Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de ingeniería

Teoría electromagnética 2

ADA 2, Ley de ampere, corrientes circulares

Erick Al. Casanova Cortés
Matricula: 15014866

Docente
Dr. O. Carvente

Fecha de entrega: 18 Marzo 2021

Instrucciones

Resolver de modo numérico con ayuda de algún software el siguiente ejercicio:

Ejercicio

Corrientes, encontrar la fuerza que I' ejerce sobre I.

Partiendo de la ley de Ampere tenemos que definir los vectores que vamos a utilizar, los cuales serán

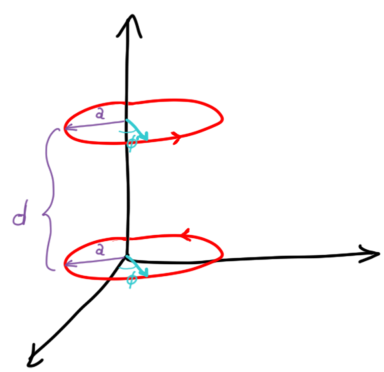

Figura 1: Dos circuitos

$$\vec{r}' = a\cos\varphi'\hat{i} + a\sin\varphi'\hat{j}$$
$$\vec{r} = a\cos\varphi\hat{i} + a\sin\varphi\hat{j} + d\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{r} - \vec{r}' &= a\cos\varphi\hat{i} + a\sin\varphi\hat{j} + d\hat{k} - (a\cos\varphi'\hat{i} + a\sin\varphi'\hat{j}) \\ &= a(\cos\varphi - \cos\varphi')\hat{i} + a(\sin\varphi - \sin\varphi')\hat{j} + d\hat{k}\end{aligned}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{a^2(\cos\varphi - \cos\varphi')^2 + a^2(\sin\varphi - \sin\varphi')^2 + d^2}$$

$$\mathrm{d}s' = a\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi'$$
$$\mathrm{d}s = a\left(-\sin\varphi\hat{\imath} + \cos\varphi\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi$$

Entonces la fuerza que ejerce C sobre C' es

$$\vec{F}_{C'\to C} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a\left(-\sin\varphi\hat{\imath} + \cos\varphi\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi \times \left[a\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi' \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]$$

Para resolver esta integral se opto por utilizar python, antes de meterla al programa hay que hacerle un tratamiento, como principio, podemos ver que a es una constante, por lo que podemos reescribir la ecuación como

$$\vec{F}_{C'\to C} = \frac{\mu_0 a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\sin\varphi\hat{\imath} + \cos\varphi\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi \times \left[\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi' \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]$$

Analizando el producto cruz $\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi' \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$, sustituyendo los valores podemos ver que

$$\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi' \times \frac{a(\cos\varphi-\cos\varphi')\hat{\imath} + a(\sin\varphi-\sin\varphi')\hat{\jmath} + d\hat{k}}{(a^2(\cos\varphi-\cos\varphi')^2 + a^2(\sin\varphi-\sin\varphi')^2 + d^2)^{3/2}}$$

Analizando solo la parte vectorial

$$\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right) \times \left[a(\cos\varphi-\cos\varphi')\hat{\imath} + a(\sin\varphi-\sin\varphi')\hat{\jmath} + d\hat{k}\right]$$

Expandiendo usando distributividad

$$\begin{aligned}\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right) \times \left[a(\cos\varphi-\cos\varphi')\hat{\imath} + a(\sin\varphi-\sin\varphi')\hat{\jmath} + d\hat{k}\right] = \\ -\sin\varphi' * a(\cos\varphi-\cos\varphi')\left(\hat{\imath}\times\hat{\imath}\right) - \sin\varphi' * a(\sin\varphi-\sin\varphi')\left(\hat{\imath}\times\hat{\jmath}\right) - \sin\varphi' * d\left(\hat{\imath}\times\hat{k}\right) \\ + \cos\varphi' * a(\cos\varphi-\cos\varphi')\left(\hat{\jmath}\times\hat{\imath}\right) + \cos\varphi' * a(\sin\varphi-\sin\varphi')\left(\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}\right) + \cos\varphi' * d\left(\hat{\jmath}\times\hat{k}\right)\end{aligned}$$

Es evidente que algunos de estos términos se anularán, quedándonos como:

$$\left(-\sin\varphi'\hat{\imath}+\cos\varphi'\hat{\jmath}\right)\times\left[a(\cos\varphi-\cos\varphi')\hat{\imath}+a(\sin\varphi-\sin\varphi')\hat{\jmath}+d\hat{k}\right]=$$
$$-\sin\varphi' * a(\sin\varphi-\sin\varphi')\hat{k}+d\sin\varphi'\hat{\jmath}$$
$$-\cos\varphi' * a(\cos\varphi-\cos\varphi')\hat{k}+d\cos\varphi'\hat{\imath}$$

Agrupando términos semejantes:

$$\left(-\sin\varphi'\hat{\imath}+\cos\varphi'\hat{\jmath}\right)\times\left[a(\cos\varphi-\cos\varphi')\hat{\imath}+a(\sin\varphi-\sin\varphi')\hat{\jmath}+d\hat{k}\right]=$$
$$d\cos\varphi'\hat{\imath}+d\sin\varphi'\hat{\jmath}-a\left(\sin\varphi'\sin\varphi+\cos\varphi'\cos\varphi-\cos^2\varphi'-\sin^2\varphi'\right)\hat{k}$$

Podemos identificar dos identidades trigonométricas en esta ecuación

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$$

Por lo que nos queda la expresión como:

$$\left(-\sin\varphi'\hat{\imath}+\cos\varphi'\hat{\jmath}\right)\times\left[a(\cos\varphi-\cos\varphi')\hat{\imath}+a(\sin\varphi-\sin\varphi')\hat{\jmath}+d\hat{k}\right]=$$
$$d\cos\varphi'\hat{\imath}+d\sin\varphi'\hat{\jmath}-a\left[\cos(\varphi-\varphi')-1\right]\hat{k}$$

Regresando a la expresión dentro de la integral:

$$\vec{F}_{C'\to C}=\frac{\mu_0 a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(-\sin\varphi\hat{\imath}+\cos\varphi\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi\times d\cos\varphi'\hat{\imath}+d\sin\varphi'\hat{\jmath}-a\left[\cos(\varphi-\varphi')-1\right]\hat{k}}{\left(a^2(\cos\varphi-\cos\varphi')^2+a^2(\sin\varphi-\sin\varphi')^2+d^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}\varphi'$$

Volviendo a hacer un análisis de las componentes vectoriales

$$\left(-\sin\varphi\hat{\imath}+\cos\varphi\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi\times\{d\cos\varphi'\hat{\imath}+d\sin\varphi'\hat{\jmath}-a\left[\cos(\varphi-\varphi')-1\right]\hat{k}\}$$

Aplicando de nuevo distributividad

$$\left(-\sin\varphi\hat{\imath}+\cos\varphi\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi\times\{d\cos\varphi'\hat{\imath}+d\sin\varphi'\hat{\jmath}-a\left[\cos(\varphi-\varphi')-1\right]\hat{k}\}$$
$$-d\sin\varphi\cos\varphi'\hat{\imath}*\hat{\imath}-d\sin\varphi\sin\varphi'\hat{\imath}*\hat{\jmath}+a\sin\varphi\left[\cos(\varphi-\varphi')-1\right]\hat{\imath}*\hat{k}$$
$$+d\cos\varphi\cos\varphi'\hat{\jmath}*\hat{\imath}+d\cos\varphi\sin\varphi'\hat{\jmath}*\hat{\jmath}-a\cos\varphi\left[\cos(\varphi-\varphi')-1\right]\hat{\jmath}*\hat{k}$$

Lo que nos queda de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\left(-\sin\varphi\hat{\imath}+\cos\varphi\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi\times\{d\cos\varphi'\hat{\imath}+d\sin\varphi'\hat{\jmath}-a\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{k}\} \\
-d\sin\varphi\sin\varphi'\hat{k}-a\sin\varphi\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{\jmath} \\
-d\cos\varphi\cos\varphi'\hat{k}-a\cos\varphi\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{\imath}
\end{aligned}
$$

Agrupando términos semejantes

$$
\begin{aligned}
\left(-\sin\varphi\hat{\imath}+\cos\varphi\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi\times\{d\cos\varphi'\hat{\imath}+d\sin\varphi'\hat{\jmath}-a\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{k}\}= \\
-a\cos\varphi\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{\imath}-a\sin\varphi\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{\jmath}-d\left(\sin\varphi\sin\varphi'+\cos\varphi\cos\varphi'\right)\hat{k}
\end{aligned}
$$

Retomando una de las igualdades trigonométricas vistas con anterioridad:

$$
\begin{aligned}
\left(-\sin\varphi\hat{\imath}+\cos\varphi\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi\times\{d\cos\varphi'\hat{\imath}+d\sin\varphi'\hat{\jmath}-a\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{k}\}= \\
-a\cos\varphi\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{\imath}-a\sin\varphi\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{\jmath}-d\cos\left(\varphi-\varphi'\right)\hat{k}
\end{aligned}
$$

Regresando a la integral:

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{C'\to C}=\frac{\mu_0 a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}&\frac{-a\cos\varphi\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{\imath}}{\left(a^2(\cos\varphi-\cos\varphi')^2+a^2(\sin\varphi-\sin\varphi')^2+d^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varphi' \\
+\frac{\mu_0 a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}&\frac{-a\sin\varphi\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{\jmath}}{\left(a^2(\cos\varphi-\cos\varphi')^2+a^2(\sin\varphi-\sin\varphi')^2+d^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varphi' \\
+\frac{\mu_0 a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}&\frac{-d\cos\left(\varphi-\varphi'\right)\hat{k}}{\left(a^2(\cos\varphi-\cos\varphi')^2+a^2(\sin\varphi-\sin\varphi')^2+d^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varphi'
\end{aligned}
$$

Integración numérica

Las tres integrales que nos quedan son mucho más fáciles de programar, para esto se hizo una librería en python que integra con la regla del trapecio, un método para calcular aproximadamente el valor de una integral definida.

Si se desea ver dicha librería se puede acceder desde este repositorio `https://github.com/tlacloc/Python_Numerical_Integration_Tool`

Una vez con la librería los cálculos son bastante fáciles, primero se hizo una notebook de jupyter para plantear las integrales, el código en sí se basa en tres partes,

- la definición de cada integral,
- definir constantes y precisión,
- iteraciones para el resultado

Para esta propuesta se hizo las siguientes definiciones

- $a = 1$
- $d = 0.01$
- precision = 500

Generándonos el siguiente resultado

$$F = 2.47217 \times 10^{-22}\hat{\imath} + 3.17913 \times 10^{-21}\hat{\jmath} - 1.25636 \times 10^{-4}\hat{k}$$

Se puede cambiar para cualquier valor de a y d, solo hay que tener en cuenta que para una precisión de 500, el resultado toma aproximadamente media hora[1], Aunque la ventaja de este modelo, es que se puede modificar la precisión dependiendo de la capacidad de cálculo de cada computadora, volviéndolo más o menos preciso al modificar el número de iteraciones.

Analizando el resultado, podemos ver a simple vista que los términos en las componentes $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ son de repulsión, aunque prácticamente nulos, al tener una magnitud en el orden de $\sim 10\times^{-21}$, quedando sólo los términos en el eje de las $\hat{k}$, el cual resulta ser de atracción

[1] Cálculos hechos en una MacBook Pro, 2.5 GHz Dual-Core Intel Core i5, 16 GB 1600 MHz DDR3