Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de ingeniería

Métodos matemáticos de la física

Segundo examen

Erick Al. Casanova Cortés
Matricula: 15014866

Docente
Dr. Miguel Zambrano

Fecha de entrega: 5 Febrero 2021

Una esfera hueca de radio que esta dividida en dos por el ecuador por un aislante delgado. La mitad superior se encuentra a un potencial constante V_0 y el hemisferio inferior a un potencial nulo, como se muestra en la figura.

Demostrar que el potencial dentro de la esfera esta dado por:

$$\phi(r,\theta) = \frac{V_0}{2}\{1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!(4n+3)}{2^{2n}(n!)(2n+2)} \left(\frac{r}{c}\right)^{2n+1} P_{2n+1}\cos(\theta)\} \tag{1}$$

mientras que en el potencial exterior es:

$$\phi(r,\theta) = \frac{V_0 c}{2r}\{1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!(4n+3)}{2^{2n}(n!)(2n+2)} \left(\frac{c}{r}\right)^{2n+1} P_{2n+1}\cos(\theta)\} \tag{2}$$

Ayuda: resolver la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi(r,\theta,\varphi) = 0$ en coordenadas esféricas

Primero haremos el cálculo de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, la cual está expresada de la forma

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)F(r,\theta,\varphi) = 0 \tag{3}$$

De esto partimos que la función $F(r,\theta,\varphi)$ puede expresarse de tal forma que $F(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Por lo que podemos multiplicar ambas partes de la ecuación 3 por $\frac{r^2}{F}$, lo cual queda expresado como:

$$\frac{r^2}{F}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)F(r,\theta,\varphi) = 0$$

Sustituyendo a $F(r,\theta,\varphi)$ por la propuesta

$$\frac{r^2}{R\Theta\Phi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)R\Theta\Phi = 0$$

Ahora se expandirá la ecuación a conveniencia de tal modo que dejaremos los términos que dependen del radio de un lado y agruparemos los términos que dependen del ángulo polar o azimutal; quedando entonces:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}R = -\frac{1}{\Theta\Phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\Theta\Phi$$

Como r, θ y φ son variables independientes quiere decir que ambos términos son iguales a una constante, lo que quiere decir que

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}R = \mathcal{C} \tag{4}$$

$$-\frac{1}{\Theta\Phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\Theta\Phi = \mathcal{C} \tag{5}$$

si a la ecuación 5 la multiplicamos por $\sin^2\theta$ tenemos:

$$-\frac{1}{\Theta\Phi}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\Theta\Phi = \mathcal{C}\sin^2\theta$$

Agrupando la ecuación en sus términos dependientes nos queda la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Theta + \mathcal{C}\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi$$

Como anteriormente se vio, para que esta igualdad se cumpla, ambas partes de dicha ecuación deberán ser igualadas a una constante. Lo cual queda de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Theta + \mathcal{C}\sin^2\theta = \mathcal{B} \tag{6}$$

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi = \mathcal{B} \tag{7}$$

Haciendo un despeje de la ecuación 7 podemos ver que podemos encontrar una solución, como se ve a continuación

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi = -\Phi\mathcal{B}$$

al resolver la ecuación diferencial podemos ver que Φ está dada por:

$$\Phi(\varphi) = e^{\pm i\sqrt{\mathcal{B}}\varphi}$$

Si hacemos un análisis de esta ecuación podemos ver que es periódica con un ciclo de 2π, lo que implica:

$$e^{\pm i\sqrt{\mathcal{B}}\varphi} = e^{\pm i\sqrt{\mathcal{B}}(\varphi+2\pi)}$$

En otras palabras, lo que quiere decir es que $\sqrt{\mathcal{B}}$ debe ser un entero, y por fines prácticos haremos la igualdad $\sqrt{\mathcal{B}} = k^2$, regresando a la solución tenemos entonces que la parte de Φ queda expresada como:

$$\Phi(\varphi) = e^{\pm ik^2\varphi}$$

Pasando ahora a la parte que depende de Θ, partimos de la ecuación 6 y tomando la igualdad que encontramos anterior, la cual nos afirma que $\sqrt{\mathcal{B}} = k^2$

$$\frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Theta + \mathcal{C}\sin^2\theta = k^2$$

Para hacer resolver esta ecuación diferencial tendremos que hacer un cambio de variable, el cual será proponer una función a modo que:

$$x = \cos\theta$$

Haciendo la regla de la cadena podemos ver:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta} &= \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x}\\ &= -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$

Por otra parte tenemos la igualdad

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

Por lo que con nuestro cambio de variable podemos ver que $\sin^2\theta = 1 - x^2$. Sustituyendo en la ecuación y haciendo $\Theta(\theta) = y(x)$ podemos ver que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + \left(\mathcal{C} - \frac{k^2}{1-x^2}\right)y = 0$$

Con esta ecuación podemos ver el conflicto de que diverge para $x = \pm 1$, a menos que hagamos que $\mathcal{C} = c(c+1)$ lo que nos lleva a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + \left(c(c+1) - \frac{k^2}{1-x^2}\right)y = 0$$

Otra cosa que tenemos que tener en cuenta es que para obtener una solución aceptable debemos hacer que $-c \leq k \leq c$. Entonces la solución de esta ecuación se puede expresar como su polinomio de Legendre asociado:

$$y(x) = P_c^{|k|}(x)$$

La solución para $k = 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 - x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) + c(c+1)y(x) = 0$$

Regresando entonces a nuestras variables iniciales

$$\Theta(\theta) = P_c^{|k|}(\cos\theta)$$

La parte que depende del radio de la ecuación de Laplace lo vimos anteriormente, y con las condiciones que hemos generado hasta ahora podemos expresarla de tal modo que:

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}R + 2r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R = c(c+1)R$$

Esta parte se debe resolver con un cambio de variable especial, se hará

$$\begin{aligned} r &= e^t, \\ t &= \ln r, \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} &= \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Entonces nos queda la siguiente expresión:

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + 2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$$

la cual se expresa como:

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = c(c+1)R$$

Esta ecuación diferencial se resuelve de manera sencilla, la cual podemos ver que la solución se representa como:

$$R(t) = e^{kt}$$

Entonces

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = ke^{kt}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} = k^2e^{kt}$$

y k puede ser determinada por:

$$k^2 + k = c(c+1)$$

Entonces es evidente que

$$k = \begin{cases} c, \\ -c-1 \end{cases}$$

Entonces:

$$R(t) = \begin{cases} e^{ct} = e^{c\ln r} = r^c \\ e^{-(c+1)t} = e^{-(c+1)\ln r} = \frac{1}{r^{c+1}} \end{cases}$$

Entonces la solución general de la ecuación de Laplace está dada por:

$$F(r,\theta) = \sum_{c=0}^{\infty} \left(a_c r^c + b_c \frac{1}{r^{c+1}} \right) P_c(\cos\theta) \tag{8}$$

Los coeficientes a y b son determinados por las condiciones de frontera

Partiendo de la solución anterior (eq: 8), ahora la función será el potencial que satisface dicha ecuación, tenemos que conocer los coeficientes por las condiciones de frontera, por lo que analizando dichas condiciones vemos que:

$$V = \begin{cases} V_o \text{ para } 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \text{ para } \pi/2 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

Siendo las condiciones tales que: $b = 0$ y $r = r'$ tenemos entonces:

$$\sum_{c=0}^{\infty} a_c r'^c P_c(\cos\theta) = V$$

$$\sum_{c=0}^{\infty} a_c r'^c \int_0^{\pi} P_c(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} V P_n(\cos\theta) \sin\theta \, \mathrm{d}\theta$$

Como:

$$\int_0^\pi P_c(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-1}^1 P_l(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nl}$$

$$a_n c^n \frac{2}{2n+1} = \int_0^\pi V P_n(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Cambiando n a l y $\cos\theta$ a x

$$a_l = \frac{2l+1}{2c^l}V_o\int_0^1 P_l(x)\,\mathrm{d}x$$

$$v = \sum_{c=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2c^l}V_o\int_0^1 P_l(x)\,\mathrm{d}x\,\frac{r^l}{c^l}P_l(\cos\theta)$$

podemos ver que:

$$a_0 = \frac{1}{2}V_0$$
$$a_1 = \frac{3}{4c}V_0$$
$$a_2 = 0$$
$$a_3 = -\frac{7}{16c^3}V_0$$

$$\int_0^1 P_l(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2l+l}(P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0))$$

entonces $P_{l-1}(0) = P_{l+1}(0) = 0$, esto implica que $a_l = 0$ para $\forall l \neq a_0$, entonces:

$$V = \frac{1}{2}V_0 + \sum_{c=0}^{\infty} a_{2n+1}r^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta)$$

de modo que

$$a_{2n+1} = \frac{4n+3}{2c^{2n+1}}V_0\int_0^1 P_{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x$$

Como

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{P_{2n}(0) - P_{2n+2}(0)}{4n+3}$$

igual se sabe que:

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

Entonces

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4n+3}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{4n+3}{2n+2}$$

Entonces V dentro de la estefa esta dado por

$$V = \frac{V_0}{2}\{1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!(4n+3)}{2^{2n}(n!)(2n+2)}\left(\frac{r}{c}\right)^{2n+1} P_{2n+1}\cos(\theta)\}$$

La cual es igual a la ecuación 1, por lo que la primera parte se cumple, ahora para fuera de la esfera requerimos que $r \to \infty$, entonces los términos a_l deben ser cero, quedando enterminos de b_l

$$\sum_{l=0}^{\infty} b_l \frac{1}{c^{l+1}} P_l(\cos\theta) = V$$

Y degido del argumento anterior

$$b_l \frac{1}{c^{l+1}} = \frac{2l+1}{2} V_0 \int_0^1 P_l(x)\,\mathrm{d}x$$

lo que nos queda entonces:

$$V = \frac{V_0 c}{2r}\{1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!(4n+3)}{2^{2n}(n!)(2n+2)}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n+1} P_{2n+1}\cos(\theta)\}$$

Lo que también resulta igual a la ecuación 2, por lo que ambas partes quedan demostradas