Rappels (2)

Exercice 1 (Convergences). Soit $\{X_i\}_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur $\{-1,+1\}$. Donner un équivalent simple de $\mathbb{E}[|X_1+\cdots+X_n|]$ lorsque $n\to\infty$.

Exercice 2 Soient M_n des variables aléatoires iid d'espérance 1 et de variance finie. Montrer que $X_n = M_0M_1\cdots M_n$ est une martingale par rapport à $\mathscr{F}_n = \sigma(M_i : i \leqslant n)$.

Exercice 3 (variation quadratique) Soit (X_n) une martingale L^2, avec $X_0 = 0$. On pose $Q_0 = 0$ et $Q_{n+1} - Q_n = (X_{n+1} - X_n)^2$.

1. Montrer que le processus $\langle X\rangle_n$ défini par
$$X_n^2 = \langle X\rangle_n + Q_n$$
est une martingale issue de 0.
2. Montrer que
$$\mathrm{Var}(\langle X\rangle_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i - X_{i-1}).$$

Exercice 4 (Classes monotones). Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures de probabilité sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$.

1. Vérifier que l'ensemble $\mathcal{M} = \big\{A\in\mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)\big\}$ est une classe monotone.
2. En déduire que si $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ coïncident sur un π-système engendreant $\mathcal{A}$, alors $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.
3. Montrer que la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle caractérise sa loi.
4. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, telles que
$$\forall A\in\mathcal{C},\qquad \mathbb{E}[X\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A],$$
où $\mathcal{C}$ est un $\pi-$système vérifiant $\Omega\in\mathcal{C}$ et $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$. Que peut-on conclure ?
5. Soient $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_n$ des $\pi-$systèmes inclus dans $\mathcal{A}$ et contenant l'élément Ω. On suppose que pour tout $(A_1,\dots,A_n)\in\mathcal{C}_1\times\cdots\times\mathcal{C}_n$,
$$\mathbb{P}\left(A_1\cap\cdots\cap A_n\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right)\times\cdots\times\mathbb{P}\left(A_n\right).$$
Montrer que les tribus $\sigma(\mathcal{C}_1),\dots,\sigma(\mathcal{C}_n)$ sont indépendantes.

Exercice 5 (Marche aléatoire). Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes uniformes sur $\{-1,+1\}$ et soit $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ sa filtration naturelle. On pose $S_0 := 0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$S_n := X_1+\cdots+X_n.$$

1. Vérifier que $\{S_n\}_{n\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable et expliciter son crochet.
2. Pour $a\in\mathbb{Z}$, on note $T_a = \inf\{n\in\mathbb{N}\colon S_n = a\}$. Pour $a,b>0$, calculer $\mathbb{E}[T_{-a}\wedge T_b]$ et $\mathbb{P}\left(T_{-a} < T_b\right)$. En déduire que presque-sûrement, la marche visite tous les sites.

3. Construire une martingale à partir de $e^{\lambda S_n}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 Dans cet exercice on identifie un nombre $x \in [0,1]$ avec son développement en base 2. On appelle motif une suite finie de 0 et de 1 pour un motif m on note $N(m,x,k)$ le nombre de fois que le motif m apparaît dans les k premières décimales de x. On dit que x est un nombre parfait si pour tout motif

$$\lim_{k\to\infty} N(m,x,k)/k = 2^{-|m|},$$

où $|m|$ est la longueur de m. Montrer qu'il existe un nombre parfait.

Exercice 7 (Implication et contre exemple) Rappeler le tableau d'implication entre convergence L^p pour $p \geq 1$, convergence en probabilité, convergence en loi et convergence ps. Pour chaque implication fausse, donner un contre exemple.

Exercice 8 (Espérance conditionnelle) Soit X une variable aléatoire réelle intégrable et de densité f strictement positive sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\mathbb{E}(X \mid |X|)$.

Exercice 9 (Hoeffding-Azuma)Soit (X_n) une martingale. On suppose qu'il existe un c tel que $\mathbb{P}$-presque sûrement, pour tout n, $|X_{n+1} - X_n| \leq c$. On pose $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ et $\xi_n = X_n - X_{n-1}$.

1. Montrer que pour tout t,
$$\mathbb{E}[e^{tX_n}] = \mathbb{E}[e^{tX_{n-1}}\mathbb{E}[e^{t\xi_n}|\mathscr{F}_{n-1}]].$$
2. Montrer que $\mathbb{E}[e^{t\xi_n}|\mathscr{F}_{n-1}]] \leqslant e^{t^2}$.
3. En déduire que $\mathbb{E}[e^{tX_n}] \leqslant e^{nt^2}$ puis que
$$\mathbb{P}(X_n > t\sqrt{n}) \leqslant Ce^{-ct^2}$$