1
#
, . 3 5 3 5 0 4
1
MathematicalFunctions

#Задание 1. Упростите алгебраическое выражение`.`

$p1 := \frac{x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18}{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18}:$

$p2 := \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}:$

$p := \frac{p1}{p2}:$

simplify(p);

#Функция simplify(p) *упрощает выражение* $\cdot(\ p\ )$, *приводя его к более компактной форме.*

$$\frac{x+1}{x-2} \tag{1}$$

#Задание 2. Приведите выражение к многочлену стандартного вида.

$p := (2x - 1)\cdot(3x^2 + 5)\cdot(5x + 2):$

expand(p);

#Функция expand(p) раскрывает скобки и приводит выражение к стандартному виду многочлена.

$$30x^4 - 3x^3 + 44x^2 - 5x - 10 \tag{2}$$

#Задание 3. Разложите многочлен на множители

$p := 14x^4 - 46x^3 - 82x^2 + 138x + 120:$

factor(p); *#Функция factor(p) раскладывает многочлен на множители.*

solve(p); *#Функция solve*(p) *находит корни многочлена, то есть значения* $(\ x\ )$,
при которых многочлен равен нулю
. Это может включать нахождение действительных и *комплексных корней.*

$$2\,(7x + 5)\,(x - 4)\,(x^2 - 3)$$

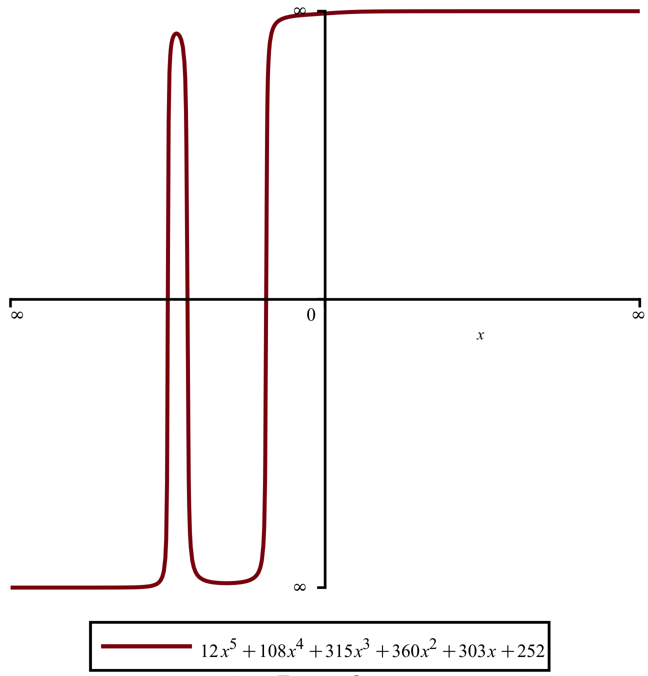
$$-\frac{5}{7}, 4, \sqrt{3}, -\sqrt{3} \tag{3}$$

#Задание 4. Постройте график многочлена $P_5(x)$ и *найдите все его корни.*

$p := 12x^5 + 108x^4 + 315x^3 + 360x^2 + 303x + 252:$

plot$(p,\ x = -infinity..infinity,\ legend = p)$;

roots are solve$(p = 0)$;



$roots\ are\ \left(\ \frac{7}{2},\ \ \frac{3}{2},\ -4,\ \mathrm{I},\ -\mathrm{I}\right)$ **(4)**

> #Задание 5. Разложите рациональную дробь на сумму простейших дробей.

$p := \dfrac{5\,x^4 + 7\,x^3 + 5\,x \quad 4}{\left(x^2+4\right)\cdot\left(x \quad 2\right)^2\cdot\left(x^2 \quad 1\right)}$:

convert(*p*, *parfrac*);

#Функция convert(p, parfrac) преобразует рациональную функцию в сумму частичных дробей.

$$\frac{13}{10\,(x \quad 1)} + \frac{11}{90\,(x+1)} + \frac{71}{12\,(x \quad 2)^2} \quad \frac{17}{36\,(x \quad 2)} + \frac{19\,x \quad 23}{20\,\left(x^2+4\right)} \qquad \textbf{(5)}$$

> #Задание 6. Решите графически уравнение и найдите его приближенные корни с точностью до 10 ^{5} .

p1 := ln(*x*   1)^2;
p2 := 3 * cos(2 * *x*)   1;

# Строим графики функций p1 и p2 на всей области определения
plot([*p1*, *p2*], *x* =   infinity .. infinity, *color* = ["Red", "Green"], *legend* = [*p1*, *p2*]);

# Строим графики функций p1 и p2 на промежутке от 1 до 5
plot([*p1*, *p2*], *x* = 1 .. 5, *color* = ["Red", "Green"], *legend* = [*p1*, *p2*]);

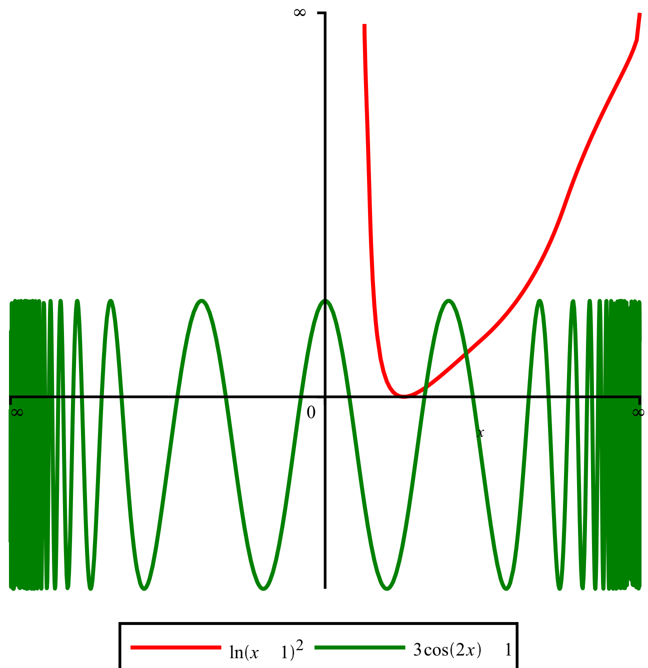
# Строим графики функций p1 и p2 на небольшом интервале около x = 2.56172
plot([*p1*, *p2*], *x* = 2.56172 .. 2.56173, *color* = ["Red", "Green"], *legend* = [*p1*, *p2*]);

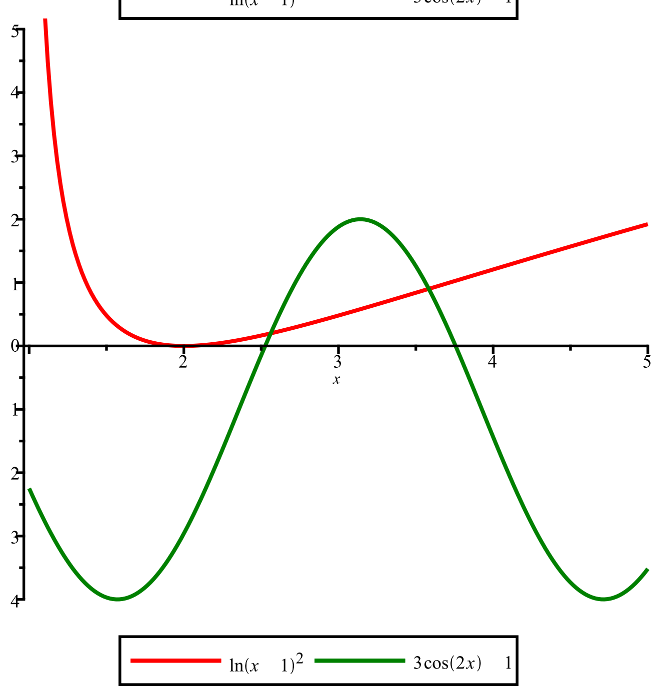
# Строим графики функций p1 и p2 на небольшом интервале около x = 3.58382
plot([*p1*, *p2*], *x* = 3.58382 .. 3.58383, *color* = ["Red", "Green"], *legend* = [*p1*, *p2*]);

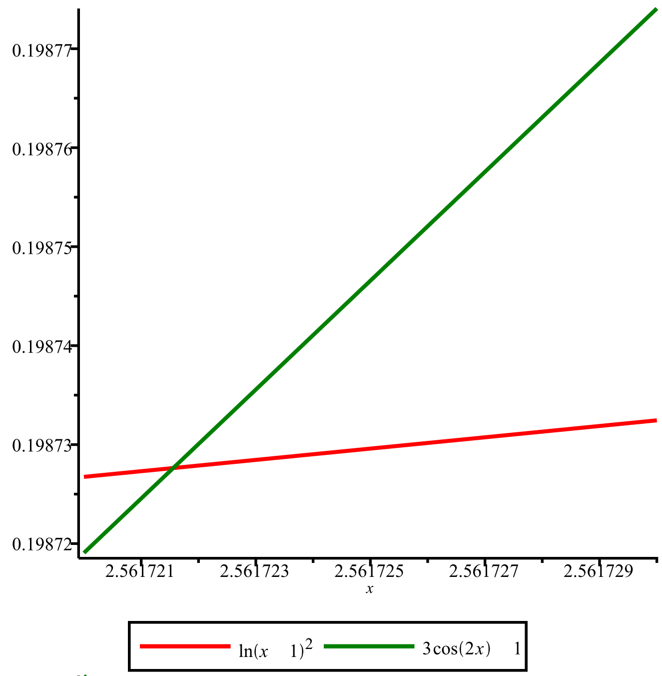
Находим численные решения уравнения $p1 = p2$ на интервале от 2 до 4
$ans1 := fsolve(p1 = p2, x = 2 .. 4);$

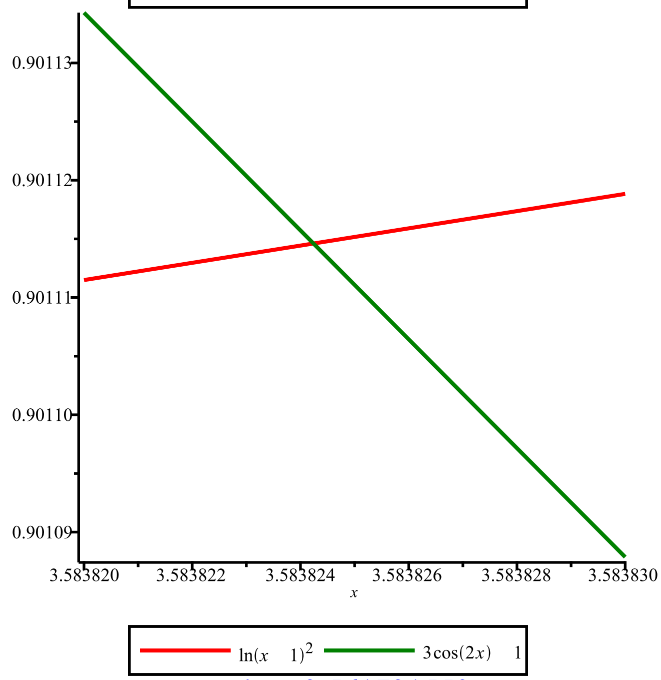
Находим численные решения уравнения $p1 = p2$ на интервале от 3 до 4
$ans2 := fsolve(p2 = p2, x = 3 .. 4);$

$$p1 := \ln(x-1)^2$$
$$p2 := 3\cos(2x) - 1$$









$$ans1 := 2.561721559$$

$$ans2 := 3.583824240 \qquad \textbf{(6)}$$

> *#Задание 7. Докажите, что* $\lim\limits_{n \to \text{infinity}} (a_n) = a$ *, определив номер* n_ε,
начиная с *которого все члены последовательности* (a_n) *попадут* в ε
окрестность точки a
. *Проиллюстрируйте полученный результат* с *помощью чертежа* в *Maple*, *положив* ε
= 0, 1.

 # Определяем последовательность an
$an := (5*n \quad 2)/(2*n \quad 1);$

Находим предел последовательности an при n, стремящемся к бесконечности
$a := limit(an, n = \text{infinity});$

Задаем значение ε (эпсилон) для окрестности предела
$\text{varepsilon} := 1/10;$

Решаем неравенство для нахождения N, начиная с которого все элементы последовательности an
находятся в ε-окрестности предела a
$N := solve(a - \text{varepsilon} < an \textbf{ and } an < a + \text{varepsilon}, n);$

Строим график точек последовательности an для n от 3 до 40
$y1 := plots[pointplot](\{seq([n, an], n = 3..40)\}):$

Строим линии, представляющие предел a и его ε-окрестность
$y2 := plot([a - 1/10, a, a + 1/10], x = 3..40, color = [blue, red, blue]):$

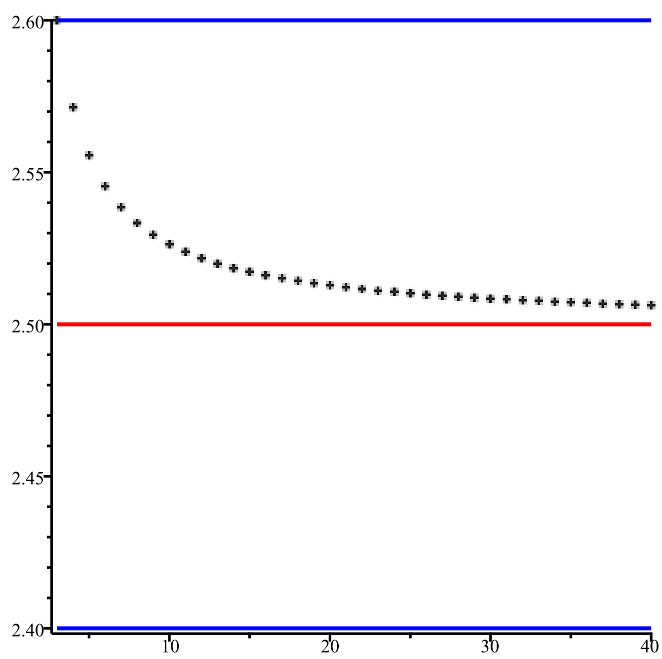
Отображаем оба графика вместе
$plots[display](y1, y2);$

$$an := \frac{5\,n-2}{2\,n-1}$$

$$a := \frac{5}{2}$$

$$\varepsilon := \frac{1}{10}$$

$$N := (-\infty, -2), (3, \infty)$$



> # Задание 8. Вычислите пределы числовых последовательностей.

$p1 := n \cdot \left(\mathrm{sqrt}\left(n^2+1\right) - \mathrm{sqrt}\left(n^2-1\right)\right):$
$limit(p1, n = \mathrm{infinity});$
$p2 := \left(\frac{3 \cdot n^2 - 6 \cdot n + 7}{3 \cdot n^2 + 20 \cdot n - 1}\right)^{1-n}:$
$limit(p2, n = \mathrm{infinity});$

$$\frac{1}{e^{\frac{26}{3}}} \qquad (7)$$

> # *Задание 9. Для заданной кусочно−непрерывной функции выполните следующие действия.*
> # *Определите ее через функциональный оператор и постройте график.*

$f := x \rightarrow \begin{cases} 5 \cdot \sin(2x) & x < -\mathrm{Pi} \\ 7 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & x \geq -\mathrm{Pi} \end{cases}:$

$plot(f(x), x = -\mathrm{infinity}..\mathrm{infinity}, color = \text{"Green"}, legend = f(x));$

В точке разрыва и на бесконечности найдите односторонние пределы.

$limit(f(x), x = -\mathrm{Pi}, left);$
$limit(f(x), x = -\mathrm{Pi}, right);$
$limit(f(x), x = -\mathrm{infinity});$
$limit(f(x), x = \mathrm{infinity});$

Найдите производную и неопределенный интеграл на каждом из промежутков непрерывности.

$diff(f(x), x);$
$int(f(x), x);$

Постройте в одной системе координат графики функции, производной и какой−нибудь первообразной.

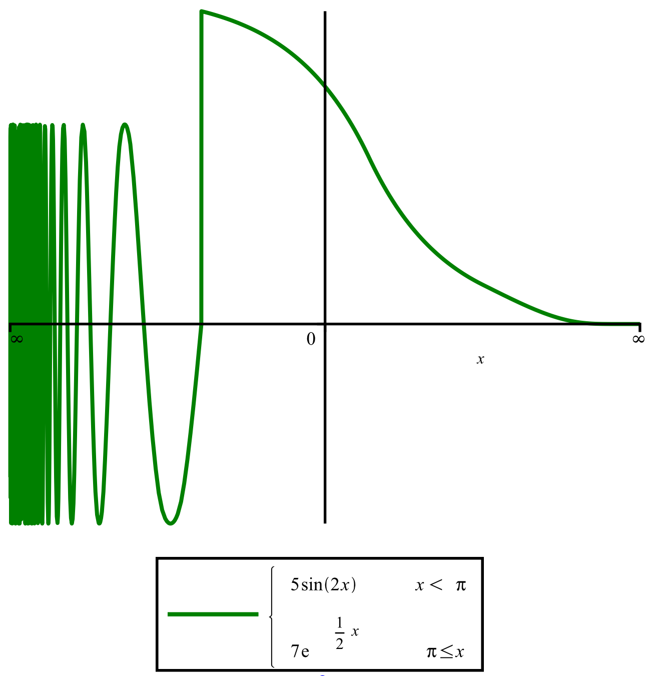
$plot([f(x), diff(f(x), x), int(f(x), x)], legend = [f(x), diff(f(x), x), int(f(x), x)], discont = true);$

Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции и прямыми x = 1, x = 5, y = 0. Сделайте чертеж.
Вычисляем определенный интеграл функции f на интервале от 1 до 5

$S = int(f(x), x = 1..5);$

Строим область, ограниченную функцией f, осью x и вертикальными линиями x = 1 и x = 5

$plots[inequal](\{y < f(x), y > 0, x > 1, x < 5\}, x = -10..10, y = -10..10);$



$$0$$

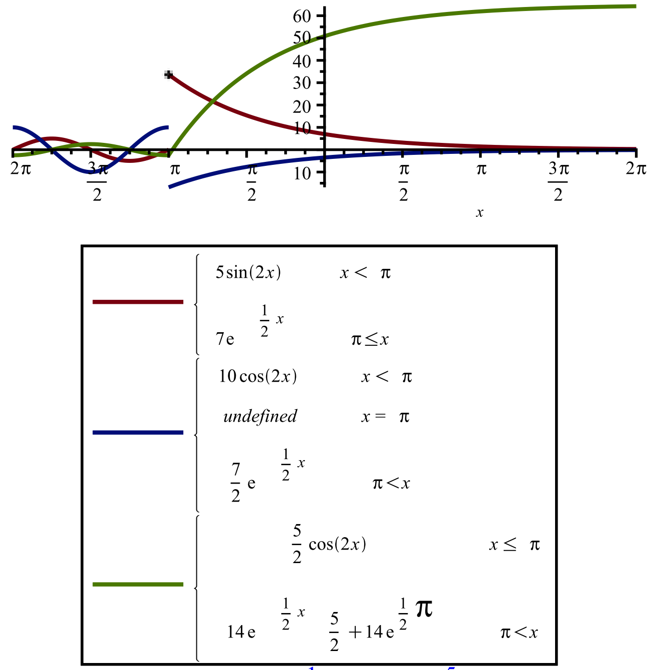
$$7\,e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-5..5$$

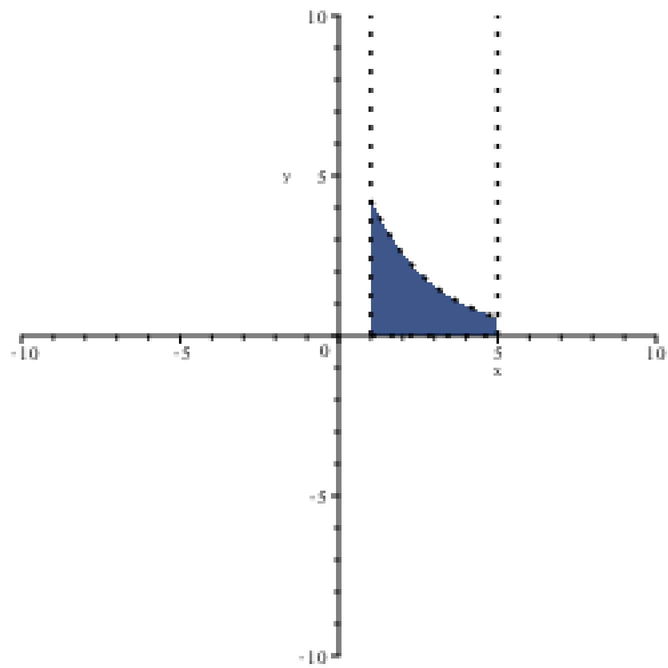
$$0$$

$$\begin{cases} 10\cos(2\,x) & x < \quad \pi \\ \mathit{undefined} & x = \quad \pi \\ \dfrac{7\,e^{\frac{x}{2}}}{2} & \pi < x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{5\cos(2\,x)}{2} & x \leq \quad \pi \\ 14\,e^{\frac{x}{2}} \quad \dfrac{5}{2} + 14\,e^{\frac{\pi}{2}} & \pi < x \end{cases}$$



$S = 14\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \quad 14\,\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$



>

> *#Задание 10. Постройте кривые на плоскости. Для кривой 2−го порядка найдите каноническое уравнение с помощью ортогонального преобразования.*

$p1 := \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{3x}{5}} \cdot \sin(5x+3):$

$plot(p1, x = \ \text{infinity}..\infty, color = \text{"Red"}, legend = p1);$

$p2 := (x, y) \rightarrow 5 \cdot x^2 \quad 6 \cdot x \cdot y + 5 \cdot y^2 \quad 24 \cdot x \quad 32 = 0;$

$plots[implicitplot](p2(x, y), x = \ \ 10..10, y = \ \ 10..10, color = \text{"Green"}, legend = p2(x, y));$

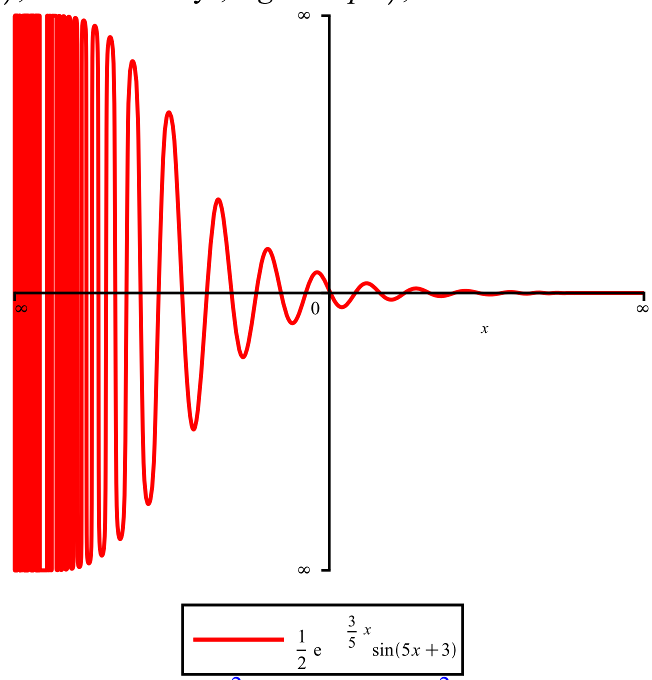
$p3x := t \rightarrow 2 \cdot (t + \sin(t)):$

$p3y := t \to 2 \cdot (1 - \cos(t))$:

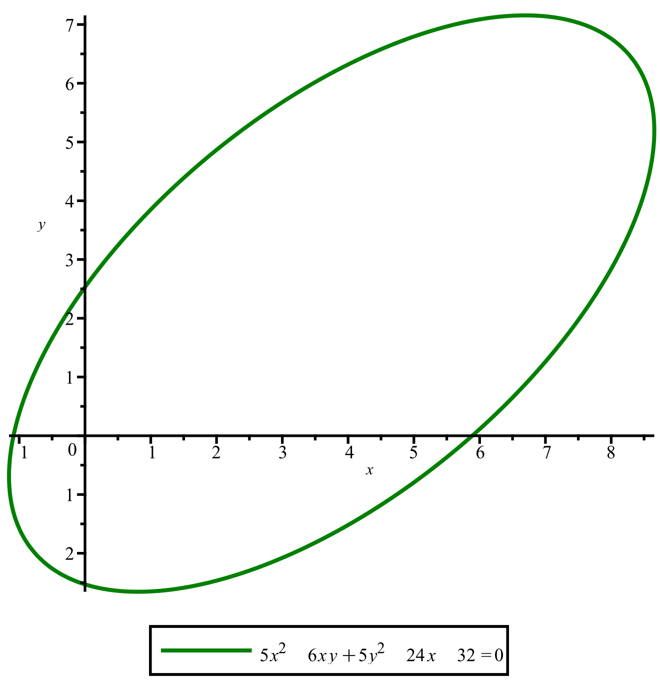
plot([*p3x*(*t*), *p3y*(*t*), *t* =- infinity ..infinity], *color* = "Purple", *legend* = { *x* = *p3x*(*t*), *y* = *p3y*(*t*) });

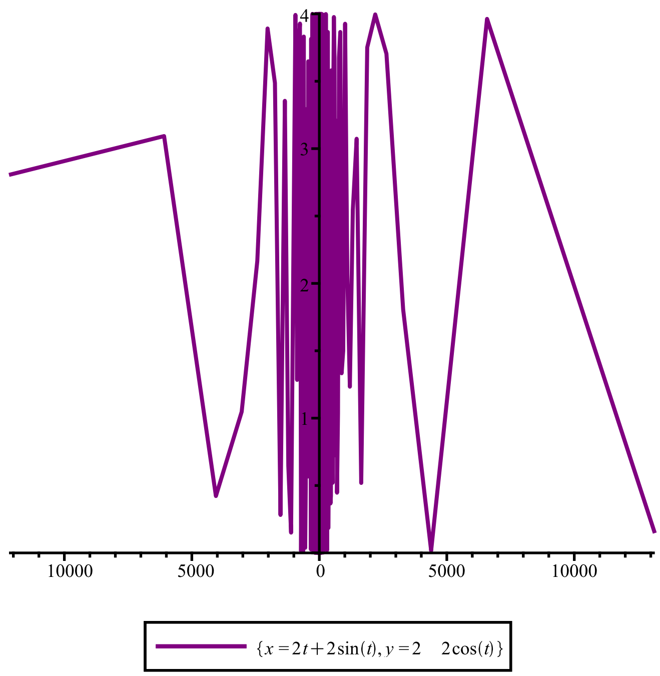
$p4 := 1 + 2 \cdot \sin\left(3\,\phi + \frac{\mathrm{Pi}}{4}\right)$:

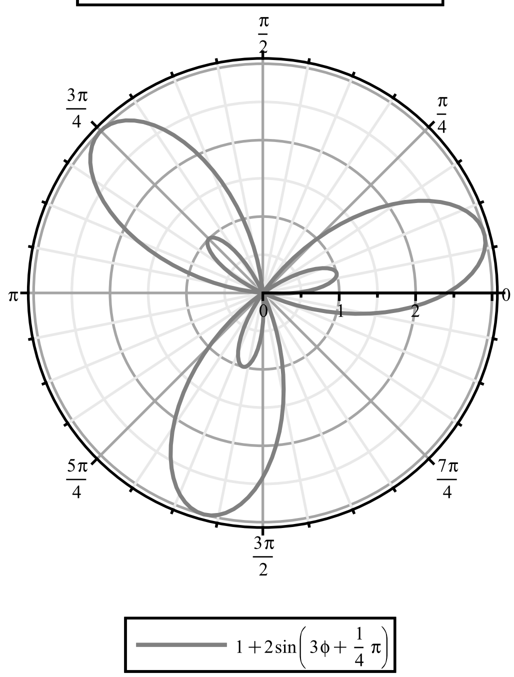
plots[*polarplot*](*p4*(ϕ), *color* = "Grey", *legend* = *p4*);



$p2 := (x, y) \mapsto 5 \cdot x^2 \quad 6 \cdot y \cdot x + 5 \cdot y^2 \quad 24 \cdot x \quad 32 = 0$








```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :

   A := Matrix([[5, 3], [3, 5]]) :
   #detA := det(A);

  # Находим собственные значения и собственные векторы матрицы A
   lambda := Eigenvectors(A);

   # Находим нормированные вектора
  e1 := Normalize(Column(lambda[2], [1]), Euclidean);
   e2 := Normalize(Column(lambda[2], [2]), Euclidean);
```

$expr := simplify\left(subs\left(x = e1[1]\cdot x1 + e2[1]\cdot y1, y = e1[2]\cdot x1 + e2[2]\cdot y1, 5\cdot x^2 - 6\cdot y\cdot x + 5\cdot y^2 - 24\cdot x - 32\right)\right);$

$pseudocanon\_expr := Student[Precalculus][CompleteSquare](expr);$

$canon\_expr := subs\left(y1 = y2 + 3\sqrt{2}, x1 = x2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}, pseudocanon\_expr\right);$

$plots[implicitplot]\left(\left[5\cdot x^2 - 6\cdot y\cdot x + 5\cdot y^2 - 24\cdot x - 32 = 0, 2\left(y - 3\sqrt{2}\right)^2 + 8\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 77 = 0, 8x^2 + 2y^2 - 77 = 0\right], x = -100..100, y = -100..100, scaling = constrained, color = ["Blue", "Green", "Red"], legend = \left[5\cdot x^2 - 6\cdot y\cdot x + 5\cdot y^2 - 24\cdot x - 32 = 0, 2\left(y - 3\sqrt{2}\right)^2 + 8\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 77 = 0, 8x^2 + 2y^2 - 77 = 0\right]\right);$

$$\lambda := \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

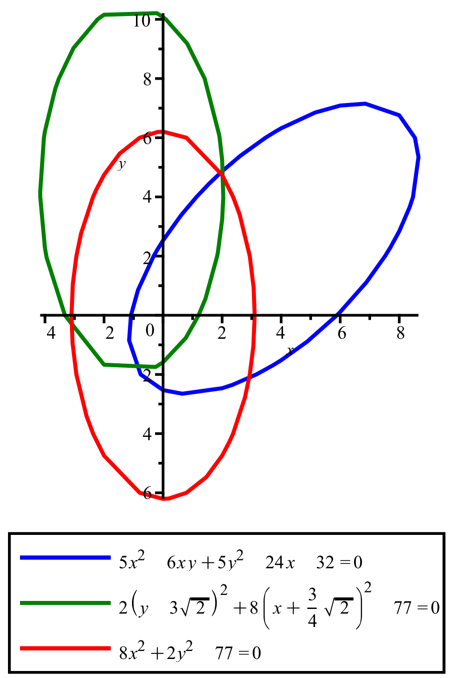
$$e1 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$e2 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$expr := (-12\,x1 + 12\,y1)\sqrt{2} + 2\,x1^2 + 8\,y1^2 - 32$$

$$pseudocanon\_expr := 8\left(y1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 2\left(x1 - 3\sqrt{2}\right)^2 - 77$$

$$canon\_expr := 8\left(y2 + \frac{15\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 2\left(x2 - \frac{15\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 77$$



10
8
6
4
2
0
2
4
6
y
x
4
2
2
4
6
8
5x^2 6xy + 5y^2 24x 32 = 0
2(y 3√2)^2 + 8(x + 3/4 √2)^2 77 = 0
8x^2 + 2y^2 77 = 0