Домашняя работа от 12.02.2019

Тан Линь

Задача 1. Здесь находится решение первой задачи о поиске центра и коммутанта группы, порожденной элементами a, b со следующими соотношениями: $a^3 = b^4 = e, bab^{-1} = a^2$.

Решение:

$$G = \langle a, b\rangle, \quad O(a) = 3, \quad O(b) = 4, \quad bab^{-1} = a^2$$

По определению

$$G = \{a^{i_1}b^{j_1}a^{i_2}b^{j_2}\cdots a^{i_r}b^{j_r} | 0 \leqslant i_1, \cdots i_r < 3; 0 \leqslant j_1, \cdots j_r < 4, r = 1, 2, \cdots\}$$

$be = eb = a^3b = ba^3 = b$,так как $bab^{-1} = a^2$, и получим нижние формулы

$$\begin{gathered}
bab^{-1} = a^2 \Rightarrow ba = a^2b \\
ba^2 = ba \cdot a = a^2b \cdot a = a^2 \cdot ba = a^2 \cdot a^2b = ab \Rightarrow ba^2b^{-1} = a \\
b^2a = b \cdot ba = b \cdot a^2b = ba^2 \cdot b = ab \cdot b = ab^2 \\
b^3a = b \cdot b^2a = b \cdot ab^2 = ba \cdot b^2 = a^2b \cdot b^2 = a^2b^3 \\
b^4a = ab^4 = a
\end{gathered}$$

Поэтому произвольное $b^m a^n$ можно представиться в виде $a^{n^*}b^{m^*}$,потому что,

$$b^m a^n = b^m a \cdot a^{n-1} = a^{b_1}b^{m_1}a^{n-1} = a^{n_2}b^{m_2}a^{n-2} = \cdots = a^{n^*}b^{m^*}$$

Для произвольного элементы из G,имеет вид

$$\begin{aligned}
a^{i_1}b^{j_1}a^{i_2}b^{j_2}\cdots a^{i_r}b^{j_r} &= a^{i_1}a^{i'_1}b^{j'_1}b^{j_2}a^{i_3}b^{j_3}\cdots a^{i_r}b^{j_r} \\
&= a^{i_1+i'_1}b^{j'_1+j_2}a^{i_3}b^{j_3}\cdots a_{i_r}b^{j_r} \\
&= \cdots \\
&= a^{i^*}b^{j^*}
\end{aligned}$$

И группа G имеет вид

$$G = \{a^r b^s | 0 \leqslant r < 3, 0 \leqslant s < 4\}$$

$\forall a^{r_1}b^{s_1}, a^{r_2}b^{s_2} \in G$,если $a^{r_1}b^{s_1} = a^{r_2}b^{s_2}$,то $a^{r_1-r_2} = b^{s_2-s_1}$,и имеет следующие случая

1. $r_1 - r_2 \equiv 0(mod\ \ 3)$
   $b^{s_2-s_1} = a^0 = e \Rightarrow s_2 - s_1 \equiv 0(mod\ \ 4)$

2. $r_1 - r_2 \equiv 1(mod\ \ 3)$
   $a = b^{s_2-s_1}$
   $\because O(a) = 3, \quad O(b^{s_2-s_1}) \neq 3$
   $\therefore r_1 - r_2 \not\equiv 1(mod\ \ 3)$

3. $r_1 - r_2 \equiv 2(mod\ \ 3)$
   $a^2 = b^{s_2-s_1}$
   $\because O(a) = 3, \quad O(b^{s_2-s_1}) \neq 3$
   $\therefore r_1 - r_2 \not\equiv 2(mod\ \ 3)$

Только первой случай рациональный,поэтому для произвольных,
$a^{r_1}b^{s_1} = a^{r_2}b^{s_2}$,
можем говорить что, $r_1 \equiv r_2(mod\ \ 3)$ и $s_1 \equiv s_2(mod\ \ 4)$,поэтому $a^{r_1} = a^{r_2}$ и $b^{s_1} = b^{s_2}$,то

$$G = \{e, a, a^2, b, b^2, b^3, ab, ab^2, ab^3, a^2b, a^2b^2, a^2b^3\}$$

$|G| = 12$
Теперь мы искаем элементы центра группы G,

1. $e \in Z(G)$

2. $$\begin{aligned} ab = ba^2 \neq ba \Rightarrow a, b \notin Z(G) \\ ba^2 = ab \neq a^2b \Rightarrow a^2 \notin Z(G) \\ aab = a^2b, \quad aba = aa^2b = b \Rightarrow \quad a^2b \neq b \Rightarrow ab \notin Z(G) \\ aa^2b = b, \quad a^2ba = a^2a^2b = ab \Rightarrow \quad b \neq ab \Rightarrow a^2b \notin Z(G) \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} ba^2 = ab^2, \quad b^2a^2 = ab^2a = a^2b^2 \Rightarrow b^2a^rb^s = a^rb^2b^s = a^rb^sb^2 \Rightarrow b^2 \in Z(G) \\ bab^2 = a^2bb^2 = a^2b^3, \quad ab^2b = ab^3 \Rightarrow a^2b^3 \neq ab^3 \Rightarrow ab^2 \notin Z(G) \\ ba^2b^2 = abb^2 = ab^3, \quad a^2b^2b = a^2b^3 \Rightarrow ab^3 \neq a^2b^3 \Rightarrow a^2b^2 \notin Z(G) \end{aligned}$$

4.

$$ab^3 \neq a^2b^3 = b^3a \Rightarrow b^3 \notin Z(G)$$
$$bab^3 = a^2bb^3 = a^2, \quad ab^3b = a \Rightarrow a \neq a^2 \Rightarrow ab^3 \notin Z(G)$$
$$ba^2b^3 = abb^3 = a, \quad a^2b^3b = a^2 \Rightarrow a \neq a^2 \Rightarrow a^2b^3 \notin Z(G)$$

И нашли центр группы G, $Z(G) = \{e, b^2\}$.

Мы уже знали,что $bab^{-1} = a^2$ и $ba^2b^{-1} = a$,теперь искаем коммутант группы G

$$\begin{aligned}
[a^{r_1}b^{s_1}, a^{r_2}b^{s_2}] &= a^{r_1}b^{s_1}a^{r_2}b^{s_2}(a^{r_1}b^{s_1})^{-1}(a^{r_2}b^{s_2})^{-1} \\
&= a^{r_1}b^{s_1}a^{r_2}b^{s_2}b^{-s_1}a^{-r_1}b^{-s_2}a^{-r_2} \\
&= a^{r_1}b^{s_1-1}ba^{r_2}b^{-1}b^{s_2+1}b^{-s_1}a^{-r_1}b^{-s_2}a^{-r_2} \\
&= a^{r_1}b^{s_1-s_1}a^{r_2^*}b^{s_2+s_1}b^{-s_1}a^{-r_1}b^{-s_2}a^{-r_2} \\
&= a^{r_1+r_2^*}b^{s_2}a^{-r_1}b^{-s_2}a^{-r_2} \\
&= a^{r_1+r_2^*}a^{r_1^*}a^{-r_2} \\
&= a^*
\end{aligned}$$

$\therefore G' = \{[g_1, g_2] | g_1, g_2 \in G\} < \langle a \rangle$
$\because [a, b] = aba^{-1}b^{-1} = aa = a^2$
$\therefore G = \langle a \rangle = \{e, a, a^2\}$
То ответ:$Z(G) = \{e, b^2\}, \quad G' = \{e, a, a^2\}$

Задача 2. Изоморрфны ли группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{D}_3 \to \mathrm{D}_6$?

Решение:
Изоморрфны группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{D}_3$ и D_6.
Рассмотрим,пусть $\varphi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$

$$\varphi^2 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$$
$$(\varphi^2)^2 = \varphi^4 = (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4)$$

и пусть

$$d_1 = (2\ 6)(3\ 5)$$
$$d_2 = (1\ 3)(6\ 4)$$
$$d_3 = (1\ 5)(2\ 4)$$

то для подгруппы $N = \{e, \varphi^2, \varphi^4, d_1, d_2, d_3\}$,очевидно $N \cong D_3 \because |N| = 6$
$\therefore [D_6 \colon N] = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow N \lhd D_6$
Рассмотрим
$K = \{e, \varphi^3\}$ $\qquad$ $\varphi^3 = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$
$\forall \tau \in D_6$

$\tau\varphi^3\tau^{-1} = \tau\varphi\tau^{-1}\tau\varphi\tau^{-1}\tau\varphi\tau^{-1} \quad = (\tau\varphi\tau^{-1})^3 = (\tau(1)\ \tau(2)\ \tau(3)\ \tau(4)\ \tau(5)\ \tau(6))^3$

$\sigma = (\tau(1)\ \tau(2)\ \tau(3)\ \tau(4)\ \tau(5)\ \tau(6)) \in D_6 \Rightarrow \exists n, \sigma^n \in D_6$
$\therefore \tau\varphi^3\tau{-}1 = (\sigma^3)^n \in K$
$\therefore K \lhd D_6$
$\because N \cap K = \{e\} \Rightarrow K \times N = D_6$
$\because N \cong D_3, \quad K \cong \mathbb{Z}_2$
$\therefore D_6 = K \times N \cong \mathbb{Z}_2 \times D_3$
Доказано.

Задача 3. Пусть $N \lhd G$.Обязательно ли существует такая подгруппа K в группе G,что $G = N \leftthreetimes K$?

Решение:
Рассмотрим $G = \mathbb{Z}_4$
$\{0, 2\} \lhd G$
Если $\exists K, G = N \leftthreetimes K \Rightarrow |K| = 2 \Rightarrow K = N$
$\therefore K \cap N = \{0, 2\} \neq \{0\}$
то не всех такая подгруппа сушествует.