



Université Claude Bernard Lyon 1  
Institut de Science Financière et d'Assurances

## PROJET RISQUE DE CRÉDIT

---

Thomas LAURE  
Yan LIANG  
Xavier TULLIÉ

M2SAF - 2014/2015

# Introduction

Les vagues successives de crises financières qui ont touchées aussi bien les pays émergents (Amérique latine en 94, Asie 97...), que les pays développés avec notamment la crise de 2008 sont à l'origine de la chute des cours boursiers et entraînent la faillite d'entreprises. Afin de capter au mieux ces crises et leurs propagations les économistes sont amenés à étudier les facteurs qui en sont responsables et à élaborer des modèles empiriques afin d'en prévoir l'évolution (Kaminsky, Lizondo, Reinhart, 1998). La manière dont les chocs sont transmis et traduire leur intensité est donc une problématique importante. La propagation d'une crise au sein de l'économie peut-elle être vue comme un ensemble d'évènements indépendants ou bien comme une contagion ? Sous cette dernière hypothèse cela proviendrait-il des liens qui deviennent plus important lors ces crises ? Ou bien parce que ces liens sont déjà forts avant que la crise ne se produise ?

La définition de la contagion et sa mesure suscitent l'intérêt de nombreux agents économiques : les économistes, les policymakers (gouvernements, banques centrales, ...) ainsi que les gestionnaires de portefeuilles. On remarque de plus que le terme "contagion" est de plus en plus utilisé au sein des marchés de change et d'actif.

Ce travail propose de se rendre compte des techniques mathématiques misent en place au sein des modèles de risque de crédit où il y a contagion entre les émetteurs, c'est à dire lorsque le défaut d'un acteur vient soit directement provoquer le défaut d'autres parties ou (le plus souvent) changer le risque de défaut des autres. Bien que diverses approches soient possibles, on se concentre ici sur les modèles de forme réduite basés sur des Chaînes de Markov. En effet, leur utilisation offre une bien plus grande souplesse et un cadre de calcul efficace par rapport à d'autres méthode de modélisation, notamment celles utilisant les copules.

Nous aborderons aussi les thèmes subsidiaires mais importants que sont le rôle de l'information et l'effet de changements de mesure au sein de ces modèles, c'est à dire le passage de la probabilité risque neutre à la probabilité historique et inversement.

## Rappels sur les chaines de Markov

Dans cette étude les processus de Markov sont étudiés en utilisant l'approche basée sur l'utilisation de martingales qualifiées de "extended generator" introduite par Strook & Varadhan (1969). Nous rappelons ici uniquement certaines définitions et propriétés qui nous seront utiles par la suite, le document "On Extended Generator of Markov Processes" de R. Bielecki & Ewa Frankiewicz apporte de plus amples informations sur cette approche.

Dans cette partie et pour la suite on se place dans l'espace de probabilité  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$  avec  $\mathcal{F}_t$  la filtration représentant l'information disponible sur le marché en  $t$ . On considère une chaîne de Markov  $X_t$  dont l'ensemble des états est  $E = \{1, \dots, n\}$ .

On rappelle la définition du taux de défaillance  $h_i(t)$  pour un émetteur  $i$  qui est défini par le fait que le processus suivant soit une martingale ;

$$M_i(t) = \mathbf{1}_{(\tau_i \leq t)} - \int_0^{t \wedge \tau_i} h_i(s) ds$$

On appelle générateur d'un processus de Markov l'opérateur  $\mathcal{A}$  défini sur  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  tel que

$$C_t^f = f(X_t) - f(x_0) - \int_0^t \mathcal{A}f(X_s) ds$$

Soit une martingale pour  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ . Une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  pouvant être représentée par un vecteur de taille  $n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$  avec  $f_i = f(i)$  le générateur pour une chaîne de Markov peut donc être ramené à une matrice de taille  $n \times n$  nommée  $Q$ -matrice telle que,

$$\mathcal{A}f(i) = (Qf)_i.$$

Les éléments en dehors de la diagonale  $q_{i,j} (i \neq j)$  représentent les probabilités de transition d'un état  $i$  à un état  $j$  alors que les éléments de la diagonale s'écrivent,

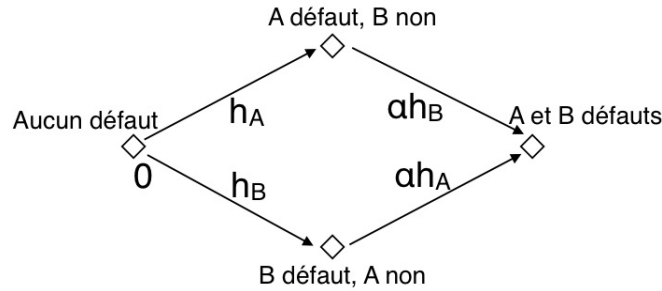
$$q_{i,i} = - \sum_{j \neq i} q_{i,j},$$

de sorte que la somme des colonnes de  $Q$  est égale à zéro et  $1 + q_{i,i}\delta$  est la probabilité que le processus reste en  $i$  sur l'intervalle  $[t, t + \delta]$ .

# Modèle de contagion à partir de chaine de Markov

## Modèle de défaut de forme diamant

Dans ce premier modèle simple on considère deux contreparties  $A$  et  $B$ . On identifie les différentes possibilités d'évolution de défaut de ces émetteurs par une chaine de Markov  $X_t$  à 4 états qui démarre en  $X_0 = 0$  où aucun des émetteurs n'est en défaut. Le système évolue avec les taux de défaillances présentés dans la figure ci-dessous.



En cas de défaut d'un des deux émetteurs le taux de défaillance de l'autre est alors accru d'une constante  $\alpha$ , qui quantifie donc l'effet du défaut d'une partie sur la seconde.

La  $Q$ -matrice de ce modèle est

$$A = \begin{pmatrix} -(h_A + h_B) & h_A & h_B & 0 \\ 0 & -\alpha h_B & 0 & \alpha h_B \\ 0 & 0 & -\alpha h_A & \alpha h_A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les densités marginales de défaut pour chacun des émetteurs s'écrivent

$$F_A(t) = 1 - e^{(h_A + h_B)t} - \frac{h_B e^{-\alpha h_A(t)}}{h_A + h_B - \alpha h_A} (1 - e^{-(h_A + h_B - \alpha h_A)t})$$

$$F_B(t) = 1 - e^{(h_A + h_B)t} - \frac{h_A e^{-\alpha h_B(t)}}{h_A + h_B - \alpha h_B} (1 - e^{-(h_A + h_B - \alpha h_B)t})$$

La fonction de répartition du défaut global du système, i.e le défaut des deux contreparties  $\tau_{D,D} = \max(\tau_A, \tau_B)$ , prend la forme suivante,

$$F_{DD}(t) = 1 - e^{(h_A + h_B)t} - \frac{h_B e^{-\alpha h_A(t)}}{h_A + h_B - \alpha h_A} (1 - e^{-(h_A + h_B - \alpha h_A)t}) - \frac{h_A e^{-\alpha h_B(t)}}{h_A + h_B - \alpha h_B} (1 - e^{-(h_A + h_B - \alpha h_B)t}).$$

La calibration du modèle pour un paramètre  $\alpha$  donné doit être réalisée conjointement pour les deux émetteur. Dans notre application on considère les taux de recouvrements  $R_A$  et  $R_B$ ,  $r$  le taux sans risque continu. La prime en temps continu  $\pi_i$  pour  $i \in \{A, B\}$  du CDS en considérant l'absence de prime initiale est donnée par absence d'opportunité d'arbitrage en égalisant les flux,

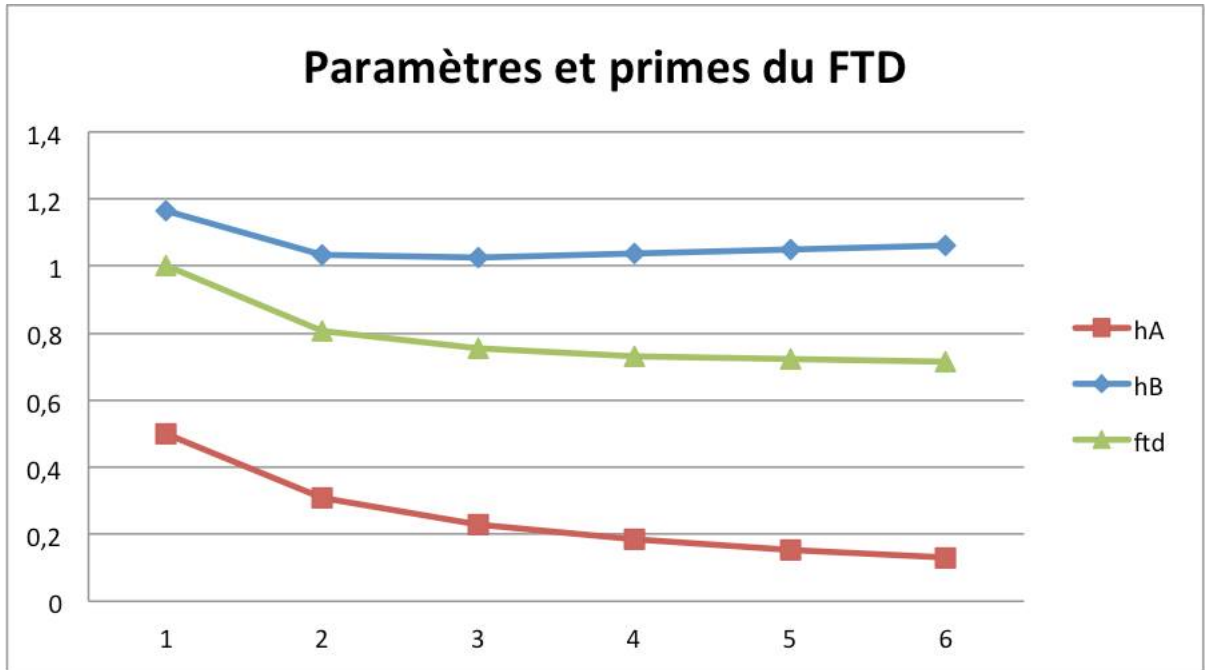
$$\pi_i \int_0^T e^{-rT} (1 - F_i(t)) dt = (1 - R_i) \int_0^T e^{-rT} f_i(t) dt,$$

avec  $f_i(t) = dF_i(t)/dt$ . Dans notre cas on peut écrire,

$$\pi_A = (1 - R_A) \frac{(h_A + h_B)h_A(1-\alpha)m(r+h_A+h_B,T) + \alpha h_A h_B m(r+\alpha h_1,T)}{h_A(1-\alpha)m(r+h_A+h_B,T) + h_B m(r+\alpha h_1,T)}$$

avec  $m(\alpha, T) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha T})$ . On obtient une expression similaire pour  $\pi_B$ .

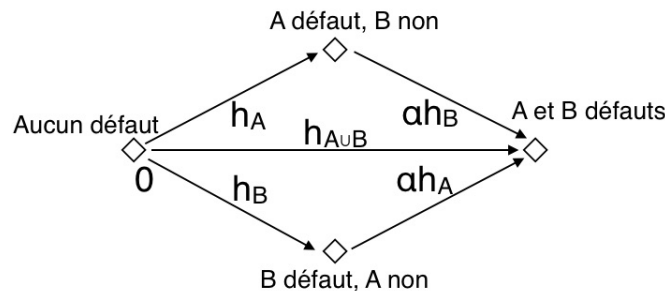
En considérant que  $\pi_A = 90\text{bp}$ ,  $\pi_B = 175\text{bp}$  et  $R_A = R_B = 40\%$ , on obtient le résultat suivant pour la calibration de  $h_A$  et de  $h_B$  en fonction du paramètre  $\alpha$ , En considérant que  $\pi_A = 30\text{bp}$ ,  $\pi_B = 70\text{bp}$ ,  $R_A = R_B = 40\%$ , on obtient le résultat suivant pour la calibration de  $h_A$  et de  $h_B$  en fonction du paramètre  $\alpha$ ,



Le temps de premier défaut  $\pi_{FTD} = \tau_A \wedge \tau_B$  suit une loi exponentielle de paramètre  $h_A + h_B$  on obtient donc l'expression suivante pour la prime du FTD qu'on ajoute au graphique de la calibration,

$$\pi_{FTD} = (1 - R_A)h_1 + (1 - R_B)h_B$$

Ce modèle se complexifie lorsqu'on ajoute une probabilité non nulle pour le défaut simultané des deux émetteurs. Dans ce cas, le diagramme de la chaîne de Markov est le suivant.



Ce modèle présente l'avantage que sous certaines conditions sur le taux de défaillance il est possible de le modéliser séparément avec un taux de CDS pour chacun des émetteurs.

## Modèle de contagion non homogène

Dans ce modèle le taux de défaillance pour chacun des  $n$  émetteurs de créance est une fonction du défaut des autres émetteurs.

On note  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{O}$  respectivement les ensembles non ordonnés et ordonnés des sous-ensembles de  $N = \{1, \dots, n\}$  dont les éléments sont notés  $\{k_1, \dots, k_u\}$  et  $[1, \dots, k_o]$  et  $\mathcal{U}_i$  et  $\mathcal{O}_i$  les ensembles de sous ensembles dont on exclut l'indice  $i$ .

Il vient que,

$$\begin{aligned} \text{card}(\mathcal{U}) &= 2^n \\ \text{card}(\mathcal{O}) &= 1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \dots + n!. \end{aligned}$$

Dans le cas où on se place dans l'ensemble  $\mathcal{O}$  où les émetteurs sont ordonnés en fonction de leur temps de défaut, la démarche est la suivante. En notant  $\tau_i$  le temps de défaut pour le  $i^{\text{ème}}$  émetteur, on va spécifier les fonctions  $\mu_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{R}^+$  et supposer que le taux de hasard en  $t$  de  $\tau_i$  s'exprime de la manière suivante :  $\lambda_i(t) = \mu_i([k_1, \dots, k_j])$  lorsque  $\tau_{k_1} < \dots < \tau_{k_j} < t$  et  $\tau_i > t$  pour  $i \notin \{k_1, \dots, k_j\}$ .

Dans le cas d'un modèle non ordonné les taux de défaillances sont définis par les fonctions  $\nu_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Afin de se rapprocher d'un modèle ordonné on utilise une indicatrice, ainsi on définit  $Y_i(t) = \mathbf{1}_{\tau_i \leq t}$ . Il faut ensuite identifier les éléments de  $\mathcal{U}$  avec ceux de  $E = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$  les éléments de  $E$  identifiant les émetteurs ayant fait défauts. Les taux de défaillances d'écrivent donc  $\nu_i(Y(t))$  avec  $Y(t) = (Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ .

Dans le modèle de Hebertsson et Rootzén (2008) on trouve l'expression suivante pour la fonction de hasard dans le cas non ordonné,

$$\nu_i(y) = a_i + b_i y, \text{ avec } a_i \in \mathbb{R}^+ \text{ et } b_i \in \mathbb{R}^n$$

le défaut d'un autre émetteur va ainsi forcément augmenter le taux de défaillance du  $i^{\text{ème}}$  de  $b_{i,j}$  en considérant que  $i$  n'a pas encore fait défaut. Ces modèles peuvent être décrits par des chaines de Markov sur un espace de cardinal  $\text{card}(\mathcal{U})$  ou  $\text{card}(\mathcal{O})$ . On représente ci dessous le cas  $n = 3$  émetteurs. Dans la colonne de gauche aucun émetteur n'a encore fait défaut, à droite tous les émetteurs sont en défaut entre les deux on retrouve les évolutions possibles et les caractéristiques des taux de défaillance dans chacun des cas.

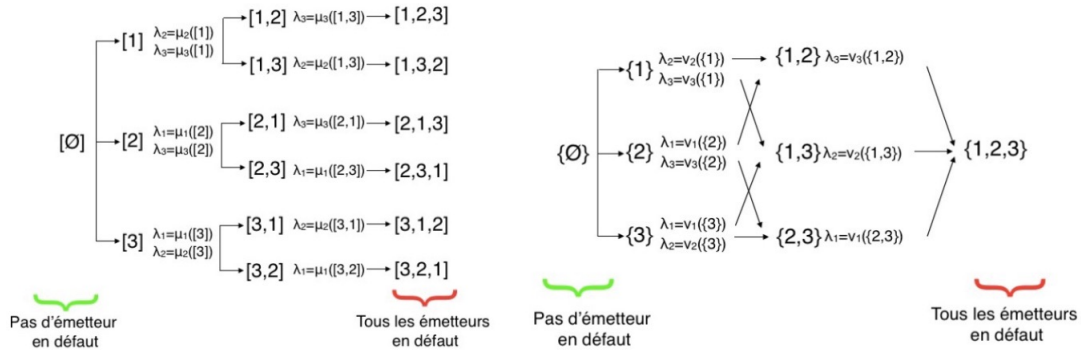


Diagramme dans le cas ordonné

Diagramme dans le cas non ordonné

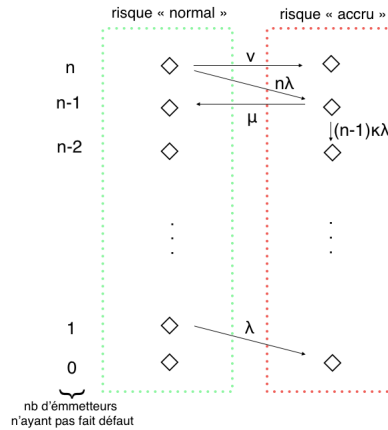
Fixer les fonctions  $\mu_i$  et  $\nu_i$  reste à notre charge, on peut par exemple imaginer que celles-ci prennent en compte le fait que le défaut d'un émetteur a d'autant plus d'importance sur le taux de défaillance des autres si celui-ci est récent ou si il s'agissait d'un acteur majeur du marché. Le problème majeur pour ces modèle est la taille de l'ensemble des états : en considérant  $n = 10$  émetteur il faut travailler dans le cas ordonné avec un espace approchant les 10 millions d'états.

L'instant de défaut d'un émetteur peut être vu comme un temps de saut possédant les même caractéristique peu importe le moment où celui-ci a lieu. Il possède

donc des propriétés qu'il est possible de généraliser. Cela signifie qu'il est possible de réduire la modélisation de l'ensemble du processus à celle de  $e^{\tilde{Q}t}v$  avec  $\tilde{Q}$  la  $n \times n$   $Q$ -matrice du modèle ou une de sous-matrice. Cependant le calcul de l'exponentiel de cette matrice pose aussi des problèmes de mise en oeuvre pratique et reste sujet à des recherches.

## Un modèle homogène : Risque accru

Ce modèle apparait dans l'article de Davis and Lo (2001b). On considère ici un portefeuille de taille  $n$  où les défaut sont échangeable (i.e les distributions sont invariantes par permutation des émetteurs). On considère de plus que les émetteurs sont conditionnellement indépendants et que compte tenue d'un niveau de risque leur taux de défaillance est noté  $h(t)$ . On considère qu'il existe deux cas de figures : sous un risque "normal"  $h(t) = \lambda$  et sous un risque "accru"  $h(t) = \kappa\lambda$ , si on considère que  $j$  créancier n'ont pas fait défaut le taux de défaillance du portefeuille est  $j\lambda$  ou  $j\kappa\lambda$ . L'évolution du portefeuilles peut être modélisé par une chaine de Markov en temps continue dont le diagramme d'évolution est représenté ci-dessous.



Dans ce modèle le système peut spontanément passer de l'état risque normal à l'état risque accru mais il passera forcément à l'état risque accru lorsqu'un émetteur fait défaut (si il n'y est pas déjà). Le retour à l'état "risque normal" s'effectue avec un taux de défaillance constant  $\mu$ , la période passée dans l'état risque accru suit donc une loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{\mu}$ . Dans le cas  $n=2$  nous la  $Q$ -matrice du système est la suivante,

$$Q = \begin{pmatrix} -\mu - 2\lambda & 0 & \nu & 2\lambda & 0 \\ 0 & -\nu - \lambda & 0 & \nu & \lambda \\ \mu & 0 & -\mu - 2\kappa\lambda & 2\kappa\lambda & 0 \\ 0 & \mu & 0 & -\mu - \kappa\lambda & \kappa\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le nombre de sinistres attendus sur  $[0, T]$  est  $ES(\nu, \mu, \lambda, \vartheta) = \alpha' e^{QT} \beta$  avec  $\alpha' = [1, 0, 0, 0, 0]$  et  $\beta' = [0, 1, 0, 1, 2]$ . La probabilité de défaut individuelle est  $p =$



$\frac{1}{n}ES(\nu, \mu, \lambda, \vartheta)$ . En considérant un ensemble homogène d'émetteurs et en connaissant  $p$  à partir d'un taux CDS de maturité  $T$  il est possible de calibrer  $\lambda$  à partir de  $\nu, \mu, \kappa$ . Dans le cas où on voudra faire la calibration pour des taux de différentes maturités il faudra que le paramètre soit dépendant du temps  $\lambda(t)$ .

## Changement de filtration

Les changements de mesures sont très utilisés en modélisation financière pour passer de probabilités historiques à la probabilité risque neutre et inversement. Le but de cet exercice est double puisqu'il nous permet d'obtenir des valeurs de marchés consistantes pour estimer de nouveau contrat ainsi que d'évaluer des stratégies de couverture. Dans le cas des produits de crédit, les marchés sont invariablement incomplets il n'y a donc pas unicité de la mesure martingale. L'approche classique est d'utiliser une famille de modèles paramétriques avec des mesures risque neutre elles aussi paramétriques ( $\{\mathbb{Q}^\theta : \theta \in \Theta\}$ ) et de calibrer les paramètres avec les prix du marché, c'est à dire faire en sorte que la market value  $\pi_0$  pour chaque contrat corresponde avec la valeur obtenu par le modèle,  $v_0^\theta = \mathbb{E}^\theta \left[ \frac{V_T}{N_T} \right]$ . Avec  $V_T$  le revenu aléatoire du contrat en  $T$ ,  $\mathbb{E}^\theta$  l'espérance pour la probabilité historique en accord avec  $\mathbb{Q}^\theta$  et  $N_T$  le numéraire du pair.

Cependant un problème "d'information" apparait lorsqu'il s'agit de calibrer certains modèles. C'est le cas avec le modèle risques accrus qui permet d'obtenir une évaluation des prix de marché mais où l'évaluation de la mise en place de certaines stratégies de couverture n'est pas possible. Nous allons décrire un processus simple qui permet de comprendre la situation.

## Chaines de Markov agrégées

Il s'agit du cas le plus simple où on dispose d'observation incomplète sur une chaîne de Markov. On considère classiquement une chaîne  $X_t$  dont l'espace des états est  $E$ . Cet espace est partitionné en  $m$  sous ensembles disjoints  $F_{i \in \{1, \dots, m\}}$  donc  $E = \cup_{i=1}^m F_i$ . Cependant nous n'allons pas pouvoir observer les états de la chaîne dans l'ensemble détaillé  $E$  mais dans les sous ensembles  $(F_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$  ce qui représentent en quelque sorte une "agrégation" des états. La formalisation mathématique est qu'au lieu d'observer le processus  $X_t$  nous observons  $Y_t = \sum_{i=1}^m i \mathbf{1}_{F_i}(X(t))$ . Bien que  $Y_t$  n'est en général pas une chaîne de Markov il est toujours possible d'ajouter une variable afin d'obtenir un processus déterministe par morceau (PDP).

On considère une chaîne où 4 états sont possible  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  mais où seule-

ment deux sont observables  $F_1 = \{1, 2\}$  et  $F_2 = \{3, 4\}$ . On considère  $X_t$  la chaîne de Markov continue dont l'espace des états est  $E$  dont la  $4 \times 4$  Q-matrice est définie par  $Q = [q_{i,j}]$ , avec  $q_{i,j} > 0 \ \forall i \neq j$ . On observe le processus  $Y_t = 1 + \mathbb{1}_{F_2}(X_t)$  pour construire le processus déterministe par morceau on introduit  $Z_t$  tel que,

$$Z_t = \mathbb{P}[X_t = 2 \mid \mathcal{F}_t] \mathbb{1}_{Y_t=1} + \mathbb{P}[X_t = 4 \mid \mathcal{F}_t] \mathbb{1}_{Y_t=2}$$

qui s'interprète pour chaque groupement d'état comme la probabilité conditionnelle d'être dans l'un de deux état non-observable.

Le processus  $W_t = (Y_t, Z_t)$  ainsi créé est un processus déterministe par morceaux sur l'espace  $E = 1, 2 \times [0, 1]$  pour lequel on a les propriétés suivantes,

(i) la probabilité de saut  $\lambda(y, z)$  est

$$\begin{aligned} \lambda(1, z) &= z(q_{2,3} + q_{2,4}) + (1 - z)(q_{1,3} + q_{1,4}) \\ \lambda(2, z) &= z(q_{4,1} + q_{4,2}) + (1 - z)(q_{3,1} + q_{3,2}) \end{aligned}$$

(ii) Compte tenue d'une de la distribution de  $W_t$  et en notant  $w_- = W_{t-}$  on peut exprimer la mesure de transition  $Q(dw, w_-)$  comme,

$$\begin{aligned} Q(dw, (1, z)) &= \delta_{(2, \chi_1(z))}(dw) \\ Q(dw, (2, z)) &= \delta_{(1, \chi_2(z))}(dw) \end{aligned}$$

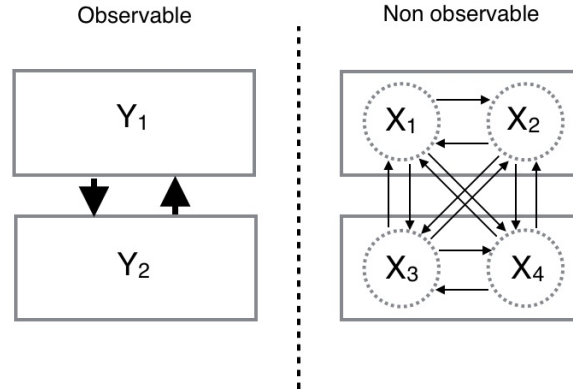
Avec  $\delta_w$  la mesure de Dirac et

$$\chi_1(z) = z \frac{q_{2,4}}{q_{2,3} + q_{2,4}} + (1 - z) \frac{q_{1,4}}{q_{1,3} + q_{1,4}}, \quad \chi_2(z) = z \frac{q_{4,2}}{q_{4,1} + q_{4,2}} + (1 - z) \frac{q_{3,2}}{q_{3,1} + q_{3,2}}$$

(iii) Entre deux sauts,  $Z_t$  satisfait les équations suivantes,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_t &= -(q_{1,2} - q_{2,2})Z_t + q_{1,2}, \quad Y_t = 1 \\ \frac{d}{dt} Z_t &= -(q_{3,4} - q_{4,4})Z_t + q_{3,4}, \quad Y_t = 2 \end{aligned}$$

Les propriétés du processus ainsi obtenu permettent de parvenir à des estimations des paramètres de la chaîne. En considérant notamment la durée de la chaîne passé dans le premier acro-état. La situation décrite dans cette partie peut être résumée dans le diagramme ci-dessous.



## Changement de mesure

Comme nous venons de le voir une grande majorité des modèles de modélisation de risque de crédit utilise une probabilité  $\mathbb{Q}$ , mais il est aussi important de connaître la probabilité historique  $\mathbb{P}$ .

De nombreuses études ont été menées sur le risque de crédit et nous disposons d'un historique de donnée de plus de 30 ans. De ces données, des recherches ont été effectuées pour comprendre les facteurs intervenant dans le risque de crédit, et plus particulièrement s'il est du à une "fragilité" du portefeuille ou à une contamination. La réponse est qu'il y a contamination !

Une des théories centrale en gestion des risques est l'emploi de la dérivé de Radeon-Nicodym  $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$  qui nécessite que  $\mathbb{P}_1$  et  $\mathbb{P}_2$  soit des mesures équivalentes.

Si en princing la mesure risque neutre  $\mathbb{Q}$  est par définition équivalente à la mesure historique  $\mathbb{P}$ , ce n'est pas le cas en gestion des risques. En ce basant sur des études en économétrie il apparait que la fonction de densité contient des données latentes et non observables. Nous avons vu une des méthodes pour répondre à cette problématique dans la partie 6, ou nous obtenons un modèle projeté à partir de la filtration observable (PDP)

Nous allons étudier dans cette partie un changement de mesure dans le modèle PDP. Pour cela nous décrirons dans un premier temps le modèle un modèle issu du théorème de Girsanov appliqué au semi-martingale ; le théorème de Doléans-Dade.

## Changement de mesure pour des semi-martingales : le théorème de Doléans-Dale

Pour commencer nous allons mettre en place les notations dont ce théorème a besoin et qui est très similaire au théorème de Girsanov. Nous nous plaçons dans un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$

**Théorème** Soit  $M$  une  $\mathcal{F}_t$  semi-martingale et  $M_0 = 0$  alors  $\exists Z$  noté  $Z = \epsilon(M)$  tel que :

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dM_s \Leftrightarrow Z_t = e^{M_t - \frac{1}{2}[M, M]_t^c} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta M_s) e^{\Delta M_s} \quad (1)$$

Avec  $[M, M]_t^c$  qui correspond à la variation quadratique de la martingales. On définit ensuite  $\mathbb{M}$  une mesure sur  $\mathcal{F}_T$  en utilisant  $\mathbb{E}[Z_T] = 1$

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \epsilon(M)_T \quad (2)$$

**Théorème 2** Soit  $M$  et  $N$  deux martingales locales,  $Z$  respectant les mêmes propriétés que précédemment, et  $\mathcal{A}$  un processus connu et  $X$  tel que  $X_t = N_t - \mathcal{A}_t$ . Alors  $X$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale locale si et seulement si  $\mathcal{A}$  est le compensateur prédictible de  $[M, N]$

## Application au processus ponctuels

L'application suivante peut être trouvée dans le livre de Brémaud ( 1981 ). Elle traite du changement de mesure pour un processus ponctuel continu.

Nous introduisons le processus  $N_t$  de poisson de constante  $\lambda$  et  $a_t$  un processus connu. On note  $M_t$  :

$$M_t = \int_0^t a_s (dN_s - \lambda ds) \quad (3)$$

Donc  $\Delta M_t = a_t$ . On pose  $\mu_t = \lambda(1 + a_t)$  et on obtient :

$$\epsilon(M)_t = \prod_{T_i \leq t} \frac{\mu_{T_i}}{\lambda} e^{-\int_0^t (\mu_s - \lambda) ds} \quad (4)$$

Avec  $T_i$  le temps d'arrêt de  $N_t$  on en déduit que  $\mathcal{A}_t = \int_0^t (\mu_s - \lambda) ds$  et que sous la

mesure  $\mathbb{Q}$   $N_t$  est un processus ponctuel de taux  $\mu_t$

Cette formule nous permet d'estimer  $N_t$  sous  $\mathbb{Q}$  avec les données historiques. Ainsi la Log-vraisemblance est :

$$\log(\epsilon(M)_T) = N_T \log\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) - (\mu - \lambda)T \quad (5)$$

## Changement de mesure pour les PDP

Nous appliquons le théorème de Doléans pour  $M$  une martingale locale dans la filtration naturelle de la PDP, puis nous étudions l'impact de remplacer la mesure de départ  $\mathbb{P}$  par une nouvelle mesure  $d\mathbb{Q} = \epsilon(M^g)d\mathbb{P}$ . En identifiant les paramètres locaux et la classe  $g$  pour lesquels  $X_t$  est une  $\mathbb{Q}$ -PDP, nous obtenons le théorème suivant.

**Théorème** Les PDP ayant pour paramètres locaux  $(\chi, \lambda, S)$  et  $(\chi, \tilde{\lambda}, \tilde{Q}, \tilde{R})$  ont une loi commune absolument continue si et seulement si il existe une fonction  $\beta : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  et une mesure  $\gamma : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfaisant  $\int_E \gamma(y, x) Q(dy, x) = 1$

$\forall x$  telles que :

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}(x) &= \beta(x)\lambda(x) \\ \tilde{Q}(\mathcal{A}, c) &= \int_{\mathcal{A}} \gamma(y, x)Q(dy, x) \\ \tilde{R}(\mathcal{A}, c) &= \int_{\mathcal{A}} \eta(y, x)R(dy, x)\end{aligned}$$

Et la dérivé de Radon-Nikodym est :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \prod_{\substack{T_i \leq T \\ X_{T_i}^- \notin \Gamma}} \gamma(X_{T_i}, X_{T_i}^-) \beta(X_{T_i}^-) \prod_{\substack{T_i \leq T \\ X_{T_i}^- \in \Gamma}} \eta(X_{T_i}, X_{T_i}^-) \exp\left(-\int_0^T \int_E \gamma(y, X_s)Q(dy, X_s) \beta(X_s) \lambda(X_s) ds\right)$$

## Risques accrus revisité

Cette section fait suite à la section précédente sur les risques accru. Dans la réalité nous n'observons pas un risque accru pour un processus, mais plus une séquence d'événement de défaut. Le modele projeté de la filtration observé est une PDP dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$\chi = (\nu - (\mu + \nu)z) \frac{d}{dz}$$

Le processus peut ce découper de la manière suivante :  $X_t = (J_t, Z_t)$  avec  $J_t$  le nombre de débiteurs détaillants et  $Z_t$  tel que :

$$\frac{d}{dt}Z_t = -(\mu + \nu)Z_t + \nu$$

On note  $\mathcal{A}_f(j, z)$  le générateur de la PDP tel que :

$$\mathcal{A}_f(j, z) = \chi_f(j, z) + h(j, z)(f(j-1, 1) - f(j, z))$$

On obtient ainsi le système triangulaire hyperbolique de PDE suivants :

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + (\nu - (\mu + \nu)z) \frac{\partial v}{\partial z} + v_j(t, z)(v_{j-1}(t, 1) - v_j(t, z)) = 0$$

Ce système peut être résolu via un algorithme <sup>1</sup>

---

1. Contagion Model in Credit Risk, Mark H.A Davis

## Conclusion

La modélisation du risque de crédit souffre du manque de données. Dans le cadre de la mesure risque neutre  $\mathbb{Q}$  il existe seulement les indices iTraxx et CDX pour mesurer la corrélation des données. D'autre part comme nous l'avons indiqué, le risque de crédit n'est pas invariant au changement de probabilité et ce à l'inverse des modèles financiers basés sur Black & Scholes. Il est ainsi rarement possible d'utiliser des estimateurs de corrélation empiriques dans les modèles risques neutre. Sous la probabilité historique, les défauts réalisés restent rare, nous permettant de garder des données sur de longues périodes.

Ainsi, l'approche la plus cohérent est d'opter pour des modèles les plus simples possible capturant les phénomènes observés et restant intuitif dans leur fonctionnement. La modélisation par les chaînes de Markov respectent ces conditions : elle est simple, visuelle, flexible et rapide en terme de calcul. Dans ces modèles, nous venons de voir que si on connaît les variables latente et les paramètres, les modèles de projection sont équivalents aux modèles PDP. Enfin dans ce type de modèles nous pouvons aisément déterminer la fonction de vraisemblance sans utiliser de méthode lourde en calcul. Cette méthode permet de traiter un nombre conséquent de phénomène, dont la contamination en risque de crédit !

La problématique traitée dans ce document a été étudiée sous une forme très différente, on ne parle plus de contagion mais d'une modélisation de réseau. Dans cette approche on étudie le lien entre chaque banque et les obligations mutuelles qui en résulte. Cette théorie est expliquée par Eisenberg et Noe (2001).

Si cette théorie est très récente, deux courants sont apparus. Une pensée économique illustrée par Nier et Al (2007) et Shin (2008), dont l'idée repose sur le fait que chaque banque est en mesure d'évaluer les actifs interbancaires. Une seconde pensée dite de physique statistique et menée par Gai et Kapadia (2009) et Watt (2002) repose sur la théorie des graphes aléatoire.

Un des grands défis pour la modélisation du risque de crédit est une modélisation stochastique. On sait en effet que pour nombreux modèles la modélisation stochastiques qui est plus compliquée à mettre en place est aussi plus efficiente.