0.1 矩阵的定义

矩阵的来源 矩阵起源于线性方程组的求解，像简单的二元一次方程组 $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{cases}$ 我们在求解的过程仅需要对其系数进行操作，于是乎，变量符号 x, y 对于我们来说，在计算过程中，并不显得十分必要；因此，我们可以略掉其变量名而将系数写在一对方括号之中，以便于进行计算。从该二元方程组我们可以得到如下形式的系数“方块”

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

类似的，我们可以从 n 元方程组（不一定有 n 个方程式）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

得到系数“方块”

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

于是，为求得方程组的解集，一般来说我们需要进行两种操作：一，将某一行乘以一个非零常数并不改变方程组的解集；二，将某一行的非零常数倍加到另一行，也不改变方程组的解集。这样，对应到我们新得到的“方块中”，就是将某一行乘以非零常数倍，或者将某一行的常数倍加到另一行之后，得到的新“方块”在方程组有同样的解集的意义下等价。至此，我们已经抽象出了矩阵的基本概念，接下来我们正式定义矩阵。

矩阵的定义 在数学上，一个 $m \times n$ 矩阵，是一个由 m 行，每行 n 个数字的列表组成。在矩阵上我们定义定义加法和乘法：

1. 加法:
   并非任意种类的矩阵都可以进行加法运算，必须是同种类型的矩阵才可以, 即, 假设我们用记号 $M_{m\times n}$ 表示所有的 $m\times n$ 矩阵, 那么对任意的矩阵 A, B，当且仅当存在某个 $M_{m\times n}$ 包含他们二者时，$A+B$ 才有意义；用数学符号表示为: $\exists M_{m\times n}, A\in M_{m\times n} \& B\in M_{m\times n} \Leftrightarrow \exists A+B$.
   直观的看来就是，两个矩阵相同位置的元素相加，所得到的新矩阵就是矩阵的和。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots b_{2n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

2. 乘法: