

Домашнее задание от 19.02.2019

Тан Линь

ЗАДАЧА 1. Найдите коммутант группы диэдра D_n . Сколько в нем элементов? (Отдельно рассмотрите случаи четного и нечетного n). Разрешима ли группа D_n ?

Решение:

$$D_n := \langle a, b \mid O(a) = n, O(b) = 2, bab = a^{-1}, \forall k \not\equiv 0 \pmod{n}, b \neq a^k$$

$$D_n = \{a^{r_1}b^{s_1} \dots a^{r_k}b^{s_k} \mid 0 \leq r_i < n, s_k \in \{0, 1\}\}$$

$$bab = a^{-1} \Rightarrow ba = a^{-1}b = a^{n-1}b$$

$$ba^2 = ba \cdot a = a^{n-1}ba = (a^{n-1})^2b = a^{n-2}b \Rightarrow ba^2 = a^{n-2}b$$

\vdots

$$ba^{n-1} = ba^{n-2}a = a^2ba = a^2a^{n-1}b = ab \Rightarrow ba^{n-1} = ab$$

То у нас есть

$$ba^r = a^{n-r}b = a^{-r}b$$

Поэтому для любого элемента из группы D_n :

$$a^{r_1}b^{s_1} \dots a^{r_k}b^{s_k} = a^{r'}b^{s'}$$

где $0 \leq r' < n$ и $s' \in \{0, 1\}$

Теперь докажем что, для $a^{r_1}b^{s_1} = a^{r_2}b^{s_2}$, то $r_1 \equiv r_2 \pmod{n}$ и $s_1 \equiv s_2 \pmod{2}$, так как $a^{r_1-r_2} = b^{s_2-s_1}$ и $\forall k \not\equiv 0 \pmod{n}, b \neq a^k$.

Теперь рассмотрим коммутант группы D_n :

$$D'_n = [D_n, D_n] = \{[g_1, g_2] \mid g_1 \in G, g_2 \in G\}$$

1. $[a^r, a^s] = e$
2. $[a^r, b] = a^rba^{-r}b = a^ra^r = a^{2r}$
3. $[a^rb, a^s] = a^rba^sba^{-r}a^{-s} = a^ra^{-s}a^{-r}a^{-s} = a^{-2s}$
4. $[a^rb, b] = a^rbbba^{-r}b = a^ra^r = a^{2r}$

то $D'_n \subseteq \langle a^2 \rangle$, но $[a, b] = aba^{-1}b = a^2$, то $\langle a^2 \rangle \subseteq D'_n$, то $D'_n = \langle a^2 \rangle$

Если

1. $n \equiv 0 \pmod{2}$

$$D'_n = \langle a^2 \rangle, \quad |D'_n| = \frac{n}{2}$$

2. $n \equiv 1 \pmod{2}$

$$D'_n = \langle a^2 \rangle = \langle a \rangle, \quad |D'_n| = n$$

То $D_n \triangleright D'_n = \langle a^2 \rangle \triangleright D''_n = [D'_n, D'_n] = \{e\}$, поэтому группа D_n разрешима.

ЗАДАЧА 2. Докажите, что любая группа из

а) 20,

б) 100

элементов разрешима.

Решение:

а) По теореме Силова 3

$$N_2 \equiv 1 \pmod{2}, \quad N_2 | 5 \Rightarrow N_2 = 1 \text{ или } N_2 = 5$$

$$N_5 \equiv 1 \pmod{5}, \quad N_5 | 4 \Rightarrow N_5 = 1$$

То $\exists H \triangleleft G$, где $|H| = 5$ и $|G| = 20$

$$\therefore G \triangleright H \cong \mathbb{Z}_5 \triangleright [H, H] = \{e\}$$

$\therefore G$ разрешима.

б)

$$N_5 \equiv 1 \pmod{5}, \quad N_5 | 4 \Rightarrow N_5 = 1$$

То $G \triangleright H$, $\exists |H| = 5^2 = 25$

$\because 5$ простое число

$\therefore H$ абелева.

$\therefore G \triangleright H \triangleright [H, H] = e \therefore G(|G| = 100)$ разрешима.