

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN
FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA FÍSICA

Segundo examen



Erick Al. Casanova Cortés
Matricula: 15014866

DOCENTE
DR. MIGUEL ZAMBRANO

Fecha de entrega: 5 Febrero 2021

Una esfera hueca de radio que esta dividida en dos por el ecuador por un aislante delgado. La mitad superior se encuentra a un potencial constante V_0 y el hemisferio inferior a un potencial nulo, como se muestra en la figura.

Demostrar que el potencial dentro de la esfera esta dado por:

$$\phi(r, \theta) = \frac{V_0}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!(4n+3)}{2^{2n}(n!)(2n+2)} \left(\frac{r}{c}\right)^{2n+1} P_{2n+1} \cos(\theta) \right\} \quad (1)$$

mientras que en el potencial exterior es:

$$\phi(r, \theta) = \frac{V_0 c}{2r} \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!(4n+3)}{2^{2n}(n!)(2n+2)} \left(\frac{c}{r}\right)^{2n+1} P_{2n+1} \cos(\theta) \right\} \quad (2)$$

Ayuda: resolver la ecuación de Laplace $\nabla^2 \phi(r, \theta, \varphi) = 0$ en coordenadas esféricas

Primero haremos el cálculo de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, la cual está expresada de la forma

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) F(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (3)$$

De esto partimos que la función $F(r, \theta, \varphi)$ puede expresarse de tal forma que $F(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Por lo que podemos multiplicar ambas partes de la ecuación 3 por $\frac{r^2}{F}$, lo cual queda expresado como:

$$\frac{r^2}{F} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) F(r, \theta, \varphi) = 0$$

Sustituyendo a $F(r, \theta, \varphi)$ por la propuesta

$$\frac{r^2}{R\Theta\Phi} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) R\Theta\Phi = 0$$

Ahora se expandirá la ecuación a conveniencia de tal modo que dejaremos los términos que dependen del radio de un lado y agruparemos los términos que dependen del ángulo polar o azimutal; quedando entonces:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} R = -\frac{1}{\Theta \Phi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Theta \Phi$$

Como r , θ y φ son variables independientes quiere decir que ambos términos son iguales a una constante, lo que quiere decir que

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} R = \mathcal{C} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{\Theta \Phi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Theta \Phi = \mathcal{C} \quad (5)$$

si a la ecuación 5 la multiplicamos por $\sin^2 \theta$ tenemos:

$$-\frac{1}{\Theta \Phi} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Theta \Phi = \mathcal{C} \sin^2 \theta$$

Agrupando la ecuación en sus términos dependientes nos queda la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Theta + \mathcal{C} \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi$$

Como anteriormente se vio, para que esta igualdad se cumpla, ambas partes de dicha ecuación deberán ser igualadas a una constante. Lo cual queda de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Theta + \mathcal{C} \sin^2 \theta = \mathcal{B} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi = \mathcal{B} \quad (7)$$

Haciendo un despeje de la ecuación 7 podemos ver que podemos encontrar una solución, como se ve a continuación

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi = -\Phi \mathcal{B}$$

al resolver la ecuación diferencial podemos ver que Φ está dada por:

$$\Phi(\varphi) = e^{\pm i\sqrt{\mathcal{B}}\varphi}$$

Si hacemos un análisis de esta ecuación podemos ver que es periódica con un ciclo de 2π , lo que implica:

$$e^{\pm i\sqrt{\mathcal{B}}\varphi} = e^{\pm i\sqrt{\mathcal{B}}(\varphi+2\pi)}$$

En otras palabras, lo que quiere decir es que $\sqrt{\mathcal{B}}$ debe ser un entero, y por fines prácticos haremos la igualdad $\sqrt{\mathcal{B}} = k^2$, regresando a la solución tenemos entonces que la parte de Φ queda expresada como:

$$\Phi(\varphi) = e^{\pm ik^2\varphi}$$

Pasando ahora a la parte que depende de Θ , partimos de la ecuación 6 y tomando la igualdad que encontramos anterior, la cual nos afirma que $\sqrt{\mathcal{B}} = k^2$

$$\frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Theta + \mathcal{C} \sin^2 \theta = k^2$$

Para hacer resolver esta ecuación diferencial tendremos que hacer un cambio de variable, el cual será proponer una función a modo que:

$$x = \cos \theta$$

Haciendo la regla de la cadena podemos ver:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} \\ &= -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos la igualdad

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

Por lo que con nuestro cambio de variable podemos ver que $\sin^2 \theta = 1 - x^2$. Sustituyendo en la ecuación y haciendo $\Theta(\theta) = y(x)$ podemos ver que:

$$\frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{d}{dx} y + \left(\mathcal{C} - \frac{k^2}{1 - x^2} \right) y = 0$$

Con esta ecuación podemos ver el conflicto de que diverge para $x = \pm 1$, a menos que hagamos que $\mathcal{C} = c(c+1)$ lo que nos lleva a

$$\frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{d}{dx} y + \left(c(c+1) - \frac{k^2}{1 - x^2} \right) y = 0$$

Otra cosa que tenemos que tener en cuenta es que para obtener una solución aceptable debemos hacer que $-c \leq k \leq c$. Entonces la solución de esta ecuación se puede expresar como su polinomio de Legendre asociado:

$$y(x) = P_c^{|k|}(x)$$

La solución para $k = 0$

$$\frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{d}{dx} y(x) + c(c + 1)y(x) = 0$$

Regresando entonces a nuestras variables iniciales

$$\Theta(\theta) = P_c^{|k|}(\cos \theta)$$

La parte que depende del radio de la ecuación de Laplace lo vimos anteriormente, y con las condiciones que hemos generado hasta ahora podemos expresarla de tal modo que:

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} R + 2r \frac{d}{dr} R = c(c + 1)R$$

Esta parte se debe resolver con un cambio de variable especial, se hará

$$\begin{aligned} r &= e^t, \\ t &= \ln r, \\ \frac{dt}{dr} &= \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Entonces nos queda la siguiente expresión:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} = \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{dR}{dt}$$

la cual se expresa como:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{dR}{dt} = c(c + 1)R$$

Esta ecuación diferencial se resuelve de manera sencilla, la cual podemos ver que la solución se representa como:

$$R(t) = e^{kt}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= ke^{kt} \\ \frac{d^2R}{dt^2} &= k^2e^{kt}\end{aligned}$$

y k puede ser determinada por:

$$k^2 + k = c(c + 1)$$

Entonces es evidente que

$$k = \begin{cases} c, \\ -c - 1 \end{cases}$$

Entonces:

$$R(t) = \begin{cases} e^{ct} = e^{c \ln r} = r^c \\ e^{-(c+1)t} = e^{-(c+1) \ln r} = \frac{1}{r^{c+1}} \end{cases}$$

Entonces la solución general de la ecuación de Laplace está dada por:

$$F(r, \theta) = \sum_{c=0}^{\infty} \left(a_c r^c + b_c \frac{1}{r^{c+1}} \right) P_c(\cos \theta) \quad (8)$$

Los coeficientes a y b son determinados por las condiciones de frontera

Partiendo de la solución anterior (eq: 8), ahora la función será el potencial que satisface dicha ecuación, tenemos que conocer los coeficientes por las condiciones de frontera, por lo que analizando dichas condiciones vemos que: