> #Лабораторная работа 2
#Операции с математическими выражениями
#Выполнила Литвинова Таисия Андреевна, гр. 353504
#Вариант 1

> #Задание 1

> #Получить разложение в тригонометрический ряд Фурье.

> #Создать пользовательскую функцию, которая осуществляет построение триг. ряда Фурье.

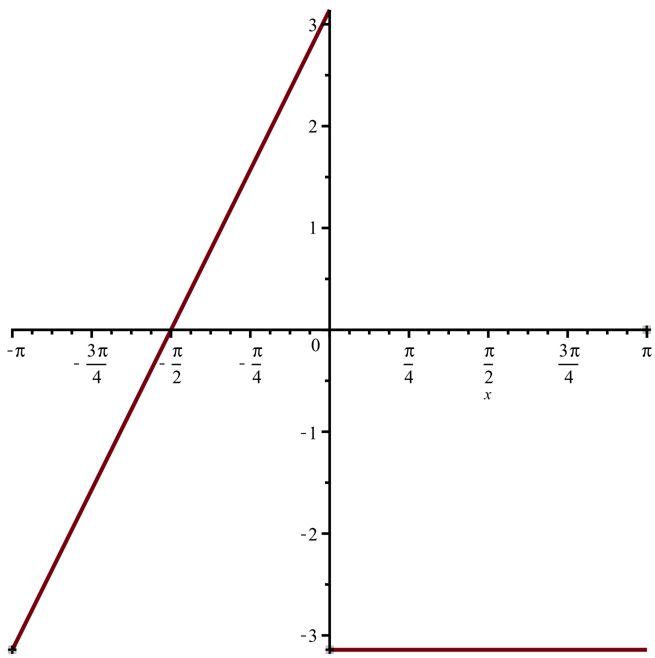
> #Построить в одной системе координат графики частичных сумм ряда и его суммы.

>

> $f := x \to piecewise(-Pi \le x < 0, Pi + 2x, 0 \le x < Pi, -Pi)$

$$f := x \mapsto \begin{cases} \pi + 2 \cdot x & -\pi \le x < 0 \\ -\pi & 0 \le x < \pi \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

> $plot(f(x), x = -Pi..Pi, discont = true)$



> #Коэффициенты ряда Фурье

> $a0 := simplify\left(\frac{1}{Pi} int(f(x), x = -Pi..Pi)\right) assuming\ n :: posint;$

$$a0 := -\pi \quad \textbf{(2)}$$

> $an := simplify\left(\frac{1}{Pi} int(f(x) \cdot cos(n \cdot x), x = -Pi..Pi)\right) assuming\ n :: posint;$

$$an := \frac{-2(-1)^n + 2}{\pi n^2} \quad \textbf{(3)}$$

> $bn := simplify\left(\frac{1}{Pi} int(f(x) \cdot sin(n \cdot x), x = -Pi..Pi)\right) assuming\ n :: posint;$

$$bn := -\frac{2}{n} \quad (4)$$

```
> #Создание пользовательской функции для построения тригонометрического ряда Фурье
> FourierSeries :=proc(f, k)
  local a0, an, bn, n;
   a0 := simplify(int(f(x), x = -π..π) / π);
   assume(n :: posint);
   an := simplify(int(f(x)·cos(n·x), x = -π..π) / π);
   bn := simplify(int(f(x)·sin(n·x), x = -π..π) / π);
   return 1/2·a0 + sum(an·cos(n·x) + bn·sin(n·x), n = 1..k)
   end proc
```

```
FourierSeries := proc(f, k)                                                    (5)
    local a0, an, bn, n;
    a0 := simplify(int(f(x), x = -Pi..Pi)/Pi);
    assume(n::posint);
    an := simplify(int(f(x)*cos(n*x), x = -Pi..Pi)/Pi);
    bn := simplify(int(f(x)*sin(n*x), x = -Pi..Pi)/Pi);
    return 1/2*a0 + sum(an*cos(n*x) + bn*sin(n*x), n = 1..k)
end proc
```

```
>  S1 = FourierSeries(f, 1);
```

$$S1 = -\frac{\pi}{2} + \frac{4\cos(x)}{\pi} - 2\sin(x) \quad (6)$$

```
> S3 = FourierSeries(f, 3);
```

$$S3 = -\frac{\pi}{2} + \frac{4\cos(x)}{\pi} - 2\sin(x) - \sin(2x) + \frac{4\cos(3x)}{9\pi} - \frac{2\sin(3x)}{3} \quad (7)$$

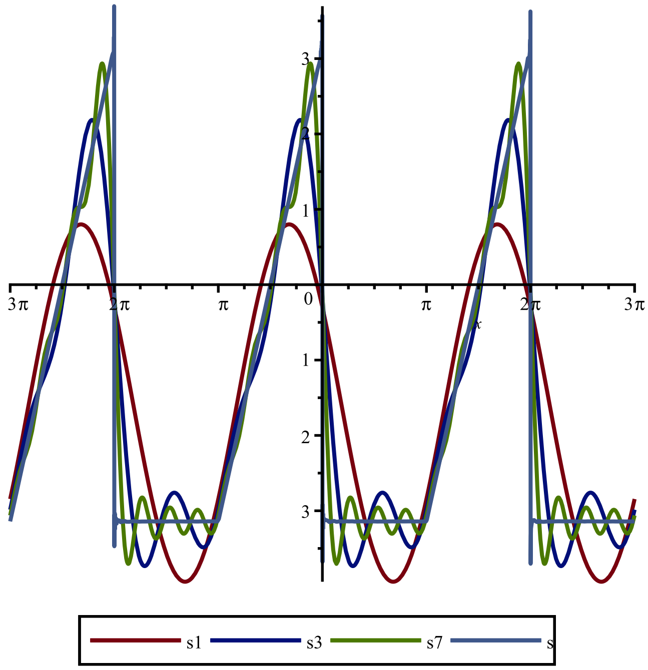
```
> S7 = FourierSeries(f, 7);
```

$$S7 = -\frac{\pi}{2} + \frac{4\cos(x)}{\pi} - 2\sin(x) - \sin(2x) + \frac{4\cos(3x)}{9\pi} - \frac{2\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{2} + \frac{4\cos(5x)}{25\pi} - \frac{2\sin(5x)}{5} - \frac{\sin(6x)}{3} + \frac{4\cos(7x)}{49\pi} - \frac{2\sin(7x)}{7} \quad (8)$$

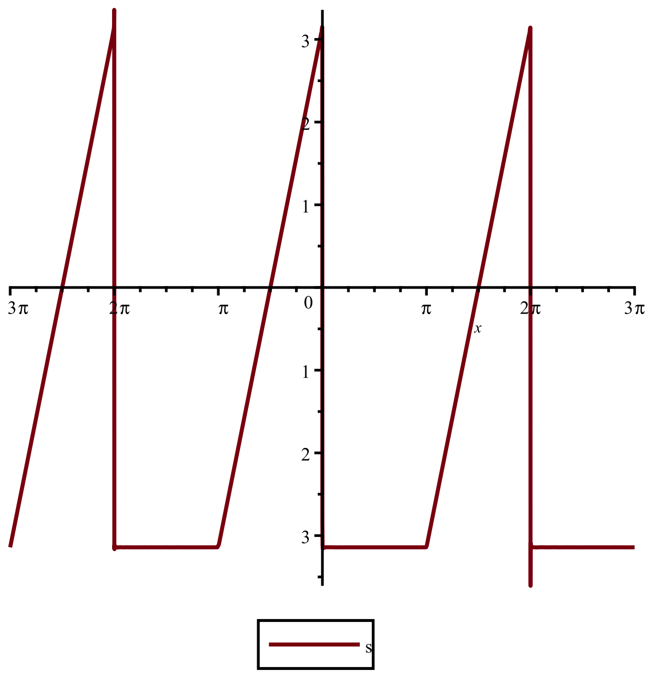
```
>  S = FourierSeries(f, infinity);
```

$$S = -\frac{\pi}{2} + \sum_{n\sim=1}^{\infty}\left(\frac{\left(-2\,(-1)^{n\sim} + 2\right)\cos(n\sim x)}{n\sim^2\,\pi} - \frac{2\sin(n\sim x)}{n\sim}\right) \quad (9)$$

```
> plot([FourierSeries(f, 1), FourierSeries(f, 3), FourierSeries(f, 7), FourierSeries(f, 1000)], x =
     -3 Pi..3 Pi, legend = ["s1", "s3", "s7", "s"], discont = true)
```

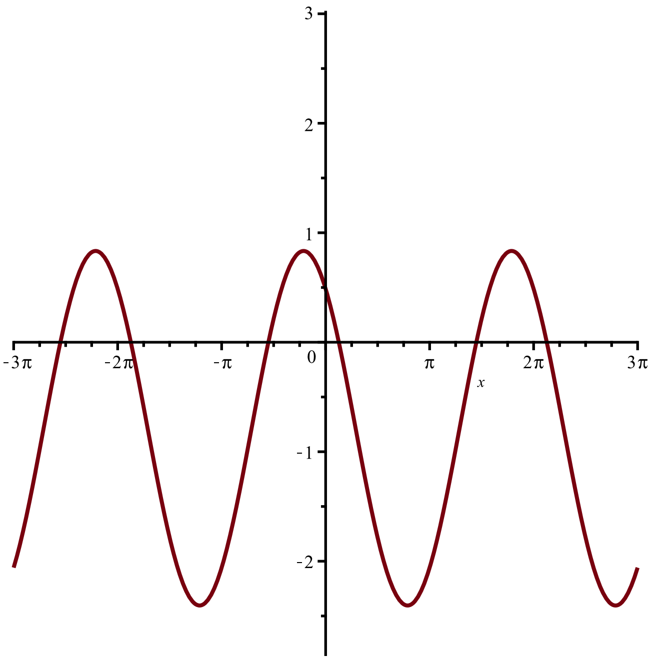


> *plot*(*FourierSeries*(*f*, *10000*), *x* =   3 *Pi*..3 *Pi*, *legend* = [*"s"*], *discont* = *true*)



> *#Анимировать процесс построения графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра порядковый номер частичной суммы.*

```
> with( plots ) :
  for i from 1 to 10 do
  Ris[ i ] := plot( [ FourierSeries( f, i ) ], x =   3 · Pi..3 ·Pi ) :
  end do:
  display( [ seq(Ris[ i ], i = 1 ..10 ) ], insequence = true);
```



>

> #Задание 2
restart;

> #Разложите в ряд Фурье x2 -периодическую функцию y=f(x),
#заданную на промежутке (0, x1) формулой y=ax+b, а на [x1 , x2] - y = c.
#Модифицировать процедуру

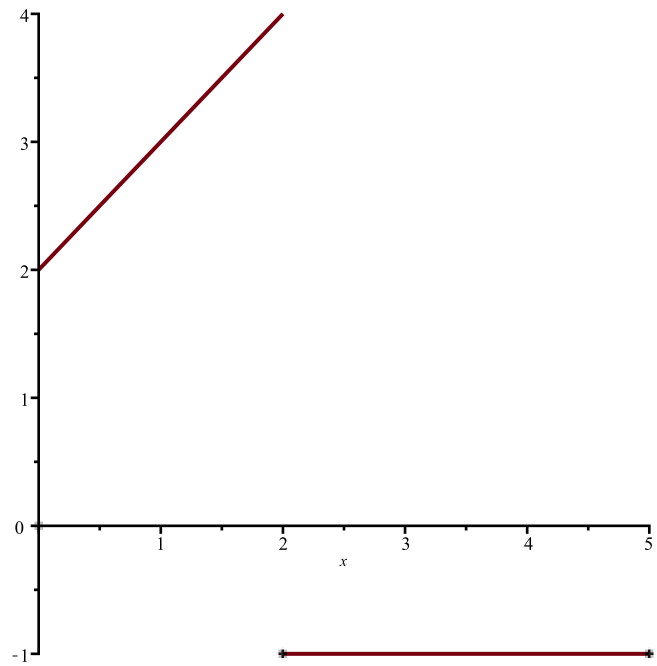
#Построить в одной системе координат графики частичных сумм S1(x), S3(x), S7(x) ряда и его суммы S(x)
#на промежутке [-2 x2 , 2 x2]
. Сравнить полученный результат с графиком порождающей функции на главном периоде.

#Анимировать процесс построения графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра порядковый номер частичной суммы.

> $f := x \rightarrow piecewise(0 < x < 2, x + 2, 2 \le x \le 5, -1);$

$$f := x \mapsto \begin{cases} x+2 & 0 < x < 2 \\ -1 & 2 \le x \le 5 \end{cases} \tag{10}$$

> $plot(f(x), x = 0..5, discont = true)$



>

> #Половина периода. Коэффициенты Фурье.

> $l := \frac{5}{2}$:

> $a0 := simplify\left(\frac{1}{l} \cdot int(f(x), x = 0..2 \cdot l)\right);$

$$a0 := \frac{6}{5} \tag{11}$$

> $an := simplify\left(\frac{1}{l} \cdot int\left(f(x) \cdot cos\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{l}\right), x = 0..2 \cdot l\right)\right) assuming\ n :: posint$

$$an := \frac{5\left(2\pi n \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) - 1\right)}{2\pi^2 n^2} \tag{12}$$

> $bn := simplify\left(\frac{1}{l} \cdot int\left(f(x) \cdot sin\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{l}\right), x = 0..2 \cdot l\right)\right) assuming\ n :: posint$

$$bn := \frac{-10 n \pi \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + 6\pi n + 5 \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right)}{2 n^2 \pi^2} \tag{13}$$

>

> #Модифицированная процедура

> New_FourierSeries :=**proc**(f, k, x1, x2)

local a0, an, bn, n, l;

$l := \frac{1}{2} \cdot x2 - \frac{1}{2} \cdot x1;$

$a0 := simplify\left(\frac{int(f(x), x = 0..2 \cdot l)}{l}\right);$

$assume(n :: posint);$

$$an := simplify\left(\frac{int\left(f(x)\cdot cos\left(\frac{Pi\cdot n\cdot x}{l}\right), x=0..2\cdot l\right)}{l}\right);$$

$$bn := simplify\left(\frac{int\left(f(x)\cdot sin\left(\frac{Pi\cdot n\cdot x}{l}\right), x=0..2\cdot l\right)}{l}\right);$$

$$\textbf{return}\ \frac{1}{2}\cdot a0 + sum\left(an\cdot cos\left(\frac{Pi\cdot n\cdot x}{l}\right) + bn\cdot sin\left(\frac{Pi\cdot n\cdot x}{l}\right), n=1..k\right)$$

end proc

```
New_FourierSeries := proc(f, k, x1, x2)                                          (14)
    local a0, an, bn, n, l;
    l := 1/2*x2 - 1/2*x1;
    a0 := simplify(int(f(x), x=0..2*l)/l);
    assume(n::posint);
    an := simplify(int(f(x)*cos(Pi*n*x/l), x=0..2*l)/l);
    bn := simplify(int(f(x)*sin(Pi*n*x/l), x=0..2*l)/l);
    return 1/2*a0 + sum(an*cos(Pi*n*x/l) + bn*sin(Pi*n*x/l), n=1..k)
end proc
```

> $S1 = FourierSeries(f, 1);$

$$S1 = \frac{8-\pi}{2\pi} + \frac{(5\sin(2)+\cos(2)-1)\cos(x)}{\pi} + \frac{(-5\cos(2)+1+\sin(2))\sin(x)}{\pi} \tag{15}$$

> $S3 = FourierSeries(f, 3);$

$$S3 = \frac{8-\pi}{2\pi} + \frac{(5\sin(2)+\cos(2)-1)\cos(x)}{\pi} + \frac{(-5\cos(2)+1+\sin(2))\sin(x)}{\pi} + \frac{(10\sin(4)+\cos(4)-1)\cos(2x)}{4\pi} + \frac{(-10\cos(4)+6+\sin(4))\sin(2x)}{4\pi} + \frac{(15\sin(6)+\cos(6)-1)\cos(3x)}{9\pi} + \frac{(-15\cos(6)+3+\sin(6))\sin(3x)}{9\pi} \tag{16}$$

> $S7 = FourierSeries(f, 7);$

$$S7 = \frac{8-\pi}{2\pi} + \frac{(5\sin(2)+\cos(2)-1)\cos(x)}{\pi} + \frac{(-5\cos(2)+1+\sin(2))\sin(x)}{\pi} + \frac{(10\sin(4)+\cos(4)-1)\cos(2x)}{4\pi} + \frac{(-10\cos(4)+6+\sin(4))\sin(2x)}{4\pi} + \frac{(15\sin(6)+\cos(6)-1)\cos(3x)}{9\pi} + \frac{(-15\cos(6)+3+\sin(6))\sin(3x)}{9\pi} + \frac{(20\sin(8)+\cos(8)-1)\cos(4x)}{16\pi} + \frac{(12-20\cos(8)+\sin(8))\sin(4x)}{16\pi} \tag{17}$$

$$+\frac{(25\sin(10)+\cos(10)-1)\cos(5x)}{25\pi}+\frac{(5-25\cos(10)+\sin(10))\sin(5x)}{25\pi}$$

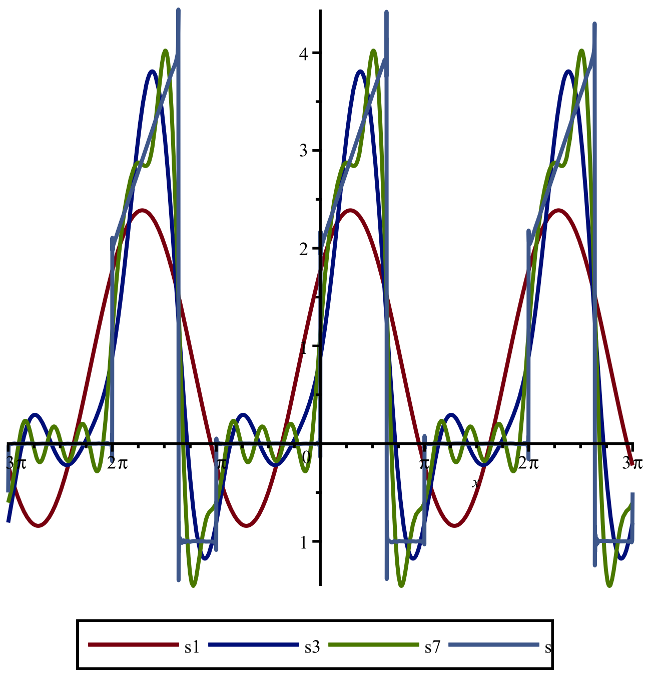
$$+\frac{(30\sin(12)+\cos(12)-1)\cos(6x)}{36\pi}+\frac{(18-30\cos(12)+\sin(12))\sin(6x)}{36\pi}$$

$$+\frac{(35\sin(14)+\cos(14)-1)\cos(7x)}{49\pi}+\frac{(7-35\cos(14)+\sin(14))\sin(7x)}{49\pi}$$

> *S = FourierSeries(f, infinity);*

$$S=\frac{8-\pi}{2\pi}+\sum_{n\sim=1}^{\infty}\left(\frac{(5\,n\sim\sin(2\,n\sim)+\cos(2\,n\sim)-1)\cos(n\sim x)}{\pi\,n\sim^{2}}+\frac{\left(-5\,n\sim\cos(2\,n\sim)+(-1)^{n\sim}\,n\sim+\sin(2\,n\sim)+2\,n\sim\right)\sin(n\sim x)}{\pi\,n\sim^{2}}\right) \quad \textbf{(18)}$$

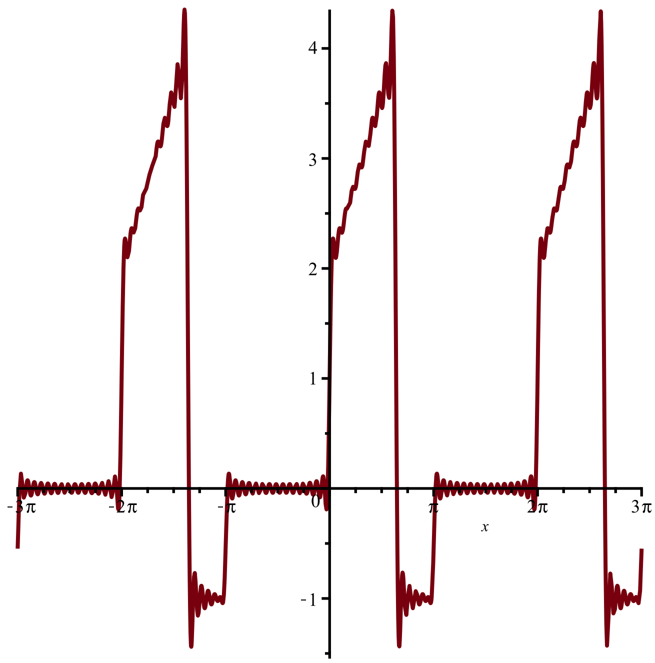
> *plot([FourierSeries(f, 1), FourierSeries(f, 3), FourierSeries(f, 7), FourierSeries(f, 1000)], x = -3 Pi..3 Pi, legend = ["s1", "s3", "s7", "s"], discont = true)*



>

> *#Анимировать процесс построения графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра порядковый номер частичной суммы.*

> *with(plots) :*
for *i* ***from*** *1* ***to*** *30* ***do***
Ris[i] := plot([FourierSeries(f, i)], x = 3 · Pi..3 ·Pi) :
end do*:*
display([seq(Ris[i], i = 1 ..30)], insequence = true);



> #Задание 3
restart;

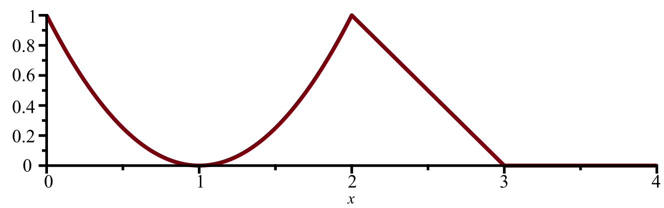
> # Для графически заданной на промежутке функции как комбинации квадратичной и линейной постройте три разложения в тригонометрический ряд Фурье, считая, что функция определена:
#— на полном периоде;
#— на полупериоде (является четной);
#— на полупериоде (является нечетной).
#Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple.

#Постройте графики сумм полученных рядов на промежутке, превышающем длину заданного в 3 раза. Сравните с графиками порождающих их функций.

> $f := x \rightarrow piecewise\left(0 \le x \le 2,\ (x-1)^2,\ 2 < x < 3,\ (3-x)\right);$

$$f := x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 & 0 \le x \le 2 \\ 3-x & 2 < x < 3 \end{cases} \tag{19}$$

> $plot(f(x),\ x = 0..4,\ scaling = constrained)$



> $l := \frac{3}{2}$

$$l := \frac{3}{2} \tag{20}$$

> $a0 := simplify\left(\frac{1}{l} \cdot int(f(x), x = 0..2 \cdot l)\right);$

$$a0 := \frac{7}{9} \tag{21}$$

>

> $an := simplify\left(\frac{1}{l} \cdot int\left(f(x) \cdot cos\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{l}\right), x = 0..2 \cdot l\right)\right) assuming\ n :: posint$

$$an := \frac{9\,\pi\,n \cos\left(\frac{4\,\pi\,n}{3}\right) + 3\,\pi\,n - 9 \sin\left(\frac{4\,\pi\,n}{3}\right)}{2\,\pi^3\,n^3} \tag{22}$$

> $bn := simplify\left(\frac{1}{l} \cdot int\left(f(x) \cdot sin\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{l}\right), x = 0..2 \cdot l\right)\right) assuming\ n :: posint$

$$bn := \frac{2\,\pi^2\,n^2 + 9\,\pi\,n \sin\left(\frac{4\,\pi\,n}{3}\right) + 9 \cos\left(\frac{4\,\pi\,n}{3}\right) - 9}{2\,\pi^3\,n^3} \tag{23}$$

> $S := k \rightarrow \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\left(an \cdot cos\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{l}\right) + bn \cdot sin\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{l}\right)\right):$

> $S1 = FourierSeries(f, 1);$

$$S1 = \frac{7}{12\,\pi} + \frac{\left(-4 \cos(1)^3 + 6 \cos(1)^2 + (3 - 4 \sin(1)) \cos(1) - 1\right) \cos(x)}{\pi} \tag{24}$$

$$+\frac{\left(\left(-4\sin(1)+4\right)\cos(1)^2+6\cos(1)\sin(1)-3+\sin(1)\right)\sin(x)}{\pi}$$

> $S3 = FourierSeries(f, 3)$

$$S3=\frac{7}{12\,\pi}+\frac{\left(-4\cos(1)^3+6\cos(1)^2+\left(3-4\sin(1)\right)\cos(1)-1\right)\cos(x)}{\pi}$$
$$+\frac{\left(\left(-4\sin(1)+4\right)\cos(1)^2+6\cos(1)\sin(1)-3+\sin(1)\right)\sin(x)}{\pi}$$
$$+\frac{\left(-8\cos(2)^3+12\cos(2)^2+\left(6-4\sin(2)\right)\cos(2)-2\right)\cos(2\,x)}{8\,\pi}$$
$$+\frac{\left(\left(-8\sin(2)+4\right)\cos(2)^2+12\sin(2)\cos(2)+2\sin(2)\right)\sin(2\,x)}{8\,\pi}$$
$$+\frac{\left(-12\cos(3)^3+18\cos(3)^2+\left(9-4\sin(3)\right)\cos(3)-3\right)\cos(3\,x)}{27\,\pi}$$
$$+\frac{\left(\left(-12\sin(3)+4\right)\cos(3)^2+18\sin(3)\cos(3)+5+3\sin(3)\right)\sin(3\,x)}{27\,\pi} \quad \textbf{(25)}$$

> $S7 = FourierSeries(f, 7);$

$$S7=\frac{7}{12\,\pi}+\frac{\left(-4\cos(1)^3+6\cos(1)^2+\left(3-4\sin(1)\right)\cos(1)-1\right)\cos(x)}{\pi}$$
$$+\frac{\left(\left(-4\sin(1)+4\right)\cos(1)^2+6\cos(1)\sin(1)-3+\sin(1)\right)\sin(x)}{\pi}$$
$$+\frac{\left(-8\cos(2)^3+12\cos(2)^2+\left(6-4\sin(2)\right)\cos(2)-2\right)\cos(2\,x)}{8\,\pi}$$
$$+\frac{\left(\left(-8\sin(2)+4\right)\cos(2)^2+12\sin(2)\cos(2)+2\sin(2)\right)\sin(2\,x)}{8\,\pi}$$
$$+\frac{\left(-12\cos(3)^3+18\cos(3)^2+\left(9-4\sin(3)\right)\cos(3)-3\right)\cos(3\,x)}{27\,\pi}$$
$$+\frac{\left(\left(-12\sin(3)+4\right)\cos(3)^2+18\sin(3)\cos(3)+5+3\sin(3)\right)\sin(3\,x)}{27\,\pi}$$
$$+\frac{\left(-16\cos(4)^3+24\cos(4)^2+\left(12-4\sin(4)\right)\cos(4)-4\right)\cos(4\,x)}{64\,\pi}$$
$$+\frac{\left(\left(-16\sin(4)+4\right)\cos(4)^2+24\sin(4)\cos(4)+12+4\sin(4)\right)\sin(4\,x)}{64\,\pi}$$
$$+\frac{\left(-20\cos(5)^3+30\cos(5)^2+\left(15-4\sin(5)\right)\cos(5)-5\right)\cos(5\,x)}{125\,\pi} \quad \textbf{(26)}$$

$$+\frac{\left(\left(-20\sin(5)+4\right)\cos(5)^2+30\sin(5)\cos(5)+21+5\sin(5)\right)\sin(5x)}{125\pi}$$

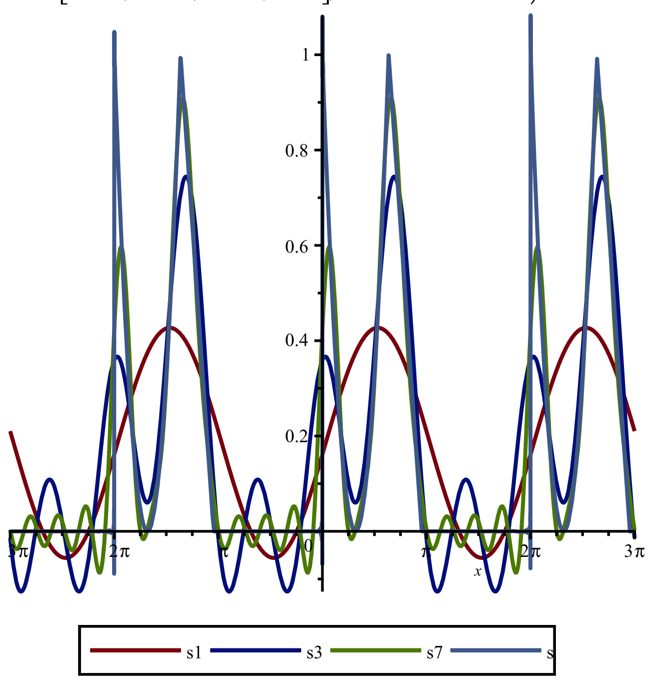
$$+\frac{\left(-24\cos(6)^3+36\cos(6)^2+\left(18-4\sin(6)\right)\cos(6)-6\right)\cos(6x)}{216\pi}$$

$$+\frac{\left(\left(-24\sin(6)+4\right)\cos(6)^2+36\sin(6)\cos(6)+32+6\sin(6)\right)\sin(6x)}{216\pi}$$

$$+\frac{\left(-28\cos(7)^3+42\cos(7)^2+\left(21-4\sin(7)\right)\cos(7)-7\right)\cos(7x)}{343\pi}$$

$$+\frac{\left(\left(-28\sin(7)+4\right)\cos(7)^2+42\sin(7)\cos(7)+45+7\sin(7)\right)\sin(7x)}{343\pi}$$

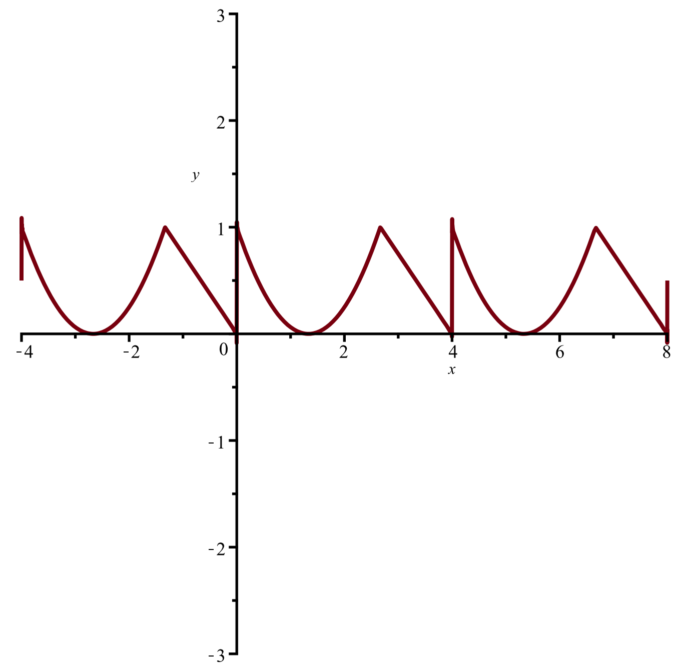
> *plot*([*FourierSeries*(*f*, *1*), *FourierSeries*(*f*, *3*), *FourierSeries*(*f*, *7*), *FourierSeries*(*f*, *1000*)], *x* = -*3 Pi*..*3 Pi*, *legend* = ["*s1*", "*s3*", "*s7*", "*s*"], *discont* = *true*)



>

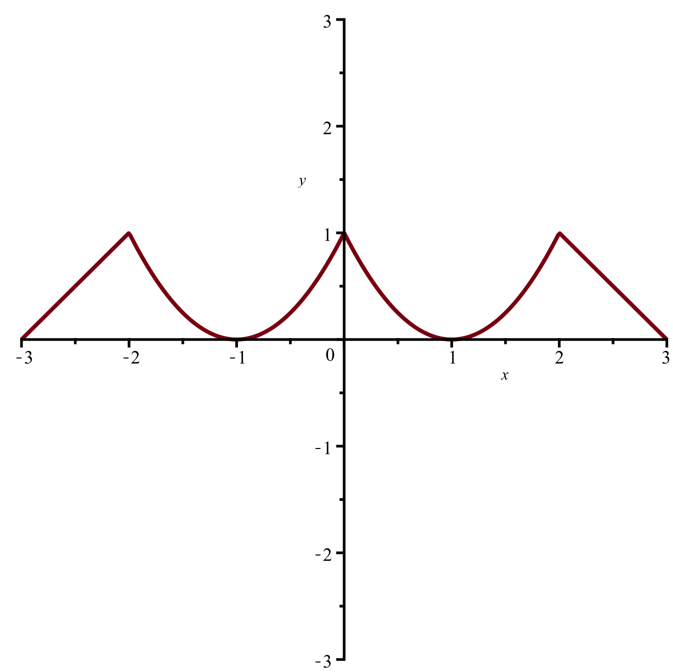
$$>sFullPeriod := k \rightarrow \left(sum\left(an \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{2}\right) + bn \cdot sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{2}\right), n = 1 .. k\right) + \frac{a0}{2}\right):$$

plot(*sFullPeriod*(*1000*), *x* = 4 .. 8, *y* = 3 .. 3, *discont* = *true*);



> # Функция с чётным продолжением
$yChetn := x \rightarrow piecewise\left(-3 \le x < -2, x + 3, -2 \le x < 0, (x + 1)^2, 0 \le x < 2, (x - 1)^2, 2 \le x \le 3, 3 - x \right);$
График функции с четным продолжением
$plot(yChetn(x), x = -3 .. 3, y = -3 .. 3, discont = true);$

$$yChetn := x \mapsto \begin{cases} x + 3 & -3 \le x < -2 \\ (x+1)^2 & -2 \le x < 0 \\ (x-1)^2 & 0 \le x < 2 \\ 3 - x & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$



> # Найдем разложение функции в ряд Фурье, продлив её четным образом

$$a01 := simplify\left(\frac{int(yChetn(x), x = -4..4)}{4}\right);$$

$$a01 := \frac{7}{12} \tag{27}$$

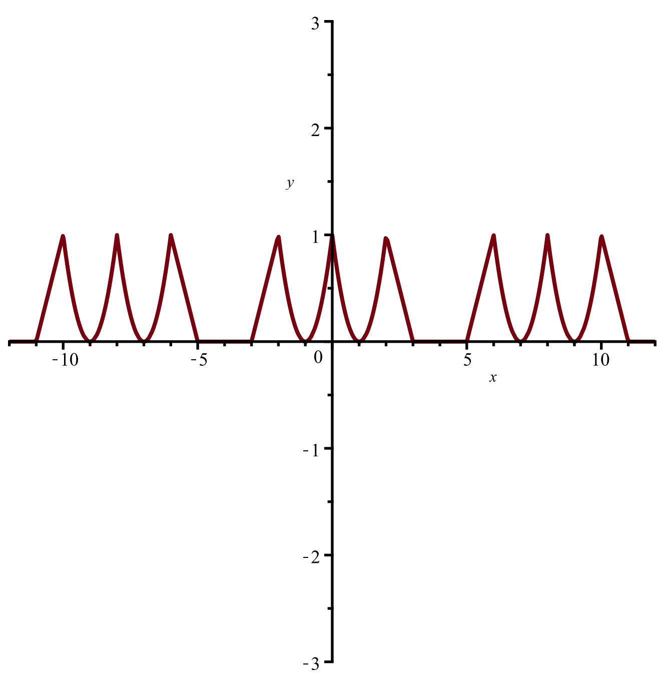
$$>an1 := simplify\left(\frac{int\left(yChetn(x) \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{4}\right), x = -4..4\right)}{4} \text{ assuming } n :: posint\right);$$

$$an1 := \frac{1}{n^3 \pi^3}\left(-32 \pi n \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)^3 + 48 \pi n \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)^2 + \left(24 \pi n - 128 \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) - 8 \pi n\right) \tag{28}$$

> #bChetn = 0 т.к функция четная

$$>sChetn := k \rightarrow \left(sum\left(an1 \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{4}\right), n = 1..k\right) + \frac{a01}{2}\right):$$

$$plot(sChetn(1000), x = -12..12, y = -3..3, discont = true);$$



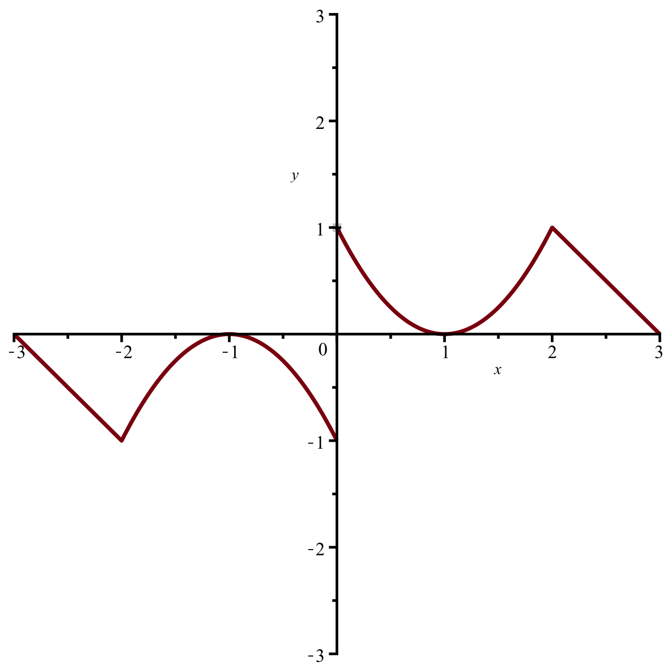
> # Функция с нечётным продолжением

$$yNechetn := x \rightarrow piecewise\big(-3 \le x < -2, -x - 3, -2 \le x < 0, -(x+1)^2, 0 \le x$$

$< 2, (x-1)^2, 2 \le x \le 3, 3-x);$

$plot(\ yNechetn(x), x = -3\,..\,3, y = -3\,..\,3, discont = true);$

$$yNechetn := x \mapsto \begin{cases} -x-3 & -3 \le x < -2 \\ -(x+1)^2 & -2 \le x < 0 \\ (x-1)^2 & 0 \le x < 2 \\ 3-x & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$



> \# Найдем разложение функции в ряд Фурье, продлив её четным образом
 \# a0Nechet = 0
 \# aNechet = 0 т • к функция нечетная

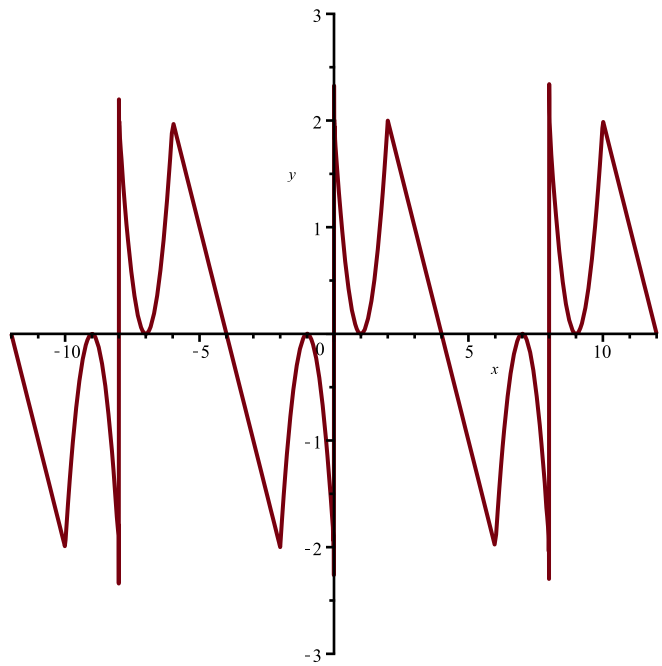
> $bn2 := simplify\left(\dfrac{int\left(y2(x) \cdot sin\left(\dfrac{\pi \cdot n \cdot x}{4}\right), x = -4\,..\,4\right)}{4}\ assuming\ n :: posint\right);$

$$bn2 := \frac{4\,\pi^2 n^2 + 40\,\pi\, n \sin\left(\frac{\pi\, n}{2}\right) + 128 \cos\left(\frac{\pi\, n}{2}\right) - 128}{\pi^3 n^3} \quad \mathbf{(29)}$$

> $sNechet := k \rightarrow sum\left(bn2 \cdot sin\left(\dfrac{\pi \cdot n \cdot x}{4}\right), n = 1\,..\,k\right);$

$$sNechet := k \mapsto \sum_{n=1}^{k} bn2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{4}\right) \quad \mathbf{(30)}$$

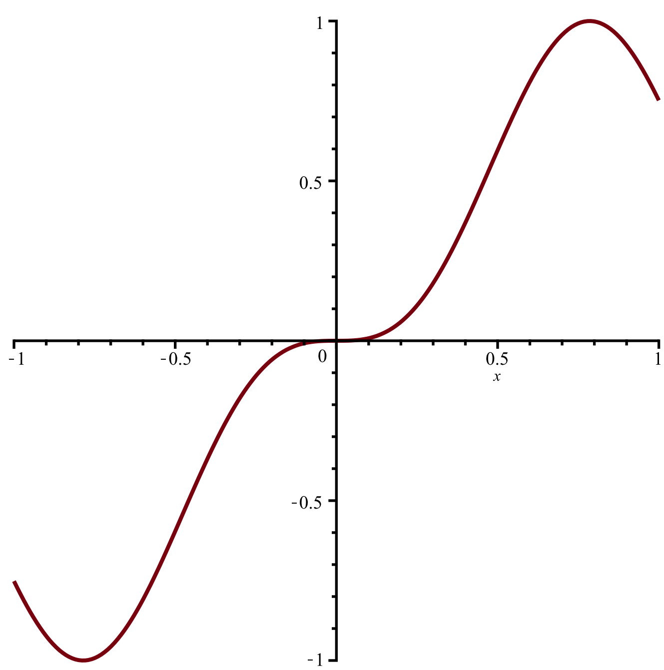
> $plot(sNechet(1000), x = -12\,..\,12, y = -3\,..\,3, discont = true);$



> # Задание 4
restart;

> # 1
$f := x \rightarrow \sin^3(2 \cdot x);$
$plot(f(x), x = -1 .. 1);$

$$f := x \mapsto \sin(2 \cdot x)^3$$



> $with(orthopoly);$

$$[G, H, L, P, T, U] \quad \textbf{(31)}$$

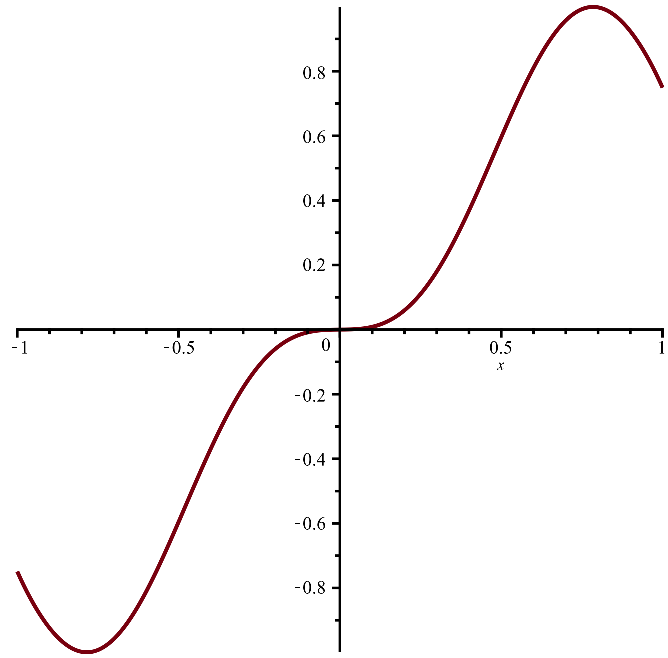
> # Процедура разложения в ряд Фурье по полиномам Лежандра

$Legendre := \textbf{proc}(g)$

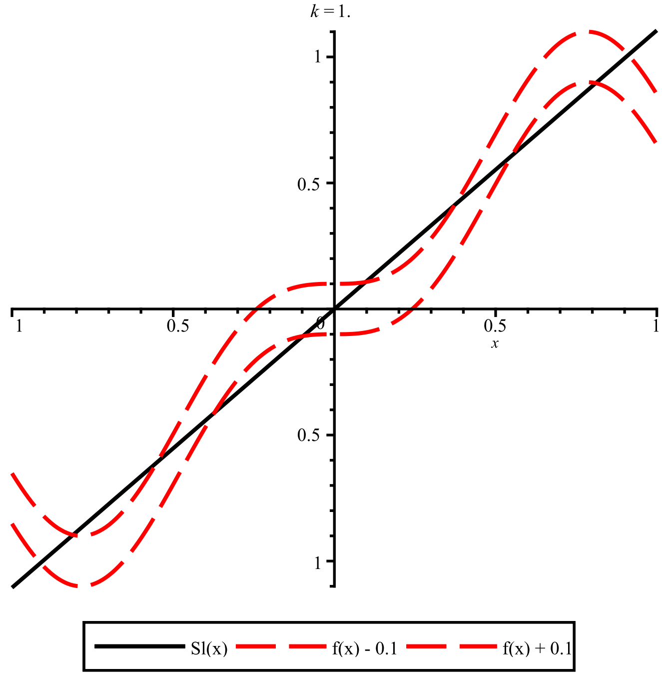
$$\textbf{return}\left(k \to sum\left(\frac{int(g(x) \cdot P(n,x), x = -1\,..\,1)}{int\left(P^2(n,x), x = -1\,..\,1\right)} \cdot P(n,x), n = 0\,..\,k\right)\right);$$

***end proc**:*

> *# График разложения функции в ряд Фурье по полиномам Лежандра*
> $Sl := Legendre(f)$:
> $plot(Sl(10), x = -1\,..\,1);$



> *# Анимация графиков разложения*
> $plots[animate](plot, [[Sl(k), f(x) - 0.1, f(x) + 0.1], x = -1\,..\,1, legend = [$"Sl(x)", "f(x) - 0.1", "f(x) + 0.1"$], color = [black, red, red], linestyle = [1, 3, 3]], k = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]);$



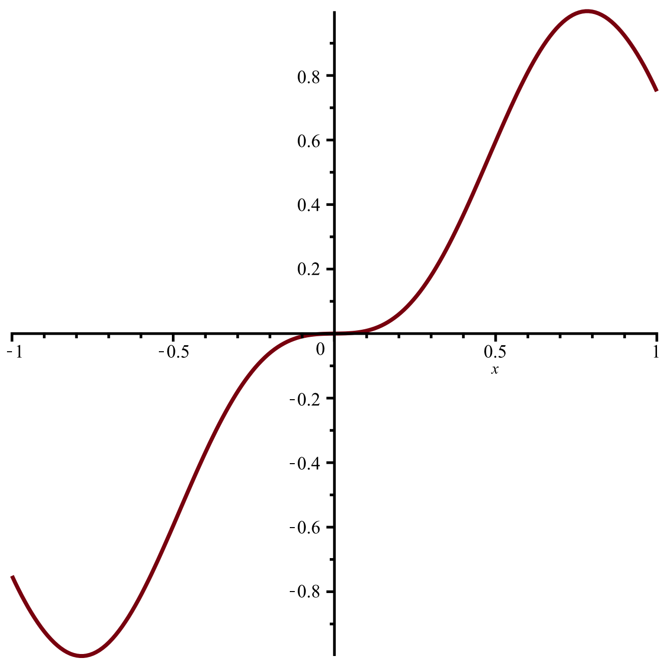
> *# Процедура разложения* в *ряд Фурье по полиномам Чебышева*

> $Chebyshev := \mathbf{proc}(y)$

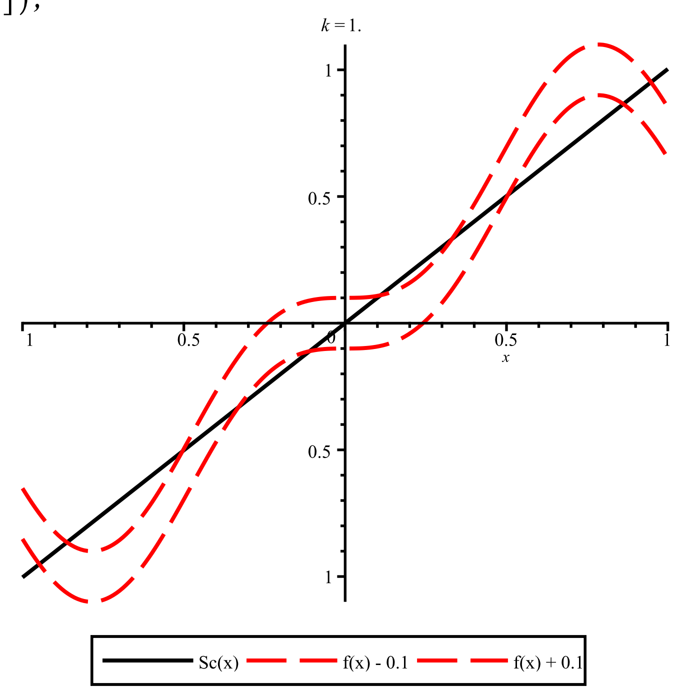
$$\mathbf{return}\left(k \rightarrow \left(sum\left(\frac{int\left(\frac{y(x)\ \cdot T(J,x)}{\sqrt{1 \quad x^2}}, x = \quad 1\,..\,1\right)}{int\left(\frac{T^2(J,x)}{\sqrt{1 \quad x^2}}, x = \quad 1\,..\,1\right)} \cdot T(J,x), J = 0\,..\,k\right)\right)\right);$$

end proc:

> *# График разложения функции в ряд Фурье по полиномам Чебышева*
$Sc := Chebyshev(f)\ :$
$plot(Sc(10), x = \quad 1\,..\,1);$



> # Анимация графиков разложения
plots[animate](plot, [[Sc(k), f(x) - 0.1, f(x) + 0.1], x = -1 .. 1, legend = ["Sc(x)", "f(x) - 0.1", "f(x) + 0.1"], linestyle = [1, 3, 3], color = [black, red, red]], k = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]);



> # Разложим функцию в тригономический ряд Фурье
#функция нечетная
a0, a = 0

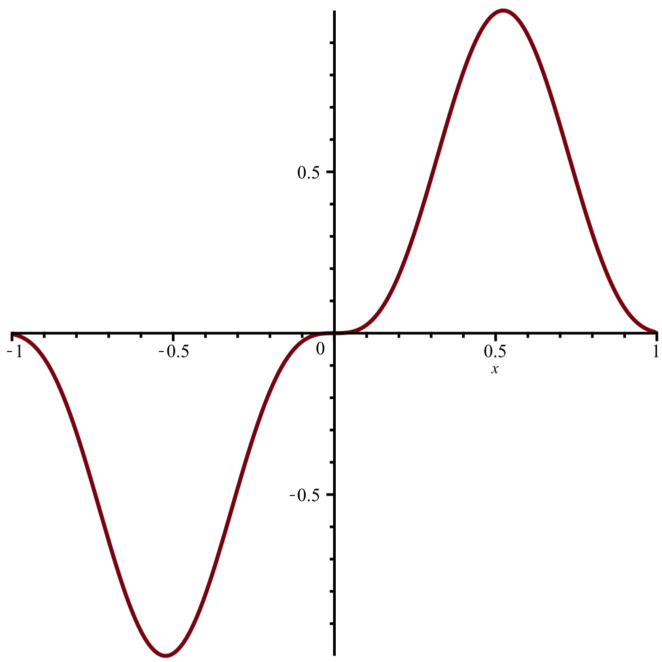
> $g := x \to 1 \cdot \sin^3(3 \cdot x)$:

> $b := simplify\left(2 \cdot int\left(g(x) \cdot \sin(\pi \cdot m \cdot x), x = 0 .. 1\right) \text{ assuming } m :: posint\right);$

$$b := -\frac{3\left(\pi^2 \sin(3)\, m^2 - \frac{\pi^2 \sin(9)\, m^2}{3} - 81 \sin(3) + 3 \sin(9)\right) \pi\, m\, (-1)^m}{2\, \pi^4 m^4 - 180\, \pi^2 m^2 + 1458} \quad \textbf{(32)}$$

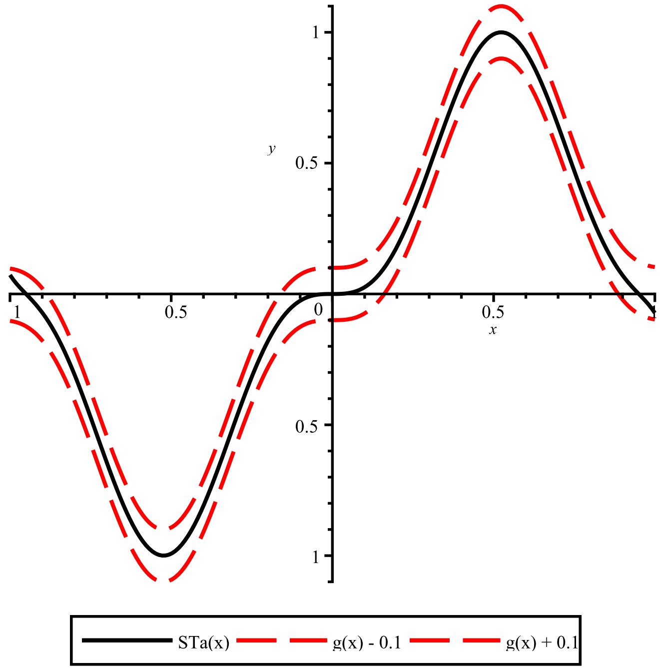
```
> St := k → (sum(b · sin(π · m · x), m = 1 .. k));
  plot(St(1000), x = -1 .. 1);
```

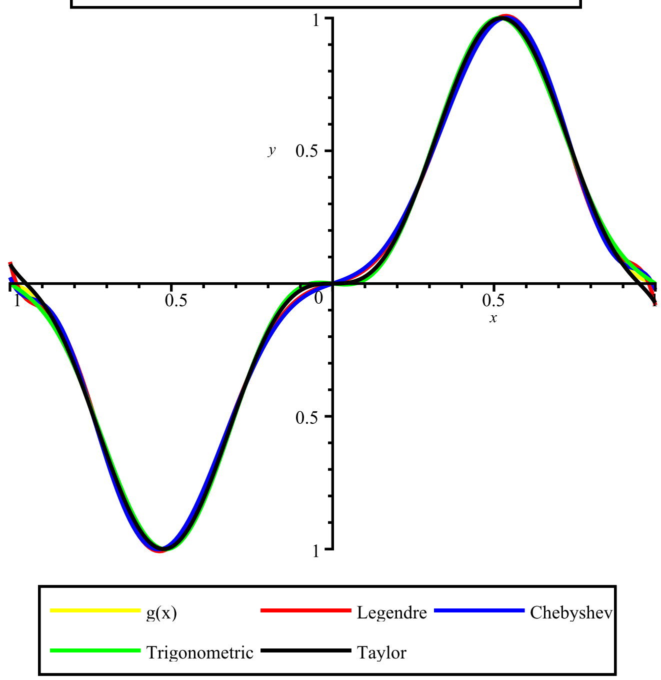
$$St := k \mapsto \sum_{m=1}^{k} b \cdot \sin(\pi \cdot m \cdot x)$$




```
> STa := k → (convert(taylor(g(x), x = 0, k), polynom));
  plot([STa(22), g(x) - 0.1, g(x) + 0.1], x = -1 .. 1, y = -1.1 .. 1.1, legend = ["STa(x)",
      "g(x) - 0.1", "g(x) + 0.1"], linestyle = [1, 3, 3], color = [black, red, red]);
  SLeg := Legendre(g) :
  SCheb := Chebyshev(g) :
  # Все разложения функции
  plot([g(x), SLeg(9), SCheb(9), St(3), STa(22)], x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, legend
     = ["g(x)", "Legendre", "Chebyshev", "Trigonometric", "Taylor"], color = [yellow, red,
     blue, green, black]);
```

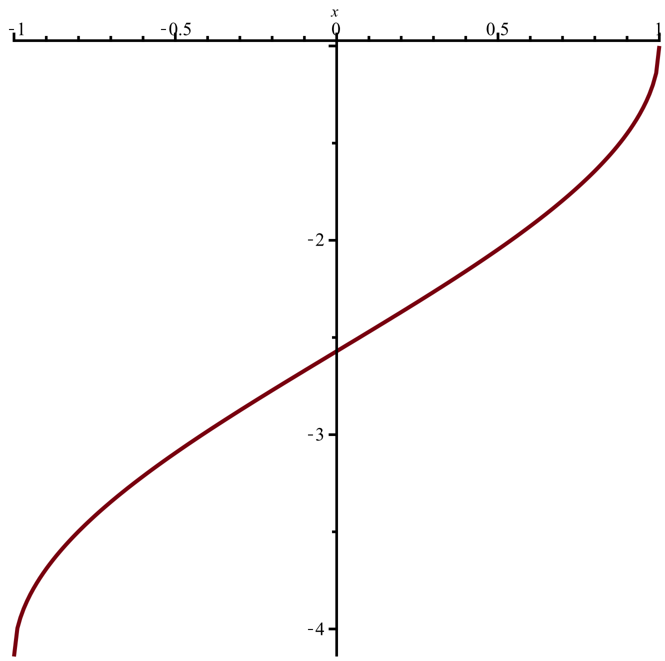
$$STa := k \mapsto convert(taylor(g(x), x = 0, k), polynom)$$



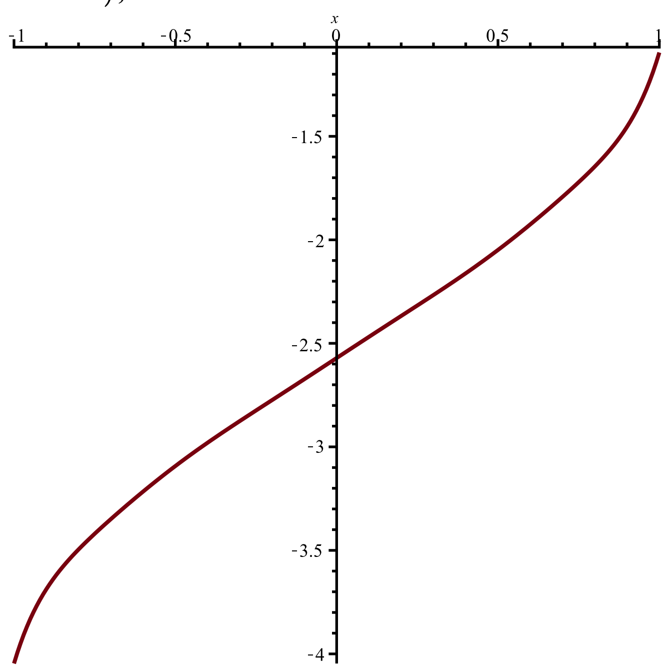


> *# 2*
 # График функции
f := x → arccos(x) 1;
plot(f(x), x = 1 .. 1);

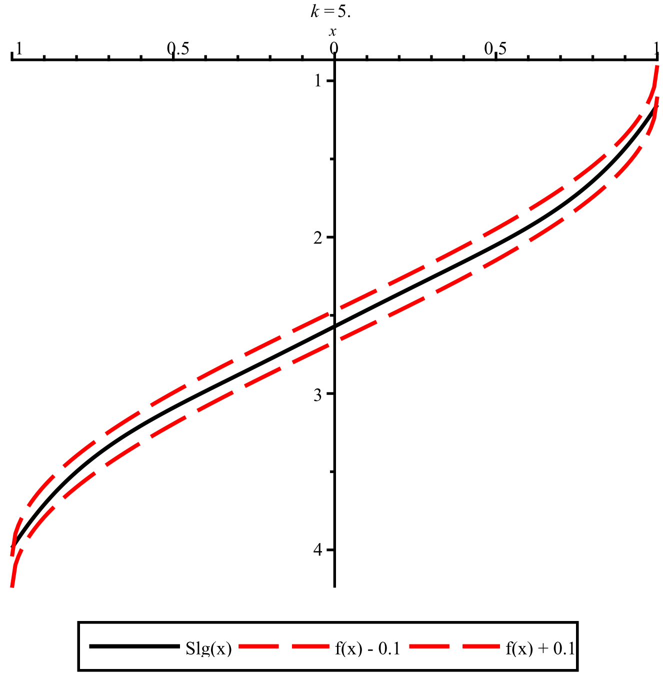
$$f := x \mapsto \quad \arccos(x) \quad 1$$



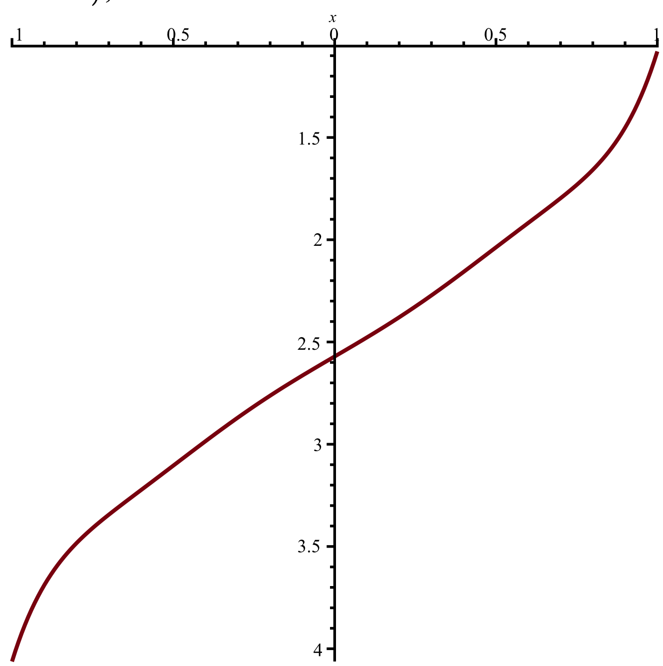
> # *Разложение в ряд Фурье по полиномам Лежандра*
$Slg := Legendre(f):$
$plot(Slg(10), x = -1 .. 1);$



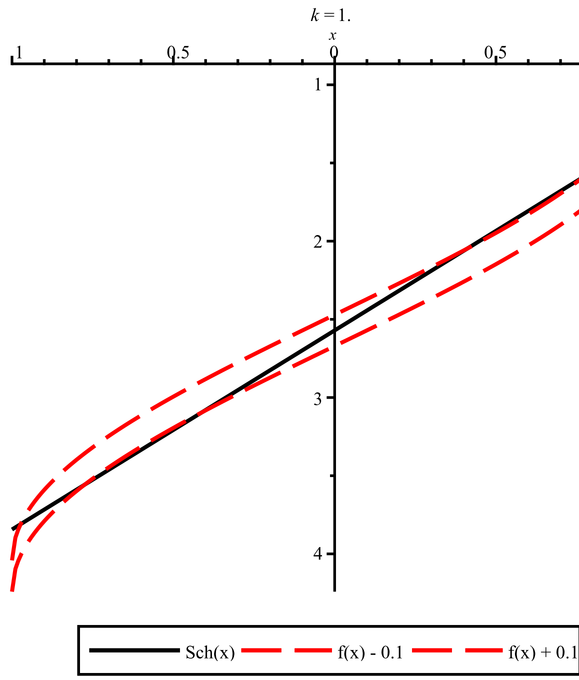
> # *Анимация графиков разложений*
$plots[animate](plot, [[Slg(k), f(x) - 0.1, f(x) + 0.1], x = -1 .. 1, legend = ["Slg(x)", "f(x) - 0.1", "f(x) + 0.1"], linestyle = [1, 3, 3], color = [black, red, red]], k = [1, 2, 3, 4, 5]);$



> # *Разложение в ряд Фурье по полиномам Чебышева*
Sch ≔ *Chebyshev*(*f*) :
plot(*Sch*(7), *x* = 1 .. 1);



> # *Анимация графиков разложений*
plots[*animate*](*plot*, [[*Sch*(*k*), *f*(*x*) 0.1, *f*(*x*) + 0.1], *x* = 1 .. 1, *legend*
= ["Sch(x)", "f(x) - 0.1", "f(x) + 0.1"], *linestyle* = [1, 3, 3], *color* = [*black*, *red*, *red*]],
k = [1, 2, 3, 4, 5]);



> # *Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье*

> $A0 := int(f(x), x = \ \ 1 .. 1);$

$$A0 := \ 2 \quad \pi \tag{33}$$

> $A := simplify\left(int\left(f(x) \cdot cos\left(\pi \cdot l \cdot x\right), x = \ \ 1 .. 1\right) \ assuming\ l :: posint\right);$

$$A := 0 \tag{34}$$

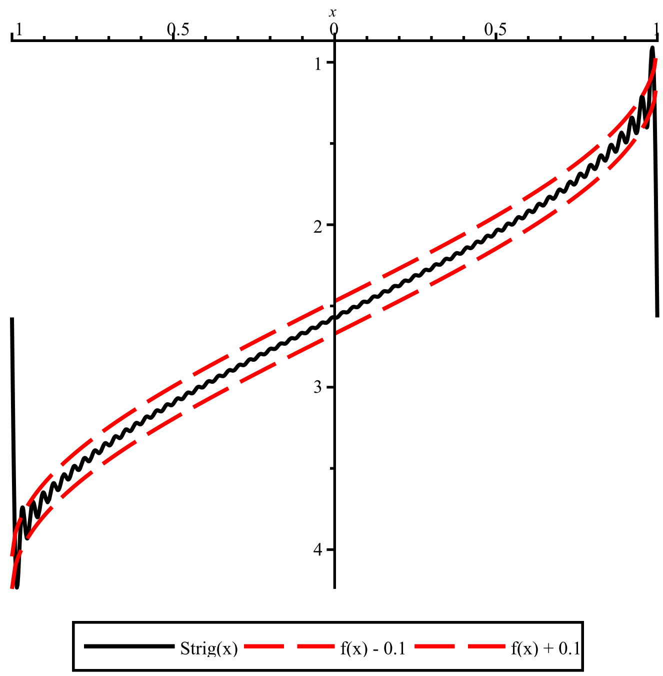
> $B := simplify\left(int\left(f(x) \cdot sin\left(\pi \cdot l \cdot x\right), x = \ \ 1 .. 1\right) \ assuming\ l :: posint\right);$

$$B := \left(\int_{-1}^{1} (\arccos(x) + 1) \sin(\pi\, l\, x) \, dx\right) \tag{35}$$

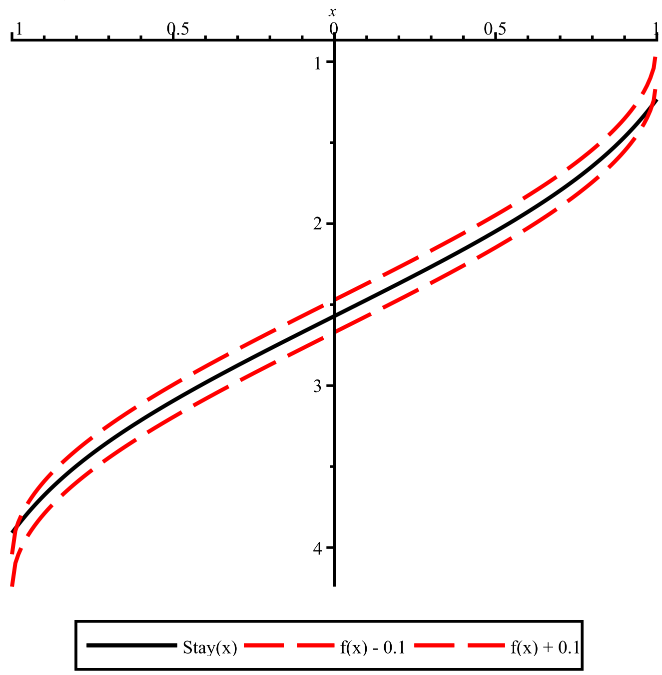
> $STri := k \rightarrow \left(\frac{A0}{2} + sum\left(B \cdot sin\left(\pi \cdot l \cdot x\right), l = 1 .. k\right)\right);$

$$STri := k \mapsto \frac{A0}{2} + \left(\sum_{l=1}^{k} B \cdot \sin(\pi \cdot l \cdot x)\right) \tag{36}$$

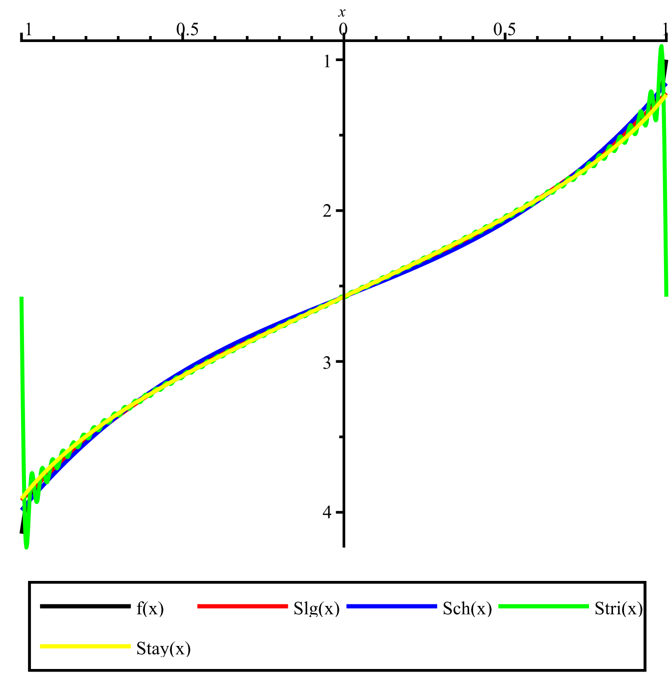
> $plot([STri(62), f(x) \quad 0.1, f(x) + 0.1], x = \ \ 1 .. 1, legend = [$"Strig(x)", "f(x) - 0.1", "f(x) + 0.1"$], linestyle = [1, 3, 3], color = [black, red, red]);$




```
> # Разложение функции в степенной ряд
Stay := k → (convert(taylor(f(x), x = 0, k), polynom)) :
plot([Stay(13), f(x)    0.1, f(x) + 0.1], x =   1 .. 1, legend = ["Stay(x)", "f(x) - 0.1",
    "f(x) + 0.1"], linestyle = [1, 3, 3], color = [black, red, red]);
```




```
> # Все разложения на графике
plot([f(x), Slg(4), Sch(3), STri(62), Stay(13)], x =   1 .. 1, legend = ["f(x)", "Slg(x)",
    "Sch(x)", "Stri(x)", "Stay(x)"], color = [black, red, blue, green, yellow]);
```


x
1
0.5
0
0.5
1
1
2
3
4
f(x)
Slg(x)
Sch(x)
Stri(x)
Stay(x)

>