SUITES ALÉATOIRES

Exercice 1 (Convergences). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes, de paramètres respectifs $(p_n)_{n\geq 1}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

1. $X_n \to 0$ presque-sûrement lorsque $n \to \infty$;
2. $X_n \to 0$ en probabilité lorsque $n \to \infty$;
3. $X_n \to 0$ dans L^p lorsque $n \to \infty$, où $p \geq 1$ est un nombre donné;
4. $nX_n \to 0$ presque-sûrement lorsque $n \to \infty$;
5. $nX_n \to 0$ en probabilité lorsque $n \to \infty$;
6. $nX_n \to 0$ dans L^p lorsque $n \to \infty$, où $p \geq 1$ est un nombre donné.

Exercice 2 (Concentration). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables dans L^2, d'espérances $(\mu_n)_{n\geq 1}$ et de variances $(\sigma_n^2)_{n\geq 1}$. On suppose que $\mu_n \neq 0$ et que $\sigma_n/\mu_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que

$$\frac{X_n}{\mu_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1.$$

Exercice 3 (Collectionneur). Chaque œuf en chocolat contient une surprise choisie au hasard et uniformément parmi n surprises possibles, indépendamment des autres œufs. Un enfant décide de manger les œufs un à un, jusqu'à ce qu'il ait récolté un exemplaire de chacune des n surprises possibles. On cherche à estimer le nombre T_n d'œufs qu'il lui faudra manger.

1. Montrer que T_n est la somme de n variables géométriques indépendantes.
2. En déduire l'espérance et la variance de T_n.
3. Conclure que $\frac{T_n}{n \ln n} \to 1$ lorsque $n \to \infty$, en un sens que l'on précisera.

Exercice 4 (Records). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. de fonction de répartition F, et

$$\alpha := \inf\{t \in \mathbb{R} \colon F(t) > 0\} \in [-\infty, +\infty) \quad \text{et} \quad \beta := \sup\{t \in \mathbb{R} \colon F(t) < 1\} \in (-\infty, +\infty].$$

Montrer que presque-sûrement, $\liminf_{n\to\infty} X_n = \alpha$ et $\limsup_{n\to\infty} X_n = \beta$.

Exercice 5 (Maximum d'exponentielles). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$. On cherche à établir que

$$Z_n := \frac{\max\{X_1, \dots, X_n\}}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 1.$$

1. Vérifier que la convergence a lieu en probabilité lorsque $n \to \infty$.
2. Montrer que presque-sûrement, $\liminf_{n\to\infty} Z_n \geq 1$.
3. Montrer que presque-sûrement $Z_{2^k} \to 1$ lorsque $k \to \infty$, puis conclure.

Exercice 6 (Maximum de gaussiennes). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On veut montrer que

$$\frac{\max\{X_1,\ldots,X_n\}}{\sqrt{2\ln n}} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 1.$$

1. Montrer que pour tout $x>0$, $\frac{f(x)}{x+x^{-1}} \leq \mathbb{P}(X_1 > x) \leq \frac{f(x)}{x}$, où $f(x)$ est la densité de $\mathcal{N}(0,1)$.
2. Conclure à l'aide d'une approche similaire à celle de l'exercice précédent.

Exercice 7 (Pas de loi des grands nombres sans moment). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables i.i.d.

1. Montrer que $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n| \geq n\}\right)$ vaut 0 ou 1 selon que X_1 est intégrable ou non.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombre réels telle que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k\right)_{n\geq 1}$ soit convergente dans $\mathbb{R}$. Montrer que nécessairement, $\frac{u_n}{n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
3. Déduire des deux questions précédentes que si X_1 n'est pas intégrable, alors la probabilité pour que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right)_{n\geq 1}$ soit convergente dans $\mathbb{R}$ est nulle.

Exercice 8 (Processus de Poisson). Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$. On pose $T_0 := 0$ et $T_n := X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$. Enfin, on fixe $\lambda > 0$ et on pose

$$N \quad := \quad \max\{n \geq 0 \colon T_n \leq \lambda\}.$$

1. Justifier que $N < \infty$ presque-sûrement.
2. Montrer que pour $n \geq 1$, le vecteur $(T_1,\ldots,T_n)$ admet une densité que l'on déterminera.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire N.
4. Pour $n \geq 1$, déterminer la loi conditionnelle de $(T_1,\ldots,T_n)$ sachant $\{N = n\}$.

Exercice 9 (Filtre à poissons). Soit $p \in [0,1], \lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, et soit N une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$. On pose

$$X := \sum_{k=1}^N X_k \quad \text{et} \quad Y := \sum_{k=1}^N (1 - X_k).$$

Montrer que les variables X et Y sont indépendantes et déterminer leurs lois.

Exercice 10 (Récurrence/transience). Soit $p \in [0,1]$, et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$. On pose $S_0 := 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n.$$

On s'intéresse à $Z := \sum_{n=0}^\infty \mathbf{1}_{(S_n = 0)}$, le nombre de visites en zéro du processus $(S_n)_{n\geq 0}$.

1. Donner la loi de S_n pour $n \geq 0$, et trouver le comportement de $\mathbb{P}(S_n = 0)$ lorsque $n \to \infty$.
2. En déduire que si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(Z < \infty) = 1$. Pouvait-on le prévoir sans faire de calcul ?
3. On pose $A_n := \{S_n = 0\} \cap \bigcap_{k \geq n+1} \{S_k \neq 0\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(Z < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(S_n = 0)\mathbb{P}(A_0).$$

4. En déduire que si $p = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(Z < \infty) = 0$.