Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de ingeniería

Métodos matemáticos de la física

Segundo examen

Erick Al. Casanova Cortés
Matricula: 15014866

Docente
Dr. Miguel Zambrano

Fecha de entrega: 5 Febrero 2021

Una esfera hueca de radio que esta dividida en dos por el ecuador por un aislante delgado. La mitad superior se encuentra a un potencial constante V_0 y el hemisferio inferior a un potencial nulo, como se muestra en la figura.

Demostrar que el potencial dentro de la esfera esta dado por:

$$\phi(r,\theta) = \frac{V_0}{2}\{1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!(4n+3)}{2^{2n}(n!)(2n+2)}\left(\frac{r}{c}\right)^{2n+1} P_{2n+1}\cos(\theta)\} \qquad (1)$$

mientras que en el potencial exterior es:

$$\phi(r,\theta) = \frac{V_0 c}{2r}\{1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!(4n+3)}{2^{2n}(n!)(2n+2)}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n+1} P_{2n+1}\cos(\theta)\} \qquad (2)$$

Ayuda: resolver la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi(r,\theta,\varphi) = 0$ en coordenadas esféricas

Primero haremos el cálculo de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, la cual está expresada de la forma

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)F(r,\theta,\varphi) = 0 \qquad (3)$$

De esto partimos que la función $F(r,\theta,\varphi)$ puede expresarse de tal forma que $F(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Por lo que podemos multiplicar ambas partes de la ecuación 3 por $\frac{r^2}{F}$, lo cual queda expresado como:

$$\frac{r^2}{F}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)F(r,\theta,\varphi) = 0$$

Sustituyendo a $F(r,\theta,\varphi)$ por la propuesta

$$\frac{r^2}{R\Theta\Phi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)R\Theta\Phi = 0$$

Ahora se expandirá la ecuación a conveniencia de tal modo que dejaremos los términos que dependen del radio de un lado y agruparemos los términos que dependen del ángulo polar o azimutal; quedando entonces:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}R = -\frac{1}{\Theta\Phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\Theta\Phi$$

Como r, θ y φ son variables independientes quiere decir que ambos términos son iguales a una constante, lo que quiere decir que

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}R = \mathcal{C} \tag{4}$$

$$-\frac{1}{\Theta\Phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\Theta\Phi = \mathcal{C} \tag{5}$$

si a la ecuación 5 la multiplicamos por $\sin^2\theta$ tenemos:

$$-\frac{1}{\Theta\Phi}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\Theta\Phi = \mathcal{C}\sin^2\theta$$

Agrupando la ecuación en sus términos dependientes nos queda la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Theta + \mathcal{C}\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi$$

Como anteriormente se vio, para que esta igualdad se cumpla, ambas partes de dicha ecuación deberán ser igualadas a una constante. Lo cual queda de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Theta + \mathcal{C}\sin^2\theta = \mathcal{B} \tag{6}$$

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi = \mathcal{B} \tag{7}$$

Haciendo un despeje de la ecuación 7 podemos ver que podemos encontrar una solución, como se ve a continuación

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi = -\Phi\mathcal{B}$$

al resolver la ecuación diferencial podemos ver que Φ está dada por:

$$\Phi(\varphi) = e^{\pm i\sqrt{\mathcal{B}}\varphi}$$

Si hacemos un análisis de esta ecuación podemos ver que es periódica con un ciclo de 2π, lo que implica:

$$e^{\pm i\sqrt{\mathcal{B}}\varphi} = e^{\pm i\sqrt{\mathcal{B}}(\varphi+2\pi)}$$

En otras palabras, lo que quiere decir es que $\sqrt{\mathcal{B}}$ debe ser un entero, y por fines prácticos haremos la igualdad $\sqrt{\mathcal{B}} = k^2$, regresando a la solución tenemos entonces que la parte de Φ queda expresada como:

$$\Phi(\varphi) = e^{\pm ik^2\varphi}$$

Pasando ahora a la parte que depende de Θ, partimos de la ecuación 6 y tomando la igualdad que encontramos anterior, la cual nos afirma que $\sqrt{\mathcal{B}} = k^2$

$$\frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Theta + \mathcal{C}\sin^2\theta = k^2$$

Para hacer resolver esta ecuación diferencial tendremos que hacer un cambio de variable, el cual será proponer una función a modo que:

$$x = \cos\theta$$

Haciendo la regla de la cadena podemos ver:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta} &= \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x}\\ &= -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$