

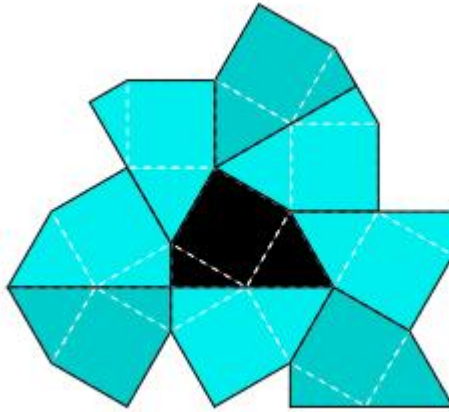
2024 第十三届认证杯数学中国数学建模国际赛（小美赛）赛题

<http://mcm.tzmcm.cn>

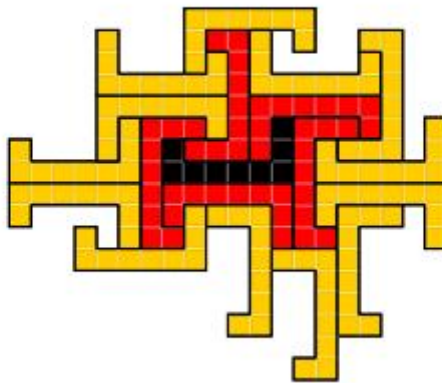
问题 B (MCM) A 大有限海斯数

被称为平面平铺的一类问题涉及使用单个多边形，对其进行旋转、平移和镜像，以平铺整个平面而不留任何间隙或重叠。有些多边形可以平铺，如正方形，而有些多边形则不行，如五边形。现在我们将重点讨论那些无法平铺的多边形。

举例来说，当一个五边形被放置在一个平面内时，要利用同一个五边形将其整个圆周围起来而不留空隙是不可行的。然而，有一些多边形的构造方式可以使其覆盖整个圆周（圆晕）而不留空隙，但却无法继续下去。Heinrich Heesch 于 1968 年绘制的图形就是一个例子。



此外，有些多边形可以扩展到包括额外一周的边，但却无法进一步扩展。安妮·方丹（Anne Fontaine）于 1991 年绘制的图形就是一个很好的例子[1]。

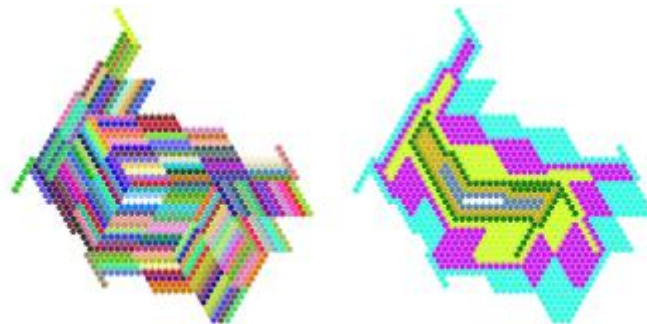


在这种情况下，能填满的最大圆圈数被称为 Heesch 数。

正式的数学定义如下[2]：平面的细分是指将平面分割成更小的区域或块。瓦片的第零冕定义为瓦片本身。对于 $k > 0$ ，第 k 个日冕被定义为与第 $(k - 1)$ 个日冕共享一个边界点的瓦片集合。

给定图形 S 的海斯数定义为将平面分割成更小区域（称为瓦片）的最大 k 值。一个图形 S 的海斯数定义为最大值 k ，即存在一个平面平铺和平铺中的一个瓦片 t ，对于该瓦片 t 的第 zeroth 至 k th coronas 中的所有瓦片都是简单相连的区域。关于这个问题的一些研究对这个定义进行了修改，额外要求 t 的第 zeroth 至 k th 冠状面的结合是一个简单连接区域。

Heesch 问题的目的是确定理论上的最大 Heesch 数。已知最大海希数为 6，如下图所示，该图由博扬-巴西克（Bojan Bažić）于 2020 年绘制[3]。



任务 1. 目标是构建一个高效的数学模型和一种算法，以创建具有尽可能大的 Heesch 数的多边形。论文应详细描述算法的原理和实现过程，以及最终结果。

不一定要达到或超过最著名的结果；但是，如果算法能自动产生尽可能大的结果，则是令人满意的。

2. 2. 请估计该算法的复杂度上限。

参考文献

- [1] Fontaine, Anne. "An infinite number of plane figures with Heesch number two". Journal of Combinatorial Theory. Series A. 57 (1): 151156, 1991.
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Heesch%27s_problem
- [3] Bažić, Bojan. "A Figure with Heesch Number 6: Pushing a Two-DecadeOld Boundary". The Mathematical Intelligencer. 43 (3): 5053, 2021.