Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de ingeniería

Métodos matemáticos de la física

Ejercicios de las notas

Erick Al. Casanova Cortés
Matricula: 15014866

Docente
Dr. Miguel Zambrano

Fecha de entrega: 5 Febrero 2021

Índice general

Parte I

Ejemplo 1

0.1. Definición del libro

Desarrollar el ejemplo 2 de las notas de las transformadas de Fourier. Ejemplo: Considera el oscilador armónico armortiguado que actúa en una fuerza externa $g(t)$. El movimiento del oscilador está situado por la ecuación:

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_o^2 x(t) = f(t)$$

donde $f(t) = \frac{1}{m}g(t)$

Por definición, podemos extender este resultado a:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

donde:

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$
$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Respectivamente

Esto conlleva a que la solución de x también tendrá una transformada de Fourier que se denotará como $\hat{A}$, por lo que:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t$$
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(\omega)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Resulta evidente ver a $\hat{A}$ como la transformada de la ecuación diferencial, por lo que usando las propiedades de las derivadas de las transformadas obtenemos:

$$\mathcal{F}\{\dot{x}\} = -i\omega\mathcal{F}\{x\}$$
$$\mathcal{F}\{\ddot{x}\} = -\omega^2\mathcal{F}\{x\}$$

Con estas ecuaciones asumimos que $x(\pm\infty) = \dot{x}(\pm\infty) = 0$.
Por definición tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) e^{i\omega t} \,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{i\omega t} \,\mathrm{d}t$$

Por lo consiguiente, la transformada de la ecuación diferencial es:

$$-\omega^2 A(\omega) - 2\alpha\omega i A(\omega) + \omega_o^2 A(\omega) = F(\omega)$$

Despejando entonces $A(\omega)$

$$A(\omega) = \frac{F(\omega)}{(\omega_o^2 - \omega) - 2i\alpha\omega}$$

La solución al problema entonces es:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega_o^2 - \omega) - 2i\alpha\omega}$$

Igualando el denominador a cero podemos ver que:

$$\omega_o^2 - \omega) - 2i\alpha\omega = \zeta(\omega)$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 - 2i\alpha\omega + \omega_o^2 = 0 \\ \omega &= \frac{2i\alpha \pm \sqrt{4\omega_o^2 - 4\alpha^2}}{-2} \\ \omega &= -i\alpha \pm \sqrt{-(\alpha^2 - \omega_o^2)} \end{aligned}$$

Para los valores de $\alpha > 0$ los polos están arriba y se localizan en:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \pm\sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} - i\alpha & \text{Si } \omega_o > \alpha \\ \omega_{1,2} &= \pm i\sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} - i\alpha & \text{Si } \omega_o < \alpha \\ \omega_1 = \omega_2 &= -i\alpha & \text{Si } \omega_o = \alpha \end{aligned}$$

Ahora analizaremos los casos:
Pimer caso: Dos polos simples

Así tenemos que $\zeta(\omega) = -(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)$, por lo que al evaluar los residuos obtenemos en $\omega = \omega_1$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{F(\omega_1)e^{-i\omega_1 t}}{\omega_1 - \omega_2}$$

Y cuando tenemos el caso de $\omega = \omega_2$:

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{F(\omega_2)e^{-i\omega_2 t}}{\omega_1 - \omega_2}$$

Donde $\omega_1 - \omega_2 = 2\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 2p$

Como ejemplo particular, asumir que $f(t)$ tiene la forma

$$f(t) = \begin{cases} fo & |t| < \tau \\ 0 & |t| \geq \tau \end{cases}$$

La transformada de Fourier de $f(t)$:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{f_o}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau}^{\tau} e^{-} i\omega t \, \mathrm{d}t \\ &= f_o \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega\tau}{\omega} \end{aligned}$$

Entonces es evidente que:

$$x(t) = -\frac{f_o}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega\tau e^{-i\omega\tau}}{\omega(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)} \, \mathrm{d}\omega$$

donde $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} - i\alpha$, $\omega_2 = -\sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} - i\alpha$. Las únicas singularidades son en $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$.

$$\sin \omega\tau = \frac{1}{2}(e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau})$$

Entonces $t > \tau$, la función $\frac{\sin \omega\tau e^{-i\omega\tau}}{\omega}$ está encerrada.
Esto da entonces que:

$$x(t) = \frac{2i\pi f_o}{\pi}[\frac{\sin \omega_1\tau e^{-i\omega_1\tau}}{\omega_1(\omega_1-\omega_2)} - \frac{\sin \omega_2\tau e^{-i\omega_2\tau}}{\omega_2(\omega_1-\omega_2}]$$

$$x(t) = \frac{2if_o}{\omega_1\omega_2(\omega_1-\omega_2}(\omega_2 \sin \omega_1\tau e^{-i\omega_1\tau} - \omega_2 \sin \omega_2\tau e^{-i\omega_2\tau})$$

Para una forma real hay que hacer que $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} - i\alpha$, $\omega_2 = -\sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} - i\alpha$; $\omega_1 \omega_2 = -\omega_o^2$ y expresar el seno en términos del exponencial:

$$x(t) = \frac{2i\pi f_o}{\pi}(e^{(\alpha+ip)(\tau-t)} + (e^{(\alpha-ip)(\tau-t)} - e^{-(\alpha+ip)(\tau-t)} - (e^{-(\alpha-ip)(\tau-t)}$$
$$+ (\frac{i\alpha}{p})(e^{(\alpha+ip)(\tau-t)} - (e^{(\alpha-ip)(\tau-t)} - e^{-(\alpha+ip)(\tau-t)} - (e^{-(\alpha-ip)(\tau-t)}))$$

Lo que es igual a

$$x(t) = \frac{2i\pi f_o}{\pi}[\cos p(t-\tau) + (\frac{i\alpha}{p}) \sin p(t-\tau)]e^{-\alpha(t-\tau)}$$
$$- \frac{2i\pi f_o}{\pi}[\cos p(t-\tau) + \frac{\alpha}{p} \sin(t-\tau)]e^{-\alpha(t-\tau)}$$

Para $t < -\tau$ el contorno cierra arriba y será cero

Parte II

Ejemplo 1

0.2. Definición vista en clase

Desarrollar el ejemplo 2 de las notas de las transformadas de Fourier. Ejemplo: Considerar el oscilador armónico amortiguado que actúa en una fuerza externa $g(t)$. El movimiento del oscilador está situado por la ecuación:

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_o^2 x(t) = f(t)$$

donde $f(t) = \frac{1}{m}g(t)$

Por definición, podemos extender este resultado a:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

Para este caso en específico utilzaremos:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(\omega)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Resulta evidente ver a $\hat{A}$ como la transformada de la ecuación diferencial, por lo que usando las propiedades de las derivadas de las transformadas obtenemos:

$$\mathcal{F}\{\dot{x}\} = -i\omega\mathcal{F}\{x\}$$
$$\mathcal{F}\{\ddot{x}\} = -\omega^2\mathcal{F}\{x\}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$-\omega^2 A(\omega) - 2\alpha\omega i A(\omega) + \omega_o^2 A(\omega) = F(\omega)$$

Despejando entonces $A(\omega)$

$$A(\omega) = \frac{F(\omega)}{(\omega_o^2 - \omega) - 2i\alpha\omega}$$
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)e^{-i\omega t}}{\omega_o^2 - \omega) - 2i\alpha\omega}$$

Igualando el denominador a cero podemos ver que:

$$\omega_o^2 - \omega) - 2i\alpha\omega = \zeta(\omega)$$

$$-\omega^2 - 2i\alpha\omega + \omega_o^2 = 0$$
$$\omega = -\frac{2i\alpha \pm \sqrt{4\omega_o^2 - 4\alpha^2}}{-2}$$
$$\omega = -i\alpha \pm \sqrt{-(\alpha^2 - \omega_o^2)}$$

Si los valores de $\alpha > 0$ quiere decir que los polos se localizan en:

$$\omega_{1,2} = \pm\sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} + i\alpha \text{ Si } \omega_o > \alpha$$

$$\omega_{1,2} = \pm i\sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} + i\alpha \text{ Si } \omega_o < \alpha$$

$$\omega_1 = \omega_2 = i\alpha \text{ doble raiz en } \omega_o = \alpha$$

Analizando el caso de dos polos simples:
En este caso tenemos que $\zeta(\omega) = -(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)$, evaluando los residuos tenemos que: En $\omega = \omega_1$

$$\frac{\hat{F}(\omega_1)e^{i\omega_1 t}}{\omega_1 - \omega_2}$$

En $\omega = \omega_2$

$$-\frac{\hat{F}(\omega_2)e^{i\omega_1 t}}{\omega_1 - \omega_2}$$

Donde $\omega_1 - \omega_2 = 2\sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} = 2\gamma$.
Consideramos al función de la forma:

$$f(t) = \begin{cases} fo & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$

La transformada de Fourier de $F(t)$

$$\begin{aligned}\hat{F}(\omega) &= f_o \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2f_o}{2}\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}|_{-\tau}^{\tau} \\ &= -\frac{f_o}{\pi\omega}\frac{e^{-i\omega\tau}-e^{-i\omega\tau}}{2i} \\ &= \frac{2f_o\sin\omega\tau}{\omega}\end{aligned}$$

Entonces las soluciones quedan:

$$x(t) = \frac{2f_o}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega\tau)e^{i\omega t}}{\omega(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}\,\mathrm{d}\omega$$

Se emplea el teorema del residuo y se observa que los polos se encuentran:

$$x(t) = \frac{2i\pi f_o}{\pi}\left(\frac{\sin(\omega_2\tau)e^{i\omega_2 t}}{\omega_2(\omega_1-\omega_2)} - \frac{\sin(\omega_1\tau)e^{i\omega_1 t}}{\omega_1(\omega_1-\omega_2)}\right)$$

Así queda entonces:

$$x(t) = \frac{2if_o}{\omega_1\omega_2(\omega_1-\omega_2)}(\sin(\omega_2\tau)e^{i\omega_2 t} - \sin(\omega_1\tau)e^{i\omega_1 t})$$

Para obtener una forma real proponemos entonces $\omega_1 = \gamma + i\alpha$, $\omega_2 = -\gamma + i\alpha$

$$\omega_1\omega_2 = -\omega_o^2$$

$$\omega_1 - \omega_2 = 2\gamma$$

$$\begin{aligned}x(t) = \frac{fo}{-\omega_o^2}((\gamma+i\alpha)(\frac{e^{2-(\gamma+i\alpha)\tau}-e^{-i(-\gamma+i\alpha)\tau}}{2})e^{i(-\gamma+i\alpha)\tau} \\ -(-\gamma+i\alpha)(\frac{e^{i(\gamma+i\alpha)\tau}-e^{-i(\gamma+i\alpha)\tau}}{2})e^{i(\gamma+i\alpha)\tau}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{f_0}{2\omega_o^2\gamma}\{(-\gamma+i\alpha)(e^{i(\gamma+i\alpha)\tau}-e^{-i(\gamma+i\alpha)\tau})e^{i(-\gamma+i\alpha)\tau} \\
&\quad -(\gamma+i\alpha)(e^{i(\gamma+i\alpha)\tau}-e^{-i(-\gamma+i\alpha)\tau})e^{i(-\gamma+i\alpha)\tau}\} \\
x(t) &= \frac{f_0}{2\omega_o^2}\{-e^{-\alpha+i\gamma)(\tau+t)}+e^{(-\alpha+i\gamma)(t-\tau)}-e^{-\alpha-i\gamma)(\tau+t)}+e^{(-\alpha-i\gamma)(t-\tau)} \\
&\quad +(\frac{i\alpha}{\gamma})(e^{-\alpha+i\gamma)(\tau+t)}-e^{(-\alpha+i\gamma)(t-\tau)}-e^{-\alpha-i\gamma)(\tau+t)}+e^{(-\alpha-i\gamma)(t-\tau)})\} \\
x(t) &= \frac{f_0}{2\omega_o^2}\{\cos(\gamma(t-\tau))+\frac{\alpha}{\gamma}\sin(\gamma(t-\tau))\}e^{-\alpha(t-\tau)} \\
&\quad -\frac{f_0}{2\omega_o^2}\{\cos(\gamma(t+\tau))+\frac{\alpha}{\gamma}\sin(\gamma(t+\tau))\}e^{-\alpha(t+\tau)}
\end{aligned}
$$

Parte III

Tarea 1 Ecuaciones diferenciales parciles

0.3. Primer ejercicio

A stretched string of length L is "plucked.ªt the point and it's initial shape is given by:

$$\mu(x,o) = \begin{cases} \frac{hx}{\varepsilon} & x < \varepsilon \\ \frac{h(l-x)}{L-\varepsilon} & x \leq \varepsilon \end{cases}$$

The initial distribution of velocities is zero, that is $\frac{\partial}{\partial t}\mu(x,o) = 0$. Show that the motion of the string is given by the equation:

$$\mu(x,t) = \frac{2h^2}{\pi^L \varepsilon(L-\varepsilon)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi\varepsilon}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

La solución general está dada por:

$$\mu(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{An \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + Bn \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Las condiciones iniciales $\frac{\partial \mu(x,t)}{\partial t} = V_o(x) = 0$

$$\frac{\partial \mu(x,t)}{\partial t} = Bn \frac{cn\pi}{L} \sin\left(\frac{xn\pi}{L}\right)$$

Por lo que $Bn = 0$ para cualquier n. Por lo tanto, obtenemos de la segunda condición inicial:

$$\mu(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} An \sin\left(\frac{xn\pi}{L}\right)$$

o

$$\mu(x,0) = An \sin\left(\frac{xn\pi}{L}\right)$$

Entonces necesitamos encontrar el coeficiente An, el cual obtenemos al transformar $\mu(x,0)$ a una serie seno de Fourier:

$$An = \frac{1}{L} \int_0^L \mu(x,0) \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \mathrm{d}x$$

$$An = \frac{1}{L}\{\int_0^{\varepsilon} x \sin\Big(\frac{nx\pi}{L}\Big)\,\mathrm{d}x + \frac{h}{L-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{L} x \sin\Big(\frac{nx\pi}{L}\Big)\,\mathrm{d}x\}$$

$$\int x \sin\Big(\frac{nx\pi}{L}\Big)\,\mathrm{d}x = -\frac{Lx}{n\pi} x \cos\Big(\frac{nx\pi}{L}\Big) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\Big(\frac{nx\pi}{L}\Big)$$

$$\begin{aligned} An = {} & \frac{1}{L}\{-\frac{Lx}{n\pi} x \cos\Big(\frac{nx\pi}{L}\Big) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\Big(\frac{nx\pi}{L}\Big)\}_0^{\varepsilon} \\ & + \frac{h}{L-\varepsilon}\{\sin\Big(\frac{nx\pi}{L}\Big)\}_{\varepsilon}^{L} \\ & - \frac{h}{L-\varepsilon}\{-\frac{Lx}{n\pi}\cos\Big(\frac{nx\pi}{L}\Big) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\Big(\frac{nx\pi}{L}\Big)\}_{\varepsilon}^{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} An = {} & \frac{2}{L}(-\frac{Lh}{n\pi}\cos\Big(\frac{n\pi\varepsilon}{L}\Big) + \frac{L^2h}{n^2\pi^2\varepsilon}\sin\Big(\frac{n\pi\varepsilon}{L}\Big) + \frac{L^2h}{n^2\pi^2(L-\varepsilon)}\cos\Big(\frac{n\pi\varepsilon}{L}\Big) \\ & - \frac{Lh\varepsilon}{n\pi(L-\varepsilon)}\cos\Big(\frac{n\pi\varepsilon}{L}\Big) + \frac{L^2h}{n^2\pi^2(L-\varepsilon)}\sin\Big(\frac{n\pi\varepsilon}{L}\Big)) \end{aligned}$$

$$\frac{2h}{n^2\pi^2}\left(\frac{L\sin\big(\frac{n\pi\varepsilon}{L}\big) - n\pi\varepsilon\cos\big(\frac{n\pi\varepsilon}{L}\big)}{\varepsilon} + \frac{L\sin\big(\frac{n\pi\varepsilon}{L}\big) + n\pi(L-\varepsilon)\cos\big(\frac{n\pi\varepsilon}{L}\big)}{L-\varepsilon}\right)$$

$$An = \frac{2hL^2}{\pi^2\varepsilon(L-\varepsilon)n^2}\sin\Big(\frac{n\pi\varepsilon}{L}\Big)$$

Finalmente con $Bn = 0$

$$\mu(x,t) = \frac{2hL^2}{\pi^2\varepsilon(L-\varepsilon)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\Big(\frac{n\pi\varepsilon}{L}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\cos\Big(\frac{n\pi ct}{L}\Big)$$

0.4. Segundo ejercicio

When a piano string of lenght L is stuck by the piano hammer near the point $x = \varepsilon$, it's assumed that the inicial distribution of velocities is given by:

$$v_o(x) = \begin{cases} v_o \cos\left(\frac{\pi(x-\varepsilon)}{d}\right) & \text{para } |x-\varepsilon| < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{para } |x-\varepsilon| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

Asumimos que no hay un desplazamiento inicial y que el movimiento está dado por:

$$\mu(x,t) = \frac{4v_o D}{\pi^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin\left(\frac{n\pi\varepsilon}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi\varepsilon}{2L}\right)}{1-\frac{n^2 d^2}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

La solución general de la ecuación diferencial se puede expresar como:

$$\mu(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{An \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + Bn \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Para las condiciones iniciales de $\mu(x,0) = 0$ podemos ver que:

$$\mu(x,0) = An \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Lo cual es igual a cero, lo que nos dice que $An = 0$, por lo tanto la solución queda expresada solo en términos de Bn, entonces expandiendo a v_o en la serie senos de Fourier obtenemos:

$$Bn = \frac{L}{cn\pi} \frac{2}{L} \int_0^L v_o(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x$$

$$Bn = \frac{2}{cn\pi} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon} v_o(x) \cos\left(\frac{\pi(x-\varepsilon)}{d}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x$$

Al resolver la integral podemos ver que:

$$Bn = \frac{4v_o d}{c\pi^2 n} \frac{\sin\left(\frac{n\pi\varepsilon}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)}{1-\frac{d^2 n^2}{L^2}}$$

Regresando a la función inicial vemos que:

$$\mu(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\frac{4v_o d}{c\pi^2 n} \frac{\sin\left(\frac{n\pi\varepsilon}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)}{1-\frac{d^2 n^2}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Parte IV

Tarea 2

0.5. Primer ejercicio

Demostrar que $\mathcal{J}_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{x\pi}}\cos(x)$

$$\mathcal{J}_{-1/2}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\pi(k+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

0.6. Segundo ejercicio

Demostrar que las funciones son soluciones de la ecuación diferencia:

$$x^2$$