Домашнее задание от 19.02.2019

Тан Линь

Задача 1. Найдите коммутант группы диэдра D_n. Сколько в нем элементов? (Отдельно рассмотрите случаи четного и нечетного n). Разрешима ли группа D_n?

Решение:

$$D_n := \langle a, b\rangle \ \ O(a) = n,\ O(b) = 2,\ bab = a^{-1},\ \forall k \not\equiv 0(mod\ \ n), b \neq a^k$$
$$D_n = \{a^{r_1}b^{s_1}\cdots a^{r_k}b^{s_k} | 0 \leqslant r_i < n, s_k \in \{0,1\}\}$$

$$bab = a^{-1} \Rightarrow ba = a^{-1}b = a^{n-1}b$$
$$ba^2 = ba \cdot a = a^{n-1}ba = (a^{n-1})^2 b = a^{n-2}b \Rightarrow ba^2 = a^{n-2}b$$
$$\vdots$$
$$ba^{n-1} = ba^{n-2}a = a^2ba = a^2a^{n-1}b = ab \Rightarrow ba^{n-1} = ab$$

То у нас есть

$$ba^r = a^{n-r}b = a^{-r}b$$

Поэтому для любого элемента из группы D_n:

$$a^{r_1}b^{s_1}\cdots a^{r_k}b^{s_k} = a^{r'}b^{s'}$$

где $0 \leqslant r' < n$ и $s' \in \{0,1\}$
Теперь докажем что, для $a^{r_1}b^{s_1} = a^{r_2}b^{s_2}$, то $r_1 \equiv r_2(mod\ \ n)$ и $s_1 \equiv s_2(mod\ \ 2)$, так как $a^{r_1-r_2} = b^{s_2-s_1}$ и $\forall k \not\equiv 0(mod\ \ n), b \neq a^k$.

Теперь рассмотрим коммутант группы D_n:

$$D_n' = [D_n, D_n] = \{[g_1, g_2] | g_1 \in G, g_2 \in G\}$$

1. $[a^r, a^s] = e$
2. $[a_r, b] = a^r ba^{-r}b = a^r a^r = a^{2r}$
3. $[a^r b, a^s] = a^r ba^s ba^{-r}a^{-s} = a^r a^{-s}a^{-r}a^{-s} = a^{-2s}$
4. $[a^r b, b] = a^r bbba^{-r}b = a^r a^r = a^{2r}$

то $D_n' \subseteq \langle a^2\rangle$, но$[a, b] = aba^{-1}b = a^2$,то $\langle a^2\rangle \subseteq D_n'$, то $D_n' = \langle a^2\rangle$

Если

1. $n \equiv 0(mod\ \ 2)$
$$D_n' = \langle a^2\rangle, \quad |D_n'| = \frac{n}{2}$$

2. $n \equiv 1 (mod \ \ 2)$

$$D'_n = \langle a^2 \rangle = \langle a \rangle, \quad |D'_n| = n$$

То $D_n \rhd D'_n = \langle a^2 \rangle \rhd D''_n = [D'_n, D'_n] = \{e\}$, поэтому группа D_n разрешима.

Задача 2. Докажите, что любая группа из
а) 20,
б) 100
элементов разрешима.

Решение:
а) По теореме Силова 3

$$N_2 \equiv 1 (mod \ \ 2), \quad N_2 | 5 \Rightarrow N_2 = 1 \text{ или } N_2 = 5$$
$$N_5 \equiv 1 (mod \ \ 5), \quad N_5 | 4 \Rightarrow N_5 = 1$$

То $\exists H \lhd G$, где $|H| = 5$ и $|G| = 20$
$\therefore G \rhd H \cong \mathbb{Z}_5$
H абелева, то она разрешима. $|G/H| = \frac{20}{5} = 4$,то $G/H \cong \mathbb{Z}_4$ или
$G/H \cong V_4$, каждая из них абелева и разрешима.
$\therefore G$ разрешима.

б)

$$N_5 \equiv 1 (mod \ \ 5), \quad N_5 | 4 \Rightarrow N_5 = 1$$

То $G \rhd H$, $\exists |H| = 5^2 = 25$
$\because 5$ простое число
$\therefore H$ абелева, то она разрешима. $|G/H| = \frac{100}{25} = 4$,то $G/H \cong \mathbb{Z}_4$ или
$G/H \cong V_4$, каждая из них абелева и разрешима.
$\therefore G \rhd H \rhd [H, H] = e \therefore G(|G| = 100)$ разрешима.

Задача 3. Постройте производные ряды коммутантов для всех групп из 12 элементов.

Решение:
любая группа из 12 элементов изоморфна одной из
1)$\mathbb{Z}_{12}$ 2)$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$ 3) $G = \langle a, b | O(a) = 3, O(b) = 4, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$
4)D_6 5)A_4

1. $\mathbb{Z}_{12}$
$$\mathbb{Z}_{12} \supset \mathbb{Z}'_{12} = [\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{12}] = \{e\}$$

2. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$
$$G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6 \supset G' = [G, G] = \{e\}$$
так как $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$ абелева.

3. $G = \langle a, b | O(a) = 3, O(b) = 4, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$
$$G \supset G' = [G, G] = \langle a \rangle \supset G'' = [G', G'] = \{e\}$$

4. D_6
$$D_6 \supset D'_6 = \langle a^2 \rangle \supset D''_6 = [D'_6, D'_6] = \{e\}$$

5. A_4
$$A_4 \supset [A_4, A_4] = V_4 \supset [V_4, V_4] = \{e\}$$

То все они разрешимы.