> *#Лабораторная работа 1*
> *#Операции с математическими выражениями*
> *#Выполнила Литвинова Таисия Андреевна, гр. 353504*
> *#Вариант 1*

MathematicalFunctions

> *#Задание 1. Упростите алгебраическое выражение*\`.\`

$$p1 := \frac{x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18}{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18} :$$

$$p2 := \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{x^3 - 8x^2 + 19x - 12} :$$

$$p := \frac{p1}{p2} :$$

simplify(p);

#Функция simplify(p) *упрощает выражение* $\cdot(\ p\ )$, *приводя его к более компактной форме.*

$$\frac{x+1}{x-2} \qquad \textbf{(1)}$$

> *#Задание 2. Приведите выражение к многочлену стандартного вида.*

$$p := (2x-1)\cdot(3x^2+5)\cdot(5x+2) :$$

expand(p);

#Функция expand(p) раскрывает скобки и приводит выражение к стандартному виду многочлена.

$$30x^4 - 3x^3 + 44x^2 - 5x - 10 \qquad \textbf{(2)}$$

> *#Задание 3. Разложите многочлен на множители*

$$p := 14x^4 - 46x^3 - 82x^2 + 138x + 120 :$$

factor(p); *#Функция factor(p) раскладывает многочлен на множители.*

solve(p); *#Функция solve*(p) *находит корни многочлена, то есть значения* $(\ x\ )$,
при которых многочлен равен нулю
. Это может включать нахождение действительных и *комплексных корней.*

$$2\ (7x+5)\ (x-4)\ (x^2-3)$$

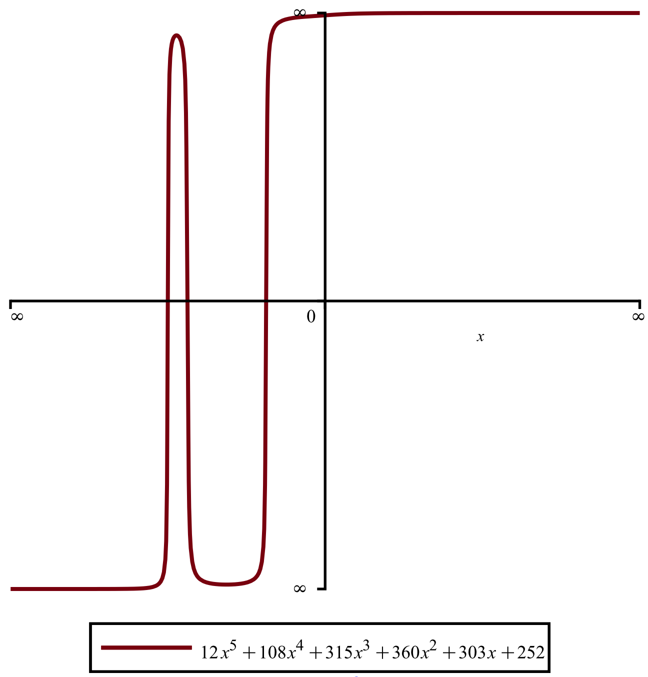
$$-\frac{5}{7}, 4, \sqrt{3}, -\sqrt{3} \qquad \textbf{(3)}$$

> *#Задание 4. Постройте график многочлена* $P_5(x)$ и *найдите все его корни.*

$$p := 12x^5 + 108x^4 + 315x^3 + 360x^2 + 303x + 252 :$$

plot(*p*, *x* = - *infinity*..*infinity*, *legend* = *p*);

roots are solve(*p* = 0);



$$\textit{roots are}\ \left(\frac{7}{2},\quad \frac{3}{2},\ -4,\ \mathrm{I},\ -\mathrm{I} \right) \tag{4}$$

> *#Задание 5. Разложите рациональную дробь на сумму простейших дробей.*

$$p := \frac{5\,x^4 + 7\,x^3 + 5\,x \quad 4}{\left(x^2+4\right)\cdot\left(x \quad 2\right)^2\cdot\left(x^2 \quad 1\right)} :$$

convert(*p*, *parfrac*);

#Функция convert(p, parfrac) преобразует рациональную функцию в сумму частичных дробей.

$$\frac{13}{10\,(x \quad 1)} + \frac{11}{90\,(x+1)} + \frac{71}{12\,(x \quad 2)^2} \qquad \frac{17}{36\,(x \quad 2)} + \frac{19\,x \quad 23}{20\,\left(x^2+4\right)} \tag{5}$$

> *#Задание 6. Решите графически уравнение и найдите его приближенные корни с точностью до 10 ^{5} .*

p1 := ln(*x* 1)^2;
p2 := 3 * cos(2 * *x*) 1;

 # Строим графики функций p1 и p2 на всей области определения
plot([*p1*, *p2*], *x* = infinity .. infinity, *color* = ["Red", "Green"], *legend* = [*p1*, *p2*]);

 # Строим графики функций p1 и p2 на промежутке от 1 до 5
plot([*p1*, *p2*], *x* = 1 .. 5, *color* = ["Red", "Green"], *legend* = [*p1*, *p2*]);

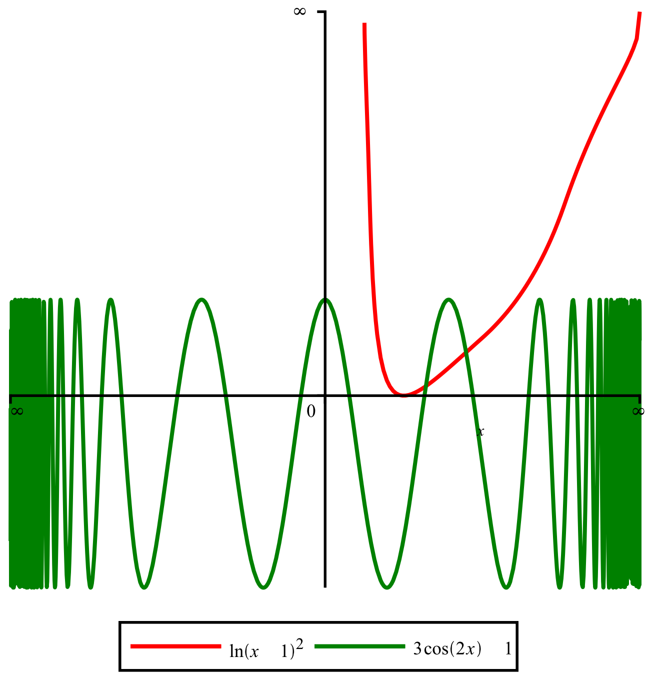
 # Строим графики функций p1 и p2 на небольшом интервале около x = 2.56172
plot([*p1*, *p2*], *x* = 2.56172 .. 2.56173, *color* = ["Red", "Green"], *legend* = [*p1*, *p2*]);

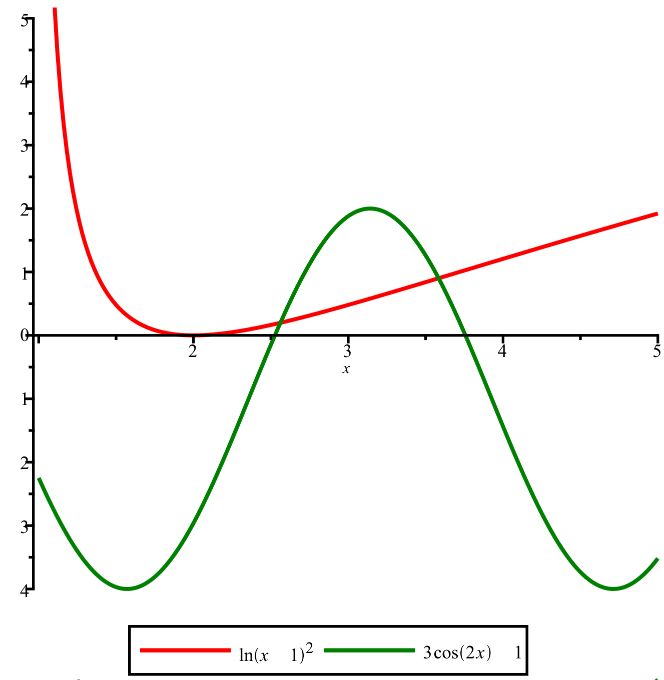
Строим графики функций p1 и p2 на небольшом интервале около x = 3.58382
$plot([p1, p2], x = 3.58382 .. 3.58383, color = ["Red", "Green"], legend = [p1, p2]);$

Находим численные решения уравнения p1 = p2 на интервале от 2 до 4
$ans1 := fsolve(p1 = p2, x = 2 .. 4);$

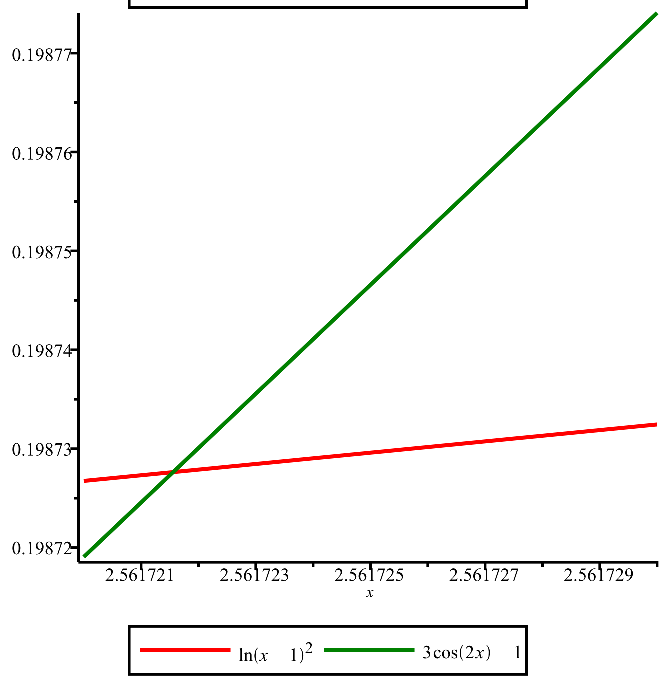
Находим численные решения уравнения p1 = p2 на интервале от 3 до 4
$ans2 := fsolve(p1 = p2, x = 3 .. 4);$

$$p1 := \ln(x-1)^2$$
$$p2 := 3\cos(2x) - 1$$

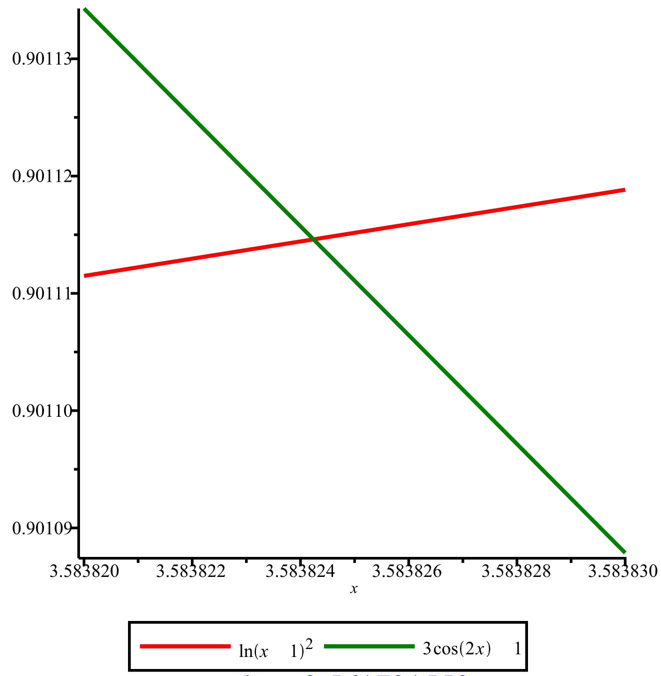




5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
2
3
4
5
x
ln(x 1)2
3cos(2x) 1



0.19877
0.19876
0.19875
0.19874
0.19873
0.19872
2.561721
2.561723
2.561725
2.561727
2.561729
x
ln(x 1)2
3cos(2x) 1



$ans1 := 2.561721559$

$ans2 := 3.583824240$ **(6)**

> #*Задание 7. Докажите, что* $\lim_{n \to \text{infinity}} (a_n) = a$, *определив номер* n_ε,
начиная с *которого все члены последовательности* (a_n) *попадут* в ε
окрестность точки a
. *Проиллюстрируйте полученный результат* с *помощью чертежа* в *Maple, положив* ε = 0, 1.

```
# Определяем последовательность an
an := (5*n    2)/(2*n    1);

# Находим предел последовательности an при n, стремящемся к бесконечности
a := limit(an, n = infinity);

# Задаем значение ε (эпсилон) для окрестности предела
varepsilon := 1/10;


# Решаем неравенство для нахождения N, начиная с которого все элементы последовательности an
# находятся в ε-окрестности предела a
N := solve(a    varepsilon < an and an < a + varepsilon, n);

# Строим график точек последовательности an для n от 3 до 40
y1 := plots[pointplot]({seq([n, an], n = 3 .. 40)}) :

# Строим линии, представляющие предел a и его ε-окрестность
y2 := plot([a    1/10, a, a + 1/10], x = 3 .. 40, color = [blue, red, blue]) :
```

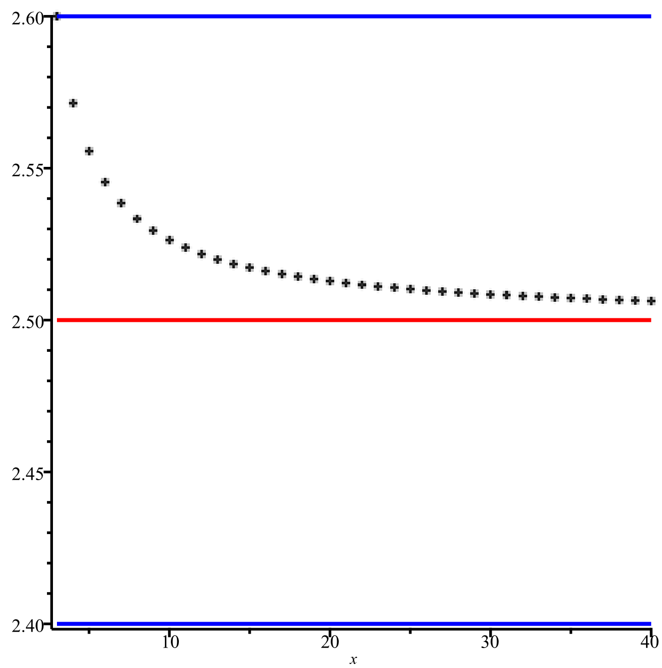
Отображаем оба графика вместе
plots[display](y1, y2);

$$an := \frac{5\,n-2}{2\,n-1}$$

$$a := \frac{5}{2}$$

$$\varepsilon := \frac{1}{10}$$

$$N := (-\infty, -2), (3, \infty)$$



> # Задание 8. Вычислите пределы числовых последовательностей.

$p1 := n\cdot\left(\mathrm{sqrt}\left(n^2+1\right) - \mathrm{sqrt}\left(n^2-1\right)\right)$:

$limit(p1, n = \mathrm{infinity})$;

$p2 := \left(\dfrac{3\cdot n^2 - 6\cdot n + 7}{3\cdot n^2 + 20\cdot n - 1}\right)^{1-n}$:

$limit(p2, n = \mathrm{infinity})$;

$$\frac{1}{e^{\frac{26}{3}}} \tag{7}$$

> # Задание 9. Для заданной кусочно−непрерывной функции выполните следующие действия.

Определите ее через функциональный оператор и постройте график.

$$f := x \to \begin{cases} 5\cdot\sin(2\,x) & x < -\mathrm{Pi} \\ 7\cdot e^{-\frac{x}{2}} & x \geq -\mathrm{Pi} \end{cases} :$$

plot(f(x), x = −infinity..infinity, color = "Green", legend = f(x));

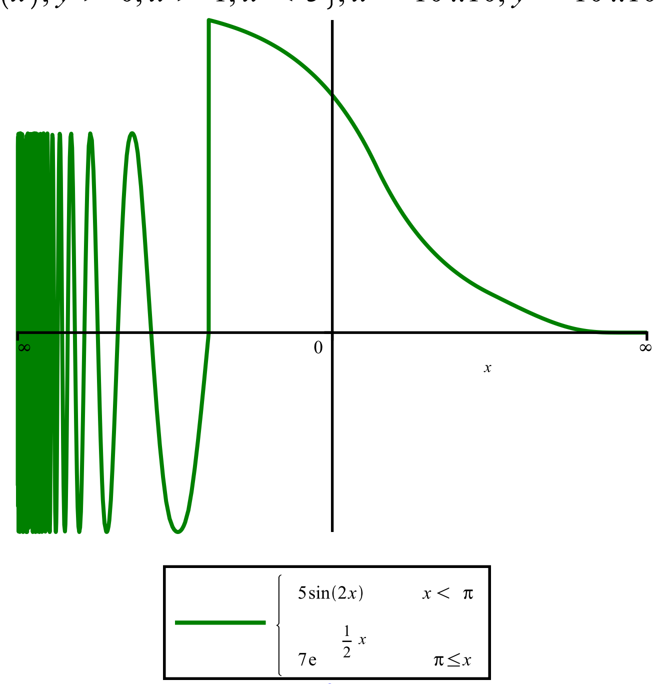
В точке разрыва и на бесконечности найдите односторонние пределы.
$limit(f(x), x=-\mathrm{Pi}, left)$;
$limit(f(x), x=-\mathrm{Pi}, right)$;
$limit(f(x), x=-\mathrm{infinity})$;
$limit(f(x), x=\mathrm{infinity})$;

Найдите производную и неопределенный интеграл на каждом из промежутков непрерывности.
$diff(f(x), x)$;
$int(f(x), x)$;

Постройте в одной системе координат графики функции, производной и какой−нибудь первообразной.
$plot([f(x), diff(f(x), x), int(f(x), x)], legend=[f(x), diff(f(x), x), int(f(x), x)], discont=true)$;

Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции и прямыми x = 1, x = 5, y = 0. Сделайте чертеж.
Вычисляем определенный интеграл функции f на интервале от 1 до 5
$S=int(f(x), x=1..5)$;

Строим область, ограниченную функцией f, осью x и вертикальными линиями x = 1 и x = 5
$plots[inequal](\{y < f(x), y > 0, x > 1, x < 5\}, x=-10..10, y=-10..10)$;



$$0$$

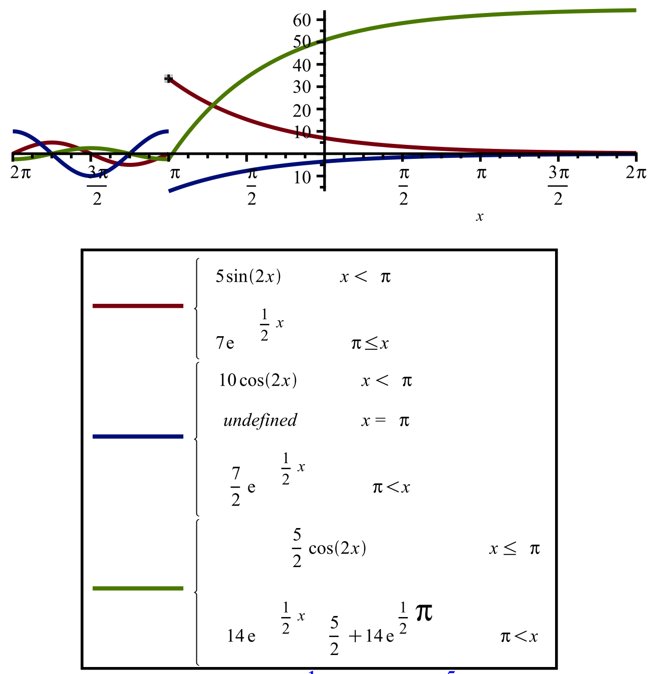
$$7\,e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-5..5$$

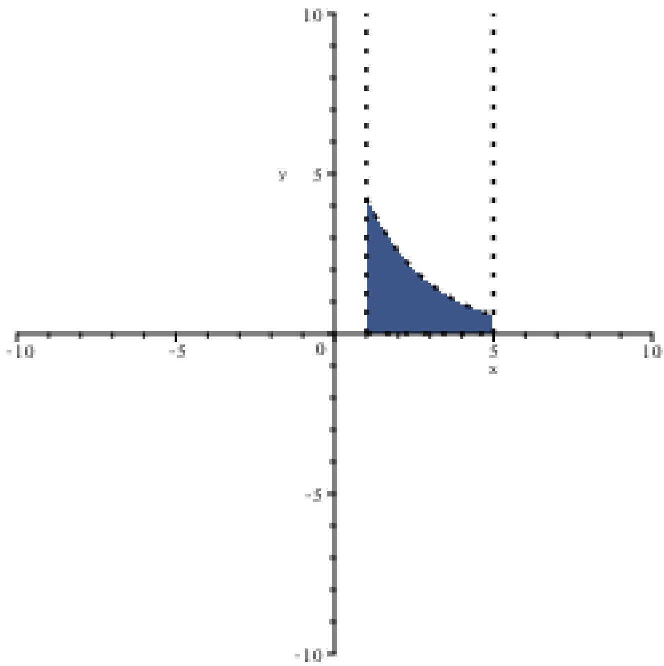
$$0$$

$$\begin{cases} 10\cos(2x) & x < -\pi \\ \mathit{undefined} & x = -\pi \\ -\dfrac{7\,e^{-\frac{x}{2}}}{2} & -\pi < x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{5\cos(2x)}{2} & x \le -\pi \\ -14\,e^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{5}{2} + 14\,e^{\frac{\pi}{2}} & -\pi < x \end{cases}$$



$$S = 14\,e^{\frac{1}{2}}\quad 14\,e^{\frac{5}{2}}$$



>

> #Задание 10. Постройте кривые на плоскости. Для кривой 2−го порядка найдите каноническое уравнение с помощью ортогонального преобразования.

$$p1 := \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{3x}{5}}\cdot \sin(5x+3):$$

$plot(p1, x=-\text{infinity}..\infty, color="\text{Red}", legend=p1);$

$p2 := (x,y) \rightarrow 5\cdot x^2 - 6\cdot x\cdot y + 5\cdot y^2 - 24\cdot x - 32 = 0;$

$plots[implicitplot](p2(x,y), x=-10..10, y=-10..10, color="\text{Green}", legend=p2(x,y));$

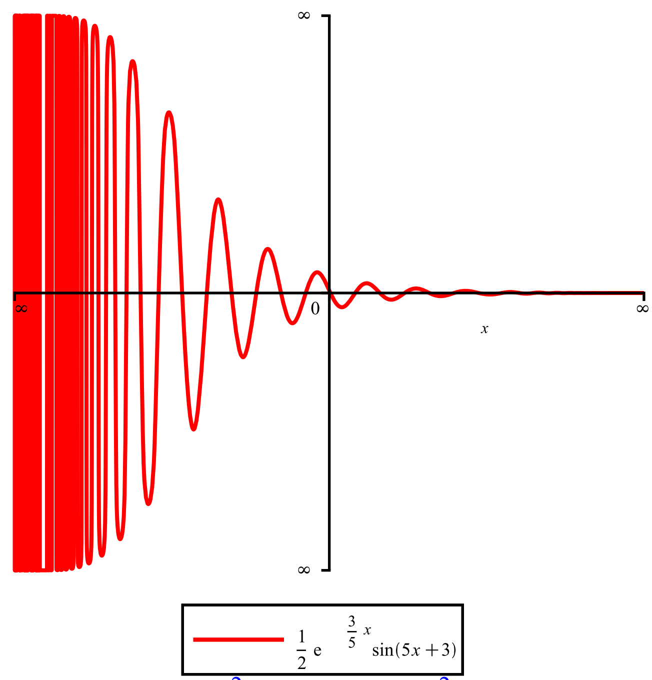
$p3x := t \rightarrow 2\cdot(t+\sin(t)):$

$p3y := t \rightarrow 2\cdot(1-\cos(t)):$

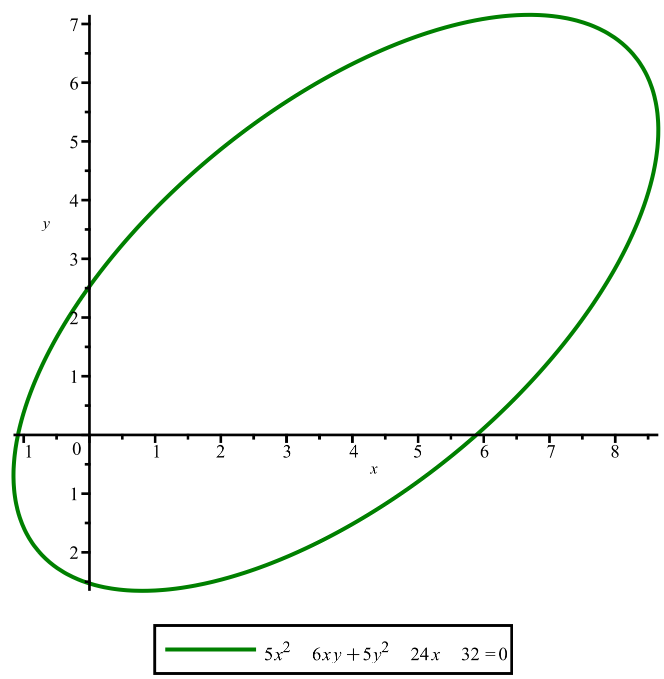
$plot([p3x(t), p3y(t), t=-\text{infinity}..\text{infinity}], color="\text{Purple}", legend=\{x=p3x(t), y=p3y(t)\});$

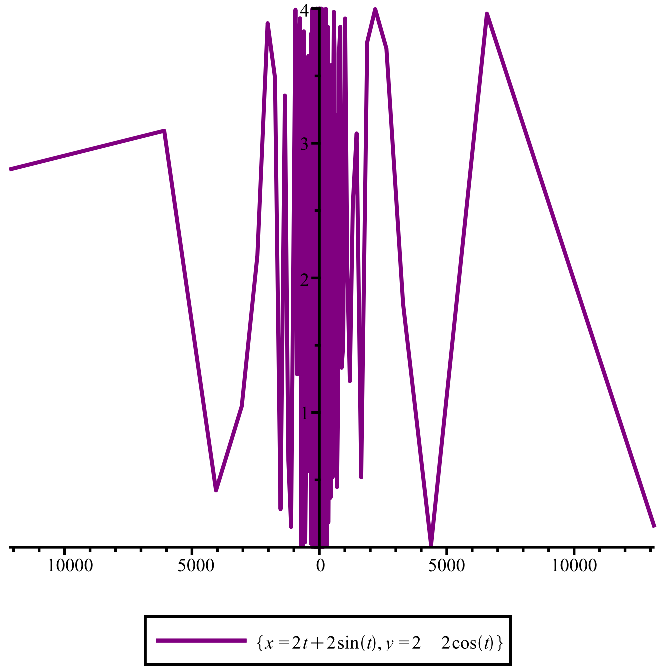
$$p4 := 1+2\cdot\sin\left(3\,\phi+\frac{\text{Pi}}{4}\right):$$

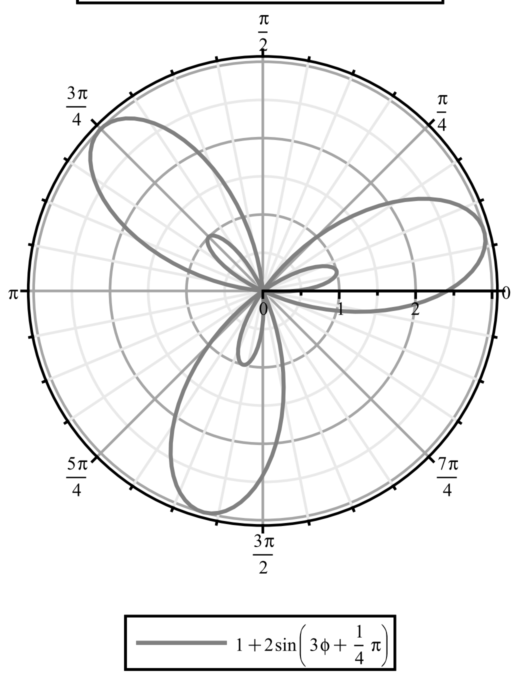
$plots[polarplot](p4(\phi), color="\text{Grey}", legend=p4);$



$p2 := (x, y) \mapsto 5 \cdot x^2 \quad 6 \cdot y \cdot x + 5 \cdot y^2 \quad 24 \cdot x \quad 32 = 0$







> *restart*;
with(*LinearAlgebra*) :

$A := Matrix([[5, 3], [3, 5]])$:
#detA := *det*(*A*);

 # Находим собственные значения и собственные векторы матрицы A
lambda := *Eigenvectors*(*A*);

 # Находим нормированные вектора
e1 := *Normalize*(*Column*(lambda[2], [1]), *Euclidean*);
e2 := *Normalize*(*Column*(lambda[2], [2]), *Euclidean*);

$expr := simplify(subs(x = e1[1] \cdot x1 + e2[1] \cdot y1, y = e1[2] \cdot x1 + e2[2] \cdot y1, 5 \cdot x^2 - 6 \cdot y \cdot x + 5 \cdot y^2 - 24 \cdot x - 32));$

$pseudocanon\_expr := Student[Precalculus][CompleteSquare](expr);$

$canon\_expr := subs\left(y1 = y2 + 3\sqrt{2}, x1 = x2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}, pseudocanon\_expr\right);$

$plots[implicitplot]\left(\left[5 \cdot x^2 - 6 \cdot y \cdot x + 5 \cdot y^2 - 24 \cdot x - 32 = 0, 2\left(y - 3\sqrt{2}\right)^2 + 8\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 77 = 0, 8x^2 + 2y^2 - 77 = 0\right], x = -100..100, y = -100..100, scaling = constrained, color = ["Blue", "Green", "Red"], legend = \left[5 \cdot x^2 - 6 \cdot y \cdot x + 5 \cdot y^2 - 24 \cdot x - 32 = 0, 2\left(y - 3\sqrt{2}\right)^2 + 8\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 77 = 0, 8x^2 + 2y^2 - 77 = 0\right]\right);$

$$\lambda := \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

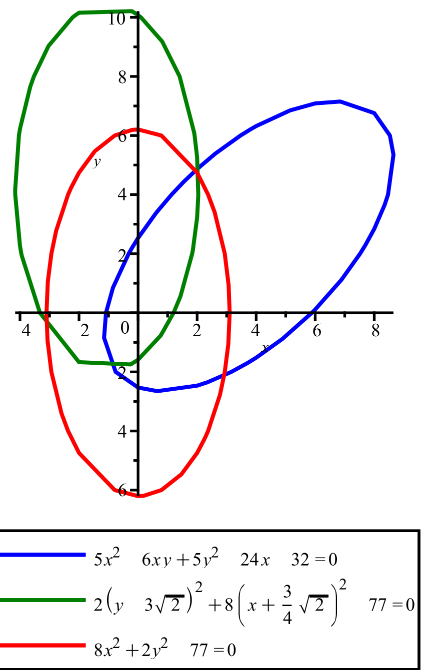
$$e1 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$e2 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$expr := (-12\,x1 + 12\,y1)\sqrt{2} + 2\,x1^2 + 8\,y1^2 - 32$$

$$pseudocanon\_expr := 8\left(y1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 2\left(x1 - 3\sqrt{2}\right)^2 - 77$$

$$canon\_expr := 8\left(y2 + \frac{15\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 2\left(x2 - \frac{15\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 77$$



$5x^2 \quad 6xy + 5y^2 \quad 24x \quad 32 = 0$
$2\left(y \quad 3\sqrt{2}\right)^2 + 8\left(x + \frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2 \quad 77 = 0$
$8x^2 + 2y^2 \quad 77 = 0$