# Домашнее задание от 18.02.2019

Тан Линь

Задача 1. $\int \frac{dx}{x(x^5+1)}$

Решение:
Пусть $t = x^5$,то $x = \sqrt[5]{t}$, и имеет $dx = \frac{1}{5}t^{-\frac{4}{5}}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^5+1)} &= \int \frac{\frac{1}{5}t^{-\frac{4}{5}}dt}{t^{\frac{1}{5}}(t+1)} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t(t+1)} \\ &= \frac{1}{5}\int (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1})dt = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{5}\int \frac{1}{t+1}dt \\ &= \frac{1}{5}\ln|t| - \frac{1}{5}\ln|t+1| + C \\ &= \frac{1}{5}\ln|x^5| - \frac{1}{5}\ln|1+x^5| + C \\ &= \ln|x| - \frac{1}{5}\ln|x^5+1| + C\end{aligned}$$

Задача 2. $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)}$

Решение:
Пусть $t = x^3$,то $x = \sqrt[3]{t}$, и имеет $dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}$

$$\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)} = \int \frac{\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt}{t^{\frac{4}{3}}(t+1)} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2(t+1)}$$

Теперь разложим интегральное выражение, пусть $\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2}$

$$\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} \quad = \frac{At^2 + B(t^2+t) + C(t+1)}{t^2(t+1)} = \frac{(A+B)t^2 + (B+C)t + C}{t^2(t+1)}$$

Поэтому мы получим следующую систему

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ C=1 \end{cases}$$

Бес друтностИ, получим решение систему

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$$

и интеграл имеет вид

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{t^2(t+1)} &= \int (\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1})dt \\ &= -\frac{1}{t} - \ln|t| + \ln|t+1| + C\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)} &= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2(t+1)} \\ &= \frac{1}{3}(-\frac{1}{t} - \ln|t| + \ln|t+1| + C) \\ &= \frac{1}{3}(-\frac{1}{x^3} - \ln|x^3| + \ln|x^3+1| + C) \\ &= -\frac{1}{3x^3} - \ln|x| + \ln|x^3+1| + C\end{aligned}$$

Задача 3. $\int \frac{x^4-2x^3+2x^2-20x+10}{(x-1)(x^2-2x+1)^3}$