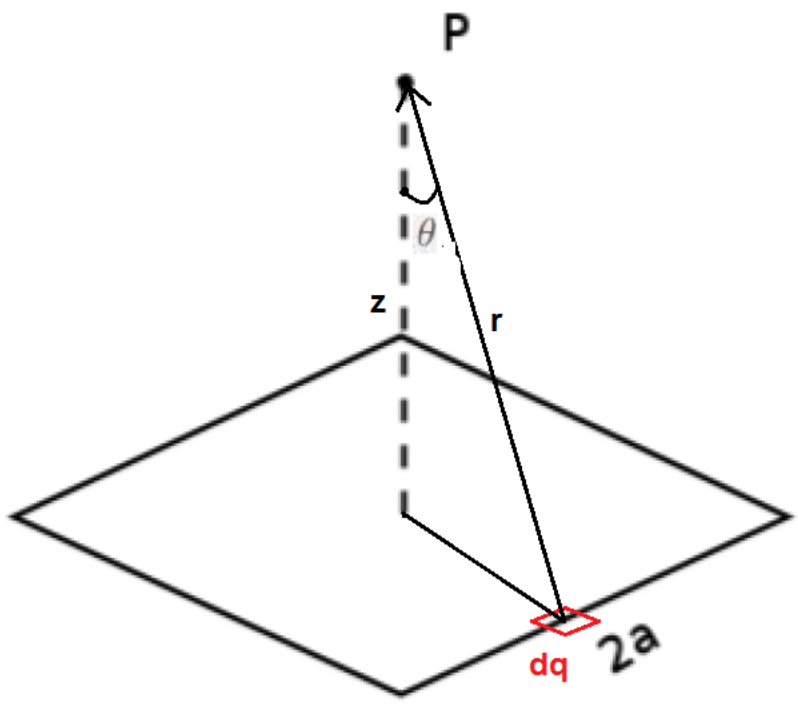
Lista 01 de FIS-32 - Lara

Comissão de Resolução de Listas - T-19

1 Determine o vetor campo elétrico em um ponto P a uma distância z acima do centro de uma quadrada de lado 2a que tem uma densidade de carga uniforme igual a λ. Sugestão: Use componentes cartesianas e considerações de simetria.



Devido à simetria do problema, as componentes perpendiculares ao eixo z se cancelarão, de modo que a direção do campo elétrico $\vec{E}$ é ẑ. Como a espira possui uma densidade linear constante λ, obtemos as expressões para dq e r:

$$dq = \lambda dl$$

$$r = \sqrt{z^2 + a^2}$$

Devido à simetria, sabendo que $cos\theta = \frac{z}{r}$ temos:

$$\vec{E} = E_z\hat{z} = Ecos\theta\hat{z} = \frac{Ez}{r}\hat{z}$$

Agora, basta desenvolver os cálculos a partir da fórmula do campo elétrico gerado por distribuições contínuas de carga:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\lambda dl}{r^2}\hat{r}$$

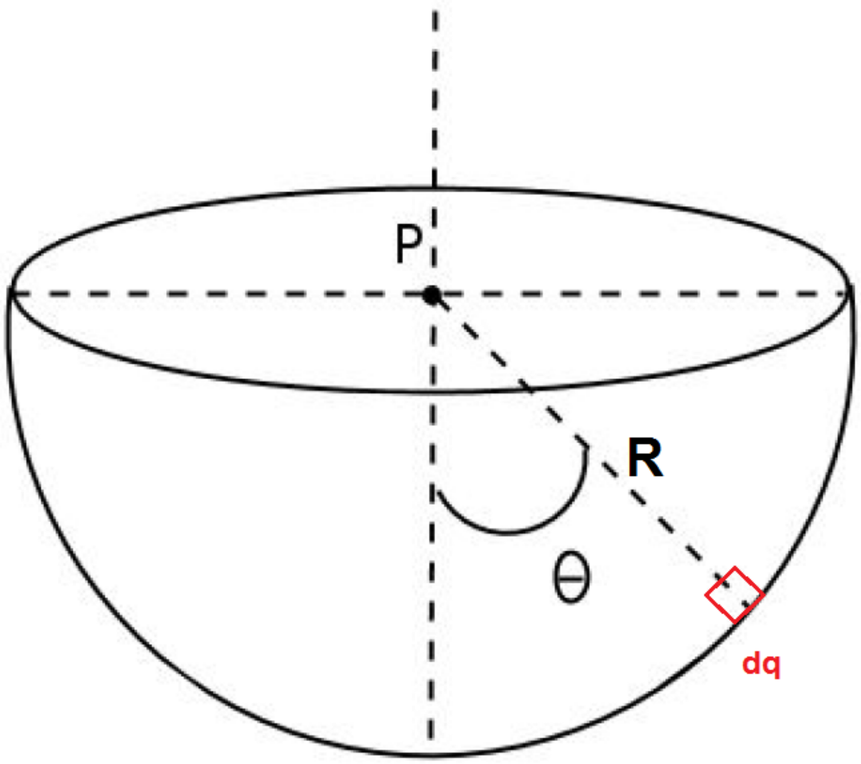
Vale lembrar que basta calcular o campo na direção z gerado por um dos lados da espira e multiplicar o resultado por 4.

$$\vec{E} = \frac{4\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2a} \frac{cos\theta dl}{r^2}\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\int_0^{2a} \frac{zdl}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{2a\lambda z}{\pi\epsilon_0(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$

2 Determine o vetor campo elétrico no ponto P, localizado no centro de uma calota esférica de raio R carregada com densidade superficial de carga $\sigma = \sigma_0 sen\theta$



Comecemos substituindo dq pelo produto da densidade superficial da calota com a unidade de área infinitesimal em coordenadas esféricas:

$$\sigma = \sigma_0 sen\theta$$

$$dq = \sigma R^2 sen\theta d\theta d\Phi$$

$$\Rightarrow dq = \sigma_0 R^2 sen^2\theta d\theta d\Phi$$

Agora, apliquemos diretamente a fórmula do campo elétrico para distribuições contínuas, sendo que, para a calota esférica, no ponto P, $r = R$ e os componentes perpendiculares ao eixo z se cancelam por simetria, sendo então $\vec{E} = E_z\hat{z}$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{cos\theta dq}{R^2}\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\Phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma_0 R^2 sen^2\theta cos\theta d\theta d\Phi}{R^2}\hat{z}$$

Como nenhum termo da integral depende de Φ, pode-se separar a integral de $d\Phi$, que resulta em 2π. Tambm se cancela os dois termos de R^2 na fração da integral. Por fim, calcula-se a integral na variável θ.

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2\theta cos\theta d\theta \hat{z}$$

Façamos a substituição de variáveis $u = sen\theta, du = cos\theta d\theta$, $u = 0$ quando $\theta = 0$ e $u = 1$ quando $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_0^1 u^2 du\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_0}{6\epsilon_0}\hat{z}$$

3 Uma esfera maciça, não-condutora e de raio R, tem uma distribuição de carga não-uniforme de densidade de carga volumétrica de carga dada por $\rho = \rho_0 \frac{r}{R}$, onde ρ_0 é uma constante e r é a distância ao centro da esfera. Calcule:

3.1 A carga total da esfera

Para esse item, basta integrar a carga por toda a esfera, onde $dq = \rho dv$ e dv está em coordenadas esféricas

$$Q_{tot} = \int dq = \int \rho dv$$

$$\Rightarrow Q_{tot} = \iiint \rho_0 \frac{r}{R} r^2 sen\theta dr d\theta d\Phi$$

$$\Rightarrow Q_{tot} = \int_{\Phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R} \frac{\rho_0}{R} r^3 sen\theta dr d\theta d\Phi$$

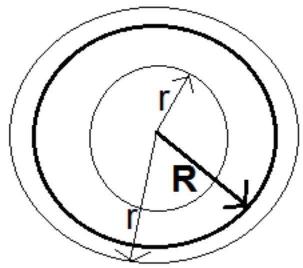
$$\Rightarrow Q_{tot} = \frac{2\pi\rho_0}{R}\int_0^{\pi} sen\theta d\theta \int_0^R r^3 dr$$

$$\Rightarrow Q_{tot} = \frac{2\pi\rho_0}{R}\ [-cos\theta]_0^{\pi}\ [\frac{r^4}{4}]_0^R$$

$$\Rightarrow Q_{tot} = \frac{2\pi\rho_0}{R}.2.\frac{R^4}{4}$$

$$\Rightarrow Q_{tot} = R^3\pi\rho_0$$

3.2 O campo elétrico em todos os pontos do espaço



Obtenhamos o campo elétrico em função da distância ao centro da esfera, que adotaremos como rigem. Para isso, devido à alta simetria do problema, utilizaremos superfícies gaussianas esféricas de raio r centradas na origem em três casos: $r > R$, $r = R$ e $r < R$.

Em cada um desses casos, a carga contida na gaussiana será diferente. Para determinar essa carga, podemos nos aproveitar da relação encontrada no item a.

Para $r < R$:

$$Q_{int} = \frac{4\pi\rho_0}{R}\int_0^r r'^3 dr' = \frac{r^4\pi\rho_0}{R}$$

Para $r \geq R$:

$$Q_{int} = R^3\pi\rho_0$$

Agora, basta aplicar a Lei de Gauss ($\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$) para encontrar o campo elétrico em cada região, sendo que o campo, por ter sempre direção radial e depender somente da distância da origem, sempre será paralela ao vetor normal à área. Assim, E pode ser retirado da integral, sobrando apenas $\oint d\vec{A} = 4\pi R^2$. Sabendo que $vecE = E\hat{r}$, aplicamos a Lei de Gauss em cada caso para encontrar E:

Para $r < R$:

$$\oint E \cdot dA = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{r^4\pi\rho_0}{R}$$

$$\Rightarrow E = \frac{r^2\rho_0}{4\epsilon_0 R}$$

Para $r = R$:

$$E4\pi R^2 = \frac{R^3\pi\rho_0}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{R\rho_0}{4\epsilon_0}$$

Para $r > R$

$$E4\pi r^2 = \frac{R^3\pi\rho_0}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{R^3\rho_0}{4\epsilon_0 r^2}$$

4 Uma certa distribuição de cargas gera o seguinte campo elétrico $\vec{E}(r)$:

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 r^2}(2a^3 - 2a^2 r - ar^2)e^{-\frac{r}{a}}\hat{r}$$

onde ρ_0 é uma constante a determinar e r é a distância de um ponto do espaço até a origem do sistema. A respeito dessa distribuiçao de carga, calcule:

4.1 A carga total de toda a distribuição de cargas elétricas Sugestão: Tome uma esfera de raio R centrada na origem, em seguida faça R tender ao infinito para calcular a carga total do sistema.

Tomemos a gaussiana esférica com $r \to \infty$, que terá integral de superfície igual a $E4\pi r^2$, já que o campo tem direção radial sempre. Logo, aplicando a Lei de Gauss, achamos:

$$Q_{tot} = \epsilon_0 \lim_{r\to\infty} E(r)4\pi r^2 = \epsilon_0 \lim_{r\to\infty} \frac{4\pi r^2\rho_0}{\epsilon_0 r^2}(2a^3 - 2a^2 r - ar^2)e^{-\frac{r}{a}}$$

$$\Rightarrow Q_{tot} = 8\pi\rho_0 a^3 \lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{e^{\frac{r}{a}}} = 0$$

$$\therefore Q_{tot} = 0$$

4.2 A densidade volumétrica de carga em um ponto P que dista $r > 0$ da origem.

Para encontrar a densidade de carga, utilizamos a equação de Poisson:

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot E = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial E}{\partial r})$$

Daonde vem:

$$\rho = \rho_0[1 - \frac{4a^2}{r^2}]e^{-\frac{r}{a}}$$

4.3 Os resultados dos itens 1 e 2 são coerentes? Explique.

A primeira coerência que podemos observar é que, quando $r \to \infty$, $\rho \to 0$. Além disso, ao integrar-se ρ em função de r, encontramos também o valor nulo, ou seja, a quantidade de carga positiva equivale a quantidade de carga negativa no sistema.

5 Considere um fio retilíneo infinito de densidade linear de cargas elétricas λ.

5.1 Mostre que o potencial el etrico gerado pelo fio pode ser escrito como

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(\frac{r}{a})$$

em que r é a distância do ponto considerado ao fio e V(a) = 0 foi adotado como referência do potencial elétrico.

Sabemos que o campo elétrico a uma distância r de um fio é $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$ (basta aplicar uma gaussiana cilíndrica em torno de um trecho L do fio). Assim, basta aplicar a fórmula do potencial a partir do campo:

$$V(r) - V(a) = -\int_a^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_a^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} \cdot \hat{r} dr$$

$$\therefore V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(\frac{r}{a})$$

5.2 É possível nesse caso adotar o mesmo sistema de referência de potencial elétrico da carga pontual, isto é, V(∞) = 0? Por quê?

Não é possível, pois no caso deste exercício, a fonte de campo se estende até o infinito, e portanto, caso se tome uma referência no infinito, o potencial estoura, tendo valor infinito em todos os pontos do espaço.

6 Um campo elétrico depende apenas das coordenadas x e y, segundo a lei

$$\vec{E} = a\frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2 + y^2}$$

onda a ê uma constante, $\hat{i}$ e $\hat{j}$ são versores das direções x e y.

6.1 Mostre que a carga elétrica contida no interior de uma esfera de raio R centrada na origem é dada por $4\pi\epsilon_0 Ra$.

Substituindo por coordenadas esféricas, temos as seguintes equações:

$$x^2 + y^2 = r^2 sen^2\theta$$

$$x = rsen\theta cos\Phi$$

$$y = rsen\theta sen\Phi$$

$$x\hat{i} + y\hat{j} = (rsen\theta)(\hat{r}sen\theta) \ = rsen^2\theta\hat{r}$$

Desse modo, o campo elétrico em um ponto será dado por:

$$\vec{E} = \frac{a}{rsen\theta}\hat{r}$$

Aplicamos a Lei de Gauss para uma gaussiana esférica que coincide com a superfície da esfera. Vale notar que $d\vec{A} = R^2 sen\theta d\theta d\Phi\hat{r}$.

$$Q = \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow Q = a\epsilon_0 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\Phi=0}^{2\pi} Rsen\theta d\theta d\Phi$$

$$\therefore Q = 4\pi\epsilon_0 Ra$$

6.2 O potencial elétrico associado a este campo.

Adotemos como referencial um raio R_0, de maneira que V(R_0) = 0. Desse modo, temos:

$$V(r) - V(R_0) = -\int_{R_0}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Onde $\vec{E} = \frac{a}{rsen\theta}\hat{r}$ e $d\vec{l} = dr\hat{r}$

$$\Rightarrow V(r) = -\int_{R_0}^{r} \frac{a}{rsen\theta} dr = \frac{a}{sen\theta} \ln(\frac{R_0}{r})$$

Ou seja, o potencial está dependendo também da variação em θ, o que faz sentido, já que o rotacional do campo não é nulo ($\nabla \times \vec{E} \neq 0$).

7 Calcule o vetor campo elétrico associado ao seguinte potencial elétrico

$$V(r, \theta, \Phi) = \frac{pcos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Para tanto, aplicaremos diretamente a fórmula do campo elétrico a partir do potencial:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Temos que o gradiente de um campo em coordenadas esféricas é:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial V}{\partial \Phi}\hat{\Phi}$$

Onde:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{pcos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{psen\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0$$

$$\therefore \vec{E} = p\frac{2cos\theta\hat{r} + sen\theta\hat{\theta}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$