6.2　正切函数的图像与性质

1. (1) 求函数 $y=\tan\frac{x}{a}$ 的最小正周期

> **解:**
> 因为 $\tan x$ 的周期为 π, 所以有 $\frac{\pi}{\frac{1}{|a|}}=|a|\pi$

(2) 求函数 $y=\tan x-\cot x$ 的最小正周期

> **解:**
> $y=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=-2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=-2\cot 2x$ 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

2. 下列不等式中成立的是? ____**B**____

A. $\tan(1)<\tan(4)$　**B.** $\cot(1)<\cot(4)$　C. $\sin(1)<\sin(4)$　D. $\cos(1)<\cos(4)$

> **解:**
> 注意到 $\sin 1>0,\sin 4<0$ 以及 $\cos 1>0,\cos 4<0$ 可以知道 C,D 错误
> 由于 $\tan 4=\tan(4-\pi+\pi)=\tan(4-\pi)<\tan 1$ 故 A 错
> $\cot 4=\cot(4-\pi+\pi)=\cot(4-\pi)>\cot 1$

3. 求函数 $y=\tan(3x+\frac{\pi}{4})$ 的单调递增区间

> **解:**
> $$k\pi-\frac{\pi}{2}<3x+\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$$
> $$x\in(\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{4},\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}),k\in Z$$

4. 求函数 $y=\tan(2x-\frac{\pi}{4})$ 的对称中心

解:

先求 $y=\tan x$ 的对称中心, 设对称中心为 $(a,0)$ 根据对称中心的定义,应该有 f(x)+f(2a-x)=0, 由此可知 $2a=k\pi$, 即 $y=\tan x$ 的对称中心为 $(\frac{k\pi}{2},0), k\in Z$ 因此只需要

$$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{k\pi}{2}$$

即

$$x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$$

即对称中心为 $(x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8},0), k\in Z$

5. (1) 函数 $y=\tan(|x|)$ 的图像关于 $\underline{\quad x=0 \quad}$ 对称

   (2) 函数 $y=\tan x+\cot x$ 的奇偶性是 ___奇函数___

6. 在下列函数中, 同时满足：(1) 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上递增; (2) 以 2π 为最小正周期; (3) 为奇函数的函数是___**C**___

   A. $y=\tan x$ B. $y=\cos x$ **C.** $y=\tan\frac{x}{2}$ D. $y=-\tan x$

7. 求下列函数的定义域

   (1) $\tan x\cdot\cot x$

解:

定义域是 $\tan x$ 的定义域和 $\cot x$ 定义域的交 $\{x|x\in R, x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z\}$

   (2) $y=\frac{1}{1+\tan 2x}$

解:

1. $\tan 2x\neq -1 \Longrightarrow x\neq-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$
2. $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ 因此定义域为 $\{x|x\in R, x\neq-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$ 且 $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z\}$

   (3) $y=\lg(\tan x+1)$

解:

1. $\tan x+1>0 \Longrightarrow x\in(-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$

8. (1) 函数 $y=\tan(\frac{\pi}{3}-x), x\in[0,\frac{\pi}{3}]$ 的值域是 **$[0,\sqrt{3}$**]

   (2) 已知 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$, 求函数 $y=\sec^2 x+\tan x+2$ 的值域

解:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\cos^2 x}+\tan x+2 \\ &= \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}+\tan x+2 \\ &= \tan^2 x+\tan x+3 \\ &= (\tan x+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4} \end{aligned}$$

由于 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$, 可知 $\tan x\in[-\frac{\sqrt{3}}{3},1]$, 所以 $y\in[\frac{11}{4},5]$

9. 函数 $y=a\tan x+b$ 在区间 $[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{3}]$ 的最大最小值分别为 $\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1$, 求实数 a,b

解:

$$\begin{aligned} \sqrt{3}a+b &= \sqrt{3}+1 \\ -\sqrt{3}a+b &= \sqrt{3}-1 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow b=\sqrt{3}, a=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

或者

$$\begin{aligned} \sqrt{3}a+b &= \sqrt{3}-1 \\ -\sqrt{3}a+b &= \sqrt{3}+1 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow b=\sqrt{3}, a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

10. $y=\sin x$ 与 $y=\tan x$ 的图像在 $[-2\pi,2\pi]$ 的交点个数为 **5**

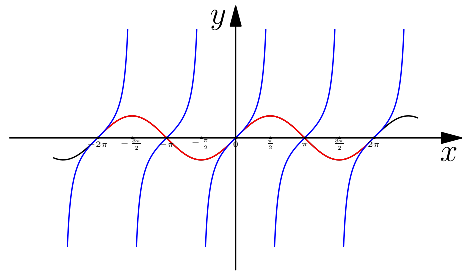


图 1: $y=\sin x$ 和 $y=\tan x$ 图像

解:

只需要求 $\sin x=\tan x$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 上的根的个数即可

即 $\cos x=1$ 或者 $\sin x=0$

11. 直线 $y=a$ 与正切函数 $y=\tan\omega x,\omega>0$ 图像相邻两个交点间的距离为 $\underline{\quad\frac{\pi}{\omega}\quad}$

解:

设相邻的两个点为 $(x_1,a),(x_2,a)$ 问题要求的是 $|x_1-x_2|$, 因为 $\tan\omega x$ 在所属的一个周期里单调，出现相等只能发生在两个周期之间，所以 $|x_1-x_2|$ 等于 $\tan\omega x$ 的最小正周期 $\frac{\pi}{\omega}$

12. 函数 $y=A\tan(\omega x+\phi),A>0,\omega>0,|\phi|<\frac{\pi}{2}$ 的图像与 x 轴相交的两相邻点坐标分别为 $(\frac{5\pi}{6},0),(\frac{\pi}{6},0)$, 且经过点 $(0,-3)$, 求函数表达式。

解:

由 $T=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$ 得

$$\omega=\frac{\pi}{T}=\frac{3}{2}$$

将 $(\frac{\pi}{6},0)$ 代入得

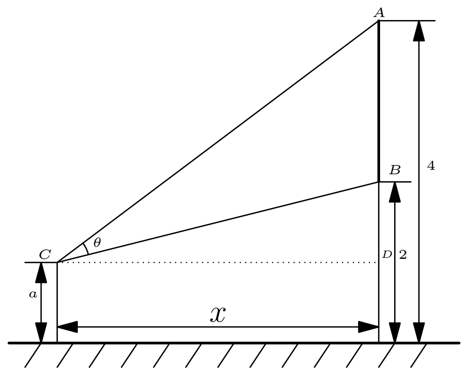
$$\phi=-\frac{\pi}{4}$$

将 $(0,-3)$ 代入得

$$A=3$$

所以函数为 $y=3\tan(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4})$

13. 如图，墙上有一壁画，最高点 A 离地面高 4 米, 最低点 B 离地面 2 米, 观察者从距离墙 $x(x>1)$ 米，离地面高 $a(1\le a\le 2)$ 米的 C 处观赏该壁画, 设观赏视角 $\angle ACB=\theta$



(1) 若 $a=1.5$, 问：观察者离墙多远时，视角 θ 最大?

解:

设 $\theta_1=\angle BCD,\theta_2=\angle ACD$, 则 $\tan\theta_1=\frac{2-a}{x}$,$\tan\theta_2=\frac{4-a}{x}$ 而 $\theta=\theta_2-\theta_1$ 由

$$\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{(2-a)(4-a)}{x^2}}=\frac{2x}{x^2+(2-a)(4-a)}$$

当 $a=1.5$ 时,$\tan\theta=\frac{2x}{x^2+1.25}, x>1$. 因为

$$\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{2}(x+\frac{1.25}{x})\ge\sqrt{1.25}$$

可得 $\tan\theta\le\frac{1}{\sqrt{1.25}}$

(2) 若 $\tan\theta=\frac{1}{2}$, 当 a 变化时, 求 x 的取值范围?

解:

当 $\tan\theta=\frac{1}{2}$ 时

$$(x-2)^2=4-(2-a)(4-a), 1\le a\le 2$$

可知 $4-(2-a)(4-a)\in[1,4], \Longrightarrow x\in[3,4]$

14. 一幢高楼上安放了一块高约 10 米的 LED 广告屏，一测量爱好者在与高楼底部同一水平线上的 C 处测广告屏顶端 A 处的仰角为 31.80 度，再向大楼前进 20 米到 D 处，测得广告屏顶端 A 处的仰角为 37.78 度，人的高度忽略不计：

(1) 求大楼的高度 (从地面到广告屏顶端)(精确到 1 米)

解:

设房高为 y,D 距离房子距离为 x, 则有

$$\frac{y}{x} = \tan(37.78^{\circ})$$
$$\frac{y}{x+20} = \tan(31.80^{\circ})$$

$\Longrightarrow y = 61.97$

(2) 若大楼的前方是一片公园空地，空地上可以安放一些长椅，为使坐在其中一个长椅上的观看广告最清晰（长椅的高度忽略不计），长椅需安置在距大楼底部 E 处多远？已知视角 $\angle AMB$（M 为观测者的位置，B 为广告屏底部）越大，观看得越清晰.

解:

设距离为 x, $\tan\angle AMB = \tan(\angle AME - \angle BME)$, 则

$$\begin{aligned} y &= \tan\angle AMB \\ &= \frac{\tan\angle AME - \tan\angle BME}{1+\tan\angle AME \tan\angle BME} \\ &= \frac{\frac{62}{x} - \frac{52}{x}}{1+\frac{62*52}{x^2}} \\ &= \frac{10x}{x^2+3224} \\ &= \frac{10}{x+\frac{3224}{x}} \le \frac{5}{\sqrt{3224}} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow x = \sqrt{3224}$