

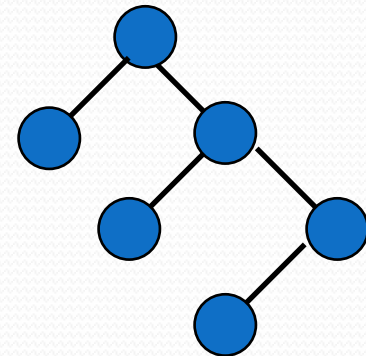
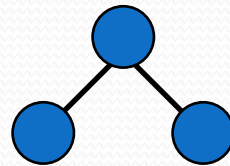
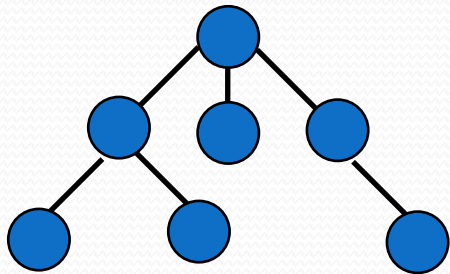
# ÁRBOLES y Árboles Binarios

ESTRUCTURAS DE DATOS

[pamelalandero@gmail.com](mailto:pamelalandero@gmail.com)

# ¿Qué es un Árbol?

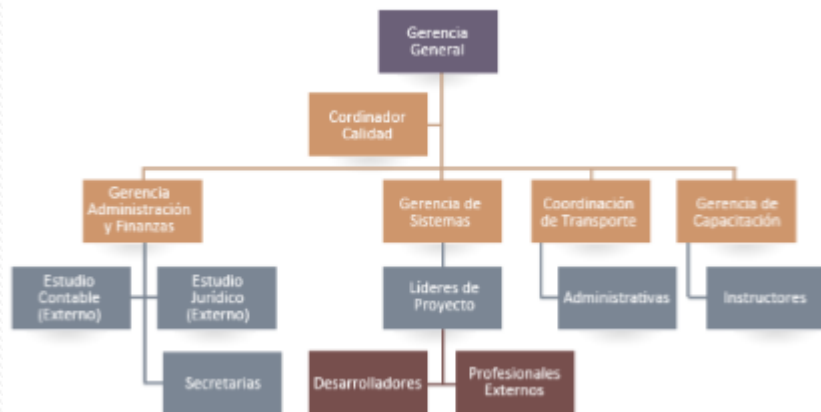
- Es una estructura de datos jerárquica y acíclica
- La relación entre los elementos es de uno a muchos.
- Es una estructura de datos no es lineal



# ¿Qué es un Árbol?

## ► Ejemplos:

- Índices.
- Clasificación.
- Árboles genealógicos.
- Organigramas.



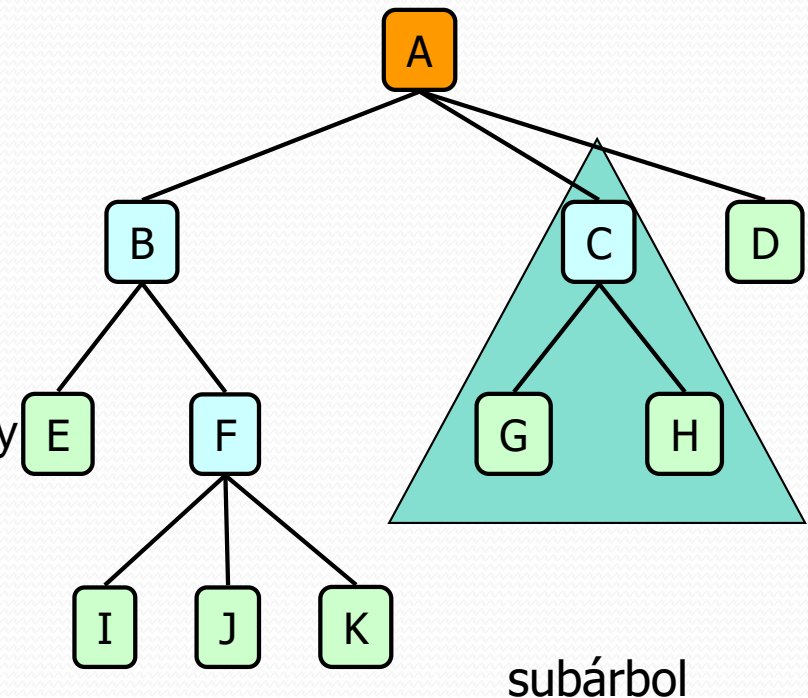
## ► Aplicaciones:

- Analizar circuitos eléctricos.
- Representar la estructura de fórmulas matemáticas.
- Organizar la información.
- Representar la estructura sintáctica de un programa en los compiladores.



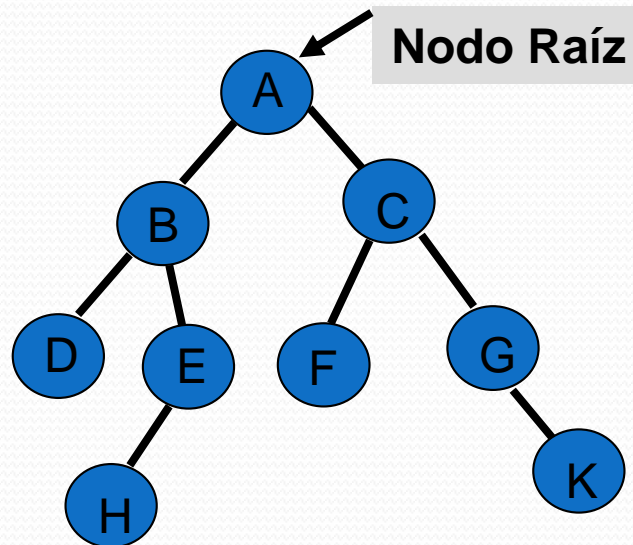
# ¿Qué es un Árbol?

- **Raíz:** único nodo sin padre
- **Nodo interno:** tiene al menos un hijo
- **Nodo hoja (externo):** no tiene hijos
- **Descendiente directo:** hijo
- **Descendientes:** hijo, nieto...
- **Subárbol:** árbol formado por un nodo y sus descendientes



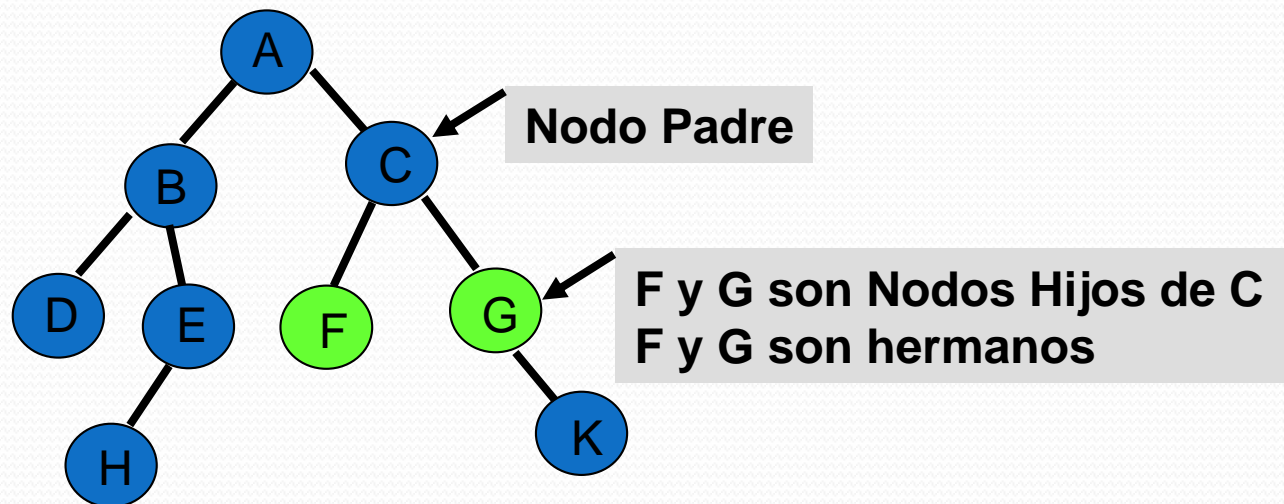
# Terminología

- Nodo: Cada elemento en un árbol.
- Nodo Raíz: Primer elemento agregado al árbol.



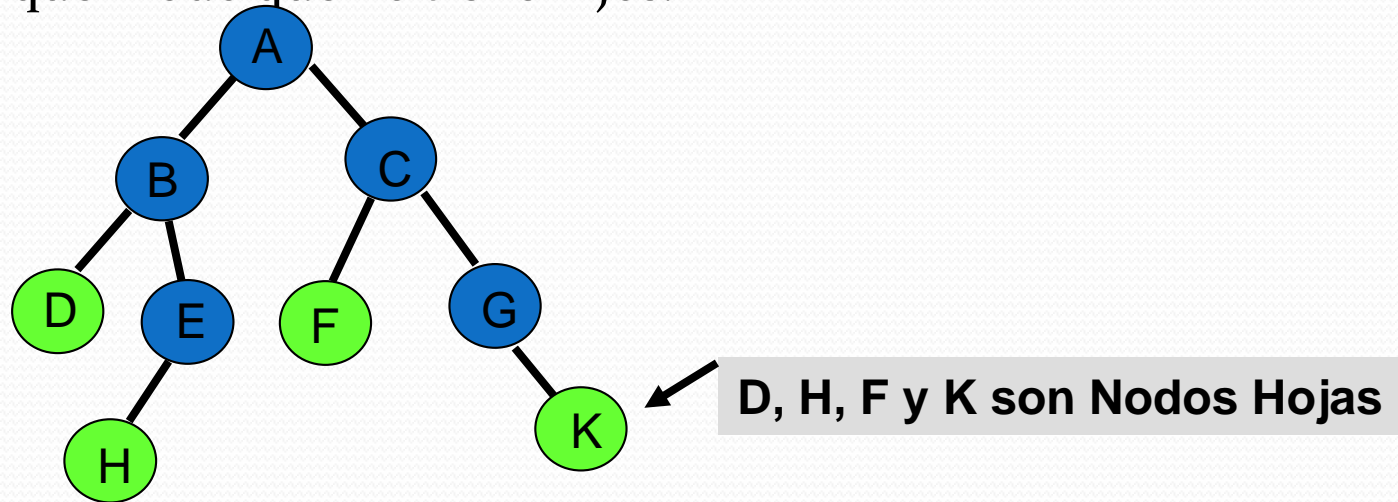
# Características de un Árbol

- Nodo Padre: Se le llama así al nodo predecesor de un elemento.
- Nodo Hijo: Es el nodo sucesor de un elemento.
- Hermanos: Nodos que tienen el mismo nodo padre.



# Características de un Árbol

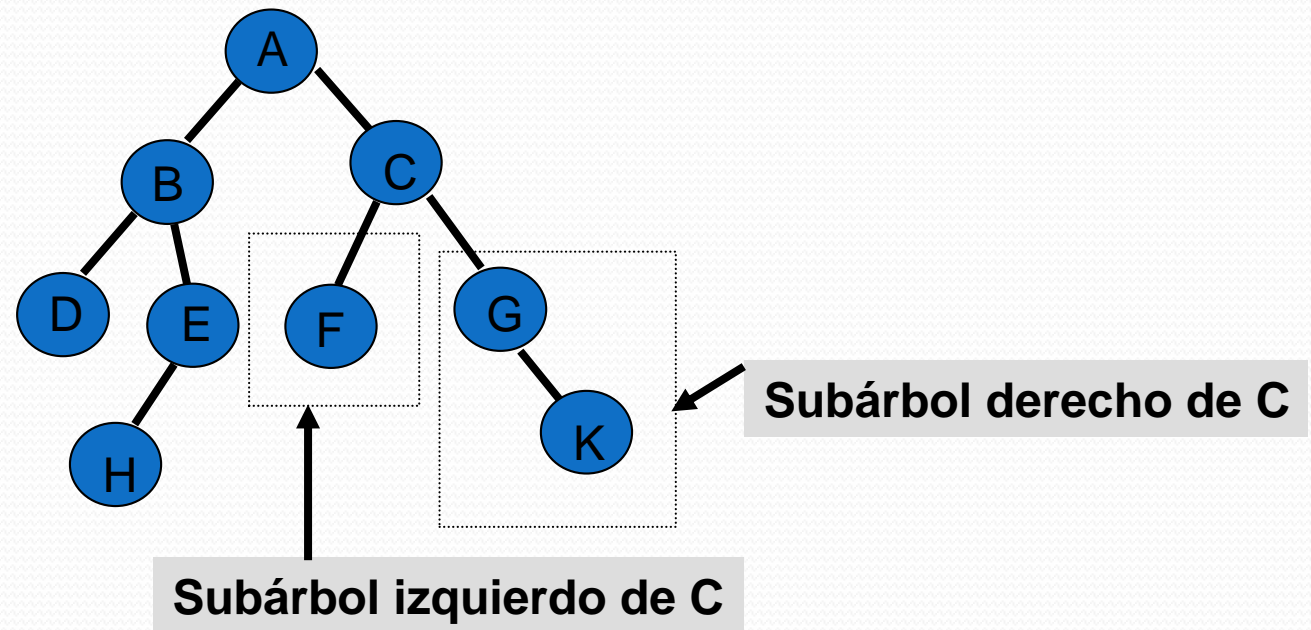
- Nodo Hoja: Aquel nodo que no tiene hijos.



- Grado de un nodo: es el número de hijos del nodo.
- Profundidad de un nodo: es el largo del único camino desde el nodo a la raíz del árbol
- Altura de un nodo: es el mayor camino desde el nodo hasta una hoja del árbol.

# Características de un Árbol

- Subárbol: Todos los nodos descendientes por la izquierda o derecha de un nodo. Dicho de otra forma, es un árbol cuya raíz es un nodo, distinto de la raíz, del árbol principal





# Características de un Árbol

**Camino** Si  $n_1, n_2, \dots, n_k$  es una sucesión de nodos de un árbol, tal que  $n_i$  es padre de  $n_{i+1}$  para  $1 \leq i < k$ , entonces la sucesión describe un camino.

**Anchura** También llamado **amplitud**, corresponde a la población de un nivel.

**Grado** Es el mayor de los grados entre todos los nodos.

**Completo** Se dice que un árbol es completo cuando todos sus nodos, excepto los del último nivel, tienen el mismo grado.

**Longitud del camino** Es el número de pasos entre el nodo origen y el nodo destino.

**Peso** Es el número de nodos contenidos en el árbol.

**Balanceado** La diferencia entre la altura de la rama izquierda y la rama derecha es -1, 0 ó 1.

# Características de un Árbol

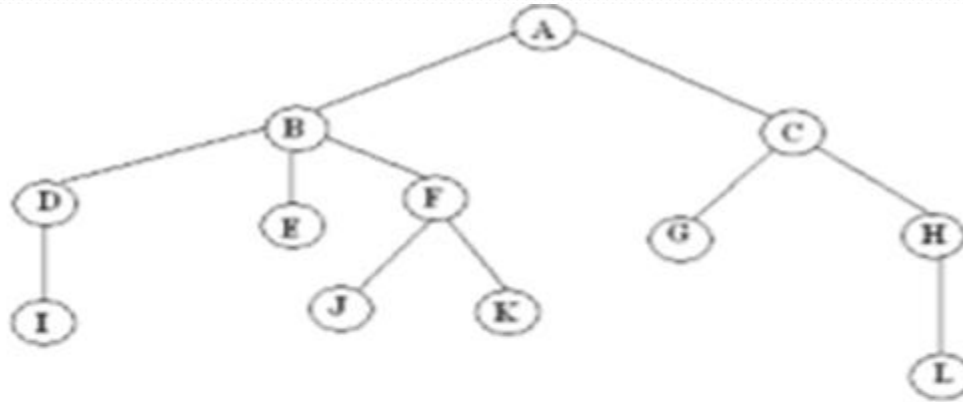


Figura 2 :Árbol General

A raíz del árbol

B es el hijo de A. C es hijo de A.

B es padre de D. D es padre de I.

B y C son hermanos. D, E, F son hermanos.

I, E, J, K, G, L son hojas.

B, D, F, C y H son nodos interiores.

Nivel del nodo A es \_\_ Nivel del nodo E es \_\_

La altura del árbol es \_\_

El grado de nodo A es \_\_

El grado de nodo B es \_\_

El grado de nodo C es \_\_

El grado de nodo D es \_\_

El grado de nodo E es \_\_

Grado del árbol es \_\_

# Características de un Árbol

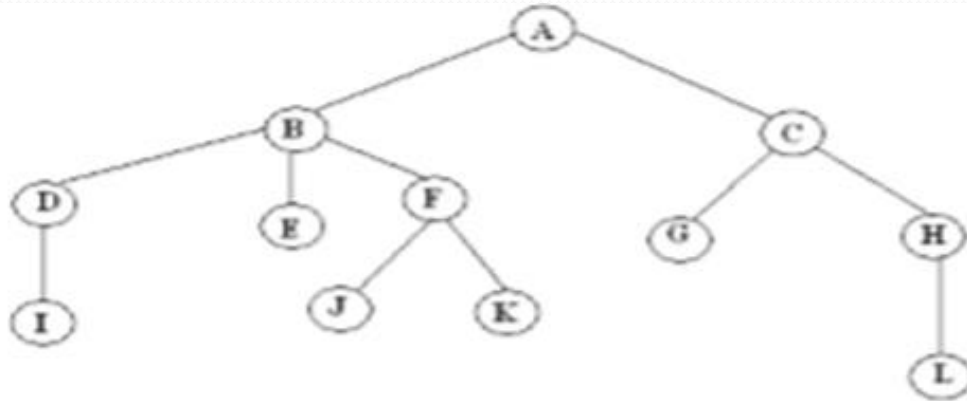


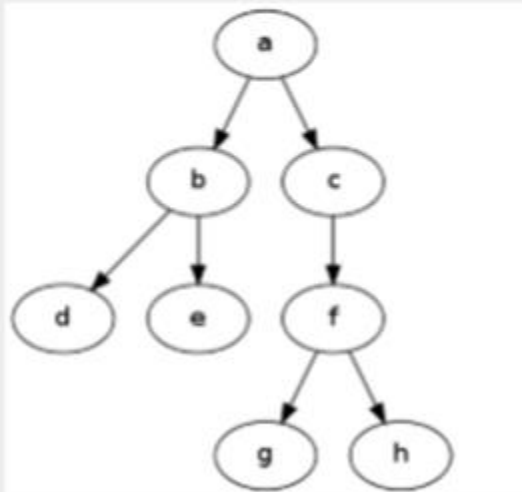
Figura 2 :Árbol General

A raíz del árbol  
B es el hijo de A. C es hijo de A.  
B es padre de D. D es padre de I.  
B y C son hermanos. D, E, F son hermanos.  
I, E, J, K, G, L son hojas.  
B, D, F, C y H son nodos interiores.  
Nivel del nodo A es 1. Nivel del nodo E es 3.  
La altura del árbol es 3.

El grado de nodo A es 2  
El grado de nodo B es 3  
El grado de nodo C es 2  
El grado de nodo D es 1  
El grado de nodo E es 0  
Grado del árbol es 3

# Características de un Árbol

## Ejemplo árbol

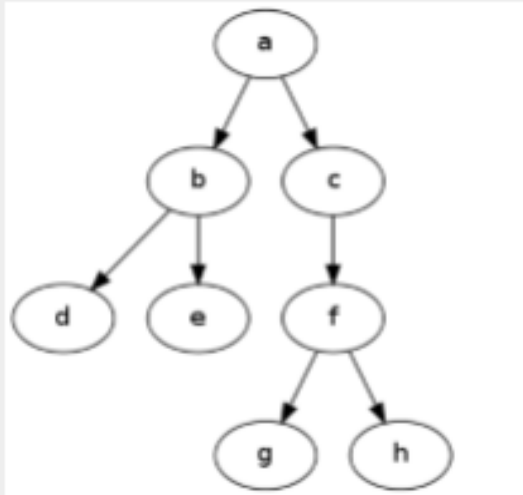


Obtener:

- 1 Longitud del camino  $\langle a, b, e \rangle$ .
- 2 Longitud del camino  $\langle a \rangle$ .
- 3 Indique el camino de  $\langle c \rangle a \langle h \rangle$ .
- 4 Profundidad de  $\langle a \rangle$ .
- 5 Profundidad de  $\langle h \rangle$ .
- 6 Altura del árbol.
- 7 Altura de  $\langle f \rangle$ .
- 8 Grado de  $\langle b \rangle$ .
- 9 Grado del árbol.
- 10 Peso del árbol.

# Características de un Árbol

## Ejemplo árbol



Obtener:

- 1 Longitud del camino  $\langle a, b, e \rangle$ . 2
- 2 Longitud del camino  $\langle a \rangle$ . 0
- 3 Indique el camino de  $\langle c \rangle a \langle h \rangle$ . c, f, h
- 4 Profundidad de  $\langle a \rangle$ . 0
- 5 Profundidad de  $\langle h \rangle$ . 3
- 6 Altura del árbol. 3
- 7 Altura de  $\langle f \rangle$ . 1
- 8 Grado de  $\langle b \rangle$ . 2
- 9 Grado del árbol. 2
- 10 Peso del árbol. 8

# Operaciones de un Árbol

- $\text{Padre}(n, A)$ : Devuelve el padre del nodo  $n$  en el árbol  $A$ . Si no tiene padre (si es raíz) debe devolver **NULL**.
- $\text{Hijo\_izq}(n, A)$ : Devuelve el hijo más a la izquierda del nodo  $n$  en el árbol  $A$ , y devuelve un **NULL** si  $n$  es una hoja.
- $\text{Hermano\_Der}(n, A)$ : Devuelve el hermano a la derecha del nodo  $n$  en el árbol  $A$ .
- $\text{Etiqueta}(n, A)$ : Devuelve la etiqueta del nodo  $n$  en el árbol  $A$ .
- $\text{Crea\_i}(v, A_1, A_2, \dots, A_k)$ : crea un nuevo nodo  $r$  con etiqueta  $v$  y le asigna  $k$  hijos que son las raíces de los árboles  $A_1, A_2, \dots, A_k$  en ese orden desde la izquierda. Se devuelve el árbol con raíz  $r$ .
- $\text{Raiz}(A)$ : Devuelve el nodo raíz del árbol  $A$ , o **NULL** si  $A$  es el árbol nulo.
- $\text{Anula}(A)$ : convierte a  $A$  en el árbol nulo.

# Tipos de árboles

**Binario** El grado máximo de cada nodo no puede ser superior a 2.

**Balanceados** A medida que se insertan datos los nodos cambian sus posición para lograr un árbol completo.

**Binario Ordenado** El hijo izquierdo es menor que la raíz, y el hijo derecho es mayor que la raíz. A su vez, los subárboles izquierdo y derecho son árboles binarios ordenados.

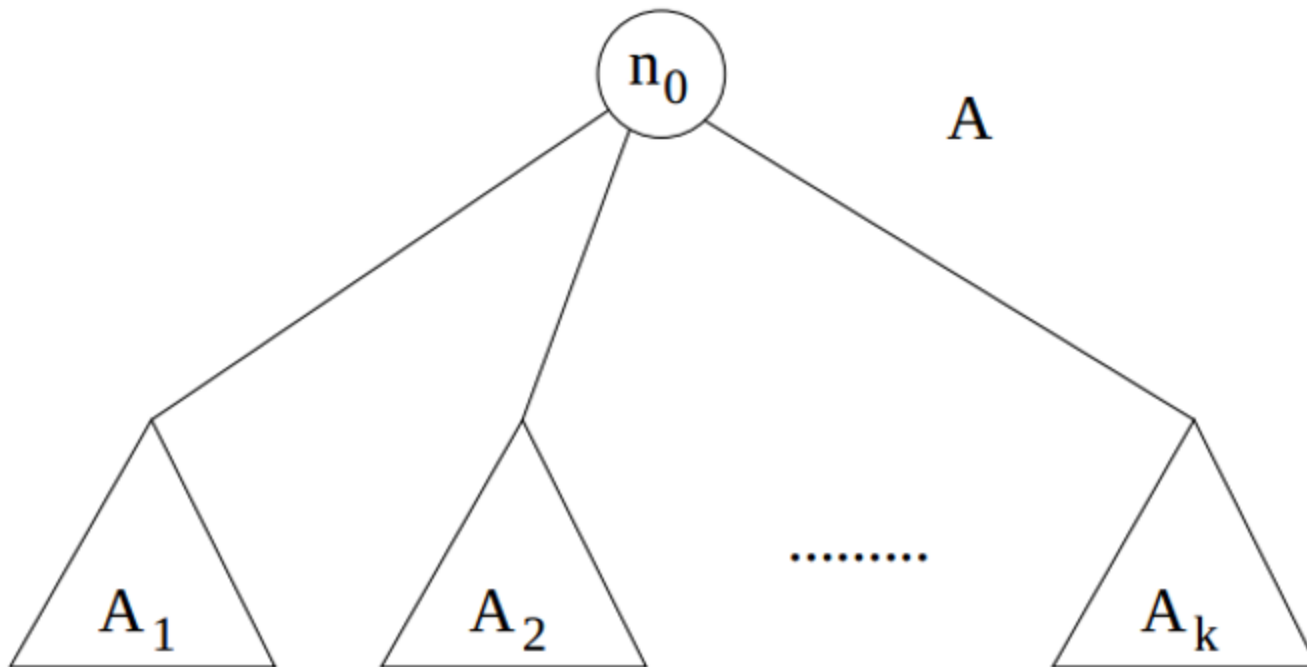
# Tipos de Árboles

- AVL** Adelson, Velskii y Landis. Para todo nodo, se tiene que la altura de sus subárboles difiere a lo más en 1.
- Heap** El montículo binario es un AB completo, donde la raíz es el menor de los elementos y sus hijos son mayores que él, ó la raíz es el mayor de los elementos y sus hijos son menores que él.
- 2-3** Los nodos son de grado 2 o 3. Los nodos deben tener 2 hijos si tiene 1 elemento o 3 hijos si tiene 2 elementos. Las hojas tienen la misma longitud respecto de la raíz.



# Recorridos de los Árboles

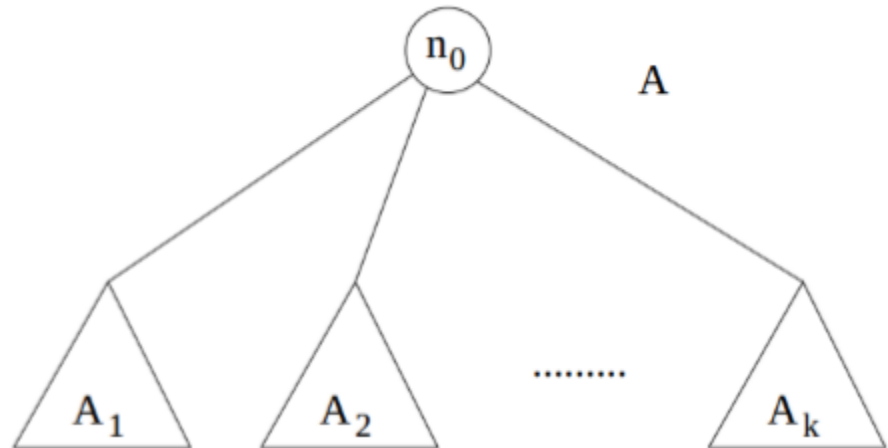
Sea  $n_0$  el nodo raíz de un árbol  $A$ , y sean  $A_1, A_2, \dots, A_k$  los  $k$  subárboles que cuelgan de  $n_0$ .



# Recorridos de los Árboles

## Pre-Orden

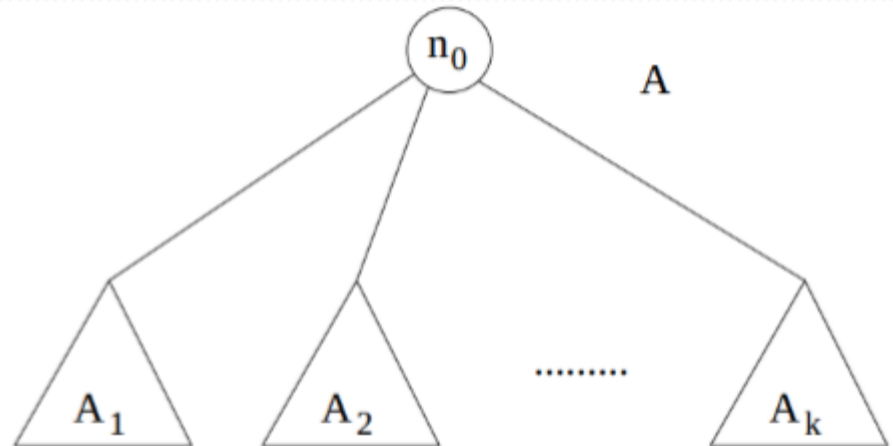
El recorrido en **preorden** de  $A$  está formado por la raíz  $n_0$ , seguida de los nodos de  $A_1$  en orden previo, los nodos de  $A_2$  en orden previo, y así sucesivamente hasta los nodos de  $A_k$  en orden previo.



# Recorridos de los Árboles

## In-Orden

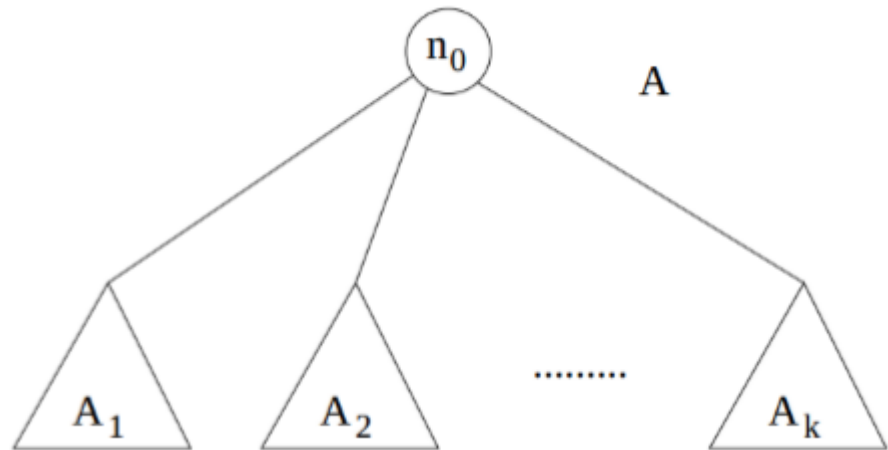
El recorrido en **inorden** de  $A$  está formado por los nodos de  $A_1$  en orden simétrico, seguidos de  $n_0$ , y de los nodos de  $A_2, \dots, A_k$  todos ellos en orden simétrico.



# Recorridos de los Árboles

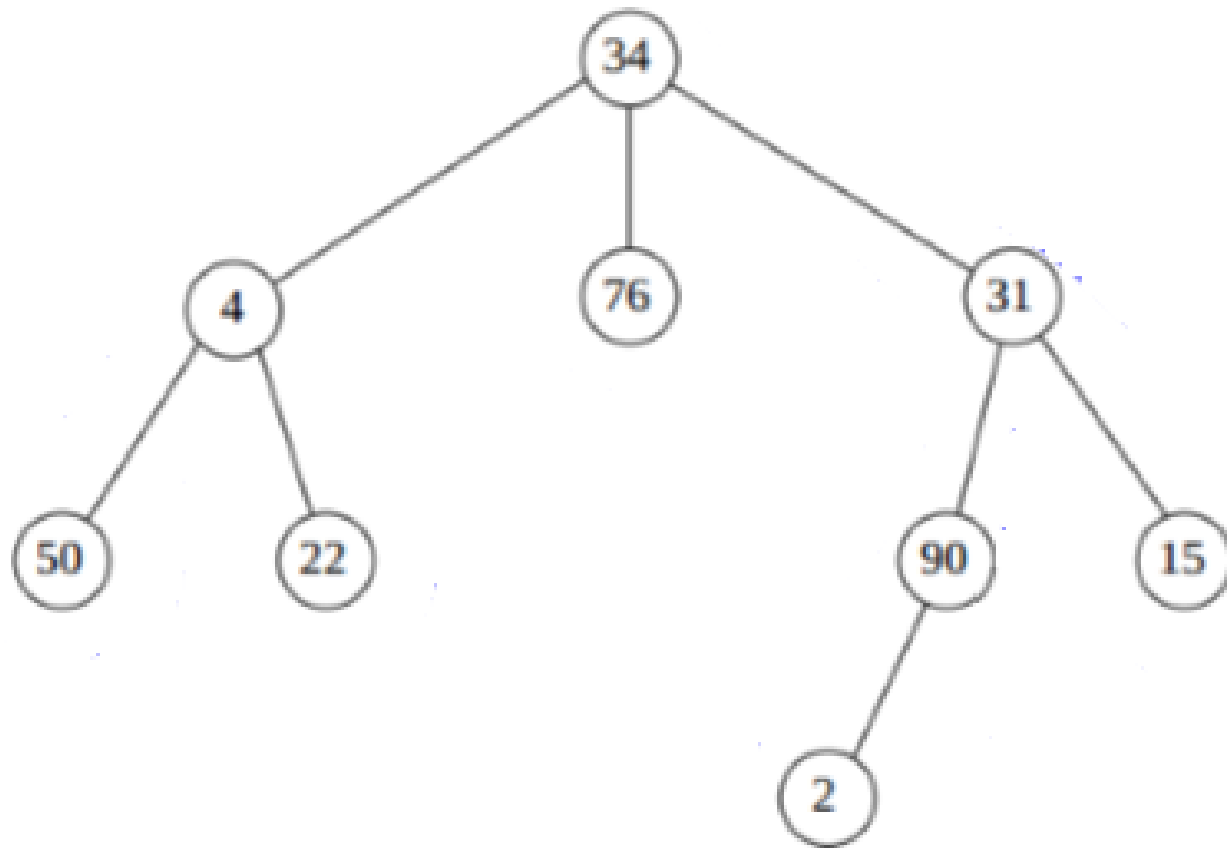
## Post-Orden

El recorrido en **postorden** de  $A$  está formado por los nodos de  $A_1$  en orden posterior, los nodos de  $A_2$  en orden posterior, y así sucesivamente hasta los nodos de  $A_k$  en orden posterior, para finalizar con  $n_0$ .



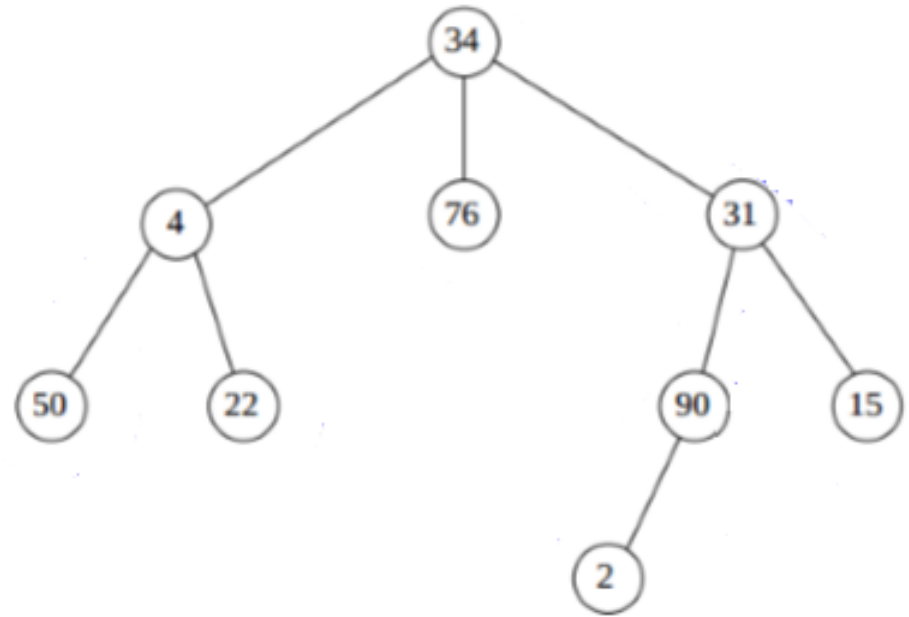
# Recorridos de los Árboles

## Ejemplo



# Recorridos de los Árboles

## Ejemplo

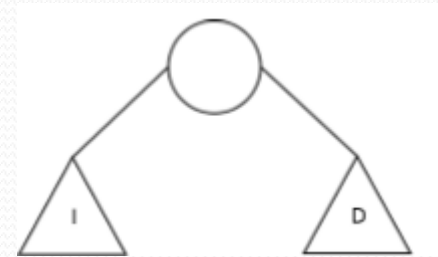


- ▶ preorden: 34, 4, 50, 22, 76, 31, 90, 2, 15
- ▶ inorden: 50, 4, 22, 34, 76, 2, 90, 31, 15
- ▶ postorden: 50, 22, 4, 76, 2, 90, 15, 31, 34

# ARBOLES BINARIOS

## Terminología

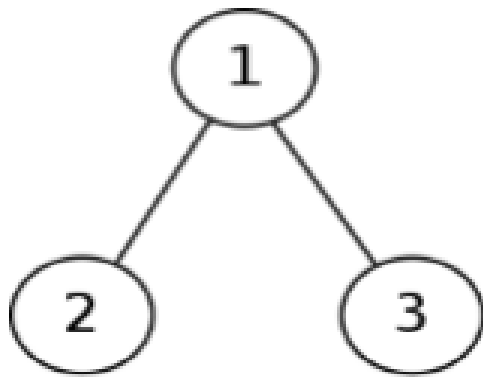
- Son un caso particular.
- El árbol es de grado 2.
- Cada nodo puede tener un hijo izquierdo y/o un hijo derecho.
- Un árbol binario está formado por un nodo raíz, un subárbol izquierdo I y uno derecho D.
- Donde I y D son árboles binarios. Los subárboles se suelen representar gráficamente como triángulos.



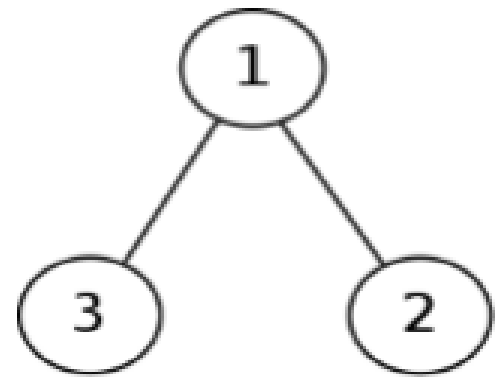
# ARBOLES BINARIOS

## son iguales

- Para que dos árboles binarios sean iguales, deben tener tanto la misma estructura, como el mismo contenido.



$\neq$

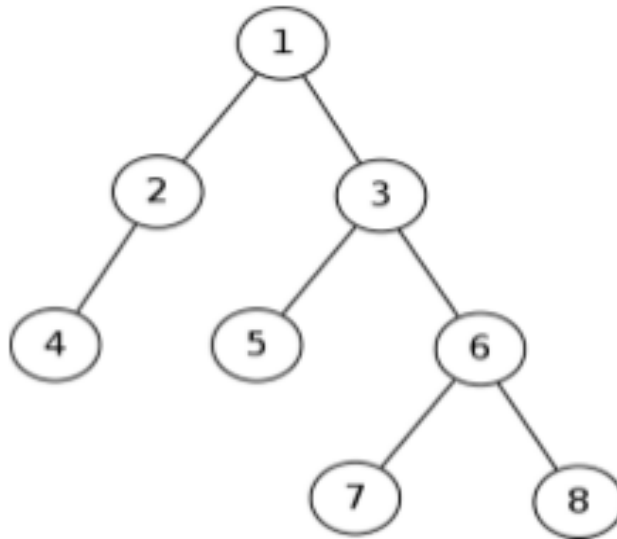




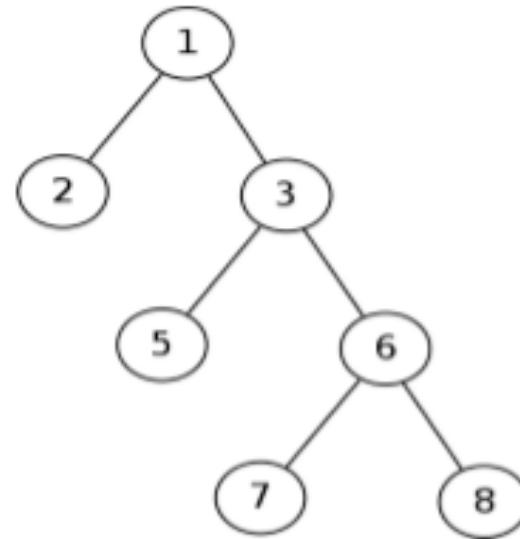
# ARBOLES BINARIOS

## AB Lleno

- Un **árbol binario lleno** es aquel en que cada nodo es un nodo interno con dos hijos no vacíos o una hoja.



No es lleno

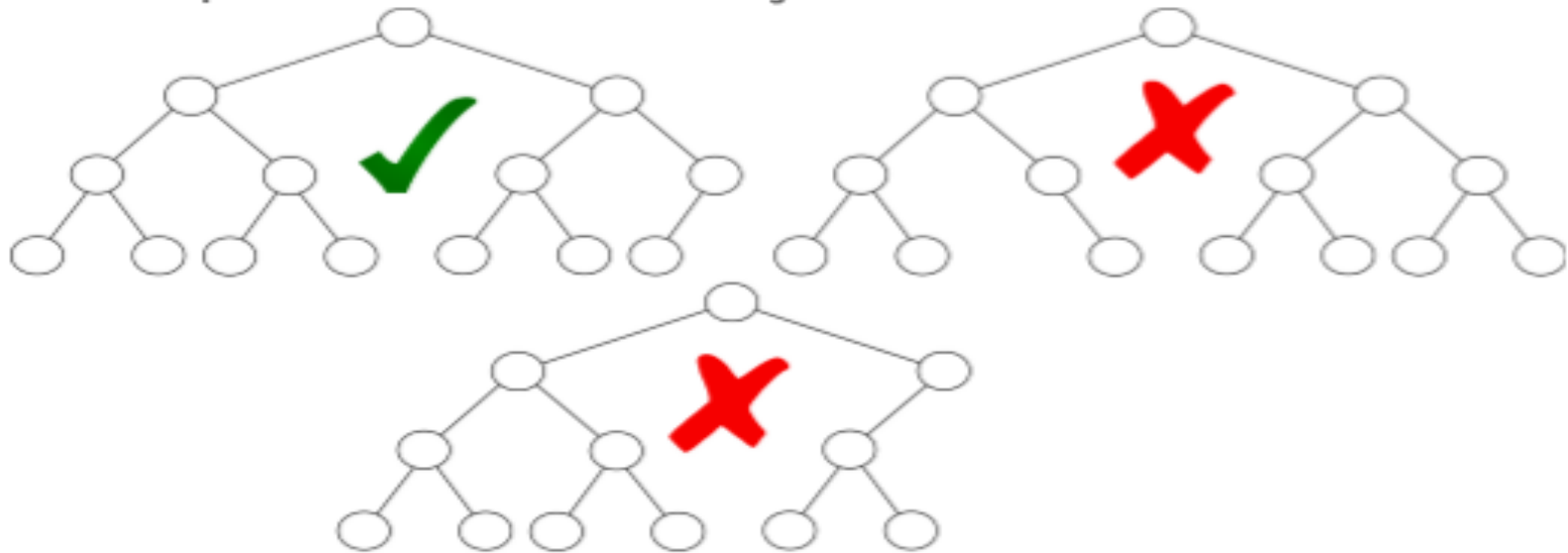


Si es lleno

# ARBOLES BINARIOS

## AB Completo

- Se denomina **árbol binario completo**, a aquél árbol binario de profundidad  $k$  que tiene todos los nodos posibles hasta el penúltimo nivel (profundidad  $k - 1$ ), y donde los elementos del último nivel están colocados de izquierda a derecha sin dejar huecos entre ellos.



# ARBOLES BINARIOS

## AB Completo

- Altura:  $h$ .
- Número de nodos:  $n = 2^{h+1} - 1$
- Numero de hojas:  $\#h = 2^h$
- Nodos internos:  $n - \#h$
- De la expresión para el número de nodos, puede despejarse  $h$  y se logra:

$$h = \log_2(n + 1) = O(\log n)$$

# Árbol Binario – Bonus Track

## Transformar árbol general a Binario

