ddot{x}(t)$ représente la dérivée seconde de $x(t)$ par rapport au temps.

Remarque 2 : Très souvent on omet de noter explicitement la dépendance au temps et on écrit simplement : $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$.

b Composantes en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t) \overrightarrow{e_r}(t) + z(t) \overrightarrow{e_z}$$

donc :

$$\vec{v}(t) = \frac{dr(t)}{dt} \overrightarrow{e_r}(t) + r(t) \frac{d\theta(t)}{dt} \overrightarrow{e_\theta}(t) + \frac{dz(t)}{dt} \overrightarrow{e_z} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$$

En effet, on rappelle (cf. OMNI) qu'en coordonnées cylindriques les vecteurs $\overrightarrow{e_r}(t)$ et $\overrightarrow{e_\theta}(t)$ ne sont pas fixes et que $\frac{d\overrightarrow{e_r}(t)}{dt} = \frac{d\theta(t)}{dt} \overrightarrow{e_\theta}(t)$.

Comme précédemment, on omettra souvent de noter explicitement la dépendance au temps pour alléger les notations.

c Composantes en fonction de l'abscisse curviligne.

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\ell} \frac{d\ell}{dt} \quad \text{soit} \quad \vec{v} = \frac{d\ell}{dt} \overrightarrow{u_T}$$

Propriétés	Direction et norme de la vitesse
Cette relation traduit tout simplement le fait que le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire, dans le sens du mouvement, et de norme $\ \vec{v}\ = \frac{d\ell}{dt}$.	

On peut donc trouver l'expression du vecteur unitaire tangent avec la relation suivante :

$$\overrightarrow{u_T} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

d Norme du vecteur vitesse instantané

Les quatre expressions vectorielles ci-dessus du vecteur vitesse instantané représentent bien toutes le même vecteur, exprimé dans 4 bases différentes (éventuellement des bases mobiles dans le référentiel \mathfrak{R}) et la norme du vecteur vitesse est donc la même quelle que soit la base utilisée.

On a :

$$\|\vec{v}\| = \frac{d\ell}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Exercice 4

Donner l'expression du vecteur vitesse instantané et de sa norme en coordonnées polaires.

III.3 Exemples de mouvements

Si on connaît un point de la trajectoire M_0 (à $t = t_0$) et le vecteur vitesse instantané à chaque instant, on peut remonter par intégration à la connaissance de $M(t)$ et donc connaître parfaitement le mouvement du point.

Remarque : Cette intégration peut se faire soit de manière analytique soit de manière numérique. Il faut alors définir un pas de temps suffisamment petit dt . Si on suppose $M(t)$ connu, alors on calcule $M(t+dt)$ avec $\overrightarrow{OM}(t+dt) = \overrightarrow{OM}(t) + \vec{v}(t) dt + o(dt) \simeq \overrightarrow{OM}(t) + \vec{v}(t) dt$

a Mouvement rectiligne

Si la direction du vecteur vitesse instantané est constante alors le mouvement est rectiligne, et inversement. En effet si $\vec{v} = \alpha(t) \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u} = \text{constante}$ alors $\overrightarrow{M_0 M} = \overrightarrow{u} \int_{t_0}^t \alpha(t) dt$ est colinéaire à un vecteur constant.

Propriétés	Mouvement rectiligne uniforme
Si la direction, le sens et la norme du vecteur vitesse instantané sont constantes, cela revient à dire que le vecteur vitesse instantané est un vecteur constant et le mouvement est dit rectiligne uniforme .	

b Mouvement circulaire

b.1 Généralités : Si le mouvement est circulaire, on utilise alors les coordonnées polaires (ou cylindriques) avec O centre de la trajectoire. Dans ce cas, on a en polaire $r = \text{constante} = R = \text{rayon de la trajectoire}$ et on peut définir la position du point à partir de l'angle orienté $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta(t)$ (cf. Figure 2.3).

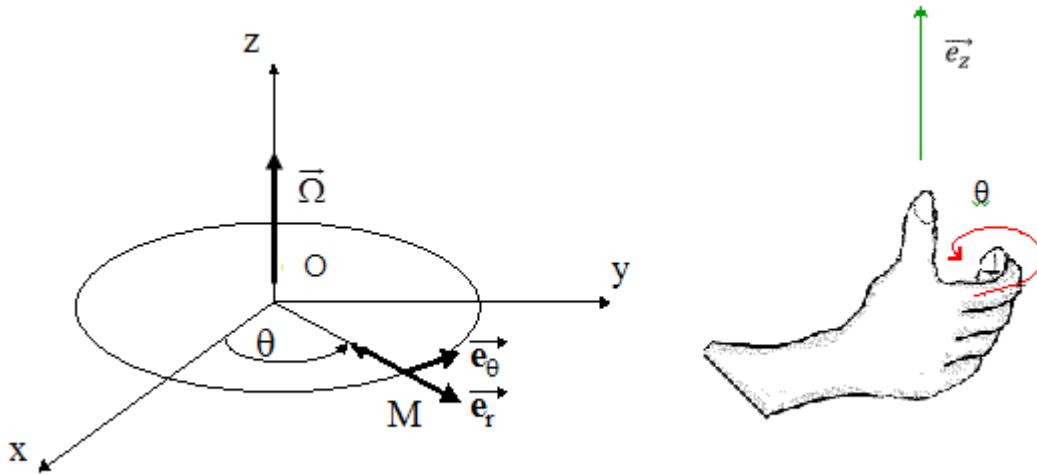


Figure 2.3 – Coordonnées polaires et règle de la main droite

On appelle alors vitesse angulaire ω l'angle parcouru par unité de temps :

$$\omega = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Avec l'expression générale de la vitesse \vec{v} en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

on obtient dans le cas d'un mouvement circulaire dans le plan perpendiculaire à \vec{e}_z :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = R\omega\vec{e}_\theta \quad \text{donc} \quad \|\vec{v}\| = R|\dot{\theta}| = R|\omega|$$

Propriétés

Mouvement circulaire uniforme

Si de plus la vitesse angulaire ω est constante, on dit que le mouvement est **circulaire uniforme**. On a alors par intégration $\theta(t) = \omega t + \theta_0$, avec $\theta_0 = \theta(t=0)$. Attention : pour un mouvement circulaire uniforme, **le vecteur vitesse n'est pas constant** : sa norme est constante, mais pas sa direction !

Exercice 5

Quelle est la dimension de la vitesse angulaire ω ? En quelles unités S.I s'exprime-t-elle? Un manège tourne à 10 tours/mn. Quelle est sa vitesse angulaire en unité SI? Quelle est la vitesse d'un enfant situé sur un cheval à 3 m du centre du manège?

ATTENTION :

La vitesse angulaire ω est par définition une grandeur **algébrique**. Si $\omega = \dot{\theta} > 0$, $\theta(t)$ est une fonction croissante et l'angle orienté θ augmente à la date t . Si $\omega = \dot{\theta} < 0$, l'angle orienté θ diminue. Pour en déduire le sens du déplacement, il faut de plus connaître le sens conventionnellement positif des angles orientés.

Rappel : En coordonnées polaires, θ est un angle orienté par le vecteur \vec{e}_z : cela veut dire que le vecteur \vec{e}_z définit comme sens positif des angles orientés celui donné par la règle de la main droite, à savoir le sens des doigts de la paume de la main droite lorsque le pouce est dans la direction et le sens de \vec{e}_z (cf. Figure 2.3).

IV Accélération d'un point matériel

IV.1 Définition

Définition

Accélération

Soit M la position du point mobile à l'instant t et M' sa position à l'instant $t + \delta t$; alors le **vecteur accélération instantanée** (souvent appelé simplement « l'accélération ») est défini par $\vec{a} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}_{M'} - \vec{v}_M}{\delta t}$ soit :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}}$$

Interprétation : \vec{a} est le taux de variation du vecteur vitesse par unité de temps.

Attention : l'accélération d'un point sera non nulle si sa vitesse varie en norme et/ou en direction. Par exemple, une voiture qui prend un virage à vitesse constante a une accélération non nulle! En effet, l'expression « à vitesse constante » signifie ici que seule la norme est constante, mais puisqu'il s'agit d'un virage, la direction change.

Remarque : On écrit quelquefois $\vec{a}(M/\mathfrak{R}) = \left. \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right|_{\mathfrak{R}}$ pour bien préciser le référentiel \mathfrak{R} .

IV.2 Expressions dans les différents repères

a Composantes en coordonnées cartésiennes

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

b Composantes en coordonnées cylindriques

En utilisant (cf OMNI) le fait qu'en coordonnées cylindriques $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r$, il est indispensable de savoir démontrer que :

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z) \\ \vec{a} &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{e}_z \\ \vec{a} &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{e}_r + \ddot{z}\vec{e}_z \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z \end{aligned}$$

On doit toujours vérifier que cette expression est bien homogène à une accélération, c'est-à-dire que chaque terme ci-dessus a pour dimension L/T^2 .

c Composantes dans la base de Frenet

c.1 Introduction de la base de Frenet : Le vecteur vitesse a permis d'introduire \vec{u}_T le vecteur unitaire tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement. On a : $\vec{v} = \frac{d\ell}{dt}\vec{u}_T$, d'où

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\ell}{dt^2}\vec{u}_T + \frac{d\ell}{dt} \frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d^2\ell}{dt^2}\vec{u}_T + \frac{d\ell}{dt} \frac{d\vec{u}_T}{d\ell} \frac{d\ell}{dt} = \frac{d^2\ell}{dt^2}\vec{u}_T + \left(\frac{d\ell}{dt}\right)^2 \frac{d\vec{u}_T}{d\ell}$$

Le vecteur \vec{u}_T étant un vecteur unitaire, $\vec{u}_T \cdot \vec{u}_T = 1$, et en différentiant $\vec{u}_T \cdot \vec{u}_T$ par rapport à l'abscisse curviligne, on obtient : $2\vec{u}_T \cdot \frac{d\vec{u}_T}{d\ell} = 0$, \vec{u}_T est donc orthogonal à $\frac{d\vec{u}_T}{d\ell}$. Donc \vec{u}_T et $\frac{d\vec{u}_T}{d\ell}$ définissent un plan appelé *plan osculateur à la courbe* au point M considéré.

On introduit maintenant (Figure 2.4) le vecteur unitaire \vec{u}_N colinéaire à $\frac{d\vec{u}_T}{d\ell}$ et dirigé vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire. Le vecteur \vec{u}_N est donc perpendiculaire à \vec{u}_T et il appartient au plan osculateur. Par définition c'est le **vecteur unitaire normal** à la courbe dirigé vers l'intérieur. Dans ce plan, les vecteurs $(\vec{u}_T, \vec{u}_N, \vec{u}_T \wedge \vec{u}_N)$ définissent la « **base de Frenet** ».

On montre (voir démonstration en annexe) que $\frac{d\vec{u}_T}{d\ell} = \frac{\vec{u}_N}{R_C}$ où R_C est appelé rayon de courbure au point M . Il représente le rayon du cercle par lequel on peut approximer la courbe localement en M . Soit :

$$\vec{a} = \frac{d^2\ell}{dt^2}\vec{u}_T + \left(\frac{d\ell}{dt}\right)^2 \frac{\vec{u}_N}{R_C}$$

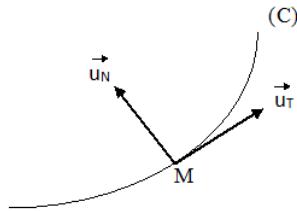


Figure 2.4 – Base de Frenet

Interprétation physique : L'accélération \vec{a} est donc souvent exprimée sous la forme :

$$\boxed{\vec{a} = a_T \vec{u}_T + a_N \vec{u}_N}$$
 où a_T et a_N représentent respectivement l'accélération tangentielle et l'accélération normale. On a donc :

$$a_T = \frac{d^2\ell}{dt^2} = \frac{d \|\vec{v}\|}{dt}$$

où a_T est donc la **variation de la norme** de la vitesse par unité de temps, et

$$a_N = \left(\frac{d\ell}{dt} \right)^2 \frac{1}{R_C} = \frac{v^2}{R_C}$$

où a_N est liée à la **variation de la direction** du vecteur vitesse, c'est-à-dire au fait que le point « tourne » au lieu d'aller tout droit.

Remarque : Dans le cas d'un mouvement circulaire R_C est une constante ($R_C = R$ rayon du cercle décrivant le mouvement) et on retrouve les expressions déjà rencontrées en Terminale.

Si un point parcourt une trajectoire curviligne à vitesse constante ($\|\vec{v}\| = \text{cste}$) alors $a_T = 0$ donc son vecteur accélération est toujours normal à la trajectoire, dirigé vers l'intérieur de la concavité et d'autant plus grand que le rayon de courbure est petit.

Exercice 6

1. Donner la définition, l'expression et l'interprétation de l'accélération tangentielle et de l'accélération normale.
2. Les composantes normale et tangentielle de l'accélération d'un corps qui tombe en chute libre sont-elles nulles ou non (dans tous les cas, s'aider d'un schéma de la trajectoire pour répondre) :
 - (a) à l'instant où le corps est lâché sans vitesse initiale ?
 - (b) au cours de la chute qui suit (vitesse initiale nulle) ?
 - (c) à l'instant où le corps est lâché après l'avoir lancé avec une vitesse initiale horizontale ?
 - (d) au cours de la chute qui suit (vitesse initiale horizontale non nulle) ?
3. On considère en première approximation que la terre tourne à vitesse constante autour du soleil sur un cercle de rayon $R = 1,5 \cdot 10^8$ km. Quelle est l'accélération de la terre ?

Exercice 7

Un point matériel se déplace sur la trajectoire de la figure 2.5 à vitesse constante. Dessiner approximativement l'accélération en A, B, C, D.

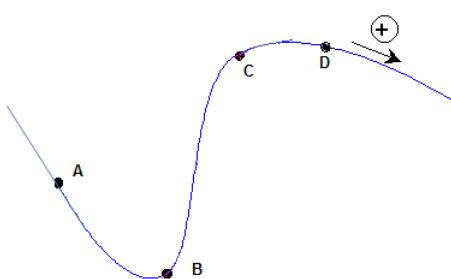


Figure 2.5 – Exemple de Trajectoire

IV.3 Exemples de mouvements

Si on connaît un point de la trajectoire M_0 (à $t = t_0$), un vecteur vitesse \vec{v}_0 (à $t = t_0$) et le vecteur accélération à chaque instant, on peut remonter par intégrations successives à la connaissance de $M(t)$ et donc connaître parfaitement le mouvement du point.

Remarque : Cette intégration peut se faire soit de manière analytique ou bien de manière numérique. Il faut alors définir un pas de temps suffisamment petit dt . Si on suppose $M(t)$ connu, alors on calcule $M(t + dt)$ avec $\vec{v}(t + dt) = \vec{v}(t) + \vec{a}(t) dt$ puis $\vec{OM}(t + dt) = \vec{OM}(t) + \vec{v}(t) dt$.

a Mouvement rectiligne

Dans ce cas, on utilise en général les coordonnées cartésiennes, avec l'axe x confondu avec la trajectoire. Si \vec{OM} est colinéaire au vecteur \vec{e}_x alors \vec{v} et \vec{a} sont aussi portés par l'axe Ox , on projette donc tous les vecteurs sur cet axe.

- Si $\vec{a} = \vec{0}$ $\forall t$ et $\vec{v}(t = 0) = v_0 \vec{e}_x$, il s'agit d'un mouvement **rectiligne uniforme**. En effet par intégrations successives : $a_x(t) = 0 \Leftrightarrow v_x(t) = cst = v_0 \Leftrightarrow x(t) = v_0 t + cst = v_0 t + x_0$. Les constantes d'intégrations ont été déterminées avec les conditions initiales : $\vec{v}(t = 0) = v_0 \vec{e}_x$ et $\vec{OM}(t = 0) = x_0 \vec{e}_x$.
- Si $\vec{a} \neq \vec{0}$ on dit que le mouvement est **accéléré** quand \vec{v} et \vec{a} ont le même sens, et **décéléré** quand \vec{v} et \vec{a} sont de sens contraire.
- Si $\vec{a} = cste \vec{e}_x$ ($cste \neq 0$) : le mouvement est dit **uniformément accéléré** (ou décéléré). Vous avez par exemple vu en Terminale le mouvement de chute libre sans vitesse initiale, c'est un exemple de mouvement uniformément accéléré. $a_x(t) = a \Leftrightarrow v_x(t) = at + cst = at + v_0 \Leftrightarrow x(t) = a \frac{t^2}{2} + v_0 t + cst = a \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$. De même les constantes d'intégrations ont été déterminées avec les conditions initiales : $\vec{v}(t = 0) = v_0 \vec{e}_x$ et $\vec{OM}(t = 0) = x_0 \vec{e}_x$.

b Mouvement circulaire

Si le mouvement est circulaire, on a vu que l'on utilise alors les coordonnées polaires avec O centre de la trajectoire. Dans ce cas, on a en polaire $r=constante=R=rayon\ de\ la\ trajectoire$ et on peut définir la position du point à partir de l'angle $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM}) = \theta(t)$. En cylindrique pour un mouvement circulaire on a vu : $\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta = R\omega \vec{e}_\theta$ donc

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = R \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_\theta - R\omega^2 \vec{e}_r$$

où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire.

Exercice 8

Montrer que l'expression ci-dessus peut être retrouvée à partir de l'expression de l'accélération dans la base de Frénet.

Exercice 9

Montrer que dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme la norme du vecteur accélération est une constante non nulle.

Définition

Accélération angulaire

On appelle accélération angulaire le terme $\frac{d\omega}{dt}$

Exercice 10

Quelle est la dimension de l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$? En quelles unités S.I s'exprime-t-elle? Un petit moteur électrique atteint la vitesse de 800 tours/mn en $\Delta t = 4,00$ s après son branchement sur le réseau. En supposant son accélération angulaire constante pendant la phase de démarrage, combien vaut-elle?

V Mouvements simples du solide

Il s'agit ici d'étudier et de comparer les mouvements de tous les points matériels d'un même système indéformable dans un référentiel donné.

Nous n'étudierons cette année que 2 cas particuliers du mouvement du solide : le mouvement de translation et le mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

V.1 Mouvement de translation

Définition

Un solide (S) est en mouvement de translation par rapport à un référentiel \mathfrak{R} si, pour deux points A et B quelconques de ce solide, le vecteur \overrightarrow{AB} reste toujours équipollent (même sens, même direction, même norme) à lui-même au cours du mouvement.

Translation

Propriétés

Les trajectoires de tous les points du solide seront donc parfaitement identiques et seront des droites (**translation rectiligne**), des cercles (**translation circulaire**) ou plus généralement des courbes quelconques identiques (**translation curviligne**) (Figure 2.6).

Trajectoires des points du solide

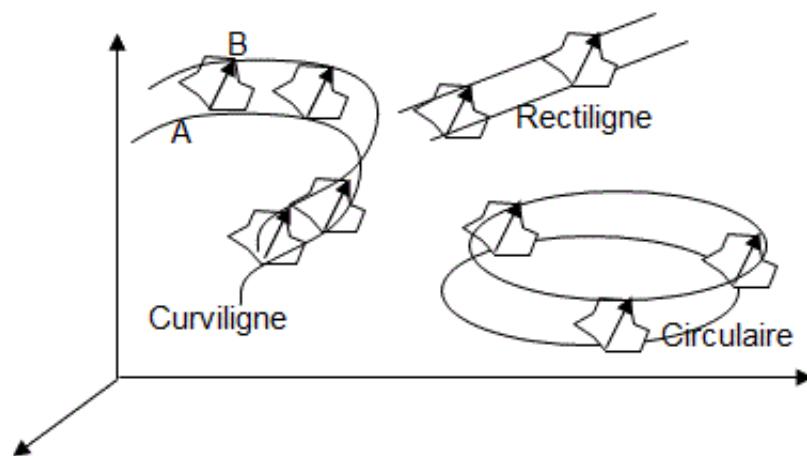


Figure 2.6 – Mouvements de translation d'un solide

Conséquences : Pour tout vecteur du solide indéformable :

$$\overrightarrow{AB}(t) = \text{Cste} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OB}(t) - \overrightarrow{OA}(t) = \text{Cste}$$

Soit, par dérivation : $\vec{v}(B/\mathfrak{R}) = \vec{v}(A/\mathfrak{R})$ puis : $\vec{a}(B/\mathfrak{R}) = \vec{a}(A/\mathfrak{R})$.

Propriétés

Vitesse et accélération

Dans un mouvement de translation tous les points d'un solide (S) ont à chaque instant t , le **même vecteur vitesse** et le **même vecteur accélération**.

V.2 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

a Définition

Définition

Dans un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ), tout point P du solide **décrit un cercle** de rayon $r = HP$, avec H le projeté orthogonal de P sur l'axe (Δ).

Rotation

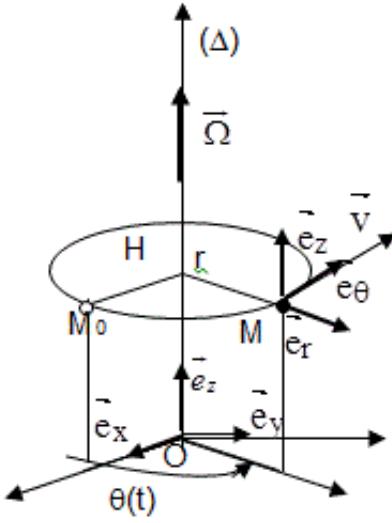


Figure 2.7 – Rotation autour d'un axe fixe

Soit M_0 le point qui coïncide avec P à une date t_0 choisie comme origine des temps. L'angle orienté $\theta(t) = (\overrightarrow{HM}_0, \overrightarrow{HP})$ définit la rotation du solide (Figure 2.7). (On oriente l'angle θ par le vecteur unitaire \vec{e}_z colinéaire à (Δ)).

Propriétés

Angle

Par définition du mouvement de rotation autour de l'axe fixe (Δ) , cet angle de rotation est le même à un instant donné pour tous les points du solide.

b Conséquences pour la vitesse

Propriétés

Vitesse angulaire

La vitesse angulaire instantanée $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ est donc la même pour tous les points du solide.

L'axe de rotation, le sens du mouvement et la vitesse angulaire sont communs à tous les points du solide en rotation. On peut « réunir » toutes ces informations dans un vecteur appelé vecteur rotation : $\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_z$, tel que ω est la vitesse angulaire, \vec{e}_z un vecteur unitaire perpendiculaire au plan de la rotation. Le signe de $\vec{\Omega}$ renseigne sur le sens de rotation avec la règle de la main droite (cf. figure 2.7).

Exercice 11

1. Soit \vec{u}_z vecteur unitaire de la verticale orienté vers le haut. On donne $\dot{\theta} > 0$. Dessiner $\vec{\Omega}$ et la trajectoire orientée de différents points du solide en rotation autour de (O, \vec{u}_z) .
2. Même question pour $\dot{\theta} < 0$.
3. Même question pour \vec{u}_z vers le bas et $\dot{\theta} < 0$.
4. Même question pour une rotation autour de (Ox) horizontal dirigé vers la droite avec $\omega > 0$.
5. Même question pour une rotation autour de (Ox) horizontal dirigé « vers l'arrière » avec une vitesse angulaire $\omega < 0$.

On cherche parfois à exprimer la vitesse de tout point en fonction de $\vec{\Omega}$:

Dans le référentiel lié au repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ on repère le point P du solide par sa position $M(t)$, et son vecteur vitesse s'exprime, dans la base locale des coordonnées cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ par :

$$\vec{v} = r\omega \vec{e}_\theta = r\omega \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge r\vec{e}_r = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

(car \overrightarrow{HO} est colinéaire à $\vec{\Omega}$).

Dans un mouvement de rotation d'un solide (S) autour d'un axe fixe (Δ) passant par un point O , la vitesse \vec{v} de tout point du solide s'exprime donc par $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$, $\vec{\Omega}$ étant le vecteur rotation instantané porté par l'axe (Δ).

c Conséquence pour un vecteur \vec{AB} du solide

Si A et B sont deux points d'un solide en rotation, le vecteur \vec{AB} est certes de norme constante, mais sa direction varie : il tourne avec le solide et $\frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{AB}$

Exercice 12

Démontrer que pour deux points A et B d'un solide en rotation on a $\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \vec{AB}$. Déduisez en que $\frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{AB}$.

Cette dernière propriété est utile par exemple pour de retrouver les dérivées par rapport au temps de vecteurs unitaires.

d Conséquences pour l'accélération

Tous les points d'un solide en rotation ont un mouvement circulaire à la même vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$. Leur accélération peut donc se déduire directement du paragraphe b).

VI Changements de référentiels

VI.1 Généralités

Soit par exemple une bicyclette circulant à une vitesse \vec{v} sur une route rectiligne. Soit P un point de la périphérie de la roue de centre O' (voir Figure 2.8). On peut alors identifier deux référentiels naturellement adaptés à l'étude du mouvement :

- un référentiel lié à la route $\mathfrak{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
- un référentiel lié à l'axe de la roue $\mathfrak{R}'(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Le mouvement de P s'analyse d'une manière très différente suivant le référentiel choisi :

- dans \mathfrak{R} la trajectoire sera une cycloïde (si la roue roule sans glisser)
- dans \mathfrak{R}' la trajectoire sera un mouvement circulaire.

On voit donc toute l'importance à préciser dans quel référentiel sont déterminées une trajectoire, une vitesse, une accélération.

La composition des vitesses et des accélérations, c'est-à-dire les opérations à effectuer pour passer d'un référentiel à un autre, sera vue d'une manière complète en 2ème année.

Remarque : Par commodité, on appellera \mathfrak{R} référentiel fixe ou absolu et \mathfrak{R}' , référentiel mobile ou relatif. Mais cet « étiquetage » est purement arbitraire, il est tout à fait possible de faire le choix inverse.

VI.2 Description du problème

On peut exprimer la position du point matériel P dans \mathfrak{R} ou dans \mathfrak{R}' .

Pour éviter toute ambiguïté, on va dans la suite de ce chapitre noter M la position du point matériel P dans \mathfrak{R} , c'est-à-dire on note M le point fixe de \mathfrak{R} qui coïncide avec P à la date t . M' note le point fixe de \mathfrak{R}' qui coïncide avec P à t . Bien sûr, on a donc $P = M(t) = M'(t)$. C'est uniquement sur les grandeurs liées au mouvement (et donc liées à une dérivée par rapport au temps) que la distinction entre M et M' est pertinente. Lors d'un calcul de dérivée par rapport à t , il est donc indispensable de préciser quelle est la référence utilisée, c'est-à-dire si c'est \mathfrak{R} ou \mathfrak{R}' qui est considéré comme fixe : La notation $\frac{df}{dt}|_{\mathfrak{R}}$ se lit « dérivée à \mathfrak{R} constant » et signifie que lors du calcul de la dérivée de f par rapport au temps, les vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont considérés fixes. Par contre, dans le calcul de $\frac{df}{dt}|_{\mathfrak{R}'}$ ce sont les vecteurs de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ qui sont considérés fixes.

Ainsi la définition des vitesses et des accélérations devient :

$$\vec{v} = \vec{v}(P/\mathfrak{R}) = \frac{d\vec{OM}}{dt}|_{\mathfrak{R}} \quad \text{et} \quad \vec{v}' = \vec{v}(P/\mathfrak{R}') = \frac{d\vec{O'M'}}{dt}|_{\mathfrak{R}'},$$

$$\vec{a} = \vec{a}(P/\mathfrak{R}) = \frac{d\vec{v}_{\mathfrak{R}}}{dt}|_{\mathfrak{R}} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}|_{\mathfrak{R}} \quad \text{et} \quad \vec{a}' = \vec{a}(P/\mathfrak{R}') = \frac{d\vec{v}_{\mathfrak{R}'}}{dt}|_{\mathfrak{R}'} = \frac{d^2\vec{O'M'}}{dt^2}|_{\mathfrak{R}'}.$$

On se propose maintenant de déterminer les relations existant entre \vec{v} , \vec{v}' (puis entre \vec{a} et \vec{a}' au paragraphe suivant).

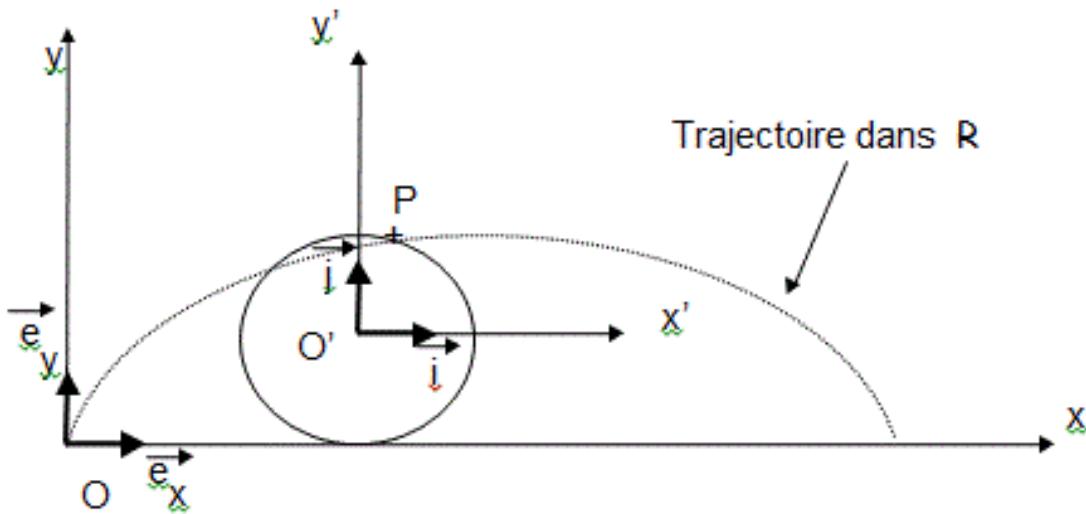


Figure 2.8 – Changement de référentiel d'étude.

VI.3 Loi de composition des vitesses par changement de référentiel

Il faut donc déterminer les relations entre les dérivées notées ci-dessus : pour pouvoir utiliser l'information « à \mathfrak{R} ou \mathfrak{R}' constant », il est intéressant de faire apparaître explicitement une base fixe liée à \mathfrak{R} ou \mathfrak{R}' respectivement : on va donc utiliser une base cartésienne et les coordonnées cartésiennes de M et M' respectivement dans \mathfrak{R} et \mathfrak{R}' :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M'} = \overrightarrow{OO_1} + x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

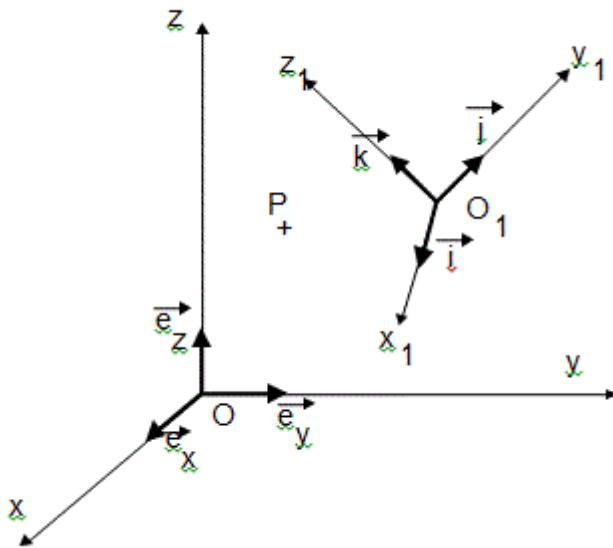


Figure 2.9 – Deux référentiels définis par deux bases cartésiennes

On peut donc calculer la vitesse de P dans le référentiel absolu \mathfrak{R} :

$\vec{v}(P/\mathfrak{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} + x' \left(\frac{d\vec{i}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} + y' \left(\frac{d\vec{j}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} + z' \left(\frac{d\vec{k}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} + \frac{dx'}{dt} \vec{i} + \frac{dy'}{dt} \vec{j} + \frac{dz'}{dt} \vec{k}$ puisque les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ considérés comme fixes dans \mathfrak{R}' , sont bien a priori mobiles par rapport à \mathfrak{R} .

Or $\frac{dx'}{dt} \vec{i} + \frac{dy'}{dt} \vec{j} + \frac{dz'}{dt} \vec{k} = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M'}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}'} = \vec{v}'(P/\mathfrak{R}') = \vec{v}'$ est la vitesse de P dans le référentiel mobile \mathfrak{R}' (ou vitesse relative).

$\vec{v}(P/\mathfrak{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} = \frac{d\overrightarrow{x\vec{e}_x}}{dt} \Big|_{\mathfrak{R}} + \frac{d\overrightarrow{y\vec{e}_y}}{dt} \Big|_{\mathfrak{R}} + \frac{d\overrightarrow{z\vec{e}_z}}{dt} \Big|_{\mathfrak{R}}$ puisque $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont considérés

comme fixes dans \mathfrak{R} .

On peut donc écrire :

$$\vec{v}(P/\mathfrak{R}) = \vec{v}(P/\mathfrak{R}') + \vec{v}_e \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$$

où $\vec{v}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} + x' \left(\frac{d\vec{i}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} + y' \left(\frac{d\vec{j}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} + z' \left(\frac{d\vec{k}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}}$ est appelée la **vitesse d'entraînement**.

Interprétation : considérons un point matériel P fixe dans \mathfrak{R}' : on a donc $\vec{v}' = \vec{0}$ et il vient simplement $\vec{v}_{\mathfrak{R}}(M' \in \mathfrak{R}') = \vec{v}_e$. La **vitesse d'entraînement est donc la vitesse dans le référentiel \mathfrak{R} du point fixe du référentiel \mathfrak{R}'** qui coïncide avec P . L'expression compliquée de \vec{v}_e tient au fait que \mathfrak{R}' peut soit s'éloigner de \mathfrak{R} (premier terme), soit tourner autour de \mathfrak{R} (derniers termes), soit les deux (tous les termes !)

Cas d'un mouvement de translation : En plus de sa définition et de son interprétation, la seule expression de \vec{v}_e à connaître cette année est celle où le **mouvement relatif de \mathfrak{R}' par rapport à \mathfrak{R} est un mouvement de translation**. Dans ce cas, les directions $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ liées à \mathfrak{R}' sont fixes dans \mathfrak{R} et $\left(\frac{d\vec{i}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} = \left(\frac{d\vec{j}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} = \left(\frac{d\vec{k}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} = \vec{0}$. On a donc $\vec{v}_e = \vec{v}(M' \in \mathfrak{R}') = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}}$

On retrouve que, puisque \mathfrak{R}' est en translation dans \mathfrak{R} , tous les points fixes de \mathfrak{R}' se déplacent à la même vitesse dans \mathfrak{R} . Dans ce cas on peut alors définir la vitesse de \mathfrak{R}' dans \mathfrak{R} et on note

$$\vec{v}(\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} = \vec{v}_e$$

Finalement, pour une translation de \mathfrak{R}' dans \mathfrak{R} :

$$\vec{v}(P/\mathfrak{R}) = \vec{v}(P/\mathfrak{R}') + \vec{v}(\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}) = \frac{dx'}{dt} \vec{i} + \frac{dy'}{dt} \vec{j} + \frac{dz'}{dt} \vec{k} + \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}}$$

Exercice 13

Un bac dont la vitesse par rapport à l'eau est $\vec{v} = cst \vec{e}$ traverse perpendiculairement aux berges une rivière de largeur d en un temps T , le courant ayant une vitesse constante \vec{V} . Donner les caractéristiques de \vec{v} en fonction de T , d et \vec{V} .

Exercice 14

POUR ALLER PLUS LOIN : dans le référentiel \mathfrak{R} du laboratoire, une tige rectiligne, horizontale, est en rotation uniforme autour de la verticale Oz (orientée vers le haut), à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$. Une bague, enfilée sur la tige, peut glisser le long de cette tige. On note \mathfrak{R}' le référentiel lié à la tige. Quelle est la nature du mouvement dans \mathfrak{R} des points de la tige ? Quelle est la nature du mouvement de la bague par rapport à la tige ? Donner dans la base locale cylindrique les expressions de \vec{v}' , \vec{v} et \vec{v}_e en fonction des coordonnées cylindriques de la bague.

Remarque : L'intérêt des changements de référentiel est d'aider à l'analyse du mouvement ; en effet, si on choisit bien le référentiel \mathfrak{R}' , la nature du mouvement du point matériel dans \mathfrak{R}' est plus simple que dans \mathfrak{R} et les expressions de la vitesse dans \mathfrak{R}' seront donc plus simples. Le changement de référentiel est pertinent si de plus la nature des mouvements des points M' du référentiel \mathfrak{R}' est suffisamment simple dans \mathfrak{R} . L'utilisation des lois de composition par changement de référentiel correspond en fait à l'analyse intuitive du mouvement à chaque fois qu'un référentiel \mathfrak{R}' pertinent existe.

VI.4 Loi de composition des accélérations par changement de référentiel pour un mouvement de translation

De même que l'on a trouvé précédemment une loi de composition des vitesses par changement de référentiel, on peut chercher une loi de composition des accélérations. Cependant, vu le nombre de termes à dériver, les expressions générales sont souvent compliquées et ne sont donc pas à connaître cette année. Elles seront vues en mécanique 2A.

Revenons à la définition de l'accélération dans chacun des deux référentiels :

$$\vec{a}(P/\mathfrak{R}) = \left(\frac{d\vec{v}_{\mathfrak{R}}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} = \left(\frac{d\vec{v}_{\mathfrak{R}'}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} + \left(\frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} \text{ et } \vec{a}'(P/\mathfrak{R}') = \left(\frac{d\vec{v}_{\mathfrak{R}'}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}'} = \frac{d^2x'}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y'}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z'}{dt^2} \vec{k}$$

Dans le cas particulier où le référentiel \mathfrak{R}' est animé d'un **mouvement de translation** par rapport à \mathfrak{R} , d'une part les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont fixes à la fois dans \mathfrak{R} et dans \mathfrak{R}' et d'autre part $\vec{v}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}}$. Il vient donc simplement :

$$\vec{a}(P/\mathfrak{R}) = \vec{a}'(P/\mathfrak{R}') + \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2} \Big|_{\mathfrak{R}} \quad (\text{valable uniquement si } \mathfrak{R}' \text{ en translation par rapport à } \mathfrak{R}).$$

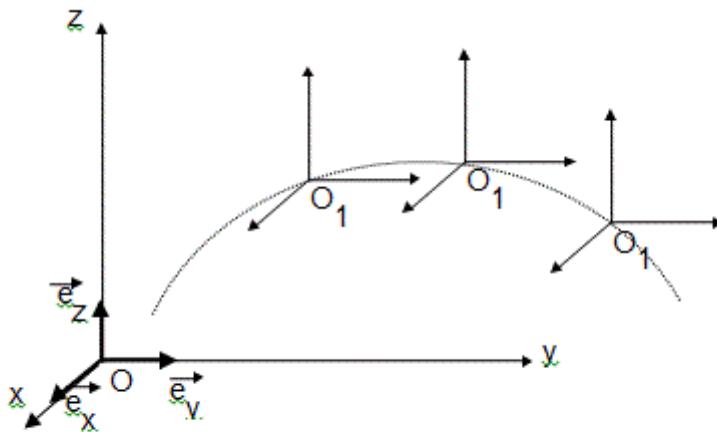


Figure 2.10 – Cas où le référentiel \mathfrak{R}' est animé d'un mouvement de translation par rapport à \mathfrak{R}

Si de plus le référentiel \mathfrak{R}' est animé d'un mouvement de translation **rectiligne uniforme** par rapport à \mathfrak{R} , alors tous les points de \mathfrak{R}' ont un vecteur vitesse constant dans \mathfrak{R} , donc en particulier $\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2} = \vec{0}$ et $\vec{a}_{\mathfrak{R}} = \vec{a}_{\mathfrak{R}'} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{a}'$

Propriétés

Référentiels en translation rectiligne et uniforme

Si le référentiel \mathfrak{R}' est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à \mathfrak{R} , l'accélération sera identique dans les deux référentiels.

Exercice 15

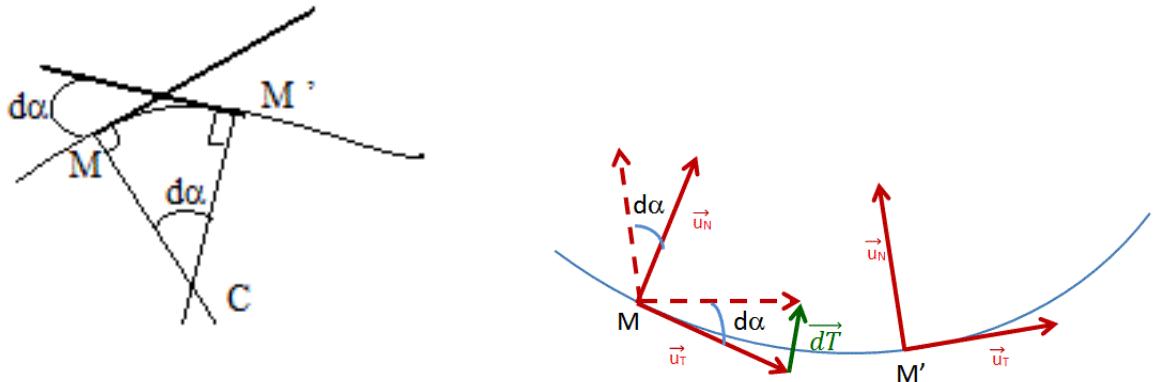
Il est important de ne pas confondre repère et référentiel. Placer ci-après convenablement les mots « repère » et « référentiel » :

1. Le mouvement d'un corps n'est parfaitement déterminé que par rapport à un _____ lié à un observateur.
2. On appelle mouvement absolu le mouvement d'un corps dans un _____ fixe, et mouvement relatif le mouvement d'un corps dans un _____ mobile.
3. Pour faciliter l'expression de la vitesse ou de l'accélération d'un corps dont le mouvement est décrit dans un _____ donné, il est possible de choisir un _____ différent du _____. Ainsi, pour décrire le mouvement circulaire plan uniforme d'un point M autour d'un point O par rapport au _____ cartésien (O, x, y) , il est possible d'écrire les composantes de la vitesse et de l'accélération dans le _____ cartésien coïncidant avec ce _____, mais les expressions de cette vitesse et de cette accélération sont beaucoup plus simples si l'on utilise le _____ mobile construit sur les vecteurs unitaires \vec{u} et \vec{v} , tels que $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$. Dans le _____-relatif lié à ce _____ mobile, la vitesse du point M est nulle.

Remarque : D'un point de vue cinématique, on considère que deux référentiels sont équivalents s'ils sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. Vous verrez en mathématiques que l'ensemble des référentiels équivalents constitue ce qu'on appelle une « classe d'équivalence ». Parmi toutes les classes d'équivalence de référentiels, nous verrons au chapitre suivant qu'on en distingue une particulière : la classe des référentiels galiléens.

VII Complément : Démonstration de $\frac{d\vec{u}_T}{d\ell} = \frac{\vec{u}_N}{R}$

Soit un arc $\overline{MM'}$ de longueur égale à $d\ell$, considéré comme infiniment petit et contenu dans le plan osculateur (nous raisonnons par la suite dans ce plan). La perpendiculaire en M' à la courbe (trajectoire) coupe la perpendiculaire en M à la courbe au point C . La position limite de C quand M' tend vers M est appelée le centre de courbure de la courbe au point M . MC devient alors le rayon de courbure de la courbe en M ($MC = R$) : tout se passe comme si on assimilait l'arc $\overline{MM'}$ à un arc de cercle de rayon $R = MC$: $d\ell = R d\alpha$



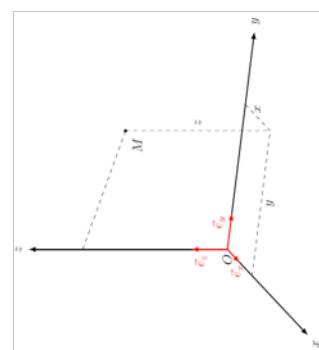
D'un autre côté, \vec{u}_T étant un vecteur unitaire, on a vu que $d\vec{u}_T$ est perpendiculaire à \vec{u}_T et donc colinéaire à \vec{u}_N . Quand M' tend vers M la longueur de $\|d\vec{u}_T\|$ tend donc vers la longueur de l'arc de cercle de rayon $\|\vec{u}_T\| = 1$ et d'angle $d\alpha$. On a donc $d\vec{u}_T = d\alpha \vec{u}_N$. Donc :

$$\frac{d\vec{u}_T}{d\ell} = \frac{d\vec{u}_T}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\ell} = \vec{u}_N \frac{d\alpha}{d\ell} = \frac{\vec{u}_N}{R}$$

VIII Fiche (à remplir !) de révision des systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes de M : x,y,z

$$\text{Composantes : } \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$



Les vecteurs $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont fixes.

$$\text{Vitesse : } \vec{v} =$$

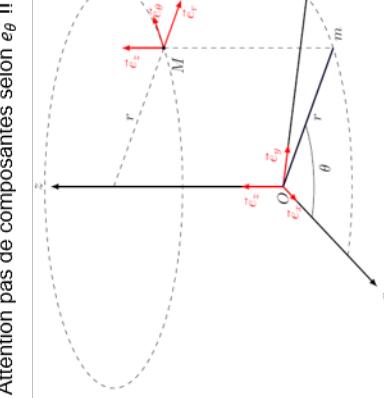
$$\text{Accélération : } \vec{a} =$$

Relation avec les coordonnées
cylindriques et sphériques

$$\begin{aligned} x &= \\ y &= \\ z &= \end{aligned}$$

Coordonnées cylindriques de M : r, theta, z

$$\text{Composantes : } \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$



Le vecteur est fixe. Les vecteurs et sont mobiles.

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\theta =$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} =$$

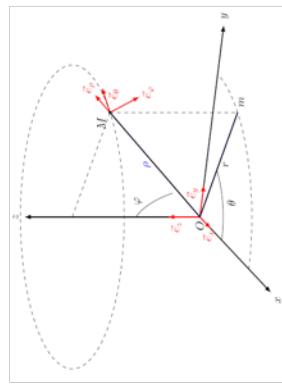
$$\text{Vitesse : } \vec{v} =$$

$$\text{Accélération : } \vec{a} =$$

Coordonnées sphériques de M : rho, phi, theta

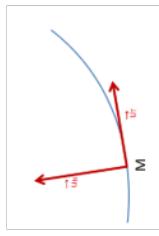
$$\text{Composantes : } \overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_r$$

Attention pas de composantes selon \vec{e}_ϕ et \vec{e}_θ !!



Tous les vecteurs de la base sont mobiles.

$$\text{Base de Frenet (M, } \vec{u}_T, \vec{u}_N, \vec{u}_B)$$



$$\text{Vitesse : } \vec{v} =$$

$$\text{Accélération : } \vec{a} =$$

IX Correction des applications directes du cours

Exercice 1 : $(5\sqrt{2}, 45^\circ, 53^\circ)$

Exercice 2 :

1. une parabole
2. un segment entre les points (a,b,c) et $(-a,-b,c)$ ($y = \frac{b}{a}x$) passant par $(0,0,c)$, parallèle au plan (O,x,y) de coef. dir b/a
3. une demi-droite $z = r + d$ dans le plan vertical $\theta = b$
4. un cercle $(x^2 + y^2 = a^2)$ de rayon a et de centre $(0,0, c)$
5. un cercle de rayon $r = a$ et de centre $(0,0,c)$

Exercice 3 : Si et seulement si $\|\vec{v}\| = \text{cste}$ (cf démonstration au [c](#) $d = \int \|\vec{v}\| dt$)

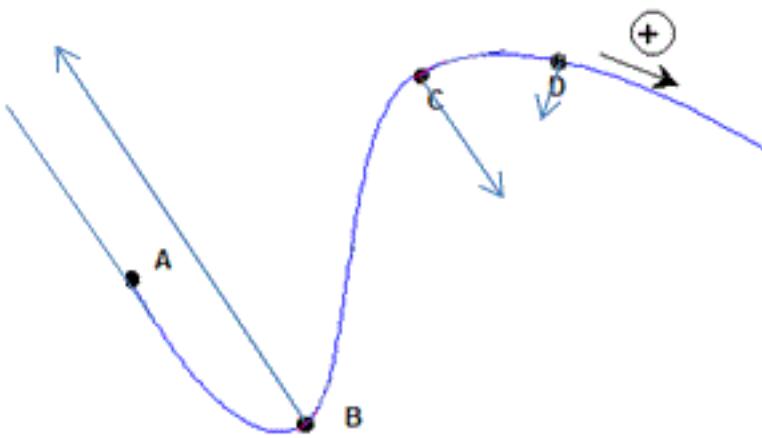
Exercice 4 : $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$

Exercice 5 : T^{-1} ; rad/s; 1,0 rad/s; 3,1 m/s

Exercice 6 :

1. a_t tangente à la trajectoire, $\frac{d\|\vec{v}\|}{dt}$, « accélère ou freine »; a_n normale à la trajectoire, $\frac{v^2}{R_c}$, « tourne »
2. (a) accélération normale nulle, accélération tangentielle non nulle
 (b) accélération normale nulle, accélération tangentielle non nulle
 (c) accélération normale non nulle, accélération tangentielle nulle
 (d) accélération normale non nulle, accélération tangentielle non nulle
3. $6,0 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Exercice 7 : En A, $a=0$



Exercice 8 : Si le mouvement est circulaire, alors le vecteur radial est normal et le vecteur orthoradial est tangentiel. Comme $v = R\omega$, Frénet et polaire sont identiques.

Exercice 9 : $a_t = 0$ et $a_n = v^2/R$ donc $a = v^2/R = \text{cste}$

Exercice 10 : T^{-2} ; rad · s⁻²; 20,9 rad · s⁻²

Exercice 11 :

Exercice 12 : $\vec{v}(A) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OA}$ et $\vec{v}(B) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OB}$, par différence on obtient $\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \vec{AB}$ donc $\frac{d\vec{OB}}{dt} - \frac{d\vec{OA}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{AB} = \frac{d\vec{AB}}{dt}$

Exercice 13 : Schéma obligatoire avec $\vec{u} = \vec{v} + \vec{V}$, où \vec{u} est la vitesse totale perpendiculaire aux berges, de norme d/T et \vec{V} la vitesse de l'eau parallèle aux berges. $\|\vec{v}\| = (V^2 + (d/T)^2)^{1/2}$, et \vec{v} fait un angle de $\text{atan}(d/(TV))$ avec \vec{V}

Exercice 14 : circulaire, rectiligne, $\vec{v}' = \dot{r}\vec{e}_r$; $\vec{v}_e = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$; $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

Exercice 15 :

1. Le mouvement d'un corps n'est parfaitement déterminé que par rapport à un **référentiel** lié à un observateur.
2. On appelle mouvement absolu le mouvement d'un corps dans un **référentiel** fixe, et mouvement relatif le mouvement d'un corps dans un **référentiel** mobile.
3. Pour faciliter l'expression de la vitesse ou de l'accélération d'un corps dont le mouvement est décrit dans un **référentiel** donné, il est possible de choisir un **repère** différent du **référentiel**. Ainsi, pour décrire le mouvement circulaire plan uniforme d'un point M autour d'un point O par rapport au **repère** cartésien (O,x,y) , il est possible d'écrire les composantes de la vitesse et de l'accélération dans le **repère** cartésien coïncidant avec ce **référentiel**, mais les expressions de cette vitesse et de cette accélération sont beaucoup plus simples si l'on utilise le **repère** mobile construit sur les vecteurs unitaires \vec{u} et \vec{v} , tels que $\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$. Dans le **référentiel** relatif lié à ce **repère** mobile, la vitesse du point M est nulle.

EXERCICES de TD

Que dois-je savoir faire à la fin de ce chapitre ?

- Étudier un mouvement rectiligne **Rec**
- Étudier un mouvement circulaire **C**
- Étudier un mouvement quelconque **Q**
- Utiliser les coordonnées cylindriques **Cy**
- Utiliser la base de Frenet **F**
- Changer de référentiel **Ref**
- Résoudre un problème **R**

Ressources Moodle

Page Moodle « Physique 1A toutes filières », onglet « Mécanique »

- QCM
 - Systèmes de coordonnées
 - Mouvements
 - Calculs de vitesse et d'accélération

Exercice 1 : Mouvement rectiligne (Rec)

Un point est animé d'un mouvement rectiligne avec une accélération $a = L/t^2$. Sa vitesse est nulle à l'instant $t = t_0$, $t_0 > 0$ au point $x = x_0$. Quelles sont sa vitesse $v(t)$ et sa position $x(t)$ au cours du temps, pour tout $t > t_0$?

Exercice 2 : Mouvement circulaire – Vitesse et accélération angulaire (C, Cy)

Une roue d'axe fixe dans le référentiel du sol et de rayon $R = 0,35\text{ m}$ tourne à une vitesse constante de 3 tours par seconde.

1. Déterminer sa vitesse angulaire en unité SI.
2. Déterminer la vitesse et l'accélération d'un point de la jante.
3. On suppose maintenant que la roue, initialement au repos, a été lancée avec une accélération angulaire constante lui permettant d'atteindre cette vitesse de 3 tours par seconde au bout de 5 s. Calculer cette accélération.

Exercice 3 : Mouvement circulaire – Rayon (C, Cy, R)

Une roue cylindrique tourne avec une accélération angulaire constante $4\text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$. Lorsqu'elle atteint la vitesse angulaire de $2\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, un point de sa périphérie a une accélération de $8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Quel est le rayon de la roue ?

Exercice 4 : Virage dangereux (C, Cy)

Avec un enfant à bord, les accélérations dans une voiture doivent être limitées. On considère que l'accélération maximale raisonnable est celle qui permet de passer de 0 à 100 km/h en 10 s en ligne droite par un mouvement uniformément accéléré. On considère que cette accélération est aussi une valeur limite à ne pas dépasser latéralement (en virage).

1. Quelle est la valeur de cette accélération maximale ?
2. Quelle est la vitesse maximale d'un véhicule empruntant une telle courbe pour que son accélération radiale ne dépasse pas cette valeur maximale, sur autoroute (rayon de courbure $R = 200\text{ m}$) et en ville (rayon de courbure $R = 20\text{ m}$) ?

Exercice 5 : Mouvement circulaire – Coordonnées (Cy, F, C)

Un point matériel M suit une trajectoire dont les coordonnées cartésiennes sont les suivantes (avec R et ω des constantes positives) :

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t) \\ y(t) = R \sin(\omega t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

1. Donner l'expression du vecteur position \overrightarrow{OM} en coordonnées cartésiennes.
2. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire. Commenter.
3. Déterminer le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes.
4. Reprendre les questions 1, 2 et 3 en coordonnées cylindriques.
5. Déterminer également l'accélération en coordonnées cylindriques.
6. Déterminer l'accélération dans la base de Frenet. Commenter la forme de l'accélération.

Exercice 6 : Mouvement hélicoïdal (Cy, Q, F)

Dans un référentiel \mathfrak{R} associé au repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, un point M se déplace sur une courbe définie par $r(t) = R ; \theta(t) = \omega t ; z(t) = v_0 t$ (où R, ω et v_0 sont des constantes positives).

1. Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ dans la base locale des coordonnées cylindriques.
2. Déterminer, en fonction de t l'expression de la vitesse dans cette base locale. Calculer la norme du vecteur vitesse. Commenter. En déduire une expression du vecteur unitaire \vec{u}_T de la base de Frenet.
3. Déterminer l'abscisse curviligne de M (en fonction de t).
4. Déterminer en fonction de t , l'expression de l'accélération dans la base locale des coordonnées cylindriques. Donner son expression dans la base de Frenet, commenter. En déduire une expression du rayon de courbure.

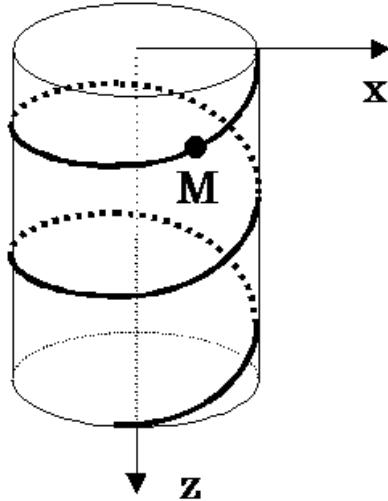


Figure 2.11 – Mouvement hélicoïdal

Exercice 7 : Spirale logarithmique (Cy, F, Q)

Un point matériel décrit la courbe plane dont l'équation en coordonnées polaires est $r = r_0 e^{a\theta}$ où r_0 et a sont des constantes. On choisit comme origine des temps l'instant où le mobile passe au point A correspondant à $\theta = 0$. La trajectoire est décrite à une vitesse angulaire ω constante.

1. Exprimez la composante radiale (suivant \vec{e}_r) et la composante orthoradiale (suivant \vec{e}_θ) de la vitesse en fonction r_0 , a , ω et du temps t . Calculez le module de cette vitesse.

2. En déduire :
 - (a) les composantes du vecteur unitaire \vec{T} tangent à la trajectoire en M, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.
 - (b) les composantes du vecteur unitaire \vec{N} normal à la trajectoire en M, dans la même base; \vec{T} et \vec{N} forment la base de Frenet.
3. Calculer la distance parcourue à l'instant t.
4. Déterminer les composantes radiale et orthoradiale du vecteur accélération en fonction de r_0 , a , ω et du temps t .
5. En déduire les valeurs de l'accélération normale a_N et de l'accélération tangentielle a_T à l'instant t .
6. Quel est le rayon de courbure de la trajectoire ?

Exercice 8 : Manège (composition des mouvements) (Ref)

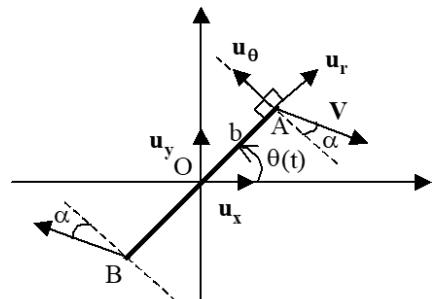
Un enfant se déplace sur un manège en suivant un des rayons depuis le centre jusqu'à la périphérie, avec une vitesse constante v_0 . Le manège tourne avec la vitesse angulaire ω_0 constante.

1. Dans un référentiel lié au manège, déterminer les vecteurs position, vitesse et accélération de l'enfant.
2. Faire de même dans le référentiel terrestre.
3. Dessiner l'allure de la trajectoire de l'enfant dans le référentiel terrestre.

Exercice 9 : Système d'arrosage (composition des mouvements) (Ref)

On considère un repère fixe R_0 ($O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) . Un système constitué d'un bras AB de longueur $2b$ tourne autour de son axe de symétrie (O, \vec{u}_z) à la vitesse angulaire constante ω . On repère la position de ce bras par rapport à l'axe par l'angle variable $\theta(t)$. On introduit la base mobile ($O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$) . L'extrémité de ce bras est constituée d'une buse par laquelle de l'eau est éjectée à la vitesse V par rapport au bras. Le vecteur \vec{V} fait un angle α avec la perpendiculaire au bras (cf. figure ci-contre).

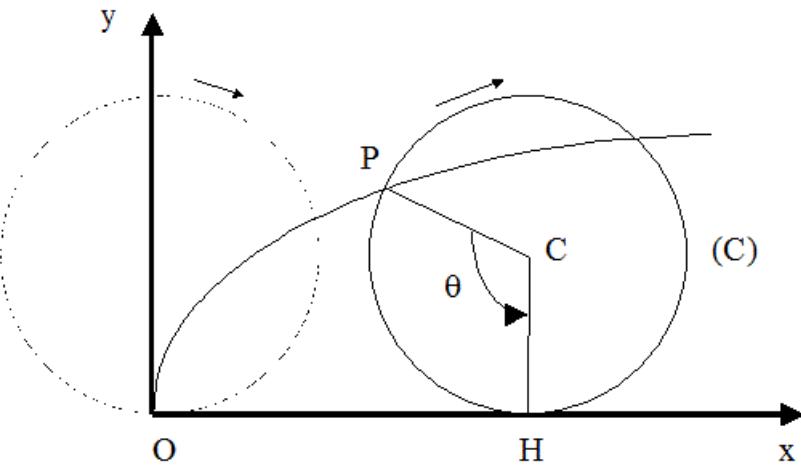
1. Calculez la vitesse d'une goutte d'eau (au moment de l'éjection) par rapport à R_0 que l'on notera \vec{V}_{R_0} . Vous exprimerez cette vitesse dans la base mobile ($O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$) puis dans la base fixe ($O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) .
2. Quelle relation doit-il exister entre b , ω , V et α pour que la vitesse de l'eau par rapport à R_0 , \vec{V}_{R_0} , soit purement radiale ?



Exercice 10 : Mouvement cycloïdal (Ref, Q)

Dans un plan rapporté au repère orthonormé (Ox, Oy), (ce plan sera considéré par la suite comme le référentiel R_{fixe}), un cercle de centre C et de rayon R roule sans glisser sur l'axe Ox . La vitesse du centre C dans le référentiel R_{fixe} est constante et égale à $\vec{v} = v\vec{u}_x$.

On s'intéresse au mouvement décrit par le point P de la circonférence. Pour définir la position de P sur le cercle (voir figure ci-dessus), on appelle $\theta = (\vec{CP}, \vec{CH})$, H étant la projection orthogonale du centre C sur l'axe Ox . À $t = 0$, θ est égal à 0 et P est en O .



1. Décrire la trajectoire du point P dans le référentiel lié au sol R_{fixe} et dans un référentiel R_{mobile} , défini par des axes Cx' et Cy' . Cx' et Cy' restant parallèles respectivement à Ox et à Oy . Donner d'autres exemples de trajectoires de formes différentes suivant le référentiel utilisé (vous pouvez penser à d'autres exemples de la vie courante). Sauf mention contraire, pour la suite de l'exercice, on se placera dans le référentiel R_{fixe} .
2. Équations paramétriques
 - (a) Écrire les équations paramétriques du mouvement de P : $x = f(\theta)$, $y = g(\theta)$ (équations d'une courbe appelée cycloïde). On pourra commencer par décomposer le vecteur \vec{OP} à l'aide d'une relation de Chasles judicieusement choisie.
 - (b) Exprimer la vitesse angulaire ω en fonction de R et v .
 - (c) Écrire les équations paramétriques en fonction de R , ω et t .
3. Vitesse
 - (a) Calculer les composantes v_x et v_y de la vitesse du point P dans R_{fixe} .
 - (b) En déduire la norme de la vitesse, puis les composantes du vecteur unitaire \vec{u}_T de la base de Frenet en fonction de t . Représenter \vec{u}_T et \vec{u}_N sur le schéma ci-dessus au niveau du point P indiqué.
 - (c) En déduire la longueur L de l'arche d'une cycloïde.
 - (d) Bonus : Comment peut-on déterminer les composantes du vecteur \vec{u}_N ?
4. Accélération
 - (a) Calculer les composantes a_x et a_y de l'accélération du point P dans R_{fixe} .
 - (b) L'accélération aurait-elle été différente dans le référentiel mobile R_{mobile} ?

Exercice 11 : Cardioïde(Q)

Le début de cet exercice est « calqué » sur l'exercice de la spirale.

On considère le repère R (O , \vec{i} , \vec{j}) orthonormé. Un mobile, assimilé à un point matériel M , décrit la courbe plane dont l'équation en coordonnées polaires (r, θ) est : $r = \frac{r_0}{2}(1 + \cos(\theta))$, où r_0 est une constante. On choisira à $t = 0$, $\theta = 0$. La trajectoire est décrite avec une vitesse angulaire constante ω positive.

1. Déterminez la composante radiale et la composante orthoradiale de la vitesse de M par rapport au repère R ainsi que son module. L'expression du module de la vitesse sera donnée en fonction de $\omega t/2$.
2. Déterminez la composante radiale et la composante orthoradiale de l'accélération par rapport à R ainsi que son module.
3. Les vecteurs \vec{T} tangent à la trajectoire en M , et \vec{N} normal à la trajectoire en M , constituent la base de Frenet.
 - (a) Déterminez les composantes du vecteur unitaire \vec{T} dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$
 - (b) Déterminez les composantes du vecteur unitaire \vec{N} dans la même base.

4. On étudie le mouvement pour le cas où $\cos(\omega t/2)$ est positif.
 - (a) Déterminez la composante tangentielle et la composante normale de l'accélération.
 - (b) En déduire le rayon de courbure de la trajectoire.
5. On note $\vec{dl} = \overrightarrow{dOM}$ le vecteur déplacement élémentaire.
 - (a) Exprimez la norme du vecteur \vec{dl} en coordonnées polaires en fonction de dr et $d\theta$.
 - (b) Donnez l'expression de dl pour un déplacement élémentaire sur la trajectoire. Ce déplacement sera noté ds et exprimé en fonction de r_0 , θ t et $d\theta$, puis de r_0 , ω et dt .
 - (c) En déduire l'expression de l'abscisse curviligne $s(t)$ comptée à partir du point A qui correspond à la position $\theta = 0$.
 - (d) Pour quel angle polaire a-t-on $s = r_0$? On note B la position correspondante du mobile.
 - (e) Exprimez $\frac{ds}{dt}$; quel résultat retrouvez-vous?
6. Application numérique : $r_0 = 50 \text{ cm}$, $\omega = 3,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculez les normes de la vitesse, de l'accélération et du rayon de courbure en A et en B .
7. Sachant que l'on connaît la vitesse angulaire ω avec une incertitude absolue $\Delta\omega$ déterminez l'incertitude relative sur la composante normale de l'accélération à l'instant t . On néglige l'incertitude sur r_0 .
On rappelle la relation trigonométrique suivante : $\cos(\theta) = 2 \cos^2(\theta/2) - 1$

Exercice 12 : Problème ouvert : Manège à sensations (R)

Dans un manège à sensation, on cherche à obtenir des accélérations importantes. La photo présentée à la figure 2.12 montre un manège de type looping avec deux nacelles accrochées au bout de bras articulés. La photo est prise lorsque le manège est lancé et tourne à sa vitesse maximale « de croisière » avec un temps de pose de 0,8 s.

Quelle est l'accélération ressentie par les passagers des nacelles ?



Figure 2.12 – Photo d'un manège de type Looping Source image : <http://studylibfr.com/doc/5017065/manege-looping>, consulté le 26 janvier 2018

SEMESTRE 2

CHAPITRE

3

INTRODUCTION À LA DYNAMIQUE – GRANDEURS CINÉTIQUES

Objectifs

Connaître les différentes grandeurs cinétiques utilisées ensuite en dynamique

I Qu'est-ce que la dynamique ?

La dynamique est une branche de la physique ayant pour objectif de comprendre (et donc de prévoir) le mouvement des objets à partir des actions extérieures qu'ils subissent. Au cours des siècles les physicien.e.s ont beaucoup travaillé à cette question, réuni un grand nombre d'observations, isolé les grandeurs d'intérêt et compris des lois qui les relient. Avec le recul aujourd'hui nous pouvons réunir tout ce travail en seulement 3 lois, valables dans tous les référentiels galiléens, pour un solide indéformable et pour des moments par rapport à un point fixe :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum P_{ext} \quad (3.1)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \quad (3.2)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{ext} \quad (3.3)$$

Ces lois peuvent impressionner quand on les voit pour la première fois. Rassurez-vous nous les découvrirons progressivement au cours du semestre. Certes vous aurez besoin de fournir un travail approfondi pour vous les apprivoier, mais sachez que cet effort en vaut la peine : ces lois ont permis de découvrir des planètes¹, dimensionner des trains roulant à $574,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ², ou encore poser délicatement des sondes sur des comètes³... Nous espérons que vous serez séduits par leur puissance descriptive et qu'elles vous permettront à votre tour de concevoir des systèmes innovants.

Regardez bien ces lois. Elles se ressemblent : à gauche du signe égal on voit la dérivée d'une grandeur : énergie cinétique \mathcal{E}_c , quantité de mouvement \vec{p} ou moment cinétique $\vec{\sigma}$. Nous verrons que ces grandeurs permettent de décrire le mouvement de l'objet, on les appelle donc **grandeur cinétiques**.

A droite du signe égal on retrouve la somme (on parle de **résultante** en physique) des grandeurs étudiées au premier semestre : puissances P_{ext} , forces \vec{F}_{ext} , moments $\vec{\mathcal{M}}_{ext}$. Vous savez déjà que ces grandeurs décrivent les interactions que l'extérieur exerce sur notre objet, nous les nommons donc **actions extérieures**.

Leur ressemblance n'est pas due au hasard, nous démontrerons qu'elles sont équivalentes. Pourquoi les physicien.e.s utilisent 3 lois si elles sont équivalentes ? Parce que chacune est plus adaptée à décrire et prévoir certains mouvements. Choisir d'utiliser l'une ou l'autre est une des compétences que nous allons travailler.

1. Découverte de Neptune grâce aux calculs de Le Verrier en 1846

2. TGV conçu par Alsthom

3. Mission Rosetta de l'agence spatiale européenne en 2014

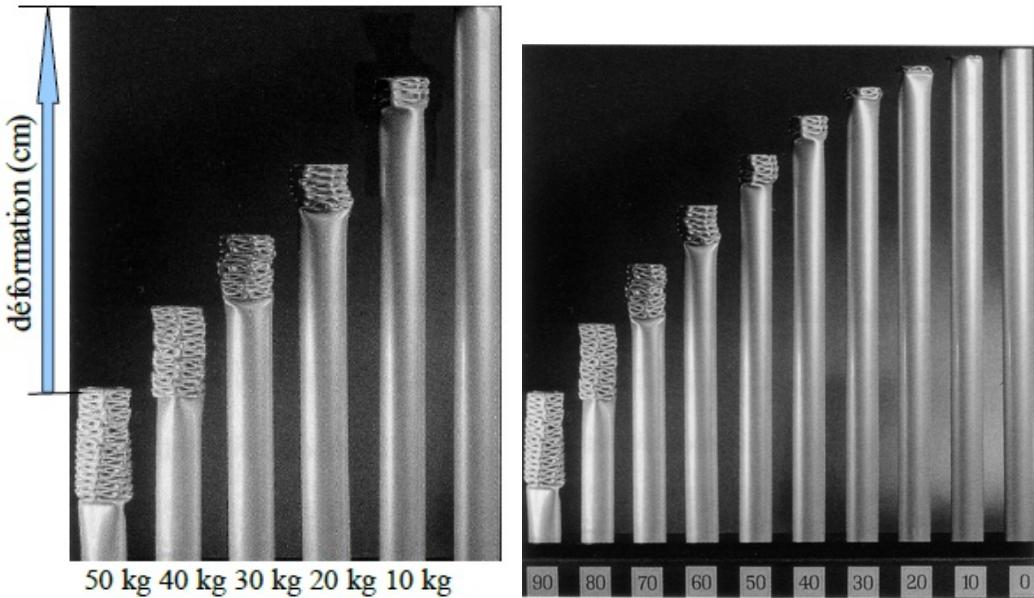


Figure 3.1 – L’orgue de Casadei : Déformation de barres de métal en fonction de la masse (en kg, à gauche) et de la vitesse (en km/s, à droite) d’un projectile envoyé dans l’axe de la barre, d’après pccollege.fr.

Pour celles et ceux qui n’aiment pas apprendre des formules par coeur (à raison), on peut donc résumer ces 3 lois en une seule, que les physicien.e.s appellent donc **Principe Fondamental de la Dynamique** :

Dans un référentiel galiléen, l’évolution temporelle des grandeurs cinétiques d’un système est régie par les actions extérieures.

La plupart des physicien.ne.s trouvent ce principe très beau. Si ce n’est pas encore votre cas, nous sommes sûrs que ça viendra bientôt !

II Les grandeurs cinétiques du point matériel

En regardant les équations vous avez sans doute remarqué que chacune associe une grandeur cinétique avec une action. Cette partie a pour but de vous familiariser avec chacune des 3 grandeurs cinétiques.

II.1 L’énergie cinétique

Pour étudier l’énergie cinétique, étudions l’expérience d’un ingénieur de Renault, Casadei. Il a envoyé des projectiles sur des barres en métal, en faisant varier soit leur masse soit leur vitesse.

Choisissons le système {projectile}. La première loi (3.1) nous indique que pour perdre son énergie cinétique (la partie gauche du signe égal), le projectile a donné de la puissance à la barre, ce qui l’a déformée (la partie droite du signe égal). En observant les résultats expérimentaux reportés dans la figure 3.1, on constate que l’énergie cinétique est proportionnelle à la masse et au carré de la vitesse, ce qui confirme ce que vous avez appris : $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$. Nous consacrerons un chapitre entier à l’étude des aspects énergétiques, faisant intervenir, autre autres, l’énergie cinétique.

L’information importante à retenir pour l’instant est que l’énergie cinétique contient deux informations :

- une information cinématique, c’est à dire décrivant le mouvement du projectile : la norme de sa vitesse v .
- une information d’inertie, c’est à dire la capacité du projectile à s’opposer à la modification de son mouvement : sa masse.

II.2 La quantité de mouvement

Dans la deuxième loi (3.2), l’action qui intervient est la force \vec{F} que vous avez étudiée dans le chapitre de statique au premier semestre. Elle modifie une nouvelle grandeur cinétique : la quantité de mouvement \vec{p} .

Poussez par exemple une boule de pétanque comme celle de la figure 3.2. Vous constatez que la vitesse de la boule évolue. Les plus subtil.e.s d’entre vous préciseront (à raison) qu’il s’agit du vecteur vitesse : il prend la même direction et le même sens que la force que vous avez exercée.

Refaites l’expérience en exerçant la même force, mais sur une balle de tennis. Que se passe-t-il ? L’accélération de la balle est plus importante. On retrouve le concept d’inertie associé à la masse : la capacité de la balle à “résister” à la mise en mouvement.



Figure 3.2 – Une boule de pétanque (gauche) et une balle de tennis (droite) : ce n'est pas la taille qui intervient dans la quantité de mouvement.

À vous d'imaginer une expérience similaire à l'orgue de Casadei, mais vous démontrerez rapidement que la quantité de mouvement est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse : $\vec{p} = m\vec{v}$. Comme pour l'énergie cinétique, on retrouve :

- une information cinématique, le vecteur vitesse \vec{v} .
- une information d'inertie, la masse m .

La quantité de mouvement \vec{p} a beaucoup de points communs avec l'énergie cinétique \mathcal{E}_c mais elle a une différence importante : c'est une grandeur vectorielle, tout comme la grandeur force \vec{F} à laquelle elle est associée dans la loi (3.2). Vous découvrirez dans le prochain chapitre à quel point cet aspect vectoriel est pertinent pour décrire les mouvements des objets.

Extension à un système de points matériels

Considérons un système matériel fermé constitué de N points A_1, A_2, \dots, A_N . Notons m_i la masse et \vec{v}_i la vitesse de chacun des points A_i . Par définition du barycentre G , la quantité de mouvement totale \vec{P} de ce système de points vaut la somme de la quantité de mouvement de chacun de ses points, soit :

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \frac{d(\overrightarrow{OG})}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \overrightarrow{OG} \right) = \frac{d}{dt} \left[\left(\sum_i m_i \right) \overrightarrow{OG} \right] = \left(\sum_i m_i \right) \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \text{ soit}$$

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{v}_G}$$

où $M = \sum_i m_i$ est la masse totale du système et le vecteur vitesse du barycentre.

II.3 Le moment cinétique

La troisième loi est particulièrement adaptée pour décrire des mouvements de rotation. Dans ces situations, vous savez déjà qu'on décrit une action extérieure, non pas avec une force mais plutôt avec le moment de cette force $\vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ (\vec{F} est la force s'exerçant en M , sur un système ayant le point O comme pivot).

Comme dans les deux cas précédents, l'action "moment" modifie elle aussi une grandeur cinétique. C'est le moment de la quantité de mouvement, qu'on nomme en physique le **moment cinétique** $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$.

Vous le voyez, on construit le moment cinétique $\vec{\sigma}$ à partir de la quantité de mouvement \vec{p} comme on construit un moment à partir d'une force, à partir du produit vectoriel avec le vecteur \overrightarrow{OM} . La loi obtenue (3.3) est équivalente à la loi (3.2), et la démonstration est donnée dans la partie III.3.

Pour illustrer, prenons le tourniquet de la figure 3.3. Vous êtes un peu grand maintenant pour y jouer mais supposez que vous vouliez faire tourner un enfant situé à l'intérieur. Vous allez exercer une force sur le côté (dont la droite d'action ne passe pas par l'axe de rotation), il s'agit donc bien d'un moment. Et le système {tourniquet + enfant} se met à tourner.

Le moment cinétique contient-il lui aussi une information cinématique et une information d'inertie ? Pour le comprendre, simplifions le problème en le rendant ponctuel (figure 3.3 droite) : négligeons la masse du tourniquet, et supposons que toute la masse de l'enfant est concentrée en un point M . Vous exercez la force \vec{F} sur le point M , l'axe de rotation étant (O, \vec{u}_z) . Cette année on se restreint aux mouvements plans, et la quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{p} = m\vec{v} = m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$$

On obtient donc que le moment cinétique vaut :

$$\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

En regardant bien, on retrouve de nouveau les deux informations contenues dans les grandeurs cinétiques :

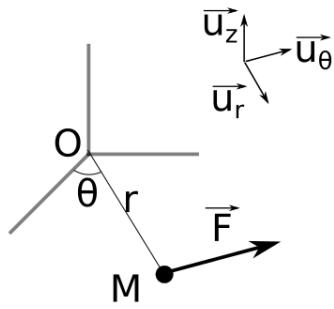


Figure 3.3 – D'après le fabricant ce tourniquet est réservé pour les enfants de moins de 12 ans, et les étudiants de physique (gauche). Schéma représentant un tourniquet ponctuel (droite).

- une information cinématique : le mouvement du système est une rotation à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour de l'axe z . On rassemble ces informations dans le **vecteur rotation** $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}_z$.
- une information d'inertie, représentant la capacité du système à résister à la mise en rotation mr^2 qu'on nomme habituellement **moment d'inertie** J ⁴.

Faites l'expérience avec le tourniquet. Vous constaterez qu'il est plus facile de mettre en mouvement le tourniquet si (1) la masse de l'enfant est faible, et/ou si (2) l'enfant se tient proche de l'axe de rotation. A vous d'imaginer une expérience comme l'orgue de Casadei pour montrer que l'inertie est bien décrite par $J = mr^2$.

III Les grandeurs cinétiques d'un solide

Dans le paragraphe précédent, on a supposé implicitement que tous les objets étaient ponctuels. Les notions de vitesse \vec{v} , vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ sont définies sans ambiguïté. La physique peut devenir beaucoup plus complexe si on considère la rotation de la balle de tennis en plus de sa translation, si on considère le mouvement de chacun des enfants dans le tourniquet.

En mécanique on appelle ces systèmes complexes des **solides**⁵. Comprendre un système complexe peut être difficile, mais soyez rassurés, les physicien.e.s ont un outil : ils décomposent le solide en petits éléments simples. Dès lors les grandeurs cinétiques du système complexe sont tout simplement la somme des grandeurs cinétiques de chaque élément.

III.1 Énergie cinétique d'un solide

Considérons un solide contenant de N éléments, ayant chacun une masse m_i et une vitesse \vec{v}_i , l'énergie cinétique du solide est la somme des énergies cinétiques des éléments :

$$\mathcal{E}_c = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{c,i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Dans le cas d'un solide en translation, tous les éléments ont la même vitesse V , on peut alors la factoriser, ce qui permet de faire apparaître la masse totale du solide M :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) V^2 = \frac{1}{2} M V^2$$

Dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe, tous les éléments ont la même vitesse de rotation $\vec{\Omega}$, et l'énergie cinétique du système est donnée par :

$$\mathcal{E}_c = \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \sum \left(\frac{1}{2} m_i r_i^2 \Omega_i^2 \right) = \left(\sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \right) \Omega_i^2 = \frac{1}{2} J \Omega^2$$

avec J le moment d'inertie du solide (défini comme la somme de chacun des moments d'inertie des éléments du solide), qui dépend donc de leur masse et de leur éloignement à l'axe de rotation.

Dans ces deux situations l'énergie cinétique du solide est semblable à celle d'un système ponctuel, mais ces simplifications ne sont valables que si tous les éléments du solide ont la même vitesse (respectivement vitesse de rotation), on dit alors que le solide est **indéformable**, situation qu'on supposera toujours vérifiée cette année.

4. Certains préféreront l'appeler *l'inertie du moment*, ce qui correspond mieux à sa définition

5. Ne confondez pas avec la définition "classique" d'un solide. En mécanique, un gaz, un liquide sont des "solides" comme les autres...

III.2 Quantité de mouvement d'un solide

On peut faire le même raisonnement pour la quantité de mouvement d'un solide en translation dont chacun des N éléments a le même vecteur vitesse \vec{V} , ce qui donne :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = (\sum_{i=1}^N m_i) \vec{V} = M \vec{V}$$

Le solide se comporte donc comme un objet ponctuel de masse M et de vitesse \vec{V} . Là encore il est nécessaire que tous les éléments ait la même vitesse. Dans l'exemple de la boule de pétanque ça n'est pas facile : la boule ne doit pas tourner mais uniquement translater...

III.3 Moment cinétique d'un solide

Si on veut faire de même pour le moment cinétique, on doit pouvoir factoriser par un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{u}_z$ identique pour tous les éléments. Cela donne :

$$\vec{\sigma} = \sum_{i=1}^N J_i \vec{\Omega}_i = (\sum_{i=1}^N J_i) \vec{\Omega} = J \vec{\Omega}$$

Le solide se comporte donc comme un objet ponctuel de moment d'inertie J et de vitesse de rotation $\vec{\Omega}$. Là encore il est nécessaire que tous les éléments ait la même vitesse de rotation. C'est le cas pour les enfants du tourniquet, mais pas pour la Terre autour du Soleil : la Terre tourne sur elle-même en plus de tourner autour du soleil donc la vitesse de rotation autour du soleil n'est pas homogène⁶.

Description discrète et continue d'un solide

Dans cette partie on a décrit un solide par un nombre N d'éléments (on parle de description *discrète*). Il est souvent intéressant de couper le solide en tout petits éléments et donc de faire tendre N vers l'infini (on parle alors de description *continue*). Les simplifications ci-dessus sont toujours valables, mais on utilise un autre outil mathématique : les *sommes continues*, que vous connaissez mieux sous le nom d'*intégrales*. Vous verrez en OMNI comment déterminer la masse du solide $M = \iiint_{solide} dm$ et son moment d'inertie $J = \iiint_{solide} dJ = \iiint_{solide} r^2 dm$.

Démonstration de la loi 3.3 à partir de la loi 3.2 pour un solide

Considérons un solide constitué de N éléments, en rotation autour d'un point O fixe, et dont chacun des i éléments est situé au point M_i et possède une quantité de mouvement \vec{p}_i . Son moment cinétique est donné par :

$$\vec{\sigma} = \sum_{i=1}^N \vec{\sigma}_i = \sum_{i=1}^N O \vec{M}_i \wedge \vec{p}_i$$

Pour retrouver la loi 3.3, calculons la dérivée temporelle du moment cinétique, qui vaut (en utilisant la propriété de distributivité de la dérivée) :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d(O \vec{M}_i \wedge \vec{p}_i)}{dt}$$

La dérivé d'un produit vectoriel se calcule comme la dérivée d'un produit, ce qui permet d'obtenir :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{dO \vec{M}_i}{dt} \wedge \vec{p}_i + O \vec{M}_i \wedge \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) = \vec{0} + \sum_{i=1}^N O \vec{M}_i \wedge \vec{F}_i$$

Le premier terme est nul car pour chaque élément, sa vitesse est colinéaire à sa quantité de mouvement. Pour simplifier le second terme, on a utilisé la loi 3.2 en notant \vec{F}_i la résultante des forces extérieures, appliquées sur l'élément i . On retrouve bien la définition de la somme des moments des forces appliquées sur le système, ce qui permet de retrouver la loi 3.3 :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{ext}$$

IV Le principe d'inertie

Maintenant que nous avons fait connaissance avec toutes les grandeurs, nous allons pouvoir comprendre les 3 lois qui les réunissent. Nous l'avons écrit, elles sont un peu difficiles, et nous aurons besoin de tout le semestre

6. C'est le cas par contre pour le mouvement de la Lune autour de la Terre, c'est pour ça que nous voyons toujours la même face



Figure 3.4 – Extraits des films 2001, Odyssée de l'espace et Gravity que nous vous conseillons, pas seulement pour comprendre le principe d'inertie.

pour savoir les utiliser. Dans ce chapitre, nous allons commencer par les simplifier grandement : annulons tout ce qui est à droite du signe égal. Ca signifie que la résultante des forces, des moments et des puissances extérieures s'exerçant sur le système qu'on étudie est nulle. C'est possible dans deux cas : soit il ne subit aucune action (on dit que le système est **isolé**), soit les actions se compensent (on dit que le système est **pseudo-isolé**). Les 3 lois deviennent :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad (3.5)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{0} \quad (3.6)$$

Pour celles et ceux qui n'aiment pas apprendre des lois par coeur (toujours à raison), on peut donc résumer ces 3 lois en une seule, que les physicien.e.s appellent **Principe d'inertie** :

Dans un référentiel galiléen, les grandeurs cinétiques d'un système isolé (ou pseudo-isolé) sont conservatives.

Il n'est pas facile d'expérimenter un système isolé : nous sommes au quotidien soumis à un grand nombre d'actions (à commencer par la gravité de la Terre). Nous ne pouvons qu'imaginer un système ayant quitté toute influence extérieure à commencer par la gravitation terrestre. Sa vitesse \vec{v} et sa vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ vont rester constantes. Cette loi est magnifiquement illustrée dans certains films de science fiction. Citons le jogging de Gary Lockwood dans 2001 Odyssée de l'espace⁷, ou la perte de contrôle de Sandra Bullock dans Gravity⁸.

Il est plus facile d'expérimenter un système pseudo-isolé : allez faire du patinage sur glace, du vélo... Votre poids sera compensé par la réaction du sol et en première approximation on peut négliger les frottements. Vous aurez alors la satisfaction de constater que vos grandeurs cinétiques sont conservées.

V Exemples d'application

V.1 Intérêt de la grandeur quantité de mouvement

Le principe fondamental de la dynamique (PFD), déjà évoqué au chapitre 1 et étudié plus particulièrement au chapitre suivant, appliqué à un système matériel isolé permet d'illustrer l'importance de la grandeur quantité de mouvement. En effet, une conséquence directe du PFD est que, dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un système isolé se conserve : ceci permet entre autres d'expliquer le phénomène de propulsion d'un système isolé ou le recul des armes à feu.

(cf. le « lance-patate » http://www.youtube.com/watch?v=Qgsb_7UN_bY)

Exercice 16

Pendule de Newton : Regarder la vidéo suivante <http://www.youtube.com/watch?v=0LnbjOyEQ8>. On suppose que l'on peut considérer le système comme pseudo isolé au cours des chocs et que toutes les billes ont la même masse m . Montrer que les différentes observations vérifient le PFD.

7. Extrait : <https://www.youtube.com/watch?v=pfnGUjDmggw>

8. Extrait : <https://www.youtube.com/watch?v=AJ7RQlyUIJU>

Exemple d'application : propulsion d'une fusée.

Une fusée est lancée verticalement. La propulsion est assurée par un dispositif à réaction : éjection de gaz produits par la combustion de propergol à travers une tuyère, avec un débit massique constant μ à la vitesse relative \vec{u} par rapport à la fusée. La masse $m(t)$ de la fusée n'est donc pas constante mais diminue régulièrement. On cherche à étudier le mouvement de la fusée.

Remarque : le système appelé « fusée » n'est donc pas un système fermé puisque sa masse diminue au fur et à mesure que le carburant et le comburant sont consommés. Pour appliquer les lois de la dynamique on doit donc étudier le système « fusée y compris les gaz qui partent » de manière à avoir un système fermé.

On définit le système à t : c'est la fusée de masse $m(t)$ et de vitesse $\vec{v}(t)$. À l'instant $t + \delta t$ ce système s'est séparé en deux parties : la fusée de masse $m(t + \delta t) = m(t) - \mu\delta t$ et de vitesse $\vec{v}(t + \delta t)$ et les gaz éjectés de masse $\mu\delta t$ et de vitesse \vec{v} par rapport au sol. La seule force qui s'exerce sur ce système est le poids.

Le PFD appliqué à ce système dans le référentiel du sol supposé galiléen donne donc :

$$m\vec{g} = \frac{d\vec{P}}{dt} \simeq \frac{\vec{P}(t + \delta t) - \vec{P}(t)}{\delta t}$$

$$m\vec{g}\delta t \simeq \vec{P}(t + \delta t) - \vec{P}(t) = (m - \mu\delta t)(\vec{v} + \delta\vec{v}) + \mu\delta t(\vec{v} + \delta\vec{v} + \vec{u}) - m\vec{v}$$

donc $m\vec{g}\delta t \simeq m\delta\vec{v} + \mu\delta t\vec{u}$ soit $m\frac{\delta\vec{v}}{\delta t} \simeq m\vec{g} - \mu\vec{u}$

Par analogie à $m\vec{a}$, $m\frac{\delta\vec{v}}{\delta t}$ est assimilable à l'accélération du système ouvert « fusée » : tout se passe donc comme si on pouvait utiliser le PFD ($m\vec{a} = \sum \vec{F}$) appliqué au système ouvert fusée, à condition de tenir compte d'une nouvelle force $\vec{H} = -\mu\vec{u} = \mu\vec{v}_{\text{fusée-gaz éjectés}}$, appelée force de poussée, et dont l'expression résulte directement des lois de la dynamique et non pas d'une formulation empirique. On voit que les gaz éjectés agissent donc comme une force supplémentaire de poussée (ici verticale vers le haut) de valeur μu : c'est le principe de tous les systèmes à réaction.

V.2 Moment cinétique et patinage

intéressons nous à une figure simple mais impressionnante de patinage artistique : comment une patineuse réussit à tourner de plus en plus vite en pirouette debout. On schématise la patineuse figure 3.5 : les bras de la patineuse sont modélisés par deux masses m supposées ponctuelles situées à une distance d de l'axe de rotation (G, \vec{u}_z). Le reste de son corps est modélisé par un cylindre de masse M de rayon R et d'axe passant par son centre de gravité (G, \vec{u}_z). On démontrera en OMNI que le moment d'inertie du cylindre vaut $J_0 = 1/2MR^2$. La patineuse est étudiée dans le référentiel terrestre.

Exercice 17

1. Déterminer le moment d'inertie de la patineuse (1) quand elle a les bras pliés et (2) quand elle a les bras tendus, en fonction de J_0 , d_1 , d_2 et m .
2. Comment évolue la vitesse de rotation quand elle plie les bras ? Vous déterminerez d'abord l'expression puis ferez une application numérique en estimant des valeurs numériques raisonnables.

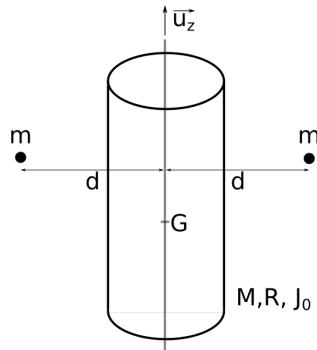
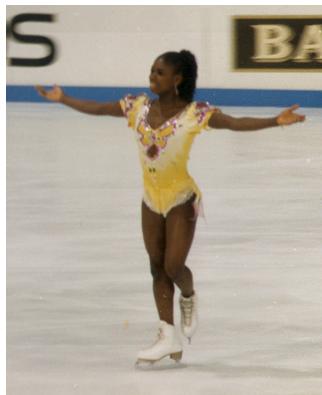


Figure 3.5 – La patineuse Surya Bonali, d'après wikipédia (gauche) et sa modélisation, un peu moins gracieuse – pardon Surya – (droite)

CHAPITRE

4

DYNAMIQUE, LOIS DE NEWTON

Objectifs

- schématiser et paramétriser (choix de la base adaptée) un problème mécanique simple
- énoncer et appliquer les trois lois de Newton
- utiliser la deuxième loi de Newton (PFD) pour étudier le mouvement du barycentre d'un système quelconque
- décrire le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe en utilisant le théorème du moment cinétique
- décrire le mouvement de translation d'un solide en appliquant le PFD à son centre de gravité

Prérequis

- connaître les forces usuelles (force gravitationnelle, poids, force électrostatique, force électromagnétique, force de tension d'un fil, force de rappel élastique d'un ressort, force de contact entre deux solides, poussée d'Archimède, cf. chapitre 1)
- intégrer les équations du mouvement en équations horaires lorsqu'elles se réduisent à des équations différentielles d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants, homogène ou non (OMNI)
- projeter un vecteur sur un axe (OMNI)
- calculer un produit vectoriel (OMNI)
- définir et calculer le moment d'inertie d'un solide (intégrale sur un volume) (OMNI)

Sommaire

I	Lois de Newton	95
I.1	Première loi de Newton	95
I.2	Deuxième loi de Newton	96
I.3	Troisième loi de Newton	99
II	Dynamique des mouvements simples du solide	99
II.1	Quantité de mouvement d'un système de points	99
II.2	Principe fondamental de la dynamique pour G , barycentre d'un système de points matériels	100
II.3	Application aux mouvements de translation du solide	100
II.4	Application aux mouvements de rotation du solide	100
II.5	Méthodologie	102
III	Oscillations en mécanique	102
III.1	Introduction	102
III.2	Définitions	103
III.3	Oscillations libres non amorties	103
III.4	Oscillations libres amorties par frottements fluides	105
III.5	Oscillations forcées	107
IV	Correction des applications directes du cours	110

Introduction : On rappelle que le but de la dynamique est de relier le mouvement d'un système aux actions qu'il subit. Nous commencerons par l'étude de mouvement du point matériel avant d'élargir à quelques mouvements simples du solide. Nous énoncerons les trois lois de Newton qui serviront de postulat pour toute la suite de la mécanique. Nous ne donnerons ensuite ici que quelques éléments destinés à l'étude de deux mouvements simples du solide indéformable dans un référentiel galiléen (la dynamique des systèmes matériels faisant l'objet du cours de mécanique de deuxième année) : le mouvement de **translation** et le mouvement de **rotation autour d'un axe fixe** ($\Delta = (Oz)$).

Dans ce chapitre, nous considérerons (dans un référentiel \mathfrak{R} galiléen) un système fermé de masse totale M constitué de N points matériels M_1, M_2, \dots, M_N . On notera m_i la masse et \vec{v}_i la vitesse de chacun des points M_i et G le barycentre du système. On rappelle (cf. chapitre d'introduction) qu'un solide pour être découpé en petits volumes élémentaires (à l'échelle mésoscopique) et étudié de la même manière en remplaçant simplement toutes les sommes discrètes par des intégrales.

I Lois de Newton

Vous avez déjà rencontré au lycée les 3 lois de Newton. Nous allons montrer dans ce cours de mécanique que postuler ces trois lois suffit pour démontrer tous les théorèmes de mécanique. En d'autres termes nous considérerons cette année ces 3 lois comme les trois principes de base de la mécanique. Comme tous les principes de la physique, ils se justifient parce que leurs conséquences n'ont jamais été mises en défaut par l'expérience (dans le cadre de la mécanique classique, cf. chapitre d'introduction).

I.1 Première loi de Newton

ou **Principe d'inertie** ou **Postulat d'existence de référentiels dits galiléens**.

a Système mécaniquement isolé

Définition

Système mécaniquement isolé

On définit un système (mécaniquement) **isolé** comme un système qui n'est soumis à aucune interaction.

En principe, ce cas est impossible. Cependant l'expérience montre que l'amplitude des interactions à distance décroît lorsque la distance séparant les deux systèmes augmente et que cette amplitude tend vers zéro lorsque cette distance tend vers l'infini. Par exemple la terre ne ressent que de façon infinitésimale l'action d'une étoile située très loin dans l'univers. Dans la pratique, on peut donc considérer comme isolé un point matériel suffisamment éloigné de toute autre matière.

Ce cas est plutôt rare, mais il est plus fréquent que la résultante des forces soit nulle (c'est-à-dire que toutes les forces sur le système se compensent).

Définition

Système pseudo-isolé

On dit qu'un système est **pseudo-isolé** si la résultante des forces qui s'applique sur lui est nulle.

On rappelle que le système étudié peut être un point matériel, un solide ou un système de points ou de solides.

b Première loi de Newton

« Si dans un référentiel galiléen, un point isolé est initialement au repos, il se maintient dans son état de repos. »

Théorème

Première loi de Newton

Cette loi postule l'existence de référentiels \mathfrak{R}_g privilégiés dits **référentiels galiléens** dans lesquels le mouvement d'un **point isolé ou pseudo-isolé** est **rectiligne et uniforme**.

Supposons qu'il existe un référentiel \mathfrak{R}_g dans lequel un point P isolé a un mouvement rectiligne uniforme : alors $\vec{v}_{(P/\mathfrak{R}_g)} = \text{cste}$. Soit \mathfrak{R}' un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathfrak{R}_g . Par composition des vitesses (cf. chapitre 2, §VI.3), on a $\vec{v}(P/\mathfrak{R}') = \vec{v}(P/\mathfrak{R}_g) + \vec{v}(\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}_g)$: la vitesse de ce point dans le référentiel sera donc $\vec{v}(P/\mathfrak{R}') = \vec{v}(P/\mathfrak{R}_g) - \vec{v}(\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}_g) = \text{cste}$ et ce point isolé est donc en mouvement rectiligne uniforme dans \mathfrak{R}' .

Propriétés

Référentiels galiléens

Ainsi, si \mathfrak{R}_g est galiléen, alors tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathfrak{R}_g est aussi galiléen.

L'expérience montre qu'on peut considérer que le référentiel de Copernic est galiléen. Il existe donc une infinité de référentiels galiléens tous animés d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel de Copernic.

Exercice 1

Rappeler la définition du référentiel de Copernic (cf. Chapitre 2).

En général, nos expériences ont lieu sur la Terre. Or un référentiel lié à la Terre ne peut pas être galiléen puisque celle-ci admet un mouvement quasi-circulaire dans le référentiel héliocentrique et de plus tourne sur elle-même dans le référentiel géocentrique (voir définitions de ces référentiels au chapitre 2) : la terre n'est donc pas en translation rectiligne uniforme par rapport à aucun des référentiels géocentrique, héliocentrique ou de Copernic. Néanmoins, pour de nombreuses applications pratiques dont la durée est très courte devant la période de rotation de la Terre, l'expérience montre qu'un référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen avec une approximation suffisante. Ceci sera supposé vérifié dans tous les exercices cette année.

Remarque : En fait le référentiel de Copernic n'est pas strictement galiléen non plus puisque le système solaire tourne autour du centre de la galaxie et que la galaxie se déplace elle-même aussi dans l'univers. Cependant l'échelle de temps de ces déplacements étant bien supérieurs aux mouvements étudiés, l'expérience montre que l'on peut toujours considérer le référentiel de Copernic comme galiléen.

I.2 Deuxième loi de Newton

ou **Principe fondamental de la dynamique (PFD) du point**

a Quantité de mouvement

Il est plus difficile de communiquer un mouvement à un ballon de football qu'à une balle de ping-pong, même si on imagine être capable de frapper le ballon de football avec exactement la même force que la balle de ping-pong. Ainsi les forces et la vitesse d'un corps ne suffisent pas pour décrire un mouvement dans toutes ses causes et ses conséquences. Il faut donc introduire une quantité caractérisant la difficulté à modifier le mouvement d'un corps : c'est sa masse.

Remarque : Nous avons vu au chapitre 1 que la masse m d'un corps intervient dans l'écriture de la force de gravitation, cette grandeur m est plus exactement appelée alors masse grave. La masse qui caractérise la difficulté à modifier le mouvement d'un corps s'appelle masse inertielle. L'expérience montre que masse grave et masse inertielle sont bien deux grandeurs parfaitement proportionnelles. En d'autres termes la masse inertielle et la masse grave portent exactement les mêmes informations physiques : si on connaît l'une, on doit pouvoir connaître l'autre. Dès lors leur distinction n'a aucun intérêt et on a fait en sorte que ces deux grandeurs soient parfaitement identiques par un choix correct de leurs unités. Cette identité résulte de l'expérience en mécanique classique. En revanche, dans le cadre de la relativité généralisée, il s'agit d'un des principes de base.

Le produit de la masse par la vitesse est appelée la **quantité de mouvement**. La vitesse étant un vecteur, la quantité de mouvement \vec{p} est également une grandeur vectorielle, définie par :

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

Exercice 2

Quels sont les dimensions et l'unité S.I. de la quantité de mouvement ?

b Deuxième loi de Newton ou PFD du point

Théorème

Deuxième loi de Newton ou PFD

Dans un référentiel **galiléen**, la somme des forces $\Sigma \vec{F}$ qui s'exercent sur un point matériel est reliée à sa quantité de mouvement \vec{p} par la relation :

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d \vec{p}}{dt}$$

Interprétation : on peut encore écrire

$$d\vec{p} = dt \Sigma \vec{f} \text{ ou } \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = dt \Sigma \vec{f} + o(dt) \Rightarrow \vec{p}(t+dt) \simeq \vec{p}(t) + dt \Sigma \vec{f}$$

Cette dernière équation se lit comme un bilan de quantité de mouvement, et les forces s'interprètent comme le terme de création de quantité de mouvement par unité de temps pour un système fermé. Les forces sont bien la source du mouvement !

Exercice 3

On s'intéresse au mouvement d'une bille de masse m , assimilée à un point matériel, posée sur un plan horizontal, que l'on souhaite envoyer vers sa cible (appartenant au même plan horizontal) en la tapant avec l'index avec une force horizontale \vec{F}_0 supposée connue. On suppose que la bille est initialement immobile, que le contact avec le sol est sans frottement et que la durée du choc entre l'index et la bille vaut τ .

1. Déterminer en fonction de \vec{F}_0 , de m et de τ la vitesse de lancement de la bille (donc sa vitesse $\vec{v}_0 = \vec{v}(\tau)$ juste après le choc)
2. Une fois la bille lancée, quelle est la nature de son mouvement ? Comment faut-il choisir \vec{F}_0 si l'on veut toucher la cible ?

Exercice 4

On reprend la même situation en supposant que la bille est lancée à $t = 0$ avec la même vitesse \vec{v}_0 que dans l'application précédente mais on suppose maintenant que le contact bille-support peut être modélisé avec un coefficient de frottement dynamique μ . Donner les équations horaires du mouvement rectiligne de la bille jusqu'à son arrêt.

Comme en mécanique classique **la masse d'un point peut être considérée comme constante pour un système fermé**, on pourra par exemple écrire (dans un référentiel galiléen) ce principe sous la forme : $\Sigma \vec{F} = \frac{d(m \vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$, soit

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Exercice 5

Un ascenseur a une masse de 1 500 kg. Calculer la norme de la tension \vec{T} du câble.

1. au repos
2. au démarrage en montée, son accélération initiale étant de $2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ vers le haut
3. au cours de la montée à vitesse constante
4. au démarrage de la descente, avec une accélération initiale de $2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ vers le bas

Définir préalablement le référentiel et faire l'inventaire des forces s'exerçant sur l'ascenseur. On prendra $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

c Intérêt

Cette relation va pouvoir être utilisée dans les deux sens :

- **Soit les forces sont connues.**

Dans ce cas le PFD va permettre de déterminer l'accélération, et par intégrations successives, sa vitesse et sa position en fonction du temps (cf. chapitre 2 cinématique).

Ex : $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ dans ce cas $\vec{a} = \vec{0}$ dans \mathfrak{R}_g et donc $\vec{v} = \vec{cste}$ dans \mathfrak{R}_g , le mouvement est rectiligne uniforme dans \mathfrak{R}_g , on retrouve donc la première loi.

Exercice 6

Un projectile, de masse $m = 100 \text{ g}$, est lancé vers le bas dans l'espace avec une vitesse initiale $v_0 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, faisant un angle de 45° avec la verticale. On suppose le champ de pesanteur uniforme et on suppose que la résistance de l'air est négligeable. On se propose de décrire son mouvement ultérieur. Cet exercice simple a pour but de détailler les diverses phases de la résolution. Cette méthodologie est valable pour n'importe quel type de problème.

1. Choisir le référentiel par rapport auquel le mouvement est étudié.
2. Choisir le système étudié.
3. Faire le bilan des forces auxquelles est soumis le système.
4. Exprimer la loi fondamentale de la dynamique.
5. Choisir un repère pour décrire le mouvement.
6. Projeter l'équation de la loi fondamentale sur les bases du repère.
7. Résoudre les deux équations différentielles obtenues en tenant compte des conditions initiales (Exprimer les coordonnées de la vitesse et de la position en fonction du temps).
8. Donner l'équation de la trajectoire. Un étudiant a trouvé $z = x + g \frac{x^2}{v_0^2}$, qu'en pensez-vous ?

- **Soit le mouvement est connu.**

Dans ce cas le PFD va permettre de déterminer les forces.

Exercice 7

Lanceur de marteau. Un homme fait décrire à un projectile de masse $m = 3 \text{ kg}$, attaché à une corde, un cercle horizontal de rayon $r = 1 \text{ m}$, à raison de $n = 1,5$ tours par seconde.

1. Dans quel type de référentiel décrire le mouvement ?
2. Décrire soigneusement les forces exercées sur la masse m .
3. Calculer la tension de la corde. Quelle simplification pourrait-on faire ?

- Parfois les exercices comportent un **mélange des deux options précédentes** :

Des informations partielles sur le mouvement sont utilisées pour compléter les informations sur les forces qui permettent de déterminer finalement le mouvement complet. C'est pour cela qu'il est très utile de bien lister les inconnues sur les forces comme conseillé au chapitre 1.

Exercice 8

Un point matériel de masse m glisse sur un support plan incliné d'un angle α avec l'horizontale. Le coefficient de frottement dynamique pour le contact solide-support vaut μ . Utiliser le fait que le mouvement est plan pour déterminer \vec{R}_N et \vec{R}_T . En déduire une expression de l'accélération de ce point.

d Cas particulier : condition d'équilibre

Si le point est immobile dans un référentiel galiléen, alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\text{cste}}$ donc $\vec{v} = \vec{0}$ donc $\vec{a} = \vec{0}$ donc le PFD se réduit à $\sum \vec{f} = \vec{0}$ (comme vu au chapitre 1 de statique au premier semestre). Cette condition, dite condition nécessaire d'équilibre, a de très nombreuses applications, en particulier c'est cette relation qui a permis de modéliser expérimentalement les forces définies au chapitre 1.

Ex : Si on accroche une masse à un ressort vertical, on sait qu'à l'équilibre la force du ressort compense le poids. On peut en changeant la masse retrouver expérimentalement la loi de Hooke qui relie la force de rappel du ressort à l'allongement (cf. TP n°8).

I.3 Troisième loi de Newton

ou **Principe des actions réciproques** ou **Principe de l'action-réaction**.

Définition

Troisième loi de Newton

Considérons deux points (A) et (B) en interaction. Soit \vec{F}_{AB} la force exercée par (A) sur (B) et soit \vec{F}_{BA} la force exercée par (B) sur (A). Le principe des actions réciproques, ou principe de l'action et de la réaction, ou encore 3ème loi de Newton, stipule que **ces deux forces sont opposées et portées toutes deux par la droite (AB)**.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Attention : Cette loi est valable quel que soit le référentiel et quel que soit le mouvement du système.

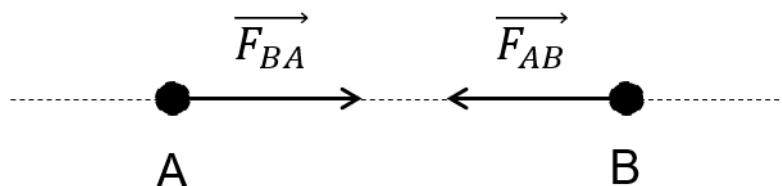


Figure 4.1 – Principe des actions réciproques

Exercice 9

Montrer que l'attraction gravitationnelle et la force de Coulomb vérifient la troisième loi de Newton.

Exercice 10

Lorsque l'on enfonce un clou dans une planche, l'intensité de la force du marteau sur le clou est-elle supérieure, inférieure ou égale à l'intensité de la force du clou sur le marteau ?

Conséquence : Considérons un système matériel (**déformable ou non**) constitué de N points A_1, A_2, \dots, A_N . La somme de toutes les forces intérieures est : $\vec{F} = \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = \vec{0}$, où \vec{f}_{ij} est la force que le point A_i exerce sur le point A_j . En effet les termes \vec{f}_{ij} et \vec{f}_{ji} s'annulent deux à deux.

Propriétés

Résultante des forces intérieures

Ainsi la résultante de toutes les forces intérieures à un système est nulle.

II Dynamique des mouvements simples du solide

II.1 Quantité de mouvement d'un système de points

On rappelle qu'on a montré au chapitre précédent que la quantité de mouvement d'un système de point matériel est

$$\vec{P} = M\vec{v}_G$$

où M est la masse totale du système et \vec{v}_G la vitesse du barycentre G du système.

Exercice 11

Soit les 4 points du plan : $A_1(a, a)$, $A_2(a, -2a)$, $A_3(-2a, -a)$ et $A_4(-2a, 2a)$ de masses $m_1 = 2m$, $m_2 = m/2$, $m_3 = m$ et $m_4 = 3m$ et de vitesses $\vec{v}_1(3v, v)$, $\vec{v}_2(0,5v)$, $\vec{v}_3(-4v, 0)$, $\vec{v}_4(3v, 3v)$. ($a = 1$ m, $m = 100$ g, $v = 1$ m/s). Déterminer le vecteur quantité de mouvement du système puis le vecteur vitesse du barycentre G de ces points.

Exercice 12

Une bille de rayon R et de masse m roule sans glisser sur le sol en faisant n tours par seconde. Exprimer la quantité de mouvement de la bille.

II.2 Principe fondamental de la dynamique pour G , barycentre d'un système de points matériels

On peut, pour étudier le mouvement de ce système, tenter d'étudier le mouvement de chacun de ses points : le PFD appliqué à chaque point M_i nous donne : $\vec{f}_i = \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i)$ où \vec{f}_i est la résultante de toutes les forces sur le point M_i , que ces forces soient intérieures (exercées par un point M_j du système) ou extérieures.

On a montré ci-dessus que la **quantité de mouvement totale** du système $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ est égale à :

$$\vec{P} = M\vec{v}_G \text{ où } \vec{v}_G = \vec{v}(G/\mathfrak{R}) \text{ est le vecteur vitesse du barycentre.}$$

En sommant sur tous les points, on a donc $\sum_i \vec{f}_i = \sum_i \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_G$ (où $\vec{a}_G = \vec{a}(G/\mathfrak{R})$ est le vecteur accélération du barycentre).

En utilisant de plus le fait que la somme des forces intérieures est toujours nulle (d'après le principe de l'action-réaction), $\sum \vec{F}_{int} = \vec{0}$, on trouve la relation :

Théorème

Théorème de la quantité de mouvement

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_G = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Cette dernière relation est appelée **théorème de la quantité de mouvement** : pour un système fermé dans un référentiel galiléen l'accélération du barycentre est donnée par la somme des forces extérieures divisée par la masse totale.

ATTENTION : dans le cas général, cette relation ne nous donne que le mouvement de G et pas le mouvement complet du solide.

II.3 Application aux mouvements de translation du solide

Si le solide est en translation, alors par définition (cf chapitre 2) tous les points du solide ont la même vitesse $\vec{v}_G = \vec{v}(\text{solide}/\mathfrak{R})$ et la vitesse de n'importe quel point du solide est donc déterminée par le théorème de la quantité de mouvement :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_G = M\vec{a}(\text{solide}/\mathfrak{R})$$

II.4 Application aux mouvements de rotation du solide

Pour des mouvements plus compliqués que la translation, le mouvement du barycentre reste déterminé par le théorème de la quantité de mouvement, mais il reste à étudier le mouvement propre du système (c'est-à-dire le mouvement de rotation du système dans un référentiel lié au barycentre).

a Position du problème

Nous allons considérer ici **uniquement les mouvements de rotation d'un solide autour d'un axe fixe** (Oz) dans un référentiel \mathfrak{R} galiléen (figure 4.2a). Chaque point M du solide va être repéré en coordonnées cylindrique d'axe orienté (Oz) par $(r = HM, \theta = (Ox, Ox_M), z)$ (cf. figure 4.2b).

Pour chaque point M du solide en rotation autour de (Oz), on a $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ avec $r = cste$ et $z = cste$, donc $\vec{v} = \vec{v}(M/\mathfrak{R}) = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = \vec{a}(M/\mathfrak{R}) = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$.

b Pour un point en rotation autour de l'axe (Oz)

Soit tout d'abord un seul point M de masse m soumis à plusieurs forces \vec{F} en rotation autour de l'axe (Oz).

Le PFD appliqué à ce point s'écrit $\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$. La somme des moments en O des forces qui s'exercent en M vaut donc :

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(O) = \sum (\vec{OM} \wedge \vec{F}) = \vec{OM} \wedge \sum \vec{F} = \vec{OM} \wedge (m \frac{d\vec{v}}{dt})$$

Dans la base cylindrique : $\sum \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(Oz) = \sum \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(O) \cdot \vec{u}_z = (m(r\vec{u}_r) \wedge (-r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta)) \cdot \vec{u}_z$

Soit $\sum \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(Oz) = (mr^2\ddot{\theta}\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_z$, donc

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(Oz) = mr^2\ddot{\theta} = mr^2\dot{\omega}$$

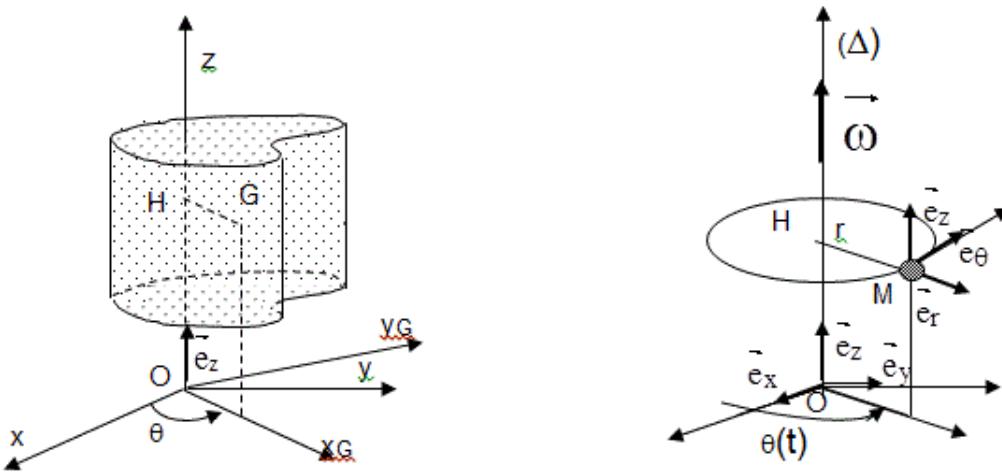


Figure 4.2 – Rotation d'un solide a) solide en rotation b) base locale associée

Exercice 13

On définit comme sens positif des angles celui donné par \vec{e}_z . Déterminer quel est le signe du moment par rapport à l'axe (Oz) qu'il faut appliquer au point matériel admettant un mouvement circulaire uniforme dans le sens positif pour le faire décélérer. Quel est l'effet de ce même moment après que la vitesse soit devenue nulle ? Vérifier que c'est cohérent avec ce qui avait été annoncé dans le chapitre d'introduction sur les moments des forces.

c Pour un solide en rotation autour de l'axe (Oz)

On peut écrire la relation précédente pour tous les points M_i du solide, de masse m_i à la distance $r_i = \text{cste}$ de l'axe (Oz) : $\mathcal{M}_i(Oz) = m_i r_i^2 \ddot{\theta}$ où $\mathcal{M}_i(Oz)$ est le moment résultant sur l'axe (Oz) des forces s'exerçant sur le point M_i . On a vu (chapitre 1) que d'après le principe de l'action-réaction la somme des moments des forces intérieures s'annule, en sommant sur tous les points on obtient donc :

$$\sum_i \mathcal{M}_{ext,i}(Oz) = \sum_i \mathcal{M}_i(Oz) = \sum_i m_i r_i^2 \ddot{\theta}$$

En utilisant le moment d'inertie du solide défini au chapitre 3 : $J_{Oz} = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm = \int r^2 \rho d\tau$ (avec $d\tau$ petit élément de volume du solide), l'étude du mouvement du solide sera donc donnée par le théorème suivant (appelé théorème du moment cinétique ou TMC) :

Définition

Théorème du moment cinétique ou TMC

Pour un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe (Oz) et soumis à plusieurs moments de forces extérieures $\mathcal{M}_{ext,i}(Oz)$ par rapport à (Oz), on a (avec le sens positif de l'angle de rotation obligatoirement défini par \vec{e}_z) :

$$J_{Oz} \ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{ext,i}(Oz)$$

On attire ici l'attention sur la nécessité de bien orienter le sens positif de rotation et donc la définition de l'angle grâce à l'orientation de \vec{e}_z !

Exercice 14

Un moteur électrique tourne à la vitesse de 3000 tours/minute. On coupe son alimentation électrique à l'instant $t = 0$. Sur l'arbre du moteur s'exerce un couple de freinage constant de $10 \text{ N} \cdot \text{m}$. Le moment d'inertie du moteur par rapport à l'axe de rotation est de $0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

1. Quelle est, avec son signe, l'accélération angulaire du moteur ?
2. Donner la loi horaire $\omega(t)$ (en unités SI).
3. En combien de temps s'arrêtera-t-il de tourner ?

II.5 Méthodologie

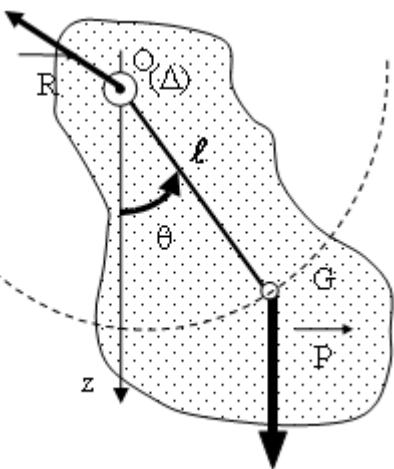
Nous verrons que différentes méthodes peuvent être utilisées pour résoudre un problème de mécanique, mais que la méthodologie est toujours très similaire. Il peut y avoir deux types d'exercices où l'on souhaite utiliser le PFD (ou le TMC) : soit déterminer le mouvement à partir des forces, soit déterminer les forces inconnues à partir du mouvement. Dans les deux cas, la méthodologie est la suivante :

- définir le système (éviter de prendre un système déformable, si possible).
- nommer le référentiel et vérifier qu'il est bien galiléen.
- lister les actions (forces et / ou moments) **extérieurs** avec leurs 4 caractéristiques : indiquer lesquelles sont inconnues et donner tout ce qui est connu. (Donner lorsque c'est pertinent une expression vectorielle des forces la plus simple possible).
- schéma **obligatoire** et grand avec toutes les forces, les inconnues étant représentées « au hasard ». On veillera à utiliser cette figure
 - en la complétant au fur et à mesure où l'on prend conscience de l'intervention de nouveaux paramètres,
 - en exploitant les propriétés géométriques qu'elle fait ressortir, par exemple dans les calculs de composantes.
- y-a-t-il des informations qui contraignent la trajectoire et donnent des informations sur l'accélération ?
- choix d'un système de coordonnées **judicieux** (= projections simples, utilisant les symétries éventuelles du mouvement...), 2 axes suffisent si le problème est manifestement plan.
- énoncer (correctement) le PFD (pour le barycentre si le système n'est pas ponctuel) ou le TMC.
- exprimer l'accélération dans la base choisie - projeter le PFD dans la base choisie - en fonction de ce qui est demandé résoudre les équations obtenues par la projection du PFD ou par l'utilisation du TMC.
- vérifier que le résultat est plausible (dimensions, signes, ...).

Remarque : si le but de l'exercice est l'obtention du mouvement, l'équation à résoudre sera une équation différentielle du deuxième ordre (éventuellement du premier ordre pour déterminer la vitesse) homogène ou non, et en première approximation souvent linéaire à coefficients constants. Il est donc indispensable de revoir ce chapitre du cours d'OMNI.

Exercice 15

Le pendule pesant : un solide est suspendu en O autour d'un axe (Δ). Le solide a pour centre d'inertie G , situé à une distance ℓ de l'axe (Δ) de rotation, une masse m et un moment d'inertie J par rapport à cet axe. La position du solide est caractérisée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OG})$. Trouver l'équation du mouvement et la période des petites oscillations de ce pendule.



III Oscillations en mécanique

III.1 Introduction

Les mouvements oscillants (ou vibratoires) sont parmi les phénomènes que l'on rencontre dans le plus de disciplines différentes : en biologie, en finance, en météorologie, en génie civil, en musique, en chimie, en médecine

... bien sûr en électricité (comme vous l'avez vu précédemment) et aussi en mécanique comme nous allons le détailler maintenant. Quel que soit le domaine d'application, les phénomènes vibratoires se modélisent toujours de la même façon.

Dans la pratique il existe plusieurs types de mouvements oscillants : lorsqu'aucune énergie n'est fournie au système, les oscillations s'amortissent et finissent par cesser. Ce sont les oscillations **libres**. Mais il existe aussi des cas où de l'énergie est fournie périodiquement au système par une excitation extérieure. C'est ce qu'on appelle des oscillations **forcées** que nous étudierons ensuite. Ce dernier cas est particulièrement intéressant car il nous amènera à discuter le phénomène de **résonance** qui a de très nombreuses applications en sciences (aussi bien positives que dévastatrices : <http://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs>) .

III.2 Définitions

On appelle **oscillateur harmonique non amorti** un système matériel dont la position dépend d'un paramètre s (élongation) dont les variations avec le temps sont régies par l'équation différentielle du deuxième ordre :

$$\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0}$$

ω_0 étant une constante de dimension T^{-1} .

L'intégrale générale de cette équation différentielle s'écrit : $s(t) = s_m \cos(\omega_0 t + \phi)$

Le mouvement de l'oscillateur est donc un mouvement sinusoïdal caractérisé par sa **pulsation propre** ω_0 , son amplitude s_m et sa phase à l'origine des temps ϕ . On appelle également **période propre** de l'oscillateur la grandeur $T_o = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Les constantes s_m et ϕ sont déterminées à l'aide des **conditions initiales** du mouvement (état vibratoire à $t = 0$), c'est à dire par la connaissance de $s(t = 0)$ et $\dot{s}(t = 0)$. Soit : $s(t = 0) = s_m \cos(\phi)$ et $\dot{s}(t = 0) = -\omega_0 s_m \sin(\phi)$

s_m est défini comme étant une grandeur toujours positive. ϕ est déterminée à $2k\pi$ près.

III.3 Oscillations libres non amorties

a Exemple d'application en mécanique du point : le pendule simple

Un pendule simple est constitué d'un point matériel de masse m , suspendu à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil souple de masse négligeable, inextensible, de longueur ℓ (Figure 4.3).

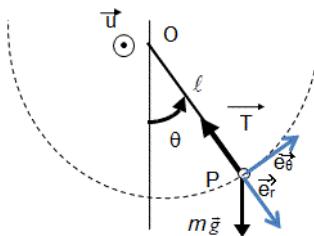


Figure 4.3 – Pendule simple

Recherche de l'équation différentielle du mouvement :

- Système : point P de masse m
- Référentiel : sol (supposé galiléen)
- Forces exercées sur P : Poids $m\vec{g}$ (vertical vers le bas, intensité mg) ; Tension du fil \vec{T} (dirigée selon \overrightarrow{PO} , d'intensité inconnue)
- Schéma : cf. ci-dessus
- Trajectoire circulaire de centre O , de rayon ℓ la longueur du fil tendu : on choisit comme système de coordonnées soit les coordonnées polaires (r, θ) (ou bien cylindriques), soit la base de Frenet. L'angle orienté θ étant défini comme l'angle entre la verticale descendante et \overrightarrow{OP} (sens positif cohérent avec \overrightarrow{u} , il est possible de caractériser la position (r, θ) du point matériel par le rayon $r = \ell$ de la trajectoire et la valeur algébrique $\theta(t)$ de l'angle).

- D'après la cinématique, il vient donc $\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$ par exemple en polaires.
- Dans un référentiel galiléen, $\Sigma\vec{f} = m.\vec{a}$. Le tension \vec{T} étant inconnue, on voit que la projection intéressante pour trouver l'équation du mouvement est ici la projection sur \vec{u}_θ : $-mg \sin \theta = m\ell\ddot{\theta}$ soit :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta)$$

Exemples d'exploitation de l'équation différentielle du mouvement :

- On peut retrouver la condition nécessaire de l'équilibre : si le pendule est à l'équilibre, alors $\theta(t) = cste = \theta_{eq}$ et $\dot{\theta} = 0$: l'équilibre est le mouvement particulier qui vérifie $0 = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta_{eq})$. Le calcul montre donc qu'il existe a priori deux solutions qui vérifient la condition nécessaire d'équilibre : $\theta_{eq}^1 = 0$ et $\theta_{eq}^2 = \pi$ (modulo 2π). A posteriori, on voit que le cas $\theta_{eq}^2 = \pi$ correspond à une situation où le fil ne peut rester tendu et n'est donc pas une position d'équilibre.
- Étude du mouvement au voisinage de l'équilibre : On se propose de déterminer la loi horaire du mouvement lorsque le point est au voisinage de l'équilibre $\theta_{eq}^1 = 0$. Comme on se restreint au cas où $\theta(t) \approx \theta_{eq}^1$, la grandeur $\varepsilon = \theta(t) - \theta_{eq}^1 = \theta$ des écarts à l'équilibre est petite et on peut déterminer l'équation différentielle approchée que vérifie $\varepsilon(t)$: il est possible de confondre la valeur de l'angle, exprimée en radians, et la valeur de son sinus ; d'où

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{\ell} \varepsilon = 0$$

Cette équation différentielle du second ordre sans second membre (cf OMNI) admet comme solution (avec un angle initial θ_0) :

$$\theta(t) = \varepsilon(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Il s'agit donc d'un mouvement sinusoïdal de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

Remarque : comme cos est une fonction bornée, la loi horaire trouvée est correcte pourvu que $\theta_0 \ll 1$

Exercice 16

POUR ALLER PLUS LOIN : reprenez la même étude du mouvement mais au voisinage d'une position θ_e quelconque. Commentez.

Nous avons donc montré que les oscillations autour d'une position d'équilibre stable étaient harmoniques à condition de prendre des oscillations suffisamment petites. Nous avons par ailleurs rencontré en cours et en TD de nombreux exemples d'oscillateurs harmoniques non amortis (ressort, pendule pesant, etc).

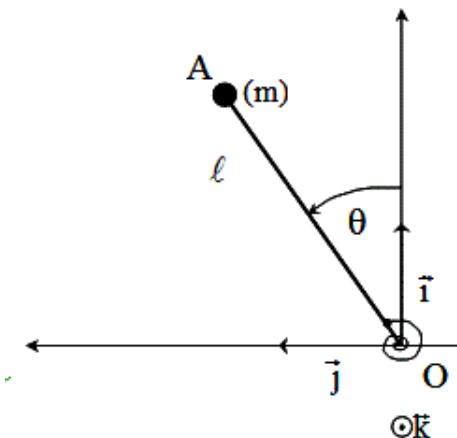
b Autre exemple en mécanique du solide : pendule de torsion

Nous allons traiter ici l'exemple du pendule de torsion :

Considérons un solide horizontal (S) en équilibre, suspendu à un fil de torsion maintenu serré en son extrémité supérieure et passant par son centre d'inertie G . Si l'on fait subir à (S) une rotation θ dans le plan horizontal à partir de sa position d'équilibre, le fil de torsion exerce sur (S) un couple de torsion de moment $\vec{M} = -C\theta\vec{e}_z$.

Un tel couple est dit « **couple de rappel** » puisqu'il tend à ramener le solide à sa position initiale. Soit J le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe vertical Oz . Par rapport à un référentiel galiléen (\mathcal{R}) ($O; x, y, z$) le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe Oz donne :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta$$

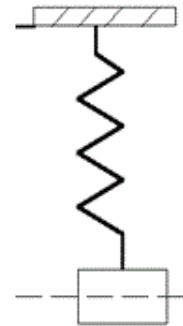


Donc l'équation pour l'elongation angulaire est $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$ (avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$) dont la solution est bien une oscillation harmonique.

Exercice 17

L'une des extrémités d'un ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , est accrochée à un support horizontal fixe. On vient attacher à l'autre extrémité un bloc de masse m . Le poids du ressort est négligé.

1. Déterminer l'allongement du ressort $\Delta\ell$ consécutif à la suspension du bloc.
2. Le bloc est écarté d'une distance a_0 de sa position d'équilibre. Il est ensuite lâché sans vitesse initiale. Les forces de frottement sont négligées. Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution du mouvement du bloc.
3. Résoudre l'équation différentielle et représenter de manière schématique l'évolution temporelle de la position du bloc.



III.4 Oscillations libres amorties par frottements fluides

a Frottement visqueux

Nous avons vu dans le chapitre 1 la définition du frottement fluide ou frottement visqueux. Nous avons vu qu'à faible vitesse (écoulement laminaire) on pouvait généralement considérer avec une bonne approximation que la force est proportionnelle à la vitesse du solide :

- dans le cas d'un mouvement de translation, la résultante des forces de frottement s'écrit donc $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ où α est une constante positive.
- dans le cas d'un mouvement de rotation autour d'un axe de symétrie du solide, ces forces sont donc équivalentes à un **couple** de frottement visqueux par rapport à l'axe de rotation dont le moment s'exprime sous la forme : $\mathcal{M}_f = -\beta \frac{d\theta}{dt}$, avec β une constante positive θ étant l'angle de rotation, le sens positif des angles étant défini par l'orientation de l'axe de rotation.

Tous les calculs ci-dessous peuvent avantageusement être illustrés par la vidéo **oscillations libres d'un flotteur** en ligne sur la page Moodle "Physique 1A toutes filières" (section Mécanique avec les QCM oscillations).

b Équation du mouvement

- Si le solide de masse M en translation sur l'axe Ox subit une force de rappel $(-kx)$ et la force de frottement visqueux $(-\alpha \frac{dx}{dt})$, l'équation différentielle du mouvement sera :

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad M \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1)$$

- Si le solide en rotation autour de son axe de symétrie est soumis à un couple de rappel $-C\theta$ et au couple de frottement visqueux $\mathcal{M}_f = -\beta \frac{d\theta}{dt}$, l'équation différentielle du mouvement sera :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta - \beta \frac{d\theta}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta \frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0 \quad (2)$$

Propriétés

Équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti

Les équations (1) et (2) sont de la même forme : $\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0} \quad (3)$

où s est l'élargissement (linéaire ou angulaire) et pour laquelle on pose :

$$\delta = \frac{\alpha}{2M} \quad \text{ou} \quad \delta = \frac{\beta}{2J} \quad \delta \text{ est le coefficient d'amortissement}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M} \quad \text{ou} \quad \omega_0^2 = \frac{C}{J} \quad \omega_0 \text{ est la pulsation propre de l'oscillateur non amorti}$$

Les solutions de l'équation (3), de type e^{rt} seront celles données (voir cours d'OMNI) par l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$$

Trois cas sont distingués en fonction du signe du discriminant $\Delta = 4(\delta^2 - \omega_0^2)$

c **Solution premier cas : oscillateur faiblement amorti** : $\delta < \omega_0$ ou $\Delta < 0$.

Dans la vidéo [oscillations libres d'un flotteur](#) il s'agit du flotteur dans l'eau ou dans l'huile.

L'équation caractéristique admet alors deux racines complexes conjuguées : $r_1 = -\delta + j\omega$ et $r_2 = -\delta - j\omega$, en posant : $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

Propriétés

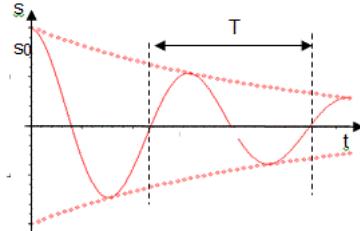
Oscillateur faiblement amorti

La solution générale de l'équation du mouvement est donc :

$$s(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \phi)$$

Les constantes A et ϕ sont fixées par les conditions initiales (à $t = 0$).

La figure ci contre représente en trait plein la variation de s au cours du temps avec les conditions initiales suivantes : $s(0) = s_0 > 0$, $(\frac{ds}{dt})_0 = 0$.



Le mouvement est dit **oscillatoire amorti**. La courbe $s(t)$ est comprise entre deux courbes exponentielles décroissantes (en pointillé) appelées « **enveloppe** » de $s(t)$. On peut définir plusieurs grandeurs caractéristiques :

1. **Le temps caractéristique ou durée de vie des oscillations.** Le temps au bout duquel l'amplitude est divisée par $e \approx 2,72$ vaut $\frac{1}{\delta}$. Il caractérise ainsi la durée de vie de ces oscillations : Au bout d'un temps $t = 5/\delta$, l'amplitude des oscillation est inférieure à $A/100$: on considère en général que les oscillations ont pris fin.
2. **La pseudo-période T** qui est l'intervalle de temps qui sépare deux passages successifs par la position d'équilibre ($s = 0$) dans le même sens. Elle correspond à la période de la fonction cosinus.
 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$

Cette pseudo-période est toujours supérieure à la période propre T_0 du système non amorti **mais en est en général très proche**. En effet dès que l'on voit plus de 3 oscillations, on a alors $1/\delta > 3T$ donc $\delta < \omega/(6\pi)$ soit $\delta^2 \ll \omega^2$ et donc $\omega \approx \omega_0$.

Remarque : Pour déterminer expérimentalement le temps caractéristique, on mesure souvent le décrément logarithmique, qui est le logarithme népérien du rapport de l'elongation s_n de l'un des points qui appartiennent à l'enveloppe (à t , tel que $\cos(\omega t + \phi) = 1$) à celle s_{n+1} du suivant (à $t + T$). Donc :

$$D = \ln \frac{s_n}{s_{n+1}} = \ln \left(\frac{e^{-\delta t_n}}{e^{-\delta(t_n+T)}} \right) = \ln(e^{\delta T}) = \delta T$$

d **Solution deuxième cas : oscillateur très amorti** : $\delta > \omega_0$ ou $\Delta > 0$.

Dans la vidéo [oscillations libres d'un flotteur](#) il s'agit du flotteur dans la glycérine.

L'équation caractéristique admet alors deux racines réelles, toutes deux négatives :

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = -\lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

avec $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$.

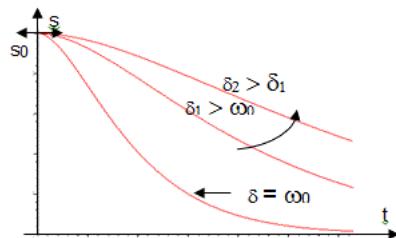
Propriétés

Oscillateur très amorti

La solution générale de (3) sera donc : $s = ae^{-\lambda_1 t} + be^{-\lambda_2 t}$ les constantes a et b étant fixées par les conditions initiales.

Il n'y a plus d'oscillations : le mouvement est dit **apériodique**.

La figure ci-contre montre deux courbes obtenues pour $s_0 > 0$ et $(\frac{ds}{dt})_0 = 0$ et pour deux valeurs δ_1 et δ_2 telles que $\delta_2 > \delta_1$. Le retour à la position d'équilibre (obtenue théoriquement au bout d'un temps infini) se fait d'autant plus lentement que le coefficient d'amortissement δ est important.



e Solution troisième cas : amortissement critique : $\delta = \omega_0$ ou $\Delta = 0$.

La résolution de l'équation caractéristique conduit alors à une racine double $r = -\delta = -\omega_0$. La solution générale est donc : $s = (at + b)e^{-\omega_0 t}$. Si par exemple $s(0) = s_0 > 0$ et $(\frac{ds}{dt})_0 = 0$, on trouvera aisément $s = s_0 e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 t)$, fonction dont le graphe est représenté par la figure précédente.

Le mouvement est encore apériodique et la valeur particulière $\delta = \omega_0$ définit l'**amortissement critique**.

On recherche souvent à obtenir l'amortissement critique dans les systèmes oscillants, car, de tous les régimes, c'est celui qui permet de revenir en pratique le plus rapidement possible à la position d'équilibre.

Cependant il faut souligner que le régime critique est une limite théorique entre les deux régimes amortis et apériodiques : physiquement il n'y a aucune chance de tomber juste sur le régime critique. On peut juste chercher à s'en rapprocher. Il n'y a donc pas d'équivalent à ce cas dans la vidéo [oscillations libres d'un flotteur](#).

f Remarque importante :

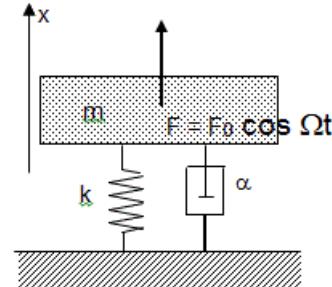
Il est important de noter que dans les 3 cas ci dessus les exponentielles sont toujours décroissantes et tendent donc toutes vers 0 quand $t \rightarrow \infty$.

III.5 Oscillations forcées

Le problème pratique qui se pose le plus souvent est celui de la réponse d'un système vibrant à une excitation imposée de l'extérieur. Nous allons étudier ici le cas le plus simple qui est celui d'une excitation sinusoïdale permanente. Ce cas simple possède un intérêt théorique important car il est à la base des études qui peuvent être menées pour des excitations quelconques.

a Exemple

Soit un solide de masse m relié au sol par un système amortisseur que l'on peut schématiser par un ressort de raideur k exerçant une force de rappel $f_1 = -kx$, si x est le déplacement vertical de la masse à partir de sa position de repos, en parallèle avec un amortisseur visqueux exerçant sur cette même masse une force $f_2 = -\alpha\dot{x}$ (Figure ci-contre).



On veut connaître la réponse de ce système lorsqu'il est soumis à une force extérieure de la forme $F = F_0 \cos(\Omega t)$ s'exerçant parallèlement à l'axe des x . Le système est astreint à se déplacer le long de cet axe uniquement.

Ce schéma est une simplification du problème pratique de la réponse d'un système massif soumis à des vibrations extérieures (ex : sismographe).

La position d'équilibre correspond à l'équilibre entre le poids de la masse mobile et la force verticale ascendante due à la compression du ressort. Si x est l'élargissement du ressort à partir de cette position d'équilibre, on a, dans le référentiel galiléen lié au sol, l'équation : $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega_0 t)$. Soit :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + \alpha \frac{dx}{dt} = F_0 \cos(\omega_0 t)$$

et s étant l'élargissement du système matériel, on obtient l'équation générale :

$$\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)} \quad (1)$$

δ et ω_0 ne dépendent, comme pour l'oscillateur harmonique que du système vibrant. Ω est une caractéristique de la source excitatrice seule.

b Régime permanent

L'équation (1) est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants et avec second membre. Rappelons (voir cours d'OMNI) que la solution générale d'une telle équation est la somme de deux termes :

- l'un constitué par l'intégrale générale de l'équation sans second membre associée, qui, quel que soit le cas envisagé, peut toujours se mettre sous une forme $f(t)e^{-\lambda t}$ c'est-à-dire qui tend à disparaître avec le temps. Ce terme définit le **régime transitoire** du mouvement.

- l'autre constitué par une solution particulière de l'équation complète qui est, dans la plupart des cas, de la même forme mathématique que le second membre. Cette solution, qui est indépendante des conditions initiales du mouvement du système, définit le **régime forcé**.

L'objectif de cette partie de cours est l'étude du régime **forcé**, c'est à dire du mouvement subsistant après que le régime transitoire a disparu.¹ On recherche alors une **solution particulière de la forme** (voir cours d'OMNI) :

$$s = S_m \cos(\Omega t + \phi)$$

Pour trouver S_m et ϕ il faut **passer en complexe** et remplacer $\underline{s}(t) = S_m \exp(j(\Omega t + \phi))$ dans l'équation différentielle.

On trouve alors : $S_m = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$; $\tan \phi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2\Omega^2}$

Propriétés	Régime forcé
On constate immédiatement que l'amplitude dépend de la fréquence d'excitation Ω .	

Exercice 18

Les résultats ci dessous ne sont bien sûr pas à connaître, mais à savoir retrouver ! Retrouver la solution ci-dessus.

Exercice 19

Déterminer de même l'équation et la solution sinusoïdale forcée vérifiée par la vitesse du système.

Afin de donner une expression de la solution valable quel que soit le système étudié, on pose :

$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$, facteur de qualité (plus l'amortissement est faible par rapport à la pulsation propre et plus le facteur de qualité est élevé),

$y(\Omega) = \frac{S_m(\Omega)}{S_{m0}}$, amplitude relative d'oscillation avec $S_{m0} = \frac{F_0}{k}$, élongation du système à l'équilibre.

Les courbes de la Figure 4.4 donnent la variation de l'amplitude relative y en fonction de la fréquence d'excitation Ω pour diverses valeurs de Q . À partir de leur tracé, on fera les remarques suivantes :

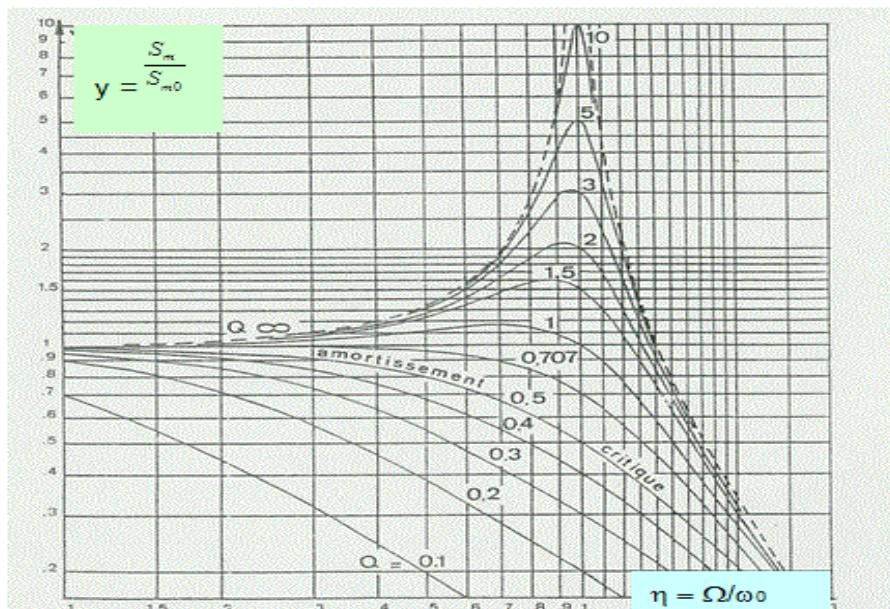


Figure 4.4 – Amplitude relative y en fonction de la fréquence d'excitation

- Lorsque les courbes présentent un maximum, on dit qu'il y a résonance. La fréquence correspondant au maximum est alors appelée fréquence de résonance.
- La fréquence de résonance est très proche de la fréquence propre du système. (Elle est d'autant plus proche que Q est grand c'est-à-dire que l'amortissement est faible).

1. Il ne faut cependant pas en déduire que ce régime transitoire n'a aucune importance pratique. Par exemple, selon les conditions initiales et la nature de la source excitatrice, des amplitudes importantes de vibration, dommageables pour le système mécanique, peuvent être dues à ce régime.

- Pour Ω donné, $Q_2 > Q_1$ implique $y_{Q2} > y_{Q1}$: les courbes se disposent par Q croissant : **plus l'amortissement est faible et plus la résonance est importante.**
- On montrerait en outre que plus le facteur de qualité Q est grand et plus le pic de résonance est fin.
- Pour $\Omega \ll \omega_0$, quel que soit Q , y est voisin de 1 : **pour une fréquence très faible de l'exciteur, l'amplitude de l'oscillateur reste voisine de celle de l'elongation à l'équilibre.**
- Pour $\Omega \gg \omega_0$, quel que soit Q , y est voisin de 0 : **pour une fréquence trop élevée par rapport à la fréquence propre de l'oscillateur, le système reste pratiquement immobile.**
- Si $Q < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (amortissement important), on n'obtient plus de maximum d'amplitude et plus rien ne rappelle la résonance.

On retiendra de ce paragraphe l'allure générale de la courbe de résonance en amplitude (cf Figure 4.4) ainsi que les conclusions ci-dessus mais pas les formules qui devront de toutes façons être redémontrées si besoin dans les cas particuliers de chaque exercice.

Exercice 20

Retrouver ce réseau de courbes 4.4 par Python.

Exercice 21

Faites le même graphe pour la résonance de vitesse : $V_m(\Omega) = \Omega S_m(\Omega)$

Les oscillations libres et forcées en électricité et en mécanique seront particulièrement étudiées lors des 4 TP de fin d'année.

IV Correction des applications directes du cours

Exercice 1 : Voir cours (chapitre 1)

Exercice 2 : $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, MLT^{-1}

Exercice 3 :

1. $v_o = \tau F_o / m$

2. Le mouvement est rectiligne uniforme, il suffit que la force soit dans la direction de la cible.

Exercice 4 : $x = v_o t - \mu g t^2 / 2$ (si $x=0$ à $t=0$). Cette équation est valable pour $0 < t < \frac{v_o}{\mu g}$.

Exercice 5 : Référentiel absolu : axe orienté verticalement vers le haut, lié au sol.

Forces s'exerçant sur l'ascenseur : Tension du câble (norme T , dirigée vers le haut) et poids (norme mg , dirigé vers le bas).

On projette le PFD sur un axe vertical vers le haut : $T - mg = ma$ (a est > 0 , nul ou < 0)

1. $T = 1500 (10 + 0) = 15000 \text{ N}$

2. $T = 1500 (10 + 2,5) = 18750 \text{ N}$

3. $T = 1500 (10 + 0) = 15000 \text{ N}$

4. $T = 1500 (10 - 2,5) = 11250 \text{ N}$

Exercice 6 :

1. sol

2. {projectile}

3. Une seule force : le poids $m\vec{g}$

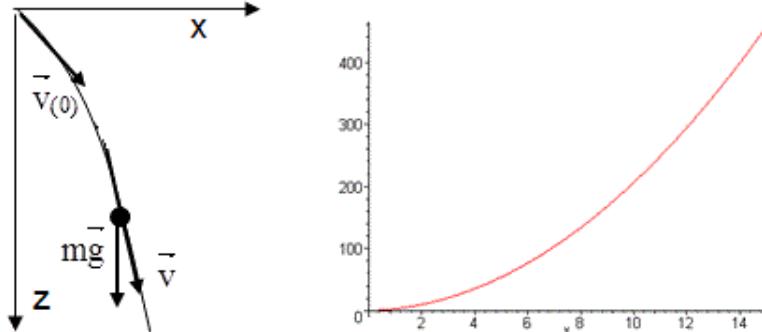
4. $m\vec{g} = m\vec{a}$

5. Voir figure (O,x,z).

6. Projection sur Ox : $m \frac{dv_x}{dt} = 0$; Projection sur Oz : $m \frac{dv_z}{dt} = mg$; Conditions initiales : $v_{x(0)} = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$; $v_{z(0)} = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$

7. La résolution des deux équations différentielles donne $v_x = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$; $v_z = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} + gt$: Soit, compte tenu des conditions initiales $x_{(0)} = 0$ et $z_{(0)} = 0$; $x_{(t)} = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} t$; $z_{(t)} = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} t + \frac{1}{2} g t^2$

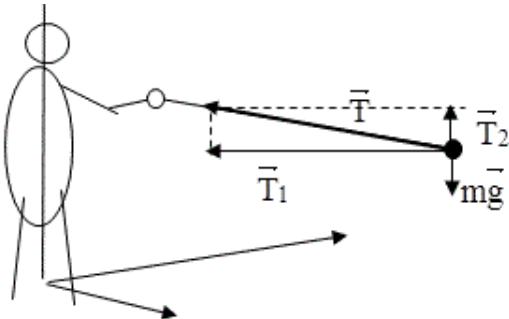
8. Cette équation n'est pas homogène : il manque un carré à v_o .



Exercice 7 :

1. Description dans un référentiel fixe lié au sol (voir figure).

2. Dans le référentiel fixe, la masse m est soumise : à la tension \vec{T} de la corde (force centripète) et à son poids $m\vec{g}$. \vec{T} ne peut donc pas être horizontal (sa composante verticale doit être égale et opposée au poids) (voir figure).
3. On a donc : $T_1 = m(2\pi n)^2 r \cong 266 \text{ N}$, $T_2 = mg \cong 29,5 \text{ N}$ et : $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} \cong 268 \text{ N}$. On peut donc négliger l'effet du poids du marteau.



Exercice 8 : $R_N = mg \cos(\alpha)$; $R_T = \mu mg \cos(\alpha)$; $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$

Exercice 9 : $\vec{F}g_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{d^2} \vec{u}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \vec{u}_{21} = -\vec{F}g_{2 \rightarrow 1}$ et $\vec{F}e_{12} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \vec{u}_{12} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \vec{u}_{21} = -\vec{F}e_{21}$

Exercice 10 : égale (Principe des actions réciproques)

Exercice 11 : $p_x = 1,1 \text{ N} \cdot \text{s}$; $p_y = 1,35 \text{ N} \cdot \text{s}$ et $\|\vec{p}\| \approx 1,74 \text{ N} \cdot \text{s}$.

$$v_{Gx} \approx 1,692 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; v_{Gy} \approx 2,077 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Exercice 12 : $P = m2\pi Rn$

Exercice 13 : $\mathcal{M} < 0$, fait tourner dans le sens négatif de rotation (et accélère).

Exercice 14 : a) $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = -20 \text{ rd} \cdot \text{s}^{-2}$; b) $\omega(t) = -20t + 314$; c) 15,7 s.

Exercice 15 : On retrouve bien $J\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$

Exercice 16 : On observe que quelle que soit l'expérience, la quantité de mouvement se conserve bien : les billes étant de même masse si n billes s'arrêtent, n repartent avec la même vitesse.

Exercice 17 : $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta)$ reste valable. Avec $\varepsilon = \theta - \theta_e$ on a $\ddot{\varepsilon} = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta_e)$ si ε est petit, soit un mouvement uniformément accéléré tant que ε est petit (c'est-à-dire très peu de temps). Ensuite le mouvement est encore accéléré, mais il faut résoudre l'équation différentielle non linéaire pour savoir exactement comment.

Exercice 18 : $m\ddot{\varepsilon} = \frac{dF_x}{dx}(x_{eq}) \cdot \varepsilon$

Exercice 19 : 1) $\Delta\ell = mg/k$

2) Le plus simple est de prendre comme origine de l'axe (Ox) l'extrémité basse du ressort à l'équilibre (question1). Dans ce cas on obtient : $m\ddot{x} + kx = 0$ Si on prend O à l'extrémité haute du ressort alors on a : $m\ddot{x} + kx = mg + kl_0$ Ces deux solutions sont bien sûr justes tous les deux à condition d'avoir précisé correctement le repère !

3) Si on prend O à l'extrémité haute du ressort et $t = 0$ à l'instant où on lâche, alors on a : $x = a_0 \cos(\sqrt{k/m}t) + \ell_0 + \Delta\ell$

Exercice 20 : on passe en complexe : $\underline{s} = A_m \exp(j\Omega t)$ (avec $S_m = |A_m|$ et $\phi = \arg(A_m)$) \underline{s} est solution de (1) et A_m vérifie donc : $(-\Omega^2 + 2j\delta\Omega + \omega_0^2)A_m = F/m$

Exercice 21 : $v = \frac{ds}{dt}$ donc $\frac{d^2v}{dt^2} + 2\delta \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = \frac{d}{dt} \left(\frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) \right)$ (1') on passe en complexe : $\underline{v} = B_m \exp(j\Omega t)$ (avec $V_m = |B_m|$ et $\psi = \arg(B_m)$) \underline{v} est solution de (1') et B_m vérifie donc : $(-\Omega^2 + 2j\delta\Omega + \omega_0^2)B_m = j\Omega F_0/m$. Donc $\frac{d^2v}{dt^2} + 2\delta \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = \frac{d}{dt} \left(\frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) \right)$ et $\tan \psi = \frac{-\omega_0^2 + \Omega^2}{2\delta\Omega}$ ($\psi = \phi + \pi/2$ à π près).

EXERCICES de TD

Que dois-je savoir faire à la fin de ce chapitre ?

- Déterminer le (ou les) système à étudier
- Rechercher une position d'équilibre : **Eq**
- Établir l'équation différentielle décrivant le mouvement et l'équation de la trajectoire : **M**
- Déterminer l'expression littérale d'une force ou d'un moment : **F**
- Résoudre un problème : **R**

Ressources Moodle

Page Moodle « Physique 1A toutes filières », onglet « Mécanique »

- Vidéo méthodologie : comment projeter une force (+ si besoin revoir QCM projection)
- QCM
 - Dynamique : questions de cours
 - Forces et 3ème loi de Newton
 - Dynamique : principe fondamental
 - Force de Lorentz

Point méthode

Rappel Méthodologie :

- définir le système (éviter de prendre un système déformable)
- nommer le référentiel et vérifier qu'il est bien galiléen.
- lister les forces **extérieures** avec leurs 4 caractéristiques : indiquer lesquelles sont inconnues et donner tout ce qui est connu. (Donner lorsque c'est pertinent une expression vectorielle des forces la plus simple possible).
- schéma **obligatoire** et grand avec toutes les forces, les inconnues étant représentées « au hasard ». On veillera à utiliser cette figure i) en la complétant au fur et à mesure où l'on prend conscience de l'intervention de nouveaux paramètres, ii) en exploitant les propriétés géométriques qu'elle fait ressortir, par exemple dans les calculs de composantes.
- y-a-t-il des informations qui contraignent la trajectoire et donnent des informations sur l'accélération ?
- choix d'un système de coordonnées **judicieux** (= projections simples, utilisant les symétries éventuelles du mouvement...), 2 axes suffisent si le problème est manifestement plan.
- énoncer (correctement) le PFD (pour le barycentre si le système n'est pas ponctuel) ou le TMC
- exprimer l'accélération dans la base choisie - projeter le PFD dans la base choisie - en fonction de ce qui est demandé résoudre les équations obtenues par la projection du PFD ou par l'utilisation du TMC.
- vérifier que le résultat est plausible (dimensions, signes, ...).

Dynamique du point

Exercice 1 : Champ électrostatique (M)

Une particule chargée de charge q est lâchée avec une vitesse initiale \vec{v}_0 horizontale dans une région de l'espace où règne un champ électrostatique faisant un angle α avec \vec{v}_0 dans le plan vertical (cf figure 4.5).

Quelle est l'équation de la trajectoire ? Dessinez-la de manière qualitative. (On négligera le poids de la particule chargée).

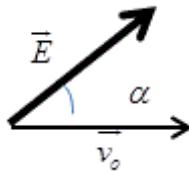


Figure 4.5 – Particule chargée dans un champ électrostatique

Exercice 2 : Pendule simple (M, F)

Un point matériel M de masse m est attaché à un fil souple, inextensible et sans masse, de longueur L . Le fil étant écarté de la position d'équilibre θ_o , on l'abandonne ensuite à l'instant $t = 0$, avec une vitesse nulle.

1. Déterminer l'équation différentielle du 2ème ordre liant le temps et l'angle θ (angle entre le fil et la direction verticale). On négligera les frottements.
2. Dans quelles conditions peut-on résoudre cette équation ? Quelle est alors la solution ?
3. On cherche maintenant à déterminer la norme de la tension du fil pour toutes les positions (pas particulièrement pour des petits angles).
 - (a) Indice : montrer que $y'' = a \sin y \iff (y')^2 = -2a \cos y + cste$. Comment déterminer la constante ?
 - (b) En déduire l'expression de la tension du fil en fonction de θ .

Exercice 3 : Jet de pierre (M)

Un petit caillou, assimilé à un point matériel de masse m , est lancé à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale v_0 , faisant avec le plan horizontal un angle α (NB : le lancement a lieu vers le haut). On prendra comme origine des coordonnées O le point de lancement du caillou ; on appellera Ox l'axe du sol horizontal et Oy l'axe vertical tel que (O, x, y) soit le plan vertical contenant le vecteur \vec{v}_0 . Tous les mouvements seront décrits par rapport à ce référentiel fixe.

A – Dans un premier temps on néglige tout frottement dans l'air.

1. Écrire dans le repère (O, x, y, z) orthonormé direct les coordonnées des vecteurs accélération, vitesse et position.
2. Montrer que le mouvement a lieu dans un plan.
3. Calculer les coordonnées du point d'altitude maximum et celles du point de chute du caillou sur le sol (plan $y = 0$). A.N. : $v_0 = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\alpha = 30^\circ$; $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. (Vous ferez une estimation de l'ordre de grandeur avant d'utiliser la calculette.)
4. Écrire l'équation de la trajectoire.
5. Donner l'équation que vérifie l'angle α avec lequel il faut tirer le projectile pour atteindre un point $A(x_A, y_A)$, avec une vitesse initiale donnée. Vérifier que :
 - soit A est inaccessible (on dit alors que A est en dehors de la parabole de sécurité)
 - soit il y a 2 angles possibles.

Déterminer l'équation vérifiée par l'ensemble des points A_0 au-delà desquels A est en dehors de la parabole de sécurité. (Indication : on cherchera une équation du second degré vérifiée par $\tan(\alpha)$.)

B – On admet maintenant que le caillou subit, en plus de son poids, une force de résistance de l'air \vec{R} , proportionnelle à la vitesse, de la forme : $\vec{R} = -k \vec{v}$, k étant une constante positive.

1. Déterminer à l'instant t les composantes de la vitesse du caillou puis celles de sa position (\overrightarrow{OM}). Dans ces expressions pourront figurer outre t , les paramètres m , v_0 , α , g et k .
2. Montrer que \vec{v} tend vers une vitesse limite \vec{v}_l que l'on calculera. (Vous ferez une estimation de l'ordre de grandeur avant d'utiliser la calculette.)

Exercice 4 : Chute d'une bille dans un fluide (M)

Une bille sphérique de rayon $R = 10\text{ mm}$ et de masse volumique $\rho = 3,2\text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ est lâchée sans vitesse initiale dans un liquide visqueux de masse volumique $\rho' = 0,80\text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Soit \vec{v} la vitesse de la bille, on supposera que la force de frottement fluide vaut $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$, où η est le coefficient de viscosité du fluide.

1. Quelle est la dimension de η ?
2. A 20°C et sous 1 atm, la viscosité dynamique de l'eau est estimée à $\eta = 1,00 * 10^{-3}\text{ USI}$. Quelle est la valeur de η dans un système admettant comme unité de temps l'heure, comme unité de longueur le cm et comme unité de masse le gramme ?
3. Établir l'équation différentielle du mouvement.
4. Donner l'expression de la vitesse de la bille en fonction du temps.
5. Montrer qu'elle tend vers une valeur limite dont on déterminera l'expression.
6. On souhaite mesurer la viscosité du glycérol. Grâce à un système automatisé, la même expérience de la chute d'une bille en acier ($\rho_{\text{acier}} = 7850\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) dans le glycérol ($\rho_{\text{glycérol}} = 1260\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) est réalisée 100 fois avec mesure de la vitesse limite v . On trouve une vitesse limite moyenne de $0,34\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ avec un écart-type expérimental de $0,1\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Déterminez l'incertitude sur la valeur moyenne de la vitesse limite pour un niveau de confiance de 95%. La mesure du rayon de la boule donne comme résultat : $r = (6,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}\text{ m}$. Sachant que l'accélération de la pesanteur ($g = 9,81\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) et les masses volumiques sont supposées parfaitement connues, déterminer la viscosité dynamique η du glycérol. Vous prendrez soin de présenter votre résultat avec son incertitude et de détailler votre raisonnement sans oublier les formules littérales. On trouve dans la littérature une valeur de viscosité dynamique de $1,490\text{ USI}$. Cette donnée est-elle compatible avec votre réponse à la question précédente ? Justifiez.

Exercice 5 : Masse + ressort (M, Eq)

On accroche une masse m ponctuelle au bout d'un ressort situé sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. La masse glisse sans frottement sur le plan incliné. Le ressort a une raideur k et une longueur à vide ℓ_0 . Il est attaché au point O . La distance entre O et la masse ponctuelle située en M est x , estimée le long de la ligne de plus grande pente du plan incliné.

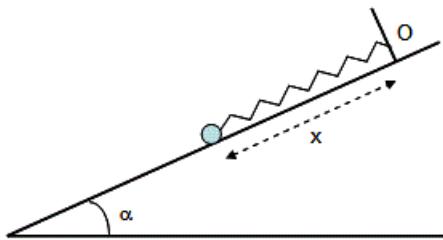


Figure 4.6 – Masse ponctuelle au bout d'un ressort sur plan incliné

1. Faire un schéma indiquant toutes les forces exercées sur la masse ponctuelle.
2. Déterminer la distance d'équilibre x_e .

3. On écarte la masse ponctuelle de sa position d'équilibre d'une distance d en étirant le ressort (x passe ainsi de x_e à $x_e + d$). Écrire l'équation du mouvement lorsque l'on relâche la masse ponctuelle à l'instant $t = 0$, sans vitesse initiale.
4. Résoudre cette équation différentielle à partir des conditions initiales et en déduire la période des oscillations. Vérifier (évidemment !!) que le résultat est bien homogène à un temps.

Exercice 6 : Mouvement sur un plan incliné avec frottements solide-solide (M)

À $t = 0$, on fait glisser vers le haut avec une vitesse initiale v_0 un palet de bois de masse m sur un plan incliné. Sachant que le plan incliné fait un angle α avec l'horizontale et que la force de frottement est de norme constante égale à f , étudier le mouvement du palet.

On déterminera en particulier la durée de la montée δt_1 du palet et la durée de la descente δt_2 jusqu'à ce qu'il repasse par sa position initiale.

Est-il possible que le palet reste coincé en haut (ne redescende pas) ? Si oui, à quelle condition ?

Bonus (anticipation sur le chapitre suivant) : Lorsque le palet repasse par sa position initiale, sa vitesse est-elle égale, inférieure ou supérieure à sa vitesse initiale ? à votre avis pourquoi ?

Exercice 7 : Spectromètre de masse (M)

Les séries scientifico-policières de ces dernières années (NCIS, Bones...) font fréquemment mention d'un dispositif d'analyse très puissant : le spectromètre de masse. Ce dispositif sert à analyser de façon précise la composition d'échantillon, au même titre que les spectrophotomètres vus en chimie. Toutefois, là où les spectrophotomètres sondent la réponse de l'échantillon (absorption, diffusion...) à divers rayonnements, le spectromètre de masse exploite le comportement des ions dans les champs électriques et magnétiques. Nous allons nous intéresser à un modèle simple de ce type de dispositif : le spectromètre à secteur magnétique : cf. figure ci-contre : schéma du spectromètre de masse étudié. Dans la première cavité, le champ électrique est uniforme et le champ magnétique nul. Dans la seconde cavité, c'est le contraire.
Le fonctionnement du spectromètre se fait en quatre temps :

1. Ionisation des constituants de l'échantillon (par exemple, par impulsion laser) : seules les particules chargées sont significativement sensibles aux champs électriques et magnétiques, il faut donc commencer par s'assurer que tous les constituants le sont.
2. Accélération par application d'un champ électrique uniforme.
3. Analyse par traversée d'un champ magnétique uniforme ajustable.
4. Collecte et analyse du signal.

Nous allons nous concentrer sur les étapes 2 et 3.

A. Accélération par un champ électrique

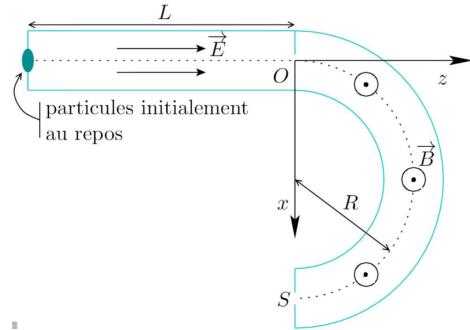
On considère une particule de masse m et de charge $Z e$ (Z un entier relatif, e la valeur absolue de la charge de l'électron initialement au repos). Cette particule est placée à une extrémité d'une cavité allongée de longueur L dans laquelle règne un champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$ dirigé dans l'axe de la cavité.

1. Déterminez la vitesse v_0 avec laquelle la particule atteint l'autre extrémité de la cavité.

B. Analyse par le champ magnétique

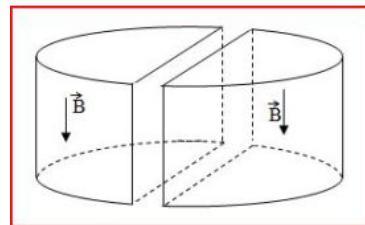
La particule quitte la première cavité en O avec la vitesse $v_0 \vec{u}_z$. Elle entre alors dans une cavité coudée dans le plan (xOz), de rayon de courbure R , où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B_0 \vec{u}_y$. Pour simplifier, nous considérerons que le coude fait un demi-tour, que la particule y entre par le point $O(0; 0; 0)$ et que la sortie se situe au point $S(2R; 0; 0)$.

2. Déterminez la valeur algébrique que doit prendre B_0 pour que la particule atteigne le point S .
3. Justifiez que ce dispositif permet de séparer les particules de rapport $\frac{m}{Z}$ différent.



Exercice 8 : Cyclotron (M)

Le cyclotron est un accélérateur de particules qui utilise l'action combinée d'un champ électrique et d'un champ magnétique, afin d'accélérer et de confiner les particules dans un espace restreint. L'appareil est formé de deux cavités en forme de demi-cylindres, (les « Dees », voir figure ci dessous), séparées par un petit intervalle. Chaque cavité contient un champ magnétique uniforme \vec{B} parallèle à l'axe du cylindre (vertical sur la figure). Une différence de potentiel alternative est appliquée dans l'intervalle entre les deux dees. Un dispositif émettant (sans vitesse initiale) des particules chargées, ici par exemple des protons, est situé au voisinage du centre. L'ensemble est soumis à un vide poussé.



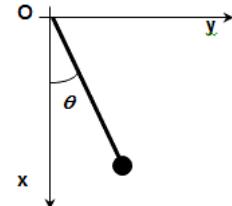
On donne : charge du proton : $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et masse du proton : $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

1. Expliquer qualitativement ce qui va se passer.
2. Montrer que le mouvement est plan et uniforme à l'intérieur des dees.
3. Montrer que la vitesse angulaire de la particule est constante dans chaque demi-cercle décrit par cette particule (mouvement circulaire uniforme) si le champ magnétique est constant.
4. On place des protons entre les deux dees. Le champ magnétique du cyclotron est de 1,5 T. Combien de fois par seconde le potentiel entre les dees devrait-il s'inverser ?
5. Le rayon maximum du cyclotron est 0,35 m. Quelle est la vitesse maximum du proton ?
6. Sans ce système, c'est-à-dire dans un champ constant, par quelle différence de potentiel le proton aurait-il dû être accéléré pour acquérir la vitesse maximum qu'il a obtenu dans le cyclotron ?

Dynamique des mouvements simples du solide

Exercice 9 : Mouvement d'un pendule (M, F, Eq)

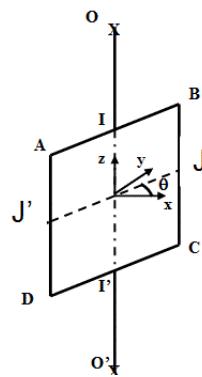
Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dont l'axe (Ox) est vertical descendant. À l'extrémité A d'une tige OA homogène de masse m et de longueur ℓ est fixée une masselotte de masse M supposée ponctuelle. La tige est mobile dans le plan (Oxy) autour de l'axe Oz (fig. ci contre). Sauf pour la question 6), on supposera les frottements négligeables.



1. On donne le moment d'inertie J_T de la tige par rapport à l'axe Oz : $J_T = m\ell^2/3$. En déduire le moment d'inertie J_o de l'ensemble {Tige + masselotte} par rapport au même axe en fonction de ℓ , M et m .
2. Calculer le moment résultant \mathcal{M}_z par rapport à l'axe (Oz) des forces appliquées à l'ensemble {Tige + masselotte} en fonction de m , ℓ , M , g et θ .
3. Déterminer les positions d'équilibre et discuter la nature de chaque équilibre de l'ensemble {Tige + masselotte}.
4. On considère qu'au temps $t = 0s$, le pendule est écarté de sa position d'équilibre stable d'un petit angle θ_0 sans vitesse angulaire initiale. Déterminer l'équation différentielle du mouvement du pendule.
5. Donner l'expression de la période du mouvement en fonction de m , ℓ , M , g .
6. On considère que le pendule est sujet à des frottements sur son axe de rotation qui s'opposent au mouvement. Le moment de cette force de frottement s'écrit sous la forme : $\mathcal{M}_f = -K\dot{\theta}$ avec $K > 0$. Réécrire l'équation différentielle du mouvement en tenant compte des frottements. Distinguer les différentes solutions possibles en fonction de la valeur de K .

Exercice 10 : Mouvement d'un cadre rigide (M, F, Eq)

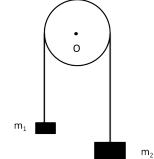
Un cadre rigide ($ABCD$) est constitué de quatre tiges métalliques homogènes, de même longueur a et de même masse m . Elles sont soudées et forment un cadre rigide ayant la forme d'un carré de côté a . Ce cadre est maintenu par deux fils verticaux de torsion identiques (OI), ($O'I'$) dont les constantes de torsion sont C_T . Le premier fil est fixé en un point O et en I milieu du côté (AB), le second en un point O' et en I' milieu de (CD). À l'équilibre le cadre est dans le plan (Oxz). On applique maintenant un couple de deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 (de même norme F) sur le cadre : \vec{F}_2 s'applique en J milieu de (BC) et \vec{F}_1 en J' milieu de (AD). Ces forces gardent constamment la même direction ($y'y$). Le seul mouvement possible du cadre est une rotation sans frottement autour de ($z'z$) (cf. figure ci-dessus).



- On constate que dans la nouvelle position d'équilibre ($x'x$) et (DC) forment un angle α . Exprimer la norme de la force F en fonction de C_T , α et a .
- On éloigne à $t = 0$ le cadre de sa position d'équilibre α d'un angle ϵ_0 petit et le lâche sans vitesse initiale. On étudie ensuite son mouvement, en repérant la position du cadre par l'angle $\theta = \alpha + \epsilon$.
 - On donne $J_{cadre} = (2ma^2)/3$ donner l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
 - Sachant que le cadre reste peu éloigné de sa position d'équilibre ($\theta = \alpha + \epsilon$, avec ϵ petit) déduire de ce qui précède l'expression de $\theta(t)$.

Exercice 11 : Machine d'Atwood (M)

On considère la machine dite d'Atwood, dont le schéma est donné ci-dessous. Un fil inextensible, de masse négligeable, relie deux masses, m_1 et m_2 par l'intermédiaire d'une poulie pouvant tourner autour d'un axe horizontal passant par son centre O . On choisit un axe (Oz) vertical vers le bas.



- Dans un premier temps la poulie est supposée parfaite, c'est-à-dire que son inertie est négligée.*
 - Montrer que dans ce cas les tensions du fil de part et d'autre de la poulie sont égales.
 - Qualitativement, indiquer ce qui se passe si les 2 masses sont égales ?
 - Décrire qualitativement le mouvement si les deux masses m_1 et m_2 sont différentes. Que pouvez dire sur les accélérations de ces deux masses ? Justifiez.
 - Déterminer l'accélération de la masse m_1 en fonction de m_1 , m_2 et g . (Il peut être intéressant d'utiliser plusieurs systèmes).
 - En déduire enfin l'évolution de la position de la masse m_1 en fonction du temps.
 - Expliquer l'intérêt d'une telle machine pour étudier la chute libre ou pour les mécanismes d'ascenseur.
- Si l'on fait des mesures de durée pour différents temps de parcours, on se rend compte que l'équation déterminée en 1e ne décrit pas convenablement le mouvement de la masse.*
 - À votre avis qu'a-t-on négligé ?
 - On se propose maintenant de tenir compte de l'inertie de la poulie (c'est à dire de la masse de la poulie et de sa répartition). On notera M_p la masse de la poulie, qui sera considérée comme un anneau de section négligeable et de rayon R . Établir l'équation différentielle en θ décrivant le mouvement de la poulie.
 - Lorsque la poulie tourne d'un angle θ , quelle est la variation de la position z de la masse m_1 ?
 - Déduire des questions précédentes l'expression de l'accélération de la masse m_1 , puis l'équation horaire de son mouvement.
 - Que pourrait-on ensuite prendre en compte pour améliorer notre description du mouvement des masses ?

Exercice 12 : Démarrage d'un véhicule à traction avant (d'après DS janvier 2013)(F)

On s'intéresse dans cet exercice à l'accélération maximale que peut avoir un véhicule qui démarre en translation rectiligne (non uniforme) sans déraper. On définit un trièdre direct $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ tel que \vec{u}_x est horizontal dirigé dans le sens du mouvement, \vec{u}_y est vertical vers le haut et \vec{u}_z est porté par l'axe de rotation des roues. On définit θ comme l'angle de rotation des roues par rapport à la verticale, orienté par rapport à l'axe \vec{u}_z ($\theta = 0$ à $t = 0$).

On modélise un véhicule par un axe homogène de longueur L et de masse M , relié à ses deux extrémités aux deux roues de rayon R par des liaisons pivot. Soient O_1 le centre de la roue avant et O_2 le centre de la roue arrière. À part les roues, la barre modélise donc tout le reste du véhicule, y compris son moteur.

La barre exerce alors sur la roue avant motrice une action mécanique équivalente à une résultante \vec{F}_1 appliquée en O_1 , à laquelle s'ajoute le couple du moteur de moment $\vec{C} = -C\vec{u}_z$, avec C constante dimensionnée positive. La barre exerce sur la roue arrière une action mécanique équivalente uniquement à la résultante \vec{F}_2 appliquée en O_2 .

Soient enfin \vec{N}_1 et \vec{T}_1 , les forces normales et tangentielles exercées par le sol sur la roue avant et soient \vec{N}_2 et \vec{T}_2 , les forces normales et tangentielles exercées par le sol sur la roue arrière.

Hypothèses : (i) on admet qu'on peut appliquer le théorème du moment cinétique en O_1 et O_2 , même si elles ne sont pas fixes, (ii) on suppose que les roues ont une masse nulle et un moment d'inertie nul.

1. Faire un schéma du véhicule sur lequel apparaissent toutes les actions mécaniques en présence (intérieures et extérieures), ainsi que le repère.
2. Quels sont le système à isoler et la relation à utiliser qui permet de trouver T_{1x} en fonction de C ? On appellera cette relation (1).
3. Quels sont le système à isoler et la relation à utiliser pour montrer que \vec{T}_2 est nulle?
4. Quels sont le système à isoler et la relation à utiliser qui permet de trouver une relation entre \vec{N}_2 et \vec{F}_2 ? On appellera cette relation (1bis).
5. Quels sont le système à isoler et la relation à utiliser qui permet de trouver T_{1x} en fonction de l'accélération \ddot{x} du véhicule qui démarre et de M ? On appellera cette relation (2). Expliquer pourquoi on a choisi $C > 0$.
6. Quels sont le système à isoler et la relation à utiliser qui permet de trouver $N_{1y} + N_{2y}$ en fonction de M et g ? On appellera cette relation (3).
7. Appliquer le théorème du moment cinétique en O_1 au système {barre seule}. On appellera cette relation (4).
8. À l'aide de relations précédentes, montrer que : $N_{1y} = \frac{1}{2} (Mg - 2\frac{C}{L})$ (5)
9. La condition de non-glissement de la roue au démarrage est $\|\vec{T}_1\| < \mu \|\vec{N}_1\|$, où μ est le coefficient de frottement, constant et positif. En utilisant la relation (2) et la relation précédente, trouver les expressions du couple moteur maximal et de l'accélération maximale avec lesquels le véhicule peut démarrer sans déraper, en fonction de μ , g , R et L .

Exercice 13 : Problème ouvert : Machine à laver(R)

On cherche à déterminer le mouvement d'une chaussette dans le tambour d'un sèche linge : elle est d'abord entraînée par le tambour de rayon 25 cm en un mouvement circulaire uniforme, puis elle se détache du tambour (toujours au niveau du même point) et tombe en chute libre.

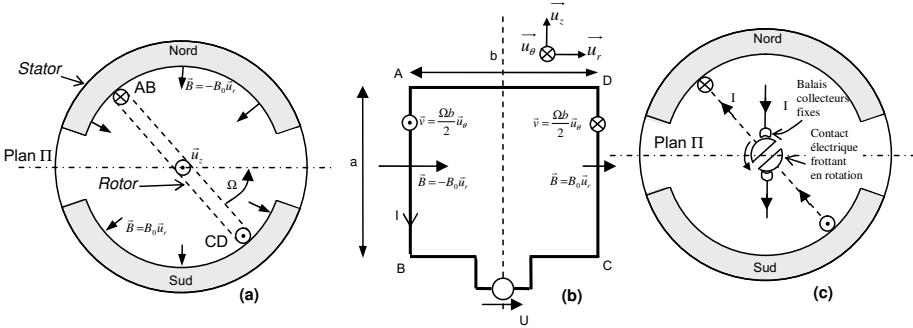
Quelle est la vitesse minimale ou maximale de rotation du tambour pour que la chaussette reste collée et ne tombe pas ?

Exercice 14 : Rails de Laplace (Eq, R)

On considère deux rails métalliques parallèles, branchés à une source idéale de courant, délivrant un courant I . Les rails sont distants de ℓ et baignent dans un champ magnétique \vec{B}_0 uniforme, perpendiculaire aux rails, dirigé vers le haut. Un troisième rail métallique AA' , de masse m , est posé perpendiculairement aux deux rails parallèles pour fermer le circuit. Il peut glisser sur les deux rails. Le rail est en équilibre sous l'effet des frottements solides $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ et de la force de Laplace \vec{F}_L .

- 1ère expérience : Les rails sont horizontaux. Initialement $I = 0$ et on augmente progressivement le courant jusqu'à ce que $I = I_1$ et que l'on soit à la limite du glissement, c'est à dire que le rail est immobile avec $\|\vec{T}\| = \mu \|\vec{N}\|$.
En déduire une mesure du coefficient de frottement solide μ .
- 2ème expérience : On incline les rails d'un angle α par rapport à l'horizontale, on fixe l'intensité du courant $I = I_0$ tel que l'on ait un équilibre. On observe que l'on a équilibre pour tout un intervalle d'angles $\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$ avec l'horizontale, expliquez pourquoi en faisant les schémas des forces correspondants. Quelle approximation peut-on faire si l'on choisit d'incliner les rails d'un angle $\alpha_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$? Quelles sont les mesures nécessaires si l'on souhaite évaluer B_0 ? Comment dans la pratique mesurer α_0 ? Effectuer les mesures en salle d'expérimentation et estimer la valeur du champ magnétique B_0 . Les hypothèses de votre modèle sont-elles en conformité avec l'expérience?

Exercice 15 : Moteur à courant continu (Eq, R)



Un moteur à courant continu peut être modélisé comme un cadre rectangulaire de largeur b , de hauteur a , de centre O , fixé par une liaison pivot d'axe (Oz) dans l'entrefer d'un aimant permanent d'axe de révolution (Oz).

L'aimant crée dans l'espace le champ $\vec{B} = \pm B_0 \vec{u}_r$ à la distance $r = b/2$ de (Oz) sur une hauteur a . Le champ créé ailleurs est inconnu. On bobine sur ce cadre N spires : on considérera toutes les spires de dimensions identiques à celle du cadre support. Les spires sont alimentées par une force électromotrice continue U (voir figure). L'ensemble est équivalent à un circuit électrique de résistance R . Par l'intermédiaire de disques d'embrayage, le cadre est bloqué par un couple de moment $-\mathcal{M}_u \vec{u}_z$.

On s'intéresse au cadre lorsqu'il est bloqué avec ses côtés AB et CD qui voient le champ uniforme $-B_0 \vec{u}_r$ et $B_0 \vec{u}_r$ respectivement.

- Déterminer la direction, le sens et la norme de la force de Laplace qui s'exerce sur un tronçon $d\ell$ de AB et $d\ell'$ de CD .
- En déduire les moments $d\mathcal{M}_{L,z}$ et $d\mathcal{M}'_{L,z}$ des forces de Laplace élémentaires par rapport à l'axe (Oz) respectivement sur AB et CD .
- En déduire la projection $\mathcal{M}_{L,z}$ sur (Oz) du moment résultant par rapport à O des forces de Laplace sur la totalité du cadre.
- Quel est la fém d'alimentation du moteur pour que le cadre reste immobile?

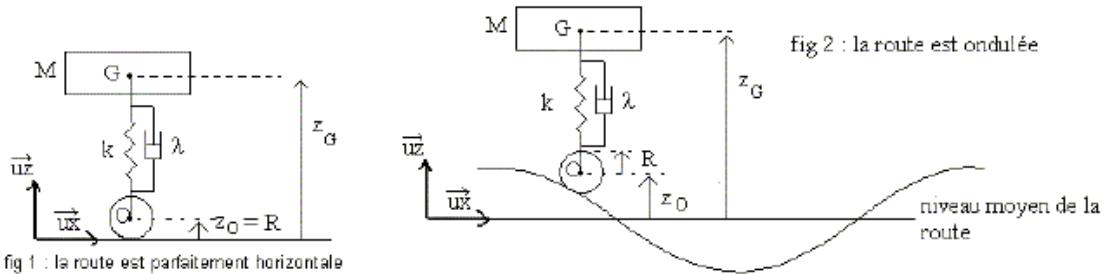
Exercice 16 : DM : Étude de la suspension d'un véhicule

Le véhicule étudié est modélisé par un parallélépipède, de centre de gravité G et de masse $M = 1000 \text{ kg}$, reposant sur une roue par l'intermédiaire de la suspension dont l'axe OG reste toujours vertical. L'ensemble est animé d'une vitesse horizontale constante $\vec{v} = v \vec{u}_x$

La suspension, quant à elle, est modélisée par un ressort de raideur constante $k = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ (de longueur à vide L_0) et un amortisseur fluide de constante d'amortissement constante $\lambda = 4,0 \cdot 10^3 \text{ U.S.I.}$

La position verticale du véhicule est repérée par z_G dans le référentiel galiléen proposé ayant son origine sur la ligne moyenne des déformations du sol. On note z_O la cote du centre de la roue par rapport au niveau moyen de la route et R le rayon de la roue.

L'amortissement entre M et la roue introduit une force de frottement fluide, exercée par l'amortisseur sur M , qui s'écrit : $\vec{F} = -\lambda(dz_G/dt - dz_O/dt)\vec{u}_z$



I) La route est parfaitement horizontale.

- La route ne présente aucune ondulation et le véhicule n'a aucun mouvement vertical. Déterminer la position z_{Geq} de G lorsque le véhicule est au repos en fonction de R , k , l_o , m et g
- Suite à une impulsion soudaine, le véhicule acquiert un mouvement d'oscillations verticales. On étudie le mouvement par rapport à la position d'équilibre établie précédemment. On posera $z = z_G - z_{Geq}$. Établir l'équation différentielle caractéristique du mouvement.
- Dessiner, qualitativement, les allures envisageables de la fonction $z(t)$. (La résolution de l'équation différentielle n'est pas demandée). Avec les valeurs numériques de l'énoncé dans lequel de ces cas se trouve-t-on ?

II) La route est ondulée :

Le véhicule se déplace à vitesse horizontale constante v sur un sol ondulé. L'ondulation est assimilée à une sinusoïde de période spatiale L et d'amplitude A .

z_O peut alors s'écrire $z_O = R + A \cos(\omega t)$. On étudie maintenant en régime permanent le mouvement par rapport à la position d'équilibre établie précédemment. On posera $z = z_G - z_{Geq}$.

Pour les applications numériques on prendra $L = 1 \text{ m}$; $A = 10 \text{ cm}$

- Quelle est la dimension de λ ?
- Exprimer ω en fonction de v et L . Vérifier l'homogénéité du résultat.
- En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse M dans le référentiel terrestre supposé galiléen, montrer que l'équation différentielle en z régie le mouvement est
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\lambda}{M} \frac{dz}{dt} + \frac{k}{M} z = \frac{kA}{M} \cos(\omega t) - \frac{\lambda A \omega}{M} \sin(\omega t).$$
- Justifier qualitativement le fait que le régime permanent $z(t)$ est de la forme $z(t) = Z_{max} \cdot \cos(\omega t + \phi)$.
- Exprimer Z_{max} en fonction de k, M, λ, ω et A .
- À l'aide d'un logiciel graphique, tracer $\log(Z_{max})$ en fonction de $\log(\omega)$. Commentez brièvement cette courbe. ω_r , valeur de ω pour laquelle l'amplitude est maximale, est de l'ordre de grandeur de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$. Quelle est la valeur de v correspondante ?
- Application :** Dans le film « le salaire de la peur », Yves Montand conduit un camion ($\omega_0 = 25 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) chargé de nitroglycérine. Il passe sur une tôle ondulée de période spatiale 1 m et pour laquelle $A = 10 \text{ cm}$. Afin d'éviter l'explosion du chargement il doit traverser la taule à une vitesse inférieure à 5 km/h ou supérieure à 50 km/h. Justifier qualitativement ceci à l'aide des résultats précédents.

CHAPITRE

5

DYNAMIQUE – THÉORÈMES ÉNERGÉTIQUES

Objectifs

- calculer le travail et la puissance d'une force (savoir distinguer si le travail est moteur ou résistant)
- définir l'énergie cinétique et exprimer l'énergie potentielle associée à une force conservative pour un système ponctuel
- connaître l'énergie potentielle de la force de pesanteur et du ressort en précisant le paramétrage utilisé
- écrire et exploiter un bilan d'énergie à l'aide du théorème de l'énergie cinétique ou du théorème de l'énergie mécanique
- appliquer les théorèmes énergétiques pour un solide en rotation ou en translation (définir les énergies cinétiques de translation et de rotation ainsi que l'énergie potentielle pour un solide)
- identifier les positions d'équilibre d'un système et juger de leur stabilité à l'aide de sa courbe d'énergie potentielle
- juger de l'outil le plus adapté, pour un problème donné, entre le théorème de l'énergie mécanique ou le PFD

Prérequis

- trouver la primitive d'une fonction (MATHS)
- écrire des développements limités d'ordre 1 (MATHS)

Sommaire

I	Travail et puissance d'une force	123
I.1	Travail	123
I.2	Travail de quelques forces usuelles	125
I.3	Puissance	125
II	Énergie cinétique pour un point matériel	126
II.1	Définition	126
II.2	Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel	126
II.3	Applications du théorème de l'énergie cinétique	127
III	Énergie potentielle	128
III.1	Forces conservatives. Définition de l'énergie potentielle.	128
III.2	Exemples de forces conservatives	128
III.3	Exemples de forces non conservatives	129
III.4	Intérêt de l'énergie potentielle	129
IV	Energie mécanique	130
IV.1	Définition	130
IV.2	Théorème fondamental	130
IV.3	Applications du théorème de l'énergie mécanique	131
IV.4	Interprétation, lien avec la thermodynamique	132
V	Application à la stabilité d'un équilibre	133
V.1	Condition d'équilibre	133
V.2	Conditions pour avoir un équilibre stable	133
V.3	États métastables ou stabilité relative	133
V.4	Compléments : oscillations autour de la position d'équilibre	134
VI	Théorèmes énergétiques dans le cas des mouvements simples du solide	135
VI.1	Énergies totales d'un système	135
VI.2	Travail et puissance	136
VI.3	Théorèmes énergétiques	137
VII	Correction des applications directes du cours	138

Introduction : Nous avons vu dans le chapitre précédent les 3 principes de bases de la dynamique. Nous allons voir que ces principes permettent de démontrer plusieurs théorèmes qui permettent de trouver un moyen différent (et quelquefois plus commode !) pour résoudre les problèmes de dynamique du point que nous avons jusqu'à présent traités à l'aide de l'équation fondamentale de la dynamique.

Ces nouveaux théorèmes utilisent tous la notion d'énergie qui est essentielle en physique. Aborder les problèmes de mécanique sous cet aspect permet de faire le lien entre cette discipline et les problèmes généraux d'échanges d'énergie entre un système et son environnement (opérateur extérieur, autre système, ...) abordés par ailleurs dans le cours de thermodynamique.

Pour introduire ces notions, revenons au cas d'un point matériel.

I Travail et puissance d'une force

I.1 Travail

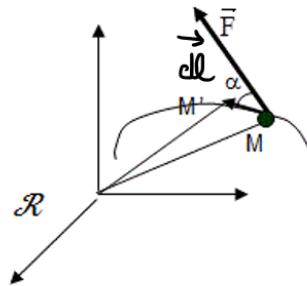
a Travail élémentaire

Considérons un point matériel de masse m placé en un point M dans un référentiel \mathcal{R} . Soit une force \vec{F} appliquée à ce point.

Définition	Travail élémentaire
Le travail élémentaire δW de la force \vec{F} au cours du déplacement du point matériel de M en un point infiniment voisin M' , tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{d}\ell$ est défini par :	$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{d}\ell$

La dimension d'un travail est celle du produit d'une force par un déplacement, donc : $\dim(W) = M L T^{-2} \cdot L = M L^2 T^{-2}$. En unités S.I., l'unité de travail est le **joule (J)**.

Remarque : La notation « δW » signifie que cette quantité n'est pas a priori une forme différentielle exacte (cf. OMNI).



Somme des travaux des forces dans le cas de la mécanique du point

Pour un point matériel, toutes les forces \vec{F}_i s'appliquent au même point M , donc $\vec{d}\ell$ est le même pour toutes les forces. Si $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ est la résultante des forces, on a alors :

$$\sum_i W_i = \sum_i \int_{AB} \vec{F}_i \cdot \vec{d}\ell = \int_{AB} \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \cdot \vec{d}\ell = \int_{AB} \vec{F} \cdot \vec{d}\ell$$

Propriétés	Travail de la résultante
Pour un point matériel , la somme de tous les travaux des forces est égale au travail de la résultante. ATTENTION : ceci ne sera plus valable pour un solide ou un système de points.	

Si α est l'angle entre \vec{F} et $\vec{d}\ell$, on aura : $\delta W = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\ell\| \cos \alpha = \|\vec{F}\| \delta\ell \cos \alpha$;
 δW est donc une grandeur scalaire **algébrique** :

Propriétés	Travail moteur/résistant
Si $ \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\delta W > 0$: le travail est dit « moteur » et \vec{F} est une force « motrice ».	
Si $ \alpha > \frac{\pi}{2}$, $\delta W < 0$: le travail est dit « résistant » et \vec{F} est une force « résistante ».	

En effet, si \vec{F} est dans le sens du mouvement : Dans le cas où \vec{F} est la force s'exerçant sur M , alors dans la base de Frenet $ma_T = m\vec{a} \cdot \vec{T} = \vec{F} \cdot \vec{T} > 0$, donc le point M accélère (la norme de sa vitesse augmente).

En effet, si \vec{F} est opposée au mouvement : Dans le cas où \vec{F} est la force s'exerçant sur M , alors dans la base de Frenet $ma_T = m\vec{a} \cdot \vec{T} = \vec{F} \cdot \vec{T} < 0$, donc le point M décélère (la norme de sa vitesse diminue).

Exercice 1

Sur le schéma ci-dessus, le travail est-il moteur ou résistant ?

Propriétés

Force perpendiculaire au déplacement

Si $|\alpha| = \frac{\pi}{2}$, $\delta W = 0$: pour tout déplacement de son point d'application perpendiculaire à sa direction, une force ne fournit aucun travail.

Dans le cas où \vec{F} est la seule force s'exerçant sur M , alors dans la base de Frenet $ma_T = m\vec{a} \cdot \vec{T} = \vec{F} \cdot \vec{T} = 0$, la norme de la vitesse est constante.

Si le point d'application de la force ne se déplace pas, bien sûr la force ne travaille pas.

b Expressions

La trajectoire dépendant du référentiel, la valeur du travail d'une force dépend en général du référentiel considéré. Cependant dans un référentiel donné, on peut choisir le repère le plus « pratique » pour exprimer le travail de la force considérée.

Les expressions du travail dans les différents systèmes de coordonnées se déduisent directement de l'expression de $d\vec{l} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d(\overrightarrow{OM})$. Il est donc indispensable de savoir les retrouver (ne pas les apprendre par cœur !) :

- en coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$; $\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$; $d(\overrightarrow{OM}) = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$
 $\delta W = F_x dx + F_y dy + F_z dz$
- en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$; $\vec{F} = F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_z\vec{e}_z$; $d(\overrightarrow{OM}) = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$
 $\delta W = F_r dr + r F_\theta d\theta + F_z dz$
- dans le repère de Frenet lié au mouvement du point M : $d(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{MM'} = \delta\ell\vec{u}_T$
 $\delta W = \vec{F} \cdot \vec{u}_T \delta\ell$

c Travail le long d'une trajectoire

Définition

Travail total

Le point M se déplaçant d'un point A à un point B selon une trajectoire (C), le travail total W de la force \vec{F} est la somme de tous les petits travaux élémentaires sur toute la trajectoire. Il s'écrit donc :

$$W = \int_{AB} \delta W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

(où \widehat{AB} désigne l'arc AB de la courbe (C))

Remarques :

- Vous verrez en fin d'année en OMNI que le travail est défini comme la circulation de la force le long de la trajectoire (C). δW n'étant pas a priori une forme différentielle exacte, **W dépend a priori du chemin suivi**. (cf. par exemple le travail de la force des frottements au paragraphe b).
- Si la force est constante le long de la trajectoire alors

$$W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \int_{AB} d\vec{l} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

- Si la force est constante quelque soit la trajectoire alors δW est une forme différentielle exacte et dans ce cas W ne dépend pas du trajet suivi (ex. du poids). (Mais la réciproque n'est pas vrai : si δW est une forme différentielle exacte, la force n'est pas forcément constante !!)

Exercice 2

Quel est le travail d'une force constante déplaçant son point d'application sur un circuit fermé quelconque ?

I.2 Travail de quelques forces usuelles

a Travail du poids

Soit un point matériel de masse m repéré par sa position M décrivant une trajectoire (C) entre les points A et B dans le référentiel \mathfrak{R} . Soit (Oz) un axe vertical **vers le haut**.

Soit \vec{g} l'accélération de la pesanteur, que l'on suppose uniforme dans tout le référentiel \mathfrak{R} . Le travail de la force de pesanteur $\vec{P} = m\vec{g}$ s'écrit :

$$W = \int_{AB} m\vec{g} \cdot d\vec{l}$$

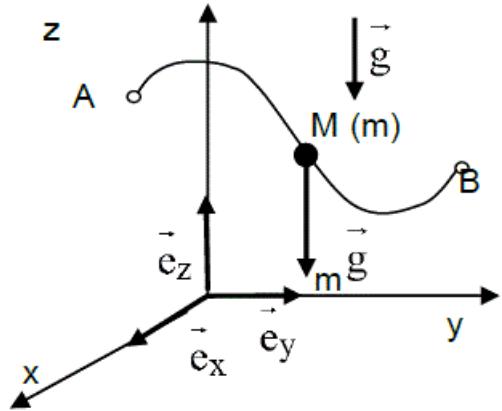
On peut alors calculer le travail de deux manières différentes

- Soit en remarquant que la force $m\vec{g}$ est un vecteur constant, donc $W = m\vec{g} \int_{AB} d\vec{l} = m\vec{g} \cdot \vec{AB} = mg(z_A - z_B)$
- Soit en utilisant le fait que $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, ce qui amène à $W = \int_{AB} -mg\vec{e}_z \cdot d\vec{l} = -mg \int_{AB} dz = mg(z_A - z_B)$

si (Oz) **vers le haut** !

Ce travail ne dépend que des points A et B et est indépendant du chemin suivi (δW est ici la forme différentielle exacte $dW = -mgdz$).

ATTENTION : l'expression de W dépend de l'orientation de l'axe (Oz) : Il vaut mieux toujours vérifier la cohérence des signes : si le point descend le travail du poids est moteur (donc $W > 0$), s'il monte, le travail du poids est résistant (donc $W < 0$).



Exercice 3

Un enfant de masse m se balance sur une balançoire de longueur L . Quel est le travail du poids entre le moment où la balançoire est verticale et celui où elle a remonté d'un angle α ?

b Travail de la réaction du support

On rappelle que la réaction du support peut être décomposée en une composante tangentielle \vec{R}_T (les frottements solides) et une réaction normale \vec{R}_N (qui empêche de « passer à travers »). Par définition \vec{R}_N est perpendiculaire au déplacement et **ne travaille donc pas**.

- Si le contact a lieu sans frottement ($\vec{R}_T = \vec{0}$), alors $\delta W(\vec{R}) = \delta W(\vec{R}_T) = 0$
- Si le contact a lieu avec frottement ($\vec{R}_T \neq \vec{0}$), alors $\delta W(\vec{R}) = \delta W(\vec{R}_T) < 0$ car par définition \vec{R}_T **s'oppose au déplacement**.
- Si la force de frottement est constante en norme (mais pas en direction puisqu'elle suit le mouvement !), alors :

$$W(\vec{R}_T) = \int \vec{R}_T \cdot d\vec{l} = - \int \|\vec{R}_T\| \|\vec{d}\ell\| = - \|\vec{R}_T\| \int \|\vec{d}\ell\| = - \|\vec{R}_T\| L$$

Le travail de la force de frottement est dans ce cas proportionnel à la distance parcourue L : on voit bien que pour cette force le travail dépend donc évidemment du trajet suivi.

Exercice 4

On pousse un cube de masse $m = 200\text{ g}$ sur une distance $L = 50\text{ cm}$ sur une surface horizontale de coefficient de frottement $\mu = 0,10$. Calculer le travail de la réaction du support. Même question si la surface fait un angle de $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale.

I.3 Puissance

Le travail élémentaire δW de la force \vec{F} vaut $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$. En rappelant que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d(\overrightarrow{OM})$ (chapitre 2 cinématique), on a : $\delta W = \vec{F} \cdot d(\overrightarrow{OM}) = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$.

Définition

Puissance

La puissance d'une force appliquée en un point M d'un référentiel \mathfrak{R} possédant par rapport à ce référentiel une vitesse \vec{v} est donnée par :

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

L'équation aux dimensions de P est : $\dim(P) = MLT^{-2} \cdot LT^{-1} = ML^2T^{-3}$. Si \vec{F} est en Newton, et \vec{v} en $m \cdot s^{-1}$, P s'exprime en watts (W).

Exercice 5

Une force déplace un mobile de masse m sur une trajectoire rectiligne horizontale selon une loi horaire $x(t) = at^3 - bt^2 + c$. Donner en fonction de m et t l'expression de la puissance instantanée fournie par cette force.

Exercice 6

Le kilowatt-heure (kWh) est-il une unité de travail ou de puissance ? Donner sa valeur dans le système S.I.

Remarque : Comme pour le travail, la valeur de P dépend du référentiel considéré.

II Énergie cinétique pour un point matériel

II.1 Définition

Définition

Énergie cinétique

L'énergie cinétique E_c du point matériel de masse m possédant une vitesse par rapport au référentiel \mathfrak{R} est définie par :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Exercice 7

Le météore de Tcheliabinsk a été observé dans le ciel du sud de l'Oural, au-dessus de l'oblast de Tcheliabinsk, le matin du 15 février 2013 à environ 9 h 20 heure locale. D'une masse estimée d'une dizaine de milliers de tonnes, le bolide est entré dans l'atmosphère à une vitesse approximative de $20 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ et s'est finalement presque entièrement désintégré dans l'atmosphère à environ 20 km d'altitude. ^a Sachant que pratiquement toute l'énergie cinétique disponible a été absorbée par l'atmosphère, estimer l'énergie dissipée par cette météorite et la comparer à l'énergie libérée lors de l'explosion de la bombe atomique à Hiroshima (60 TJ).

a. voir video sur wikipedia

Exercice 8

Est-il plus, moins ou également dangereux de percuter un mur immobile à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, que de percuter, en roulant à $40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, une voiture se déplaçant à la même vitesse en sens inverse ? (l'expérience est en ligne sur <http://www.youtube.com/watch?v=r8E5dUnLmh4&feature=related!>)

II.2 Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel

Dans un référentiel galiléen (\mathfrak{R}), la relation fondamentale de la dynamique du point matériel s'écrit $\sum_i \vec{F}_i = m \frac{d\vec{v}}{dt}$.

On peut donc écrire la somme des puissances de toutes les forces \vec{F}_i :

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = m \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{2dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = \frac{dE_c}{dt}$$

En d'autres termes, $dE_c = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{l} = \sum_i \delta W(\vec{F}_i)$

Ainsi, entre deux instants t_A et t_B correspondant à deux positions A et B du point matériel P sur la trajectoire, pour lesquels les vitesses sont \vec{v}_A et \vec{v}_B on a :

$$\Sigma W_i = W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} d \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E$$

Théorème

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen \mathfrak{R} , la variation d'énergie cinétique $E_c(B) - E_c(A)$ d'un point matériel P entre deux instants t_A et t_B relatifs à deux positions A et B est égale à la somme des travaux des forces appliquées à P entre ces positions A et B .

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \Sigma W_{i,A \rightarrow B}$$

Exercice 9

Une boule de masse 0,8 kg lâchée sans vitesse initiale tombe d'une hauteur de 15 m. On néglige la résistance de l'air. Quelle est sa vitesse après cette chute de 15 m ?

II.3 Applications du théorème de l'énergie cinétique

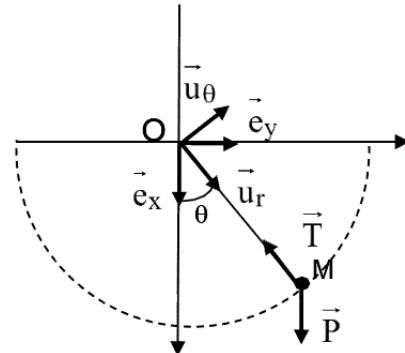
Quand on souhaite accéder seulement à la vitesse du système, ou bien quand seules les caractéristiques initiales et finales importent, il est souvent beaucoup plus simple d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique (ou un autre théorème énergétique, cf. plus loin) plutôt que d'intégrer le PFD.

De plus, si l'on souhaite trouver une équation du mouvement, les théorèmes énergétiques peuvent aussi être utilisés, au lieu des théorèmes généraux. On traite ici par exemple le cas du pendule simple, résolu précédemment (Chapitre 4 §II.5) à l'aide du PFD. La même méthodologie (Chapitre 4 §II.5) doit être suivie, sauf qu'au lieu d'énoncer le PFD il faut énoncer le théorème de l'énergie cinétique **puis dériver l'expression obtenue par rapport au temps**. Cette voie de résolution est assez peu fréquente.

Remarque : le théorème de l'énergie cinétique conduit à une expression directement utilisable uniquement si le système admet un seul degré de liberté. Ce sera le cas de la majorité des exercices cette année, mais plus en deuxième année.

Exemple : Un pendule simple composé d'un fil inextensible de longueur ℓ et d'une masse m assimilée à un point matériel M est lâché sans vitesse initiale à partir d'une position définie par $\theta = \theta_0$. Trouver l'expression de la vitesse angulaire du point M lorsque le pendule fait un angle α avec la verticale. On pourra ensuite chercher l'équation du mouvement.

- Système : point M
 - Référentiel : sol (Galiléen)
 - Forces exercées sur M : Poids \vec{P} (vertical vers le bas, intensité mg) ; \vec{T} Tension du fil (dirigé selon \vec{MO} , d'intensité inconnue)
 - Schéma : cf. ci-contre.
-
- Trajectoire circulaire de centre O et de rayon ℓ , la position d'équilibre stable est obtenue lorsque le point M est situé en dessous du point O , à la verticale de celui-ci. Lorsque l'on écarte le pendule de cette position, il se produit un mouvement et il est possible de caractériser la position du point matériel, situé en M , par la valeur algébrique de l'angle θ .
 - On choisit donc comme système de coordonnées les coordonnées polaires (r, θ) . La vitesse du point M est $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, son énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$.
 - Dans un référentiel galiléen, $\Sigma W_i = E_c(B) - E_c(A)$. Entre la position de départ A , définie par $\theta = \theta_0$ et la position B (où l'angle est θ) à t , le travail des forces appliquées est :
 - pour \vec{T} : nul, la force étant perpendiculaire au déplacement ;
 - pour \vec{P} : $mg(x_B - x_A) = mg\ell(\cos\theta - \cos\theta_0)$ (attention, l'axe (Ox) est vers le bas !)



Soit : $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - 0 = mg\ell(\cos\theta - \cos\theta_0)$.

On voit ici que l'on peut alors facilement obtenir la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ au passage par un angle α à l'instant t_1 : $\omega(t_1) = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}(\cos\alpha - \cos\theta_0)$. (Pouvez-vous vérifier que cette expression est bien homogène ?)

On peut aussi dériver l'équation obtenue en écrivant le théorème de l'énergie cinétique : $m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta\dot{\theta}$ ce qui, pour θ faible se réduit à : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$

On retrouve bien la même équation différentielle qu'au chapitre précédent : mouvement oscillant de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

III Énergie potentielle

III.1 Forces conservatives. Définition de l'énergie potentielle.

Définition	Énergie potentielle
<p>Dans certains cas, le travail élémentaire d'une force est une forme différentielle exacte : $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = dW$. Ceci est équivalent à dire que le travail de cette force le long d'une courbe (C) conduisant d'un point initial A à un point final B, ne dépend pas du trajet suivi, mais uniquement de la position initiale A et de la position finale B. On dit alors que la force \vec{F} est conservative.</p> <p>Si la force est conservative, on définit alors une fonction « énergie potentielle » E_P pour \vec{F}, telle que :</p> $dE_P = -dW(\vec{F})$	

On a $W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} -dE_P = E_{P(A)} - E_{P(B)}$. Donc $W = E_{P(A)} - E_{P(B)}$ est bien indépendant du chemin suivi.

On voit que l'énergie potentielle est donc une fonction d'état qui ne dépend que de la position (à la différence de l'énergie cinétique qui ne dépend que de la vitesse). Sur un circuit fermé (C) pour une force conservative, $W = \int_{(C)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$

Remarques :

- La relation $\vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_P$ peut également s'écrire $\vec{F} = -\nabla E_P$ (voir cours d'OMNI de la fin de l'année). On dit aussi que la force « dérive d'une énergie potentielle ».
- La force est toujours dirigée vers les énergies potentielles décroissantes.**
- L'énergie potentielle étant définie à partir de sa différentielle, elle sera toujours définie à une constante d'intégration près. Le choix d'un niveau de référence fixant la valeur de cette constante sera soit imposé par l'énoncé soit laissé à votre initiative.

III.2 Exemples de forces conservatives

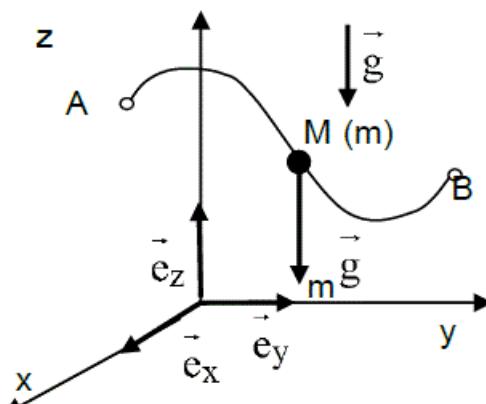
On peut définir une énergie potentielle pour chaque force conservative. Il y a donc plusieurs énergies potentielles différentes. Vous avez peut-être rencontré au premier semestre en chimie l'énergie potentielle électrique, en voici quelques autres :

a Énergie potentielle de pesanteur :

Attention : cette expression n'est valable que si l'axe (Oz) est vers le haut !

Dans un champ de pesanteur uniforme, le travail des forces de pesanteur s'écrit avec (O, z) un axe vertical **vers le haut** : $dW = m\vec{g} \cdot d\vec{l}$. Avec $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ et $d\vec{l} = d\vec{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$ on a $dW = m\vec{g} \cdot (dz\vec{e}_z) = -mgdz$

C'est une différentielle exacte, on peut donc définir une énergie potentielle de pesanteur : $dE_{pp} = -dW = mgdz$ et $E_{pp} = mgz + cste$



Pour fixer cette constante d'intégration, il faut fixer un niveau de référence. En général on choisit $E_{pp} = 0$ pour $z = 0$, dans ce cas on a :

$$E_{pp} = mgz \quad \text{si } (Oz) \text{ est vers le haut}$$

Exercice 10

Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur lorsque la verticale est orientée vers le bas. Avez-vous pensé à vérifier que l'énergie potentielle de pesanteur augmente quand l'altitude du point augmente ?

b Énergie potentielle élastique

On rappelle que la force de rappel d'un ressort de constante de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 , est définie par $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0) \vec{i}$ si \vec{i} est un vecteur unitaire colinéaire au ressort, orienté dans le sens de l'allongement du ressort. En choisissant comme origine O du repère le point d'attache du ressort, on a $\vec{F} = -k(x - \ell_0) \vec{i}$ où la différence $x - \ell_0$ représente alors l'allongement (algébrique) du ressort.

Le travail de la force de rappel s'écrit dans ce repère : $dW = -k(x - \ell_0) \vec{i} \cdot d\vec{\ell}$.

Avec $\overrightarrow{OM} = x \vec{i}$ et $d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM} = dx \vec{i}$ on a $dW = -k(x - \ell_0) dx$.

C'est une différentielle exacte, on peut donc définir une énergie potentielle élastique :

$$dE_{pe} = -dW = k(x - \ell_0) dx = k(x - \ell_0) d(x - \ell_0) \text{ et } E_{pe} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + cste$$

Pour fixer cette constante d'intégration, il faut fixer un niveau de référence. En général on choisit $E_{Pe} = 0$ pour $x = \ell_0$, dans ce cas on a :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$$

Exercice 11

Soit la force $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques. Vérifier que cette force est conservative et déterminer son énergie potentielle. À votre avis, quel niveau de référence est-il judicieux de choisir pour fixer la constante d'intégration ? Reconnaissez-vous cette énergie potentielle ?

III.3 Exemples de forces non conservatives

Par opposition au cas précédent, nous appellerons « non conservatives » les forces qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle, c'est-à-dire pour lesquelles $W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$ ou $W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ dépend du trajet suivi.

Un exemple typique de telles forces sont les **forces de frottement** (cf. paragraphe b). Ces forces sont toujours opposées au mouvement et donc leur travail sur un circuit fermé ne peut être nul et sera toujours négatif.

On verra en thermodynamique que les **forces de pression** sont aussi en général non conservatives : le travail des forces de pression dépend de la transformation thermodynamique.

III.4 Intérêt de l'énergie potentielle

a Stockage d'énergie :

Lorsque les forces sont conservatives et que l'on peut définir une énergie potentielle, cela veut donc dire que le système va pouvoir stocker de l'énergie en fonction de sa position. Par exemple, l'énergie potentielle de pesanteur permet de stocker de l'énergie dans l'eau des barrages, ce qui peut faciliter l'équilibre entre l'offre et la demande d'énergie électrique : lorsque la demande d'énergie électrique est faible (pendant les heures creuses, la nuit et le week-end par exemple) on remonte l'eau dans les barrages (à l'aide d'une pompe qui transforme de l'énergie électrique en énergie potentielle) et pendant les pics de consommation, cette eau redescend et produit à nouveau de l'électricité dans une turbine.

Ce dispositif électromécanique réversible, qui produit de l'électricité en turbinage et en consomme pour remonter de l'eau par pompage, a une assez bonne efficacité énergétique (de l'ordre de 80 % aux bornes de l'usine, en tenant compte des pertes de charge dans la conduite, des pertes des moteurs/alternateurs, des pompes/turbines et des transformateurs). Cependant, relativement peu de lieux conviennent : dotés des barrages de stockage de taille suffisante et avec un grand dénivelé entre les barrages/réserves d'eau inférieur et supérieur.

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Stockage_d'%C3%A9nergie](https://fr.wikipedia.org/wiki/Stockage_d%27%C3%A9nergie)

b Prévision de l'évolution spontanée d'un système :

On a vu que la force est toujours dirigée vers les énergies potentielles décroissantes. Ceci permet de prévoir le sens d'évolution spontané d'un système. S'il est évident que quand on lâche un objet sur une pente celui-ci glisse vers le bas, lorsque les forces sont plus compliquées que le poids (ex : forces magnétiques, voir 2A) il est parfois utile de passer par l'énergie potentielle du système pour prévoir qualitativement son sens d'évolution (comme le sens de rotation d'une boussole dans un champ magnétique par exemple).

IV Energie mécanique

IV.1 Définition

Définition

Énergie mécanique

L'énergie mécanique E_m d'un point matériel dans un référentiel \mathfrak{R} est, à chaque instant, la somme de son énergie potentielle totale E_p et de son énergie cinétique E_c . L'énergie potentielle totale E_p est l'énergie potentielle associée à la résultante des forces conservatives, ou plus simplement la somme de **toutes** les énergies potentielles associées à toutes les forces conservatives.

$$E_m = E_p + E_c$$

IV.2 Théorème fondamental

(N.B. : ce théorème n'est qu'une réécriture du théorème de l'énergie cinétique).

a Enoncé

Envisageons l'ensemble des forces conservatives \vec{F}_c et non conservatives \vec{F}_{nc} s'exerçant sur un point matériel M (m). Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre deux instants t_A et t_B correspondant à deux positions A et B du point matériel M sur sa trajectoire,

$$\Delta Ec = Ec(t_B) - Ec(t_A) = W(\vec{F}_c) + W(\vec{F}_{nc}) = E_P(A) - E_P(B) + W(\vec{F}_{nc})$$

Soit : $(Ec(t_B) + E_P(B)) - (Ec(t_A) + E_P(A)) = W(\vec{F}_{nc})$

Théorème

Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen \mathfrak{R} la variation d'énergie mécanique d'un point matériel entre deux états définis par sa position et sa vitesse, est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées à ce point entre les deux états.

$$E_m(B) - E_m(A) = W(\vec{F}_{nc})$$

Remarque : on peut évidemment donner une formulation équivalente en terme de puissance. En appelant P_{nc} la puissance des forces non conservatives, on aura : $P_{nc} = \frac{dE_m}{dt}$. Dans un référentiel galiléen \mathfrak{R} , la puissance des forces non conservatives appliquées à un point matériel M est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique de ce point matériel.

b Cas particulier important : Système soumis à des forces conservatives.

Considérons un système de forces tel que :

- soit les forces non conservatives sont nulles
- soit leur travail est nul au cours du mouvement du point matériel

On aura alors, pour tout mouvement : $\frac{dE_m}{dt} = 0$ ou $E_m(B) - E_m(A) = 0$

L'énergie mécanique du système étudié (ici, le point matériel) **est constante**. Un tel système sera dit **conservatif**.

Remarque : dans un système réel les forces non conservatives ne sont jamais nulles, mais leur travail peut être négligeable par rapport aux autres travaux des forces. Dans ce cas on considérera que le système est conservatif.

c Exemples de systèmes soumis à des forces non conservatives

Le travail des forces conservatives conserve l'énergie mécanique du système, ce qui n'est pas le cas des forces non conservatives. **Dans le cas de forces de frottements** par exemple, un tel travail est négatif, c'est-à-dire que **l'énergie mécanique du système diminuera** au cours du mouvement. C'est pourquoi on donne à ces forces non conservatives le nom de forces dissipatives.

Il existe aussi des cas où **l'énergie mécanique d'un système augmente** : c'est quand un **opérateur extérieur exerce une force motrice** ($W_{op} > 0$, l'opérateur fournit de l'énergie au système).

IV.3 Applications du théorème de l'énergie mécanique

a Calcul direct de la vitesse ou la position

Le théorème de l'énergie mécanique s'utilise de manière très similaire au théorème de l'énergie cinétique pour résoudre un exercice de mécanique (et avec la même méthodologie de résolution cf. paragraphe II.3). Il est en particulier très utile pour obtenir les **caractéristiques (position ou vitesse) à un instant donné**, sans forcément déterminer complètement l'équation du mouvement.

Exercice 12

1. En supposant que l'on puisse négliger la résistance de l'air, avec quelle vitesse (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) une pierre de masse 600 g, lâchée du haut d'une tour de 80,0 m de haut atteint-elle le sol ?
2. Si je lance vers le haut une balle de 200 g à la vitesse de $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, quelle hauteur maximum atteint-elle ?

b Diagrammes énergétiques

Le théorème de l'énergie mécanique permet aussi une analyse graphique simple des problèmes de mécanique grâce aux diagrammes énergétiques.

En effet, $E_c = \frac{1}{2}mv^2 > 0$ donc $E_m = E_c + E_p > E_p$. La détermination graphique des positions telles que $E_p < E_m$ permet ainsi souvent de prédire l'évolution d'un système.

Soit par exemple une particule M de masse m susceptible de se déplacer le long d'un axe (Ox). **Supposons dans un premier temps que toutes les forces sont conservatives** et traçons $E_p(x)$. Suivant la valeur de l'énergie mécanique, différentes évolutions sont possibles :

- Si $E_m = E_{m1}$, les seules positions vérifiant $E_p < E_m$ appartiennent à l'intervalle $[x_2, x_3]$.
- Si $E_m = E_{m2}$, les seules positions vérifiant $E_p < E_m$ appartiennent à l'intervalle $[x_1, x_4]$ ou $[x_5, x_6]$ en fonction des conditions initiales. Dans ces deux derniers cas, on parle d'état **lié** (la particule est « coincée »).
- Si $E_m = E_{m3}$, les seules positions vérifiant $E_p < E_m$ appartiennent à l'intervalle $[x_o, +\infty[$. Dans ce dernier cas on parle d'état **libre** (la particule peut « s'échapper à l'infini »).

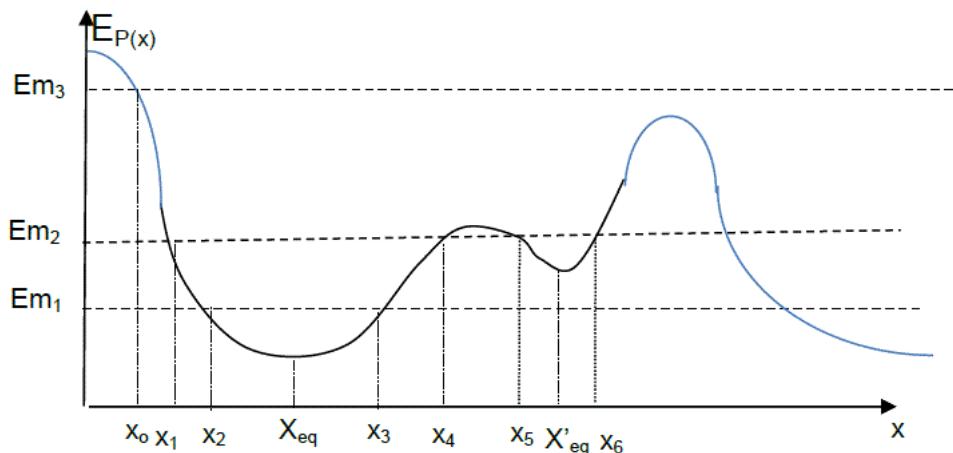


Figure 5.1 – Diagramme énergétique

S'il existe des forces non conservatives, E_m n'est pas constant, et les mouvements autorisés dépendent naturellement de l'évolution de l'énergie mécanique : par exemple, si suffisamment d'énergie est apportée par l'extérieur, une particule initialement liée peut éventuellement finir par s'échapper. Au contraire, si seules des forces dissipatives sont présentes, l'énergie mécanique diminue jusqu'à atteindre un minimum avec $E_c = 0$ et $E_p = E_{p,min}$.

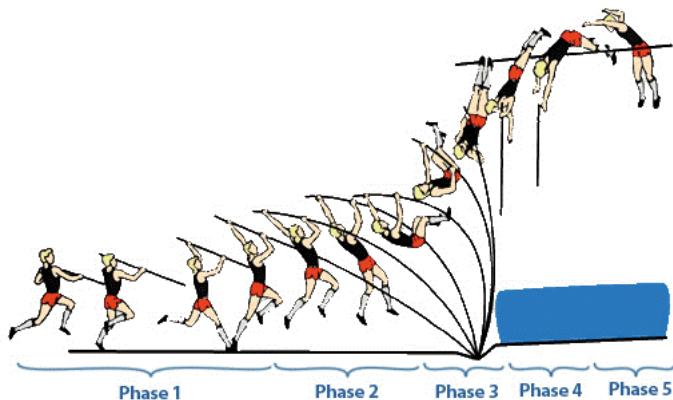
c Bilans d'énergie

On utilise aussi le théorème de l'énergie mécanique pour faire des **bilans d'énergie**, en distinguant clairement les énergies stockées (énergies cinétique et potentielles) des énergies perdues (par frottement) ou apportées (par un « opérateur » extérieur). Le principe est de comparer les énergies stockées à l'état initial et à l'état final (sous quelle forme ? dans quelle quantité ?) et de vérifier que la variation de l'énergie stockée est bien égale à la somme **algébrique** des énergies perdues et reçues.

Exercice 13

En réduisant l'athlète à son centre de masse, préciser les différentes formes d'énergie mise en jeu au cours des 5 phases du saut à la perche. Quelles conversions entre les différentes formes d'énergie ont lieu au cours du saut ? (L'athlète étant un solide déformable, il existe en fait d'autres formes d'énergie qui n'ont pas été prises en compte dans ce modèle.)

Sachant que la vitesse du perchiste avant le saut est d'environ $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et que la perche fait environ 5 m, faire un calcul d'ordre de grandeur de la hauteur du saut en supposant la conversion d'énergie parfaite (pratiquement pas de pertes). Et si on rallonge la longueur de la perche ? Plus de détails sur : <https://scienceetonnante.com/2014/02/24/jusquou-ira-le-record-de-saut-a-la-perche/>



http://sites.ostralo.net/sautalaperche/3_aspectenergetique/3_aspectenergetique.htm

IV.4 Interprétation, lien avec la thermodynamique

Le théorème de l'énergie mécanique est une version « macroscopique » du **premier principe de la thermodynamique** qui traduit le bilan énergétique d'un système. En effet ce bilan s'écrit :

La variation de l'énergie stockée dans le système = l'énergie échangée (> 0 si reçue, < 0 si perdue), soit :

$$\Delta E_{p\text{macro}} + \Delta E_{c\text{macro}} + \Delta E_{p\text{micro}} + \Delta E_{c\text{micro}} = Q + W_{nc}$$

ou encore $\Delta E_{c\text{macro}} + \Delta E_{p\text{micro}} + \Delta E_{c\text{micro}} = Q + W_{nc} + W_{\text{forces conservatives}}$

avec $W_{\text{forces conservatives}} = -\Delta E_{p\text{macro}}$

En appelant l'énergie interne $U = E_{p\text{micro}} + E_{c\text{micro}}$, et $W_{tot} = W_{nc} + W_{\text{forces conservatives}}$ le bilan devient $\Delta U + \Delta E_{c\text{macro}} = W_{tot} + Q$.

Dans de nombreuses applications de la thermodynamique, $E_{c\text{macro}} = cst$, donc on a :

$$\boxed{\Delta U = W_{tot} + Q}$$

Dans le cas de la **thermodynamique** sans mouvement macroscopique, les deux seuls « réservoirs d'énergie » sont l'**énergie cinétique microscopique** liée à l'agitation thermique (à la température), et l'**énergie potentielle microscopique** liée à son état physique (solide, liquide, gaz) ou chimique (en fonction des liaisons avec d'autres atomes).

Par exemple dans le cas d'une transformation isotherme ($\Delta E_{c\text{micro}} = 0$) d'un gaz parfait ($\Delta E_{p\text{micro}} = 0$) l'énergie stockée dans le système ne varie pas, l'énergie échangée est nulle : $W = -Q$.

Au contraire, dans toutes les applications à la **mécanique**, nous supposerons que $E_{p\text{micro}} = cst$ (par exemple pas de réactions chimiques ou nucléaires) et $E_{c\text{micro}} = cst$ (pas de variation de l'agitation thermique, donc de la température) : on ne considérera que les variations d'énergies **macroscopiques** et on ne considérera que les échanges d'énergie par travail. Le bilan s'écrit alors bien $\Delta E_{p\text{macro}} + \Delta E_{c\text{macro}} = W_{nc}$.

Dans le cas de la mécanique, les deux seuls « réservoirs d'énergie » sont l'**énergie cinétique** macroscopique que le système a emmagasiné du fait de sa vitesse (ex : turbine, alternateur), et l'**énergie potentielle** macroscopique que le système a emmagasiné du fait de sa position (ex : eau dans un barrage, ressort comprimé, charge dans un champ électrique). L'énergie peut passer d'un réservoir à l'autre ou être échangée avec l'extérieur.

Prenons l'exemple d'un opérateur qui déplace le système lors d'une transformation quasi-statique réversible (cf thermodynamique) : la vitesse est constante quasiment nulle, et les frottements sont négligeables. On a alors $\Delta E_p = W_{op}$: On peut dire que la variation d'énergie potentielle $E_P(C) - E_P(B)$ d'un point matériel M entre une position initiale B où il est immobile et une position finale C où il est également immobile est égale au travail de l'opérateur l'amenant de B à C au cours d'un déplacement réversible.

Dans la plupart des cas réels toutes les énergies (macroscopiques et microscopiques) sont bien sûr à prendre en compte.

Exercice 14

POUR ALLER PLUS LOIN : On déplace une gomme sur une feuille horizontale à vitesse constante. Faire un bilan d'énergie pour le système *gomme*. Et pour le système *feuille* ?

V Application à la stabilité d'un équilibre

On se restreint ici à des forces conservatives.

V.1 Condition d'équilibre

On sait que lorsqu'un point matériel est en équilibre, la résultante \vec{F} des forces qui lui sont appliquées est nulle. Suite à la définition de l'énergie potentielle, (voir III.1), $\vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_P$ ceci se traduit par la condition $dE_P = 0$ en ce point d'équilibre. Dans le cas d'un système à un seul degré de liberté, c'est-à-dire dont le mouvement peut être décrit à l'aide d'un seul paramètre (x par exemple, alors $d\vec{l} = dx\vec{u}_x$), la position x_0 d'un état d'équilibre sera définie par :

$$\left(\frac{dE_P}{dx} \right)_{x=x_0} = 0$$

V.2 Conditions pour avoir un équilibre stable

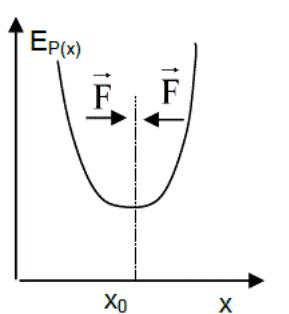
Par définition, l'équilibre dans la position x_0 sera stable si le point matériel M (m) tend à revenir à cette position s'il en est écarté. Il sera donc soumis, au voisinage de x_0 , à une force de rappel. D'après le chapitre 3, on a vu cela se traduit par les conditions suivantes :

- Si $x < x_0$, la force de rappel est dirigée vers les x croissants, $F_x > 0 \Leftrightarrow \frac{dE_P}{dx} < 0$
- Si $x > x_0$, la force de rappel est dirigée vers les x décroissants, $F_x < 0 \Leftrightarrow \frac{dE_P}{dx} > 0$

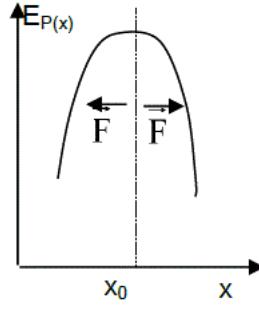
Si l'équilibre est stable, on a donc :

$$\left(\frac{d^2E_P}{dx^2} \right) (x = x_0) > 0$$

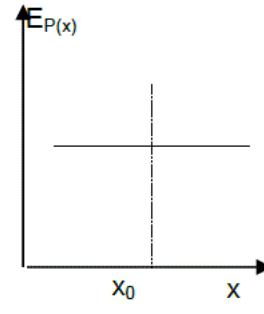
L'équilibre sera donc **stable** si l'énergie potentielle passe par un **minimum** en x_0 (Figure 5.2a).



a) Stable



b) Instable



c) Indifférent

Figure 5.2 – Les flèches indiquent la direction de la force de rappel dans les cas où $x < x_0$ et $x > x_0$.

De la même manière, on peut montrer que l'équilibre est instable (la force éloigne de la position d'équilibre) ou indifférent (la force est nulle quel que soit x) dans des conditions telles que celles données respectivement par les Figure 5.2b ou 5.2c.

Donc pour $\left(\frac{d^2E_P}{dx^2} \right) (x = x_0) < 0$ (maximum de l'énergie potentielle), l'équilibre sera **instable** et pour $\left(\frac{d^2E_P}{dx^2} \right) (x = x_0) = 0$, (l'énergie potentielle est constante) l'équilibre est **indifférent**.

V.3 États métastables ou stabilité relative

On pourra cependant remarquer que les conditions [1] et [2] définissent effectivement la stabilité **absolue** d'un système si la courbe d'énergie potentielle a la forme donnée par la Figure 5.2a, c'est-à-dire si x_0 représente la position d'un minimum **absolu** d'énergie potentielle.

Envisageons par contre le cas d'une évolution de l'énergie potentielle telle que celle représentée par la Figure 5.3 où ΔE_P est une valeur qui peut être considérée comme faible vis à vis des variations possibles d'énergie potentielle du point matériel considéré.

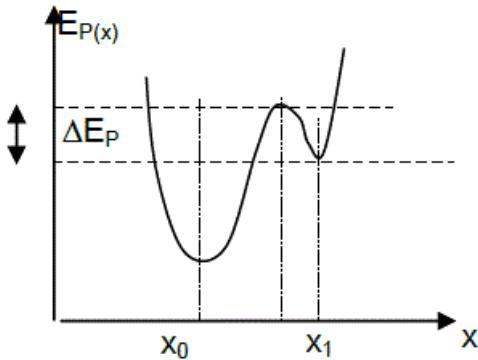


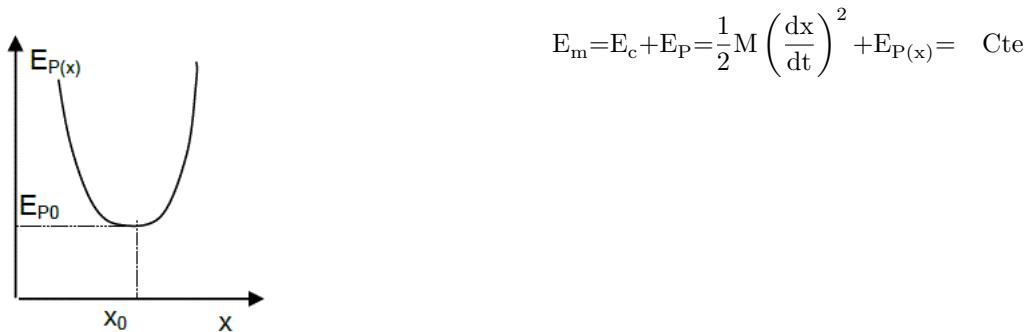
Figure 5.3 – Évolution de l'énergie potentielle E_p en fonction de x

Étudions le point matériel situé en $x = x_1$. Vis à vis des sollicitations de très faible amplitude, telles que la variation d'énergie potentielle soit inférieure à ΔE_P , on se retrouve dans le cas évoqué initialement (Figure 5.2a) et la position $x = x_1$ apparaît donc comme une position d'équilibre stable.

Par contre, si le point matériel est soumis à une sollicitation telle que son énergie potentielle varie d'une valeur légèrement supérieure à ΔE_P , la position $x = x_1$ apparaît alors comme une position d'équilibre instable, puisque le point matériel pourra alors évoluer vers la position x_0 , plus stable. Le système n'est donc pas stable vis à vis de fortes fluctuations d'énergie : la position $x = x_1$ est dite position d'**équilibre métastable**. C'est par exemple le cas d'une pièce de monnaie posée sur la tranche. On rencontre souvent cette situation dans d'autres types de problèmes physiques, comme en thermodynamique, où l'accroissement d'énergie ΔE nécessaire à ce déplacement est alors une énergie fournie par un processus thermique.

V.4 Compléments : oscillations autour de la position d'équilibre

Considérons un système mécanique conservatif (aucune force dissipative) de masse M et supposons que la position de ce système ne soit fixée que par un seul degré de liberté x . Ainsi que nous l'avons montré un tel système possédera une position d'équilibre stable en $x = x_0$, si son énergie potentielle $E_P(x)$ passe par un minimum E_{P0} en x_0 (cf figure ci dessous). L'énergie mécanique de ce système s'écrit :



Envisageons alors de faibles déplacements du système autour de la position d'équilibre x_0 et exprimons $E_P(x)$ sous forme d'une série de Taylor autour de la valeur minimale E_{P0} .

$$E_m = \frac{1}{2} M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + E_{P0} + \frac{x-x_0}{1!} \left(\frac{dE_P}{dx} \right)_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \left(\frac{d^2E_P}{dx^2} \right)_{x=x_0} + \dots$$

Comme x_0 correspond à une position d'équilibre, $\left(\frac{dE_P}{dx} \right)_{x=x_0} = 0$
et $E_m = \frac{1}{2} M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + E_{P0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \left(\frac{d^2E_P}{dx^2} \right)_{x=x_0} + \dots$

Si on envisage de très petits déplacements au voisinage de x_0 , on peut négliger les termes d'ordre supérieur du développement limité. On remarquera que, x_0 correspondant à un minimum pour la fonction énergie potentielle, $\left(\frac{d^2E_P}{dx^2} \right)_{x=x_0} > 0$ on retrouve que l' E_p est assimilable au voisinage d'une position d'équilibre stable à une parabole tournée vers le haut, de sommet la position d'équilibre.

Après dérivation du théorème de l'énergie cinétique, on retrouve bien évidemment l'équation du mouvement déjà vu au chapitre 4 :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\alpha}{M} y = 0$$

en posant $\alpha = \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right) (x = x_0) = - \left(\frac{dF_x}{dx} \right) (x = x_0) > 0$ et $y = x - x_0$

La solution de l'équation différentielle ci-dessus conduit à $x = x_0 + Xm \cos(\omega_o t + \phi)$ avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{M}}$$

Ainsi, toute oscillation autour d'une position d'équilibre stable peut être assimilée à une oscillation harmonique, pourvu qu'elle soit de faible amplitude.

Remarque : s'il existe des forces non conservatives, les positions d'équilibre restent inchangées. Mais l'équation différentielle ci-dessus est modifiée. Dans le cas de forces dissipatives, il apparaît de plus un terme d'amortissement.

VI Théorèmes énergétiques dans le cas des mouvements simples du solide

VI.1 Énergies totales d'un système

a Énergie cinétique totale E_c

Dans un référentiel \mathfrak{R} , on définit l'énergie cinétique totale d'un système par

$$E_c = \sum_{P_i} \frac{1}{2} m_i (v(P_i/\mathfrak{R}))^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Vous verrez en deuxième année comment simplifier cette expression dans le cas général, cette année nous ne l'utiliserons que dans 2 cas particuliers :

- Solide en translation : Si le solide est en translation, alors par définition (cf. chapitre 2) tous les points du solide ont la même vitesse $\vec{v} = \vec{v}(Solide/\mathfrak{R}) = \vec{v}(G/\mathfrak{R})$ et l'expression de l'énergie cinétique est donc très simple : $E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v^2 = \frac{1}{2} M v^2$.

Définition

Énergie cinétique d'un solide en translation

L'énergie cinétique du système en translation est donc l'énergie cinétique d'un point affecté de la masse totale M se déplaçant à la vitesse \vec{v} :

$$E_c = \frac{1}{2} M v^2$$

- Solide en rotation autour d'un axe fixe (Oz) : Dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe, tous les points M sont en mouvement circulaire autour du même axe (Oz) à la même vitesse angulaire ω et vérifient donc (chapitre 2, base cylindrique) :

$$\vec{v}_M = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = r\omega\vec{e}_\theta$$

avec ω uniforme (identique pour tous les points du solide). L'énergie cinétique totale vaut donc :

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

Ainsi dans le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe, l'énergie cinétique par rapport à cet axe est proportionnelle à $\frac{1}{2}\omega^2$ et le coefficient de proportionnalité ne dépend que de la distribution des masses du solide.

Définition

Moment d'inertie d'un solide

On appelle **moment d'inertie** par rapport à l'axe (Oz) J_{Oz} ce facteur de proportionnalité $J_{Oz} = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm$.

Définition

Énergie cinétique d'un solide en rotation

Et l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe s'écrit donc alors :

$$E_c = \frac{1}{2} J_{Oz} \omega^2$$

Exercice 15

Quelle est la dimension et l'unité S.I. du moment d'inertie ?

Le **moment d'inertie** J_{Oz} du solide est une constante caractéristique du solide au même titre que sa masse : il quantifie l'inertie du solide lors de sa mise en rotation au même titre que la masse caractérise l'inertie du système lors de sa mise en translation. J_{Oz} sera souvent donné dans l'énoncé ou alors devra être calculé par une intégrale sur le solide (cf. OMNI) :

$$J_{Oz} = \int r^2 dm = \int r^2 \rho d\tau \quad d\tau \text{ petit élément de volume du solide.}$$

b Énergie potentielle de pesanteur totale E_{pp}

Par définition l'énergie potentielle de pesanteur totale (en choisissant $z = 0$ comme référence et avec un axe z dirigé vers le haut) vaut

$$E_{pp} = \sum_i (m_i g z_i) = (\sum_i m_i z_i) g \text{ soit par définition du barycentre :}$$

$$E_{pp} = Mg z_G$$

De même, d'autres énergies potentielles peuvent éventuellement être définies pour le système entier, il suffit de sommer les contributions de toutes les forces sur tous les points du système, les énergies étant des grandeurs extensives.

c Énergie mécanique totale E_m

L'énergie mécanique E_m totale est la somme de l'énergie cinétique totale et de l'énergie potentielle totale.

VI.2 Travail et puissance

a Travail

La définition du travail d'une force a été donnée au chapitre 3. Le travail élémentaire δW_i de la force \vec{F}_i s'appliquant au point matériel P_i qui se déplace de la position M_i en une position infiniment voisine M'_i , tel que $\overrightarrow{M_i M'_i} = \overrightarrow{d\ell}_i$ est défini par :

$$\delta W_i(\vec{F}_i) = \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{d\ell}_i$$

Dans le cas d'un mouvement de rotation autour de l'axe (Oz), il est souvent plus simple d'utiliser directement les moments, en effet $\vec{v} = r\omega \vec{u}_\theta = r\omega \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = \omega \vec{u}_z \wedge r \vec{u}_r = \omega \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM}$. Donc :

$$\delta W_i = \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{M_i M'_i} = \vec{F}_i \cdot \vec{v}(M_i) dt = \vec{F}_i \cdot (\omega \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM}) dt = \vec{u}_z \cdot (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_i) \omega dt = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_i}(O) \cdot \vec{u}_z \omega dt$$

soit :

$$\delta W_i(\vec{F}_i) = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_i}(Oz) d\theta$$

Exercice 16

Retrouver cette expression en utilisant la base locale cylindrique pour \overrightarrow{OM} et \vec{f} .

Exercice 17

Soit un ressort spiral exerçant un couple de rappel de moment $-C\theta$. Peut-on définir une énergie potentielle pour ce ressort spiral ? si oui donner son expression.

b Puissance

On a de même défini la puissance d'une force au chapitre 3 : $P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Dans le cas d'un mouvement de rotation, on a :

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{\mathcal{M}}(Oz) \frac{d\theta}{dt} = \vec{\mathcal{M}}(Oz) \omega$$

Exercice 18

Un petit moteur électrique tourne à une vitesse constante de 3000 tr/mn. Le couple de frottement exercé sur son axe est de 0,05 N.m.

1. Quelle est sa vitesse angulaire ω en USI ?
2. Quelle est la puissance développée par ce moteur ?
3. Quel est le travail développé par ce moteur au cours d'un tour ?

VI.3 Théorèmes énergétiques

- Théorème de l'énergie cinétique pour un système :

En sommant le théorème de l'énergie cinétique pour chaque point matériel M_i de masse m_i du système (S), on déduit immédiatement l'énoncé suivant :

Théorème

Théorème de l'énergie cinétique pour un système

Dans un référentiel galiléen \mathfrak{R} , la variation d'énergie cinétique d'un système matériel (S) entre deux instants t_A et t_B est égale au travail entre ces deux instants de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, appliquées au système.

$$E_{c(B)} - E_{c(A)} = \sum W_{ext} + \sum W_{int}$$

Exercice 19

Considérons un enfant assis sur une balançoire qu'il met en mouvement sans intervention extérieure. Faire un bilan d'énergie et commenter.

- Théorème de l'énergie cinétique pour un solide indéformable :

On rappelle qu'un solide indéformable est un système dont la distance mutuelle des points matériels ne varie pas au cours du temps. On peut donc montrer que **le travail des forces intérieures d'un solide indéformable est nul**.

En effet, soit M_i et M_j deux points du solide et O un point fixe de \mathfrak{R} . Si \vec{F}_{ij} est la force intérieure que le point M_i exerce sur le point M_j , alors :

$$\delta W(\vec{F}_{ij}) + \delta W(\vec{F}_{ji}) = \vec{F}_{ij} \cdot d(\overrightarrow{OM_j}) + \vec{F}_{ji} \cdot d(\overrightarrow{OM_i}) = \vec{F}_{ij} \cdot (d(\overrightarrow{OM_j}) - d(\overrightarrow{OM_i})) = \vec{F}_{ij} \cdot d(\overrightarrow{M_i M_j})$$

Donc si la distance $M_i M_j$ est fixe, $\delta W(\vec{F}_{ij}) + \delta W(\vec{F}_{ji}) = 0$. Le même raisonnement peut être fait pour tout couple de points du solide.

Le théorème de l'énergie cinétique s'énoncera donc dans ce cas de la façon suivante :

Théorème

Théorème de l'énergie cinétique pour un solide indéformable

Dans un référentiel galiléen \mathfrak{R} , la variation d'énergie cinétique d'un solide indéformable (S) entre deux instants t_A et t_B est égale au travail entre ces deux instants des forces extérieures appliquées à (S) :

$$E_{c(B)} - E_{c(A)} = \sum W_{ext} \quad \text{pour un solide indéformable}$$

Ou encore : Dans un référentiel galiléen \mathfrak{R} , la puissance des forces extérieures appliquées à un solide (S) est égale à la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique. Soit : $\frac{dE_c}{dt} = P_{ext}$ pour un solide indéformable

- Théorème de l'énergie mécanique pour un solide indéformable :

De même, en sommant le théorème de l'énergie mécanique pour chaque point matériel du système (S) on déduit immédiatement l'énoncé suivant :

Théorème

Théorème de l'énergie mécanique pour un solide

Dans un référentiel galiléen \mathfrak{R} , la variation d'énergie mécanique d'un système matériel (S) entre deux instants t_A et t_B est égale au travail entre ces deux instants des forces non conservatives, tant intérieures qu'extérieures, appliquées au système.

Mais pour un solide indéformable, comme montré ci-dessus, le travail des forces intérieures est nul, et on a donc :

Dans un référentiel galiléen \mathfrak{R} , la variation d'énergie mécanique d'un solide indéformable (S) entre deux instants t_A et t_B est égale au travail entre ces deux instants des forces non conservatives **extérieures**, appliquées au système :

$$E_{m(B)} - E_{m(A)} = \sum W_{ext,nc} \quad \text{pour un solide indéformable}$$

Remarque : comme pour le point, le théorème de l'énergie mécanique pour un système et le théorème de l'énergie cinétique pour un système sont parfaitement équivalents. Ils constituent deux présentations mécaniques du premier principe de la thermodynamique.

Exemple : Calculons le travail des forces de frottement exercées par les freins sur les roues d'une voiture en roue libre pour arrêter cette dernière. Les seules forces qui s'exercent sur la voiture sont les forces de frottement, donc : $0 - E_c(\text{avant le freinage}) = 0 + W_{\text{frottements}} < 0$.

Exercice 20

Retrouver l'équation du mouvement du pendule pesant (cf. chapitre précédent).

VII Correction des applications directes du cours

Exercice 1 : moteur

Exercice 2 : $\delta W = \vec{F} \cdot \vec{d}\ell$; Comme \vec{F} est constant : $W = \oint_{(C)} \vec{F} \cdot \vec{d}\ell = \vec{F} \oint_{(C)} \vec{d}\ell = 0$

Exercice 3 : $W = Lmg(\cos(\alpha) - 1)$

Exercice 4 : $W = -mgL\mu = -0,1 \text{ J}$ $W = -mgL\mu \cos(\alpha) = -0,087 \text{ J}$

Exercice 5 : L'accélération du mobile est $a = \frac{d^2x}{dt^2} = 6at - 2b$; L'amplitude de la composante de la force exercée dans le sens du mouvement est : $F = ma = 6amt - 2bm$ et la puissance développée est : $P = Fv = m(6at - 2b)(3at^2 - 2bt) = mt(6at - 2b)(3at - 2b)$.

Exercice 6 : c'est une unité de travail, $1 \text{ kWh} = 3,6 \text{ MJ}$

Exercice 7 : $E_c \sim 2 \cdot 10^{15} \text{ J} \sim 30 \text{ bombes A !}$

Exercice 8 : L'énergie cinétique disponible est entièrement dissipée au cours du choc : après l'accident, plus rien ne bouge. Pour comparer les deux situations, il suffit de comparer les énergies cinétiques avant le choc : Choc « favorable » : deux voitures à 40 km/h

Exercice 9 : variation de l'Ec = Travail des forces de pesanteur $\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Exercice 10 : $E_{pp} = -mgz$

Exercice 11 : $dW = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{d}\ell = \frac{K}{r^2} dr = -d\left(\frac{K}{r}\right) = -dE_P$. D'où $E_P = \frac{K}{r} + Cte$. En posant conventionnellement $E_P = 0$ à l'infini, on aura alors : $E_P = \frac{K}{r}$. Comme vu au semestre 1 en chimie, l'énergie potentielle électrostatique est de cette forme (avec $K = q_1q_2/(4\pi\epsilon_0)$.)

Exercice 12 :

1. $39,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

2. 45 cm

Exercice 13 : Ec, Epp, Epe

Phase1 : E_c

Phase2 : $E_c \downarrow, E_{pe} \uparrow$ bcp, $E_{pp} \uparrow$ à peine

Phase3 : E_c très faible, $E_{pe} \downarrow, E_{pp} \uparrow$ bcp

Phase4 : $E_c \downarrow$ jusqu'à être nulle, $E_{pe} = 0, E_{pp} \uparrow$ à peine (juste pour passer au dessus de la barre!)

Phase5 : $E_c \uparrow, E_{pe} = 0, E_{pp} \downarrow$

En ordre de grandeur on trouve $h = 5 \text{ m}$ quelque soit la longueur de la perche !

Exercice 14 : Supposons dans un premier temps que l'on considère uniquement ce qui se passe sur un temps très court, et que les échanges de chaleur n'ont donc pas le temps de se faire. (adiabatique $Q = 0$)

Système : *gomme*, ref. : sol, forces : de l'opérateur (\vec{F}) et les frottements de la feuille sur la gomme (\vec{f}), poids et composante normale de la réaction de la feuille, PFD : vitesse constante donc $\vec{F} = -\vec{f}$. Le point d'application de ces deux forces se déplace en même temps que la gomme donc $W(\vec{F}) = -W(\vec{f})$, soit $W = 0$. De plus $E_P^{macro} = cste, E_c^{macro} = cste, E_P^{micro} = cste$ (pas de changement d'état, de réaction chimique, etc...). Donc $\Delta E_c^{micro} = 0$, la température de la gomme ne change pas.

Système : *feuille*, ref. : sol, forces : frottements de la gomme sur la feuille ($\vec{f}' = -\vec{f}$) et réaction de la table (\vec{R}), PFD : vitesse nulle donc $\vec{R} = -\vec{f}'$. Le point d'application de \vec{R} ne se déplace pas donc $W(\vec{R}) = 0$, le point d'application de \vec{f}' se déplace en même temps que la gomme et $\vec{f}' = -\vec{f}$ (3ème loi de Newton) est donc dans le sens du mouvement, donc $W(\vec{f}') > 0$. De plus $E_P^{macro} = cste, E_c^{macro} = 0, E_P^{micro} = cste$ (pas de changement d'état, de réaction chimique, etc...). Donc $\Delta E_c^{micro} > 0$, la température de la feuille augmente.

Si maintenant on attend suffisamment longtemps pour autoriser les transferts thermiques, la feuille va chauffer la gomme ($Q_{gomme} > 0$ et $Q_{feuille} < 0$)

Exercice 15 : $ML^2 ; \text{kg} \cdot \text{m}^2$

Exercice 16 : D'une part $\delta W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = (f_r \vec{e}_r + f_\theta \vec{e}_\theta + f_z \vec{e}_z) \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = r d\theta f_\theta$ et d'autre part, par définition, $\Gamma_{Oz}(\vec{f}) = (\vec{OM} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{e}_z = (\vec{e}_z \wedge \vec{OM}) \cdot \vec{f}$ or $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$ donc $\vec{e}_z \wedge \vec{OM} = \vec{e}_z \wedge (r \vec{e}_r + z \vec{e}_z) = r \vec{e}_\theta$ et donc $\Gamma_{Oz}(\vec{f}) = r f_\theta$ et $\delta W(\vec{f}) = \Gamma_{Oz}(\vec{f}) d\theta$

Exercice 17 : $\delta W = -C\theta d\theta = -dE_p$

On a donc : $E_p = \frac{1}{2} C\theta^2 + cste$

Exercice 18 :

1. $314 \text{ rd} \cdot \text{s}^{-1}$
2. $P = 16 \text{ W}$
3. $W = 0,314 \text{ J}$

Exercice 19 : À l'instant initial (balançoire verticale) $E_c = 0$ mais après un certain temps, lorsque la balançoire repasse par la verticale $E_c > 0$. Or le poids (force conservative) et la tension du fil (perpendiculaire au déplacement de son point d'application) ont tous les deux effectué un travail nul entre ces deux instants. C'est uniquement grâce au travail des **forces intérieures** (force musculaire de l'enfant) et à la **déformation** du système, que l'énergie augmente. (Si l'enfant ne se « déforme » pas, quelque soit ses muscles il ne fera jamais bouger la balançoire.)

Exercice 20 : $\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mg\ell \cos\theta = cste$. Quand on dérive, on trouve $J \ddot{\theta} = -mg\ell \sin\theta$. Si θ est petit, on a des oscillations de période $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg\ell}}$ (vérifiez l'homogénéité!).

EXERCICES de TD

Que dois-je savoir faire à la fin de ce chapitre ?

- Rechercher des positions particulières : **P**
- Étudier la stabilité d'équilibre : **S**
- Rechercher les vitesses en un point donné : **V**
- Déterminer l'expression d'une force : **F**
- Déterminer une équation du mouvement (équation différentielle ou trajectoire) : **M**
- Mener des calculs d'énergie : **E**
- Résoudre un problème : **R**

Ressources Moodle

Page Moodle « Physique 1A toutes filières », onglet « Mécanique »

- Vidéos méthodologie : calculer le travail d'une force et utilisation des théorèmes énergétiques
- QCM
 - Énergétique : questions de cours
 - Énergétique : calculs d'application directe

Exercice 1 : Descente à ski (V, F)

Un skieur de masse $m = 75\text{ kg}$ glisse sans frottement le long d'une piste AB de longueur $\ell = 315\text{ m}$. Les altitudes des points A et B sont : $h(A) = 1850\text{ m}$ et $h(B) = 1780\text{ m}$.

1. Le skieur part de A avec une vitesse $v_A = 1,5\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer sa vitesse v_B lors de son passage en B en utilisant le théorème de l'énergie cinétique. (Vous ferez une estimation de l'ordre de grandeur avant d'utiliser la calculette.)
2. En réalité le skieur passe en B avec une vitesse de $30\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer la valeur de la norme de la force de frottement qui s'exerce sur le skieur si l'on suppose que sa norme reste constante pendant toute la durée de la descente. (Vous ferez une estimation de l'ordre de grandeur avant d'utiliser la calculette.)

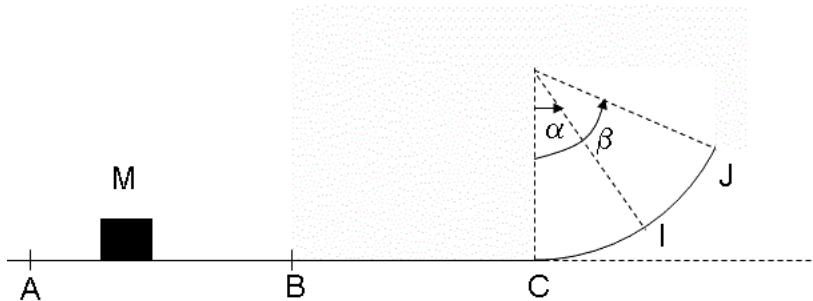
Exercice 2 : Vitesse d'échappement (V)

À quelle vitesse initiale minimale $\vec{v}_o = v_0 \vec{e}_r$ faut-il lancer un projectile pour qu'il échappe définitivement à l'attraction terrestre ? On négligera les frottements dans l'atmosphère. (Vous ferez une estimation de l'ordre de grandeur avant d'utiliser la calculette.)

Données : Masse de la terre : $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg ; Rayon de la Terre : $R_T = 6,38 \cdot 10^3$ km ; Constante gravitationnelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

Exercice 3 : Fête foraine (V, F)

Dans un stand de fête foraine, on peut tester sa force en agissant sur un chariot (M) de masse m mobile sur des rails $ABCIJ$ situés dans un plan vertical. La partie ABC de ces rails est rectiligne et horizontale et a pour longueur ℓ , les distances AB et BC étant égales ; la partie CJ est un arc de cercle de rayon r tangent en C à AC . (M) est initialement immobile en A . Un premier joueur exerce sur (M) une force de composante parallèle aux rails \vec{F} constante et lâche (M) quand il parvient en B . Le chariot continue dans le plan horizontal, puis il monte jusqu'en J , repéré par l'angle β , s'y arrête et repart en arrière. Les données sont : m , ℓ , r , β et g (l'accélération gravitationnelle).



On suppose le contact entre le mobile (M) et les rails sans frottement

1. Exprimer la vitesse de (M) en C pour que le chariot atteigne la position J . En déduire l'expression de la vitesse du chariot en B .
2. Déterminer la norme de la force \vec{F} qui doit être exercée sur le mobile pendant le trajet (AB). A.N. : $m = 5 \text{ kg}$, $\ell = 10 \text{ m}$, $r = 5 \text{ m}$, $\beta = 60^\circ$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\alpha = 30^\circ$. (Vous ferez une estimation de l'ordre de grandeur avant d'utiliser la calculette.)
3. Soit I le point de l'arc CJ repéré par l'angle α . Exprimer (en fonction entre autres de α) la vitesse avec laquelle le chariot passe à l'aller en I .
4. Quelle force \vec{R} les rails exercent-ils sur (M) au passage en I (direction et sens à indiquer sur un schéma, module à exprimer) ?
5. Exprimer la durée des trajets AB et BA .

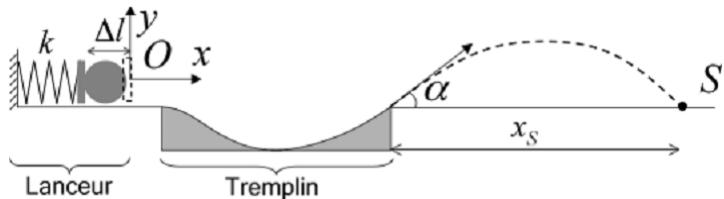
Exercice 4 : Fête foraine, la suite (F)

On reprend l'exercice de la fête foraine, en prenant en compte **les frottements** entre le mobile M et les rails. On suppose le module de la composante tangentielle de la réaction **R constant** (c'est-à-dire que la norme de la force de frottement \vec{F}_f est constante) **tout le long du trajet ABCJCB**. Dans cette partie, le chariot monte jusqu'au même point J qu'à la partie A (car il a été poussé plus fort pendant le trajet AB) mais il s'arrête au retour au point B .

1. Exprimer la norme de la force de frottement \vec{F}_f en fonction de m , g , β , r , ℓ
2. Exprimer la norme de la force \vec{F} exercée par le joueur sur le chariot. Application numérique.
3. Quelle est la condition pour que le mobile M ne reste pas immobile en J ? Est-elle satisfaite ?

Exercice 5 : Tir d'un projectile (V, F, P)

Un projectile de masse $m = 10\text{ g}$ est placé dans un « lanceur » composé d'un ressort de raideur $k = 100\text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. À l'équilibre le projectile est en O . Lorsqu'on comprime le ressort de $\Delta\ell$ par rapport à sa position d'équilibre, il va donner une vitesse v au projectile qui va glisser sans frottement jusqu'à un tremplin qui le projette dans les airs avec un angle $\alpha = 30^\circ$. Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de $\Delta\ell$ pour que le projectile atteigne une cible placée à une distance $x_S = 50\text{ cm}$ du sommet du tremplin.



Étude du lanceur :

1. Quel est le repère le plus judicieux pour étudier le mouvement du projectile dans le lanceur ? Justifier.
2. A l'aide du théorème de l'énergie cinétique, donner la vitesse du projectile en O (lorsque le ressort retrouve sa position d'équilibre, et que le projectile quitte donc le ressort) en fonction de m , k et $\Delta\ell$.
3. Retrouver ce résultat à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique.

Mouvement du projectile dans les airs :

4. Retrouver l'équation de la trajectoire du projectile dans les airs.
5. Donner l'expression de $\Delta\ell$ pour que le projectile atteigne sa cible.
6. Donner la valeur de $\Delta\ell$.

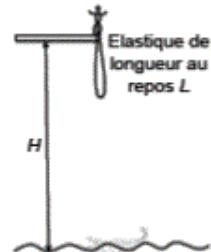
Exercice 6 : Décollage à partir d'une sphère(R)

Un petit caillou, assimilé à un point matériel est posé au sommet d'une sphère de rayon R . On le pousse à peine. À quelle altitude va-t-il décoller de la sphère ? On supposera qu'il n'y a pas de frottement et que le caillou glisse sans rouler.

Exercice 7 : Saut à l'élastique (R)

C'est le grand jour, vous allez faire un saut à l'élastique à partir d'un pont d'une hauteur de 100 m. Au fond, coule une rivière profonde. Après vous avoir assuré que tout allait bien se passer, votre instructeur vous pousse dans le vide non sans vous avoir attaché aux pieds un élastique (ressort) de raideur $25\text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et de longueur au repos 25 m . Vous choisirez de manière réaliste et raisonnable les éventuelles données manquantes.

Allez-vous vous en sortir (sec) ?



Exercice 8 : Une particule chargée dans un champ magnétique (V, E)

Un ion de charge q se déplace à la vitesse \vec{v} dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$. On négligera le poids de l'ion.

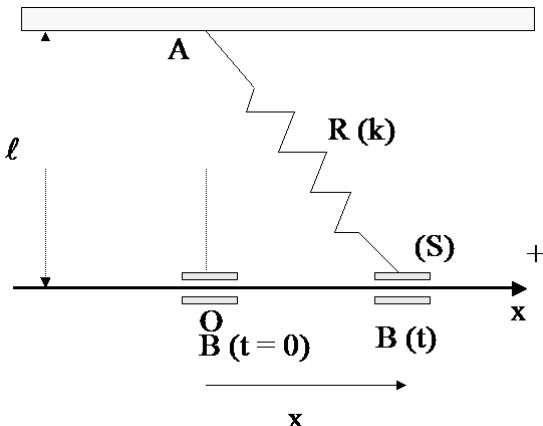
1. Calculer le travail de la force magnétique.
2. Quelle conclusion pouvez-vous en tirer concernant \vec{v} ?

On suppose maintenant $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$ perpendiculaire à \vec{u}_z

3. Montrer que le mouvement a lieu dans un plan perpendiculaire à \vec{u}_z
4. En déduire que la norme de la force magnétique est constante et que le mouvement est alors circulaire uniforme.

Exercice 9 : Positions d'équilibre d'un système à ressort (P, S)

Un ressort (R), à spires non jointives, a pour raideur k et pour longueur à vide ℓ_0 . On fixe en A une de ses extrémités et on accroche l'autre en B sur un solide (S) de masse m (devant laquelle la masse du ressort est négligeable). (S) peut glisser sans frottement appréciable le long d'une tige horizontale d'axe (Ox). À l'équilibre B est en O au-dessous de A sur une même verticale et l'abscisse du solide est donc zéro. On appelle ℓ la longueur AO ($\ell \neq \ell_0$)

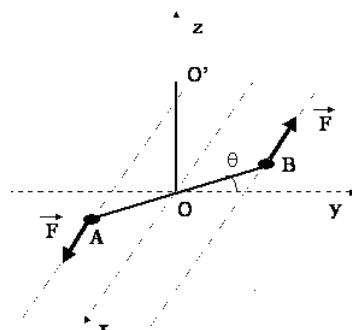


Déterminer, selon les valeurs de ℓ , les positions d'équilibre de la masse m et étudier leur stabilité.

Exercice 10 : Travail, énergie d'une barre en rotation (V, F, E)

On considère un repère orthonormé (Ox, Oy, Oz) direct ; l'axe (Oz) est vertical.

Un fil métallique OO' vertical, de section négligeable, est fixé en O' . Le point O est le milieu d'une tige rectiligne AB homogène de longueur ℓ et de très faible masse (négligeable). En A et B sont soudées deux petites sphères de masses m et de dimensions très petites devant AB . À l'équilibre, la tige AB occupe la position A_oB_o sur l'axe Oy ($\theta = 0$). Les masses A et B sont alors soumises à un couple de forces de module F . Ces forces gardent constamment la même direction $x'x$. Par ailleurs, le fil OO' exerce sur la tige AB un couple de torsion dont le moment par rapport à O vaut : $\vec{\mathcal{M}}_0 = -C\theta \vec{e}_z$. C est la constante de torsion du fil.



On s'intéresse aux rotations de la tige autour de Oz . On constate que la tige est en équilibre pour une valeur particulière de l'angle θ telle que $(A_oB_o, AB) = \alpha$.

1. Exprimer alors le module de la force \vec{F} en fonction de C , ℓ et α .

2. L'angle (A_oB_o, AB) variant de θ à $\theta + d\theta$, calculer le travail δW des forces extérieures au système tige en fonction de C, F, ℓ, θ et $d\theta$.
3. Montrer que ces forces permettent de définir une énergie potentielle E_p que l'on exprimera en fonction de C, F, ℓ et θ . On prendra $E_p = 0$ pour $\theta = 0$.
4. La tige AB étant en rotation autour de Oz , exprimer l'énergie cinétique E_k et l'énergie mécanique E_m du système à la date t , en fonction de $\dot{\theta}, \theta, C, F, \ell$ et m . En déduire l'équation différentielle du mouvement de AB en négligeant tout frottement.
5. Retrouver cette équation grâce au théorème du moment cinétique.
6. Décrire le mouvement si $\theta \approx \alpha$

Exercice 11 : Détermination expérimentale de la ténacité (E)

Pour déterminer l'énergie G_c nécessaire à la rupture d'un échantillon, on emploie un appareil appelé « mouton pendule de Charpy » (cf. figure 5.4). Il est constitué d'un barreau OA rectiligne et homogène, de longueur ℓ , de masse M . Il est mobile sans frottement autour d'un axe horizontal (Oz), perpendiculaire en O au plan de la figure. Ce barreau porte en son extrémité A un couteau de masse m , assimilé à un point matériel placé en A .



Figure 5.4 – Mouton pendule : a) dans un plan vertical, avant qu'on coupe le fil b) Rotation du bras dans le plan vertical

1. Initialement le barreau est retenu par un fil BA de longueur ℓ , fixé en B , de sorte que $OB = OA = AB = \ell$
 - (a) Déterminer la position du centre de masse du bras, c'est-à-dire de l'ensemble {barreau + couteau} en fonction de M, m et ℓ
 - (b) Calculer le moment d'inertie J du bras par rapport à l'axe Oz , en fonction de M, m et ℓ . Application numérique : Les données sont $M = 16 \text{ kg}$, $m = 7 \text{ kg}$ et $\ell = 60 \text{ cm}$. Calculer le moment d'inertie J .
2. À l'instant $t = 0$ on coupe le fil AB .
 - (a) La grandeur position étant l'angle θ , écrire l'équation différentielle du mouvement du bras (cf. figure 5.4). Les données sont à prendre parmi J, M, m, ℓ, g .
 - (b) Calculer l'énergie cinétique E_k et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du bras lorsqu'il passe par la verticale (en O').
3. L'appareil est utilisé pour déterminer la ténacité K_c d'un échantillon d'acier placé en O' . Le couteau casse cet échantillon lors du passage du bras en O' et il remonte ensuite jusqu'à un certain angle α , que l'on mesure (trait en pointillé sur la figure). S est la section de l'échantillon et W l'énergie nécessaire pour casser l'échantillon. Exprimer l'énergie de rupture de l'acier ($G_c = W/S$) ; les données sont à prendre parmi J, M, m, ℓ, S, α et g (accélération de la pesanteur)

Exercice 12 : Qu'est-il plus facile de faire tenir en équilibre ? (Extrait IEFS2 2022-23) (R)

On cherche à savoir s'il est plus facile de faire tenir en équilibre à la verticale au bout du doigt horizontal un crayon ou une canne, comme sur la figure 5.5

Modélisation

- Schématiser et modéliser l'objet qui tombe. Indications : i) on prendra un angle nul à la vertical, ii) l'objet ne glisse pas au point de contact avec le doigt iii) chute sans frottements.

Nature de l'équilibre

- Expliquer pourquoi il s'agit d'un équilibre instable.

Résolution peu guidée

Un élément extérieur (un léger mouvement, du vent, etc.) peut entraîner un petit écart par rapport à l'équilibre. On prend comme instant initial le moment du déséquilibre et on modélise les conditions initiales conduisant à la rupture de l'équilibre par une vitesse angulaire initiale, faible mais non nulle.

Étape 1 : Définition du critère à utiliser

On se propose d'étudier la loi horaire de la vitesse angulaire pour voir s'il est plus ou moins facile de rétablir l'équilibre.

- Expliquer en quoi ce critère peut effectivement être pertinent.

Étape 2 : Étude du mouvement

Données :

- le moment d'inertie J d'une barre homogène (de longueur L , de masse M et de diamètre faible) par rapport à un axe passant par son extrémité est donnée par $J = \frac{1}{3}ML^2$.
 - Développement limité au deuxième ordre au voisinage de zéro : $e^u \simeq 1 + u + \frac{1}{2}u^2$
4. Déterminer l'expression la loi horaire de l'angle au début de la chute (petits angles). En déduire la vitesse angulaire dans les tous premiers instants de l'écart à l'équilibre : on donnera l'approximation de la vitesse angulaire au début du mouvement comme un polynôme de t du 2^e ordre au plus.

Étape 3 : Interprétation

- Discuter le résultat obtenu en 4 et répondre à la question posée.

Pour aller plus loin

Exercice 13 : Lancement d'un projectile à l'aide d'un ressort (P)

Principe d'un flipper : Un projectile de masse $m = 10\text{ g}$ est **posé** sur l'extrémité d'un ressort de raideur $k = 40\text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, le tout étant installé sur un plan incliné faisant un angle $\theta = 20^\circ$ avec l'horizontale. Initialement le ressort est comprimé de $\Delta x_i = -4,0\text{ cm}$, on lâche ensuite le ressort et le projectile part en glissant vers le haut sur le plan incliné avant de redescendre. On prendra l'accélération de la pesanteur $g = 10\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- On considère que les frottements sont négligeables. De quelle différence d'altitude le bloc est-il monté au maximum ?
- On prend maintenant en compte les frottements sur le plan incliné, avec un coefficient de frottement $\mu = 0,15$.
- On remplace le projectile précédent par une autre masse $m' = 500\text{ g}$, qu'est ce que cela change ?



Figure 5.5 – Objet en équilibre à la verticale au bout du doigt

Exercice 14 : Système à ressort (suite) (P, E)

On reprend le système étudié dans l'exercice 9 et on se place dans le cas $\ell > \ell_0$. Lorsque le solide a l'abscisse x , les forces qui lui sont appliquées admettent une résultante \vec{X} dont la composante algébrique suivant $x'x$ est X .

1. Exprimer X en fonction de k , ℓ , ℓ_0 et x .
2. Montrer que la force \vec{X} permet de définir une énergie potentielle E_p . Exprimer E_p en fonction de k , ℓ , ℓ_0 et x , en postulant $E_p = 0$ pour $x = 0$.
3. Que deviennent les expressions de X et de E_p lorsque $|x| \ll \ell$?
4. Dans l'hypothèse $|x| \ll \ell$, écrire l'équation différentielle du mouvement du solide grâce à la notion d'énergie mécanique.

Exercice 15 : Dérapage (R)

Lorsque les roues d'une voiture bloquent, la voiture glisse sur la route. De petits segments de pneu fondu forment les marques de dérapage. Le record en matière de longueur de dérapage sur une voie publique aurait été établi en 1960 par une Jaguar sur l'autoroute M1 en Angleterre et il est de 290 m.

À quelle vitesse roulait la voiture juste avant de freiner ? On supposera un coefficient de frottement entre la route et les pneus de 0,6.

Exercice 16 : Looping (R)

Le record du plus grand looping franchi à partir d'une voiture a été battu en mars 2012 par un chinois nommé Li Yatao, au volant de sa Sportback Lotus L5. Le chinois a exécuté une boucle de 12,87 mètres de rayon. Il a pris beaucoup de risque pour rentrer dans la légende car non seulement l'accélération centripète à ce niveau est extrêmement puissante mais en plus la voiture pouvait se retourner à tout moment durant le looping à cause d'un manque de vitesse. On suppose que la voiture est en « roues libres » (pas de travail du moteur) à compter de l'entrée du looping et on néglige les frottements.

Quelle est la vitesse minimale que la voiture doit avoir à l'entrée du looping ?

Exercice 17 : Le gyrobus, extrait IE2S2 2023 (R, E)

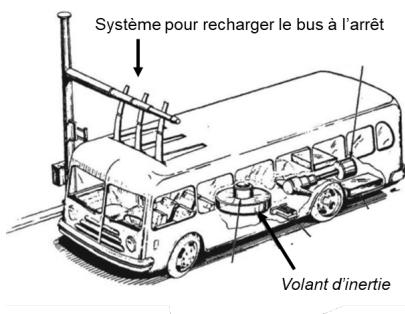
Le GYROBUS a été utilisé dans les années 1950 comme véhicule électrique pour les transports en commun, avec la particularité de ne pas nécessiter de lignes électriques le long du parcours pour son alimentation électrique. Le GYROBUS ne nécessite en effet que de bornes de recharges installées régulièrement le long du parcours pour recharger son volant d'inertie mécanique. Le volant d'inertie est un disque plein d'axe vertical logé dans le plancher du bus (cf. figure ci-contre). Lors de la recharge, à l'arrêt, le disque est mis en rotation par un moteur électrique embarqué, lui-même alimenté par l'extérieur. Lorsque le bus roule, c'est l'inverse : la rotation du disque alimente le moteur électrique qui lui-même alimente les roues motrices avec un très bon rendement de conversion qui sera supposé égal à 100% dans la suite de l'exercice.

Le disque présente un moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation de $750 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Le bus (incluant le disque) est un véhicule de masse totale M égale à 10 tonnes.

Informations supplémentaires :

- Lorsque le bus se déplace, les divers frottements, considérés comme indépendants de la vitesse, font que le bus consomme une énergie W égale à $0,4 \text{ kWh}$ par kilomètre parcouru.
- L'énergie cinétique totale du gyrobus est égale à la somme de l'énergie cinétique de translation du véhicule et de l'énergie cinétique de rotation du volant d'inertie.

Le gyrobus est initialement à l'arrêt et doit gravir une côte de 2 km de long et de 150 m de dénivelé. Quelle doit être la vitesse angulaire initiale minimale du volant d'inertie pour que le gyrobus atteigne le sommet de la côte avec une vitesse de $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?



PROBLEME DE REVISION de toute la mécanique

Une petite histoire . . .D'après <http://fr.wikipedia.org/>

« J'ai reçu un coup de fil d'un collègue à propos d'un étudiant. Il estimait qu'il devait lui donner un zéro à une question de physique, alors que l'étudiant réclamait un 20. Le professeur et l'étudiant se mirent d'accord pour choisir un arbitre impartial et je fus choisi. Je lus la question de l'examen : *Montrez comment il est possible de déterminer la hauteur d'un immeuble à l'aide d'un baromètre.* L'étudiant avait répondu : On prend le baromètre en haut de l'immeuble, on lui attache une corde, on le fait glisser jusqu'au sol, ensuite on le remonte et on mesure la longueur de la corde (...) [méthode1].

L'étudiant avait raison, vu qu'il avait répondu juste et complètement à la question. D'un autre côté, je ne pouvais pas lui mettre ses points : dans ce cas, il aurait reçu son diplôme de physique alors qu'il ne m'avait pas montré de connaissances en physique. J'ai proposé de donner une autre chance à l'étudiant en lui donnant six minutes pour répondre à la question avec l'avertissement que pour la réponse il devait utiliser ses connaissances en physique. Après cinq minutes, il n'avait encore rien écrit. Je lui ai demandé s'il voulait abandonner mais il répondit qu'il avait beaucoup de réponses pour ce problème et qu'il cherchait la meilleure d'entre elles. Je me suis excusé de l'avoir interrompu et lui ai demandé de continuer. Dans la minute qui suivit, il se hâta pour me répondre :

- On place le baromètre à la hauteur du toit. On le laisse tomber en mesurant son temps de chute avec un chronomètre. Ensuite (...) [méthode 2] on trouve la hauteur de l'immeuble.

À ce moment, j'ai demandé à mon collègue s'il voulait abandonner. Il me répondit par l'affirmative et donna presque 20 à l'étudiant. En quittant son bureau, j'ai rappelé l'étudiant car il avait dit qu'il avait plusieurs solutions à ce problème.

- Hé bien, dit-il, il y a plusieurs façons de calculer la hauteur d'un immeuble avec un baromètre. Par exemple, on le place dehors lorsqu'il y a du soleil. On calcule la hauteur du baromètre, la longueur de son ombre et la longueur de l'ombre de l'immeuble. Ensuite, (...) on trouve la hauteur de l'immeuble [méthode 3].

- Bien, lui répondis-je, et les autres ?

- Il y a une méthode assez basique que vous allez apprécier. On monte les étages avec un baromètre et en même temps on marque la longueur du baromètre sur le mur. En comptant le nombre de traits, on a la hauteur de l'immeuble en longueur de baromètre. C'est une méthode très directe [méthode 4]. Bien sûr, si vous voulez une méthode plus sophistiquée, vous pouvez pendre le baromètre à une corde, le faire balancer comme un pendule et déterminer la valeur de g au niveau de la rue et au niveau du toit. À partir de la différence de g la hauteur de l'immeuble peut être calculée [méthode 5]. De la même façon, on l'attache à une grande corde et en étant sur le toit, on le laisse descendre jusqu'à peu près le niveau de la rue. On le fait balancer comme un pendule et on calcule la hauteur de l'immeuble à partir de la période des oscillations [méthode 6]. Finalement, il conclut :

- Il y a encore d'autres façons de résoudre ce problème. Probablement la meilleure est d'aller au sous-sol, frapper à la porte du concierge et lui dire : « J'ai pour vous un superbe baromètre si vous me dites quelle est la hauteur de l'immeuble » [méthode 7].

J'ai ensuite demandé à l'étudiant s'il connaissait la réponse que j'attendais [méthode 8]. Il a admis que oui mais qu'il en avait marre de l'université et des professeurs qui essayaient de lui apprendre comment il devait penser. »

Cette histoire aurait été inventée dans le Reader's Digest en 1958, et faussement associée ensuite à Niels Bohr (Prix Nobel Physique en 1922) dans le rôle de l'étudiant et Ernest Rutherford (Prix Nobel Chimie en 1908) dans le rôle de l'arbitre. (Mais dans la réalité, les deux hommes ne se sont rencontrés qu'en 1912, pour diverses collaborations scientifiques, et Bohr, à cette époque, n'était plus étudiant.)

1. Expliquez en détail les méthodes 2,3,5,6,8. (Dans chaque cas, faire un schéma, expliciter les notations et les hypothèses du modèle, puis exprimer la hauteur de l'immeuble en fonction des données.)
2. Évaluer grossièrement l'incertitude de quelques unes des méthodes (1→8). Pour fixer les idées on supposera que le baromètre fait environ 10 cm de côté et l'immeuble de l'ordre de 50 m de haut.

Conclure.

A votre avis, quelle est la morale de cette histoire ?

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DES TD

Chapitre 1 : Statique du solide

Exercice 1: Problème masse-ressort

Position d'équilibre stable avec $y_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$

Avez-vous vérifié l'homogénéité ? La logique de la formule obtenue ?

Exercice 2: Calculs de moments

1. $\mathcal{M}_{\vec{F}_0}(O) = 2 \|\vec{F}_0\| \vec{k}$
2. $\mathcal{M}_{\vec{F}_1}(O) = \|\vec{F}_1\| \vec{i} + 2 \|\vec{F}_1\| \vec{j}$
3. $\mathcal{M}_{\vec{F}_2}(O) = -\|\vec{F}_2\| \vec{i} + 2 \|\vec{F}_2\| \vec{j}$
4. $\mathcal{M}_{\vec{F}_3}(O) = \vec{0}$
5. $\mathcal{M}_{\vec{F}_4}(O) = -2 \|\vec{F}_4\| \vec{k}$
6. $\mathcal{M}_{\vec{F}_0}(A_3) = 4 \|\vec{F}_0\| \vec{k}$

Exercice 3: Pendules électrostatiques

$\alpha = 0,108 \text{ rad}$

Exercice 4: Hamac

Pour éviter la rupture des cordes, il vaut mieux un petit angle entre les cordes et l'arbre.

Exercice 5: Intérêt d'un système à poulies

Normes des tensions 1 et 2 et des réactions : $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\| = \|\vec{R}_1\| = \|\vec{R}_2\| = 250 \text{ N}$

Normes des autres tensions : $\|\vec{T}_3\| = \|\vec{T}_4\| = \|\vec{T}_5\| = \|\vec{T}_6\| = \|\vec{F}\| = 125 \text{ N}$.

Exercice 6: Équilibre d'un barreau dans un champ magnétique

$$B = \frac{mg}{I_0 L} = 20 \text{ mT}$$

Exercice 7: Balance de Coulomb

$$\text{Angle d'équilibre : } \alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{CR}}$$

Exercice 8: Mesure du coefficient de frottement

1. Composante de la réaction tangentielle selon y : $R_{Ty} = Mg \sin(\theta) - mg$ et norme de la réaction normale : $\|\vec{R}_N\| = Mg \cos(\theta)$
2. Équilibre pour $f > |\tan(\theta)| - \frac{m}{M \cos(\theta)}$
3. a) $f = 0,29$ et b) $f = 0,35$

Exercice 9: Gymnaste en équilibre ?

Angle d'équilibre : $\tan \alpha_0 = \frac{L_1}{L_2} \frac{m_1 + 2m_2}{m_2}$. Équilibre instable.

Exercice 10: Équilibre d'une étagère

2. Moments des forces :

- Moment du poids de la barre : $\mathcal{M}\vec{P}_b(Bz) = -\frac{\ell}{2}Mg$,
 - Moment du poids de l'objet en D : $\mathcal{M}\vec{P}_m(Bz) = -xmg$,
 - Moment de la tension du fil : $\mathcal{M}\vec{T}(Bz) = \ell \sin \alpha \|\vec{T}\|$,
 - Moment de la réaction du mur en B : $\mathcal{M}\vec{R}(Bz) = 0$;
3. Tension du fil : $\|\vec{T}\| = \frac{g(\ell M + 2xm)}{2\ell \sin \alpha}$ Position limite : $x_0 = \frac{\ell}{m} \left(\frac{T_{\max} \sin \alpha}{g} - \frac{M}{2} \right)$
 4. Quand l'objet est en C : $T_{\max} = \frac{g(M + 2m)}{2 \sin \alpha}$
 5. Réaction du mur en B : $R_x = \|\vec{T}\| \cos \alpha$ et $R_y = \frac{gM}{2}$

Exercice 11: Équilibre d'une barre sur une marche

3a Réaction au point C : $\|\vec{R}_c\| = \frac{mga}{h} \sin \alpha \cos \alpha$

3b Réaction en A : $R_T = \frac{mga}{h} \sin^2 \alpha \cos \alpha$ et $R_N = mg - \frac{mga}{h} \sin \alpha \cos^2 \alpha$

Exercice 12: Équilibre d'une échelle simple

1.a) Si pas de frottements, $\sum \vec{F} \neq \vec{0}$

1.b) Réaction en A : $R_A = mg$ et réaction en B et tension du fil : $R_B = T = 2(1 - \gamma)mg \tan \alpha$.

Exercice 13: Équilibre d'une tige

1. Tension du fil : $T = \frac{P}{4 \cos \alpha}$
2. Réaction du mur en O : $R_x = \frac{P}{4} \tan \alpha$ et $R_z = \frac{3}{4}P$.

Exercice 14: Échelle double

1. Réaction normale du sol : $N_0 = P$;
Réaction d'une échelle sur l'autre R_0 et tension de la corde T_0 : $R_0 = T_0 = \frac{3a}{8h}P$
2. Réactions normales du sol : $N = P + \frac{2}{3}Q$ et $N' = P + \frac{1}{3}Q$;
Tension de la corde : $T = \frac{3a}{8h} \left(P + \frac{2Q}{3} \right)$;
Réaction de l'échelle de droite sur celle de gauche : $R_y = \frac{Q}{3}$ et $R_x = T$.

Exercice 15: Équilibre d'une barre

Exercice 16: Balise en mer

2. Volume de lest : $V_{\text{lest}} = \frac{H\rho_{\text{bois}} - \rho_{\text{eau}}(H-h)}{\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{acier}}} \ell^2$

3. Masse d'acier nécessaire : $m = 51 \text{ kg}$

Chapitre 2 : Cinématique

Exercice 1: Mouvement rectiligne

- $v(t) = \ell \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t} \right)$
- $x(t) = x_0 + \ell \left(\frac{t}{t_0} + \ln \left(\frac{t_0}{t} \right) - 1 \right)$

Exercice 2: Mouvement circulaire – Vitesse et accélération angulaire

1. $\omega = 19 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

2. $\vec{v} = R\omega \vec{e}_\theta ; \vec{a} = -R\omega^2 \vec{e}_r$

3. $a = \frac{6\pi}{5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$

Exercice 3: Mouvement circulaire – Rayon

$$R = \sqrt{\frac{8^2}{2^4+4^2}} = \sqrt{2} \text{ m}$$

Exercice 4: Virage dangereux

- Accélération maximale : $|a_{max}| = (0,5 \pm 0,1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- Distance maximale parcourue : entre 2,2 et 2,3 m.

Exercice 5: Mouvement circulaire – Coordonnées

1. Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = R \cos(\omega t) \vec{e}_x + R \sin(\omega t) \vec{e}_y$

2. Équation de la trajectoire : $x^2 + y^2 = R^2$

3. Vecteur vitesse : $\vec{v} = R\omega [-\sin(\omega t) \vec{e}_x + \cos(\omega t) \vec{e}_y]$

4. En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r, \vec{v} = R\omega \vec{e}_\theta$ et équation de la trajectoire : $r = R$.

5. Accélération : $\vec{a} = -R\omega^2 \vec{e}_r + R\dot{\omega} \vec{e}_\theta$

6. Dans la base de Frenet : $\vec{a} = R\ddot{\omega} \vec{u}_T + R\omega^2 \vec{u}_N$

Exercice 6: Mouvement hélicoïdal

1. Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + v_0 t \vec{e}_z$

2. Vitesse : $\vec{v} = R\omega \vec{e}_\theta + v_0 \vec{e}_z$, de norme : $\|\vec{v}\| = \sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}$. Vecteur tangent : $\vec{u}_T = \frac{R\omega \vec{e}_\theta + v_0 \vec{e}_z}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}}$.

3. Abscisse curviligne : $\ell(t) = \sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2} t$.

4. Accélération : $\vec{a} = -R\omega^2 \vec{e}_r = \frac{R^2\omega^2 + v_0^2}{R_c} \vec{u}_N$. Rayon de courbure : $R_c = \frac{R^2\omega^2 + v_0^2}{R\omega^2}$.

Exercice 7: Spirale logarithmique

1. $v_r = r_0 a \omega e^{a\omega t}$; $v_\theta = r_0 \omega e^{a\omega t}$; $\|\vec{v}\| = r_0 \omega e^{a\omega t} \sqrt{a^2 + 1}$

2. a) $\vec{u}_T = \frac{a\vec{e}_r + \vec{e}_\theta}{\sqrt{a^2 + 1}}$; b) $\vec{u}_N = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \vec{e}_r - \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \vec{e}_\theta$

3. $\ell(t) = \frac{r_0}{a} \sqrt{a^2 + 1} (e^{a\omega t} - 1)$

4. $a_r = r_0 \omega^2 e^{a\omega t} (a^2 - 1)$ et $a_\theta = 2r_0 a \omega^2 e^{a\omega t}$

5. $a_N = \frac{(r_0 \omega)^2 e^{2a\omega t} (a^2 + 1)}{R_c}$ et $a_T = r_0 \omega^2 a e^{a\omega t} \sqrt{a^2 + 1}$

6. $R_c = r_0 \sqrt{a^2 + 1} e^{a\omega t}$

Exercice 8: Manège

1. Dans le référentiel lié au manège : $\vec{OM} = x\vec{e}_x$, $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$ et $\vec{a} = \vec{0}$.

2. Dans le référentiel terrestre : $\vec{OM} = r\vec{e}_r$, $\vec{v} = v_0\vec{e}_r + r\omega_0\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = -r\omega_0^2\vec{e}_r + 2v_0\omega_0\vec{e}_\theta$.

Exercice 9: Système d'arrosage

1. $\vec{V}_{R_0} = V \sin(\alpha) \vec{u}_r - (V \cos(\alpha) + b\omega) \vec{u}_\theta = [V \sin(\alpha + \theta) + b\omega \sin(\theta)] \vec{u}_x - [V \cos(\alpha + \theta) + b\omega \cos(\theta)] \vec{u}_y$

2. $V \cos(\alpha) + b\omega = 0$

Exercice 10: Mouvement cycloïdal

2. Équations paramétriques

- (a) $x = R(\theta - \sin \theta)$ et $y = R(1 - \cos \theta)$
- (b) $\omega = \frac{v}{R}$
- (c) $x = R(\omega t - \sin(\omega t))$ et $y = R(1 - \cos(\omega t))$

3. Vitesse

(a) $v_x = R(\omega - \omega \cos(\omega t))$ et $v_y = R\omega \sin(\omega t)$

(b) $\|\vec{v}\| = \sqrt{2R\omega \sin(\frac{\omega t}{2})}$

(c) $L = 8R$

4. Accélération

(a) $a_x = R\omega^2 \sin(\omega t)$ et $a_y = R\omega^2 \cos(\omega t)$

(b) non

Chapitre 4 : Dynamique, lois de Newton

Exercice 1: Champ électrostatique

$$\alpha = 0,108 \text{ rad}$$

Exercice 2: Pendule simple

1. Équation différentielle : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$
2. Pour de petits angles on obtient $\theta(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t)$
3. Tension du fil : $\|\vec{T}\| = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$

Exercice 3: Jet de pierre

Partie A : frottements négligés

1. Accélération :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases}$$

Vitesse :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin \alpha \\ v_z = 0 \end{cases}$$

Position :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha \\ y = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha \\ z = 0 \end{cases}$$

2. Mouvement dans le plan xOy .

3. Point d'altitude maximale :

$$\overrightarrow{OM_1} \begin{cases} x_1 = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \\ y_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{cases}$$

Point de chute sur le sol :

$$\overrightarrow{OM_2} \begin{cases} x_2 = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

4. Équation de la trajectoire : $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$

5. Le point $A(x_A, y_A)$ est atteint par le projectile si $y_A \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx_A^2}{2v_0^2}$.

Partie B : présence de frottements

1. Vitesse

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \exp\left(\frac{-kt}{m}\right) \\ v_y = \left(v_0 \sin \alpha + \frac{gm}{k}\right) \exp\left(\frac{-kt}{m}\right) - \frac{gm}{k} \end{cases}$$

Position :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = \frac{-m}{k} v_0 \cos \alpha \left(\exp\left(\frac{-kt}{m}\right) - 1\right) \\ y = \frac{-m}{k} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{gm}{k}\right) \left(\exp\left(\frac{-kt}{m}\right) - 1\right) - \frac{gmt}{k} \end{cases}$$

2. Vitesse limite :

$$\overrightarrow{v_{lim}} \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = -\frac{gm}{k} \end{cases}$$

Exercice 4: Chute d'une bille

Correction détaillée en DM

Exercice 5: Masse + ressort

2. Distance d'équilibre : $x_e = \ell_0 + \frac{mg}{k} \sin \alpha$
3. Équation différentielle du mouvement : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g \sin \alpha + \frac{k}{m}\ell_0$.

4. Solution : $x(t) = x_e + d \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$.

Exercice 6: Mouvement sur un plan incliné avec frottements solide-solide

- Temps de montée t_1 : $t_1 = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}$.
- Temps de descente t_2 : $t_2 = t_1 + \sqrt{\frac{-2x_{max}}{g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}}$.

Exercice 7: Spectromètre de masse

Accélération par un champ électrique : $v_0 = \sqrt{\frac{2ZeE_0L}{m}}$

Analyse par le champ magnétique : $B_0 = \frac{mv_0}{ZeR}$

Exercice 8: Cyclotron

correction à venir

Exercice 9: Mouvement d'un pendule

1. Moment d'inertie de l'ensemble : $J_0 = \left(\frac{m}{3} + M\right)\ell^2$
2. Moment résultant par rapport à l'axe (Oz) : $\mathcal{M}_z = -\left(\frac{m}{2} + M\right)g\ell \sin \theta$
3. Il existe deux positions d'équilibre : l'une stable pour $\theta_{eq1} = 0$, l'autre instable pour $\theta_{eq2} = \pi$
4. Équation différentielle : $\ddot{\theta} + \left(\frac{m+2M}{2J_0}\right)g\ell\theta = 0$
5. Période $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell(m+3M)}{3g(m+2M)}}$
6. Équation différentielle : $\ddot{\theta} + \frac{K}{J_0}\dot{\theta} + \left(\frac{m+2M}{2J_0}\right)g\ell\theta = 0$

Exercice 10: Mouvement d'un cadre rigide

1. Force $F = \frac{2C_T\alpha}{a \cos \alpha}$

2.a) Équation différentielle : $\ddot{\theta} + \frac{2C_T}{J_{cadre}}\theta - \frac{Fa}{J_{cadre}}\cos \theta = 0$

2.b) Expression de l'angle : $\theta(t) = \alpha + A \cos(\omega_0 t + \phi)$, avec $\omega_0 = \frac{2C_T + Fa \sin \alpha}{J_{cadre}}$

Exercice 11: Machine d'Atwood

1.a) $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\|$

1.b) Le système est alors en équilibre ou en mouvement rectiligne uniforme.

1.c) Accélérations des deux masses : $\ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2$

1.d) Accélération de la masse m_1 : $\ddot{z}_1 = g\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)$

1.e) Altitude $z_1(t) = z_{10} + \frac{gt^2}{2}\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)$

2.b) Équation différentielle : $\ddot{\theta} + \frac{T_2 - T_1}{M_p R} = 0$

2.c) $z = R\theta$

2.d) Accélération $\ddot{z} = \frac{(m_1 - m_2)g}{M_p + m_1 + m_2}$ et équation horaire : $z(t) = \frac{(m_1 - m_2)g}{M_p + m_1 + m_2}\frac{t^2}{2}$

Exercice 12: Démarrage d'un véhicule à traction avant

2. $T_{1x} = \frac{C}{R}$
3. $T_{2x} = 0$
4. $N_{2y} = -F_{2y}$
5. $T_{1x} = M\ddot{x}$
6. $N_{1y} + N_{2y} = Mg$
7. Le TMC amène à $\frac{L}{2}Mg - LN_{2y} + RT_{1x} = 0$
9. Couple moteur maximal : $C < \frac{LR\mu Mg}{2(L + \mu R)}$ et accélération maximale : $\ddot{x}_{max} = \frac{\mu g L}{2(L + \mu R)}$

Chapitre 4 : Dynamique, théorèmes énergétiques

Exercice 1: Descente à ski

1. Vitesse en B : $v_B = 37 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
2. Norme de la force de frottement : $\|\vec{f}\| = 56 \text{ N}$

Exercice 2: Vitesse d'échappement

$$v_o = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Exercice 3: Fête foraine

1. Vitesse en C : $v_C = \sqrt{2gr(1 - \cos \beta)} = v_B$
2. Norme de la force à appliquer : $\|\vec{F}\| = \frac{2mgr}{\ell}(1 - \cos \beta) = 25 \text{ N}$
3. Vitesse en I : $v_I = \sqrt{2gr(\cos \alpha - \cos \beta)} = 6 \text{ ms}^{-1}$
4. Norme de la force exercée par les rails : $\|\vec{R}\| = mg(3 \cos \alpha - 2 \cos \beta) = 79 \text{ N}$
5. Durée du trajet de A vers B : $t_{AB} = \frac{\ell}{\sqrt{2gr(1 - \cos \beta)}} = 1,4 \text{ s}$
Durée du trajet de B vers A : $t_{BA} = \frac{\ell}{2\sqrt{2gr(1 - \cos \beta)}} = 0,7 \text{ s}$

Exercice 4: Fête foraine, la suite

1. Force de frottement : $\|\vec{F}_f\| = \frac{mgr(1 - \cos \beta)}{r\beta + \frac{\ell}{2}}$
2. Force exercée par le joueur : $\|\vec{F}\| = \frac{mgr(1 - \cos \beta)(3\ell + 4r\beta)}{\ell(r\beta + \frac{\ell}{2})}$
3. Condition de non-immobilité en J : $\|\vec{F}_f\| < mg \sin \beta$

Exercice 5: Tir d'un projectile

2. Vitesse en O : $v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta\ell$
4. Équation de la trajectoire : $Y = X \tan \alpha - \frac{gX^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$, avec une origine du repère (O', X, Y) à la sortie du tremplin

5. Compression du ressort : $\Delta\ell = \sqrt{\frac{mgx_S}{k \sin(2\alpha)}}$

6. $\Delta\ell = 2,4 \text{ cm}$

Exercice 6: Décollage à partir d'une sphère

Altitude de décollage : $z = \frac{5R}{3}$

Exercice 7: Saut à l'élastique

Problème ouvert, pas de correction

Exercice 8: Une particule chargée dans un champ magnétique

correction à venir

Exercice 9: Système à ressort

2.a) Résultante : $X = -k(\sqrt{\ell^2 + x^2} - \ell_0) \frac{x}{\sqrt{\ell^2 + x^2}}$

2.b) Énergie potentielle : $E_p = \frac{kx^2}{2} - k\ell_0(\sqrt{\ell^2 + x^2} - \ell)$

2.c) L'expression devient alors : $E_p = \frac{kx^2}{2} - \frac{k\ell_0 x^2}{2\ell}$

2.d) Équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{k}{m}(1 - \frac{\ell_0}{\ell})x = 0$

Exercice 10: Rotation d'une barre reliée à un ressort

1. Tension exercée par le ressort : $T_0 = \frac{mg}{2}$

2. Période des petites oscillations : $T = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{J}{k}}$

Exercice 11: Détermination expérimentale de la ténacité

1.a) Position du centre de gravité : $\overrightarrow{OG} = \frac{2m+M}{2(m+M)} \overrightarrow{OA}$

1.b) Moment d'inertie du bras : $J = m\ell^2 + \frac{M\ell^2}{3} = 4,44 \text{ kgm}^2$

2.a) Équation différentielle : $\ddot{\theta} + \frac{g\ell}{2J}(2m+M)\sin\theta = 0$

2.b) Énergie cinétique : $E_k(\theta=0) = \frac{3}{4}g\ell(2m+M)$ et vitesse angulaire : $\dot{\theta}(\theta=0) = \sqrt{\frac{3g\ell}{2J}(2m+M)}$

3. Énergie de rupture : $G_e = \frac{g\ell}{2S}(2m+M) \left(\frac{1}{2} + \cos\alpha \right)$

Exercice 12: Qu'est-il plus facile de faire tenir en équilibre ?

cf. correction IEFS2 2022-23

Exercice 13: Lancement d'un projectile à l'aide d'un ressort

1. $h = 32 \text{ cm}$

2. $h = 22 \text{ cm}$

Exercice 14: Système à ressort (suite)

correction à venir

Exercice 15: Dérapage

correction à venir

Exercice 16: Looping

$v_{min} = 25,13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

