UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN
FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA FÍSICA

Segundo parcial

Erick Al. Casanova Cortés
Matricula: 15014866

DOCENTE
DR. MIGUEL ZAMBRANO

Fecha de entrega: 5 Febrero 2021

Índice general

Parte I

Ejemplo 1

0.1. Definición del libro

Desarrollar el ejemplo 2 de las notas de las transformadas de Fourier. Ejemplo: Considera el oscilador armónico armortiguado que actúa en una fuerza externa $g(t)$. El movimiento del oscilador está situado por la ecuación:

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_o^2 x(t) = f(t)$$

donde $f(t) = \frac{1}{m}g(t)$

Por definición, podemos extender este resultado a:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

donde:

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$
$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Respectivamente

Esto conlleva a que la solución de x también tendrá una transformada de Fourier que se denotará como $\hat{A}$, por lo que:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t$$
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(\omega)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Resulta evidente ver a $\hat{A}$ como la transformada de la ecuación diferencial, por lo que usando las propiedades de las derivadas de las transformadas obtenemos:

$$\mathcal{F}\{\dot{x}\} = -i\omega\mathcal{F}\{x\}$$
$$\mathcal{F}\{\ddot{x}\} = -\omega^2\mathcal{F}\{x\}$$

Con estas ecuaciones asumimos que $x(\pm\infty) = \dot{x}(\pm\infty) = 0$.
Por definición tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) e^{i\omega t} \,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{i\omega t} \,\mathrm{d}t$$

Por lo consiguiente, la transformada de la ecuación diferencial es:

$$-\omega^2 A(\omega) - 2\alpha\omega i A(\omega) + \omega_o^2 A(\omega) = F(\omega)$$

Despejando entonces $A(\omega)$

$$A(\omega) = \frac{F(\omega)}{(\omega_o^2 - \omega) - 2i\alpha\omega}$$

La solución al problema entonces es:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega_o^2 - \omega) - 2i\alpha\omega}$$

Igualando el denominador a cero podemos ver que:

$$\omega_o^2 - \omega) - 2i\alpha\omega = \zeta(\omega)$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 - 2i\alpha\omega + \omega_o^2 = 0 \\ \omega &= \frac{2i\alpha \pm \sqrt{4\omega_o^2 - 4\alpha^2}}{-2} \\ \omega &= -i\alpha \pm \sqrt{-(\alpha^2 - \omega_o^2)} \end{aligned}$$

Para los valores de $\alpha > 0$ los polos están arriba y se localizan en:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \pm\sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} - i\alpha & &\text{Si } \omega_o > \alpha \\ \omega_{1,2} &= \pm i\sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} - i\alpha & &\text{Si } \omega_o < \alpha \\ \omega_1 &= \omega_2 = -i\alpha & &\text{Si } \omega_o = \alpha \end{aligned}$$

Ahora analizaremos los casos:
Pimer caso: Dos polos simples

Así tenemos que $\zeta(\omega) = -(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)$, por lo que al evaluar los residuos obtenemos en $\omega = \omega_1$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{F(\omega_1)e^{-i\omega_1 t}}{\omega_1 - \omega_2}$$

Y cuando tenemos el caso de $\omega = \omega_2$:

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{F(\omega_2)e^{-i\omega_2 t}}{\omega_1 - \omega_2}$$

Donde $\omega_1 - \omega_2 = 2\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 2p$

Como ejemplo particular, asumir que $f(t)$ tiene la forma

$$f(t) = \begin{cases} fo & |t| < \tau \\ 0 & |t| \geq \tau \end{cases}$$

La transformada de Fourier de $f(t)$:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{f_o}{\sqrt{2\pi}}\int_{\tau}^{\tau} e^{-} i\omega t \, \mathrm{d}t \\ &= f_o\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega\tau}{\omega} \end{aligned}$$

Entonces es evidente que:

$$x(t) = -\frac{f_o}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega\tau e^{-i\omega\tau}}{\omega(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}\,\mathrm{d}\omega$$

donde $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} - i\alpha$, $\omega_2 = -\sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} - i\alpha$. Las únicas singularidades son en $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$.

$$\sin\omega\tau = \frac{1}{2}(e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau})$$

Entonces $t > \tau$, la función $\frac{\sin\omega\tau e^{-i\omega\tau}}{\omega}$ está encerrada.
Esto da entonces que:

$$x(t) = \frac{2i\pi f_o}{\pi}[\frac{\sin\omega_1\tau e^{-i\omega_1\tau}}{\omega_1(\omega_1-\omega_2)} - \frac{\sin\omega_2\tau e^{-i\omega_2\tau}}{\omega_2(\omega_1-\omega_2}]$$

$$x(t) = \frac{2if_o}{\omega_1\omega_2(\omega_1-\omega_2}(\omega_2\sin\omega_1\tau e^{-i\omega_1\tau} - \omega_2\sin\omega_2\tau e^{-i\omega_2\tau})$$

Para una forma real hay que hacer que $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} - i\alpha$, $\omega_2 = -\sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} - i\alpha$; $\omega_1\omega_2 = -\omega_o^2$ y expresar el seno en términos del exponencial:

$$
\begin{aligned}
x(t) = \frac{2i\pi f_o}{\pi}&(e^{(\alpha+ip)(\tau-t)} + (e^{(\alpha-ip)(\tau-t)} - e^{-(\alpha+ip)(\tau-t)} - (e^{-(\alpha-ip)(\tau-t)} \\
&+ (\frac{i\alpha}{p})(e^{(\alpha+ip)(\tau-t)} - (e^{(\alpha-ip)(\tau-t)} - e^{-(\alpha+ip)(\tau-t)} - (e^{-(\alpha-ip)(\tau-t)}))
\end{aligned}
$$

Lo que es igual a

$$
\begin{aligned}
x(t) = &\frac{2i\pi f_o}{\pi}[\cos p(t-\tau) + (\frac{i\alpha}{p}) \sin p(t-\tau)]e^{-\alpha(t-\tau)} \\
&- \frac{2i\pi f_o}{\pi}[\cos p(t-\tau) + \frac{\alpha}{p} \sin(t-\tau)]e^{-\alpha(t-\tau)}
\end{aligned}
$$

Para $t < -\tau$ el contorno cierra arriba y será cero

Parte II

Ejemplo 1

0.2. Definición vista en clase

Desarrollar el ejemplo 2 de las notas de las transformadas de Fourier. Ejemplo: Considerar el oscilador armónico amortiguado que actúa en una fuerza externa $g(t)$. El movimiento del oscilador está situado por la ecuación:

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_o^2 x(t) = f(t)$$

donde $f(t) = \frac{1}{m}g(t)$

Por definición, podemos extender este resultado a:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

Para este caso en específico utilzaremos:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(\omega)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Resulta evidente ver a $\hat{A}$ como la transformada de la ecuación diferencial, por lo que usando las propiedades de las derivadas de las transformadas obtenemos:

$$\mathcal{F}\{\dot{x}\} = -i\omega\mathcal{F}\{x\}$$
$$\mathcal{F}\{\ddot{x}\} = -\omega^2\mathcal{F}\{x\}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$-\omega^2 A(\omega) - 2\alpha\omega i A(\omega) + \omega_o^2 A(\omega) = F(\omega)$$

Despejando entonces $A(\omega)$

$$A(\omega) = \frac{F(\omega)}{(\omega_o^2 - \omega) - 2i\alpha\omega}$$
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)e^{-i\omega t}}{\omega_o^2 - \omega) - 2i\alpha\omega}$$

Igualando el denominador a cero podemos ver que:

$$\omega_o^2 - \omega) - 2i\alpha\omega = \zeta(\omega)$$

$$\begin{aligned}-\omega^2 - 2i\alpha\omega + \omega_o^2 = 0 \\ \omega = -\frac{2i\alpha \pm \sqrt{4\omega_o^2 - 4\alpha^2}}{-2} \\ \omega = -i\alpha \pm \sqrt{-(\alpha^2 - \omega_o^2)}\end{aligned}$$

Si los valores de $\alpha > 0$ quiere decir que los polos se localizan en:

$$\omega_{1,2} = \pm\sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} + i\alpha \text{ Si } \omega_o > \alpha$$

Parte III

Ejemplo 1

0.3. Definición del libro