Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de ingeniería

Teoría electromagnética II

# Apuntes de clase

*Erick Al. Casanova Cortés*
*Matricula: 15014866*

Docente
Dr. O. Carvente

**Fecha de modificación: 11 de marzo de 2021**

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción

## 1.1. Formativa y sumativa

ADAs 40 %
Examenes 60 %

### 1.1.1. ADAs

Reporte, portada, introducción, metodología, conclusiones y bibliografía, no más de una tarea por unidad, dichas tareas se recomiendan entregar en LaTex

### 1.1.2. Exámenes

Incluirá las tareas previas, de deberá entregar hasta una hora antes del examen.
Hasta dos sesiones antes del examen se llevará a cabo una sesión para resolver dudas de los problemas de la tarea.

# Capítulo 2

# Ley de Ampere

## 2.1. Introducción

Hay que imaginar que dentro de un cable existe una corriente $I'$, el cual se denomina como un circuito $C'$, y en otro punto del espacio hay otra curva $C$ con una corriente $I$. ¿Cómo se mide la fuerza que $C'$ ejerce sobre $C$?
Se empieza definiendo un sistema de referencia, un punto del circuito donde circula $I'$ será asociado con un vector de posición $r'$ y el elemento que corre a lo largo de $C'$ se denomina como $\mathrm{d}s'$, así a su vez para el circuito $C$ tendrán las mismas características pero no primadas.
Ahora lo que habrá que denominar es la fuerza a travez de la ley de Ampere. Pero ¿Como determinamos la fuerza que la corriente $I'$ que circula a lo largo del circuito definido por $C'$, ejerce sobre la corriente $I$ que circula a lo largo del circuito definido por $C$?

La ley de Ampere establece que:

$$\vec{F}_{C'\to C} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \oint_{C'} \frac{I\,\mathrm{d}s \times [I'\,\mathrm{d}s' \times (\vec{r} - \vec{r'})]}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \tag{2.1}$$

donde $\mathrm{d}s$ y $\mathrm{d}s'$ son elementos diferenciales, vectoriales a lo largo de los circuitos $C$ y $C'$

¿Se cumple que $\vec{F}_{C'\to C} + \vec{F}_{C\to C'} = 0$?

Para eso, primero haremos una sustitución de modo que:

$$\hat{R} = \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

De modo que reescribiendo (2.1) nos queda como:

$$\vec{F}_{C'\to C} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \oint_{C'} \frac{I\,\mathrm{d}s \times [I'\,\mathrm{d}s' \times \hat{R}]}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2}$$

Tomando en cuenta el triple producto vectorial, el cual nos dice que:

$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \tag{2.2}$$

Otra igualdad que nos facilitaría el cálculo, podemos ver:

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2} \tag{2.3}$$

Entonces partiendo de 2.2 y 2.3 podemos reescribir a 2.1 como:

$$\vec{F}_{C'\to C} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'} \mathrm{d}s' \oint_C \mathrm{d}\frac{1}{R} - \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \oint_{C'} \frac{\mathrm{d}s\cdot\mathrm{d}s'}{R^2}$$

Podemos ver que $\oint_C \mathrm{d}\frac{1}{R} = 0$, por lo que otra manera de expresar a 2.1 puede ser

$$\vec{F}_{C'\to C} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \oint_{C'} \frac{\mathrm{d}s\cdot\mathrm{d}s'}{R^2} \tag{2.4}$$

Con esto podemos ver de manera más clara que se cumple

$$\vec{F}_{C'\to C} = -\vec{F}_{C\to C'}$$

Por lo que queda demostrada la igualdad $\vec{F}_{C'\to C} + \vec{F}_{C\to C'} = 0$

## 2.2. Corriente filamental infinitamente larga

## Ejercicio

Determinar la fuerza que una corriente filamental infinitamente larga sobre otra corriente filamental infinitamente larga.

*Respuesta*

Se tomará la ecuación 2.1 para resolver el problema, en este caso analizaremos el vector de cada línea:

$$
\begin{aligned}
\vec{r'} &= z'\hat{k} \\
\mathrm{d}s' &= \mathrm{d}z'\,\hat{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \\
\mathrm{d}s &= \mathrm{d}z\,\hat{k}
\end{aligned}
$$

El triple producto nos queda como:

$$
II'\,\mathrm{d}z\,\hat{k} \times [\mathrm{d}z'\,\hat{k} \times [\rho\hat{\rho} + (z - z')\hat{k}]]
$$

Analizando el producto cruz de cada vector unitario

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho} \times \hat{\phi} &= \hat{k} \\
\hat{k} \times \hat{\rho} &= \hat{\phi} \\
\hat{\phi} \times \hat{k} &= \hat{\rho}
\end{aligned}
$$

Entonces el triple producto vectorial nos queda como:

$$
II'\,\mathrm{d}z\,\hat{k} \times [\mathrm{d}z'\,\hat{k} \times [\rho\hat{\rho} + (z - z')\hat{k}]] = -II'\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z'\,\hat{\rho}
$$

y sustituyendo en la ecuación 2.1 nos queda como:

$$
\vec{F}_{c' \to c} = \int_{\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} \frac{-II'\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z'\,\hat{\rho}}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}}
$$

Podemos hacer un cambio de variable de tal modo que la ecuación nos puede quedar como:

$$
\begin{cases}
z - z' & = \omega \\
\mathrm{d}z' & = -\,\mathrm{d}\omega
\end{cases}
$$

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = -\int \frac{\mathrm{d}\omega}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

Haciendo un segundo cambio de variable de tal modo que:

$$\begin{cases} \omega & = \rho \tan\theta \\ \mathrm{d}\omega & = \rho \sec^2\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -\int \frac{\rho \sec^2\theta \, \mathrm{d}\theta}{\rho^3 \sec^3\theta} &= -\frac{1}{\rho^2} \int \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{\rho^2} \sin\theta \end{aligned}$$

Regresando a nuestra variable, vemos que $\sin\theta = \frac{z-z'}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}$, entonces la integral evaluada nos queda como:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho^2} \frac{z - z'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} \Big|_{z'=-\infty}^{z'=\infty} &= -\frac{1}{\rho^2} [-1 - 1] \\ &= \frac{2}{\rho^2} \end{aligned}$$

Regresando a la integral anterior tenemos

$$\begin{aligned} \vec{F}_{c' \to c} &= -\frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \rho \hat{\rho} \int_{\infty}^{\infty} \frac{2 \, \mathrm{d}z}{\rho^2} \\ &= \frac{\mu_0 I I'}{2\pi\rho^2} \rho \hat{\rho} \int_{\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \end{aligned}$$

Este término es la fuerza sobre el elemento $\mathrm{d}z$ del circuito $C$. Entonces se define la fuerza por unidad de longitud sobre el circuito $C$ como:

$$f = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi\rho} \hat{\rho} \tag{2.5}$$

## 2.3. Comparación de 2.4 con 2.1

Ahora analizaremos la fuerza entre elementos de corriente. Partiendo de:

$$\vec{F}_{c'\to c} = \oint\oint \mathrm{d}\vec{F}_{c'\to c} \tag{2.6}$$

de tal modo que:

$$\mathrm{d}\vec{F}_{c'\to c} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}s \times [I'\,\mathrm{d}s' \times (r - r')]}{|r - r'|^3}$$

Si nosotros plateamos que el elemento de fuerza de tal modo que

$$\mathrm{d}\vec{F}_{c\to c'} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I'\,\mathrm{d}s' \times [I\,\mathrm{d}s \times (r' - r)]}{|r' - r|^3}$$

Esto nos quiere decir que:

$$\mathrm{d}\vec{F}_{c'\to c} + \mathrm{d}\vec{F}_{c\to c'} \neq 0$$

Ahora si lo planteamos con 2.4

$$\mathrm{d}\vec{F}_{c'\to c} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}s \cdot I'\,\mathrm{d}s'\,(r - r')}{|r - r'|^3}$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{c\to c'} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I'\,\mathrm{d}s' \cdot I\,\mathrm{d}s\,(r' - r)}{|r' - r|^3}$$

Entonces si retomamos el análisis anterior nos queda que:

$$\mathrm{d}\vec{F}_{c'\to c} + \mathrm{d}\vec{F}_{c\to c'} = 0$$

Esto es debido a que la ecuación 2.4 ya toma encuenta que los circuitos están cerrados, así que en la práctica se deberá involucrar siempre 2.1. Por lo que nuestro estudio se centrará en el uso de dicha ecuación, ya que solo analizaremos partes del circuito.

## Ejercicio

Una línea y un circuito cerrado rectangular, en este caso podemos ver que la parte C y A se cancelan en el circuito, quedando solo la parte B y D, las cuales pueden ser analizadas con 2.5, entonces sustituyendo vemos que:

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{\mu_0 I I'}{2\pi\rho}\hat{\rho} \\
&= \frac{\mu_0 I I'}{2\pi d}\hat{x} + \frac{\mu_0 I I'}{2\pi(d+a)}\hat{x} \\
f &= \frac{\mu_0 I I'}{2\pi}\frac{-a}{d(d+a)}\hat{x}
\end{aligned}
$$

Podemos ver por el signo que esta fuerza es atractiva, aunque este resiltado no está completo, ya que es una fuerza por unidad de longitud, se debe multiplicar por $B$ para tener la expresión correcta, por lo que nos queda como:

$$
f = -\frac{\mu_0 I I'}{2\pi}\frac{ab}{d(d+a)}\hat{x}
$$

## 2.4. Tareas

### 2.4.1. Tarea 1

Capítulo 12: corrientes eléctricas, hacer un ensayo de las secciones 12-I, II, III

### 2.4.2. Tarea 2

Corrientes, encontrar la fuerza que $I'$ ejerce sobre $I$.

Partiendo de (2.1), tenemos que definir los vectores que vamos a utilizar, los cuales serán

$$
\begin{aligned}
\vec{r'} &= a\cos\varphi'\hat{i} + a\sin\varphi'\hat{j} \\
\vec{r} &= a\cos\varphi\hat{i} + a\sin\varphi\hat{j} + d\hat{k}
\end{aligned}
$$

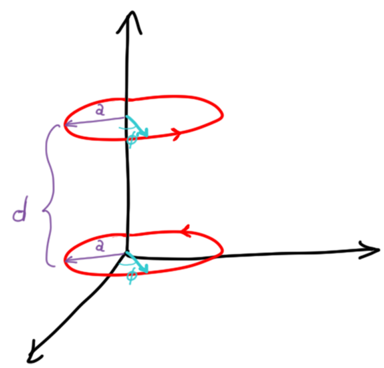


Figura 2.1: Dos circuitos

$$
\begin{aligned}
\vec{r} - \vec{r}' &= a\cos\varphi\hat{i} + a\sin\varphi\hat{j} + d\hat{k} - (a\cos\varphi'\hat{i} + a\sin\varphi'\hat{j}) \\
&= a(\cos\varphi - \cos\varphi')\hat{i} + a(\sin\varphi - \sin\varphi')\hat{j} + d\hat{k}
\end{aligned}
$$

$$
|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{a^2(\cos\varphi - \cos\varphi')^2 + a^2(\sin\varphi - \sin\varphi')^2 + d^2}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s' &= a\left(-\sin\varphi'\hat{i} + a\cos\varphi'\hat{j}\right)\mathrm{d}\varphi' \\
\mathrm{d}s &= a\left(-\sin\varphi\hat{i} + a\cos\varphi\hat{j}\right)\mathrm{d}\varphi'
\end{aligned}
$$

Entonces la fuerza que ejerce $C$ sobre $C'$ es

$$
\vec{F}_{C'\to C} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a\left(-\sin\varphi\hat{i} + a\cos\varphi\hat{j}\right)\mathrm{d}\varphi' \times \left[a\left(-\sin\varphi'\hat{i} + a\cos\varphi'\hat{j}\right)\mathrm{d}\varphi' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\right]
$$

La tarea es hacer la resolución de esa integral de forma numérica

# Capítulo 3

# Inducción magnética

Definición de inducción magnética, partiendo de la ley de Ampere (2.1) podemos agrupar los términos después del $I\,\mathrm{d}s$ como $\vec{B}(r)$, de forma que:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{I'\,\mathrm{d}s' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{3.1}$$

A este término normalmente se le denomina como Ley de Biot-Savart.

Para el conjunto de corriente $I'_k$ circuloando a lo largo de $C'_k$, entonces 3.1 se puede escribir como:

$$\vec{B}_T(r) = \sum_k \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'_k} \frac{I'_k\,\mathrm{d}s'_k \times (\vec{r} - \vec{r}'_k)}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|^3} \tag{3.2}$$

Entonces la fuerza sobre un elemento de corriente $I\,\mathrm{d}s$ situada en $\vec{r}$ producida por una inducción magnética:

$$\mathrm{d}F_{C' \to I\mathrm{d}s} = I\,\mathrm{d}s \times \vec{B}(r)$$

Para elementos de corriente $I\,\mathrm{d}s = \vec{k}\,\mathrm{d}a = \vec{J}\,\mathrm{d}\tau$, donde $\vec{k}$ y $\vec{J}$ son las densidades de corriente superficial y volumétrica, respectivamente:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\,\mathrm{d}a'$$
$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

La $\vec{k}$ se toma como corriente/longitud y $\vec{J}$ tiene corriente/área

Entonces podemos ver que la fuerza se puede que ejerce

$$\vec{F}_{\vec{B}\to I} = \oint_C I\,\mathrm{d}s \times \vec{B}(r)$$
$$\vec{F}_{\vec{B}\to \vec{k}} = \oint_C \vec{k} \times \vec{B}(r)$$
$$\vec{F}_{\vec{B}\to \vec{J}} = \oint_C \vec{J} \times \vec{B}(r)$$

donde

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{I'\mathrm{d}s' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{k} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,\mathrm{d}a' \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,\mathrm{d}\tau' \end{cases}$$

## Ejercicio

Corriente filamental de longitud finita, calcular $\vec{B}$ en un punto cualesquiera $\vec{r}$

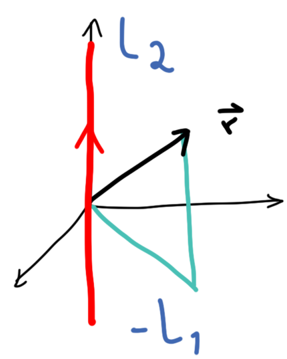


Figura 3.1: Corriente filamental

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\cos\varphi\hat{i} + \rho\sin\varphi\hat{j} + z\hat{k} \\
&= \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \\
\vec{r'} &= z'\hat{k}
\end{aligned}
$$

$$
\vec{r} - \vec{r'} = \rho\hat{\rho} + \left(z - z'\right)\hat{k}
$$

$$
|\vec{r} - \vec{r'}| = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}
$$

$$
\mathrm{d}s' = \mathrm{d}z\,\hat{k}
$$

Partiendo de 3.1

$$
\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'} \frac{I'\,\mathrm{d}s' \times \left[\rho\hat{\rho} + (z - z')\,\hat{k}\right]}{|\rho^2 + (z - z')^2\,|^3}
$$

Tomando el resultado de un ejercicio anterior

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'} \frac{I'\,\mathrm{d}s' \times \left[\rho\hat{\rho} + (z - z')\,\hat{k}\right]}{|\rho^2 + (z - z')^2\,|^3} \\
&= -\frac{\mu_0\rho}{4\pi}\frac{1}{\rho^2}\frac{z - z'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}}\Big|_{z'=-L_1}^{z'=L_2}
\end{aligned}
$$

Entonces nos queda como:

$$
\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi\rho}\left[\frac{z + L_1}{\sqrt{\rho^2 + (z + L_1)^2}} - \frac{z - L_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}}\right]
$$

Podemos ver entonces si $L_1 \to \infty$ y $L_2 \to \infty$, entonces

$$
\vec{B} = -\frac{\mu_0 I'\hat{\varphi}}{4\pi\rho}
$$

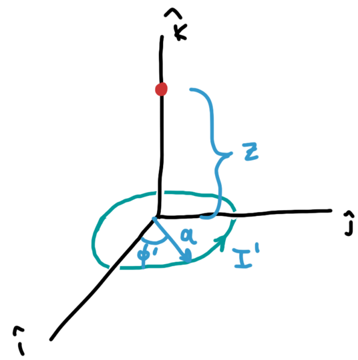


Figura 3.2: Una espira y un punto

## Ejercicio

Cálculo de la inducción magnética en una espira

$$r = z\hat{k}$$
$$r' = a\cos\phi'\hat{\imath} + a\sin\phi'\hat{\jmath}$$

$$r - r' = -a\cos\phi'\hat{\imath} - a\sin\phi'\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

$$|r - r'| = a^2 + z^2$$

$$\mathrm{d}s' = (-a\sin\phi'\hat{\imath} + a\cos\phi'\hat{\jmath})\,\mathrm{d}\phi'$$

$$\mathrm{d}s' \times (r - r') = a^2\sin^2\phi'\hat{k} + a^2\cos^2\phi'\hat{k} + az\sin\phi'\hat{\jmath} + az\cos\phi'\hat{\imath}$$

entonces la inducción magnética se expresa como:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \sin^2 \phi' \hat{k} + a^2 \cos^2 \phi' \hat{k} + az \sin \phi' \hat{j} + az \cos \phi' \hat{i}}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}\phi'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \hat{k} + az \sin \phi' \hat{j} + az \cos \phi' \hat{i}}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}\phi'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I' a^2 \hat{k}}{4\pi (a^2 + z^2)^{3/2}}$$

# Capítulo 4

# Forma integral de la Ley de Ampere

# Capítulo 5

# Potencial vectorial

## Capítulo 6

# Desarrollo multipolar del potencial vectorial

## Capítulo 7

# Ley de inducción de Faraday

## Capítulo 8

# Energía magnética

Capítulo 9

# Magnetismo en presencia de materia y ecuaciones de Maxwell