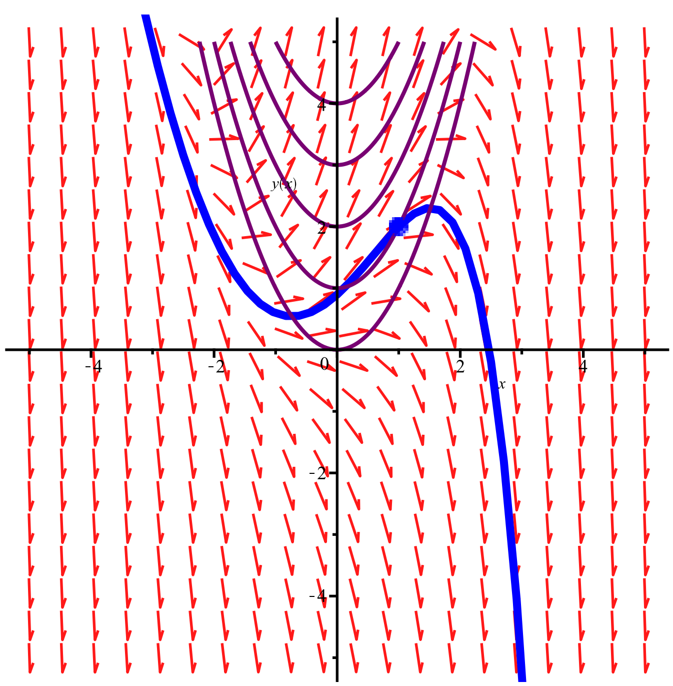
\> #Лабораторная работа 3
#Диференциальные уравнения
#Выполнила Литвинова Таисия Андреевна, гр. 353504
#Вариант 1

\> #Часть1.
#Задание 1. Для данного дифференциального уравнения методом изоклин постройте интегральную кривую, проходящую через точку M.

```
restart :
with(DEtools) :
de := diff(y(x), x) = y(x) - x^2;
solveDe := dsolve({de, y(1) = 2}, y(x)) :
rootsDe := rhs(solveDe);
dplot := DEplot(de, y(x), x = -5 ..5, y = -5 ..5, [y(1) = 2], linecolor = blue) :
for i from 0 to 5 do
k[i] := plots[implicitplot](y - x^2 = i, x = -5 ..5, y = -5 ..5, color = purple);
end:
pM := plot([[1, 2]], style = point, symbolsize = 20, symbol = solidcircle, color = blue) :
plots[display](dplot, k[0], k[1], k[2], k[3], k[4], k[5], pM);
```

$$de := \frac{d}{dx}\, y(x) = y(x) - x^2$$

$$rootsDe := x^2 + 2\,x + 2 - \frac{3\,e^x}{e}$$



\> #Задание 2
1 часть
Найдите линию, проходящую через точку M0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M нормальный вектор MN с концом на оси Oy имеет длину, равную a, и образует острый угол с положительным направлением оси Oy. Сделайте чертеж.

$a := 25;$
$\#x0{:=}15;\ y0 := 1;$
$casat\_x0 := y(x0) + diff(y(x0), x0)\cdot(x - x0);$
$casat\_x1 := y(x) + diff(y(x), x)\cdot(x1 - x);$
$fNorm\_x1 := y(x) - \dfrac{1}{diff(y(x), x)}\cdot(x1 - x);$
$MN := simplify\left(\mathrm{sqrt}\left(x^2 + \left(y(x) - y(x) + \dfrac{x}{diff(y(x), x)}\right)^2\right)\right) = a;$
$rootsDe := solve(MN, diff(y(x), x));$
$ans := simplify(int(rootsDe[1], x));$
$\_C\_ := fsolve\left(\mathrm{sqrt}\left(a^2 - 15^2\right) + \_C\_ = 1\right);$
$findLine := plot\left(\mathrm{sqrt}\left(a^2 - x^2\right) + \_C\_, x = -20..20, color = black\right) :$
$plotM := plot([[15, 1]], style = point, symbolsize = 20, symbol = solidcircle, color = blue) :$
$plots[display](findLine, plotM);$

#Задание 2. 2-ая часть. Найдите линию, проходящую через точку M0, и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор MN с концом на оси Ox имеет проекцию на ось Ox, обратно пропорциональную абсциссе точки M. Коэффициент пропорциональности равен a. Сделайте чертеж.

$a := -\dfrac{1}{2};$
$x0 := 1; y0 := \mathrm{e};$
$ex := x - xn = \dfrac{a}{x};$
$de := solve((x - xn)\cdot diff(y(x), x) = y(x), xn);$
$res := dsolve(subs(xn = de, ex));$
$simplify(dsolve(\{subs(xn = de, ex), y(x0) = y0\}));$
$findLine := plot(rhs(\%), x = -8..8, color = black) :$
$plotM := plot([[x0, y0]], style = point, symbolsize = 20, symbol = solidcircle, color = blue) :$
$plots[display](findLine, plotM);$

> *#Задание 3. Найдите общий интеграл уравнения. Постройте на одном чертеже вблизи особой точки уравнения поле направлений и какую-либо интегральную кривую. Сделайте вывод о типе особой точки.*

$restart :$
$with(DEtools) :$
$de := diff(y(x), x) = \dfrac{4\cdot x + 21\cdot y(x) - 25}{24\cdot x + y(x) - 25};$
$dsolve(de, y(x));$
$solve(\{4\cdot x + 21\cdot y - 25 = 0, 24\cdot x + y - 25 = 0\});$
$dplot := DEplot(de, y(x), x = -5..5, y = -5..5, [y(-1.5) = -2, y(3) = 4], linecolor = blue) :$
$plotPoint := plot([[1, 1]], style = point, symbolsize = 20, symbol = solidcircle, color = black) :$
$plots[display](dplot, plotPoint);$

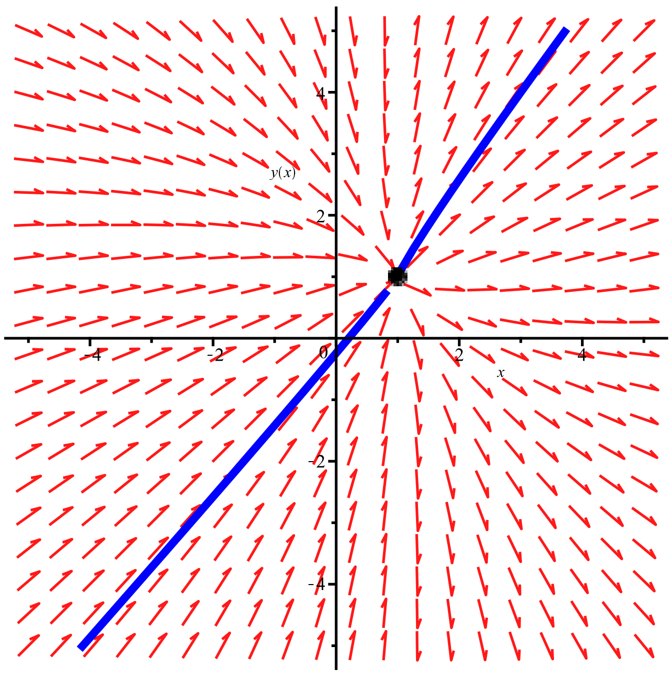
$M := Matrix([[4 - \lambda, 21], [24, 1 - \lambda]]);$
$solve(LinearAlgebra[Determinant](M) = 0);$
$\lambda 1, \lambda 2$ *разного знака - седло*

$$de := \frac{d}{dx}\, y(x) = \frac{4\,x + 21\,y(x) - 25}{24\,x + y(x) - 25}$$

$$-5\ln\left(\frac{-y(x) + x}{x - 1}\right) + 4\ln\left(-\frac{y(x) - 5 + 4\,x}{x - 1}\right) - \ln(x - 1) - \_C1 = 0$$

$$\{x = 1, y = 1\}$$

```
Warning, plot may be incomplete, the following errors(s) were
issued:
   cannot evaluate the solution further right of 1.0000112,
maxfun limit exceeded (see ?dsolve,maxfun for details)
Warning, plot may be incomplete, the following errors(s) were
issued:
   cannot evaluate the solution further left of .99999722,
maxfun limit exceeded (see ?dsolve,maxfun for details)
```



$$M := \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 21 \\ 24 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$$

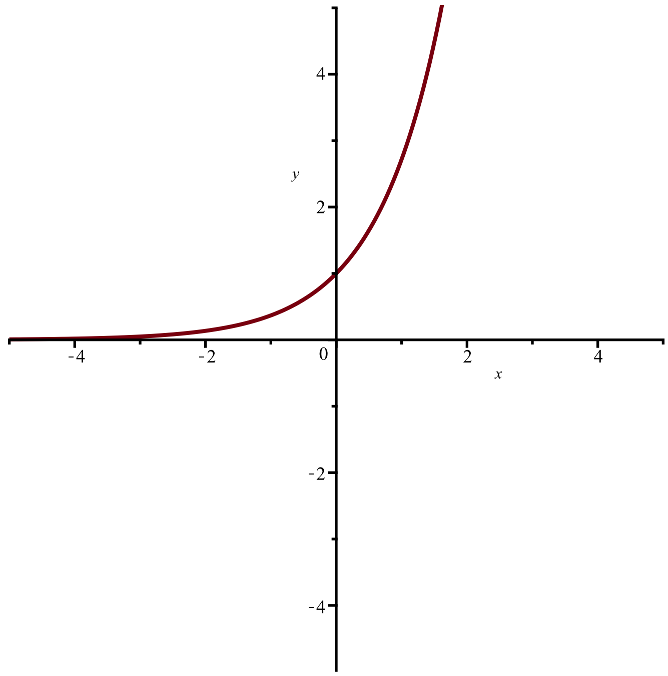
$$25, \; -20$$

λ1, λ2 знака разного — седло **(1)**

> *#Задание 4. Найдите решение задачи Коши. Сделайте чертеж интегральной кривой.*
> *restart :*
> *with(DEtools) :*
> $de := diff(y(x), x) + x \cdot y(x) = (1 + x) \cdot e^{-x} \cdot (y(x))^2;$
> $ans := solve(dsolve(\{de, y(0) = 1\}), y(x));$
> $plot(ans, x = -5..5, y = -5..5);$

$$de := \frac{d}{dx}\, y(x) + x\,y(x) = (1 + x)\,e^{-x}\,y(x)^2$$

$$ans := \frac{1}{e^{-x}}$$



> *#Задание 5. Решите дифференциальные уравнения. Постройте в одной системе координат интегральные кривые при целых значениях произвольной постоянной от –1 до 1.*

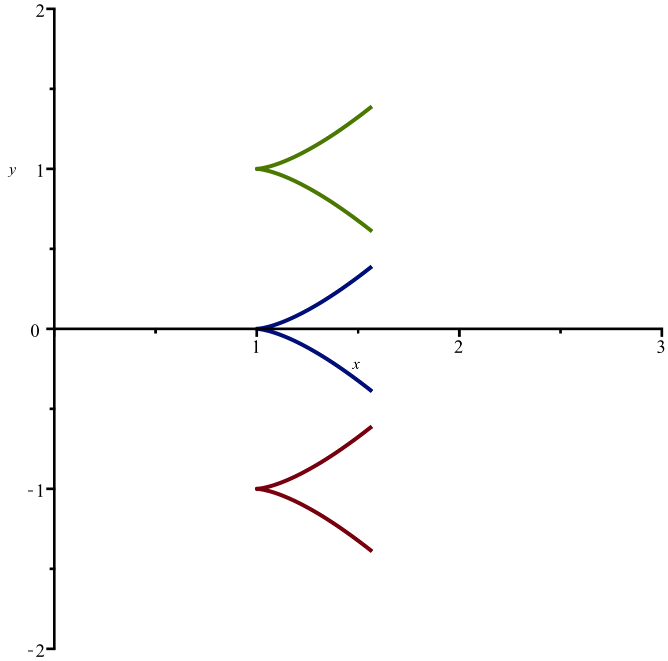
$restart:$
$with(DEtools):$
$de1 := x = diff(y(x), x) \cdot \arcsin(diff(y(x), x)) + \mathrm{sqrt}(1 - diff(y(x), x)^2);$
$X1 := t \cdot \arcsin(t) + \mathrm{sqrt}(1 - t^2);$
$\mathrm{Y1} := \mathrm{solve}(\mathrm{dsolve}(diff(y(t), t) = t \cdot \arcsin(t)), y(t));$
$plot([seq([X1, Y1, t = -10..10], \_C1 = -1..1)], x = 0..3, y = -2..2);$

$de2 := y(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\mathrm{abs}\left(\frac{1 + diff(y(x), x)}{1 - diff(y(x), x)}\right)\right) - diff(y(x), x);$
$Y2 := \frac{1}{2} \ln\left(\mathrm{abs}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right) - t;$
$X2 := solve\left(dsolve\left(diff(x(t), t) = \frac{t}{1 - t^2}\right), x(t)\right);$
$plot([seq([X2, Y2, t = -10..10], \_C1 = -1..1)], x = -10..10, y = -10..10);$

$$de1 := x = \left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) \arcsin\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right)^2}$$

$$X1 := t \arcsin(t) + \sqrt{-t^2 + 1}$$

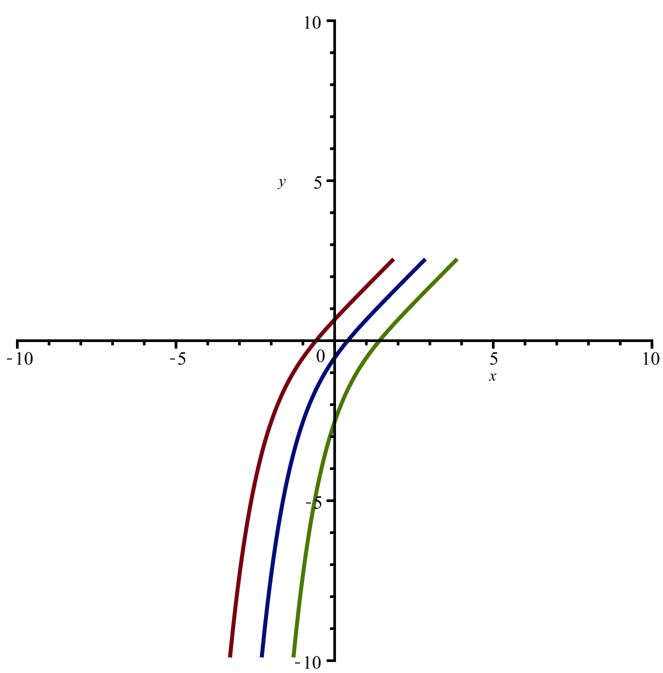
$$Y1 := \frac{t^2 \arcsin(t)}{2} + \frac{t\sqrt{-t^2 + 1}}{4} - \frac{\arcsin(t)}{4} + \_C1$$



$$de2 := y(x) = \frac{\ln\left(\left|\frac{1 + \frac{d}{dx}\, y(x)}{\frac{d}{dx}\, y(x) - 1}\right|\right)}{2} - \frac{d}{dx}\, y(x)$$

$$Y2 := \frac{\ln\left(\left|\frac{1 + t}{t - 1}\right|\right)}{2} - t$$

$$X2 := -\frac{\ln(t - 1)}{2} - \frac{\ln(1 + t)}{2} + \_C1$$



> *#Задание 6. Найдите все решения уравнения. Постройте в одной системе координат*

график особого решения и интегральных кривых при целых значениях произвольной постоянной от –3 до 3.

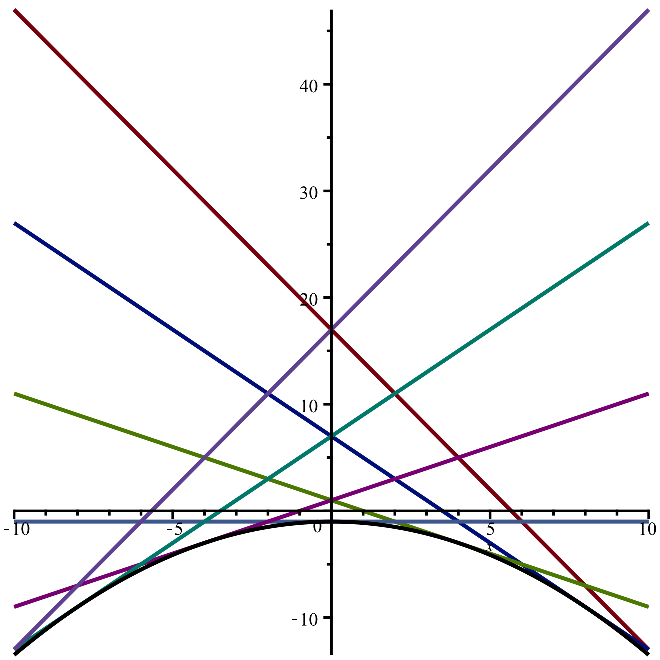
```
restart :
with(DEtools) :
de := y(x) = x·diff(y(x), x) + 2·diff(y(x), x)^2 − 1;
rootsDe := dsolve(de, y(x));
root1 := solve(rootsDe[1], y(x));
root2 := solve(rootsDe[2], y(x));
plotSeq := plot([seq(root2, _C1 = -3 ..3)]) :
plotRoot1 := plot(root1, color = black) :
plots[display](plotSeq, plotRoot1);
```

$$de := y(x) = x\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 2\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^2 - 1$$

$$rootsDe := y(x) = -\frac{x^2}{8} - 1,\ y(x) = 2\,\_C1^2 + x\,\_C1 - 1$$

$$root1 := -\frac{x^2}{8} - 1$$

$$root2 := 2\,\_C1^2 + x\,\_C1 - 1$$



\>

\> #Часть 2

\>

#Задание 1
Part 1

```
expression := x = diff(diff(y(x), x), x) - e^(-diff(diff(y(x), x), x)) :
```

Error, invalid base

#Лабараторная работа 3 Литвинова Таисия Андреевна, гр. 353504 Вариант 1 Часть 2 #Задание

\> # Заменяем y'' на t

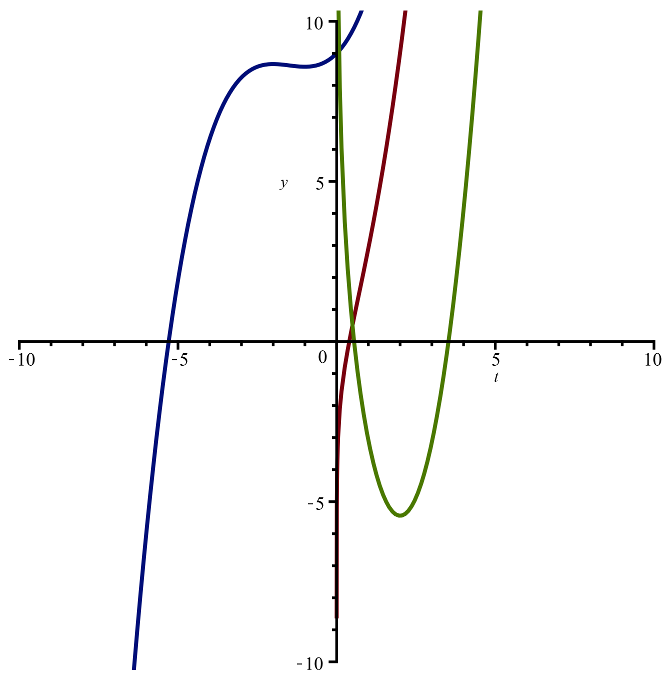
```
X := t + ln(t);
dx := diff(X, t);
y_sh := dsolve(diff(y(t), t) = t·dx);
Y := dsolve(diff(f(t), t) = rhs(y_sh)·dx);

f1 := subs(_C1 = 1, _C2 = 0, _C3 = -4, Y) :
f2 := subs(_C1 = 0, _C2 = 9, _C3 = -3, Y) :
f3 := subs(_C1 = -4, _C2 = -1, _C3 = 0, Y) :
plot([rhs(f1), rhs(f2), rhs(f3)], t = -10 .. 10, y = -10 .. 10);
```

$$X := t + \ln(t)$$

$$dx := 1 + \frac{1}{t}$$

$$y\_sh := y(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + \_C1$$

$$Y := f(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{4} + \_C1\,t + t + \_C1\ln(t) + \_C2$$




```
> # Part 2
restart;
expression := diff(y(x), x)·diff(diff(y(x), x), x) - diff^2(y(x), x) - y(x)·diff(y(x), x)
    ·ctg(x) = 0;
slv := dsolve(expression, y(x));
```

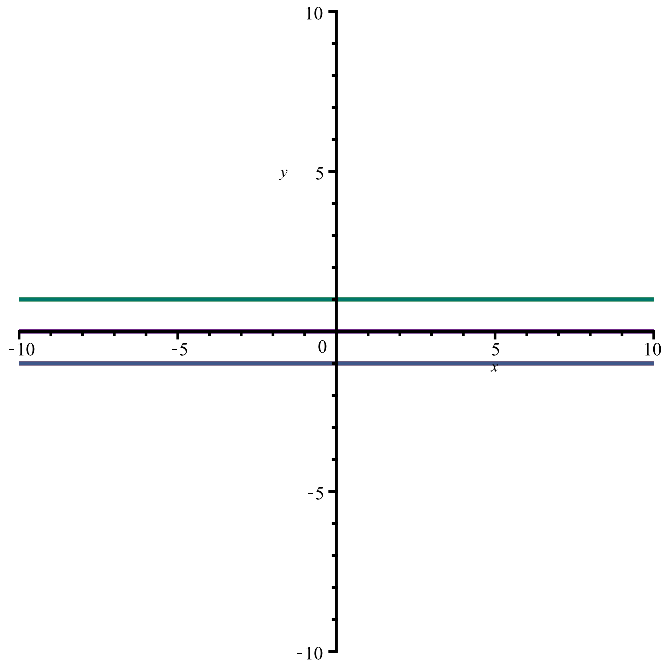
$$expression := \left(\frac{d}{dx}y(x)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - \left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2 - y(x)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)ctg(x) = 0$$

(2)

$$slv := y(x) = DESol\left(\left\{-ctg(x)\,\_Y(x) - \frac{d}{dx}\,\_Y(x) + \frac{d^2}{dx^2}\,\_Y(x)\right\}, \{\_Y(x)\}\right), y(x) = \_C1 \quad \textbf{(2)}$$

```
> f, g, h := seq(subs(_C2 = i, slv), i = -1 .. 1) :
  f1, f2, f3 := seq(subs(_C1 = i, f), i = -1 .. 1) :
  f4, f5, f6 := seq(subs(_C1 = i, g), i = -1 .. 1) :
  f7, f8, f9 := seq(subs(_C1 = i, h), i = -1 .. 1) :
```

```
> plot([rhs(f1), rhs(f2), rhs(f3), rhs(f4), rhs(f8), rhs(f9)], x = -10 .. 10, y = -10 .. 10);
```

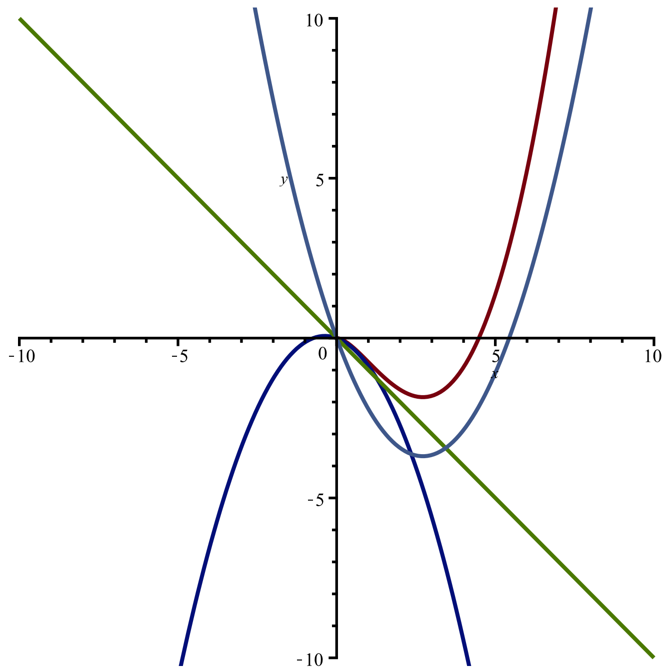



```
>  # Part 3
  restart;
  expression := diff(diff(y(x), x), x) · (1 + y^2(x)) + diff^3(y(x), x) = 0;
   # Заменяем y' на t
  expression1 := t(x) = x · diff(t(x), x) - e^diff(t(x), x);

  solutions := dsolve(expression1) :
  solve1 := dsolve(rhs(solutions[1]) = diff(y(x), x)) :
  solve2 := dsolve(rhs(solutions[2]) = diff(y(x), x));
  slv1, slv11, slv12 := seq(subs(_C1 = i, rhs(solve1)), i = -1 .. 1) :
  s1, s2, s3 := seq(subs(_C1 = i, rhs(solve2)), i = -1 .. 1) :
  slv2, slv3, slv4 := seq(subs(_C2 = i, s1), i = -1 .. 1) :
  slv5, slv6, slv7 := seq(subs(_C2 = i, s2), i = -1 .. 1) :
  slv8, slv9, slv10 := seq(subs(_C2 = i, s3), i = -1 .. 1) :
  plot([slv11, slv3, slv6, slv9], x = -10 .. 10, y = -10 .. 10);
```

$$expression := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right)\left(1 + y(x)^2\right) + \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^3 = 0$$

$$expression1 := t(x) = x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,t(x)\right) - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,t(x)}$$

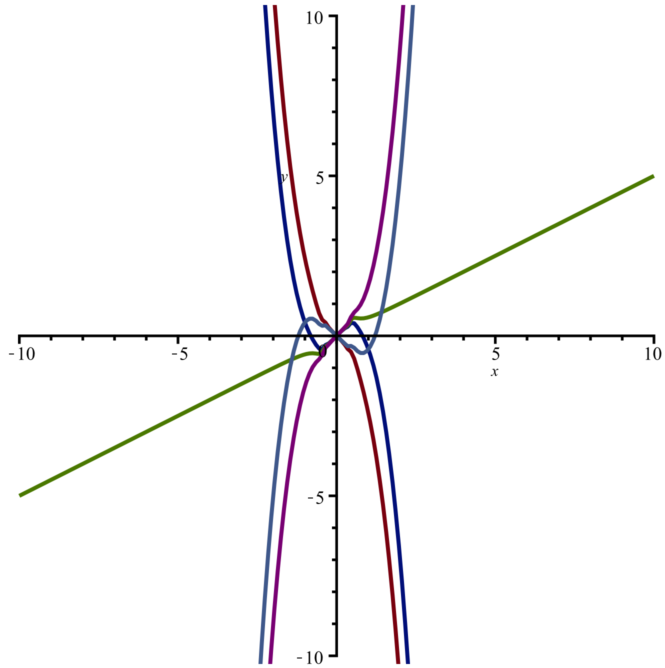
$$solve2 := y(x) = \frac{x^2\,\_C1}{2} - \mathrm{e}^{\_C1}\,x + \_C2$$




```
> # Part 4
restart;
expression := diff(diff(y(x), x), x) = 3 · (diff(y(x), x)/x - y(x)/x^2) + 2/x^3 · sin(1/x^2);
slv := dsolve(expression);
f, g, h := seq(subs(_C2 = i, rhs(slv)), i = -1 .. 1) :
f1, f2, f3 := seq(subs(_C1 = i, f), i = -1 .. 1) :
f4, f5, f6 := seq(subs(_C1 = i, g), i = -1 .. 1) :
f7, f8, f9 := seq(subs(_C1 = i, h), i = -1 .. 1) :
plot([f1, f3, f6, f7, f9], x = -10 .. 10, y = -10 .. 10);
```

$$expression := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,y(x) = \frac{3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y(x)\right)}{x} - \frac{3\,y(x)}{x^2} + \frac{2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}$$

$$slv := y(x) = x^3\,\_C2 + x\,\_C1 - \frac{x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2}$$



\>

\> *#Задание 2. Найдите общее решение уравнения и сравните с результатом, полученным в системе Maple.*

$de := diff(y(x), x\$3)\cdot x\cdot \ln x = diff(y(x), x\$2);$

$dsolve(de);$

$$de := \left(\frac{d^3}{dx^3}\, y(x)\right) x^2 \ln = \frac{d^2}{dx^2}\, y(x)$$

$$y(x) = \frac{\_C1\, e^{-\frac{1}{x \ln}}\, x^2}{2} + \frac{\_C1\, x\, e^{-\frac{1}{x \ln}}}{2 \ln} - \frac{\_C1\, \mathrm{Ei}_1\left(\frac{1}{x \ln}\right) x}{\ln} - \frac{\_C1\, \mathrm{Ei}_1\left(\frac{1}{x \ln}\right)}{2 \ln^2} + \_C2\, x + \_C3 \qquad \textbf{(3)}$$

\> *#Задание 3. Найдите общее решение дифференциального уравнения.*

$de := diff(y(x), x\$2) + 2\, diff(y(x), x) = 4e^x(\sin x + \cos x);$

$dsolve(de);$

$$de := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + 2\, \frac{d}{dx}\, y(x) = 4\, \left(e^x\right) (\cos x + \sin x)$$

$$y(x) = \int \left(4 \left(\int \left(e^x\right) (x\, (\cos + \sin))\, e^{2x}\, dx\right) + \_C1\right) e^{-2x}\, dx + \_C2 \qquad \textbf{(4)}$$

\>

\> *#Часть3.*

#Задание1. Исследуйте поведение фазовых кривых системы уравнений вблизи точки покоя. Сделайте чертеж. Определите тип точки покоя по фазовому портрету и собственным значениям матрицы системы. Найдите общее решение системы и выделите фундаментальную систему решений. Сравните с результатами, полученными в Maple. Постройте в прямоугольной системе Oxy1y2 пространственные кривые, удовлетворяющие заданной системе и содержащие

соответственно точки .

$Y1 := diff(y1(x), x) = -2\cdot y1(x) + 2\cdot y2(x);$
$Y2 := diff(y2(x), x) = 7\cdot y1(x) + 3\cdot y2(x);$
$with(DEtools):$
$pp := phaseportrait([Y1, Y2], [y1(x), y2(x)], x = -10..10, [[0, 1, 2], [0, -1, -2], [0, -1, 2], [0, 1, -2]], y1 = -10..10, y2 = -10..10, linecolor = purple);$

$M := Matrix([[-2 - \lambda, 2], [7, 3 - \lambda]]);$
$solve(LinearAlgebra[Determinant](M) = 0);$
$\lambda 1, \lambda 2$ *разного знака - седло*

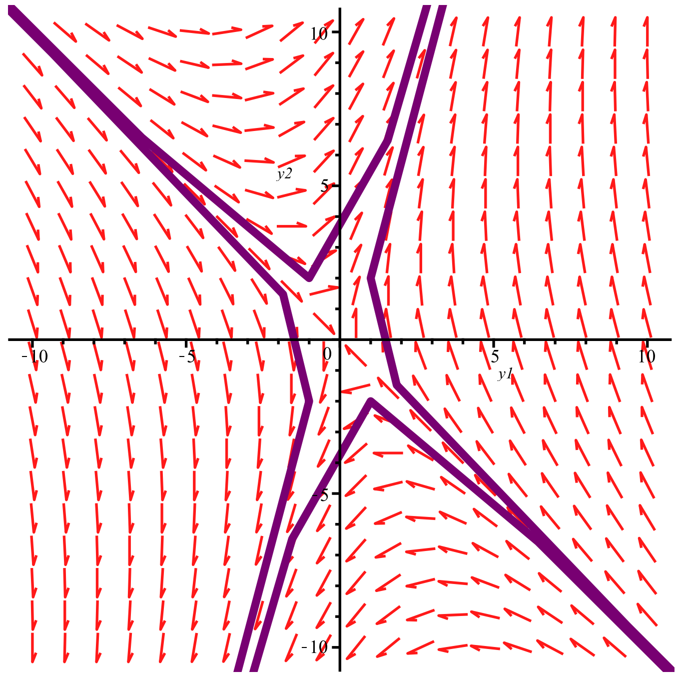
$dsolve([Y1, Y2]);$

$p1 := DEplot3d([Y1, Y2], [y1(x), y2(x)], x = -10..10, [[0, 1, 2]], y1 = -10..10, y2 = -10..10, linecolor = violet):$
$p2 := DEplot3d([Y1, Y2], [y1(x), y2(x)], x = -10..10, [[0, -1, -2]], y1 = -10..10, y2 = -10..10, linecolor = purple):$
$p3 := DEplot3d([Y1, Y2], [y1(x), y2(x)], x = -10..10, [[0, -1, 2]], y1 = -10..10, y2 = -10..10, linecolor = blue):$
$p4 := DEplot3d([Y1, Y2], [y1(x), y2(x)], x = -10..10, [[0, 1, -2]], y1 = -10..10, y2 = -10..10, linecolor = green):$
$plots[display](p1, p2, p3, p4);$

$$p := dfieldplot\left(diff(y2(y1), y1) = \frac{-2\cdot y1 + 2\cdot y2(y1)}{7\cdot y1 + 3\cdot y2(y1)}, y2(y1), y1 = -10..10, y2(y1) = -10..10\right):$$
$solve([-2\cdot y1 + 2\cdot y2 = 0, 7\cdot y1 + 3\cdot y2 = 0]);$
$plotPoint := plot([[0, 0]], style = point, symbolsize = 20, symbol = solidcircle, color = purple):$
$plots[display](p, plotPoint);$

$$Y1 := \frac{d}{dx}\, y1(x) = -2\, y1(x) + 2\, y2(x)$$

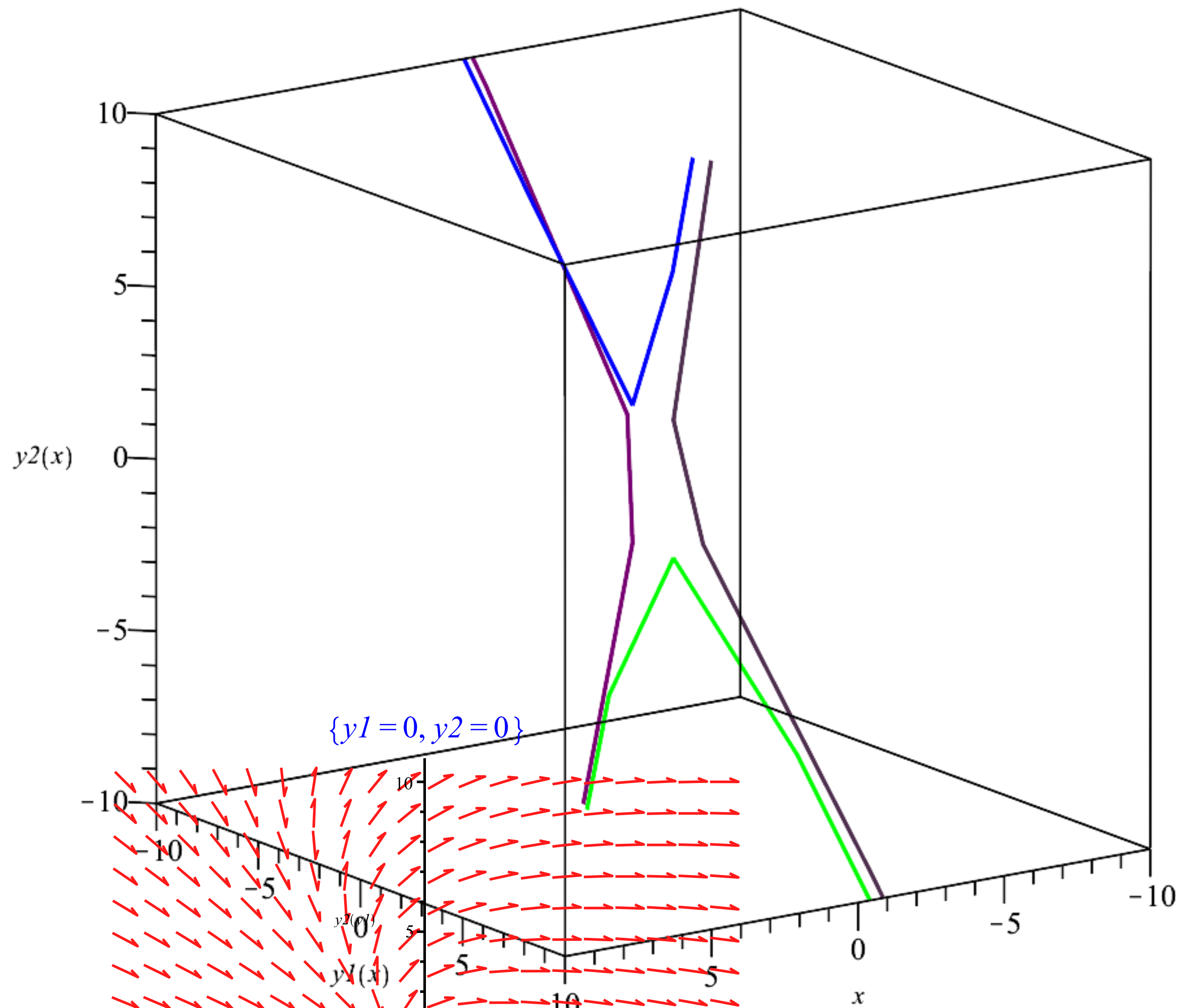
$$Y2 := \frac{d}{dx}\, y2(x) = 7\, y1(x) + 3\, y2(x)$$



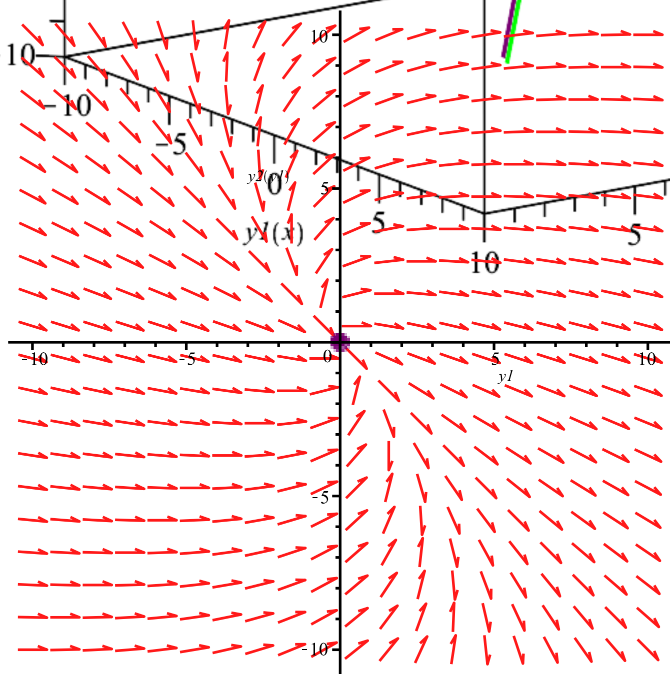
$$M := \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 7 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$5,\ -4$$

λ1, λ2 разного знака − седло $\left\{y1(x) = \_C1\, e^{5x} + \_C2\, e^{-4x},\ y2(x) = \frac{7\,\_C1\, e^{5x}}{2} - \_C2\, e^{-4x}\right\}$



$\{y1 = 0, y2 = 0\}$



> #Задание 2. Решите систему уравнений методом исключений и сравните результат с ответом, полученным в Maple.

$Y1 := diff(y1(x), x) = 5 \cdot y1(x) + 3 \cdot y2(x);$

$Y2 := diff(y2(x), x) = 4 \cdot y1(x) + 9 \cdot y2(x);$

$dsolve([Y1, Y2]);$

$$Y1 := \frac{d}{dx}\, y1(x) = 5\, y1(x) + 3\, y2(x)$$

$$Y2 := \frac{d}{dx}\, y2(x) = 4\, y1(x) + 9\, y2(x)$$

$$\left\{ y1(x) = \_C1\, e^{3x} + \_C2\, e^{11x},\, y2(x) = -\frac{2\, \_C1\, e^{3x}}{3} + 2\, \_C2\, e^{11x} \right\} \quad \textbf{(5)}$$

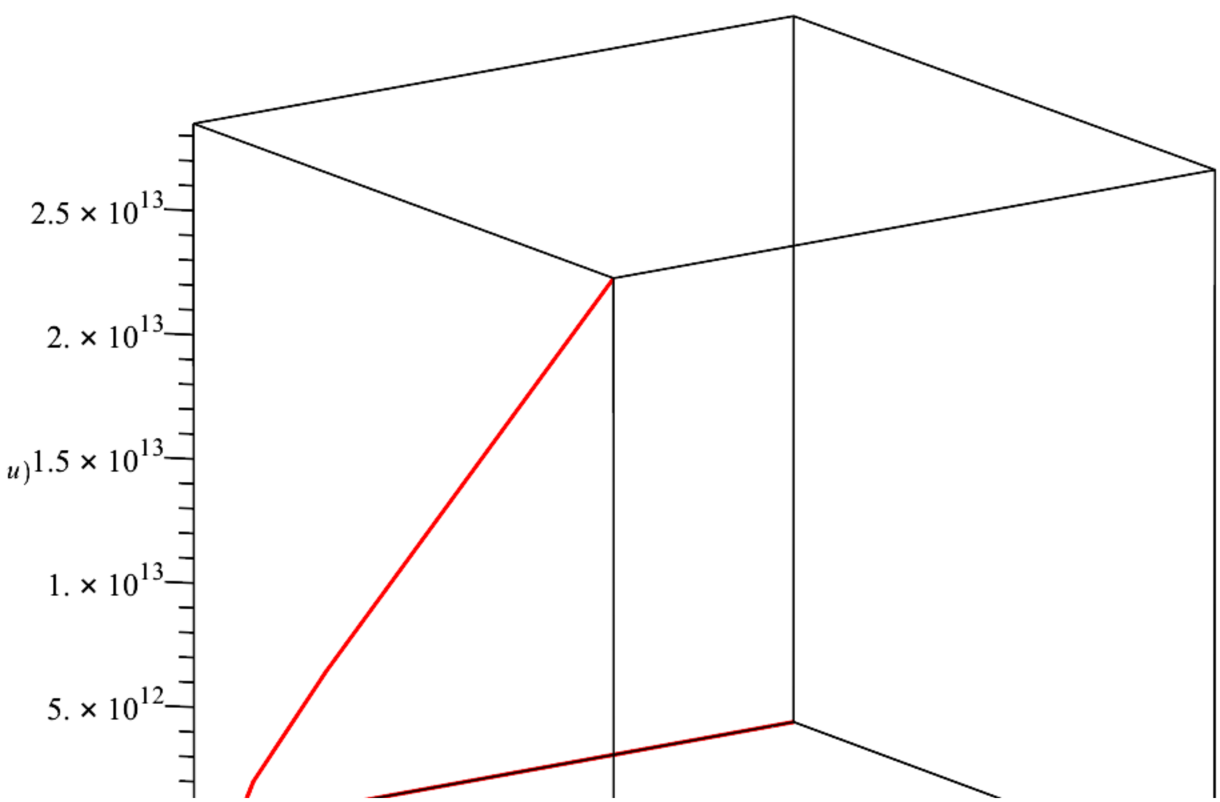
> *#Задание 3. Решите задачу Коши с помощью методов Лагранжа и Д'Аламбера. Сравните с результатом, полученным в Maple. Сделайте чертеж.*

$Dx := diff(x(u), u) = x(u) + 2\cdot y(u);$
$Dy := diff(y(u), u) = 2\cdot x(u) + y(u) + 1;$
$dsolve([Dx, Dy, x(0) = 0, y(0) = 5]); with(DEtools):$
$DEplot3d([Dx, Dy], [x(u), y(u)], u = -10..10, [[x(0) = 0, y(0) = 5]], linecolor = red);$

$$Dx := \frac{d}{du}\, x(u) = x(u) + 2\, y(u)$$

$$Dy := \frac{d}{du}\, y(u) = 2\, x(u) + y(u) + 1$$

$$\left\{ x(u) = \frac{8\, e^{3u}}{3} - 2\, e^{-u} - \frac{2}{3},\, y(u) = \frac{8\, e^{3u}}{3} + 2\, e^{-u} + \frac{1}{3} \right\}$$



>