$\oint E\,dS = \dfrac{\int \rho\,dV}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\,4\pi r^2 = \dfrac{\frac{\rho_0 \pi R^3}{3}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\rho_0 R^3}{12\,\varepsilon_0 r^2}$

MB-

PROVA MENSAL DE FIS-32 – Turma 3 – março 2010

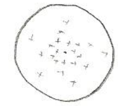
NOME: André Peregrino de Moura Cavalcanti

1. Uma distribuição de cargas esfericamente simétrica não uniforme possui uma densidade $\rho(r)$ dada por:

   $\rho(r) = \rho_0(1 - r/R)$ para $r \leq R$,

   $\rho(r) = 0$ para $r \geq R$,

   onde $\rho_0 = 3Q/\pi R^3$ é uma constante positiva.



a) Calcule a carga total contida na distribuição. em função de ρ_0, R

b) Calcule o campo elétrico na região $r > R$.

c) Calcule o campo elétrico para $r < R$.

d) Encontre o ponto r para o qual o campo elétrico atinge seu valor máximo e calcule o valor desse campo elétrico máximo.

a) $\rho(r) = \dfrac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho(r)\,dV \Rightarrow \int dq = \int \rho(r)\,dV \Rightarrow Q_T = \int_0^R \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)\underbrace{4\pi r^2 dr}_{dV}$

$Q_T = \rho_0 4\pi \int_0^R \left(r^2 - \dfrac{r^3}{R}\right) dr = 4\rho_0\pi\left(\dfrac{r^3}{3} - \dfrac{r^4}{4R}\right)\Big|_0^R = 4\rho_0\pi\left(\dfrac{R^3}{3} - \dfrac{R^4}{4R}\right) = 4\rho_0\pi\dfrac{R^3}{12}$

$Q_T = \dfrac{\rho_0 \pi R^3}{3}$ C

b) Quando $r > R$, podemos considerar (para realizar os cálculos!) que toda a carga se encontra no centro da esfera e, assim, calcularmos o campo gerado por uma carga pontual Q_T.

$E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q_T}{r^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\left(\frac{\rho_0 \pi R^3}{3}\right)}{r^2} \Rightarrow E = \dfrac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$ N/C (direção radial)

c) Utilizando-se uma superfície gaussiana esférica ($\vec{E} \parallel d\vec{S}$ e $|\vec{E}|$ constante)

$\oint_{S_g} \vec{E}\,d\vec{S} = \dfrac{\int \rho(r)\,dV}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{\int_0^r \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)4\pi r^2 dr}{\varepsilon_0} \Rightarrow E r^2 = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_0^r \left(r^2 - \dfrac{r^3}{R}\right) dr = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r^3}{3} - \dfrac{r^4}{4R}\right)$

$\Rightarrow E = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r}{3} - \dfrac{r^2}{4R}\right)$ N/C

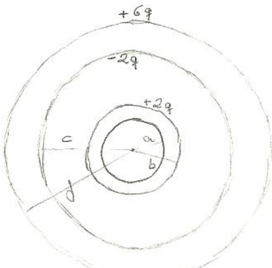
d) $\dfrac{dE}{dr} = \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0} - \dfrac{2\rho_0 r}{4\varepsilon_0 R} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3} - \dfrac{r}{2R} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{r}{2R} \Rightarrow r = \dfrac{2}{3}R$

$E_{MÁX} = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\dfrac{\left(\frac{2}{3}R\right)}{3} - \dfrac{\left(\frac{2}{3}R\right)^2}{4R}\right] = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\dfrac{2}{9}R - \dfrac{R}{9}\right] \Rightarrow E_{MÁX} = \dfrac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$ N/C

2. Uma pequena esfera oca condutora com raio interno ***a*** e raio externo ***b*** é concêntrica com uma grande esfera oca condutora com raio interno ***c*** e raio externo ***d.*** A carga total sobre a esfera oca interna é igual a ***+2q*** e a carga total sobre a esfera oca externa é igual a ***+4q.***

a) Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico em função da distância r ao centro comum para as regiões: i) ***r <a;*** ii) ***a<r<b***; iii)***b<r<c***; iv) ***c<r<d***; v)***r>d.***

b) Qual é a carga total sobre: i) a superfície interna da esfera oca pequena; ii) a superfície externa da esfera oca pequena; iii) a superfície interna da esfera oca grande; iv) a superfície externa da esfera oca grande.



a) $E_i = E_{ii} = 0$ (interior de condutor)

$E_{iii} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2q}{r^2} \Rightarrow E_{iii} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r^2}$ N/C (direção: radial
sentido: para fora

(Superposição)

$E_{iv} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-2q)}{r^2} = 0 = E_{iv}$

v) Cálculo utilizando superposição: $E_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-2q)}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(6q)}{r^2}$

$E_v = \frac{3q}{2\pi\epsilon_0 r^2}$ N/C (direção: radial
sentido: para fora

b) i) 0

ii) + 2q

iii) − 2q

iv) + 6q

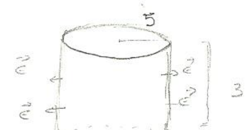
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{(coord. cilíndricas)}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left[\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \dots\right.$$

3. a) Considere um cilindro de altura h=3m e raio ρ=5m. O campo elétrico no interior desta região cilíndrica é dado por: $\vec{E} = (2\rho^2 + \rho)\hat{e}_\rho$. Calcule: a densidade volumétrica de carga, o fluxo do campo elétrico através desta região e a carga contida no cilindro.
b) Considere uma esfera de raio r=5m, com um campo elétrico em seu interior dado por $\vec{E} = \frac{1}{5}r^2\hat{e}_r$. Calcule: a densidade volumétrica de carga, a carga contida na esfera e o fluxo do campo elétrico.

a) Densidade volumétrica de carga: α

* $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho(2\rho^2+\rho)] = \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial(2\rho^3+\rho^2)}{\partial\rho} = \frac{\alpha}{\varepsilon_0}$



$\Rightarrow \frac{1}{\rho}(6\rho^2+2\rho) = \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \Rightarrow \alpha(\rho) = \varepsilon_0(6\rho+2)\ \frac{C}{m^3}$ C

* Não há fluxo nas partes superior e inferior

* $\alpha = \frac{dq}{dV} \Rightarrow \begin{cases} dq = \alpha(\rho)\,dV \Rightarrow dq = \varepsilon_0(6\rho+2)\rho\,d\rho\,d\theta\,dz \\ dV = \rho\,d\theta\,dz\,d\rho \end{cases}$

$\int dq = \varepsilon_0 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^5 (6\rho+2)\rho\,d\rho \Rightarrow Q = \varepsilon_0 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} d\theta\,(2\rho^3+\rho^2)\Big|_0^5 = \varepsilon_0 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} 275\,d\theta$

$Q = \varepsilon_0 \int_0^3 dz\ 275\theta\Big|_0^{2\pi} = \varepsilon_0 \int_0^3 550\pi\,dz = 550\pi\varepsilon_0\,z\Big|_0^3 \Rightarrow Q = 1650\pi\varepsilon_0\ (C)$ C

* $\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Phi = \frac{1650\pi\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Phi = 1650\pi\ \frac{N\,m^2}{C}$

b) Densidade volumétrica de carga: ρ

* $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\cdot\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cdot\frac{1}{5}r^2) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\,\frac{4}{5}r^3 \Rightarrow \rho(r) = \frac{4}{5}\frac{\varepsilon_0 r}{\operatorname{sen}\theta}\ \frac{C}{m^3}$

* $\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow \begin{cases} dq = \rho\,dV \\ dV = r^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr \end{cases} \Rightarrow \int dq = \int \frac{4}{5}\frac{\varepsilon_0 r}{\operatorname{sen}\theta}\cdot r^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr \Rightarrow Q = \frac{4\varepsilon_0}{5}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^5 r^3\,dr$

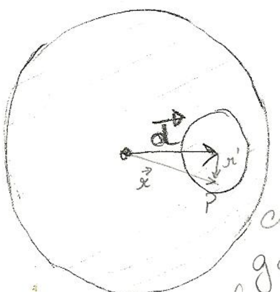
$Q = \frac{4}{5}\varepsilon_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi\,\frac{5^4}{4} = \frac{4}{5}\varepsilon_0\cdot\frac{5^4}{4}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi = 5^3\varepsilon_0 \int_0^{2\pi} d\theta\cdot\pi = 5^3\pi\varepsilon_0 \int_0^{2\pi} d\theta = 5^3\pi\varepsilon_0\cdot 2\pi$

$Q = 250\pi^2\varepsilon_0\ (C)$

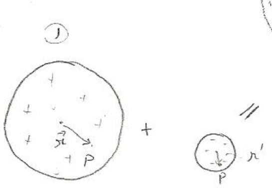
$\frac{4^4}{4}\cdot\frac{5^4}{4}$

* $\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{250\pi^2\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Phi = 250\pi^2$

4. Uma esfera uniformemente carregada com densidade volumétrica ρ contém em seu interior uma cavidade esférica. Calcule o campo elétrico no interior da cavidade, expressando o resultado em função do vetor $\vec{d}$ (vetor que liga o centro das duas esferas).



· Seja P um ponto no interior da cavidade
- Utilizando o princípio de superposição, o campo elétrico em P pode ser calculado considerando-se uma esfera[1] uniformemente carregada (com dens. volumétrica ρ) e uma esfera[2] uniformemente carregada com densidade volumétrica (−ρ).



* Esfera 1 (densidade volumétrica ρ) – Superfície gaussiana esférica

$\oint_{S_g} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_1 \parallel d\vec{S}$ e $|\vec{E}|$ constante na superfície gaussiana $\Rightarrow E_1 \oint_{S_g} dS = \frac{\int dq}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 4\pi r^2 = \frac{\int_0^r \rho 4\pi r^2 dr}{\varepsilon_0}$

$\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho 4\pi r^2 dr$

$E_1 = \frac{\rho \cdot \frac{r^3}{3}}{\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$ na direção de $\vec{r} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}, \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

* Esfera 2 (densidade volumétrica −ρ)

Analogamente, $E_2 = -\frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}$ na direção de $\vec{r}' \Rightarrow \vec{E}_2 = -\frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}\hat{r}', \quad \hat{r}' = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}$

* Campo resultante $\vec{E}$: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} - \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}\hat{r}' = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\underbrace{r\hat{r}}_{\vec{r}} - \underbrace{r'\hat{r}'}_{\vec{r}'})$

A diferença vetorial $\vec{r} - \vec{r}'$ é igual ao vetor $\vec{d}$

Portanto, $E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{d}$ N/C

$\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E}$

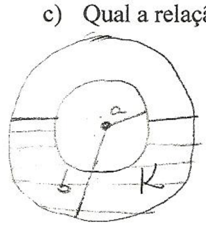
$C_{esfera} = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{ab}{b-a}$

D-

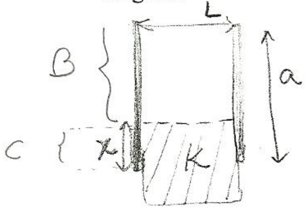
PROVA DE FIS 32 – 12.04.2010

NOME: André Peregrino de Moura Cavalcante

1. Um capacitor esférico isolado possui carga **+Q** sobre o condutor interno e carga **–Q** sobre o condutor externo. A seguir, metade do volume entre os dois condutores é preenchido por um dielétrico com uma constante **K**, conforme indicado na figura.
   a) Determine a capacitância do capacitor.
   b) Determine a densidade superficial de carga livre sobre o condutor interno e sobre o condutor externo.
   c) Qual a relação entre as cargas livres e as cargas de polarização.



2. Considere um capacitor retangular de lados **a** e **b** e distância entre as placas **L,** preenchido com um dielétrico de constante dielétrica **K**, submetido a uma ddp $\mathbf{V_0}$**.** Quando completamente carregado, o capacitor é desconectado do circuito o qual pertence, e é mantido isolado, enquanto o dielétrico é puxado para fora do capacitor. Uma parte do dielétrico de comprimento **x** fica dentro do capacitor. Calcule a força exercida pelo capacitor para recolocar o dielétrico na posição original.



* Inicialmente, $C_1 = \frac{K\varepsilon_0 ab}{L}$

$$C_1 = \frac{Q_1}{V} \Rightarrow Q_1 = \frac{K\varepsilon_0 ab}{L} \cdot V_0$$

* Situação final: $C_2 = \frac{\varepsilon_0 (a-x) b}{L} + \frac{K\varepsilon_0 xb}{L}$ (capacitores em paralelo)

C

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 b}{L}(a - x + Kx)$$

Como o capacitor é mantido isolado: $Q_2 = Q_1 \Rightarrow C_2 V_2 = \frac{K\varepsilon_0 ab}{L} V_0 \Rightarrow$

C

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon_0 b}{L}(a - x + Kx) V_2 = \frac{K\varepsilon_0 ab}{L} V_0 \Rightarrow V_2 = \frac{K a V_0}{a - x + Kx} \; (V)$$

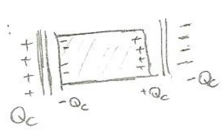
* A carga na parte B (superior do capacitor) é:

C

$$Q_B = \underbrace{\frac{\varepsilon_0 (a-x) b}{L}}_{\text{capacitância}} \cdot V_2 = \frac{\varepsilon_0 (a-x) b}{L} \cdot \frac{K a V_0}{(a - x + Kx)} \Rightarrow Q_B = \frac{Kab(a-x)\varepsilon_0 V_0}{L(a - x + Kx)} \; (C)$$

Analogamente: $Q_C = \frac{K\varepsilon_0 xb}{L} V_2 = \frac{K \varepsilon_0 xb}{L} \cdot \frac{K a V_0}{(a-x+Kx)} \Rightarrow Q_C = \frac{K^2 ab\, x\, \varepsilon_0 V_0}{L(a - x + Kx)} \; (C)$

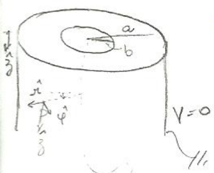
* No dielétrico, haverá uma carga induzida devido à Q_C:



F = ?

3. Considere um cilindro oco de raio **a** e um fio cilíndrico co-axial de raio **b**. Usando a eq. de Laplace: a) Determine o potencial elétrico entre o fio e o cilindro, supondo o cilindro aterrado e fio cilíndrico mantido a um potencial **V₀**. Considere a > b.
b) Calcule o vetor campo elétrico nesta região.

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad \vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z}$$



a)

Eq. de Laplace: $\nabla^2 V = 0$

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial V}{\partial \varphi}}_{0}\hat{\varphi} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial z}}_{0}\hat{z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow r\frac{\partial V}{\partial r} = K_1 \Rightarrow \int \partial V = K_1 \int_b^r \frac{\partial r}{r} + K_2$$

$$V(r) = K_1 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + K_2$$

Para $r = b \Rightarrow V(b) = V_0 \Rightarrow K_1 \underbrace{\ln 1}_{0} + K_2 = V_0 \Rightarrow \underline{K_2 = V_0}$

Para $r = a \Rightarrow V(a) = 0 \Rightarrow K_1 \ln\left(\frac{a}{b}\right) + V_0 = 0 \Rightarrow K_1 = -\frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$

Logo, $V(r) = -\frac{V_0 \ln\left(\frac{r}{b}\right)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \cancel{+V_0}\ (V)$

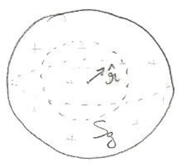
b) $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = -\left(\frac{-V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\right)\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\left(\frac{r}{b}\right)}\hat{r} = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\cdot\frac{1}{r}\hat{r}\left(\frac{V}{m}\right) = \vec{E}$

Obs: Pela simetria do problema, pode-se observar que o potencial elétrico não varia nas coordenadas $\hat{\varphi}$ e $\hat{z}$ quando as demais são mantidas constantes. Por isso, $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 = \frac{\partial V}{\partial z}$

4. Considere um esfera de raio **R** com uma distribuição de cargas dada por **ρ(r)=Ar** (A=constante positiva). Calcule o potencial elétrico num ponto situado a uma distância **r** do centro da esfera, para **r < R** e para **r=R**.

$\rho(r) = Ar$

1) Lei de Gauss: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \dfrac{q_{int}}{\varepsilon_0}$



Mas: $dq = \rho(r)dV \Rightarrow dq = Ar \cdot 4\pi r^2 dr \Rightarrow q_{int} = \int_0^r A 4\pi r^3 \, dr$

$q_{int} = 4A\pi \dfrac{r^4}{4} \Rightarrow q_{int} = A\pi r^4$

Substituindo na lei de Gauss: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \dfrac{A\pi r^4}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{A\pi r^4}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{Ar^2}{4\varepsilon_0}\hat{r}$

2) $\Delta V = -\int_0^r \vec{E}\cdot d\vec{r} \Rightarrow V(r) - \overset{0}{V(0)} = -\int_0^r \dfrac{Ar^3}{4\varepsilon_0} dr \Rightarrow V(r) = -\dfrac{A}{4\varepsilon_0} \cdot \dfrac{r^3}{3}\Big|_0^r$

$\Rightarrow V(r) = \dfrac{-Ar^3}{12\varepsilon_0}(V)$, $r < R$

Para $r = R$: $V(R) = -\dfrac{AR^3}{12\varepsilon_0}(V)$

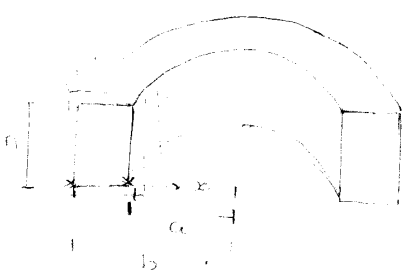
PROVA DE FIS-32 – Turma 1 – 20.06.2008

NOME: Fernanda Lopes Vieira Ferreira

1. a) Considere uma bobina retangular de $\mathbf{N_2}$ voltas enroladas ao redor de parte de um toróide de seção **retangular** de $\mathbf{N_1}$ voltas. O raio interno do toróide é **a**, seu raio externo é **b** e sua altura é **h**. Calcule o fluxo que atravessa o toróide e a indutância mútua para esta combinação.

b) Mostre que $\mathbf{M_{12}=M_{21}}$, para o toróide descrito no item a.

c) Considere um toróide com seção **circular**, tal que o fluxo é dado por $\phi = N\mu_0 i\left[R - \sqrt{R^2 - a^2}\right]$, onde **R** é o raio maior e **a** é o raio menor. Calcule a indutância mútua para este caso.



$\varphi_T = \int B \cdot dA$

→ é um toróide e não um solenoide!

Assim, $B = \dfrac{\mu_0 i N}{2\pi r}$

$\varphi_T = \int_a^b \mu_0 i \ldots h\,dx = \ldots \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

$N_2 \varphi_T \ldots M_{12} = \ldots \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

b) $\mathcal{E}_{ind} = -N_2 \dfrac{d\varphi}{dt}$ (1)

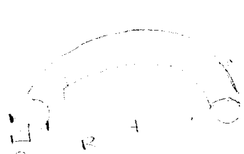
$M_{12} \dfrac{di}{dt}$ (2)

$(M_{21}\, i)$

Igualando (1) e (2) ...

$\ldots \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

c)



$\phi = N\mu_0 i\,[\ldots]$

Cálculo da indutância ...

$L i = N_2 \varphi$

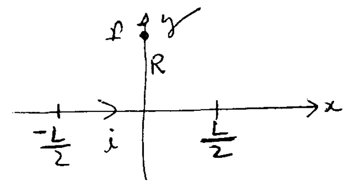
Assim a indutância mútua é dada por → M

esta é auto-ind.

$L = \mu_0 \ldots [\ldots a^2]$

Dado: $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$



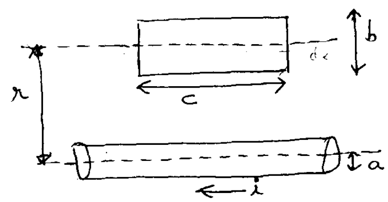
2. a) Um segmento de reta de comprimento $\boldsymbol{L}$ transporta uma corrente $\boldsymbol{i}$. Use a Lei de Bio-Savart para calcular o vetor campo magnético à uma distância **R** do segmento.
b) Encontre o potencial vetor para o fio descrito no item a, e a partir do resultado obtido encontre o campo magnético. Mostre que o resultado é idêntico ao obtido no item a.

lei de Bio-Savart é dada por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$$

Temos $d\vec{s} = dy\,\hat{y}$

$\vec{r} = R\hat{x} - y\hat{y}$



3. A densidade de corrente dentro de um fio cilíndrico, comprido e sólido de raio $\boldsymbol{a}$, está na direção do eixo e varia ~~linearmente~~ com a distância radial $\boldsymbol{r}$ do eixo, de acordo com $J = j_0 r^2/a$.

a) Ache o campo magnético dentro e fora do fio.

b) Suponha este fio paralelo a uma espira retangular de lados $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$. Calcule o fluxo magnético através da espira.

c) Suponha que a espira se afaste do fio com velocidade $\boldsymbol{v}$. Calcule a fem induzida na espira.

a) [illegible]

$\boxed{i = \pi j_0 r^3 \ldots}$ [illegible]

Corrente fora do fio [illegible]

$B \cdot (2\pi r) = \pi j_0 \ldots$ [illegible]

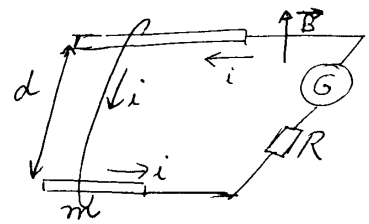
$\varphi = \mu_0 j_0 a^2 c \ldots$ [illegible]

$v = \frac{dx}{dt}$

d) Quando a espira [illegible]

Assim [illegible]

$\mathcal{E} = \mu_0 j_0 a^2 c \ldots$ [illegible]



4. Um fio metálico de massa ***m*** pode deslizar sem atrito sobre dois trilhos horizontais paralelos separados por uma distância ***d***, conforme mostra a figura. Na região entre os trilhos existe uma campo de indução ***B***. Uma corrente constante ***i*** mantida por um gerador G, percorre o circuito formado pelo fio de massa ***m*** e pelos dois trechos dos trilhos que o ligam ao gerador.

a) Calcule a velocidade do fio em função do tempo, supondo-o em repouso em t=0. **Por que o fio se movimenta?** $V(0)=0$

b) Suponha o gerador substituído por um bateria que fornece um força eletromotriz constante ε. Calcule a velocidade do fio em função do tempo e a velocidade do fio para t tendendo a infinito. ***Explique*** a diferença nos resultados entre os itens a e b, se é que há diferença.

a) [illegible] um espaço onde existe [illegible] [illegible]

$F_{mag} = i\vec{L} \times \vec{B}$, onde L [illegible] do fio.

[illegible] os trilhos [illegible] a magnética [illegible] assim a [illegible] idB [illegible] integrando [illegible] $= \int_0^t i\, dB\, dt$

$m(v - v_0) = i\,dB\,t \rightarrow v = \frac{i\,dB}{m}t$ [illegible]

b) [illegible] ε.

[illegible] tanh.

Assim $F_{res} = q\,v \times B$ (no fio)

mas ~~q~~ $i = \frac{dq}{dt} \rightarrow \frac{\varepsilon}{R} = \frac{dq}{dt} \rightarrow dq = \frac{\varepsilon}{R}dt \rightarrow q = \frac{\varepsilon t}{R}$

$q\,v \times B = ma \rightarrow -q\,v\,B \operatorname{sen} 90° = m\frac{dv}{dt}$

$\rightarrow$ assim $-\frac{\varepsilon t}{R} v\,B \operatorname{sen} 90° = m\frac{dv}{dt}$

Resolvendo a EDO:

~~[illegible]~~

$v' + \frac{\varepsilon t\,B}{R\,m} v = 0$

$\mu(t) = \exp\int + \frac{\varepsilon t B}{Rm}dt = e^{+\frac{\varepsilon t^2 B}{2Rm}}$

$\left(v\,e^{+\frac{\varepsilon t^2 B}{2Rm}}\right)' = 0 \rightarrow v = (1 - e^{-\frac{\varepsilon t^2}{2Rm}}$

Para $t \to \infty$

$\boxed{V = 0}$

Existe a diferença no resultado pois na letra (a) tinhamos um gerador que mantinha a corrente i, na letra b conforme o fio anda a corrente vai diminuindo.

5. Considere um cilindro infinitamente longo, de raio **R**, com uma magnetização paralela ao eixo $\vec{M} = kr\hat{z}$, onde **k** é uma constante e **r** é a distância do eixo do cilindro a um ponto qualquer. Não há corrente de condução circulando no cilindro.

a) Ache as densidades de corrente de magnetização volumétrica e superficial na forma vetorial;

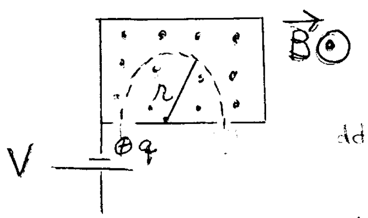
b) Ache o campo magnético $\vec{B}$ e o vetor $\vec{H}$ dentro e fora do cilindro.

PROVA DE FIS-32 – Turma 1 – 16.05.2008

NOME: Fernanda [illegible]

1. Num espectrômetro de massa usando para fins comerciais, íons de urânio de massa igual a $3{,}92 \times 10^{-25}$ ***kg*** e carga de $3{,}2 \times 10^{-19}C$ são separados pelas espécies relacionadas. Primeiramente, os íons são acelerados através de uma diferença de potencial de ***100 kV*** e, então passam dentro de um campo magnético, onde são deslocados numa trajetória de raio igual a ***1,0 m***. Depois de ter viajado através de ***180°***, eles são coletados numa taça de ***1,0 cm*** de raio.

a) Determine uma expressão para a massa do íon em função de ***B, q, V*** e ***r*** (raio da trajetória).
b) Qual é o módulo do campo magnético (perpendicular) no separador?
c) Se o dispositivo é feito para separar ***100mg*** de material por hora, calcule a corrente dos íons contidos no dispositivo;
d) Calcule a energia térmica dissipada na taça durante uma hora.



$m = 3{,}92 \cdot 10^{-25}$ kg
$q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C } urânio

ddp = 100 kV

a) [illegible] conservação a energia dos íons:

$E_p = E_c \longrightarrow qV = \frac{mv^2}{2} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$

Assim quando no campo magnético os íons possuem esta velocidade trajetória circular $\rightarrow r = \frac{mv}{qB} \longrightarrow r = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qV}{m}} \longrightarrow r^2 = \frac{m^2}{q^2 B^2} \cdot \frac{2qV}{m}$

$\longrightarrow \boxed{m = \frac{r^2 q B^2}{2V}}$

b) Da expressão acima temos: $B = \sqrt{\frac{2Vm}{r^2 q}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 10^3 \; 3{,}92 \cdot 10^{-25}}{1 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-19}}} \Rightarrow \boxed{B = 0{,}49 \; T}$

c) São separados 100 mg de material por hora,

$3{,}92 \cdot 10^{-25}$ kg material — $3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C $\longrightarrow q_{sep} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-23}}{3{,}92 \cdot 10^{-25}} = \frac{3{,}2}{3{,}92} \cdot 10^2$ C

$100 \cdot 10^{-6}$ kg material (separado) — q_{sep} $\longrightarrow i = \frac{q}{t} \rightarrow i = \frac{q_{sep}}{t} = \frac{3{,}2}{3{,}92} \cdot 10^2 \cdot \frac{1}{3600}$

$i = \frac{3{,}2}{3{,}92 \cdot 36}$ A $\longrightarrow \boxed{i = 2{,}27 \cdot 10^{-2} A}$

d) Energia térmica dissipada na taça em 1 h:
Energia Potencial $\rightarrow$ Energia cinética $\rightarrow$ Energia térmica
Assim: $E_{pot} = E_T \longrightarrow P = \frac{E_T}{T} \rightarrow E_T = V \cdot i \cdot T = 100 \cdot 10^3 \cdot \frac{3{,}2}{3{,}92 \cdot 36} \cdot 3600 \quad E_T = \frac{3{,}2}{3{,}92} \cdot 10^7$

$\boxed{E_T = 8{,}16 \cdot 10^6}$

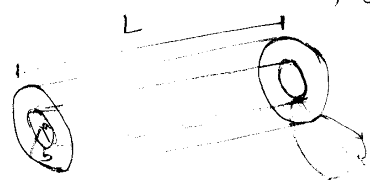
2. a) Um cilindro **oco** possui comprimento **L**, raio interno **a** e externo **b**. A resistividade do material é ρ . Existe uma ddp **V** entre a superfície interna e externa do cilindro, de modo que a corrente escoa radialmente entre as paredes do cilindro. Qual é a resistência para este escoamento radial?

b) Determine uma expressão para a densidade de corrente **J** em função de **r**.

c) Supondo o mesmo cilindro oco, mas a ddp se estabelece entre as bases do cilindro, percorrendo uma corrente paralela ao eixo. Qual é a resistência do resistor?

d) Suponha agora um cilindro condutor de raio **R não oco,** cuja densidade de corrente varia de acordo com a equação: **J = J₀(1-r/R)** , onde **r** é a distância a partir do eixo. Calcule a corrente elétrica em função de $\mathbf{J_0}$ e do raio **R**.

a) como V está entre as superfícies interna e externa do cilindro a corrente escoa radialmente pelas paredes, desta forma:



$$dR = \frac{\rho\, dx}{2\pi x L} \rightarrow R = \int_a^b \rho \frac{dx}{2\pi x L}$$

$$\boxed{R = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

b) $i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$ mas $V = R\,i$ → Queremos uma expressão de J em função de r

$$\rightarrow R = \frac{\rho}{2\pi L} \ln(r/a) \longrightarrow i = \frac{V}{R}$$

J é uniforme → $i = J \int d\vec{A}$

$$\rightarrow i = J \cdot \int_a^r 2\pi L\, dx \rightarrow i = J \cdot 2\pi L (r - a) = \frac{V}{R}$$

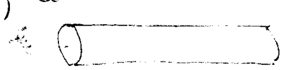
$$\rightarrow J = \frac{V}{R} \frac{1}{2\pi L (r-a)} = \frac{V}{2\pi L (r-a)} \frac{2\pi L}{\rho \ln(r/a)} \rightarrow \boxed{J = \frac{V}{\cancel{(r-a)}\, \rho \ln(r/a)}} \; A/m^2$$

c) Agora a ddp se estabelece entre as bases do cilindro:

desta forma: $R = \frac{\rho L}{A}$, em que $A = \pi b^2 - \pi a^2$

$$\rightarrow \boxed{R = \frac{\rho L}{\pi (b^2 - a^2)} \; \Omega}$$

d) Cilindro condutor não oco de raio R : $J = J_0 (1 - r/R)$



Cálculo da corrente elétrica:

$$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int J \cdot dA = \int_0^R J_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 2\pi r\, dr = 2\pi J_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^2}{R}\right) dr$$

$$\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}\right)\Big|_0^R$$

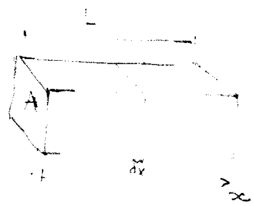
$$i = 2\pi J_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3R}\right) = 2\pi J_0 R^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{1/6}$$

$$i = \frac{J_0 \pi R^2}{3} \; A$$

3. A resistividade de um semi-condutor pode ser alterada adicionando-se diferentes quantidades de impurezas. Uma barra de um semicondutor de comprimento **L** e seção reta com área **A** está ao longo do eixo Ox entre **x=0** e **x=L**. O material obedece a Lei de Ohm e sua resistividade varia ao longo da barra de acordo com a relação **$\rho=\rho_0 exp(-x/L)$**. A extremidade da barra para **x=0** está a um potencial **V_0** mais elevado do que o potencial da extremidade **x=L,** à um potencial zero.

a) Calcule a resistência total da barra e a corrente que flui através dela.

b) Determine o módulo do campo elétrico **E(x)** na barra em função de **x**.



O material obedece a lei de Ohm

resistividade $\rho = \rho_0 e^{-x/L}$

$x=0 \to V_0 \quad x=L \to V=0 \quad \to ddp = V_0$

a) Calculo da resistência $\quad dR = \rho \dfrac{dx}{A} \longrightarrow R = \displaystyle\int_0^L \rho_0 e^{-x/L} \frac{dx}{A}$

$$R = \frac{\rho_0}{A}\int_0^L e^{-x/L}dx = \frac{\rho_0}{A}(-L)e^{-x/L}\Big|_0^L = \frac{\rho_0}{A}L(1-e^{-1})$$

$$R = \frac{\rho_0 L}{A}\left(1-\frac{1}{e}\right)\ \Omega$$

Calculo da corrente $\underbrace{V = Ri}_{\text{Pois o material obedece a lei de Ohm}} \longrightarrow i = \dfrac{V}{R} \longrightarrow i = \dfrac{V_0}{\frac{\rho_0 L}{A}\underbrace{\left(1-\frac{1}{e}\right)}_{\frac{e-1}{e}}} = \dfrac{V_0 A e}{\rho_0 L(e-1)}$

$$\boxed{i = \frac{V_0 A}{\rho_0 L}\left(\frac{e}{e-1}\right)}\ A$$

b) Campo elétrico $E(x)$

Sabemos que $\vec{E} = \rho\vec{J} \qquad i = \int \vec{J}\cdot d\vec{A} = \int J\,dA = J\int dA = JA$

$i = JA \longrightarrow J = i/A \longrightarrow E(x) = \rho\, i/A = \rho_0 e^{-x/L}\dfrac{i}{A}$

$$E(x) = \rho_0 e^{-x/L}\frac{V_0 A}{\rho_0 L}\left(\frac{e}{e-1}\right)\frac{1}{A}$$

$$\left| E(x) = \frac{V_0}{L}e^{-x/L}\left(\frac{e}{e-1}\right)\right|\ N/C$$

4. a) Encontre a expressão para a corrente durante o processo de descarga de um capacitor de capacitância C e deduza uma expressão para a potência instantânea **P = Ri²** no resistor.
b) Calcule a **energia total** dissipada no resistor e mostre que ela é igual a energia total armazenada inicialmente no capacitor.

a) Processo de descarga de um capacitor:

- Lei de Kirchhoff para a malha

$$Ri + \frac{q}{C} = 0 \longrightarrow R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \longrightarrow \mu(t) = e^{+\int \frac{1}{RC}dt}$$

multiplicando por $\mu(t)$ $\rightarrow$ $$\frac{dq}{dt}e^{+t/RC} + e^{+t/RC}\frac{q}{RC} = 0 \rightarrow \left(q\, e^{+t/RC}\right)' = 0 \rightarrow q = C_1 e^{-t/RC}$$

essa constante C_1 pode ser determinada pela carga inicial do capacitor

$$t = 0 \rightarrow q = q_0 \rightarrow C_1 = q_0$$

assim vamos supor que este capacitor tivesse sido inicialmente carregado por uma bateria ideal de fem igual a ε $\rightarrow q_0 = C\varepsilon$

$$\rightarrow q = C\varepsilon e^{-t/RC} \quad \text{mas} \quad i = \frac{dq}{dt} \rightarrow i = -\frac{C\varepsilon}{RC}e^{-t/RC}$$

$$\boxed{i = -\frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}}$$

Potência instantânea no resistor: $P = Ri^2 = R\cdot\frac{\varepsilon^2}{R^2}e^{-2t/RC}$

$$\boxed{P = \frac{\varepsilon^2}{R}e^{-2t/RC}}$$

b) Energia total armazenada inicialmente no capacitor

$$E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{C^2\varepsilon^2}{C} \rightarrow \boxed{E_C = \frac{1}{2}\varepsilon^2 C}$$

energia total dissipada no resistor

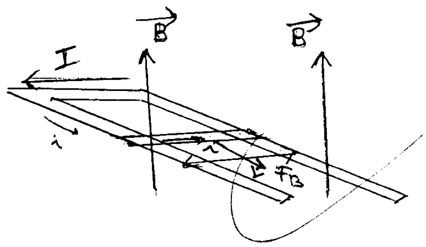
$$P = \frac{E}{T} \rightarrow E = \int_0^\infty P\,dt \Rightarrow E = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R}e^{-2t/RC}\,dt$$

$$E = -\frac{\varepsilon^2}{R}\frac{RC}{2}e^{-2t/RC}\Big|_0^\infty = -\frac{\varepsilon^2 C}{2}(0-1)$$

$$\boxed{E_R = \frac{1}{2}\varepsilon^2 C}$$

Assim $E_R = E_C = \frac{1}{2}\varepsilon^2 C$

5. Uma barra condutora de comprimento **L** e massa **m** desliza sobre trilhos horizontais conectados a uma fonte de voltagem, que mantém uma corrente constante **I** nos trilhos e na barra. Um campo vertical uniforme **B** preenche o espaço entre os trilhos.
a) Determine a força resultante sobre a barra (módulo, direção e sentido).
b) Se a barra possue massa **m**, calcule a distância **d** que ela deve percorrer ao longo dos trilhos, partindo do repouso, até atingir uma velocidade **v**.
c) Existem teorias sobre a possibilidade de que a propulsão baseada neste princípio possa ser usada para acelerar cargas e colocá-las em órbita ao redor da Terra e até mesmo fazer o objeto sair da atração terrestre. Calcule a distância que a barra deve percorrer para atingir a velocidade de escape da Terra (11,2 km/s). Considere **B=0,50T, I=2000 A, m=25kg e L=50cm.**



a) $\vec{F}_B = i\vec{L}\times\vec{B}$

direção de F_B é a direção perpendicular à barra L e tem sentido apontado para a parte aberta dos trilhos.

Assim $|\vec{F}_B| = i\,L\,B\,\operatorname{sen}\theta$ $\theta = 90°$

$|\vec{F}_B| = 2000 \cdot 50\cdot 10^{-2} \cdot 0,5 = 500$ N

$\boxed{|\vec{F}_B| = 500\ \text{N}}$

b) Os trilhos são horizontais assim a única força horizontal que atua é a magnética

$\vec{F}_B = m\vec{a}$ ∴ $\vec{a} = \frac{\vec{F}_B}{m} \longrightarrow a = \frac{500}{25} = 20$ m/s²

$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$, $v_0 = 0$ (Parte do repouso)

$v^2 = 2a\cdot d \longrightarrow d = \frac{v^2}{2a} \longrightarrow \boxed{d = \frac{v^2}{40}}$ m

$d = \frac{v^2 m}{2ILB}$

c) Barra atingir a velocidade de escape da terra 11,2 km/s

$v = 11,2\ \frac{km}{s} = 11,2\cdot 10^3$ m/s

$d = \frac{v^2}{2a} \longrightarrow d = \frac{(11,2\cdot 10^3)^2}{2\cdot 20} = 3,136\cdot 10^6$

$\boxed{d = 3,136\cdot 10^6\ \text{m}}$

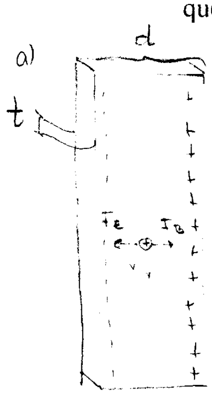
EXAME DE FIS-32 TURMA 1 – JUNHO 2008

Nome: Fernanda Lopes Vieira Ferreira

1,5) 1. a) Encontre uma expressão entre o campo elétrico Hall E_H e o campo elétrico E_C, responsável pela corrente, em função de B, n, q e ρ, onde ρ é a resistividade do material e n é o número de portadores de carga por unidade de volume.

b) Numa experiência projetada para a medição do campo magnético da Terra, mediante o efeito Hall, coloca-se uma barra de cobre, com espessura t, na direção leste-oeste. Se uma corrente I no condutor provoca uma voltagem Hall denominada de V_H, que expressão pode se obter para o campo magnético da Terra? Considere n o número de elétrons/m^3 e que o plano da barra seja perpendicular à direção de B.

a)



No efeito hall temos um campo magnético que faz surgir um campo elétrico nas partículas carregadas.
Quando a $F_B = F_E$ teremos o efeito hall e as partículas carregadas que passarem depois terão velocidade constante

$F_B = q \cdot v\, B$ neste caso o campo elétrico E é dado por.

$F_E = q \cdot E$ $V = E \cdot d$ (V é a diferença de potencial criada)

O campo elétrico hall pode ser calculado a partir da força magnética

$F_B = q \cdot v\, B \rightarrow E_H = v \cdot B$

$E_C = \rho \cdot J = \rho \cdot n q\, V_d$ Assim quando $F_E = F_B$ temos V_d

$\rightarrow E_C = \rho \cdot n q \cdot V_d = \rho \cdot n \cdot q \cdot \frac{E_H}{B} \longrightarrow \boxed{E_H = \frac{B}{\rho \cdot n q} E_C}$

b)

No efeito hall a força magnética se iguala a elétrica
$F_B = F_E$ e a partir disso as partículas carregadas seguem com velocidade constante.

Temos o campo elétrico $F_B = q \cdot E = q\, v\, B$

$\rightarrow v_d B = \frac{V}{d} \rightarrow J = n e\, V_d \longrightarrow \frac{J}{nq} B = \frac{V_H}{d}$ (1) (considerando a mesma figura da letra a)

mas a corrente $I = \int J\, da = J \cdot d \cdot t$, onde t é a espessura da barra

Substituindo em (1), temos:

$\frac{J\, B}{nq} = \frac{V_H}{d} \longrightarrow \frac{I}{\cancel{d}t} \frac{B}{nq} = \frac{V_H}{\cancel{d}} \longrightarrow \boxed{B = \frac{V_H\, n q\, t}{I}}$

1,5 2. Um fio de silício puro com resistividade ρ está conduzindo uma corrente elétrica. O campo elétrico varia senoidalmente com o tempo de acordo com a equação
$E = E_0$ sen(ωt), onde E_0 é a amplitude do campo elétrico dada em **V/m** e **ω=2πf**.

a) Calcule o módulo da densidade de corrente de condução máxima no fio.

b) Supondo $\varepsilon=\varepsilon_0$, determine a densidade da corrente de deslocamento máxima no fio e compare o resultado com a resposta obtida no item (a). Observe que a densidade de corrente de condução não é necessariamente igual a densidade de corrente de deslocamento. Por que isto acontece?

c) Para qual frequência a densidade de corrente de deslocamento máxima torna-se igual à densidade de corrente de condução máxima?

a) Campo elétrico $E = E_0 \, sen(\omega t)$

$E = \rho \cdot J \rightarrow J = \frac{E_0 \, sen(\omega t)}{\rho}$

$J_{máx} = \frac{E_0}{\rho}$

C

b) Supondo $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ temos o campo elétrico constante

assim podemos calcular a densidade da corrente de deslocamento

que é dada por J

mas $E = \rho \cdot J \rightarrow E_0 = \rho \cdot J \rightarrow J = \frac{E_0}{\rho}$

0

c) Temos $\omega = 2\pi f$

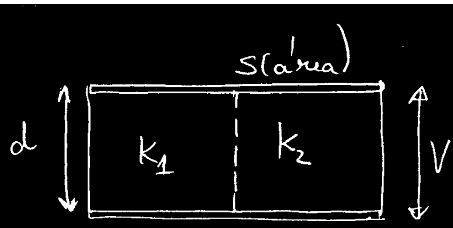
e $E = E_0 \, sen(\omega t)$

assim quando $\omega = \frac{\pi}{2}$ teremos $\vec{J}d = \vec{J}cond$

assim $2\pi f = \frac{\pi}{2} \rightarrow f = \frac{1}{4}$

frequência igual a 0,25 Hz //

0



1.5 3. Um capacitor plano de placas paralelas é preenchido por dois dielétricos de mesmas dimensões mas com constantes dielétricas diferentes. Seja V a ddp entre as placas. Determinar:

a) a capacitância, desprezando os efeitos de borda;

b) a densidade superficial na placa do capacitor.

Expresse o resultado em função de ε_0, V, κ_1, κ_2, S e d.

a) Este capacitor pode ser expresso da seguinte forma:

Assim é o mesmo que se tivéssemos os capacitores C_1 e C_2 em paralelo

$$C_1 = \frac{k_1 \varepsilon_0 S}{2d} \quad ; \quad C_2 = \frac{k_2 \varepsilon_0 S}{2d}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

$$\boxed{C = (k_1 + k_2)\frac{\varepsilon_0 S}{2d}}$$ capacitância

4

b) Temos uma ddp $= V$

$$q = CV \longrightarrow q = (k_1 + k_2)\frac{\varepsilon_0 S}{2d} V$$

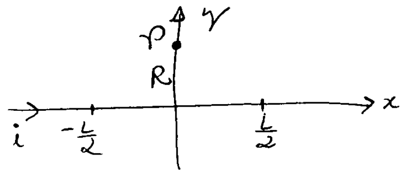
A densidade superficial de carga é dada por:

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{q}{S} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{(k_1 + k_2)\,\varepsilon_0 V}{2d}}$$

4

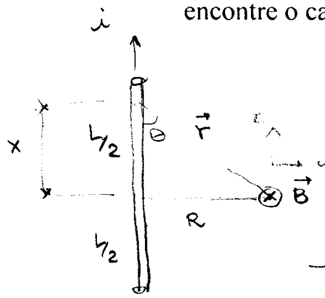
Dado: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$



1.0 4. a) Um segmento de reta de comprimento ***L*** transporta uma corrente ***i***. Use a Lei de Bio-Savart para calcular o vetor campo magnético à uma distância **R** do segmento.

b) Encontre o potencial vetor para o fio descrito no item a, e a partir do resultado obtido encontre o campo magnético. Mostre que o resultado é idêntico ao obtido no item a.



a) Utilizando a lei de Bio-Savart temos:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds\,\text{sen}\,\theta}{r^2}$$

$$\rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{R\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{R\,x}{R^2\sqrt{x^2+R^2}}\Bigg|_{-L/2}^{L/2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{L}{R\sqrt{L^2/4+R^2}} \longrightarrow \boxed{|\vec{B}| = \frac{\mu_0 i L}{2\pi R\sqrt{L^2+4R^2}}\,\hat{z}}$$

b) Potencial vetor → campo magnético

OK, mas não me respondeu $A =$.

Vale ressaltar as quatro equações de Maxwell:

• Lei de gauss para a eletricidade $\oint E\cdot ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$ ou $\text{div}\,E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Fisicamente temos que esta equação seria um indicador local de carga

• Lei de gauss para o magnetismo $\oint B\cdot ds = 0$ ou $\text{div}\,B = 0$

Fisicamente não podem existir pólos magnéticos individuais no espaço

• Eq. que relaciona o campo $\vec{E}$ com o φ_B

$$\oint E\cdot dl = -\frac{d\varphi_B}{dt} \quad \text{ou} \quad \text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Fisicamente temos que a variação do fluxo magnético gera campo elétrico.

• Eq. que relaciona o campo B com a i_{env} e i_d

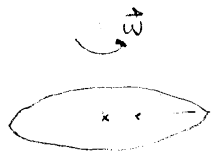
$$\oint B\,dl = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\varphi_E}{dt} + \mu_0 i_{env} \quad \text{ou} \quad \text{rot}\,B = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

Fisicamente temos uma variação do fluxo elétrico juntamente com uma corrente envolvida num laço geram um campo magnético $\vec{B}$.

Assim não temos o potencial vetor porém temos as 4 equações de Maxwell nas formas diferencial e integral.

1.0 5. Considere um disco fino de plástico de raio $\boldsymbol{R}$ que contém uma carga $\boldsymbol{q}$, uniformemente distribuída sobre sua superfície. O disco gira com uma velocidade angular $\boldsymbol{w}$ em torno do seu eixo. Calcule o campo magnético no centro do disco, em função de $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{R}$.

sabemos que o campo magnético pode ser calculado de duas formas:



lei de Bio-Savart: $d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$

lei de Ampere $\int B \cdot dl = \mu_0 i_{env}$

espiras $dB = \frac{\mu_0 di}{2r}$

Neste caso o disco gira e teremos uma força magnética central

$F_B = q \cdot v B = q \, w R \cdot B$

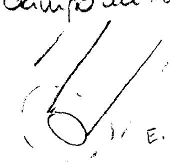
mas $F_B = F_{res} = m w^2 R$ (centripeta), $q w R B = m w^2 R$

Assim $B = \frac{m w}{q}$ mas a massa m e devido a carga espalhada em πr^2 (area) $\rightarrow$ Devemos ter uma densidade superficial de carga

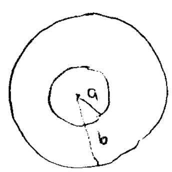
$\rightarrow \sigma = \frac{m}{A} \Rightarrow m = \sigma \pi R^2 \rightarrow B = \frac{\sigma \pi R^2 w}{q}$

1.0 6. Um capacitor cilíndrico tem raios $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{b} > \boldsymbol{a}$). Encontre a energia potencial elétrica armazenada na região entre os raios $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, em função da carga $\boldsymbol{q}$, dos raios $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, do comprimento do cilindro $\boldsymbol{L}$ e da constante ε_0. Para que valor de $\boldsymbol{r}$ se encontra armazenada metade da energia potencial elétrica?

Campo elétrico



sabemos que $V = \int E \cdot dl = \int_a^b \frac{q}{2\pi r L \varepsilon_0} \cdot dr$



$V = \frac{q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln(b/a)$

$\rightarrow q = C \cdot V \rightarrow C = \frac{q \, 2\pi L \varepsilon_0}{q \ln(b/a)} \rightarrow C = \frac{2\pi L \varepsilon_0}{\ln(b/a)}$

$E_p = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\cancel{2\pi L} \varepsilon_0}{\cancel{\ln(b/a)}} \frac{q^2}{(2\pi L \varepsilon_0)^2} \ln^2(b/a)$

$\rightarrow E_p = \frac{q^2 \ln(b/a)}{4\pi L \varepsilon_0}$

Para termos uma energia $E' = \frac{1}{2} E_p \rightarrow V' = \frac{q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln(r/a) \rightarrow$

Teríamos uma Capacitância $C' = \frac{2\pi L \varepsilon_0}{\ln(r/a)}$ Assim

temos: $E' = \frac{q^2 \ln(r/a)}{4\pi L \varepsilon_0} = \frac{1}{2} \frac{q^2 \ln(b/a)}{4\pi L \varepsilon_0}$

$\rightarrow \ln(r/a) = \frac{1}{2} \ln(b/a) \rightarrow \sqrt{b/a} = r/a \rightarrow \boxed{r = \sqrt{ab}}$

Nando

MB+

PROVA MENSAL DE FIS-32 – Turma 3 – 30.03.2007

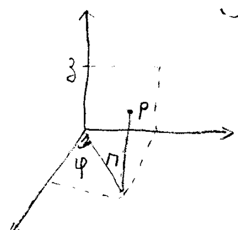
NOME: Maykon Lorencini Bergamaschi

1. Considere o potencial V como uma função de φ, em coordenadas cilíndricas. Considere as condições de contorno:
$V = 0$ em $\varphi = 0$
$V = V_0$ em $\varphi = \alpha$.
a) Faça um esboço mostrando as superfícies equipotenciais;
b) Determine a função potencial e o vetor campo elétrico usando a equação de Laplace.
Em coordenadas cilíndricas (r,φ,z):

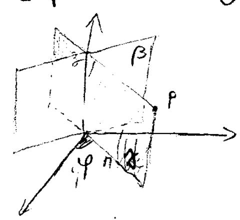
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

a)



O ponto P representado em coordenadas cilíndricas



Esboço das superfícies equipotenciais: os pontos contidos no plano γ estão em um mesmo potencial. Os pontos pertencentes a β também se encontram em um mesmo potencial.

que são planos

b) Determinando o potencial pela equação de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)^{0} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}^{0} = 0$$

$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$. Integrando duas vezes, obtemos $V(\varphi) = A\cdot\varphi + B$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Segundo as condições de contorno do problema, $V(0) = 0$ e $V(\alpha) = V_0$. Daí vem o sistema:

$$\begin{cases} V(0) = A\cdot 0 + B = 0 \\ V(\alpha) = A\cdot\alpha + B = V_0 \end{cases}$$

cuja solução é $A = \frac{V_0}{\alpha}$, $B = 0$.

Assim, a função potencial é:

$$\boxed{V(\varphi) = \frac{V_0}{\alpha}\cdot\varphi}$$

O campo elétrico $\vec{E}$ é dado por:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}^{0}\cdot\hat{r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial \varphi}\cdot\hat{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial z}^{0}\cdot\hat{z}\right)$$

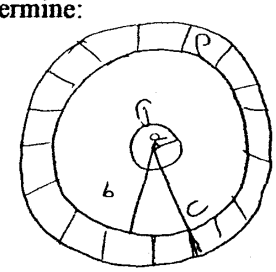
$$\vec{E} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial \varphi}\cdot\hat{\varphi}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{V_0}{\alpha}\hat{\varphi}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{-V_0}{r\alpha}\cdot\hat{\varphi}}$$

2. Uma esfera oca isolante possui raio interno **b** e raio externo **c** e contém uma distribuição de cargas **ρ=B/r (B=constante).** No centro desta esfera oca está centrada uma esfera maciça condutora de raio **a** e que possui densidade superficial **σ.** Determine:

a) o campo elétrico para r < a;
b) para a < r < b;
c) o campo elétrico para b < r < c.
d) o campo elétrico para r > c.
e) o valor de σ para que o campo seja nulo nos pontos r > c;



a) Em condutores, a carga se encontra distribuída em sua superfície. Considerando uma superfície gaussiana esférica de raio $r<a$, a carga em seu interior é nula. Logo, segundo a Lei de Gauss: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{int} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$, para $r<a$.

b) Considere uma superfície gaussiana esférica de raio r tal que $a<r<b$. A carga contida em seu interior é a carga Q_1 da esfera maciça condutora, a qual vale:

$Q_1 = \int \sigma dS = \sigma \int dS = \sigma . 4\pi a^2$

$Q_1 = 4\pi a^2 \sigma$.

Assim, pela Lei de Gauss: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{int}$

$\int E\, dS \cos(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\varepsilon_0} . Q_1$

$E \int dS = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_1$

$E . 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} . 4\pi a^2 \sigma$

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} . \frac{a^2}{r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \hat{r}}$

(em que $\hat{r}$ é o versor na direção radial)

c) Novamente, considere uma superfície gaussiana esférica, desta vez de raio r tal que $b<r<c$. Em seu interior, estão contidas a carga da esfera maciça e a da casca esférica cujos raios interno e externo são b e r, nessa ordem. A carga Q_1 da esfera foi calculada no item anterior ($Q_1 = 4\pi a^2 \sigma$). A carga Q_2 da casca é dada por:

$Q_2 = \int \rho\, dV = \int_b^r \frac{B}{r} 4\pi r^2 dr =$
$4\pi B \int_b^r r\, dr = 2\pi B (r^2 - b^2)$.

Pela Lei de Gauss, temos:

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{int}$

$\int E . dS . \cos(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_1 + Q_2)$

$E \int dS = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_1 + Q_2)$

$E . 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[4\pi a^2 \sigma + 2\pi B (r^2 - b^2)\right]$

$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 r^2}\left[\sigma . a^2 + \frac{B}{2}(r^2 - b^2)\right]\hat{r}}$

d) Considere uma superfície gaussiana esférica de raio $r>c$. As cargas em seu interior são a da esfera maciça (Q_1) e da casca esférica de raios interno e externo b e c, respectivamente (Q_3). Para obter Q_3, basta fazer $r=c$ na expressão de Q.

$Q_3 = 2\pi B (c^2 - b^2)$

Pela Lei de Gauss, temos: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{int}$

$\int E . dS . \cos(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_1 + Q_3)$

$E \int dS = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_1 + Q_3)$

$E . 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[4\pi a^2 \sigma + 2\pi B (c^2 - b^2)\right]$

$E = \frac{1}{\varepsilon_0 . r^2}\left[\sigma . a^2 + \frac{B}{2}(c^2 - b^2)\right]$

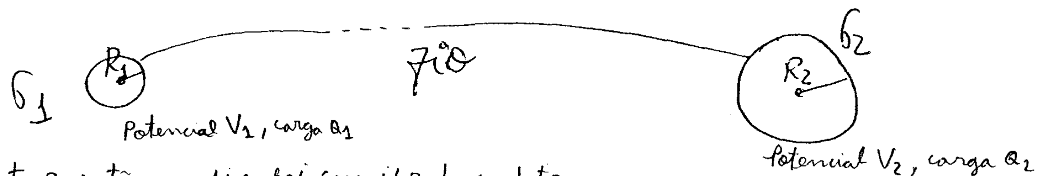
$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 r^2}\left[\sigma . a^2 + \frac{B}{2}(c^2 - b^2)\right]\hat{r}}$

e) Para que $\vec{E} = \vec{0}$ para $r>c$, devemos ter:

$\frac{1}{\varepsilon_0 r^2}\left[\sigma . a^2 + \frac{B}{2}(c^2 - b^2)\right] = 0$

$\boxed{\sigma = \frac{B(b^2 - c^2)}{2a^2}}$

3. Considere duas esferas condutoras ligadas por um fio fino e comprido de raios $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{R_2}$ ($\mathbf{R_2 \gg R_1}$), como mostra a figura, com densidades superficiais de carga $\boldsymbol{\sigma_1}$ e $\boldsymbol{\sigma_2}$. Supor que as esferas estão muito distantes uma da outra. Estabeleça uma relação entre os raios e as densidades superficiais de carga. Discuta o resultado obtido.



Na solução desta questão, o fio foi considerado condutor.

Como o fio é fino e comprido, pode-se considerar que não haja qualquer indução entre as cargas contidas nas esferas, e que não há cargas acumuladas no fio condutor. Ainda, pode-se afirmar que o potencial na superfície das duas esferas é o mesmo:

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{R_2}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \text{(I)}$$

Entretanto, $Q_1 = \sigma_1 \cdot 4\pi R_1^2$ e $Q_2 = \sigma_2 \cdot 4\pi R_2^2$:

$$\frac{\sigma_1 \cdot 4\pi R_1^2}{\sigma_2 \cdot 4\pi R_2^2} = \frac{R_1}{R_2}$$

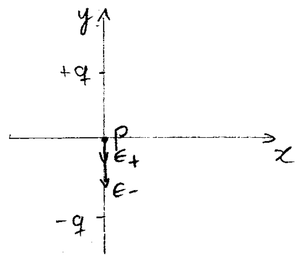
$\boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}}$ é uma relação entre raios e densidades superficiais das esferas.

Como $R_2 \gg R_1$, verifica-se na expressão acima que a densidade superficial de cargas n esfera de raio R_1 é muito maior que a de raio R_2. Porém, na equação (I), constata-se q a carga armazenada pela esfera de raio R_1 é muito menor que a de raio R_2.

Além disso, como o campo elétrico em pontos externos a esferas é proporcional à densidad superficial de cargas, o campo em torno da esfera de raio R_1 é mais intenso que em torno da esfera de raio R_2.

Continuação da 4ª questão)

Para $r = 0$, temos:



$$\vec{E} = \vec{E_+} + \vec{E_-}$$

$$\vec{E} = -2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{a^2} \cdot \hat{y}$$

$$\boxed{\vec{E} = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{a^2} \cdot \hat{y}} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\,\hat{y}}$$

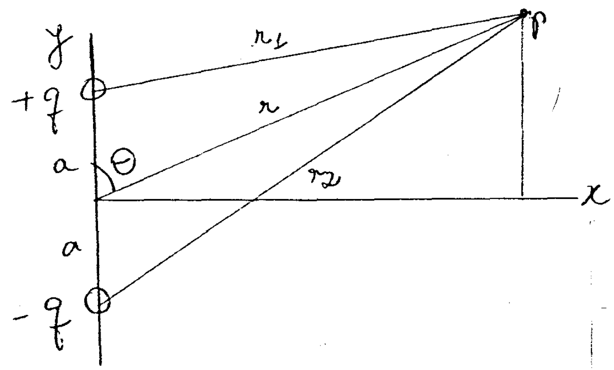
Os campos elétricos dos dipolos são inversamente proporcionais ao cubo da distância entre o ponto e o dipolo, diferentemente do caso entre um ponto e uma carga puntiforme.

— // —

4. Um dipolo elétrico está localizado ao longo do eixo y como mostra a figura. A **magnitude de seu momento de dipolo elétrico é definida como p=2aq**.

a) Num ponto P, longe do dipolo (r >> a), calcule o potencial elétrico, em função de **p, θ, r** e **ε_0**.

b) Calcule o vetor campo elétrico nas condições do item a. Faça θ=0°, θ=90° e r=0 e discuta os resultados obtidos.



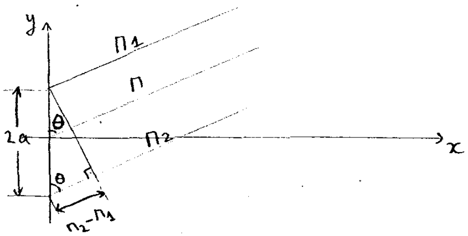
a)

Pelo princípio da superposição, o potencial em P é soma algébrica dos potenciais gerados por +q e -q:

$$V = V_+ + V_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(-q)}{r_2}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2-r_1}{r_1 r_2}\right) \quad (I)$$

Mas como P está muito longe do dipolo, pode-se considerar $\vec{r_1} \,//\, \vec{r} \,//\, \vec{r_2}$, como na figura abaixo:



Pela figura acima, tem-se $\cos\theta = \frac{r_2 - r_1}{2a} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_2 - r_1 = 2a\cos\theta$. Retornando à equação (I):

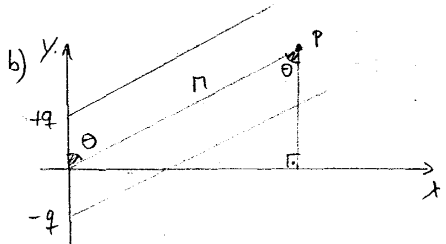
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2a\cos\theta}{r_1 r_2}$$

Contudo, como P está distante do dipolo, $r_1 \cong r \cong r_2$. Então,

$$V = \frac{\overbrace{2aq}^{p}\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\boxed{V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

b)



Na figura, a ordenada y de P pode ser escrita como $y = r\cos\theta$. Então, o potencial em P pode ser escrito como $V = \frac{p\,y}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ usar (r,θ)

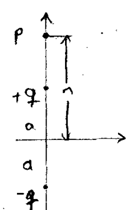
O vetor campo elétrico é dado por:

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ você misturou as coordenadas

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}^{0}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}^{0}\hat{z}\right)$$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dy}\cdot\hat{y} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\hat{y}}$$

Com r >> a e θ = 0°, temos:



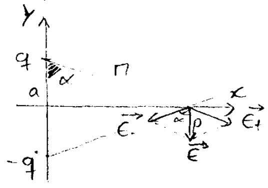
$$\vec{E_P} = \vec{E_{P+}} + \vec{E_{P-}}$$

$$\vec{E_P} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r-a)^2} - \frac{1}{(r+a)^2}\right]\hat{y}$$

$$\vec{E_P} = \frac{4ar\cdot q}{4\pi\varepsilon_0 (r-a)^2(r+a)^2}$$

Como r >> a, $r - a \cong r \cong r + a$: $\boxed{\vec{E_P} = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$

Com r >> a e θ = 90°, temos:



Na direção x, $\vec{E_x} = 0$.

$$\vec{E_y} = -2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2+a^2}\cos$$

$$\vec{E_y} = -2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2+a^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

Como r >> a, $r^2 + a^2 \cong r^2$

$$\boxed{\vec{E_y} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(-\hat{y})}$$

... integrais ... na resolução das integrais

a) integração fazendo $\frac{x}{x+d} = 1 - \frac{d}{x+d}$.

b) substituição trigonométrica, $\frac{L}{2} - x = b\,tg\theta$.

c) integração por substituição de variáveis: $x^2+y^2 = u \Rightarrow x\,dx = \frac{du}{2}$.

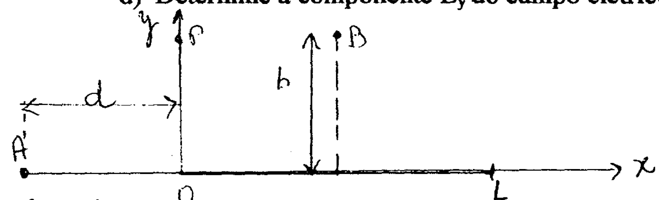
5. Um bastão com comprimento **L**, está sobre o eixo dos x, e a sua ponta esquerda está na origem. A densidade de carga é dada por **μ=αx** (α=constante > 0).

a) Calcular o potencial elétrico no ponto A;

b) Calcular o potencial elétrico no ponto B, sobre a mediatriz do bastão;

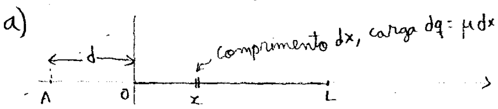
c) Calcular o potencial elétrico no ponto P.

d) Determine a componente E_y do campo elétrico, ao longo do eixo y.



Considerou-se $V_\infty = 0$ nesta questão.

a)



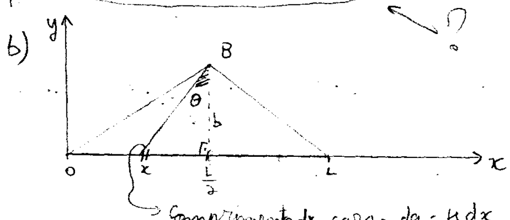
$$dV_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{x+d} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mu\,dx}{x+d} = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x\,dx}{x+d}$$

$$V_A = \int_0^L \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\,dx}{x+d} = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left[L - d\ln\left(\frac{L+d}{L}\right)\right]$$

$$\boxed{V_A = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left[L - d\ln\left(\frac{L+d}{L}\right)\right]}$$

?

b)



$$dV_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}-x\right)^2+b^2}} = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}-x\right)^2+b^2}} =$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}-x\right)^2+b^2}}$$

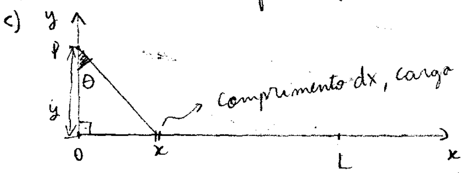
$$V_B = \int_0^L \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}-x\right)^2+b^2}}$$

$$V_B = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{L}{2}\,\frac{\ln\left|\frac{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+b^2}}{b}-\frac{L}{2b}\right|}{\ln\left|\frac{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+b^2}}{b}+\frac{L}{2b}\right|}\right)$$

$$\boxed{V_B = -\frac{\alpha L}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\ln\left(\frac{2\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+b^2}-L}{2b}\right)}{\ln\left(\frac{2\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+b^2}+L}{2b}\right)}}$$

Considerou-se que a ordenada de P era y:

c)



$$dV_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$V_P = \int_0^L \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{L^2+y^2}-y\right)$$

$$\boxed{V_P = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{L^2+y^2}-y\right)}$$

d) $$\vec{E_y} = -\frac{\partial V_P}{\partial y}\hat{y} = -\frac{dV_P}{dy}\hat{y}$$

$$\vec{E_y} = -\frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y}{\sqrt{L^2+y^2}}-1\right)\hat{y}$$

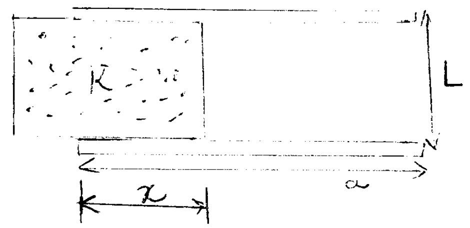
$$\boxed{\vec{E_y} = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{y}{\sqrt{L^2+y^2}}\right)\hat{y}}$$

B

PROVA DE FIS-32 – Turma 1 – 18.04.2008

NOME: Fernanda Lopes Vieira Ferreira

1. Considere um capacitor de lados ***a*** e ***b***, e distância entre as placas igual a ***L***, preenchido com um dielétrico de constante dielétrica ***K***, submetido a uma diferença de potencial V_0. Quando completamente carregado, o capacitor é desconectado do circuito o qual pertence, e é mantido isolado, enquanto o dielétrico é puxado para fora do capacitor. Uma parte do dielétrico, de comprimento ***x***, fica dentro do capacitor. Calcule a força exercida pelo capacitor, atuando na direção ***x***, para recolocar o dielétrico na posição original.



Inicialmente o capacitor estava preenchido [illegible]

$C_0 = \frac{K\varepsilon_0 ab}{L}$ (placas paralelas)

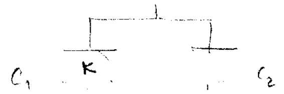
Desta forma a carga do capacitor [illegible]

$Q = C \cdot V \rightarrow Q = C_0 V_0 = \frac{K\varepsilon_0 ab}{L}$ [illegible]

Circuito mantido isolado, então $Q_i = Q_f = Q$

Dielétrico puxado para fora do capacitor [illegible]

Desta forma a nova capacitância pode ser calculada com o sistema abaixo



$C_1 = \frac{K\varepsilon_0 x \cdot b}{L}$; $C_2 = \frac{\varepsilon_0 (a-x)b}{L}$

$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 b}{L}(Kx + (a-x))$

Para calcularmos a força exercida pelo capacitor a fim de recolocar o dielétrico devemos observar o seu trabalho:

$W = \int F\, dx$ (1)

mas $\Delta U = W = \Delta V \cdot q$ (2)

neste caso a situação final seria o capacitor com o dielétrico [illegible]

$V_f = \frac{Q}{C_0} = V_0$

A situação inicial seria o dielétrico na posição x.

mas $Q = cte$ [illegible] $= C_{eq} \cdot V_i$

$V_i = \frac{K\varepsilon_0 ab \cdot V_0}{L} \cdot \frac{L}{\varepsilon_0 b(Kx + a - x)}$

$V_i = \frac{K a V_0}{[illegible]}$

Substituindo em (2)

[illegible] $\rightarrow V_0 - \frac{V_0 K a}{Kx + a - x} \cdot \frac{K\varepsilon_0 ab}{L} = W$

$\rightarrow$ [illegible]

[illegible] $F = -\text{grad}\, U = \frac{\partial W}{\partial x}$

mas $W = \frac{K\varepsilon_0 ab V_0^2}{L}\left(1 - \frac{Ka}{a + x(K-1)}\right)$

$F = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{K\varepsilon_0 ab V_0^2}{L}\left(0 + \frac{Ka(K-1)}{(a + x(K-1))^2}\right)$

$F = \frac{K^2\varepsilon_0 a^2 b V_0^2}{L} \cdot \frac{K-1}{(a + x(K-1))^2}$

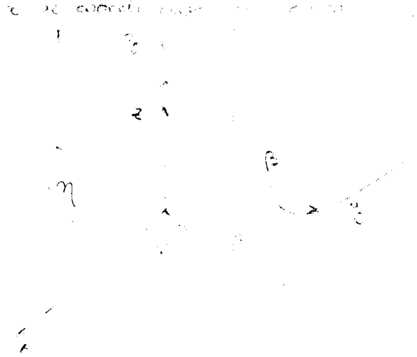
$$\int \frac{d\theta}{sen\,\theta} = \ln\left[tg\frac{\theta}{2}\right] + k$$

2. Considere o potencial **V = V(φ)**, em coordenadas cilíndricas, e **V = V(θ)**, em coordenadas esféricas. Considere as condições de contorno: **V=0 em φ=0 e V=V$_0$ em φ=α**, no caso cilíndrico e **V=0 em θ=π/2 e V=V$_0$ em θ =α**, com **α<π/2**, no caso esférico.

a) Faça um esboço mostrando as superfícies equipotenciais para os dois casos.

b) Usando a equação de Laplace, determine a função potencial e o vetor campo elétrico, para os dois casos.

a) 1º caso: coordenadas cilíndricas



2º caso: coordenadas esféricas

b) para coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\to V(\varphi) = A\varphi + B$$

Verificando as condições de contorno: V(0) = 0

$$\to V(\varphi) = \frac{V_0}{\alpha}\varphi$$

esféricas:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2 sen\,\theta}\left[sen\,\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\,\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sen\,\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right]$$

Verificando

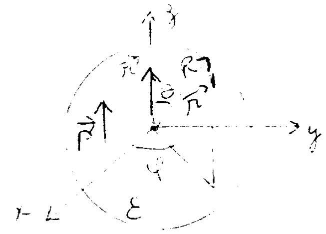
$$\vec{E} = -\frac{V_0}{r\,\ln tg(\alpha/2)}\cdot\frac{1}{sen\,\theta}\,\hat{\theta}$$

3. Uma esfera dielétrica descarregada de raio **R** e permissividade ε tem uma polarização $\vec{\mathbf{P}}$ uniforme, tal que $\vec{\mathbf{P}}=\mathbf{P}\hat{\mathbf{k}}$, conforme mostra a figura.

a) Calcule a densidade superficial de carga de polarização sobre a superfície da esfera.

b) Calcule a densidade volumétrica de carga de polarização da esfera.

c) Escreve uma expressão para o potencial elétrico dentro da esfera ao longo do eixo z, expressando $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ em coord. esféricas.



Temos uma polarização $\vec{P}$ uniforme, tal que $\vec{P} = P\hat{k}$ [illegible] $|\vec{P}| = \frac{q'}{A}$

onde q' é a quantidade de carga polarizada

A é a área da esfera

A capacitância [illegible] por $C = 4\pi\varepsilon R$

Como $P = \frac{q'}{A} \rightarrow q' = P \cdot 4\pi R^2$ (carga polarizada)

a) Desta forma podemos calcular a densidade superficial de carga de polarização:

$\sigma_s = \frac{Q'}{A}$

$\sigma_s = \frac{P\,4\pi R^2}{4\pi R^2} = P$

$\sigma_s = P\cos\theta$

b) Densidade volumétrica de carga de polarização:

$\rho_v = \frac{Q'}{V} = \frac{P\,4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$\rho_v = \frac{3P}{R}$

c) Cálculo do potencial elétrico

Sabemos da equação de poisson

$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ onde ρ é a densidade volumétrica de carga → $\rho = \frac{3P}{R}$

Mas $E = -\operatorname{grad} V$ num campo conservativo

$-\operatorname{div}(\operatorname{grad} V) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (laplaciano)

Para coordenadas esféricas temos, considerando r'

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r'^2 \operatorname{sen}\theta}\left[\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial r'}\left[r'^2 \frac{\partial V}{\partial r'}\right] + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right] + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right] = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

mas $r = r'\cos\theta$

Então ao longo do eixo z dependem de θ e r'

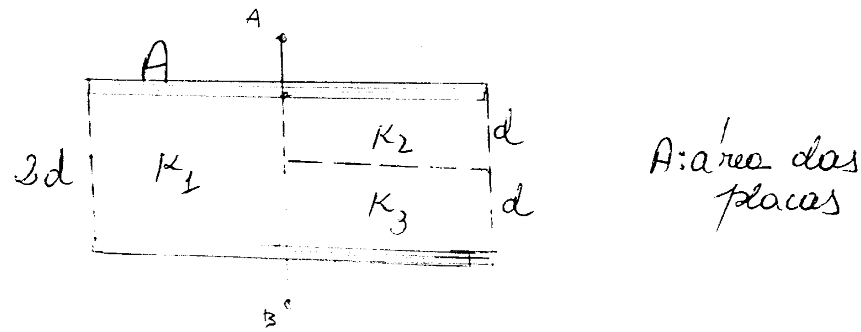
$$\frac{1}{r'^2 \operatorname{sen}\theta}\left[\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial r'}\left[r'^2 \frac{\partial V}{\partial r'}\right] + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right]\right] = -\frac{3P}{R\varepsilon}$$

Temos que V depende de r' e de θ

logo o potencial V pode ser calculado a partir da expressão abaixo:

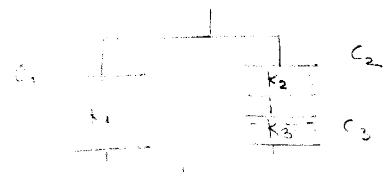
$$\left[\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial r'}\left[r'^2 \frac{\partial V}{\partial r'}\right] + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right]\right] = -\frac{3P r'^2 \operatorname{sen}\theta}{R\,\varepsilon}$$

$V(r', \theta)$ é a solução desta equação, em que θ pode ser dado como $\arccos \frac{r}{r'}$ na expressão acima.



4. Calcule a capacitância do capacitor mostrado na figura:

O capacitor acima pode ser interpretado como sendo equivalente ao seguinte sistema abaixo:



[illegible], teremos C_1 com Área $= A/2$ e altura $2d$. C_2 e C_3 com Área $A/2$ cada um [illegible] d. Considerando que [illegible] [illegible] [illegible]

Desta forma [illegible] um capacitor de placas planas paralelas [illegible] a fórmula de C [illegible]

$$C = \frac{K\varepsilon_0 A}{d}$$

$$C_1 = \frac{K_1 \varepsilon_0 A/2}{2d} \; ; \; C_2 = \frac{K_2 \varepsilon_0 A/2}{d} \; ; \; C_3 = \frac{K_3 \varepsilon_0 A/2}{d}$$

Capacitância equivalente [illegible] C_2 e C_3 [illegible]

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{2d}{K_2 \varepsilon_0 A} + \frac{2d}{K_3 \varepsilon_0 A} = [illegible]$$

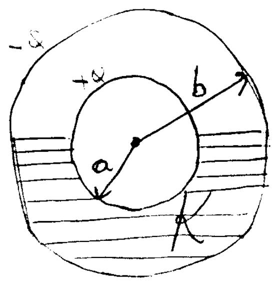
$$C_{eq} = \frac{K_2 K_3 \varepsilon_0 A}{2d (K_2 + K_3)}$$

Capacitância [illegible] total

$$C_T = C_{eq} + C_1 = \frac{K_2 K_3 \varepsilon_0 A}{2d (K_2 + K_3)} + \frac{K_1 \varepsilon_0 A}{4d}$$

$$C_T = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}\left(\frac{K_2 K_3}{K_2 + K_3} + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$C_T = \frac{\varepsilon_0 A}{4d}\left(\frac{2K_2 K_3 + K_1 (K_2 + K_3)}{K_2 + K_3}\right)$$



5. Um capacitor esférico isolado possui carga **+Q** sobre o condutor interno e carga **–Q** sobre o condutor externo. A seguir, metade do volume entre os dois condutores é preenchida por um dielétrico com uma constante **K**, conforme indicado na seção reta da figura.

a) Determine a capacitância do capacitor preenchido até a metade.

b) Determine a densidade superficial de cargas livres sobre o condutor interno e sobre o condutor externo.

c) Estabeleça uma relação entre as cargas livres e as cargas de polarização.

a) O capacitor representado acima é equivalente ao ...

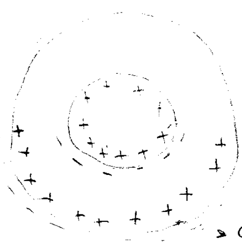
Como se cada um dos capacitores representado pelas placas paralelas fosse um capacitor ...

... a capacitância é dada por:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{2}\frac{ab}{b-a} + \frac{4\pi K\varepsilon_0}{2}\frac{ab}{b-a}$$

$$C = \left(\frac{1+K}{2}\right)4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$$

b)



Mas como temos um capacitor ..., a carga total se ...:

$$Q = C.V \Rightarrow Q_{l,a} = \left(\frac{1+K}{2}\right)Q$$

$$Q_{l,b} = -\left(\frac{1+K}{2}\right)Q$$

Cálculo da densidade superficial de carga ...

$$\sigma_{l,a} = \frac{Q_{l,a}}{A_a} = \left(\frac{1+K}{2}\right)\frac{Q}{4\pi a^2}$$

$$\sigma_{l,a} = \left(\frac{1+K}{2}\right)\frac{Q}{4\pi a^2} \qquad \sigma_a = \frac{KQ}{K+1}\frac{1}{2\pi a^2}$$

$$\sigma_{l,b} = \frac{Q_{l,b}}{A_b} = -\left(\frac{1+K}{2}\right)\frac{Q}{4\pi b^2}$$

$$\sigma_{l,b} = -\left(\frac{1+K}{2}\right) \ldots$$ é constante?

c) Temos, através da lei de Gauss que ... de um capacitor sem dielétrico:

$$E_0 A = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_0 = \frac{q}{A\varepsilon_0}$$

Com a adição do dielétrico, este para a ... induzido ... surgindo as cargas q'

... resultante é ...

Pela lei de gauss o campo resultante $E = \frac{q-q'}{\varepsilon_0 A}$

Mas sabemos que quando o campo é ... por um dielétrico, temos $E = \frac{E_0}{K}$

...:

$$\frac{q-q'}{\varepsilon_0 A} = \frac{E_0}{K} = \frac{q}{KA\varepsilon_0} \qquad q - q' = \frac{q}{K}$$

$$\rightarrow q' = q\left(1 - \frac{1}{K}\right)$$