Formulação fraca da fratura

O sistema de EDP implementado no material TPZMatfrac1dhdiv para a fratura é dado a seguir:

$$\begin{cases} div(\mathbf{q}) + \frac{\partial w}{\partial t} + q_l = 0 \\ \mathbf{q} = -\frac{w^3}{12\mu}\nabla p \end{cases}$$

sendo $\mathbf{q}$ a vazão, q_l o leak-off, p a pressão, μ a viscosidade e w a abertura.

Leak-off

Costuma se adicionar um um polímero no fluido de perfuração que tem a atuação de criar continuamente um reboco na face da fratura, mantendo uma resistência ao fluxo. Além do reboco, outros dois processos interferem na filtração, que são: a invasão da formação pelo filtrado do fluido de fraturamento e o deslocamento e a compressibilidade do fluido do reservatório.

Carter realizou um estudo sobre esses efeitos e definiu a velocidade de filtração como:

$$q_l(x, t_e) = \frac{C_l}{\sqrt{t_e - t_0}} + v_{sp}\delta(t_e - t_0) \tag{1}$$

em que

- q_l: velocidade de filtração;
- C_l: coeficiente de filtração de Carter;
- t_e: tempo de exposição;
- v_{sp}: *spurt loss* ou perda de fluido instantânea.

Essa equação assume que o fluxo de fluido é linear e que o fluido é Newtoniano. Se integrar a Equação 1 obtém-se o volume filtrado:

$$v_l(x, t_e) = \int_0^t q_l(x, t_e)\ dt = 2C_l\sqrt{t_e - t_0} + v_{sp}H(t_e - t_0) \tag{2}$$

Os parâmetros C_l e v_{sp} são medidos em laboratório.

Abertura

A relação entre abertura da fratura é dada pela seguinte relação:

$$w = 0,817\frac{(1-\nu)}{G}h_f\ p_{net}$$

em que ν é o coeficiente de poisson, h_f é a altura da fratura, p_{net} é a pressão líquida na fratura, isto é $p_{net} = p_{frac} - p_{poros}$ e G é o módulo de cisalhamento dado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Formulação fraca

Nesta seção serão apresentadas as formulações fracas da equação de conservação e da lei constitutiva. Serão usados dois espaçoes de funções teste. $v \in H^1$ e $u \in L^2$.

$$\begin{aligned} v &= \sum \beta_i \phi_{q_i} \\ u &= \sum \gamma_i \phi_{p_i} \end{aligned}$$

O Domínio do problema é unidimensional com $\Omega = \{0, l_f\}$, em que l_f é comprimento da fratura.

Lei constitutiva

Multiplica-se a lei constitutiva por uma função $v \in H^1$ e integra-se no domínio.

$$\int_\Omega \frac{12\mu}{w^3}\mathbf{q}\ v\ d\Omega + \int_\Omega \nabla p\ v\ d\Omega = 0$$

Integra-se por partes:

$$\int_\Omega \frac{12\mu}{w^3}\mathbf{q}\ v\ d\Omega - \int_\Omega div(v)\ p\ d\Omega + \int_\Omega div(pv)\ d\Omega = 0$$

Com Gauss:

$$\int_\Omega \frac{12\mu}{w^3}\mathbf{q}\ v\ d\Omega - \int_\Omega div(v)\ p\ d\Omega + \int_{\partial\Omega} p\ v \cdot n\ d\Omega = 0$$

Considerando-se o domínio unidimensional:

$$\int_0^{l_f} \frac{12\mu}{w^3} q\ v\ dx - \int_0^{l_f} \frac{\partial v}{dx}\ p\ dx + p\ v_n\ |_0^{l_f} = 0$$

Considerando um espaço de dimensão finita:

$$\int_0^{l_f} \frac{12\mu}{w^3} q\ \phi_{q_i}\ dx - \int_0^{l_f} \frac{\partial \phi_{q_i}}{dx}\ p\ dx + p\ v_n\ |_0^{l_f} = 0$$

Chama-se essa equação de resíduo:

$$R_q = \int_0^{l_f} \frac{12\mu}{w^3} q\ \phi_{q_i}\ dx - \int_0^{l_f} \frac{\partial \phi_{q_i}}{dx}\ p\ dx + p\ v_n\ |_0^{l_f}$$

E sua jacobiana:

$$J_q = \int_0^{l_f} -\frac{3}{w^4}\frac{\partial w}{\partial p}\phi_{p_j}(12\mu)\ q\ \phi_{q_i}\ dx + \int_0^{l_f} \frac{12\mu}{w^3}\phi_{q_j}\ \phi_{q_i}\ dx - \int_0^{l_f} \frac{\partial \phi_{q_i}}{dx}\ \phi_{p_j}\ dx$$

Equação de conservação

Multiplica-se a equação de conservação por uma função $u \in L^2$ e integra-se no domínio.

$$\int_\Omega div(\mathbf{q})u \; d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t} u \; d\Omega + \int_\Omega q_l u \; d\Omega = 0$$

Levando-se em consideração o domínio unidimensional e backward euler para o tempo:

$$\int_0^{l_f} \frac{\partial q}{\partial x} u \; dx + \int_0^{l_f} \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} u \; dx + \int_0^{l_f} q_l u \; dx = 0$$

Considerando um espaço de dimensão finita:

$$\int_0^{l_f} \frac{\partial q}{\partial x} \phi_{p_i} \; dx + \int_0^{l_f} \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \phi_{p_i} \; dx + \int_0^{l_f} q_l \phi_{p_i} \; dx = 0$$

Chama-se essa equação de resíduo e multiplica-se por -1:

$$R_p = -\int_0^{l_f} \frac{\partial q}{\partial x} \phi_{p_i} \; dx - \int_0^{l_f} \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \phi_{p_i} \; dx - \int_0^{l_f} q_l \phi_{p_i} \; dx$$

E sua jacobiana:

$$J_p = -\int_0^{l_f} \frac{\partial \phi_{q_j}}{\partial x} \phi_{p_i} \; dx - \int_0^{l_f} \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial w^{n+1}}{\partial p} \phi_{p_j} \phi_{p_i} \; dx - \int_0^{l_f} \frac{\partial q_l}{\partial p} \phi_{p_j} \phi_{p_i} \; dx$$