CONVERGENCE EN LOI

Exercice 1 (Exemples). Déterminer la limite en loi de $(Z_n)_{n\geq 1}$ dans chacun des cas suivants.

1. $Z_n = \frac{X_n}{n}$, avec $X_n \sim \mathcal{U}(\{1,\dots,n\})$.
2. $Z_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$, avec $np_n \to \lambda \in (0,\infty)$.
3. $Z_n = \frac{X_n}{n}$, avec $X_n \sim \mathcal{G}(p_n)$ et $np_n \to \lambda \in (0,\infty)$.
4. $Z_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$ avec $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. et $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$, $\mathbb{E}[X_1] = 0$.
5. $Z_n = \frac{X_n - \mathbb{E}[X_n]}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)}}$, avec $X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_n)$ et $\lambda_n \to +\infty$. En déduire au passage la valeur de
$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}\right)e^{-n}.$$
6. $Z_n = \frac{X_n - \mathbb{E}[X_n]}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)}}$, avec $X_n \sim \Gamma(r_n, \lambda)$ et $r_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.
7. $Z_n = n\min(X_1,\cdots,X_n)$, avec $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. $\mathcal{U}(0,1)$. Y a-t-il convergence p.s. ?
8. $Z_n = h(X_n)$, avec $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et $(X_n)_{n\geq 1}$ convergeant en loi vers X.

Exercice 2 (Cas déterministe). Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle. À quelle condition y a-t-il convergence en loi pour la suite aléatoire $(X_n)_{n\geq 1}$ définie par $X_n = a_n$?

Exercice 3 (Cas discret). Soient $X, X_1, X_2, \dots$ des v.a. dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $X_n \to X$ en loi si et seulement si $\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k)$. Quelle est la limite de $\mathcal{B}(n, p_n)$ lorsque $np_n \to \lambda$?

Exercice 4 (Cas à densité). Soient $X, X_1, X_2, \dots$ des v.a. de densités respectives $f, f_1, f_2, \dots$. Montrer que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.p.} f \implies X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} X$ et construire un contre-exemple pour la réciproque.

Exercice 5 (Cas gaussien). On suppose que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi si et seulement si $(\mu_n)_{n\geq 1}$ et $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ convergent, et trouver la loi limite.

Exercice 6 (Distance de Levy). Si μ, μ' sont des mesures de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, de fonctions de répartitions notées F, F', on définit
$$d(\mu,\mu') := \inf\left\{\delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, F(x-\delta) - \delta \leq F'(x) \leq F(x+\delta) + \delta\right\}.$$

Vérifier que d est une distance, et qu'elle métrise la convergence étroite.

Exercice 7 (Série aléatoire). Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{U}(\{-1,+1\})$. Montrer que la v.a. $Z := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_k$ est bien définie, et déterminer sa loi. *Indication* : établir l'identité

$$2^n \sin\left(2^{-n}t\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(2^{-k}t\right) = \sin(t) \qquad (n \in \mathbb{N}, t \geq 0).$$

Exercice 8 (Méthode des moments). Soit $M > 0$ une constante.

1. Montrer que la loi d'une v.a. à valeurs dans $[-M, M]$ est déterminée par ses moments.
2. Pour des v.a. $X, X_1, X_2, \dots$ à valeurs dans $[-M, M]$, établir l'équivalence suivante :

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} X \iff \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}\left[X_n^k\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[X^k\right].$$

3. Calculer $\int_0^\infty x^k f(x)dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $f(x) = \frac{\sin(2\pi \ln x)}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}}$. En déduire qu'il existe une infinité de lois distinctes sur $(0, \infty)$ qui ont les mêmes moments.

Exercice 9 (Suite de Cauchy) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$.

1. $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$ converge-t-elle en loi ?
2. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge-t-elle en loi ? en proba ?
3. Montrer que, pour $t > 0$,

$$\frac{1}{\pi(t+1)} \leq \mathbb{P}(X_1 > t) \leq \frac{1}{\pi t}.$$

4. On note $Z_n = \frac{\max_{i=1,\dots,n} X_i}{n}$. Montrer que Z_n converge en loi vers une variable Z dont on donnera la densité.

Exercice 10 (Queue lourde). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de densité

$$f(x) := \frac{1}{|x|^3} \mathbf{1}_{(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)}(x).$$

1. Vérifier que f est bien une densité, puis calculer $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathbb{E}[X_1^2]$. Le TCL s'applique-t-il ?
2. On note ϕ la fonction caractéristique de X_1. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi(t) = 1 - 2t^2 \int_t^\infty \frac{1 - \cos(x)}{x^3}\, \mathrm{d}x.$$

3. En déduire que $\phi(t) = 1 - t^2 \ln \frac{1}{t} + o\left(t^2 \ln \frac{1}{t}\right)$ lorsque $t \to 0^+$.
4. Soit $Z_n := \frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n \ln n}}$. Conclure que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi et préciser la limite.
5. Soit $\theta \geq 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{-\theta Z_n^2}\right]$ existe et la calculer.

Exercice 11 (Lois stables). On dit que X suit la loi stable de paramètres $\alpha \in [1,2]$ et $\lambda \in (0,\infty)$ si

$$\Phi_X(t) \quad = \quad \exp\left(-\lambda |t|^\alpha\right) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

1. Quelles lois reconnaît-on dans les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$?
2. Montrer que X admet une densité donnée par

$$f_X(x) \quad = \quad \frac{\lambda\alpha}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{sinc}(xt) t^\alpha e^{-\lambda t^\alpha} \,\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Pour quelles valeurs de α l'espérance $\mathbb{E}[X]$ existe-t-elle ? Quelle est alors sa valeur ?
4. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a.i.i.d. de même loi que X. Quelle est la loi de $Z_n := \frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$?
5. Pour quelles valeurs de α la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle en loi ? Que peut-on en déduire ?

Exercice 12 (Théorème de représentation de Skorokhod). On considère l'*espace probabilisé canonique* $\Omega = [0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

1. Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de fonction de répartition F. On pose

$$X(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R} \colon F(t) \geq \omega\} \qquad (\omega \in \Omega).$$

   Vérifier que X est une variable aléatoire sur Ω, et que sa loi est μ.
2. Soit $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ des probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et $X, X_1, X_2, \ldots$ les v.a. sur Ω obtenues par la construction ci-dessus. Montrer que $X_n \to X$ p.s. si et seulement si $\mu_n \Rightarrow \mu$.