关于求和

1. 求 $1 + 2 + \cdots n$
2. 求 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$
3. 求和 $\sum_i^k f(i)$, 表示 $f(i) + f(i+1) + \cdots + f(k)$, 因此问题
   (a) 1 可以写成 $\sum_i^n i$
   (b) 2 可以写成 $\sum_i^n i^2$

Solution:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solution:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

提供一种计算方法, 由

$$(i+1)^3 - i^3 = i^3 + 3i + 3i^2 + 1 - i^3 = 3i + 3i^2 + 1$$

得

$$\sum_{i=1}^{n} \{(i+1)^3 - i^3\} = \sum_{i=1}^{n} \{3i + 3i^2 + 1\}$$

而

$$\sum_{i=1}^{n} \{(i+1)^3 - i^3\} = \sum_{i=2}^{n+1} i^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)^3 - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \{3i + 3i^2 + 1\} = \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + \frac{n(3n+5)}{2}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)^3 - 1}{3} - \frac{n(3n+5)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$