

凸包围多面体生成算法及应用

(申请清华大学工学硕士学位论文)

培 养 单 位: 软 件 学 院

学 科: 软 件 工 程

研 究 生: 唐 磊

指 导 教 师: 雍 俊 海 教 授

二〇一五年三月

Convex Bounding Polyhedron Construction and its Application

Thesis Submitted to

Tsinghua University

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Master of Science

in

Software Engineering

by

Tang Lei

Thesis Supervisor : Professor Yong Junhai

March, 2015

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容。

本人保证遵守上述规定。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

作者签名：_____

导师签名：_____

日 期：_____

日 期：_____

摘 要

包围盒在计算机图形学和计算几何领域中应用广泛,常用于加速几何求交、光线跟踪和碰撞检测等多种算法.凸包围多面体是包围盒的推广,对于一般不规则形体,可达到比包围盒更好的紧致程度.

本文提出一种快速构造给定点集的紧致凸包围多面体的方法.该方法首先根据点集的近似凸包,通过 k -means 算法生成 k 个截面法向,然后利用 GPU 沿各法向搜索切点构成截面,最后求交构成多面体.实验结果表明,与同类算法相比,该方法能够更快地构造给定点集更紧致的凸包围多面体.

并能有效加速碰撞检测算法.

本文的创新点主要有:

- 用例子来解释模板的使用方法;
- 用废话来填充无关紧要的部分;
- 一边学习摸索一边编写新代码。

关键词: 凸包围体; 近似凸包; 并行计算; 碰撞检测

Abstract

[TODO] An abstract of a dissertation is a summary and extraction of research work and contributions. Included in an abstract should be description of research topic and research objective, brief introduction to methodology and research process, and summarization of conclusion and contributions of the research. An abstract should be characterized by independence and clarity and carry identical information with the dissertation. It should be such that the general idea and major contributions of the dissertation are conveyed without reading the dissertation.

An abstract should be concise and to the point. It is a misunderstanding to make an abstract an outline of the dissertation and words “the first chapter”, “the second chapter” and the like should be avoided in the abstract.

Key words are terms used in a dissertation for indexing, reflecting core information of the dissertation. An abstract may contain a maximum of 5 key words, with semi-colons used in between to separate one another.

Key words: T_EX; L^AT_EX; CJK; template; thesis

目 录

第 1 章 引言	1
1.1 相关背景	1
1.2 凸包围体	1
1.2.1 AABB 包围体	2
1.2.2 OBB 包围体	3
1.2.3 Sphere 包围体	3
1.2.4 k -DOP 包围体	4
1.2.5 Convex hull 包围体	5
1.2.6 其他包围体	6
1.2.7 包围体的应用	7
1.3 碰撞检测算法	9
1.3.1 碰撞检测算法的分类	9
1.3.2 基于包围体树的碰撞检测算法	10
1.4 本文主要内容	12
第 2 章 凸包围体生成算法	13
2.1 截面法向的生成	14
2.1.1 近似内凸包生成聚类样本法向集	14
2.1.2 聚类初始点的选择	15
2.1.3 聚类确定法向	16
2.2 搜索截面	17
2.2.1 基于着色器的并行算法	18
2.2.2 基于 CUDA 的并行算法	20
2.3 截面求交算法	21
2.3.1 枚举法	21
2.3.2 对偶映射算法	24
2.4 实验结果	24
第 3 章 基于 k -CBP 碰撞检测算法	25
3.1 k -CBP 的相交测试算法	25
3.1.1 基于 AABB 树的算法	25
3.1.2 基于 GJK 的算法	25

3.2 三角网格的相交测试算法	25
3.3 基于 k -CBP 的碰撞检测算法	25
3.4 实验结果	25
第 4 章 总结与展望	26
4.1 总结	26
4.2 展望	26
参考文献	27
致 谢	30
声 明	31
附录 A 基于着色器的并行算法关键代码	32
A.1 基于深度缓冲的算法	32
A.2 基于乒乓技术的算法	32
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果	34

主要符号对照表

BV	包围体 (Bounding Volume)
CH	凸包 (Convex Hull)
τ	包围体的紧致性
ΔG	活化自由能 (Activation Free Energy)
χ	传输系数 (Transmission Coefficient)
E	能量
m	质量
c	光速
P	概率
T	时间
v	速度
劝学	<p>君子曰：学不可以已。青，取之于蓝，而青于蓝；冰，水为之，而寒于水。木直中绳。（车柔）以为轮，其曲中规。虽有槁暴，不复挺者，（车柔）使之然也。故木受绳则直，金就砺则利，君子博学而日参省乎己，则知明而行无过矣。吾尝终日而思矣，不如须臾之所学也；吾尝（足齐）而望矣，不如登高之博见也。登高而招，臂非加长也，而见者远；顺风而呼，声非加疾也，而闻者彰。假舆马者，非利足也，而致千里；假舟楫者，非能水也，而绝江河，君子生非异也，善假于物也。积土成山，风雨兴焉；积水成渊，蛟龙生焉；积善成德，而神明自得，圣心备焉。故不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海。骐骥一跃，不能十步；弩马十驾，功在不舍。锲而舍之，朽木不折；锲而不舍，金石可镂。蚓无爪牙之利，筋骨之强，上食埃土，下饮黄泉，用心一也。蟹六跪而二螯，非蛇鳝之穴无可寄托者，用心躁也。——荀况</p>

第 1 章 引言

本章将介绍本文的相关背景，常用的凸包围体种类及应用，常见的碰撞检测算法及本文的结构安排。

TODO 图表用中文表示

1.1 相关背景

随着计算机软硬件技术的不断升级和发展，人们的衣食住行都越来越离不开计算机。计算机图形学、计算机动画和虚拟现实等相关技术已经融入人类的日常生活当中，成为人们生活的重要组成部分，如医学领域的虚拟手术、设计领域的三维建模造型技术，日常生活中的电影游戏等等。

凸包围体技术在计算机图形学领域里的各种算法中发挥着重要作用，如优化渲染和建模，加速求交、碰撞检测等。以求交算法为例，如果两个模型相交，则对应的凸包围体一定相交，若凸包围体不相交则原始模型一定不相交。凸包围体作为原始模型的近似，通常情况下，判断凸包围体是否相交比判断原始模型相交更简单，因此利用这个性质就可以加速模型之间的相交检测。计算机图形学领域里常见的 AABB（Axis Aligned Bounding Box）包围盒和计算几何领域里的凸包都是凸包围体。凸包围体有多种应用，主要是利用其“凸”的性质和可用来近似被包含模型的特征，应用于模型化简、碰撞检测等。在几何计算过程中，包围体也用于相交等操作中进行预判和剪枝以提升整体算法的运行效率。

碰撞检测问题是计算机图形学、虚拟现实等领域中的研究热点，是计算机模拟真实环境中不可或缺的技术，在物理仿真及游戏领域里应用广泛。例如在游戏中，碰撞检测技术增强了游戏的真实性，游戏中的角色行走不可穿墙、角色中弹而亡等等都离不开碰撞检测技术。

下面将分别介绍凸包围体相关技术和碰撞检测相关算法。

1.2 凸包围体

对于“凸”定义如下（以二维欧式空间为例）：给定点集 $S = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq E^2$ ，如果有 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in R^n, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ 且 $\min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \geq 0$ ，我们称点 $p = [p_1, \dots, p_n]\lambda = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_n p_n$ 为 S 的一个凸组合。一个点集 $P \subseteq E^2$ 为凸的集合，当且尽当 P 的子集的凸组合仍然是 P 的子集。更形象地讲，如果一个二维欧

式空间的多边形是凸的，那么连接任意多边形内的两点构成的线段仍然在这个多边形的内部。

凸包围体能用于在原始模型之间的相关计算（遮挡测试、相交测试等）之前进行预处理判断和裁剪的理论基础正是基于此。通常来讲（无特别强调，本文不考虑包围体比原始模型还复杂的情况），凸包围体之间的计算比包含的原始模型计算更简单，当凸包围体之间没有相交或遮挡时，原始模型一定没有相交或遮挡。

根据具体的应用场景的不同有不同形状的凸包围体，常见的如下。

1.2.1 AABB 包围体

AABB（Axis Aligned Bounding Box）包围体是最常见最简单的包围体，俗称包围盒，其方向始终沿着坐标轴方向^[1]。在平面中就是包含二维模型的矩形，如图1.1所示，为平面图形 Bunny 的 AABB 包围体（二维情况称包围矩形更合适，但为了统一，这里统称包围体，后同）。对应到三维空间中就是沿坐标轴方向包含模型的最小的长方体。

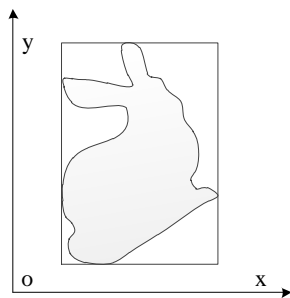


图 1.1 AABB 包围体

AABB 包围体的数据结构通常有 3 种方式：(1) 存储 AABB 包围体对角线上的两个极点， $Point_{min}$ 和 $Point_{max}$ ，著名的计算几何库 CGAL^① 以此种方式存储；(2) 存储 AABB 包围体的中心点和各个方向的半径， $Point_{center}$ 和 $Vector_{radius}$ ，如 SOLID^[1]；(3) 存储 AABB 包围体的极小点和各个方向的延伸长度^[2]， $Point_{min}$ 和 $Vector_{extent}$ 。

一方面 AABB 包围体之间的相交测试较简单，以数据结构为存储两个极点为例，只需要比较各个坐标值之间的大小即可。但另一方面，通常情况下与原始模型的近似性较差，因其包围体的边沿着坐标轴方向可能会留较多的空白空间。

① CGAL, Computational Geometry Algorithms Library, <http://www.cgal.org>

1.2.2 OBB 包围体

OBB (Oriented Bounding Box) 包围体是带方向的包围盒, 可看作是 AABB 包围体沿任意方向转动一定角度后构成的包围体, 因此通常情况下, OBB 较 AABB 而言可以更紧致地贴近原始模型。如图1.2所示为平面图形 Bunny 的 OBB 包围体。

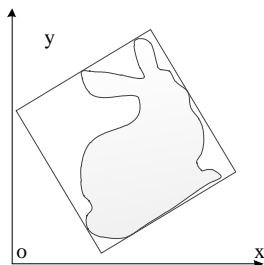


图 1.2 OBB 包围体

与 AABB 类似, OBB 包围体的数据存储方式也可以有多种, 最常用的是存储中心点, 局部坐标架以及各个方向上的半径^[3]。因为 OBB 包围体的方向是任意的, 有不少学者研究如何得到更加紧致的 OBB。

最早可追溯到由 O'Rourke^[4] 提出的 $O(n^3)$ 算法, 文献 [5] 中提出了一种方法理论上可以在 $O(n + 1/\epsilon^{4.5})$ 复杂度内计算出一个近似最小 OBB (ϵ 为近似误差, 即得到的 $V \leq (1 + \epsilon) \times V_{min}$, 其中 V 表示 OBB 的体积, V_{min} 为最小 OBB 的体积), 实际应用中通常实现的算法复杂度为 $O(n \log n + n/\epsilon^3)$ 。C.K.Chan^[6] 提出了另外一种迭代的算法可以计算出误差范围内最小的 OBB 包围体, 该算法适用于点数量较多 (超过 1 万个点) 的模型。

与 AABB 相比, OBB 之间的相交测试稍复杂, 需将二者转换到同一坐标系下进行计算, 但其能更好的逼近原始模型。

1.2.3 Sphere 包围体

球形 (Sphere) 包围体, 也称包围球 (二维情况下即为包围圆, 下同), 即用一个半径尽量小的球包住给定所有点, 该问题的求解是计算几何中的经典问题最小包围球的变种。如图1.3所示为平面图形 Bunny 的 Sphere 包围体。

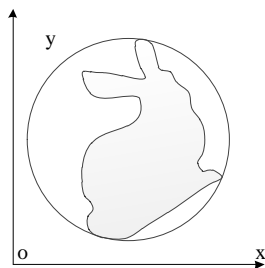


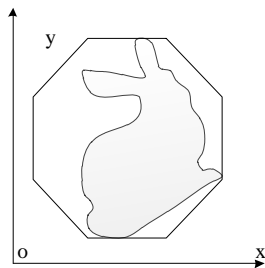
图 1.3 Sphere 包围体

包围球的数据结构较简单，只需要球心和半径。一种最简单的计算一个包围球的方法是将相应 AABB 包围体的中心点作为球心，半径是为 AABB 各方向半径的最大值，这种方法虽然计算较快，但得到的包围体往往不够紧致。为了得到最小包围球，E. Welzl^[7] 提出了一种线性的随机算法求出最小包围球。T. Larsson^[8] 提出了一种快速简单的算法，该算法基于选择 k 个极点生成 $k/2$ 个方向构造包围球，因而称为 EPOS (Extremal Points Optimal Sphere) 算法，可以自定义 k 的值，能够给执行时间和包围盒紧致性之间进行调整折衷，提高了灵活性。

测试两个包围球是否相交较简单，只需判断两个球心之间的距离是否大于两个球半径之和即可。

1.2.4 k -DOP 包围体

k -DOP (Discrete Orientation Polytope) 包围体是一个由 k 个固定方向的半平面相交构成的凸多面体，其最早思想来源于 TL. Kay^[9] 等人提出的用于解决光线追踪的问题， k -DOP 术语是由 J. Klosowski 等人^[10] 在 1998 年用于解决碰撞检测问题时提出的，有学者也称 k -DOP 为 k -FDH (k -Fixed Directions Hull)^[11]。在二维 (三维) 平面上， k -DOP 就是一个由 $k/2$ 对平行的固定方向的边 (面) 围成的凸多边形 (多面体)，其中 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$ ($k \geq 6$)。如图 1.4 所示，为平面图形 Bunny 的 8-DOP。

图 1.4 k -DOP 包围体 ($k=8$)

对于 k -DOP 中的每一个方向，可以由相应边 (面) 的法向决定，其数据结构一般用 $k/2$ 个半平面的法向，再加上模型在各个方向上的投影的极值即可。因为

k -DOP 的方向固定, k 值确定后, 相应的法向也随即确定, 所以只需要存储各个方向的极值即可。当 k -DOP 用于碰撞检测或可视化时, 一般还需存储包围体的各个顶点。

与其他几种包围盒相比较而言, k -DOP 是取包围体存储计算和相交测试耗费时间的一个折衷, 且可以通过修改 k 的值来提高包围体的灵活性。

1.2.5 Convex hull 包围体

凸包 (Convex hull) 是在计算几何中出现的概念, 被定义为包含点集模型的最小凸集^[12], 因此 Convex hull 包围体是最紧致的凸包围体, 能够更好地近似模型本身。包围体的紧致程度以凸包为衡量标准, 一个包围体的紧致性 τ 按照如下公式计算:

$$\tau = \frac{V(CH)}{V(BV)} \quad (1-1)$$

其中, $V(CH)$ 为凸包的体积, $V(BV)$ 为包围体的体积, 按照此公式计算出来的 τ 越接近 1 表明其越紧致, 凸包最紧致, 其紧致性值 1。

图1.5为二维凸包的示例。

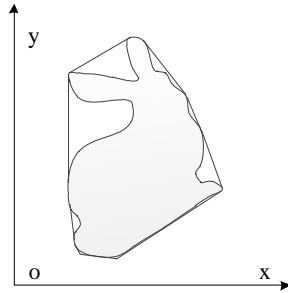


图 1.5 Convex hull 包围体

常用的凸包构造算法有 Gift wrapping^[13], 复杂度最坏情况下为 $O(n^2)$, 构造凸包的算法时间复杂度下限为 $O(n \log n)$, 如 Preparata 提出的分治算法^[14]。当模型点集较大时, 包围体涉及到的面片数量太多, 做相交测试等相关计算时耗费时间较长, 同时也耗费较多存储空间。因此 Convex hull 包围体不太适用于大模型。为此有学者在一些应用中用到近似凸包, 近似凸包可分为三类: 近似外凸包、近似内凸包和近似凸包^[15], 近似内凸包完全在精确凸包内部, 近似外凸包完全包含精确凸包, 近似凸包即与精确凸包有相交的地方。文献 [16,17] 介绍了两种计算近似内凸包的算法, 文献 [18] 介绍了一种计算二维近似外凸包算法, 本文算法在生成法向时就借鉴了文献 [16] 中的近似凸包算法。

1.2.6 其他包围体

除了以上几种常见的凸包围体外，不同学者在特定领域里也研究出以下另外几种包围体：

(1) **Tribox** 可以看作是 k -DOP 的一种特例，其中，二维中 $k = 8$ ，三维中 $k = 18$ 。文献 [19] 中提出的方法可以方便构造 Tribox 层次结构，并应用于模型分解中，当投影方向固定时，对于运动对象，更新其 Tribox 包围体也比较方便。

(2) **Swept-sphere** 是由 Eric.Larsen 等人^[20]提出的一种用于查询两个物体之间准确和近似相隔距离的解决方案，因而也用于碰撞检测的应用当中，该包围体有多种变种。原文中给出了球沿直线做拉伸构成的 Line-swept-sphere（如图1.6(e)所示）以及沿矩形拉伸构成的 Rectangle-swept-sphere 等阐述，并提出了构造层次结构包围体的算法，还对哪些包围体合适做碰撞检测，哪些包围体合适做最近距离计算做了分析和说明，更多内容可以参考文献 [20]。

(3) **Sphere-shell** 文献 [21] 给出了一种“球壳”（Sphere-shell）包围体，该包围体由两个同球心不同半径的球中间围成的壳与锥点为球心的锥面相交部分构成，如图1.6(b)所示。这种球壳包围体有利于非结构化的模型、多边形集合（Polygon soups）模型之间（如简单多边形，样条曲面构成的模型）的相隔距离计算或者进行碰撞检测。

(4) **Zonotopes** 2003 年，Leonidas J.Guibas^[22]等人利用对偶的方法提出了一种用线段表示三维包围盒的隐式表达法，称其为 Zonotopes（二维称为 Zonogon），这种方法不用显示描述记录构成包围盒的多面体的每个面，节省存储，而同样能够在较快的时间内进行碰撞检测等。

(5) 其他还有如图1.6(a)所示的圆柱形^[23]、图1.6(c)所示的圆锥形^[24]和如图1.6(d)所示的椭球形^[25]等等包围体。

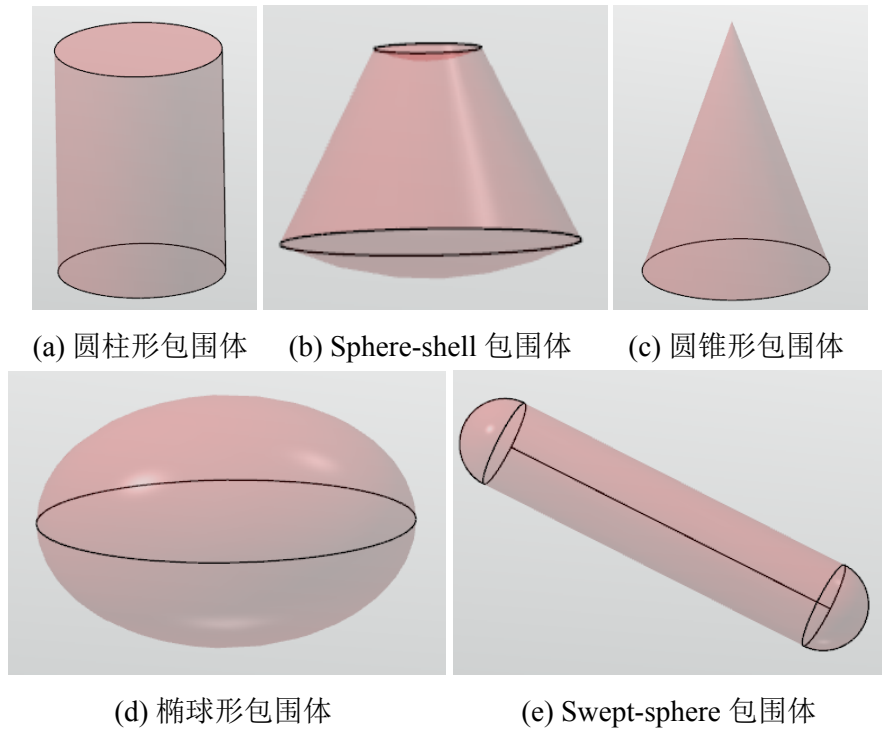


图 1.6 其他包围体

1.2.7 包围体的应用

包围体常见的应用领域有真实感渲染如可见面判别、视域剔除^[26]，光线追踪^[27]等。在光线追踪算法中，包围体用于检测光线是否与物体相交，如果光线没有与包围体相交，则肯定不会与包围体内的物体模型相交，进而就不用渲染显示该物体。另外更常见的应用就是碰撞检测^[28]，大多数碰撞检测算法都用到了各式各样的包围体以加速，如 [29–34] 等。

有不少文献将包围体和模型简化技术结合起来，例如 Kai Huebner 等人^[35]在利用文献 [5] 中提出的构造最小 OBB 包围体算法的基础上将物体分解成多个 OBB 包围体，用这些 OBB 包围体近似原始模型用于机器人抓取中，如图 1.7(a) 所示。类似的还有 Sphere 包围体的分解^[36]（如图 1.7(b)），Tribox 的分解^[19]等。

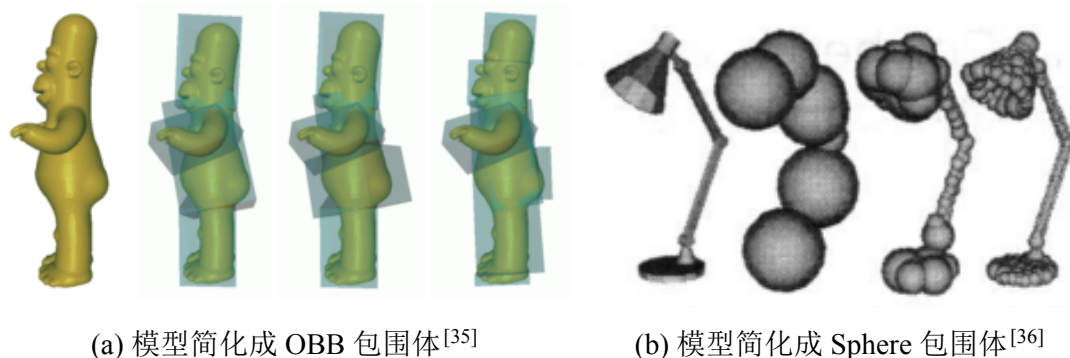
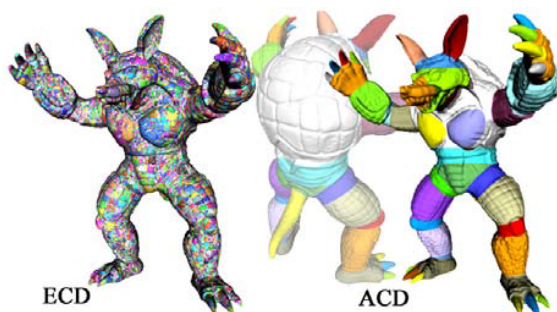


图 1.7 包围体应用于模型简化

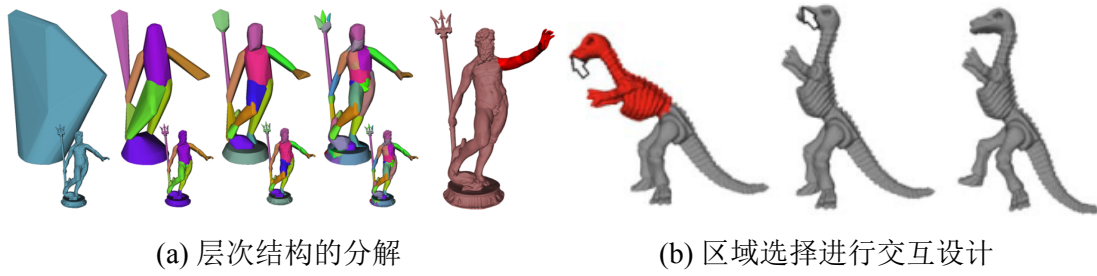
Jyh-Ming Lien^[37] 等人在 06 年提出一种方法可以将给定的多边形（包括含有孔洞的）分解成多个凸多边形，并提供不同种精度的分解，可以应用于 LoD（Level of Detail，多层次细节），并在 07 年将其扩展到三维^[38]，即提出了一种方法将原始实体模型近似为层次结构的凸包围多面体，如图1.8 所示，对图中的原始模型进行准确凸分解（ECD，Exact Convex Decompositions）将得到 726240 个组成部分，而近似凸分解（ACD，Approximate Convex Decompositions）仅得到 98 个组成部分，同时保持了原始模型的大致形状，这大大加速了渲染过程。

图 1.8 层次结构凸包围多面体的精确构造和近似构造^[38]

这种分解还可以应用于多种应用，例如运动规划（Motion planning），网格生成（Mesh generation），点定位（Point location）问题等等，更多内容可以参考^[39]以及 Jyh-Ming Lien 的博士学位论文^[40]。

文献^[41] 利用一种类似的方法将原始 3D 模型分解成一个具有层次结构的模型（图1.9(a)所示），最顶层将是整个模型的凸包。将该算法应用到 3D 编辑环境中，能够更加方便地让用户选择模型的某个部分进行交互设计。效果如图1.9(b) 所示，用户选择模型的头部，并进行拖拽能够较快速得到模型新的外观。^①

① 详情可参考视频：<http://www.readcube.com/articles/10.1111/j.1467-8659.2008.01271.x>

图 1.9 层次结构的凸包围体及其应用于交互设计^[41]

随着计算机软件技术和硬件的发展，有不少并行算法来计算包围体。文献^[42]利用 Intel 单指令多数据流（Single Instruction Multiple Data，简称 SIMD）SSE 指令集和 OpenMP 实现了对 AABB，OBB 和 k -DOP 的计算。文献^[43]提出了在统一计算设备架构（Compute Unified Device Architecture，简称 CUDA，后同）平台上基于 GPU 构造 AABB 包围体树的方法并应用于光线追踪。

1.3 碰撞检测算法

碰撞检测是许多应用的基础，例如在 3D 游戏，物理仿真，机器人，虚拟现实等。本节将就碰撞检测问题的分类和基于包围体树的算法进行阐述。

1.3.1 碰撞检测算法的分类

碰撞检测算法按照不同的分类标准可以有不同的分类方法。根据其利用的加速结构不同大致可以分为两类，一类是空间划分树（Spatial Partition Tree，四叉树，八叉树，KD 树等），如文献^[44]就提出了一种基于 BSP 的算法应用于 3D 游戏中的碰撞检测。另外一种就是层次结构包围体（Bounding Volume Hierarchies，简称 BVH，也称包围体树），如在 1.2 提到的 AABB，OBB 等包围体树。包围体树跟常见的空间划分树最大的区别就是，在 BVH 中的两个或多个包围体可以包含相同的空间，而空间划分树的每个划分结构是分离的，且在 BVH 中，父节点不一定必须完整包含子节点，只需要包含子节点对应原始物体的那部分即可^[2]。根据参与碰撞检测的物体模型的表现形式，又可以分为凸体模型或凹体模型，多边形或者三角网格模型，CSG（Constructive Solid Geometry，构造实体几何）模型，隐式方程或者参数表达曲面模型等，例如文献^[45]就讨论了计算机动画系统中基于 CSG 模型的碰撞检测算法，GJK 算法^[46]就是针对凸体模型之间的碰撞检测算法。根据碰撞检测的模拟环境划分，又可以分为成对（Pair Processing）碰撞检测和多体（Nbody Processing）碰撞检测，刚体和柔性模型的碰撞检测以及静态和动态（连续）碰撞检测^[47]。文献^[48]从碰撞检测的解决策略上做了系统的分类和总

结，文中提到目前的碰撞检测都是从几何或代数的方法进行求解，其中几何方法主要利用投影、采样或者二者的结合的技术进行处理。

随着 3D 扫描仪的出现，近年来也出现了一些基于点云的碰撞检测算法。Klein Jan 等人^[49]首次在 EuroGraphics 04 上提出了点云的碰撞检测概念，同样利用了层次结构包围体进行加速检测，并提出了一个给定容差的判断点云模型之间是否相交的算法。文献^[50]将 AABB 包围体和 R 树结合起来，并从 OAABB（Overlapped AABB）中找出是否含有一个模型的点在容差范围内逼近另外一个点云模型以此判断是否发生相交。

随着计算机图形卡的产生，又不断涌现出基于 GPU 的碰撞检测并行算法，如文献 [51,52] 等，利用 GPU 多线程技术提高碰撞检测的效率。

1.3.2 基于包围体树的碰撞检测算法

在第1.2节中介绍了在对原始几何模型进行求交判断之前先用其包围体判断是否相交有助于提高求交过程的性能，通过将包围体组织成树形结构即层次结构包围体（BVH）能够将包围体预判阶段从理论上降低到对数时间复杂度（要求树是平衡的）。当构造原始复杂模型的包围体树时，复杂模型会被拆分成多个部分，每个部分用某种包围体近似，这构成了树型结构的叶子节点，这些节点会按照某种分组策略进行合并成更大的包围体分别构成其父节点，如此递归，最终形成一颗树，树最顶端是一个包含住原始物体的最粗糙的包围体，如图1.10所示，为一个 8 层 AABB 包围体的 BVH（也可以看作是 8 层 6-DOP 的 BVH）。

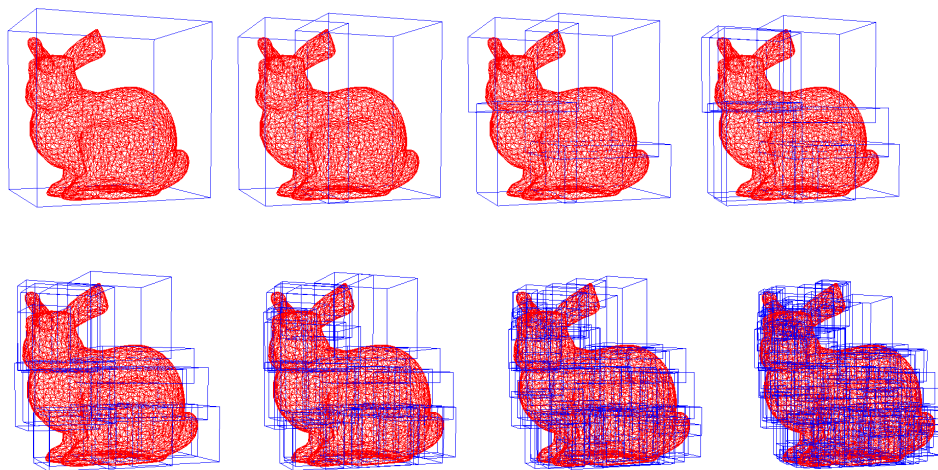


图 1.10 八层 BVH 示例

在碰撞检测算法中，一般会对模型进行预处理建立起各自的 BVH 树，当两个

模型进行相交检测时，自顶向下遍历两棵 BVH 树，若父节点没有相交，则没有必要进行子节点的相交测试，自顶向下的遍历算法如算法 1 所示。

算法 1 *TraverseBVHTree*(*node*₁, *node*₂)

输入: *node*₁, *node*₂: BVH 树中的节点 1、节点 2

输出: 是否相交

```

1: if node1.bv ∩ node2.bv = ∅ then
2:   return false {包围体重合测试, 包围体不相交直接返回}
3: else
4:   if node1.children = ∅ then
5:     if node2.children = ∅ then
6:       return CheckIntersection(node1.primitives, node2.primitives) {最底层叶子节点原生几何相交测试}
7:     else
8:       for all child ∈ node2.children do
9:         TraverseBVHTree(node1, child) {递归调用}
10:      end for
11:     end if
12:   else
13:     for all child ∈ node1.children do
14:       TraverseBVHTree(child, node2) {递归调用}
15:     end for
16:   end if
17: end if

```

从算法 1 可以看出，基于 BVH 的碰撞检测算法性能的好坏关键在于两个操作，一是分别来自两个 BVH 内部节点包围体之间的相交测试，二是 BVH 最底层叶子节点内的原生几何相交测试，常常利用 $T_{cost} = n_v * C_v + n_p * C_p$ 来衡量单个相交测试的所付出的代价，其中 n_v 和 n_p 分别表示参与包围体节点相交测试的数量和参与原始几何相交测试的数量， C_v 和 C_p 则表示相应的平均测试耗费的代价^[10]。当运动场景或连续碰撞的模型之间的碰撞检测时，往往还需要考虑到因物体模型旋转平移等变换产生的包围体的更新所付出的代价，即上述代价函数变成 $T_{cost} = n_v * C_v + n_p * C_p + n_u * C_u$ ，要提高碰撞检测的性能，就得想办法减小 T_{cost} 的值。本文的算法主要关注于静态场景。

不同的包围体，上述代价函数各个值不同，对于不同的应用场景，可能需要选择不同的包围体进行加速碰撞检测。文献 [34] 从包围体的构造难度，包围体的紧致性，包围体之间相交测试复杂性及包围体在运动过程中的更新代价几个方面对五种常见的包围体进行了比较，如表 1.1 所示。可以看出，各种包围体有各自的优缺点和适用场景，因此，很多研究人员充分利用各种包围体的优点，将多种包围体结合在一起组成新的组合包围体。文献^[32] 利用 OBB 包围体相对的紧致优点和球形包围体相交测试简单性的优点进行组合，构造 OBB-Sphere 包围体，在进行相交测试时，先利用球形包围体进行测试，如果相交再用 OBB 进行测试。类似的，

文献^[34]同时利用更加紧致的 k -DOP 和 Sphere 包围体构造 k -DOP-Sphere 包围体。

表 1.1 碰撞检测中常用凸包围体比较

凸包围体	构造代价	相交测试简单性	紧致性	更新代价
AABB	1	2	4	3
OBB	4	4	3	2
Sphere	2	1	5	1
k -DOP	3	3	2	4
Convex hull	5	5	1	5

1.4 本文主要内容

本文着重讨论如何快速地生成紧致性可控的凸包围体以及将此包围体应用于静态场景的碰撞检测。第一章首先介绍了当前各种凸包围体的特征及应用。然后再介绍了碰撞检测问题的背景和本文研究的基于凸包围体的碰撞检测算法。

第二章提出了紧致性可控的凸包围体 k -CBP (k -Convex Bounding Polyhedron) 的生成算法, 紧致性可控主要通过凸包围体的平面数量 k 来调节。该算法首先利用近似内凸包和 k -means 聚类算法生成构成凸包围多面体 k 个截面的法向, 然后根据输入点集沿各法向搜索切点构成截面, 最后由这些截面通过对偶映射的方式求交构成凸包围多面体。在搜索截面过程中, 提出了两种并行策略以加速搜索过程。实验结果表明, 与同类算法相比, 该方法能够更快地构造给定点集更紧致的凸包围多面体。

第三章提出了基于本文提出的 k -CBP 包围体的碰撞检测算法, 在包围体之间的相交测试时分别用 AABB 树的方式和基于 GJK 算法的两种方式进行。实验结果表明本文提出的凸包围体能够有效加速碰撞检测算法。

第四章是对本文的研究工作进行总结, 以及未来可以改进的方向。

第2章 凸包围体生成算法

从1.2可以看出包围体的紧致程度直接影响算法的效率，对于不规则形体，常见的包围体往往不够紧致，凸包紧致但往往包含过多的面片数而增加算法的复杂性。

本文提出一种构造凸包围多面体的方法，该方法首先利用近似内凸包和 k -means 聚类算法生成构成凸包围多面体 k 个截面的法向。然后根据输入点集沿各法向搜索切点构成截面，最后由这些截面通过对偶映射的方式求交构成凸包围多面体。该方法的主要优势是：1) 对给定点集可构造紧致的包围体；2) 利用 GPU 加速，能够快速构造包围体；3) 通过参数 k 调节凸包围多面体的简单性和紧致性，可适用于不同的应用场景。

由 k 个截面构成的凸包围多面体称为凸包围 k 面体 (k -Convex Bounding Polytope, 简称 k -CBP), 可通过 k 个半空间定义：

$$\begin{cases} k\text{-CBP} = \bigcap_{i=1}^k H_i \\ H_i = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid n_i \cdot p \leq w_i, w_i \in \mathbb{R}\}, \end{cases} \quad (2-1)$$

其中， n_i 是半空间 H_i 的法向，方向指向包围体外部， w_i 是输入点集中沿 n_i 方向投影的最大值。如图2.1所示是 Bunny 模型的凸包围 34 面体 (34-CBP)。

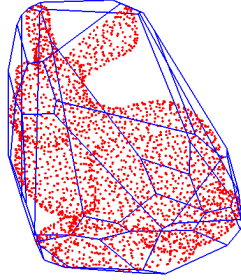


图 2.1 Bunny 模型的 34-CBP

本文提出的算法主要流程如图 2.2 所示，首先利用近似内凸包和 k -means 聚类算法生成构成凸包围多面体 k 个截面的法向，然后根据输入点集在 GPU 中沿各法向搜索切点构成截面，最后由这些截面通过对偶映射的方式求交构成凸包围多面体。搜索截面需要多次扫描输入点集，在 CPU 中计算较耗时，因此用 GPU 加速使得算法整体性能得以提升，其他步骤在 CPU 计算即可。

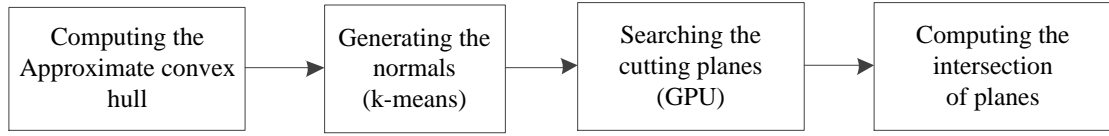


图 2.2 算法流程图

图2.3 从左至右分别显示了 Bunny 模型的 26-CBP、精确凸包和近似内凸包。近似凸包是精确凸包的一种近似，与精确凸包外观相似但其构造复杂度降低，不少研究者利用该性质解决计算机图形学中很多问题^[15]。本文就是利用近似内凸包与精确凸包的相似性，从众多近似凸包面片的法向中通过聚类算法生成凸包围多面体的 k 个法向。

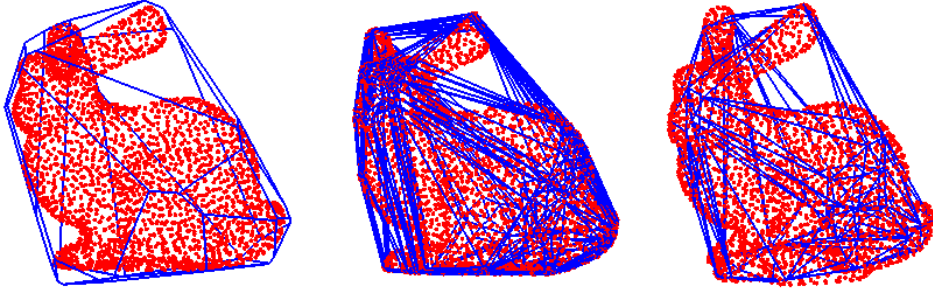


图 2.3 Bunny 模型的 26-CBP、凸包和近似内凸包

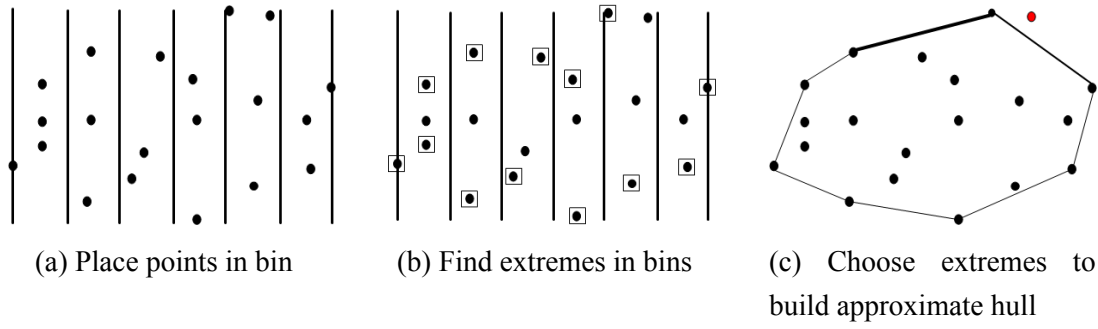
本章将按步骤详细介绍算法的实现。

2.1 截面法向的生成

截面法向的选定与多面体的紧致程度密切相关。 k -DOP 预先定义 $k/2$ 对法向，且 k 值局限于 6、14、18 或 26 等少数几个，导致其生成的多面体不能自适应模型，对于不规则形体不够紧致。相比本文 k 值取值更灵活，因此可以根据不同需求不同应用场景更加灵活地计算出凸包围体。根据经验，为了使凸包围多面体尽可能逼近凸包，在多面体数量一定的情况下需尽量保留凸包中面积较大的面。本文算法先通过一种线性算法^[16]构造近似内凸包，然后从近似内凸包里选取面积最大的 a 个面的法向，最后用聚类算法从剩下的面中生成 $k - a$ 个法向。

2.1.1 近似内凸包生成聚类样本法向集

下面以平面点集的近似内凸包为例说明初始法向集的生成。

图 2.4 二维近似内凸包的构造^[16]

如图2.4所示，整个算法分为3个步骤：(1) 分组。首先根据 x 轴将输入点均分 ξ 组，如图2.4(a)所示， ξ 值可以根据输入点集数量以及希望得到的近似凸包的近似程度进行选取，图示中分成了6组。(2) 选极值点。然后在每组中找出沿 y 轴的最大最小值，得到每组的极值点，如图2.4(b)所示，在边界上的点可直接当作极值点。(3) 连线。最后按条件连接每组的最值构成近似内凸包，如图2.4(c)所示。//TODO，可更详细 此算法复杂度为 $O(n + \xi)$ 。得到近似凸包后，因较长的边（图中的粗边）对最后凸包围多边形影响较大，因此可以保留较长的 a 条边（2D 为例），其他 $n - a$ （ n 为近似内凸包边数）进行聚类得到 $k - a$ 类，最后得到边对应的垂直向外的方向作为法向。在三维空间里，可按照 x, y 轴最多划分成 $(\xi + 2) \times (\xi + 2)$ 个网格，每个网格取 z 的最大最小值，因此所有网格含最多有 $2(\xi + 2)^2$ 个极值点，其凸包可以在 $O(\xi^2 \log \xi^2) = O(\xi^2 \log \xi)$ 内找出，因此整个算法时间复杂度为 $O(n + \xi^2 \log \xi)$ ，关于此算法更详细的细节可参考文献 [16]。实验过程中，为了更快地构造近似内凸包， ξ 值通常取得较小（例如取 $\xi = 10$ ）。

假设点 A, B, C 为近似凸包的某个平面 P_i 上逆时针方向上的3个顶点，则该平面 P_i 的法向 $\mathbf{n}_i = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ，这些法向就是参与聚类算法的所有样本法向集。

2.1.2 聚类初始点的选择

聚类算法是数据挖掘领域里的研究热点之一， k -means 是最流行和最简单的基于划分的聚类算法^[53]。其中， k -means 算法最初的步骤就是初始聚类中心的选择。本文算法将采取如下的策略生成：给定一个单位球，将其按照等面积划分成 k 份即 k -means 中的参数 k ，连接球心到每份中心点构成的方向作为法向，其效果如图2.5所示（ $k = 26$ ）。

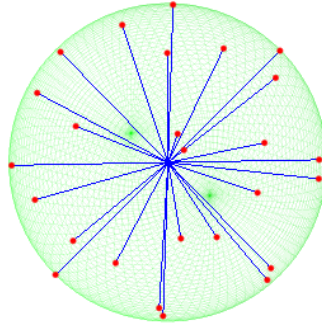


图 2.5 初始聚类法向的生成

初始点生成算法具体如算法 2 所示^①。另外，亦可使用如文献 [54] 中的数学统计方法在球面上生成若干个点使其满足均匀分布。

算法 2 初始法向的生成

输入：初始法向数量： k

输出： k 个法向：Normal

```

1:  $i \leftarrow 0$ ;  $area \leftarrow 4\pi/k$ 
2:  $m_v \leftarrow \text{round}(\pi/\sqrt{area})$ 
3:  $d_v \leftarrow \pi/m_v$ 
4:  $d_phi \leftarrow area/d_v$ 
5: for  $m = 0$  to  $m_v - 1$  do
6:    $v \leftarrow \pi m/m_v$ 
7:    $m_phi \leftarrow \text{round}(2\pi \sin v/d_phi)$ 
8:   for  $n = 0$  to  $m_phi - 1$  do
9:      $\phi \leftarrow 2\pi n/m_phi$ 
10:     $Normal_i \leftarrow \text{vec3}(\sin v \cos \phi, \sin v \sin \phi, \cos v)$ 
11:     $i \leftarrow i + 1$ 
12:   end for
13: end for
14: return Normal
  
```

2.1.3 聚类确定法向

聚类算法将相似程度高的变量聚集到一类，距离度量是 k -means 中的关键，采用不同的距离计算函数可能得到不同的聚类结果，依据数据的不同性质可选用不同的距离度量方法，常用的有欧式距离，曼哈顿距离和卡方距离等等。本文采用余弦距离度量，将方向相近的点归聚到一类。 k -means 本质上是一个迭代贪心算法，每一次迭代需要重新计算每一类的中心点，直到两次迭代后中心点相差在预定的容差范围内为止。本文聚类更新中心点时将面片的面积作为权重即

$$c_i = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \omega_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \omega_i}, \quad (2-2)$$

^① http://www.cmu.edu/biolphys/deserno/pdf/sphere_equi.pdf

其中 \mathbf{c}_i 为第 i 类的中心点, ω_i 为法向 \mathbf{n}_i 所在面片对应的面积, 这样使得生成的法向尽量靠近原始近似凸包面积较大的面片的方向。完整的算法如算法 3 所示。

算法 3 k -means 确定法向

输入: 初始中心点 $init$, 聚类数量 k , 聚类样本法向集 $points$

输出: k 个聚类后的法向 $result$

```

1: for all  $p \in points$  do
2:   for all  $c \in init$  do
3:      $\phi \leftarrow c \cdot p$  {计算余弦距离, 并记录每个聚类变量属于哪一类}
4:   end for
5:   for all  $c \in init$  do
6:      $result \leftarrow update(c)$  {按照公式2-2更新中心点}
7:     if  $chk\_state(result, init, iter)$  then
8:       return  $result$  {检测迭代条件是否满足, 中心点容差范围内不在变化或迭代次数超过最大迭代次数}
9:     else
10:       $init \leftarrow result$ 
11:       $iter \leftarrow iter + 1$ 
12:    end if
13:   end for
14: end for
    
```

通过聚类后得到的法向生成包围体比直接用初始法向生成的包围体更加紧致。如图 2.6 所示, 其中图 2.6(a) 为按照初始方向为 Bunny 模型生成的凸包围多面体 ($k = 26$), 聚类后其法向及其生成的凸包围多面体如图 2.6(b) 所示, 后者的紧致程度比前者高 14.98%。

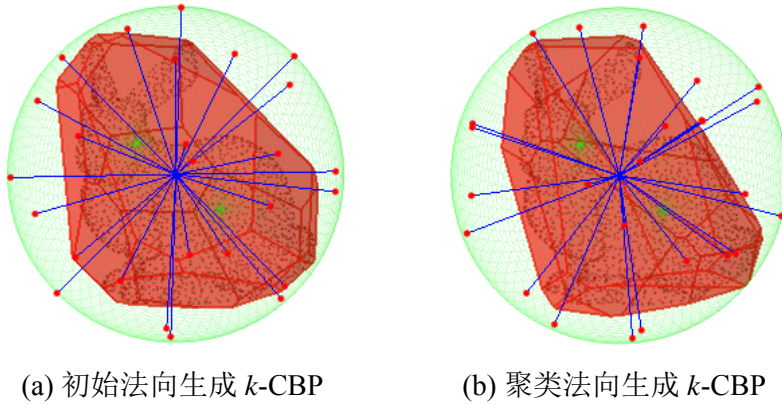


图 2.6 初始法向和聚类确定法向生成 k -CBP 对比 ($k = 26$)

2.2 搜索截面

在确定构成 k -CBP 的法向后, 只需要搜索空间上的一个点即可确定 k -CBP 的截面, 搜索截面等效于寻找沿着法向上的最大投影值, 即对每个法向 \mathbf{n}_i , 从输入

模型的所有点中寻找最大投影值的点作为切点进而确定 \mathbf{n}_i 对应的截面。算法如算法 4 所示，该过程的算法复杂度为 $O(k \cdot n)$ ，其中 k 为法向数量， n 为模型所含点数。

算法 4 搜索截面串行算法

输入: 截面法向 \mathbf{normal} 模型点集 \mathbf{points}

输出: 多面体截面 \mathbf{planes}

```

1: for all  $\mathbf{n} \in \mathbf{normals}$  do
2:   for all  $\mathbf{p} \in \mathbf{points}$  do
3:      $\mathbf{proj} \leftarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}$  {计算投影值}
4:      $\mathbf{max\_proj} \leftarrow \max(\mathbf{proj}, \mathbf{max\_proj})$  {更新最大投影值}
5:   end for
6: end for
7: for all  $\mathbf{n} \in \mathbf{normals}$  do
8:    $\mathbf{max\_point} \leftarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{max\_proj}$  {切点}
9:    $\mathbf{planes} \leftarrow \mathbf{plane}(\mathbf{n}, \mathbf{max\_point})$  {构造平面}
10: end for
11: return  $\mathbf{planes}$ 

```

从算法 4 可以看出该搜索过程中各法向的计算相互独立，因此可借助 GPU 并行加速。

2.2.1 基于着色器的并行算法

OpenGL 提供了可编程管线，它的轻便性、跨平台性和被广泛硬件厂家所支持使得 OpenGL 着色语言 (GLSL, OpenGL Shading Language) 被广泛应用，在基于 GPU 的通用计算 (GPGPU, General Purpose Graphic Process Unit) 中也发挥着重要作用。下面将分别介绍本文提出的基于深度缓冲 (Z Buffer) 和乒乓技术的算法。

2.2.1.1 基于深度缓冲的算法

在 OpenGL 中，当渲染 3D 模型时，深度测试是在片段着色器工作后的一个重要测试操作，当两个片段在相同的位置时，深度测试的目的是决定哪个片段将要保留下来，默认情况下，最前面即有较小（或较大，可设置）的 z 坐标值的片段将通过测试被保留下来。每个片段的深度信息保存在深度缓冲中，当新的片段通过测试后将更新缓冲中的值。我们充分利用了 OpenGL 的这种机制，算法每走一遍渲染流程将找出一个方向的切点，在顶点着色器中，将所有点的 x, y 坐标值设为一样，并将该点在法向上的投影作为 z 值即深度值，所有点经过深度测试后将只有 z 值最大的点被保留下来，该点就是沿着这个法向的切点。

在实际实现过程中需要注意默认情况下 OpenGL 处理 x 和 y 坐标值的范围是 $[-1, 1]$ ，而深度值需要映射到 $[0, 1]$ 。我们利用一张 $k \times 1$ 大小的纹理保存结果，将第 i 个法向的切点保存在纹理的 $(i, 0)$ 坐标处，这样做的好处是每绘制一遍不用清

除深度缓冲，最后可以一次性读取这个 $k \times 1$ 大小的纹理得到结果。如附件 A.1 的着色器代码所示，OpenGL 中利用齐次坐标处理渲染流程，因此我们利用前三个分量保存法向的 x, y, z 坐标值，第 4 个分量 w 保存法向的索引，在片段着色器中，只需要简单地输出切点的在输入点数组的索引即可。通过绘制 k 遍，我们从大小为 $k \times 1$ 的纹理中读出点索引以此就能确定 k 切平面，每绘制一遍得到 1 个切平面，当 k 值较大时，这个过程仍然比较耗时，从实验结果也能看出，这种算法适用于 k 值相对较小的情况。

2.2.1.2 基于乒乓技术的算法

渲染到纹理是一个非常重要的图形可视化技术，它能够帮助快速地渲染很多漂亮的结果，同时也是 GPGPU 重要组成部分。在基于 OpenGL 的 GPGPU 中，通常要将参与计算的数据通过 CPU 传送至 GPU 的特定大小的纹理中，通过绘制一个跟保存数据同样大小的四边形来调用着色器中的算法^[55]，将结果输出到纹理中，绘制同样大小的四边形是为了避免纹理插值对输入数据的影响。算法一般是在片段着色器（Fragment Shader）中完成，有些时候通过一遍的绘制得不到最终结果还希望把前一次运算结果传递给下一个运算用来作为后继运算的输入，此时可以利用乒乓技术来解决。

图 2.7 为基于乒乓技术的算法的流程图，算法将所有法向保存在纹理 *read* 中并利用纹理 *write* 缓存中间结果，第 m 次渲染进行计算时，纹理 *read* 作为输入，将渲染即计算的结果缓存在纹理 *write* 中，在第 $m + 1$ 次渲染时将读取缓存在纹理 *write* 中的数据作为输入，而此时纹理 *read* 又作为输出，如此进行交替，每步交换只更换沿着每个法向的局部最大值。如附件 A.2 片段着色器代码所示，用一个像素值保存法向的 xyz 坐标值和沿着该法向投影得到最大值，另外用一个像素的第四个分量保存该最大值点在输入点数组中的索引。算法将输入点分成 x 份，每次只处理一份，在当前渲染过程中，找出在该批点中沿着所有法向投影值最大的点，当处理下批点集即下一次渲染时，将与上次局部最大投影值进行比较，若有新的投影最大值就更新，如此反复 x 次，当所有点都被处理完毕后得到沿着所有法向投影最大值的点即切点。最后再通过 CPU 一次性从帧缓冲中读取所有法向的切点。

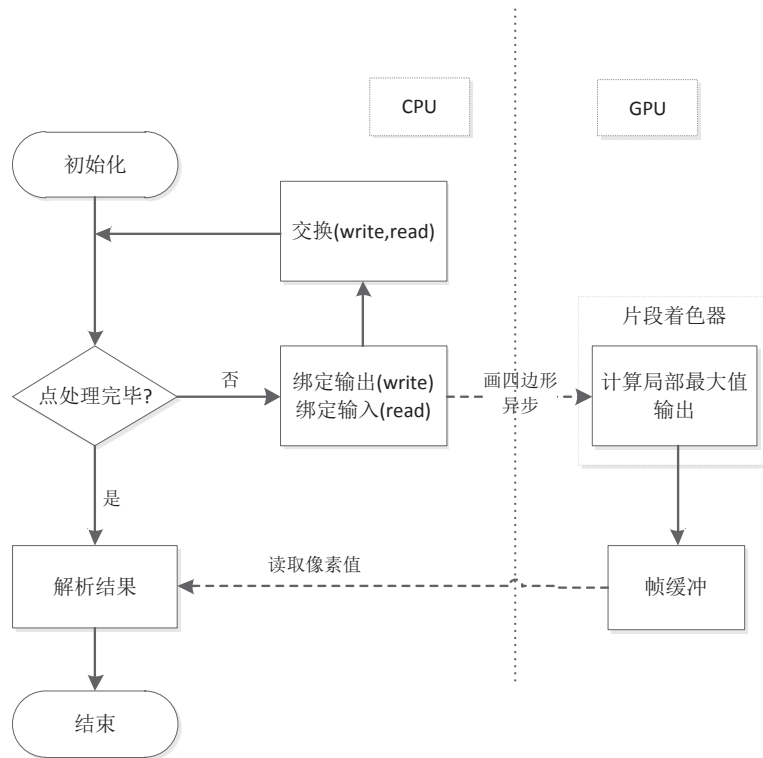


图 2.7 基于乒乓技术算法流程图

与 Z Buffer 算法相比，基于乒乓技术的算法在进行一次绘制操作能够得到沿着 k 个法向的局部 (所有处理过的点集) 最大值。为了充分利用 GPU 的并行计算能力，将每次处理点的数量设置为 GPU 硬件所支持的 OpenGL 中统一块 (uniform block) 所能容纳数据的大小，即需要反复绘制次数 $x = n/b$ ，其中 n 为点集大小， b 为统一块能容纳点的数量，值与显卡具体型号有关。

2.2.2 基于 CUDA 的并行算法

CUDA 是显卡公司 NVIDIA 推出的通用的并行计算架构平台，能够利用 GPU 解决并行计算问题，并提供了多种语言的编程接口。

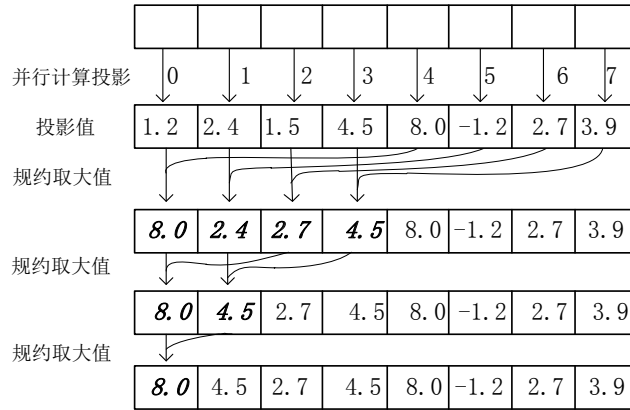


图 2.8 并行规约求最大投影值

如图2.8 所示，最大投影值的计算可采用如下规约方式：将输入点交给数量为 t 的线程计算点积得到投影值，线程 i 和 $i + t/2$ 比较选取较大者，经 $\log_2 t$ 次比较可得最大值。更多更详细规约优化技术可参考文献 [56]。

2.3 截面求交算法

确定 k -CBP 各个截面后，直接求的所有平面交点并排除掉在平面外部的交点即可得到 k -CBP 的顶点。即问题转化为：给定 k 个平面及其法向，平面及法向相当于一个半空间 H ，即已知集合 H_1, H_2, \dots, H_k ，求 $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_k$ 。该问题是一个线性规划（Linear Programming）问题，文献 [12] 详细介绍了在二维线性规划下的相关算法，本文将分别采用一种直观的枚举算法和利用对偶映射的方法求得 k -CBP 的交点。

2.3.1 枚举法

空间中的平面位置情况如图 2.9 所示，若 3 个平面互相平行则没有交点，如图 2.9(a)；或者相交于 1 条交线，如图 2.9(b)；当有两个平面互相平行，另一个平面与其相交时有 2 条交线，如图 2.9(c)；亦或交于 3 条交线，如图 2.9(d)；最后一种情况是三个平面相交于 1 点的情况，如图 2.9(e) 所示。一个凸多面体的每一个顶点都可看作是至少 3 个平面的交点。现在只需要枚举出所有 3 个平面相交于 1 点的所有情况即可得到 k -CBP 的顶点，值得注意的是，并非所有交点都是多面体的顶点，交点在某个半空间的正方向上即在半空间相交区域的外部须排除。

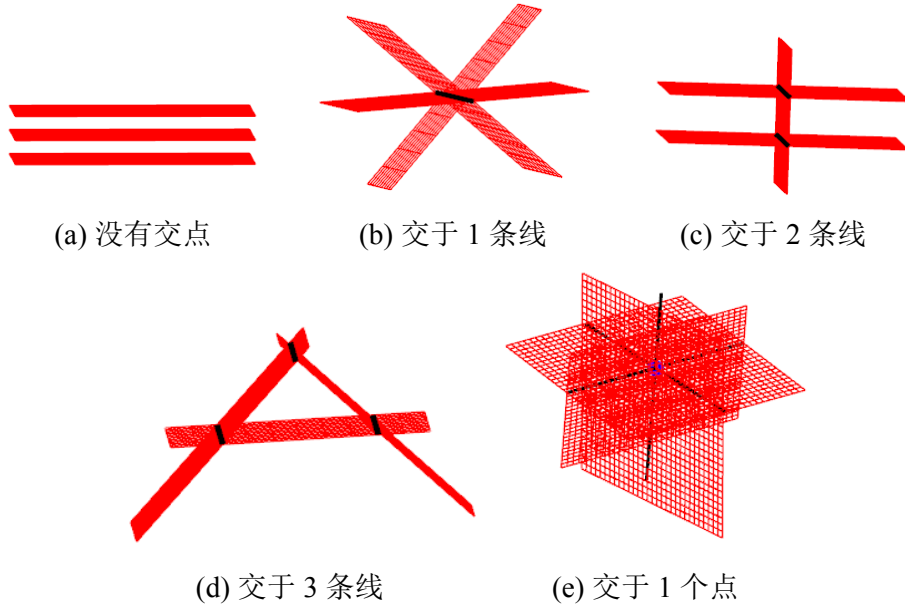


图 2.9 空间中 3 个平面的相交情况

假设满足如图 2.9(e) 的三个平面的法向分别是 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$, 点 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$, 则三个平面的交点须满足如下方程:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{p}_3 \end{cases} \quad (2-3)$$

令 $(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{p}_1, \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{p}_2, \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{p}_3) = (y_1, y_2, y_3) = \mathbf{y}$, 则公式 2-3 相当于解线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 即 $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$, 令 $\mathbf{n}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}), i = \{1, 2, 3\}$, 则有:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

根据克莱姆法则 (Cramer's Rule), 上述方程有唯一解, 则 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 且解 $x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|}, i = \{1, 2, 3\}$, 其中 \mathbf{A}_i 是矩阵 \mathbf{A} 中将第 i 列替换成 \mathbf{y}^T 之后的行列式, 在计算 \mathbf{A}_i 和 $|\mathbf{A}|$ 时为了避免一些重复计算, 将其展开有:

$$\begin{cases}
 |\mathbf{A}| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
 |\mathbf{A}_1| = y_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} y_2 & a_{23} \\ y_3 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} y_2 & a_{22} \\ y_3 & a_{32} \end{vmatrix} \\
 |\mathbf{A}_2| = a_{11} \begin{vmatrix} y_2 & a_{23} \\ y_3 & a_{33} \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & y_2 \\ a_{31} & y_3 \end{vmatrix} \\
 |\mathbf{A}_3| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & y_2 \\ a_{32} & y_3 \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & y_2 \\ a_{31} & y_3 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
 \end{cases}$$

$$\text{令 } b_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}, b_2 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}, b_3 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}, b_4 = \begin{vmatrix} y_2 & a_{23} \\ y_3 & a_{33} \end{vmatrix} = y_2a_{33} - y_3a_{23}, b_5 = \begin{vmatrix} y_2 & a_{22} \\ y_3 & a_{32} \end{vmatrix} = y_2a_{32} - y_3a_{22}, b_6 = \begin{vmatrix} a_{21} & y_2 \\ a_{31} & y_3 \end{vmatrix} = a_{21}y_3 - a_{31}y_2, \text{ 则有:}$$

$$\begin{cases}
 x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|} = \frac{y_1b_1 - a_{12}b_4 + a_{13}b_5}{a_{11}b_1 - a_{12}b_2 + a_{13}b_3} \\
 x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|} = \frac{a_{11}b_4 - y_1b_2 + a_{13}b_6}{a_{11}b_1 - a_{12}b_2 + a_{13}b_3} \\
 x_3 = \frac{|\mathbf{A}_3|}{|\mathbf{A}|} = \frac{-a_{11}b_5 - a_{12}b_6 + y_1b_3}{a_{11}b_1 - a_{12}b_2 + a_{13}b_3}
 \end{cases} \quad (2-4)$$

其中, $|\mathbf{A}| \neq 0$ 。

算法 5 枚举算法输入: 平面: $planes$ 输出: 凸包围多面体: k -CBP

```

1: for all  $p_1 \in planes$  do
2:    $Intersection \leftarrow \emptyset$ 
3:   for all  $p_2 \in planes$  do
4:     for all  $p_3 \in planes$  do
5:       if  $p_1 \nparallel p_2 \nparallel p_3$  then
6:         if  $|A| \neq 0$  then
7:            $P = (x_1, x_2, x_3)$  {按照公式 2-4 计算得到交点坐标值}
8:           if  $validate(P)$  then
9:              $Intersection \leftarrow Intersection \cup P$  {验证交点 P 是否都在半空间负方向上}
10:          end if
11:        end if
12:      end if
13:    end for
14:  end for
15:  if  $Intersection.size \geq 3$  then
16:     $k\text{-CBP} \leftarrow k\text{-CBP} \cup poly(p_1, Intersection)$  {满足条件, 加入到结果集}
17:  end if
18: end for
19: return  $k\text{-CBP}$ 

```

完整的算法如算法 5 所示, 枚举遍历所有平面的组合, 搜索出三个平面交于 1 点的情况, 排除在半空间外部的交点即可得到 k -CBP 的顶点, 算法复杂度为 $O(n^3)$ 。

2.3.2 对偶映射算法**2.4 实验结果**

第 3 章 基于 k -CBP 碰撞检测算法

算法基本概念及框架

3.1 k -CBP 的相交测试算法

3.1.1 基于 AABB 树的算法

3.1.2 基于 GJK 的算法

3.2 三角网格的相交测试算法

3.3 基于 k -CBP 的碰撞检测算法

3.4 实验结果

第 4 章 总结与展望

算法基本概念及框架

4.1 总结

4.2 展望

参考文献

- [1] Bergen G v d. Efficient collision detection of complex deformable models using aabb trees. *Journal of Graphics Tools*, 1997, 2(4):1–13.
- [2] Ericson C. Real-time collision detection. Taylor & Francis US, 2005.
- [3] Gottschalk S, Lin M C, Manocha D. Obbtrees: a hierarchical structure for rapid interference detection. the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques. ACM, 1996. 171–180.
- [4] O’Rourke J. Finding minimal enclosing boxes. *International journal of computer & information sciences*, 1985, 14(3):183–199.
- [5] Barequet G, Har-Peled S. Efficiently approximating the minimum-volume bounding box of a point set in three dimensions. *Journal of Algorithms*, 2001, 38(1):91–109.
- [6] Chan C, Tan S. Determination of the minimum bounding box of an arbitrary solid: an iterative approach. *Computers & Structures*, 2001, 79(15):1433–1449.
- [7] Welzl E. Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids). *Results and New Trends in Computer Science*. Springer-Verlag, 1991. 359–370.
- [8] Larsson T. Fast and tight fitting bounding spheres. *The Annual Swedish Computer Graphics Association Conference(SIGRAD)*, 2008. 27–30.
- [9] Kay T L, Kajiya J T. Ray tracing complex scenes. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, volume 20. ACM, 1986. 269–278.
- [10] Klosowski J T, Held M, Mitchell J S, et al. Efficient collision detection using bounding volume hierarchies of k-dops. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 1998, 4(1):21–36.
- [11] 魏迎梅, 王涌, 吴泉源, 等. 碰撞检测中的固定方向凸包包围盒的研究. *软件学报*, 2001, 12(7):1056–1063.
- [12] 邓俊辉. 计算几何-算法与应用, 2005.
- [13] Donald R Chand S S K. An Algorithm for Convex Polytopes. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 1970, 17(1):78–86.
- [14] Preparata F P, Hong S J. Convex hulls of finite sets of points in two and three dimensions. *Communications of the ACM*, 1977, 20(2):87–93.
- [15] Hossain M Z, Amin M A. On constructing approximate convex hull. *American Journal of Computational Mathematics*, 2013, 3:11–17.
- [16] Bentley J L, Preparata F P, Faust M G. Approximation algorithms for convex hulls. *Communications of the ACM*, 1982, 25(1):64–68.
- [17] Kavan L, Kolingerova I, Zara J. Fast approximation of convex hull. the 2nd IASTED international conference on Advances in computer science and technology(ACST), 2006. 101–104.
- [18] Zunié J. AN OUTER APPROXIMATION OF THE CONVEX HULL FOR FINITE GRID POINT SETS. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 1992, 22(2):177–185.

- [19] Crosnier A, Rossignac J. Tribox bounds for three-dimensional objects. *Computers & Graphics*, 1999, 23(3):429–437.
- [20] Larsen E, Gottschalk S, Lin M C, et al. Fast proximity queries with swept sphere volumes. Technical report, Department of Computer Science, University of North Carolina, 1999.
- [21] Krishnan S. Spherical shell: A higher order bounding volume for fast proximity queries. Third International Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics, 1997.
- [22] Guibas L J, Nguyen A, Zhang L. Zonotopes as bounding volumes. the fourteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. 803–812.
- [23] Schömer E, Sellen J, Teichmann M, et al. Smallest enclosing cylinders. *Algorithmica*, 2000, 27(2):170–186.
- [24] Held M. Erit - a collection of efficient and reliable intersection tests. *Journal of Graphics Tools*, 1997, 2(4):25–44.
- [25] Wang W, Choi Y K, Chan B, et al. Efficient collision detection for moving ellipsoids using separating planes. *Computing*, 2004, 72(1-2):235–246.
- [26] Assarsson U, Moller T. Optimized view frustum culling algorithms for bounding boxes. *Journal of Graphics Tools*, 2000, 5(1):9–22.
- [27] Wald I, Boulos S, Shirley P. Ray tracing deformable scenes using dynamic bounding volume hierarchies. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2007, 26(1):6.
- [28] 王志强, 洪嘉振, 杨辉. 碰撞检测问题研究综述. *软件学报*, 1999, 10(5):545–551.
- [29] Larsson T, Akenine-Möller T. A dynamic bounding volume hierarchy for generalized collision detection. *Computers & Graphics*, 2006, 30(3):450–459.
- [30] Madera F, Day A, Laycock S D. A hybrid bounding volume algorithm to detect collisions between deformable objects. Second International Conferences on Advances in Computer-Human Interactions(ACHI). IEEE, 2009. 136–141.
- [31] Vogianou A, Moustakas K, Tzovaras D, et al. Enhancing bounding volumes using support plane mappings for collision detection. *Computer Graphics Forum*, volume 29. Wiley Online Library, 2010. 1595–1604.
- [32] Chang J W, Wang W, Kim M S. Efficient collision detection using a dual obb-sphere bounding volume hierarchy. *Computer-Aided Design*, 2010, 42(1):50–57.
- [33] Tang M, Manocha D, Tong R. Fast continuous collision detection using deforming non-penetration filters. the 2010 ACM SIGGRAPH symposium on Interactive 3D Graphics and Games. ACM, 2010. 7–13.
- [34] Zhigang F, Jianxun J, Jie X. Efficient collision detection using a dual k-dop-sphere bounding volume hierarchy. 2010 International Forum on Information Technology and Applications (IFITA), volume 3. IEEE, 2010. 185–189.
- [35] Huebner K, Ruthotto S, Kragic D. Minimum volume bounding box decomposition for shape approximation in robot grasping. IEEE International Conference on Robotics and Automation(ICRA). IEEE, 2008. 1628–1633.
- [36] Hubbard P M. Approximating polyhedra with spheres for time-critical collision detection. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 1996, 15(3):179–210.

- [37] Lien J M, Amato N M. Approximate convex decomposition of polygons. *Computational Geometry*, 2006, 35(1):100–123.
- [38] Lien J M, Amato N M. Approximate convex decomposition of polyhedra. the 2007 ACM symposium on Solid and physical modeling. ACM, 2007. 121–131.
- [39] Lien J M, Amato N M. Approximate convex decomposition of polyhedra and its applications. *Computer Aided Geometric Design*, 2008, 25(7):503–522.
- [40] Lien J M. Approximate convex decomposition and its applications[D]. Texas A&M University, 2006.
- [41] Attene M, Mortara M, Spagnuolo M, et al. Hierarchical convex approximation of 3d shapes for fast region selection. *Computer graphics forum*, volume 27. Wiley Online Library, 2008. 1323–1332.
- [42] Karlsson M, Winberg O, Larsson T. Parallel construction of bounding volumes. *The Annual Swedish Computer Graphics Association Conference(SIGRAD)*, 2010.
- [43] Lauterbach C, Garland M, Sengupta S, et al. Fast bvh construction on gpus. *Computer Graphics Forum*, volume 28. Wiley Online Library, 2009. 375–384.
- [44] Melax S. Dynamic Plane Shifting BSP Traversal. *Graphics Interface*, 2000, c:213–220.
- [45] Zeiller M, Purgathofer W, Gervautz M. Efficient collision detection for general csg objects. In: Terzopoulos D, Thalmann D, (eds.). *Computer Animation and Simulation ' 95*, Eurographics. Springer Vienna, 1995: 66–79.
- [46] Bergen G V. A Fast and Robust GJK Implementation for Collision Detection of Convex Objects. *Journal of Graphics Tools*, 1999, 4:7–25.
- [47] Lin M, Gottschalk S. Collision detection between geometric models: A survey. *Proc. of IMA Conference on Mathematics of Surfaces*, volume 1, 1998. 602–608.
- [48] Jiménez P, Thomas F, Torras C. 3d collision detection: a survey. *Computers & Graphics*, 2001, 25(2):269–285.
- [49] Klein J, Zachmann G. Point cloud collision detection. *Computer Graphics Forum*, volume 23. Wiley Online Library, 2004. 567–576.
- [50] Figueiredo M, Oliveira J, Araújo B, et al. An efficient collision detection algorithm for point cloud models. *20th International conference on Computer Graphics and Vision*, volume 43, 2010. 44.
- [51] Xinyu Zhang Y. Interactive collision detection for deformable models using streaming aabbs. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2007, 13(2):318–329.
- [52] Bing H, Yangzihao W, Jia Z. An improved method of continuous collision detection using ellipsoids. *International Conference on Computer-Aided Industrial Design and Conceptual Design*, 2009.
- [53] Jain A K. Data clustering: 50 years beyond K-means. *Pattern Recognition Letters*, 2010, 31(8):651–666.
- [54] Wong T, Luk W, Heng P. Sampling with Hammersley and Halton points. *Journal of graphics tools*, (2):9–24.
- [55] 仇德元. GPGPU 编程技术. 机械工业出版社, 2011: 1056–1063.
- [56] Harris M. Optimizing parallel reduction in cuda. *NVIDIA Developer Technology*, 2007. 1–37.

致 谢

衷心感谢导师 xxx 教授和物理系 xxx 副教授对本人的精心指导。他们的言传身教将使我终生受益。

在美国麻省理工学院化学系进行九个月的合作研究期间，承蒙 xxx 教授热心指导与帮助，不胜感激。感谢 xx 实验室主任 xx 教授，以及实验室全体老师和同学们的热情帮助和支持！本课题承蒙国家自然科学基金资助，特此致谢。

感谢 THUTHESIS，它的存在让我的论文写作轻松自在了许多，让我的论文格式规整漂亮了许多。

声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名：_____ 日 期：_____

附录 A 基于着色器的并行算法关键代码

A.1 基于深度缓冲的算法

```
//顶点着色器
layout(location = 0) in vec3 inPosition;
flat out vec4 result;
uniform vec4 normal; //xyz: 坐标值, w: 法向索引
uniform float length;
uniform int normal_count;

void main()
{
    float distance = dot(inPosition, normal.xyz);
    float depth = distance / length; //放缩到 [-1, 1]
    depth = depth * 0.5 + 0.5; //映射到 [0,1]
    vec2 coord = vec2(-1 + normal.w * 2.0 / normal_count, 0.5);
    gl_Position = vec4(coord, depth, 1.0);
    result = vec4(gl_VertexID, 0, 0, 0);
}

//片段着色器
flat in vec4 result;
out vec4 output;

void main()
{
    output = vec4(result.x, 0, 0, 0);
}
```

A.2 基于乒乓技术的算法

```
//片段着色器
uniform sampler2DRect imageSampler;
uniform sampler2DRect indexSampler;
uniform int curPointCount;
uniform int curPointStart;

layout(packed) uniform Points
{
    // $MAX_POINT_SIZE$ 编译前会被替换
    vec4 curPoints[$MAX_POINT_SIZE$];
};

void main()
{
```

```
vec4 normal_t = texture2DRect(imageSampler, gl_TexCoord[0].
    xy);
float index_float = texture2DRect(indexSampler, gl_TexCoord
    [0].xy).w;
int index = int(index_float);
vec3 normal = normal_t.xyz;
float max = normal_t.w;

for(int i = 0; i < curPointCount; i++)
{
    float t = dot(curPoints[i].bgr, normal); //BRGA格式
    if(t > max)
    {
        max = t;
        index = curPointStart + i;
    }
}
gl_FragData[0] = vec4(normal, max);
gl_FragData[1] = vec4(0, 0, 0, index); //index为全局索引
}
```

个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

个人简历

xxxx 年 xx 月 xx 日出生于 xx 省 xx 县。

xxxx 年 9 月考入 xx 大学 xx 系 xx 专业，xxxx 年 7 月本科毕业并获得 xx 学士学位。

xxxx 年 9 月免试进入 xx 大学 xx 系攻读 xx 学位至今。

发表的学术论文

- [1] Yang Y, Ren T L, Zhang L T, et al. Miniature microphone with silicon- based ferroelectric thin films. *Integrated Ferroelectrics*, 2003, 52:229-235. (SCI 收录, 检索号:758FZ.)
- [2] 杨轶, 张宁欣, 任天令, 等. 硅基铁电微声学器件中薄膜残余应力的研究. *中国机械工程*, 2005, 16(14):1289-1291. (EI 收录, 检索号:0534931 2907.)
- [3] 杨轶, 张宁欣, 任天令, 等. 集成铁电器件中的关键工艺研究. *仪器仪表学报*, 2003, 24(S4):192-193. (EI 源刊.)
- [4] Yang Y, Ren T L, Zhu Y P, et al. PMUTs for handwriting recognition. In press. (已被 *Integrated Ferroelectrics* 录用. SCI 源刊.)
- [5] Wu X M, Yang Y, Cai J, et al. Measurements of ferroelectric MEMS microphones. *Integrated Ferroelectrics*, 2005, 69:417-429. (SCI 收录, 检索号:896KM.)
- [6] 贾泽, 杨轶, 陈兢, 等. 用于压电和电容微麦克风的体硅腐蚀相关研究. *压电与声光*, 2006, 28(1):117-119. (EI 收录, 检索号:06129773469.)
- [7] 伍晓明, 杨轶, 张宁欣, 等. 基于 MEMS 技术的集成铁电硅微麦克风. *中国集成电路*, 2003, 53:59-61.

研究成果

- [1] 任天令, 杨轶, 朱一平, 等. 硅基铁电微声学传感器畴极化区域控制和电极连接的方法: 中国, CN1602118A. (中国专利公开号.)
- [2] Ren T L, Yang Y, Zhu Y P, et al. Piezoelectric micro acoustic sensor based on ferroelectric materials: USA, No.11/215, 102. (美国发明专利申请号.)