Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de ingeniería

Teoría electromagnética 2

ADA 1 Ensayo, corrientes eléctricas

Erick Al. Casanova Cortés
Matricula: 15014866

Docente
Dr. O. Carvente

Fecha de entrega: 8 Marzo 2021

Instrucciones

Resolver de modo numérico con ayuda de algún software el siguiente ejercicio:

Ejercicio

Corrientes, encontrar la fuerza que I' ejerce sobre I.

Partiendo de (**??**), tenemos que definir los vectores que vamos a utilizar, los cuales serán

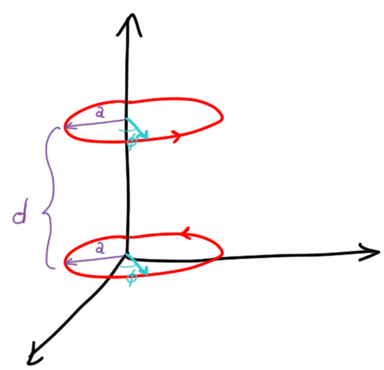

Figura 1: Dos circuitos

$$\vec{r}' = a\cos\varphi'\hat{i} + a\sin\varphi'\hat{j}$$
$$\vec{r} = a\cos\varphi\hat{i} + a\sin\varphi\hat{j} + d\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{r} - \vec{r}' &= a\cos\varphi\hat{i} + a\sin\varphi\hat{j} + d\hat{k} - (a\cos\varphi'\hat{i} + a\sin\varphi'\hat{j}) \\ &= a(\cos\varphi - \cos\varphi')\hat{i} + a(\sin\varphi - \sin\varphi')\hat{j} + d\hat{k}\end{aligned}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{a^2(\cos\varphi - \cos\varphi')^2 + a^2(\sin\varphi - \sin\varphi')^2 + d^2}$$

$$\mathrm{d}s' = a\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi'$$
$$\mathrm{d}s = a\left(-\sin\varphi\hat{\imath} + \cos\varphi\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi$$

Entonces la fuerza que ejerce C sobre C' es

$$\vec{F}_{C'\to C} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a\left(-\sin\varphi\hat{\imath} + a\cos\varphi\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi \times \left[a\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi' \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]$$

Para resolver esta integral se opto por utilizar python, antes de meterla al programa hay que hacerle un tratamiento, como principio, podemos ver que a es una constante, por lo que podemos reescribir la ecuación como

$$\vec{F}_{C'\to C} = \frac{\mu_0 a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\sin\varphi\hat{\imath} + \cos\varphi\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi \times \left[\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi' \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]$$

Analizando el producto cruz $\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi' \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$, sustituyendo los valores podemos ver que

$$\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi' \times \frac{a(\cos\varphi-\cos\varphi')\hat{\imath} + a(\sin\varphi-\sin\varphi')\hat{\jmath} + d\hat{k}}{(a^2(\cos\varphi-\cos\varphi')^2 + a^2(\sin\varphi-\sin\varphi')^2 + d^2)^{3/2}}$$

Analizando solo la parte vectorial

$$\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right) \times \left[a(\cos\varphi-\cos\varphi')\hat{\imath} + a(\sin\varphi-\sin\varphi')\hat{\jmath} + d\hat{k}\right]$$

Expandiendo usando distributividad

$$\begin{aligned}\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right) \times \left[a(\cos\varphi-\cos\varphi')\hat{\imath} + a(\sin\varphi-\sin\varphi')\hat{\jmath} + d\hat{k}\right] = \\ -\sin\varphi' * a(\cos\varphi-\cos\varphi')\left(\hat{\imath}\times\hat{\imath}\right) - \sin\varphi' * a(\sin\varphi-\sin\varphi')\left(\hat{\imath}\times\hat{\jmath}\right) - \sin\varphi' * d\left(\hat{\imath}\times\hat{k}\right) \\ +\cos\varphi' * a(\cos\varphi-\cos\varphi')\left(\hat{\jmath}\times\hat{\imath}\right) + \cos\varphi' * a(\sin\varphi-\sin\varphi')\left(\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}\right) + \cos\varphi' * d\left(\hat{\jmath}\times\hat{k}\right)\end{aligned}$$

Es evidente que algunos de estos términos se anularán, quedándonos como:

$$\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right) \times \left[a(\cos\varphi - \cos\varphi')\hat{\imath} + a(\sin\varphi - \sin\varphi')\hat{\jmath} + d\hat{k}\right] =$$
$$-\sin\varphi' * a(\sin\varphi - \sin\varphi')\hat{k} + d\sin\varphi'\hat{\jmath}$$
$$-\cos\varphi' * a(\cos\varphi - \cos\varphi')\hat{k} + d\cos\varphi'\hat{\imath}$$

Agrupando términos semejantes:

$$\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right) \times \left[a(\cos\varphi - \cos\varphi')\hat{\imath} + a(\sin\varphi - \sin\varphi')\hat{\jmath} + d\hat{k}\right] =$$
$$d\cos\varphi'\hat{\imath} + d\sin\varphi'\hat{\jmath} - a\left(\sin\varphi'\sin\varphi + \cos\varphi'\cos\varphi - \cos^2\varphi' - \sin^2\varphi'\right)\hat{k}$$

Podemos identificar dos identidades trigonométricas en esta ecuación

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\cos\alpha - \beta = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$$

Por lo que nos queda la expresión como:

$$\left(-\sin\varphi'\hat{\imath} + \cos\varphi'\hat{\jmath}\right) \times \left[a(\cos\varphi - \cos\varphi')\hat{\imath} + a(\sin\varphi - \sin\varphi')\hat{\jmath} + d\hat{k}\right] =$$
$$d\cos\varphi'\hat{\imath} + d\sin\varphi'\hat{\jmath} - a\left[\cos(\varphi - \varphi') - 1\right]\hat{k}$$

Regresando a la expresión dentro de la integral:

$$\vec{F}_{C'\to C} = \frac{\mu_0 a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(-\sin\varphi\hat{\imath} + \cos\varphi\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi \times d\cos\varphi'\hat{\imath} + d\sin\varphi'\hat{\jmath} - a\left[\cos(\varphi - \varphi') - 1\right]\hat{k}}{(a^2(\cos\varphi - \cos\varphi')^2 + a^2(\sin\varphi - \sin\varphi')^2 + d^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\varphi'$$

Volviendo a hacer un análisis de las componentes vectoriales

$$\left(-\sin\varphi\hat{\imath} + \cos\varphi\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi \times d\cos\varphi'\hat{\imath} + d\sin\varphi'\hat{\jmath} - a\left[\cos(\varphi - \varphi') - 1\right]\hat{k}$$

Aplicando de nuevo distributividad

$$\left(-\sin\varphi\hat{\imath} + \cos\varphi\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}\varphi \times d\cos\varphi'\hat{\imath} + d\sin\varphi'\hat{\jmath} - a\left[\cos(\varphi - \varphi') - 1\right]\hat{k} =$$
$$-d\sin\varphi\cos\varphi'\hat{\imath} * \hat{\imath} - d\sin\varphi\sin\varphi'\hat{\imath} * \hat{\jmath} + a\sin\varphi\left[\cos(\varphi - \varphi') - 1\right]\hat{\imath} * \hat{k}$$
$$+d\cos\varphi\cos\varphi'\hat{\jmath} * \hat{\imath} + d\cos\varphi\sin\varphi'\hat{\jmath} * \hat{\jmath} - a\cos\varphi\left[\cos(\varphi - \varphi') - 1\right]\hat{\jmath} * \hat{k}$$

Lo que nos queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\left(-\sin\varphi\hat{i}+\cos\varphi\hat{j}\right)\mathrm{d}\varphi\times d\cos\varphi'\hat{i}+d\sin\varphi'\hat{j}-a\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{k}=\\ -d\sin\varphi\sin\varphi'\hat{k}-a\sin\varphi\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{j}\\ -d\cos\varphi\cos\varphi'\hat{k}-a\cos\varphi\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{i}\end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes

$$\begin{aligned}\left(-\sin\varphi\hat{i}+\cos\varphi\hat{j}\right)\mathrm{d}\varphi\times d\cos\varphi'\hat{i}+d\sin\varphi'\hat{j}-a\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{k}=\\ -a\cos\varphi\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{i}-a\sin\varphi\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{j}-d\left(\sin\varphi\sin\varphi'+\cos\varphi\cos\varphi'\right)\hat{k}\end{aligned}$$

Retomando una de las igualdades trigonométricas vistas con anterioridad:

$$\begin{aligned}\left(-\sin\varphi\hat{i}+\cos\varphi\hat{j}\right)\mathrm{d}\varphi\times d\cos\varphi'\hat{i}+d\sin\varphi'\hat{j}-a\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{k}=\\ -a\cos\varphi\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{i}-a\sin\varphi\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{j}-d\cos\left(\varphi-\varphi'\right)\hat{k}\end{aligned}$$

Regresando a la integral:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{C'\to C}=\frac{\mu_0a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-a\cos\varphi\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{i}}{\left(a^2(\cos\varphi-\cos\varphi')^2+a^2(\sin\varphi-\sin\varphi')^2+d^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varphi'\\ +\frac{\mu_0a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-a\sin\varphi\left[\cos\left(\varphi-\varphi'\right)-1\right]\hat{j}}{\left(a^2(\cos\varphi-\cos\varphi')^2+a^2(\sin\varphi-\sin\varphi')^2+d^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varphi'\\ +\frac{\mu_0a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-d\cos\left(\varphi-\varphi'\right)\hat{k}}{\left(a^2(\cos\varphi-\cos\varphi')^2+a^2(\sin\varphi-\sin\varphi')^2+d^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varphi'\end{aligned}$$