

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN
FACULTAD DE INGENIERÍA

TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA 2

ADA 2, Ley de ampere, corrientes circulares



Erick Al. Casanova Cortés

Matricula: 15014866

DOCENTE

DR. O. CARVENTE

Fecha de entrega: 18 Marzo 2021

Instrucciones

Resolver de modo numérico con ayuda de algún software el siguiente ejercicio:

Ejercicio

Corrientes, encontrar la fuerza que I' ejerce sobre I .

Partiendo de la ley de Ampere tenemos que definir los vectores que vamos a utilizar, los cuales serán

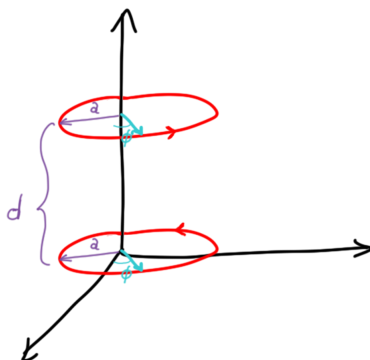


Figura 1: Dos circuitos

$$\vec{r}' = a \cos \varphi' \hat{i} + a \sin \varphi' \hat{j}$$

$$\vec{r} = a \cos \varphi \hat{i} + a \sin \varphi \hat{j} + d \hat{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}' &= a \cos \varphi \hat{i} + a \sin \varphi \hat{j} + d \hat{k} - (a \cos \varphi' \hat{i} + a \sin \varphi' \hat{j}) \\ &= a(\cos \varphi - \cos \varphi') \hat{i} + a(\sin \varphi - \sin \varphi') \hat{j} + d \hat{k} \end{aligned}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{a^2(\cos \varphi - \cos \varphi')^2 + a^2(\sin \varphi - \sin \varphi')^2 + d^2}$$

$$ds' = a \left(-\sin \varphi' \hat{i} + \cos \varphi' \hat{j} \right) d\varphi'$$

$$ds = a \left(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \right) d\varphi$$

Entonces la fuerza que ejerce C sobre C' es

$$\vec{F}_{C' \rightarrow C} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a \left(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \right) d\varphi \times \left[a \left(-\sin \varphi' \hat{i} + \cos \varphi' \hat{j} \right) d\varphi' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

Para resolver esta integral se opto por utilizar python, antes de meterla al programa hay que hacerle un tratamiento, como principio, podemos ver que a es una constante, por lo que podemos reescribir la ecuación como

$$\vec{F}_{C' \rightarrow C} = \frac{\mu_0 a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \right) d\varphi \times \left[\left(-\sin \varphi' \hat{i} + \cos \varphi' \hat{j} \right) d\varphi' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

Analizando el producto cruz $\left(-\sin \varphi' \hat{i} + \cos \varphi' \hat{j} \right) d\varphi' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$, sustituyendo los valores podemos ver que

$$\left(-\sin \varphi' \hat{i} + \cos \varphi' \hat{j} \right) d\varphi' \times \frac{a(\cos \varphi - \cos \varphi') \hat{i} + a(\sin \varphi - \sin \varphi') \hat{j} + d\hat{k}}{(a^2(\cos \varphi - \cos \varphi')^2 + a^2(\sin \varphi - \sin \varphi')^2 + d^2)^{3/2}}$$

Analizando solo la parte vectorial

$$\left(-\sin \varphi' \hat{i} + \cos \varphi' \hat{j} \right) \times \left[a(\cos \varphi - \cos \varphi') \hat{i} + a(\sin \varphi - \sin \varphi') \hat{j} + d\hat{k} \right]$$

Expandiendo usando distributividad

$$\begin{aligned} & \left(-\sin \varphi' \hat{i} + \cos \varphi' \hat{j} \right) \times \left[a(\cos \varphi - \cos \varphi') \hat{i} + a(\sin \varphi - \sin \varphi') \hat{j} + d\hat{k} \right] = \\ & -\sin \varphi' * a(\cos \varphi - \cos \varphi') \left(\hat{i} \times \hat{i} \right) - \sin \varphi' * a(\sin \varphi - \sin \varphi') \left(\hat{i} \times \hat{j} \right) - \sin \varphi' * d \left(\hat{i} \times \hat{k} \right) \\ & + \cos \varphi' * a(\cos \varphi - \cos \varphi') \left(\hat{j} \times \hat{i} \right) + \cos \varphi' * a(\sin \varphi - \sin \varphi') \left(\hat{j} \times \hat{j} \right) + \cos \varphi' * d \left(\hat{j} \times \hat{k} \right) \end{aligned}$$

Es evidente que algunos de estos términos se anularán, quedándonos como:

$$\begin{aligned} \left(-\sin \varphi' \hat{i} + \cos \varphi' \hat{j} \right) \times \left[a(\cos \varphi - \cos \varphi') \hat{i} + a(\sin \varphi - \sin \varphi') \hat{j} + d\hat{k} \right] = \\ -\sin \varphi' * a(\sin \varphi - \sin \varphi') \hat{k} + d \sin \varphi' \hat{j} \\ -\cos \varphi' * a(\cos \varphi - \cos \varphi') \hat{k} + d \cos \varphi' \hat{i} \end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes:

$$\begin{aligned} \left(-\sin \varphi' \hat{i} + \cos \varphi' \hat{j} \right) \times \left[a(\cos \varphi - \cos \varphi') \hat{i} + a(\sin \varphi - \sin \varphi') \hat{j} + d\hat{k} \right] = \\ d \cos \varphi' \hat{i} + d \sin \varphi' \hat{j} - a \left(\sin \varphi' \sin \varphi + \cos \varphi' \cos \varphi - \cos^2 \varphi' - \sin^2 \varphi' \right) \hat{k} \end{aligned}$$

Podemos identificar dos identidades trigonométricas en esta ecuación

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ \cos(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

Por lo que nos queda la expresión como:

$$\begin{aligned} \left(-\sin \varphi' \hat{i} + \cos \varphi' \hat{j} \right) \times \left[a(\cos \varphi - \cos \varphi') \hat{i} + a(\sin \varphi - \sin \varphi') \hat{j} + d\hat{k} \right] = \\ d \cos \varphi' \hat{i} + d \sin \varphi' \hat{j} - a [\cos(\varphi - \varphi') - 1] \hat{k} \end{aligned}$$

Regresando a la expresión dentro de la integral:

$$\vec{F}_{C' \rightarrow C} = \frac{\mu_0 a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left(-\sin \varphi' \hat{i} + \cos \varphi' \hat{j} \right) d\varphi \times d \cos \varphi' \hat{i} + d \sin \varphi' \hat{j} - a [\cos(\varphi - \varphi') - 1] \hat{k}}{(a^2(\cos \varphi - \cos \varphi')^2 + a^2(\sin \varphi - \sin \varphi')^2 + d^2)^{3/2}} d\varphi'$$

Volviendo a hacer un análisis de las componentes vectoriales

$$\left(-\sin \varphi' \hat{i} + \cos \varphi' \hat{j} \right) d\varphi \times \{ d \cos \varphi' \hat{i} + d \sin \varphi' \hat{j} - a [\cos(\varphi - \varphi') - 1] \hat{k} \}$$

Aplicando de nuevo distributividad

$$\begin{aligned} \left(-\sin \varphi' \hat{i} + \cos \varphi' \hat{j} \right) d\varphi \times \{ d \cos \varphi' \hat{i} + d \sin \varphi' \hat{j} - a [\cos(\varphi - \varphi') - 1] \hat{k} \} \\ -d \sin \varphi \cos \varphi' \hat{i} * \hat{i} - d \sin \varphi \sin \varphi' \hat{i} * \hat{j} + a \sin \varphi [\cos(\varphi - \varphi') - 1] \hat{i} * \hat{k} \\ +d \cos \varphi \cos \varphi' \hat{j} * \hat{i} + d \cos \varphi \sin \varphi' \hat{j} * \hat{j} - a \cos \varphi [\cos(\varphi - \varphi') - 1] \hat{j} * \hat{k} \end{aligned}$$

Lo que nos queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \left(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \right) d\varphi \times \{ d \cos \varphi' \hat{i} + d \sin \varphi' \hat{j} - a [\cos (\varphi - \varphi') - 1] \hat{k} \} \\ & \quad - d \sin \varphi \sin \varphi' \hat{k} - a \sin \varphi [\cos (\varphi - \varphi') - 1] \hat{j} \\ & \quad - d \cos \varphi \cos \varphi' \hat{k} - a \cos \varphi [\cos (\varphi - \varphi') - 1] \hat{i} \end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes

$$\begin{aligned} & \left(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \right) d\varphi \times \{ d \cos \varphi' \hat{i} + d \sin \varphi' \hat{j} - a [\cos (\varphi - \varphi') - 1] \hat{k} \} = \\ & -a \cos \varphi [\cos (\varphi - \varphi') - 1] \hat{i} - a \sin \varphi [\cos (\varphi - \varphi') - 1] \hat{j} - d (\sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi') \hat{k} \end{aligned}$$

Retomando una de las igualdades trigonométricas vistas con anterioridad:

$$\begin{aligned} & \left(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \right) d\varphi \times \{ d \cos \varphi' \hat{i} + d \sin \varphi' \hat{j} - a [\cos (\varphi - \varphi') - 1] \hat{k} \} = \\ & -a \cos \varphi [\cos (\varphi - \varphi') - 1] \hat{i} - a \sin \varphi [\cos (\varphi - \varphi') - 1] \hat{j} - d \cos (\varphi - \varphi') \hat{k} \end{aligned}$$

Regresando a la integral:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{C' \rightarrow C} &= \frac{\mu_0 a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-a \cos \varphi [\cos (\varphi - \varphi') - 1] \hat{i}}{(a^2 (\cos \varphi - \cos \varphi')^2 + a^2 (\sin \varphi - \sin \varphi')^2 + d^2)^{3/2}} d\varphi d\varphi' \\ &+ \frac{\mu_0 a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin \varphi [\cos (\varphi - \varphi') - 1] \hat{j}}{(a^2 (\cos \varphi - \cos \varphi')^2 + a^2 (\sin \varphi - \sin \varphi')^2 + d^2)^{3/2}} d\varphi d\varphi' \\ &+ \frac{\mu_0 a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-d \cos (\varphi - \varphi') \hat{k}}{(a^2 (\cos \varphi - \cos \varphi')^2 + a^2 (\sin \varphi - \sin \varphi')^2 + d^2)^{3/2}} d\varphi d\varphi' \end{aligned}$$

Integración numérica

Las tres integrales que nos quedan son mucho más fáciles de programar, para esto se hizo una librería en python que integra con la regla del trapecio, un método para calcular aproximadamente el valor de una integral definida.

Si se desea ver dicha librería se puede acceder desde este repositorio https://github.com/tlacloc/Python_Numerical_Integration_Tool

Una vez con la librería los cálculos son bastante fáciles, primero se hizo una notebook de jupyter para plantear las integrales, el código en sí se basa en tres partes,

- la definición de cada integral,
- definir constantes y precisión,
- iteraciones para el resultado

Para esta propuesta se hizo las siguientes definiciones

- $a = 1$
- $d = 0.01$
- $\text{precision} = 500$

Generándonos el siguiente resultado

$$F = 2.47217 \times 10^{-22} \hat{i} + 3.17913 \times 10^{-21} \hat{j} - 1.25636 \times 10^{-4} \hat{k}$$

Se puede cambiar para cualquier valor de a y d , solo hay que tener en cuenta que para una precisión de 500, el resultado toma aproximadamente media hora¹, Aunque la ventaja de este modelo, es que se puede modificar la precisión dependiendo de la capacidad de cálculo de cada computadora, volviéndolo más o menos preciso al modificar el número de iteraciones.

Analizando el resultado, podemos ver a simple vista que los términos en las componentes \hat{i} y \hat{j} son de repulsión, aunque prácticamente nulos, al tener una magnitud en el orden de $\sim 10 \times 10^{-21}$, quedando sólo los términos en el eje de las \hat{k} , el cual resulta ser de atracción.

A continuación se anexa la notebook donde se hicieron los cálculos de las integrales.

¹Cálculos hechos en una MacBook Pro, 2.5 GHz Dual-Core Intel Core i5, 16 GB 1600 MHz DDR3

Instrucciones

El objetivo de este ejercicio es resolver de manera numérica la siguiente integral

$$\vec{F}_{C' \rightarrow C} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a \left(-\sin \varphi \hat{i} + a \cos \varphi \hat{j} \right) d\varphi' \times \left[a \left(-\sin \varphi' \hat{i} + a \cos \varphi' \hat{j} \right) d\varphi' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

Donde $\vec{r} - \vec{r}'$ esta dado por

$$\vec{r} - \vec{r}' = a(\cos \varphi - \cos \varphi')\hat{i} + a(\sin \varphi - \sin \varphi')\hat{j} + d\hat{k}$$

Y entonces $|\vec{r} - \vec{r}'|$ queda de la siguiente forma

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{a^2(\cos \varphi - \cos \varphi')^2 + a^2(\sin \varphi - \sin \varphi')^2 + d^2}$$

Dicha integral se trabajo con el fin de hacerla más fácil expresar en el programa, de modo que se separó en tres integrales, las cuales son:

$$A_1 = \frac{\mu_0 a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-a \cos \varphi [\cos(\varphi - \varphi') - 1] \hat{i}}{(a^2(\cos \varphi - \cos \varphi')^2 + a^2(\sin \varphi - \sin \varphi')^2 + d^2)^{3/2}} d\varphi d\varphi'$$

$$A_2 = \frac{\mu_0 a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin \varphi [\cos(\varphi - \varphi') - 1] \hat{j}}{(a^2(\cos \varphi - \cos \varphi')^2 + a^2(\sin \varphi - \sin \varphi')^2 + d^2)^{3/2}} d\varphi d\varphi'$$

$$A_3 = \frac{\mu_0 a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-d \cos(\varphi - \varphi') \hat{k}}{(a^2(\cos \varphi - \cos \varphi')^2 + a^2(\sin \varphi - \sin \varphi')^2 + d^2)^{3/2}} d\varphi d\varphi'$$

Cargando librerías

```
[1]: import sys
sys.path.append("0027numeric_integration"0027)
from numeric_integration.integration import Integrate
from numpy import sin, cos, pi
```

Definiendo la función

```
[2]: def test(x, y):
    return sin(x)*sin(y)
```

```
[3]: # definiendo el valor de las constantes de la integral:
mu_0 = 1.25663706212*(10**(-6))
a = 1
d = 0.01
pres = 500 #mientras mas grande, mejora la precisión del resultado (aumenta le
→ tiempo de calculo)
```

```
[4]: def A1(x, y):
      return -(a*cos(x)*(cos(x-y)-1))/(((a**2)*(cos(x)-cos(y))**2 +
→ (a**2)*(sin(x)-sin(y))**2 + d**2)**(3/2))
```

```
[5]: def A2(x, y):
      return -(a * sin(x)*(cos(x-y)-1))/(((a**2)*(cos(x)-cos(y))**2 +
→ (a**2)*(sin(x)-sin(y))**2 + d**2)**(3/2))
```

```
[6]: def A3(x, y):
      return -(d*cos(x-y))/(((a**2)*(cos(x)-cos(y))**2 +
→ (a**2)*(sin(x)-sin(y))**2 + d**2)**(3/2))
```

Resultado

A1

```
[7]: # Build an Integrate object
integral = Integrate(A1)

# Calculate the integral
A1_result = integral.double_integral([0, 2*pi], [0, 2*pi], precision=pres)

# Show the result
print("The result is", A1_result)
print("\nThe accuracy of this result is", integral.error)
```

100%|■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■| 3140/3140 [09:39<00:00, 5.42it/s]

The result is 2.4721723827130296e-15

The accuracy of this result is 5.754304774644933e-15

A2

```
[8]: # Build an Integrate object
integral = Integrate(A2)

# Calculate the integral
A2_result = integral.double_integral([[0, 2*pi], [0, 2*pi]], precision=pres)

# Show the result
print("The result is", A2_result)
print("\nThe accuracy of this result is", integral.error)
```

100%|■■■■■■■■■■| 3140/3140 [10:21<00:00, 5.06it/s]

The result is 3.179133935467724e-14

The accuracy of this result is 1.1890124482780083e-13

A3

```
[9]: # Build an Integrate object
integral = Integrate(A3)

# Calculate the integral
A3_result = integral.double_integral([[0, 2*pi], [0, 2*pi]], precision=pres)

# Show the result
print("The result is", A3_result)
print("\nThe accuracy of this result is", integral.error)
```

100%|■■■■■■■■■■| 3140/3140 [09:14<00:00, 5.67it/s]

The result is -1256.3613304219446

The accuracy of this result is -2.2737367544323206e-13

Suma de las integrales

```
[10]: #componentes

iv = ((mu_0*a**2)/(4*pi))*A1_result
jv = ((mu_0*a**2)/(4*pi))*A2_result
kv = ((mu_0*a**2)/(4*pi))*A3_result
```

Fuerza total

```
[11]: print("0027F ="0027, iv , "0027i +"0027, jv , "0027j +"0027, kv , "0027k"0027 )
```

$F = 2.4721723840588204e-22 \text{ i} + 3.1791339371983674e-21 \text{ j} +$
 $-0.00012563613311058773 \text{ k}$

Modulo de la fuerza

```
[12]: print("0027|F| ="0027, iv**2 + jv**2 + kv**2)
```

$|F| = 1.5784437942981317e-08$

```
[ ]:
```