実力完成模擬試験問題

中学校数学V

解答・解説

大問	問１	問２	問３	問４	問５
得点	/20	/20	/14	/20	/26

Made by LibraCC *Institute of Academic TARAbit*

解答一覧・配点目安（100点満点）

問１（各4点　計20点）

(1)　3

(2)　$\dfrac{xy-y^2}{x}$　（または $y-\dfrac{y^2}{x}$）

(3)　0

(4)　$(a+b-2)(a-b-2)$

(5)　$x=-1,1,2,4$　(順不同)

問２（各4点　計20点）

(1)　23 : 12

(2)　$a=\dfrac{1}{2},\quad b=0$

(3)　4 個

(4)　30

(5)　$\dfrac{13}{36}$

問３（(1) 6点 (2) 8点　計14点）

(1)　8

(2)　$m=81,\quad n=79$

問４（(1) 6点 (2) 7点 (3) 7点　計20点）

(1)　$\dfrac{3}{2}a^2$

(2)　$a=\dfrac{4}{3}$

(3)　$A(2,4)$

問５（(1) 5点 (2) 7点 (3) 7点 (4) 7点　計26点）

(1)　$y=\dfrac{10}{3}x$

(2)　$\dfrac{27}{2}$ 分後　（または 13.5 分後）

(3)　$x=\dfrac{9}{2}$　（または 4.5）

(4)　40 cm

解説

問１ 計算と方程式

(1)
工夫して計算します。
$9999 \times 10001 - 9998 \times 10002$
$= (10000-1)(10000+1) - (10000-2)(10000+2)$
$= (10000^2 - 1) - (10000^2 - 4)$
$= 10000^2 - 1 - 10000^2 + 4$
$= 3$

(2)
除法を乗法に直し、通分・約分を行います。
$\dfrac{x^2-y^2}{x-y} \div \dfrac{x^2+xy}{xy} - \dfrac{y^2}{x}$
$= \dfrac{(x+y)(x-y)}{x-y} \times \dfrac{xy}{x(x+y)} - \dfrac{y^2}{x}$
$= (x+y) \times \dfrac{y}{x+y} - \dfrac{y^2}{x}$
$= y - \dfrac{y^2}{x}$
通分して答える場合
$= \dfrac{xy-y^2}{x}$

(3)
展開公式を利用します。
前半部分：$(\sqrt{2025}-\sqrt{2024})(\sqrt{2025}+\sqrt{2024}) = 2025 - 2024 = 1$
後半部分：指数法則を利用してまとめます。
$(\sqrt{5}-2)^{2024}(\sqrt{5}+2)^{2024} = \{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)\}^{2024}$
$= (5-4)^{2024} = 1^{2024} = 1$
よって、全体は
$1 - 1 = 0$

(4)
項の組み合わせを工夫して因数分解します。
$a^2 - b^2 - 4a + 4$

$= (a^2 - 4a + 4) - b^2$
$= (a-2)^2 - b^2$
2乗－2乗の形になるので、和と差の積に分解します。
$= \{(a-2)+b\}\{(a-2)-b\}$
$= (a+b-2)(a-b-2)$

(5)
共通部分 $x^2 - 3x$ を A とおきます。
$A^2 - 2A - 8 = 0$
$(A-4)(A+2) = 0$
よって、$A = 4$ または $A = -2$
元の式に戻してそれぞれ解きます。
(i) $x^2 - 3x = 4$ のとき
$x^2 - 3x - 4 = 0$
$(x-4)(x+1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 4, -1$
(ii) $x^2 - 3x = -2$ のとき
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$(x-1)(x-2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1, 2$
以上より、解は $x = -1, 1, 2, 4$

問2 小問集合

(1)
連比を求めます。
$x : y = 2 : 3$
$y : z = 4 : 5$
y の値を 3 と 4 の最小公倍数 12 に揃えます。
$x : y = 8 : 12$
$y : z = 12 : 15$
よって $x : y : z = 8 : 12 : 15$
求める比は $(x+z) : y$ なので、
$(8+15) : 12 = 23 : 12$

(2)
$y = ax^2$ において、y の変域が $b \leqq y \leqq 8$ と正の値を含むため、グラフは下に凸（$a > 0$）です。

x の変域 $-2 \leqq x \leqq 4$ は原点 0 を含みます。
よって、y の最小値は $x=0$ のときで 0 です。したがって $b=0$。
y の最大値は、原点から遠い方の x、つまり $x=4$ のときに取ります。
$y = a \times 4^2 = 16a$
これが最大値 8 と等しくなるので、
$16a = 8 \quad \rightarrow \quad a = \dfrac{1}{2}$

(3)
根号の中身を整理します。
$\sqrt{360-12n} = \sqrt{36(10-\dfrac{n}{3})}$ と変形もできますが、ここでは 12 でくくります。
$\sqrt{12(30-n)} = \sqrt{2^2 \times 3 \times (30-n)} = 2\sqrt{3(30-n)}$
これが整数となるには、$30-n$ が $3 \times (\#\#\#\#\#)$ の形になる必要があります。
$30-n \geqq 0$ より $n \leqq 30$
考えられる $30-n$ の値は、
$3 \times 0^2 = 0 \quad \rightarrow \quad n=30$ （$\sqrt{0}=0$ は整数）
$3 \times 1^2 = 3 \quad \rightarrow \quad n=27$
$3 \times 2^2 = 12 \quad \rightarrow \quad n=18$
$3 \times 3^2 = 27 \quad \rightarrow \quad n=3$
$3 \times 4^2 = 48$ （$30-n$ は 30 以下なので不適）
よって、n は $3, 18, 27, 30$ の 4 個。

(4)
5つの自然数を小さい順に x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 とします。
平均値が 12 なので、合計は $12 \times 5 = 60$ です。
中央値が 13 なので、$x_3 = 13$ です。
x_5 を最大にするには、他の数をできるだけ小さくする必要があります。
データは「異なる自然数」であることに注意します。
x_1 の最小は 1
x_2 の最小は 2
$x_3 = 13$
x_4 は x_3 より大きくなければならないので、最小は 14
これらを合計式に当てはめます。
$1+2+13+14+x_5 = 60$
$30 + x_5 = 60$
$x_5 = 30$

(5)
さいころ2つの目の出方は全部で 36 通り。
点 (a,b) が関数 $y=\dfrac{12}{x}$ の上側にある条件は $b>\dfrac{12}{a}$ 、つまり $ab>12$ です。
積が 12 より大きくなる組み合わせを数えます。
$a=1$ のとき：なし（最大 $1\times6=6$）
$a=2$ のとき：なし（最大 $2\times6=12$ は条件に含まない）
$a=3$ のとき：$b=5,6$ $(15,18)$ $\rightarrow 2$ 通り
$a=4$ のとき：$b=4,5,6$ $(16,20,24)$ $\rightarrow 3$ 通り
$a=5$ のとき：$b=3,4,5,6$ （$15\ldots30$） $\rightarrow 4$ 通り
$a=6$ のとき：$b=3,4,5,6$ （$18\ldots36$） $\rightarrow 4$ 通り
合計 $2+3+4+4=13$ 通り。
確率は $\dfrac{13}{36}$

問３ 整数の性質

(1)
連続する2つの奇数を、整数 k を用いて $2k-1,2k+1$ と表すことはできません（問題文で k を答える文字として使っているため、別の文字 x を使います）。
小さい方を n、大きい方を m とします。
連続する奇数なので、$m=n+2$ です。また、その間の偶数を $2x$ とすると、
$n=2x-1, m=2x+1$ と置けます。
$m^2-n^2=(m+n)(m-n)$
$m-n=2$
$m+n=(2x+1)+(2x-1)=4x$
よって、$m^2-n^2=2\times4x=8x$
これは常に 8 の倍数であることを示しています。
例の $16,24$ の最大公約数は 8 です。
したがって、必ず割り切れる最も大きい自然数は 8 です。

(2)
(1)の考察より、m^2-n^2 は、間の偶数を $2x$ としたとき $8x$ と表せます。
$8x=320$
$x=40$
間の偶数が 80 （$2x=80$）ということになります。
よって、その前後の奇数は
$n=80-1=79$

$m = 80 + 1 = 81$
（検算：$81^2 - 79^2 = (81 - 79)(81 + 79) = 2 \times 160 = 320$）

問４ 二次関数と図形

(1)

点Aの x 座標は a なので、y 座標は a^2 です。$A(a, a^2)$
線分ACは y 軸に平行なので、点Cの x 座標も a です。
点Cは $y = -\frac{1}{2}x^2$ 上にあるので、y 座標は $-\frac{1}{2}a^2$ です。$C(a, -\frac{1}{2}a^2)$
線分ACの長さは、y 座標の差になります。
$AC = a^2 - (-\frac{1}{2}a^2) = a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2$

(2)
四角形ABDCが正方形となるには、$AC = AB$ となればよいです。
点Bの x 座標は $-a$ なので、線分ABの長さは $a - (-a) = 2a$ です。
$AC = AB$ より
$\frac{3}{2}a^2 = 2a$
$a > 0$ なので両辺を a で割って
$\frac{3}{2}a = 2$
$a = \frac{4}{3}$

(3)
四角形ABDC（長方形）の面積は $AB \times AC$ で表されます。
$Area = 2a \times \frac{3}{2}a^2 = 3a^3$
これが 24 となるので、
$3a^3 = 24$
$a^3 = 8$
a は実数なので $a = 2$
点Aの座標を求めます。
$x = 2$
$y = 2^2 = 4$
よって $A(2, 4)$

問５ 空間図形と関数の利用

底面積 S の水槽に、底面積 $\frac{1}{3}S$ 、高さ 30 のおもりがあります。

(1)
9分後におもりの高さ 30cm まで水が溜まりました。

おもりの高さ以下の部分では、水が入る底面積は $S - \frac{1}{3}S = \frac{2}{3}S$ です。
給水量は一定なので、水位の上昇も一定のペース（比例）になります。
$x = 9$ のとき $y = 30$ なので、
$y = ax$ に代入して $30 = 9a \to a = \frac{10}{3}$
よって $y = \frac{10}{3}x$

(2)
おもりの高さより 10cm 高くなる、つまり水位が 40cm になる時間を求めます。
まず、給水速度（毎分の水量）を考えます。
0〜30cmまでの水の体積は、底面積 $\frac{2}{3}S$ × 高さ 30 $= 20S$
これが9分で入ったので、毎分の給水量は $\frac{20S}{9}$ です。
次に、30cm〜40cmの部分を考えます。
ここはおもりが無い（水没している）ので、底面積は水槽そのままの S です。
必要な高さは 10cm なので、体積は $10S$ です。
これにかかる時間は、
$$\#\#\# = \frac{\#\#\#}{\#\#\#\#\#\#} = 10S \div \frac{20S}{9} = 10 \times \frac{9}{20} = \frac{9}{2} = 4.5$$ 分
最初の9分と合わせて、
$9 + 4.5 = 13.5$ 分後 （または $\frac{27}{2}$ 分後）

(3)
水位が $y$cm のとき、おもりが入った状態での水の体積は $\frac{2}{3}Sy$ です。
おもりを取り出すと、水は底面積 S 全体に広がり、水位は $y - 5$ になりました。
水の体積は変わらないので、
$\frac{2}{3}Sy = S(y-5)$
両辺を S で割って

$\frac{2}{3}y = y - 5$

$\frac{1}{3}y = 5$

$y = 15$

つまり、おもりを取り出す前の水位は 15cm でした。

(1)の式 $y = \frac{10}{3}x$ を利用して時間を求めます。

$15 = \frac{10}{3}x$

$x = 15 \times \frac{3}{10} = \frac{9}{2}$ （または 4.5）

(4)
状況を整理します。
(3)の直後の状態（おもり無し）：
水位は $15 - 5 = 10$cm です。
ここから水を入れ始め、水位がおもりの高さ 30cm になるまで入れました。
底面積は S なので、入れた水の高さは $30 - 10 = 20$cm 分です。
入れた水の量 $V_{add} = S \times 20 = 20S$

「もしおもりを取り出さずに」(3)の直後の状態から同じ量の水を入れた場合：
スタート時の水位は 15cm （おもり有り）。
まず、おもりの高さ 30cm まで水が溜まるのに必要な量を考えます。
今の水位 15cm から 30cm までの高さ 15cm 分、底面積は $\frac{2}{3}S$ です。
必要な体積 $V_{gap} = 15 \times \frac{2}{3}S = 10S$
今回入れる水は $20S$ なので、$10S$ 使ってもまだ $10S$ 余ります。
水位が 30cm に達した時点で、おもりは水没します。
残り $10S$ の水は、底面積 S （おもりの上）に溜まっていきます。
上昇する高さ $= \frac{10S}{S} = 10$cm
よって、最終的な水位は
$30\text{cm} + 10\text{cm} = 40\text{cm}$