Étude dynamique du couple moteur de l'essuie-glace

Nissan Qashqai – Analyse du système amorti

Loubna Taleb-Zélie Besancenet

Mars 2025

Modélisation dynamique

On applique la deuxième loi de Newton pour la rotation :

$$\sum \tau = J\ddot{\theta}(t)$$

où :

- J est le moment d'inertie (kg·m²),
- $\ddot{\theta}(t)$ est l'accélération angulaire (rad/s²),
- $\sum \tau$ est la somme des couples appliqués autour de l'axe.

Dans le cas de l'essuie-glace, les couples suivants s'appliquent :

- Le couple moteur $C(t)$ (forçage),
- Le couple de rappel élastique $-k\theta(t)$ (provenant de la déformation élastique des composants comme les tiges, axes, bielles... selon la loi de Hooke),
- Le couple d'amortissement visqueux $-c\dot{\theta}(t)$ (modélisation des pertes mécaniques et frottements).

On obtient donc :

$$J\ddot{\theta}(t) = C(t) - c\dot{\theta}(t) - k\theta(t)$$

Ce qui donne l'équation différentielle complète :

$$J\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = C(t)$$

En divisant par J, on obtient la forme normalisée :

$$\ddot{\theta}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{\theta}(t) + \omega_0^2\theta(t) = \frac{C(t)}{J}$$

avec :

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{J}}$: pulsation propre (rad/s),
- $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{kJ}}$: coefficient d'amortissement.

Étude du système libre (sans forçage)

On étudie l'équation sans couple moteur externe ($C(t) = 0$) :

$$\ddot{\theta}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{\theta}(t) + \omega_0^2\theta(t) = 0$$

On résout l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 4\omega_0^2(\zeta^2 - 1)$$

Cas 1 : Sous-amorti ($0 < \zeta < 1$)

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

La solution est :

$$\theta(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right)$$

avec $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$.

$\Rightarrow$ **Oscillations décroissantes dans le temps**, c'est ce qu'on observe sur le signal mesuré par la jauge de contrainte.

Cas 2 : Amortissement critique ($\zeta = 1$)

$$\lambda = -\omega_0$$

Solution :

$$\theta(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

$\Rightarrow$ Pas d'oscillation, retour rapide à l'équilibre.

Cas 3 : Sur-amorti ($\zeta > 1$)

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Solution :

$$\theta(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

$\Rightarrow$ Retour lent à l'équilibre sans oscillation.

Conclusion sur l'allure du couple

La forme du couple mesuré sur le bras d'essuie-glace (signal orange) montre des **oscillations qui décroissent dans le temps**. Cela correspond au cas d'un **système sous-amorti** ($0 < \zeta < 1$). Ces oscillations sont causées par :

- Les effets d'inertie lors du démarrage du mouvement,
- Les liaisons mécaniques élastiques (tiges, bielles, paliers, déformations de l'axe moteur...),
- Le comportement dynamique avec frottement et souplesse (modélisé par un ressort et un amortisseur).