第五章 三角比

5.1：任意角及其度量

1. 与987°角终边重合的角中，最小正角是__________，绝对值最小的角是__________.

2. 1790°是第________象限角.

3. 终边与-21°重合的角的集合为______________________，终边与$\dfrac{10\pi}{3}$重合的角的集合为____________________.

4. A是与角$2007^{\circ}26'$的终边重合的角的集合，则A中适合不等式$-360^{\circ} \le \beta < 720^{\circ}$的元素$\beta$ 有_______________.

5. 将下列角写成$2k\pi+\beta\left(k\in Z,\beta\in\left[0,2\pi\right)\right)$的形式：（1）$1690^{\circ}$；（2）$-\dfrac{49\pi}{3}$.

6. 设 $A=\left\{\theta\middle|\theta\text{为锐角}\right\}$，$B=\left\{\theta\middle|\theta\text{为第一象限角}\right\}$，$C=\left\{\theta\middle|\theta\text{为小于}90^{\circ}\text{的角}\right\}$，$D=\left\{\theta\middle|\theta\text{为小于}90^{\circ}\text{的正角}\right\}$，则（　　）

   A. $A=B$；　　B. $B=C$；　　C. $A=C$；　　D. $D=A$.

7. 下列命题中，正确的是（　　）

   A. 第一象限的角必是锐角　　B. 终边相同的角必相等

   C. 相等的角终边必相同　　D. 不相等的角终边位置必不相同

8 所有与角α终边相同的角可表示为$360^{\circ}\cdot k+\alpha,\left(k\in Z\right)$，其中$\alpha$为（　　）

   A. 一定是小于90°的角　　B. 一定是第一象限的角

   C.一定是正角　　D. 可以是任意角

9. 在下列命题中，真命题的是______________________.

   （1）第一象限角是正角；（2）钝角是第二象限角；（3）三角形内角必是第一象限或第二象限角；（4）终边相同的角是相等的角.

10. 已知$0<\beta<2\pi$，且角β的 7 倍角的终边与角β的终边重合，求角β.

11. 与$-\dfrac{35\pi}{3}$角的终边相同的角可以表示为：（1）$2k\pi-\dfrac{5}{3}\pi$；（2）$-2k\pi+\dfrac{5}{3}\pi$；（3）$-2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$；（4）$2k\pi-\dfrac{\pi}{3}$；$\left(k\in Z\right)$其中正确的序号是_____________________.

12. 时钟的分针经过 2 小时 40 分钟所转过的角是__________弧度，它是第______象限角.

13. 经过 40 分钟，时钟的秒针转过的角是__________弧度，时钟的时针转过的角是__________弧度.

14. （1）一条长度等于半径$\sqrt{3}$倍的弧所对的圆心角为________弧度.

（2）一条长度等于半径$\sqrt{3}$倍的弦所对的圆心角为________弧度.

（3）若半径为 1，弦长为 1，则弦所对的优弧长为__________.

15. 一个扇形的周长为 16，其面积为 12，求它的圆心角的大小.

16. 已知一个扇形的周长为定值a，求其面积的最大值，并求此时圆心角α的大小.

17. 一个扇形的面积为 10，则扇形周长的最小值为__________.

18. 若圆的一段弧长等于该圆的内接正三角形的边长，求这弧所对的圆心角的弧度数.

19. 若α是钝角，且α与9α的终边重合，则$\alpha=$____________.

20. 角α的终边落在区间$\left(-3\pi,-\dfrac{5\pi}{2}\right)$内，则角$\alpha$所在的象限是____________.

21. 若α是第一象限角，则$\dfrac{\alpha}{2}$是第_________象限角.

22.（1）终边落在第三象限角平分线上的角的集合为________________________.

（2）终边落在第四象限角平分线上的角的集合为________________________.

（3）终边落在直线$y=x$上的角的集合为________________________.

23. 若α是锐角，则$k\pi-\alpha,k\in Z$是第__________象限角.

24. 若角α与角β的终边关于x轴对称，则α与β的关系为___________________.

25. 角α和角β满足$\alpha=2k\pi+\pi-\beta,k\in Z$，则角$\alpha$与角$\beta$的终边关于__________对称.

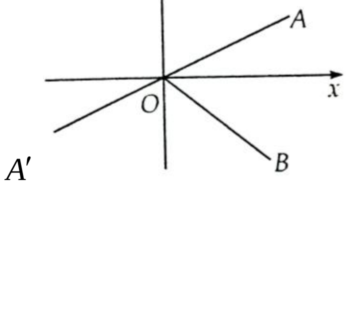
26. 已知集合$M=\left\{x\middle|x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},k\in Z\right\},P=\left\{x\middle|x=\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$，则（　　）

A. $M=P$　　B. $P\subsetneq M$　　C. $M\subsetneq P$　　D. $M\cap P=\phi$

27. 集合 $M=\{\ |x\ \ (x3\ \ )2k\ \ ,\ \}$，$N=\{x|x=(3k+1)\pi,k\in Z\}$，$S=\{x|x=(6k+1)\pi,k\in Z\}$之间的关系是（　　）

A. $S\subsetneq N\subsetneq M$　　B. $S=N\subsetneq M$　　C. $S\subsetneq N=M$　　D. $S\supsetneq N=M$

28. 如图，射线OA,OB与x轴的夹角为$\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}$；（1）求终边在直线$OA$上的角的集合；（2）终边在$\angle AOB$内（不包括边界）的角的集合；（3）终边在$\angle A'OB$内（包括边界）的角的集合.



29. 已知集合 $A=\left\{x\left|2k\pi-\frac{\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z\right.\right\},B=\left\{y\left|0<y<4\pi\right.\right\}$，求 $A\cap B$.

30. 已知集合 $A=\left[k\pi+\frac{\pi}{3},k\pi+\pi\right),k\in Z$，$B=\left\{y\left|y=-x^2-2x+4,x\in R\right.\right\}$，$C=\left\{y\left|y=2^x-4,x\in R\right.\right\}$，求 $A\cap B\cap C$.

5.2：任意角的三角比

1. 角α的终边经过点$\left(-1,2\right)$，则$\cos\alpha=$__________.

角α的终边经过点$\left(-a,2a\right),a\neq 0$，则$\cos\alpha=$__________.

2. 设$P\left(3,y\right)$是角α终边上的一点，若$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，则$y=$__________.

3. 已知P为角α终边上的一点，到原点的距离为$\sqrt{10}$且$\tan\alpha=-\dfrac{1}{3},0<\alpha<\pi$，则点$P$的坐标为____________.

4. （1）若角α的终边在直线$y=x$上，则$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=$__________.

（2）若角α的终边在直线$y=\sqrt{3}x$上，则$\tan\alpha=$__________.

5. 若$\sin\left(8\pi+\alpha\right)=\dfrac{1}{3}$，则$\sin\left(\alpha-108\pi\right)=$__________.

6. 计算：$\sin 390^\circ+\cos\left(-660^\circ\right)+3\tan 405^\circ-\sec 540^\circ=$__________.

7. 满足$\sin\alpha=0$且$\cos\alpha=-1$的角的集合是________________.

8. 下列等式中不成立的是________________.

（1）$\sin\alpha=\dfrac{\pi}{2}$；（2）$\cos\beta=-2$；（3）$\tan\theta=-2007$；（4）$\sec\gamma=\dfrac{1}{2}$.

9. 已知A为ΔABC的一个内角，下列三角比值中能取到负值的是________________.

（1）$\sin A$；（2）$\cos A$；（3）$\tan A$；（4）$\cot\dfrac{A}{2}$；（5）$\cos\left(B+C\right)$；（6）$\sec\dfrac{B+C}{2}$.

10. 当$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$时，$\dfrac{\left|\sin\alpha\right|}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\left|\cos\alpha\right|}+\dfrac{\left|1-\cos\alpha\right|}{\cos\alpha-1}=$__________.

11. 若$\tan\alpha$与$\cos\alpha$同号，且$\sec\alpha=10$，则角α是第________象限角.

12. 若角α是第三象限角，且$\sin\dfrac{\alpha}{2}<0$，则角$\dfrac{\alpha}{2}$是第_________象限角.

13. 下列命题中正确的是____________________.

（1）若$\cos\alpha<0$，则α是第二象限或第三象限角；

（2）若$\sin\alpha=\sin\beta$，则α与β终边重合；

（3）α是第三象限角的一个充要条件是$\sin\alpha\cos\alpha>0$且$\cot\alpha\cos\alpha<0$；

（4）若$\alpha>\beta$，则$\cos\alpha<\cos\beta$.

14. 已知α是第四象限角，且$\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$，则$\sin\alpha=$__________；$\cos\alpha=$__________.

15. 已知$\cos\alpha=\dfrac{1}{3},\alpha$为第四象限角，则$\sec\alpha=$__________；$\csc\alpha=$__________.

16. 已知$\tan\alpha=-2$，求角α的其余三角比.

17. 求值：$6\cos270^\circ+10\sin0^\circ-4\tan180^\circ+5\cos360^\circ=$________.

18. 已知$\dfrac{\cos\theta}{\tan\theta}>0$，则$\theta$为第________象限角.

19. 若$|\cos\alpha|=\cos\alpha$，则$\alpha\in$______________. 若$|\sin\alpha|=\sin\alpha$，则$\alpha\in$_______________.

20. 已知α是第二象限角，其终边上有一个点$P\left(x,\sqrt{5}\right)$，且$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$，则$\tan\alpha=$________.

21. 已知$-\pi<\alpha<\pi$，且$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则$\alpha=$________.

22. 化简：

（1）$m^2\sin\left(-630^\circ\right)+n^2\tan\left(-315^\circ\right)-2mn\cos\left(-720^\circ\right)=$__________.

（2）$m\sin\dfrac{7\pi}{2}+n\cos\dfrac{5\pi}{2}+p\cos\left(-5\pi\right)+q\tan\dfrac{13\pi}{4}=$__________.

23. 用列举法表示集合$\left\{x\left|x=\cos\dfrac{k\pi}{3},k\in Z\right.\right\}$为____________________.

5.3（1）：同角三角比

1. 已知$\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$，则角$\alpha$的终边在第__________象限.

2. 若$\sin\theta=\dfrac{m-3}{m+5},\cos\theta=\dfrac{4-2m}{m+5}$，则$m=$____________.

3. 下列四个命题中，正确的是____________.

（1）$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$且$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$；（2）$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$且$\csc\alpha=2$；

（3）$\sin\alpha=0$且$\cos\alpha=-1$；（4）$\sec\alpha=-2$且$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

4. 已知$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，求$\tan\alpha+\cot\alpha$.

5. 已知角α的终边在直线$y=-\dfrac{4}{3}x$上，求$\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}$.

6. 已知$\tan\alpha=2$，求$\dfrac{1}{1+\sin\alpha}+\dfrac{1}{1-\sin\alpha}$.

7. （1）若$\dfrac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\cos\alpha+3\sin\alpha}=\dfrac{6}{11}$，求$\tan\alpha$；

（2）若$1+\sin^2\alpha=3\sin\alpha\cos\alpha$，求$\tan\alpha$.

8. 若$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{8},\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求$\cos\alpha-\sin\alpha$.

9. 设$0<\theta<\pi$，且$\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$，求$\sin^2\theta-\cos^2\theta$.

10. 设α是第二象限角，$\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$，求$\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}$.

5.3（2）：诱导公式

1. $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，α 是第二象限角，则 $\cos\alpha=$_____________.

2. $\cot(\pi+\theta)=2$，则 $\frac{3\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=$________________.

3. $\cot^2\alpha-\csc^2\alpha=$________________.

4. $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}, x\in[0,2\pi)$，则 $x=$__________________.

5. 若 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$，则 $\sin\theta\cos\theta=$_______________.

6. α 是第三象限的角, $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$，则 $\tan\alpha=$____________.

7. $\cos(\pi+\theta)=-\frac{3}{5}, \theta\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$, 则 $\sin(2\pi-\theta)=$______________.

8. 若 $\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则 $\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\sin\theta}=$_______________.

9. 求 $\frac{\sin\left(-\alpha\right)}{\sin\left(180^\circ+\alpha\right)}-\frac{\cot\left(180^\circ-\alpha\right)}{\cot\left(180^\circ+\alpha\right)}+\frac{\cos\left(360^\circ-\alpha\right)}{\cos\left(180^\circ-\alpha\right)}$.

10. 求 $\frac{\sin\left(\pi-\theta\right)}{\tan\left(\pi+\theta\right)}\cdot\frac{\tan\left(2\pi-\theta\right)}{\cos\left(\pi-\theta\right)}\cdot\frac{\cos\left(2\pi-\theta\right)}{\sin\left(\pi+\theta\right)}$.

11. 设 $\frac{\sin\left(\pi-\theta\right)+\cos\left(2\pi-\theta\right)}{\sin\left(6\pi+\theta\right)+\cos\left(3\pi-\theta\right)}=2$，求 $\sin\theta\cdot\cos\theta$.

12. 已知关于 x 的方程 $x^2-(\tan\alpha+\cot\alpha)x+1=0$ 的一个实数解是 $2+\sqrt{3}$，求 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

13. 已知 $\sin\alpha$ 是方程 $25x^2-5x-12=0$ 的根，且 $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，求 $\frac{\cos(\alpha-4\pi)\tan(3\pi+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)\cot(\alpha-6\pi)}$.

14. 已知 $\sin\alpha,\cos\alpha$ 是方程 $2x^2+4kx+3k=0$ 的两个实数根，求实数 k 的值.

5.3（3）：三角的化简与恒等式证明

1. 化简下列各式：

（1）$\dfrac{\sin^4\theta\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos^4\theta}{1-\sin^4\theta-\cos^4\theta}$；

（2）$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$；

（3）$\dfrac{\sqrt{1-2\sin10^\circ\cos10^\circ}}{\sin10^\circ-\sqrt{1-\sin^2 10^\circ}}$；

（4）$\sqrt{1-2\sin2\cos2}+\sqrt{1+2\sin2\cos2}$.

2. 化简下列各式：

（1）$\tan\theta(\cos\theta-\sin\theta)+\dfrac{\sin\theta+\tan\theta}{\cot\theta+\csc\theta}$；

（2）$\dfrac{\tan x+\tan x\cdot\sin x}{\tan x+\sin x}\cdot\dfrac{1+\sec x}{1+\csc x}$；

（3）$(\csc\alpha-\cot\alpha)(1+\cos\alpha)$；

（4）$(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta+\tan^2\theta$.

3. 化简下列各式：

（1）当$\alpha\in\left(-\dfrac{3}{2}\pi,-\pi\right)$时，化简$\sqrt{\left(1+\tan\dfrac{\alpha}{2}\right)^2+\left(1-\tan\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}$；

（2）当$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$时，化简$\sqrt{1-2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}+\sqrt{1+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}$；

（3）若θ是第二象限角，化简$\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$.

4. 化简下列各式：

（1）$\dfrac{\cos^2(3\pi-\alpha)}{\csc^2(\alpha-2\pi)-1}-\dfrac{\sin(-\alpha+4\pi)\sin(-\alpha-\pi)}{\tan^2(\alpha-3\pi)}$；

（2）$\dfrac{\sin^2(\alpha+\pi)\cos(\pi+\alpha)\cot(-\alpha-\pi)}{\tan(\pi-\alpha)\cos^3(-\alpha-\pi)}$.

5. 证明下列恒等式：

（1）$\dfrac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$；（2）$\left(1-\tan^2\alpha\right)^2=\left(\sec^2\alpha-2\tan\alpha\right)\left(\sec^2\alpha+2\tan\alpha\right)$；

（3）$\dfrac{1+\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\dfrac{1+\sec\alpha}{1+\csc\alpha}=\tan\alpha$；

（4）$\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cot\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\tan\alpha}=1-\sin\alpha\cos\alpha$.

6. 若 $\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\tan x-\sec x$，求 x 的取值范围.

7. 已知 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$，求证：$\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$.

8. 设 $\cos\theta+\cos^2\theta=1$，求（1）$\sin^2\theta+\sin^4\theta$；（2）$\sin^2\theta+\sin^6\theta+\sin^8\theta$.

5.4（1）：两角和与差的余弦

1. 求值与化简（要有化简和使用公式的过程，不得强行使用计算器）：

（1）$\cos 73^\circ \cos 13^\circ + \sin 73^\circ \sin 13^\circ$；

（2）$\cos 10^\circ \cos 35^\circ + \sin\left(-10^\circ\right)\sin 145^\circ$；

（3）$\cos y \cos\left(x-y\right)-\sin\left(x-y\right)\sin y$；

（4）$\sin\dfrac{3\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{5}-\cos\left(-\dfrac{3\pi}{7}\right)\sin\left(-\dfrac{2\pi}{5}\right)$；

（5）$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$；

（6）$\sin 27^\circ \cos 25^\circ - \sin 63^\circ \cos 65^\circ$；

（7）$\cos\left(31^\circ-\alpha\right)\cos\left(29^\circ+\alpha\right)-\cos\left(59^\circ+\alpha\right)\sin\left(151^\circ-\alpha\right)$；

2. 若 $\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x$，则 $x =$_________.

3 若 $\sin\alpha-\sin\beta=\dfrac{1}{2},\cos\alpha-\cos\beta=\dfrac{1}{3}$，求 $\cos\left(\alpha-\beta\right)$.

5.4（2）：两角和与差的余弦和正弦

1. 在ΔABC中，若$\sin\left(A-B\right)\cos B+\cos\left(A-B\right)\sin B\geq 1$，则$\Delta ABC$的形状为________.

2. 化简：（1）$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\alpha-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\alpha$；（2）$\dfrac{\sin 9^\circ+\cos 15^\circ\sin 6^\circ}{\cos 9^\circ-\sin 15^\circ\sin 6^\circ}$.

3. 设命题甲：$\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=0$，命题乙：$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=1$，则甲是乙的__________________条件.

4. 对于等式$\cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，下列四个命题中真命题的是（　　）

A. 对任意α,β，等式都成立　　B. 只对有限个α,β，等式成立

C. 存在无数个α,β使等式成立　　D. 不存在某个α,β使等式成立

5. 已知$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0,\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$，求$\cos\left(\alpha-\beta\right)$的值.

6. 已知$\sin\left(\pi+\theta\right)=-\dfrac{3}{5}$，$\theta$为第二象限角，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)=-2,\varphi$为第三象限角，求$\cos\left(\theta-\varphi\right)$的值.

7. 已知$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\dfrac{1}{2},\sin 2\alpha=\dfrac{1}{3}$，且$2\alpha,\beta$都是锐角，求$\cos\left(\alpha+\beta\right)$的值.

8. 已知$\cos\left(\pi-\alpha\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{10}},\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，且$\alpha,\beta$都是锐角，求$\alpha+\beta$.

9. 已知$\tan\alpha=\dfrac{1}{3},\cos\beta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，且$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\beta\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，求$\alpha+\beta$.

10. 在ΔABC中，已知$\cos A=\dfrac{12}{13},\cos B=\dfrac{8}{17}$，求$\sin C$.

11. 在ΔABC中，已知$\cos A=\dfrac{4}{5},\sin B=\dfrac{5}{13}$，求$\cos C$.

12. 求证:（1）$\sin\left(\alpha+\beta\right)\sin\left(\alpha-\beta\right)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$;（2）$\dfrac{\sin\left(\alpha+\beta\right)}{\cos\alpha\cos\beta}=\tan\alpha+\tan\beta$.

5.4（3）：两角和与差的正切与辅助角公式

1. 已知 $\tan\alpha = 2$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$_________，$\tan\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=$_________.

2. 化简：$\dfrac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=$_________.

3. 若 $\cot\alpha = 2, \tan(\alpha-\beta)=-\frac{2}{5}$，则 $\tan\beta=$_________.

4. 已知 $\sin\theta=-\frac{7}{25}, \theta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，则 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$_________.

5. 若 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$，且 $\sqrt{3}(\tan\alpha\cdot\tan\beta-2)+2\tan\alpha+3\tan\beta=0$，求 $\tan\alpha$.

6. 求 $\tan(60^\circ-\alpha)+\tan\alpha+\sqrt{3}\tan(60^\circ-\alpha)\cdot\tan\alpha$.

7. 已知 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2$，求证：$\tan(\alpha+\beta)=1$.

8. 求证：$\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$.

9. 已知 $\tan\alpha, \tan\beta$ 是方程 $x^2-3x-3=0$ 的两个根，则 $\sin^2(\alpha+\beta)-3\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-3\cos^2(\alpha+\beta)$ 的值.

10. 已知关于 x 的方程 $mx^2+(2m-3)x+m-2=0,(m\neq 0)$ 的两个根为 $\tan\alpha,\tan\beta$，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的最小值.

11. 化简：（1）$\frac{1}{2}\sin 15^{\circ}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 75^{\circ}$；　　（2）$2\sin\alpha-2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$.

12．把下列各式化成 $A\sin(\alpha+\varphi)$ $(A>0)$ 的形式：

（1）$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha$；　　（2）$\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha$；　　（3）$\sin\alpha+\cos\alpha$.

13. 在 ΔABC 中，$\sin A+\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\tan A=$______________.

14. 当 $a>0$ 时，若 $a\sin x+b\cos x$ 有最小值 $-\sqrt{5}$，$a\cos x+b$ 有最大值 1，则（　　）

A. $a=2,b=-1$　　B. $a=2,b=1$　　C. $a=1,b=-2$　　D. $a=1,b=2$

15. 关于 x 的方程 $3\sin x-4\cos x-k=0$ 有解，求 k 的取值范围.

5.5（1）：二倍角的正弦、余弦和正切

1. 若 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，则 $\sin 2\alpha=$__________.

2. 若 $\cos\theta>0$ 且 $\sin 2\theta<0$，则角 θ 为第__________象限角.

3. 求值：$\dfrac{\tan 165°}{1-\tan^2 345°}=$__________.

4. 若 $8\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=1$，求 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$.

5. 求值：$\sin 10^{\circ}\cdot\sin 50^{\circ}\cdot\sin 70^{\circ}$.

6. 已知 $\sin x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，求 $\sin 2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

7. （1）已知 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)=-2$，求 $\cot\alpha$；（2）设 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2}{3}$，求 $\sin 2\alpha$.

8. 已知 $\tan\theta=\sqrt{2}$，求 $\dfrac{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin\theta-1}{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)}$ 的值.

9. 已知$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2},\tan\beta=-\dfrac{1}{7}$，且$\alpha,\beta\in\left(0,\pi\right)$，求$2\alpha-\beta$.

10. 已知$2-\sqrt{3}$是方程$x^2-\left(\tan\theta+\cot\theta\right)x+1=0$的一个根，求$\sin 2\theta$和$\cos 4\theta$.

11. 已知$\alpha\in\left(\pi,2\pi\right)$，且$\cos\alpha-\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，求$\cos 2\alpha$.

12. 若$\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$，化简$\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2\theta}}-\sqrt{1-\sin\theta}$.

5.5（2）：半角的正弦、余弦和正切与万能置换公式

1. 若 $\sin\alpha=\frac{3}{5},\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$.

2. 已知 $5\pi<\theta<6\pi$，若 $\cos\frac{\theta}{2}=m$，求 $\cos\frac{\theta}{4}$.

3. 若 $\tan\alpha=-\frac{4}{3},\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，求 $\tan\frac{\alpha}{2}$.

4. 若一等腰三角形顶角的正弦为 $\frac{24}{25}$，求底角的余弦值.

5. 已知 $\cos\alpha=\frac{4}{5},\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，求 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$.

6. 设 $\cot\alpha=3$，求 $\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\cos^2\alpha$.

7. 若 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $7x^2-8x+1=0$ 的两根，求 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$.

5.6（1）：正弦定理、余弦定理和解斜三角形

1. 在ΔABC中，若$\sqrt{3}a=2b\sin A$，求$\angle B$.

2. 在ΔABC中，$B=45^\circ,C=60^\circ,c=1$，求最小边的边长.

3. 在ΔABC中，$\sin A>\sin B$是$A>B$的（　　　）

$A.$ 充分不必要条件　$B.$ 必要不充分条件　$C.$ 充要条件　$D.$既不充分也不必要条件

4. 已知在ΔABC中，$c=10$，$A=45^\circ$，$C=30^\circ$，求a、b和B.

5. 在ΔABC中，$b=\sqrt{3}$，$B=60^\circ$，$c=1$，求a、A和C.

6. 在ΔABC中，$c=\sqrt{6}$，$A=45^\circ$，$a=2$，求b、B和C.

7. 在ΔABC中，若$A=120^\circ,c=5,a=7$，求三角形面积S.

8. 在ΔABC中，$A=45^\circ,B:C=4:5$，最大边长为10，求角B,C和三角形面积S.

9. 在ΔABC中，已知$A=30^\circ$，$c=\sqrt{3},a=1$，则b.

10. 在ΔABC中，若$a=7,b=8,\cos C=\dfrac{13}{14}$，求最大角的余弦值.

11. 在ΔABC中，$b=40,c=32,A=75^\circ$，求B.（保留两位小数）

12. 在ΔABC中，已知$a=8,b=5,$ ΔABC面积为 12，求c.

13. 在ΔABC中，已知$a=16,b=5,c=19$，求ΔABC面积.

14 已知ΔABC的面积$S=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4}$，求$\angle A$.

15. 在ΔABC中，$a=2,c=5,\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求$\Delta ABC$的外接圆半径.

16. 在ΔABC中，已知$a=5,b=4,A=2B$，求$\cos B$.

17. 在ΔABC中，$a=2$，$A=\dfrac{\pi}{4}$，若解此三角形有两解，求实数b的取值范围.

5.6（2）：正弦定理、余弦定理和解斜三角形

1. 在ΔABC中，$A<B$是$\cos^2 A>\cos^2 B$的______________条件.

2. 在ΔABC中，外接圆的半径$R=4, A=105^\circ, B=30^\circ$，求$a$和$c$.

3. 在ΔABC中，外接圆的半径$R=2, c=3, A=30^\circ$，求b.

4. 在ΔABC中，三角形面积为 1，若$\tan B=\dfrac{1}{2}, \tan C=2$，求$a$和外接圆直径$2R$.

5. 在ΔABC中，求证：（1）$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}$；

（2）$a^2+b^2+c^2=2\left(bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C\right)$；　　（3）$\dfrac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$.

6. 在ΔABC中，若$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，判断三角形的形状.

7. 在ΔABC中，若$\cos A\cos B>\sin A\sin B$，判断三角形的形状.

8. 在ΔABC中，若$b^2=ac,B=60^\circ$，判断三角形的形状.

9. 在ΔABC中，若$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\sin C}$，判断三角形的形状.

10. 在ΔABC中，若$\cos\left(A-B\right)\cos\left(B-C\right)\cos\left(C-A\right)=1$，判断三角形的形状.

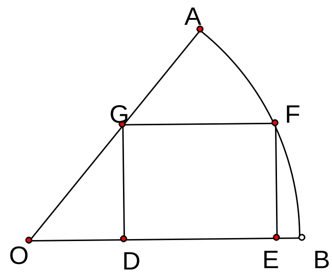
11. 在ΔABC中，若$2\lg\left(a^2+b^2-c^2\right)=\lg 2+2\lg a+2\lg b$，则$C=$__________.

12. 在ΔABC中，若$a-b=c\left(\cos B-\cos A\right)$，判断三角形的形状.

5.6（3）：正弦定理、余弦定理和解斜三角形

1. 在ΔABC中，$AB=\sqrt{3}$，$BC=3$，$AC=4$，求AC边上中线BD的长.

2. 将一块圆心角为60°，半径为$20cm$的扇形铁皮裁成一个矩形（如图），求裁得矩形的最大面积.



3. 大楼的顶上有一座电视塔，高 20 米，在地面某处测得塔顶的仰角为45°，塔底的仰角为30°，求此大楼的高度.

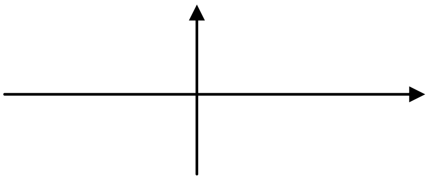
4. 我缉私船发现位于正北方向的走私船以每小时 50 海里的速度向北偏东45°方向的公海逃窜，已知缉私船最大时速是 60 海里，为了及时截住走私船，缉私船应以什么方向追击走私船.（角度精确到 0.01）

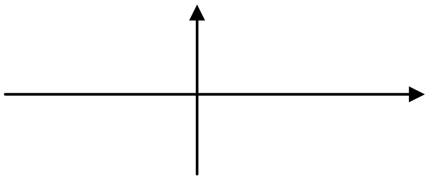
5. 某地某时台风中心在甲地的东偏南21°方向 1171 千米处，经过 24 小时后，测得台风中心在甲地东偏南17° 方向 543 千米处，求台风移动的平均速度.（精确到 0.01）

第六章 三角函数

6.1（1）：正弦函数和余弦函数的图像与性质

1. 用五点法分别画出函数 $y=\sin x$， $x\in[-\pi,\pi]$ 和 $y=\cos x$， $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 图像.





2. 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上，与函数 $y=\cos(x-\pi)$ 的图像相同的是（　　　）

A. $y=\cos\left(-x-\dfrac{7\pi}{2}\right)$　　　　B. $y=\cos(-x-4\pi)$

C. $y=\sqrt{1-\tan^2 x\cdot\cos^2 x}$　　　　D. $y=\sqrt{\dfrac{1-\sin^4 x}{1+\sin^2 x}}$

3. 求函数的定义域：

（1） $y=\dfrac{1}{1+\sin x}$；　　（2） $y=\sqrt{-2\cos x}$；　　（3） $y=\sqrt{2\sin x+1}$；

（4） $y=\dfrac{1}{\lg(1-2\sin x)}$；　　（5） $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\cos x$.

4. 设函数 $f(x)=a\sin x+b,a<$ ，则当 $x=$ ________________时，函数的最大值为____________.

5. 函数 $y=a+b\cos x$ 的最大值为 1，最小值为 -7，求函数 $y=b+a\sin x$ 的最大值.

6. 设函数 $y=3-2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，则当 x 取何值时，函数的最大值为多少？当 x 取何值时，函数的最小值为多少？

7. 求下列函数的值域：

（1） $y=\sin x, x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$；

（2） $y=\cos\dfrac{\pi x}{3}, x\in Z$；

（3） $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x, x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

8 求下列函数的值域：

（1） $y=2\cos^2 x+5\sin x-4$；

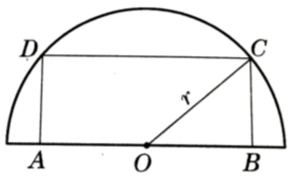
（2） $y=\dfrac{2\cos x+1}{2\cos x-1}$；

（3） $y=\sin x+\dfrac{4}{\sin x}, x\in\left(0,\pi\right)$.

9. 设函数 $f\left(x\right)=\log_2\sqrt{1+\sin x}+\log_2\sqrt{1-\sin x}, x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{6}\right]$，则当 x 取何值时，函数的最大值为多少？

10. 求函数 $f\left(x\right)=\left|\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1-\cos x}\right|, x\in\left(0,\pi\right)$ 的值域.

11. 如图，要在一个半径为 r 的半圆形铁板中截取一块面积最大的矩形 $ABCD$，如何截取？并求这个最大矩形的面积.



6.1（2）：正弦函数和余弦函数的图像与性质

1. 函数 $y=\sin x+\cos x$ 的最小正周期为___________；

函数 $y=2^{\sin x}$ 的最小正周期为_________.

2. 求下列函数的周期：

（1） $f\left(x\right)=\sin^2 x$；

（2） $f\left(x\right)=\cos^4 x-\sin^4 x$；

（3） $f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin 2x\cos 2x$；

（4） $y=\sin x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. 求下列函数的周期：

（1） $f\left(x\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\cos\left[\dfrac{\pi}{2}\left(x-1\right)\right]$；

（2） $f\left(x\right)=\left|\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{5}\right)\right|$.

4. 作函数 $y=\left|\cos x\right|$ 的图像，并求其周期、最值以及取到最值时的 x 的取值.

5. 函数 $f\left(x\right)=1-2\cos^2 \omega x$ 的最小正周期是函数 $g\left(x\right)=\cos 4x$ 最小正周期的 2 倍，求 ω.

6. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\dfrac{k}{10}x+\dfrac{\pi}{3}\right), k\neq 0$，当自变量 x 在任意两个整数之间（包括整数本身）变化时，至少包含一个周期，则最小正整数 k 是（　　）

A. 60　　B. 61　　C. 62　　D. 63

7. 求函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\cos\left(2x+\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos^{2}x-\sin^{2}x$ 的周期，最大值和最小值，以及取到最值时 x 的取值.

8. 求函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期和最大值.

6.1（3）：正弦函数和余弦函数的图像与性质

1. （1）求函数 $y=1-\cos\dfrac{x}{2}$ 的递增区间；　　（2）求函数 $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的奇偶性.

2. 求函数 $y=\sin x\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ 的奇偶性及单调区间.

3. 函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在区间（　　）上是增函数

A. $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$　　B. $\left[-\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$　　C. $[-\pi,0]$　　D. $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$

4. 下列四个命题中正确的命题是（　　）

A. $y=\cos x$ 在第一、四象限内是减函数　　B. $y=\sin x$ 在第一、三象限内是增函数

C. $y=\cos x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是减函数　　D. $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数

5. 已知函数 $f(x)=a\sin 2x+bx^3+1$，若 $f(-3)=5$，则 $f(3)=$__________.

6. 下列四个函数中，以 π 为最小正周期，且在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 上为减函数的是（　　）

A. $y=\cos^2 x$　　B. $y=2|\sin x|$　　C. $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\cos x}$　　D. $y=-\cos x$

7. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$y=\left(x^3+x\right)\cos x$；　　（2）$y=\cos x-\sin x$；

（3）$y=\sin x\cdot\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos x\cdot\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$；　　（4）$y=\cos^4 x-\sin^4 x-\cos 2x$.

8. 求下列函数的单调递增区间：

（1）$y=2\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$；（2）$y=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2 x$；（3）$y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$.

9. 判断函数 $f(x)=x\cdot\sin(x+k\pi),k\in Z$ 的奇偶性.

10. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$，当 $x<0$ 时，$f(x)=\cos 3x+\sin 2x$，则当 $x\in R$ 时，求 $f(x)$ 的解析式.

11. 求函数 $y=\sin x+\cos x$ 的对称轴.

12. 函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+a\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像关于点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称，求实数 a.

13. 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)$ 的图像的一条对称轴方程是（　　）

A. $x=-\frac{\pi}{2}$　　B. $x=-\frac{\pi}{4}$　　C. $x=\frac{\pi}{8}$　　D. $x=\frac{5\pi}{4}$

14. 已知 $f(x)=a\sin^3 x+bx^5+\dfrac{c}{x}-5$， $f(2)=3$，求 $f(-2)$.

15. 求函数 $f(x)=\lg\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)$ 的奇偶性.

16. 求函数 $y=\cos x\left[\cos x-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$ 的周期、最值、单调递增区间.

17. 求函数 $y=\lg\left(9-\cos^2 x+2\cos x\right)$ 的最大值.

18. 求 $y=\cos^2 x-4\sin x\cos x-3\sin^2 x$， $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的值域.

19. 若 $\cos^2\theta+2t\sin\theta-2t-2<0$ 对任意锐角 θ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

6.2：正切函数的图像与性质

1.（1）求函数 $y=\tan\dfrac{x}{a}$ 的最小正周期；（2）求函数 $y=\tan x-\cot x$ 的最小正周期.

2. 下列不等式中成立的是（　　）

A. $\tan1<\tan4$　　B. $\cot1<\cot4$　　C. $\sin1<\sin4$　　D. $\cos1<\cos4$

3. 求函数 $y=\tan\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的单调递增区间.

4. 求函数 $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的对称中心.

5. 函数 $y=\tan|x|$ 的图像是关于__________对称；

函数 $y=\tan x+\cot x$ 的奇偶性是__________.

6. 在下列函数中，同时满足：（1）在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上递增；（2）以 2π 为最小正周期；（3）为奇函数的是（　　）

A. $y=\tan x$　　B. $y=\cos x$　　C. $y=\tan\dfrac{x}{2}$　　D. $y=-\tan x$

7. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\tan x\cdot\cot x$；（2）$y=\dfrac{1}{1+\tan 2x}$；（3）$y=\lg(\tan x+1)$.

8. （1）函数 $y=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right),x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 的值域是__________.

（2）已知 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$，求函数 $y=\sec^2 x+\tan x+2$ 的值域.

9. 函数 $y=a\tan x+b$ 在区间 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$ 的最大、最小值分别为 $\sqrt{3}+1$ 和 $\sqrt{3}-1$，求实数 a,b 的值.

10. 函数 $y=\sin x$ 与 $y=\tan x$ 的图像在 $\left[-2\pi,2\pi\right]$ 的交点个数为_________.

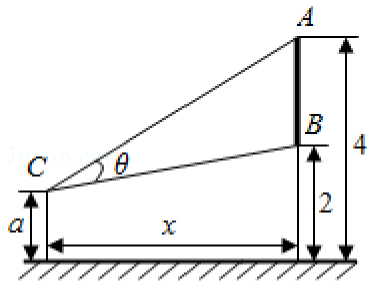
11. 直线 $y=a$ 与正切函数 $y=\tan\omega x,\omega>0$ 图像相邻两个交点间的距离为_________.

12. 函数 $y=A\tan\left(\omega x+\varphi\right),A>0,\omega>0,\left|\varphi\right|<\frac{\pi}{2}$ 的图像与 x 轴相交的两相邻点的坐标分别为 $\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$，$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$，且过点 $\left(0,-3\right)$，求该函数的解析式.

13. 如图，墙上有一壁画，最高点 A 离地面 4 米，最低点 B 离地面 2 米．观察者从距离墙 $x\left(x>1\right)$ 米，离地面高 $a\left(1\le a\le 2\right)$ 米的 C 处观赏该壁画，设观赏视角 $\angle ACB=\theta$．

（1）若 $a=1.5$，问：观察者离墙多远时，视角 θ 最大？

（2）若 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$，当 a 变化时，求 x 的取值范围．



14. 一幢高楼上安放了一块高约 10 米的 LED 广告屏，一测量爱好者在与高楼底部同一水平线上的 C 处测得广告屏顶端 A 处的仰角为 31.80°，再向大楼前进 20 米到 D 处，测得广告屏顶端 A 处的仰角为 37.78°（人的高度忽略不计）：

（1）求大楼的高度（从地面到广告屏顶端）(精确到 1 米）

（2）若大楼的前方是一片公园空地，空地上可以安放一些长椅，为使坐在其中一个长椅上的观看广告最清晰（长椅的高度忽略不计），长椅需安置在距大楼底部 E 处多远？已知视角 $\angle AMB$（M 为观测者的位置，B 为广告屏底部）越大，观看得越清晰.

6.3：函数 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的图像与性质

1. 将函数 $y=\sqrt{2x+1}$ 的图像向左平移 2 个单位，得到新函数的解析式为________________.

2. 函数 $y=3\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图像上各点的横坐标缩小为原来的 $\dfrac{1}{2}$，得到新图像的解析式为____________.

3. 将函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位所对应的函数是（　　）

A. $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$　　B. $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$　　C. $y=\sin 2x$　　D. $y=\cos 2x$

4. 将函数 $y=\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图像作如下的变换便得到函数 $y=\sin\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ 的图像，则这个变换是（　　）

A. 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位　　B. 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位

C. 向右平移 $\dfrac{2\pi}{3}$ 个单位　　D. 向左平移 $\dfrac{2\pi}{3}$ 个单位

5. 函数 $y=\sin x-\cos x$ 的图像，可由函数 $y=\sin x+\cos x$ 的图像向右平移而得，平移的长度为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. π　　D. $\dfrac{\pi}{3}$

6. 将函数 $y=\cos x$ 的图像上所有点的横坐标扩大为原来的 2 倍，再向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位，得到（　　）

A. $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　B. $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

C. $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)$　　D. $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)$

7. 将函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像上各点的纵坐标保持不变，横坐标缩短为原来的 $\dfrac{1}{3}$，再把所有点的纵坐标伸长为原来的 4 倍，这样得到的曲线与 $y=\sin x$ 的图像相同，则原来函数的解析式为_________________.

8. 要得到 $y=3\sin x$ 的图象，只需要把函数 $y=\sin x$ 的图象上的对应点的横坐标__________；纵坐标__________.

9. 要得到 $y=\sin 4x$ 的图象，只需要把函数 $y=\sin x$ 的图象上的对应点的横坐标__________；纵坐标__________.

10. （1）将函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像变换至 $y=\dfrac{x+3}{x+2}$ 的图像，需先向_____平移_____个单位，再向______平移______个单位.

（2）给出下列六种图像变换方法：①横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍；②横坐标变为原来的2倍；③向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位；④向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位；⑤向右平移 $\dfrac{2\pi}{3}$ 个单位；⑥向左平移 $\dfrac{2\pi}{3}$ 个单位.

请用上述变换中的两种变换，将函数 $y=\sin x$ 的图像变换到函数 $y=\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图像，那么这两种变换正确的顺序是________，________.

11. 已知函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$，（1）当 y 取最大值时，求自变量 x 的集合；（2）该函数图像可由 $y=\sin x$ 经过怎样的平移和伸缩变换得到？

12. 将余弦函数 $y=\cos x$ 上各点的横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{2}$，再向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位得到函数 y_1 的图像，则与函数 y_1 的图像关于 y 轴对称的函数解析式为________________.

13. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)=a\sin\omega x+b\cos\omega x(\omega>0,a>0,b>0)$ 的周期为 π，$f(\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{3}$，且 $f(x)$ 的最大值为 2.

（1）写出 $f(x)$ 的表达式；

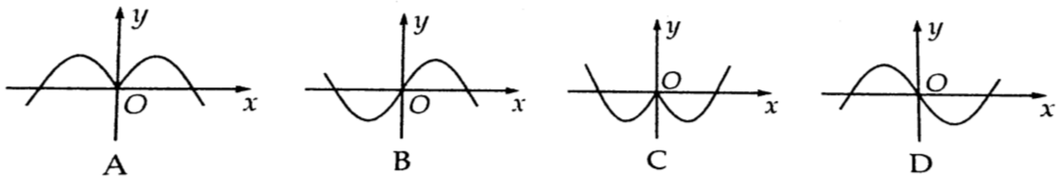
（2）写出函数 $f(x)$ 的单调递增区间、对称中心、对称轴方程；

（3）说明 $f(x)$ 的图象如何由函数 $y=2\sin x$ 的图象经过怎样的变换得到.

14. 求函数 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的图像在 $(0,\pi)$ 上的交点个数.

15. 已知函数 $f(x)=2\cos x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x$，求该函数的振幅、周期、初相和单调递增区间.

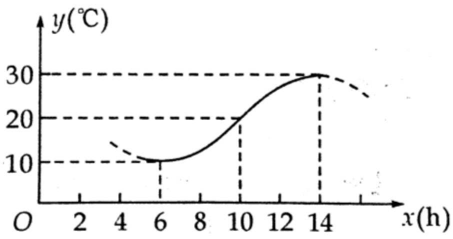
16. 函数 $y=-x\cos x$ 的部分图像是（　　）



17. 如图，某地一天从 6 时至 14 时的温度变化曲线近似地满足函数

$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b.(A>0,\omega>0)$

（1）求这段时间的最大温差；（2）写出这段曲线的函数解析式.



18. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi),A>0,\omega>0$，$|\varphi|\le\dfrac{\pi}{2}$ 的图像上相邻两个最高点和最低点的坐标分别为 $\left(\dfrac{5\pi}{12},3\right)$，$\left(\dfrac{11\pi}{12},-3\right)$，求该函数的解析式.

19. 已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\cos^2\omega x+\sin\omega x\cos\omega x+a,\omega>0$ 的图像在 y 轴右侧的第一个最高点的横坐标为 $\frac{\pi}{6}$.(1)求 ω 的值;(2)如果 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{5}{6}\pi\right]$ 上的最小值为 $\sqrt{3}$，求 a 的值.

20. 方程 $\cos x=\lg x$ 的实根个数为__________.

21. 已知关于 x 的方程 $\sin x+\cos x=a$；

（1）若方程有实数解，求实数 a 的取值范围;（2）若方程在 $x\in\left[0,\pi\right]$ 时有两个相异的实数解，求实数 a 的取值范围及两实数解的和.

6.4：反三角函数

1. 填空：

（1）$\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=$________；（2）$\arcsin 1=$________；（3）$\arcsin\dfrac{1}{2}=$________；

（4）$\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}=$________；（5）$\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$________；（6）$\arctan(-1)=$________；

（7）$\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}=$________；（8）$\arcsin\left(\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)=$________；（9）$\arcsin(\sin 3)=$________；

（10）$\arctan\left[\tan\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)\right]=$________.

2. 下列函数中，与函数 $y=x$ 有相同图像的是（　　）

A. $y=10^{\lg x}$　　B. $y=\lg 10^{x}$　　C. $y=\sin(\arcsin x)$　　D. $y=\dfrac{x^2}{x}$

3. 下列各式中，不成立的是（　　）

A. $\arcsin\left[\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]=-\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\tan\left[\arctan\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]=-\dfrac{1}{2}$

C. $\arccos\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=-\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\sin\left[\arcsin\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right]=-\dfrac{4}{5}$

4. 若 $\sin(\arcsin x)=x$，则 x 的取值范围为（　　）

A. $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$　　C. $[0,1]$　　D. $[-1,1]$

5. 用反正弦形式表示下列各角：

（1）若 $\sin x=-\dfrac{1}{4}, x\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，求 x；　　（2）若 $\cos x=\dfrac{1}{3}, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，求 x；

（3）若 $\sin x=\dfrac{1}{3}, x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，求 x；　　（4）若 $\sin x=a, x\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$，求 x.

6. 已知$\arcsin x+\arctan\dfrac{1}{7}=\dfrac{\pi}{4}$，求$x$.

7. 利用换元法，计算：（1）$\sin\left(\arcsin\dfrac{3}{5}+\arcsin\dfrac{8}{17}\right)$；（2）$\arccos\left(-\dfrac{11}{14}\right)-\arccos\dfrac{1}{7}$.

8. 函数$y=\arcsin(1-x)$的定义域为____________.

函数$y=2\arcsin\sqrt{x}$的值域为____________.

9. 求函数$y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{1}{x}$的定义域和值域.

10. 求函数$y=\arccos x, x\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$的值域.

11. 函数$y=\arcsin(\cos x)$的定义域为$\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，求这个函数的值域.

12. 求函数$y=\arcsin\left(x^2-x\right)$的定义域、值域.

13. 求函数 $y=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的单调区间.

14. 若函数 $f(x)=x^3-\arcsin x$， $f(a)=10$，则 $f(-a)=$___________.

15. 函数 $y=\frac{\pi}{2}-\arccos x$ 是（　　　）

A. 奇函数且单调递减　　B. 奇函数且单调递增　　C. 偶函数　　D. 非奇非偶函数

16. 求满足 $\arccos 2x<\arccos(1-x)$ 的实数 x 的取值范围.

17. 求下列函数的反函数：

（1） $y=3\sin\frac{x}{2}, x\in[-\pi,\pi]$ ；

（2） $y=\sin x, x\in\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$；

（3） $y=\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{x}{2}$ ；

（4） $y=3\pi-\arctan(2x-1)$.

18. 求函数 $y=(\arcsin x)^2-2\arcsin x-2$ 的最大值.

19. 若 $\arcsin x>1$，则 x 的取值范围是___________.

6.5（1）：最简三角方程

1. 求下列方程的解集：

（1）$\sin x=\dfrac{1}{4}$；

（2）$\cos x=-\dfrac{2}{5}$；

（3）$\tan x=3$；

（4）$2\sin\dfrac{2x}{3}=1$；

（5）$2\cos x+\sqrt{2}=0$；

（6）$\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$；

（7）$2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0$；

（8）$3\tan 2x+2=0$；

（9）$\sqrt{2}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1, x\in[0,\pi]$.

2. 解下列方程：

（1）$3\sin x-2\cos x=0$；

（2）$2\sin^2 x-5\cos x+1=0$；

（3）$\sin^2 x-7\sin x\cos x+6\cos^2 x=0$；

（4）$2\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x=1$；

（5）$\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=1$，$x\in[0,2\pi]$；

（6）$\sin 2x=2a-1$；

（7）$6\sin^2 x=8\sin x\cos x-1$；

（8）$\cos x\left(1-\tan x\right)=0, x\in\left[0,2\pi\right]$；

（9）$\dfrac{\sin 2x}{\cos x}=\dfrac{\cos 2x}{\sin x}$；

（10）$2\sin x\cos x+\sin x-\cos x=1$.

6.5（2）：简单的三角方程

1. 若$\dfrac{\pi}{6}$是方程$2\cos(2x+\alpha)=\sqrt{3}$的解，且$\alpha\in(0,2\pi)$，求$\alpha$的解集.

2. 若关于x的方程$\cos x+\sin x=k$在$[0,\pi]$内有两解，求实数k的取值范围.

3. 讨论关于x的方程$\cos 2x+\sin x=q$在$[0,2\pi)$内解的情况.

4. 若满足$\cos x-\sin^2 x-a=0$的实数x存在，求实数a的取值范围.

5. 若方程$\cos^2 x-\sin x+a=0$在$0<x\le\dfrac{\pi}{2}$内有解，求实数a的取值范围.

6. 求函数$y=\cos^2 x+2a\sin x-1$，$0\le x<2\pi$，$a\in R$的最小值.

7. 方程$\cos^2 x-\sin^2 x=\dfrac{1}{2}$在区间$[-2\pi,2\pi]$上的所有解的和是多少？

第七章 数列与数学归纳法

7.1（1）：数列的概念

1. 观察下列数列的特点，在横线上写上适当的数.

（1）1，_____，7，15，31；（2）$\frac{2}{3},\frac{4}{5}$，______，$\frac{16}{9},\frac{32}{11}$；（3）$-\frac{1}{2},\frac{1}{6}$，______，$\frac{1}{20},-\frac{1}{30}$.

2. 已知下列数列：① $1,1,1,1,1.$ ② $1,2,3,4,5,\cdots,n,\cdots$ ③ $0,-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2},-2,-\frac{5}{2}.$

④ $-1,1,-2,2,-3,3.$

其中有穷数列有_________________；无穷数列有_________________；递增数列有_______________；递减数列有_______________；常数列有_______________.

3. 如果数列的前三项依次为$1,2,4$，则它的第四项为（　　）

A. 8　　B. 7　　C. 8 或 7　　D. 不能确定

4. 下列说法中，正确的是（　　）

A. 数列都有通项公式

B. 有通项公式的数列都是无穷数列

C. 数列的通项公式确定时，数列就确定了

D. 给出数列的若干项，它的通项公式也就确定了

5. 已知数列 1，0，1，0，……，下列选项中，不能作为此数列通项公式的是（　　）

A. $a_n=\sin^2\frac{n\pi}{2},n\in N^*$　　B. $a_n=\frac{1}{2}\left[1+(-1)^{n+1}\right]$

C. $a_n=\frac{1}{2}(1-\cos n\pi),n\in N^*$　　D. $a_n=\frac{1}{2}\left[1+(-1)^{n+1}\right]+(n-1)(n-2)$

6. 在数列$\{a_n\}$中，（1）已知$a_n=\cos n\pi$，则$a_6=$________

（2）已知$a_n=n(n+1)$，则$a_5-a_3=$________；

（3）已知$a_{n+1}=n^2-n+1$，则$a_6=$________.

7. 写出下列数列的一个通项：

（1）$-1,3,-1,3,-1,\cdots\cdots$　　$a_n=$____________；

（2）$\frac{1}{2},\frac{3}{8},\frac{5}{18},\frac{7}{32},\cdots\cdots$　　$a_n=$____________；

（3）$2\frac{1}{3},4\frac{1}{5},6\frac{1}{7},8\frac{1}{9},\cdots\cdots$　　$a_n=$____________；

（4）$8,0.8,0.08,0.008,\cdots\cdots$　　$a_n=$____________.

8. 数列$-1,0,\frac{1}{9},\frac{1}{8},\cdots\cdots,\frac{n-2}{n^2},\cdots\cdots$中，问：0.08 是它的第几项？

9. 在数列$\left\{a_n\right\}$中，已知$a_n=4^n-13\cdot 2^n+2,n\in N^*$；（1）求$a_3,a_{n+1}$；（2）50 是否为数列中的项？若是，是第几项？

10. 已知数列$7,4,3,\cdots,1+\frac{6}{n},\cdots,$问：$\frac{2n+5}{2n-1}$是该数列的第几项？

11. 已知点$\left(n,a_n\right)$在直线$y=4x-3$上，（1）写出数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式及前三项；（2）试在直角坐标系内，作出$a_n=f\left(n\right)$的图像.

7.1（2）：数列的递推公式

1. 已知数列$\sqrt{3}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{11}$，$\cdots$，则此数列的通项公式可以是$a_n=$___________.

2. 写出数列2，$\dfrac{2}{3}$，2，$\dfrac{4}{5}$，2，$\dfrac{6}{7}$，$\cdots$的一个通项公式为_______________.

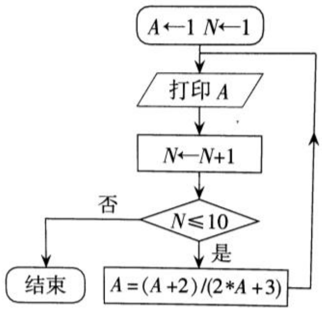
3. 观察数列变化规律，填上适合的数字：

0，3，8，15，______，35，48，______，80，99，$\cdots$，第n项是__________.

4. 根据数列的递推公式，写出数列的前 4 项：

（1）$\begin{cases} a_n=3a_{n-1}+2\left(n\ge 2\right) \\ a_1=1 \end{cases}$；（2）$\begin{cases} a_{n+2}=2a_n+a_{n+1} \\ a_1=1, a_2=1 \end{cases}$.

5. 根据程序框图，建立所打印数列的递推公式，并写出这个数列的前 5 项.



6. 在数列$\left\{a_n\right\}$中，已知$a_1=1$，$a_2=5$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ $\left(n\in N^*\right)$，求a_{2020}.

7. 已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项之和为$S_n=n^2+2n+1$，求$a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$.

8. 已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项之和为$S_n=n^2+n-2$，求其通项公式a_n.

9. 已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项之和为$S_n=\dfrac{3^n+4^n}{4^n}$，求其通项公式a_n.

10. 数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1+3a_2+5a_3+\cdots+\left(2n-1\right)a_n=2n^2-3n$，求其通项公式$a_n$.

11. 数列$\left\{a_n\right\}$满足$2^{a_1}+2^{a_2}+2^{a_3}+\cdots+2^{a_n}=3n+1$，求其通项公式$a_n$.

12. 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{2n-9}{4n-26}$，求该数列中的最大项和最小项，并证明.

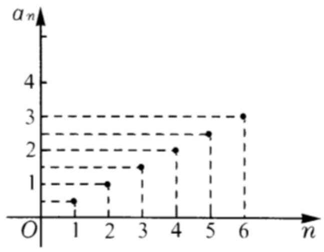
7.2（1）：等差数列

1. 下列数列中成等差数列的是（　　　）

A. $0,1,3,5,7$　　B. $1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{9}$　　C. $1,\sqrt{2},\sqrt{3},2,\sqrt{5}$　　D. $1,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-1,-\frac{5}{3}$

2. 命题甲：$\triangle ABC$ 中有一个内角为 60°；命题乙：$\triangle ABC$ 的三个内角的度数可以构成等差数列，则命题甲是乙的____________________条件.

3. 已知某个数列 $\left\{a_n\right\}$ 对应的所有点如图所示，试写出这个数列的通项公式.



4. 已知 $1,x^2,5$ 成等差数列，则 $x=$________.

5. 已知 2 是 $1,x$ 的等差中项，y 是 $x,5$ 的等差中项，则 $x+y=$________.

6. 在等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，

（1）若 $a_5=10,a_8=5$，则 $d=$________，$a_1=$________.

（2）若 $a_6=7,d=-\frac{1}{2}$，则 $a_2=$________.

（3）若 $a_2=5,a_5=\frac{7}{2},a_n=\frac{1}{2}$，则 $n=$________.

（4）若 $a_2=2,a_5=54$，则 $a_1=$________.

（5）若 $a_4=10, a_7=19$，则 $d=$________；　$a_{10}=$________.

（6）若 $a_3=3, a_6=9, a_n=17$，则 $n=$________.

7. 写出等差数列 $-1,2,5,8,\cdots\cdots$ 的通项公式，问 $3n-1$ 是该数列的第几项，该数列的第 $2n$ 项是什么？

8. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，a_1，a_2 是方程 $x^2-a_3x+a_4=0$ 的根，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

9. 对大气、水土等生产条件有严格国家认证标准的有机食物越来越受到消费者的青睐.某有机谷物的生产地，今年种植有机谷物的面积为 1 万亩，为适应市场需求，计划每年新增种植面积 3 千亩，要使种植面积超过 3 万亩，多少年后才能实现目标？

7.2（2）：等差数列的性质

1. 下列三个数中，成等差数列的是（　　）

A. $\sin^2\alpha,1,\cos^2\alpha$　　B. $\cos^2\alpha,\cos 2\alpha,-\sin^2\alpha$

C. $-\tan^2\alpha,1,\sec^2\alpha$　　D. $\tan 150^\circ,\tan 30^\circ,\tan 60^\circ$

2. 已知$a-1,a,a^2+1$成等差数列，求a.

3. 已知$\lg x,\lg\left(3x-2\right),\lg\left(3x+2\right)$成等差数列，求$x$.

4. 直角三角形的三边成等差数列，斜边长为 10，求此三角形的面积.

5. 在等差数列$\left\{a_n\right\}$中，

（1）若$a_4+a_5=15,a_7=15$，则$a_2=$________.

（2）若$a_1+a_2+a_3=5,a_3+a_4+a_5=9$，则$a_{15}=$________.

（3）若$a_3+a_6+a_9=9,a_3\cdot a_6\cdot a_9=15$，则$a_n=$________.

（4）若$a_1+a_3+a_5=-1$，则$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=$________.

（5）若$a_3+a_{11}=10$，则$a_2+a_4+a_{15}=$________.

（6）若$a_1-a_4-a_8-a_{12}+a_{15}=2$，则$a_3+a_{13}=$________.

6. 已知$\left\{a_n\right\}$是等差数列，a_3,a_{10}是方程$x^2-3x-5=0$的根，则$a_5+a_8=$________.

7. 在 8 与 36 中间插入 6 个数，使着 8 个数成等差数列，求所插入的 6 个数.

8. 若三个数$a-4,a+2,26-2a$适当排列后构成递增等差数列，求a和相应的数列.

9. 已知$\left\{a_n\right\}$为等差数列，则下列各式确定的数列$\left\{b_n\right\}$必为等差数列的是（　　）

A. $b_n=\left|a_n\right|$　　B. $b_n={a_n}^2$　　C. $b_n=a_n\cdot a_{n+1}$　　D. $b_n=a_n+a_{n+1}$

10. 已知两等差数列$\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$的公差分别为$p,q,\left(pq\neq 0\right)$，则数列$\left\{a_n+b_n\right\}$（　　）

A. 公差为p的等差数列　　B. 公差为q的等差数列

C. 公差为$p+q$的等差数列　　D. 不是等差数列

11. 已知数列x,a_1,a_2,y和x,b_1,y,b_2都是等差数列，则$\dfrac{a_1-a_2}{b_1-b_2}=$________.

12. 一架木梯从下至上共有 11 级，它们的宽度成等差数列，最下一级宽 57 厘米，最上一级宽 37 厘米，求这架木梯中间各级的宽度.

13. 已知a,b,c成等差数列，求证：$b+c,c+a,a+b$也成等差数列.

14. 已知两数列$\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$为等差数列，若$c_n=a_n+b_n$，求证：数列$\left\{c_n\right\}$也为等差数列.

7.2（3）：等差数列的前 n 项和

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，

（1）若 $a_1=1,d=2$，则 $S_5=$__________；若 $a_1=-4,a_8=-18$，则 $S_8=$__________.

（2）若公差 $d=2,a_{15}=-10$，则 $a_1=$________；$S_{15}=$________.

（3）若 $a_{20}=-2,S_{20}=150$，则 $d=$________.

（4）若 $a_1=1,a_n=-55,S_n=-405$，则 $n=$______；公差 $d=$______.

（5）若 $S_2=-8,S_8=-16$，则 $a_n=$___________.

2. 已知数列的前 n 项和 S_n，

（1）若 $S_n=n^2$，则数列的通项公式 $a_n=$____________________.

（2）若 $S_n=2n^2-3n-2$，则数列的通项公式 $a_n=$____________________.

3. 设 $\{a_n\}$ 是一个公差为 $d,d\neq 0$ 的等差数列，它的前 10 项和 $S_{10}=110$，且 ${a_2}^2=a_1\cdot a_4$.

（1）证明：$a_1=d$；（2）求公差 d 的值和数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

4. 等差数列$\{a_n\}$的前k项和为30，前$2k$项和100，求它的前$3k$项和S_{3k}.

5. 等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1+a_2+\cdots+a_{50}=200, a_{51}+a_{52}+\cdots+a_{100}=2700$，求首项$a_1$和公差$d$.

6. 等差数列$\{a_n\}$中，公差$d=-2$，若$a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{97}=50$，求$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}$.

7. 已知等差数列$\{a_n\}$，若$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=10$，$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=15$，求$d$.

8. 已知等差数列$\{a_n\}$，若$a_1+a_6=0$，则$a_3a_4=-1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n.

9. 某企业开发了一个受政府扶持的新项目，得到政府无息贷款50万元购买了一套设备，若该设备在使用过程中第一天维修费用是101元，……，第n天的维修费用是$100+n$元$n\in N^*$，则使用多少天后，平均每天消耗的设备费用（总设备费用=购置费+维修费）最低.

7.2（4）：等差数列的前 *n* 项和

1. “数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和$S_n = an^2 + bn$”是 “数列$\left\{a_n\right\}$为等差数列”的________条件.

2. 在 200 与 500 之间，求所有能被 3 整除的自然数的和.

3. 在等差数列$\left\{a_n\right\}$中，（1）若$a_4 + a_5 = 10$，则$S_8 =$_________.

（2）若$a_1 + a_2 + a_3 = -24$，$a_{18} + a_{19} + a_{20} = 78$，则$S_{20} =$_________.

4. 一个共有 36 项的等差数列的前 4 项和为 21，末 4 项和为 67，求此数列的 36 项和.

5. 已知等差数列$\left\{a_n\right\}$，

（1）若$a_1 + a_4 + a_7 = 39$，$a_2 + a_5 + a_8 = 33$，求$a_3 + a_6 + a_9$；

（2）若$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 450$，求$a_2 + a_8$；

（3）若$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 30$，$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 30$，求$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}$.

6. 若前10项的和为100，前20项的和400，求前30项的和.

7. 等差数列$\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$的前$n$项和分别为$S_n,T_n$，若$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n}{3n+1}$，求$\dfrac{a_7}{b_7}$和$\dfrac{a_7+a_8}{b_7+b_8}$.

8. 已知等差数列$\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$的前$n$项和分别为$S_n,T_n$，若$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{5n+1}{3n-1}$，求$\dfrac{S_9}{T_9}$.

9. 等差数列$\left\{a_n\right\}$共有 10 项，其中奇序数项和为 12.5，偶序数项的和为 15，求公差d.

10. 一个等差数列共$2n+1$项，其中奇序数项和为 36，偶序数项和为 30，求此数列的第$n+1$项a_{n+1}.

7.2（5）：等差数列的前 n 项和

1. 已知等差数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=12,d=-2$，

（1）求数列的前 n 项和 S_n，并作出当 $n\in\left[1,13\right]$时，点$\left(n,S_n\right)$的图像；（2）求 S_n 的最大或最小项.

2. 已知数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和 $S_n=n^2-48n$；（1）求数列的通项公式；（2）求 S_n 的最大或最小项.

3. 已知数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式 $a_n=2n-1$，前 n 项和为 S_n，若 $S_n>56$，求 n 的取值范围.

4. 若数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和 $S_n=-9n^2+24n+a-16$ 有最大值 6，求实数 a .

5. 设数列$\left\{a_n\right\}$是等差数列，若前 n 项和 S_n 仅在 $n=9$ 时取到最大值，则（　　）

A. $a_1>0,a_9=0$　B. $a_1<0,a_9>0$　C. $a_9>0,a_{10}<0$　D. $a_9>0,a_{10}=0$

6. 已知等差数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_{10}<0,a_{11}>0$，且 $a_{11}>\left|a_{10}\right|$，$S_n$ 为其前 n 项和，则（　　）

A. $S_1,S_2,S_3,\cdots,S_{10}$ 都小于 0，$S_{11},S_{12},S_{13},\cdots$ 都大于 0

B. $S_1,S_2,S_3,\cdots,S_{19}$ 都小于 0，$S_{20},S_{21},S_{22},\cdots$ 都大于 0

C. $S_1,S_2,S_3,\cdots,S_5$ 都小于 0，$S_6,S_7,S_8,\cdots$ 都大于 0

D. $S_1,S_2,S_3,\cdots,S_{20}$ 都大于 0，$S_{21},S_{22},S_{23},\cdots$ 都小于 0

7. 已知数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式$a_n=2n-28$，则第一个正数项为第________项，前n项和S_n在$n=$________时取到最________值.

8. 已知数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式$a_n=25-2n$，

（1）求使$\left\{a_n\right\}$前n项和S_n取到最大值的n；

（2）求$\left\{\left|a_n\right|\right\}$的前$n$项和$T_n$.

9. 在等差数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1>0, a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=9a_{12}$，求使$\left\{a_n\right\}$前$n$项和$S_n$取到最大值的$n$.

10. 已知数列$a_n=\begin{cases}-2n+1, n\le 10\\ 2n-1, n\ge 11\end{cases}$，求数列的$S_{10}, S_{20}$以及前$n$项和$S_n$.

7.3（1）：等比数列

1．在$\{a_n\}$为等比数列，$a_1=12$，$a_2=24$，则$a_3=$__________.

2．等比数列的首项为$\dfrac{9}{8}$，末项为$\dfrac{1}{3}$，公比为$\dfrac{2}{3}$，这个数列的项数$n=$__________.

3．已知数列a，$a(1-a)$，$a(1-a)^2$，…是等比数列，则实数a的取值范围是（　　）

A. $a\neq 1$　　B. $a\neq 0$且$a\neq 1$　　C. $a\neq 0$　　D. $a\neq 0$或$a\neq 1$

4．设a_1，a_2，a_3，a_4成等比数列，公比为2，则$\dfrac{2a_1+a_2}{2a_3+a_4}=$______________.

5．在等比数列$\{a_n\}$中，$2a_4=a_6-a_5$，则公比$q=$______________.

6．一个各项均正的等比数列，其每一项都等于它后面的相邻两项之和，则公比$q=$（　　）.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

7．在等比数列$\{a_n\}$中，

（1）$a_4=27$，$q=-3$，求a_7；　　（2）$a_2=18$，$a_4=8$，求a_1和q;

（3）$a_4=4$，$a_7=6$，求a_9；　　（4）$a_5-a_1=15,\ a_4-a_2=6$，求a_3.

8. 数列1，3^7，3^{14}，3^{21}，……中，3^{98}是这个数列的（　　）

A. 第13项　　B. 第14项　　C. 第15项　　D. 不在此数列中

9. 在公比$q\neq 1$的等比数列$\{a_n\}$中，若$a_m=p$，则a_{m+n}的值为（　　）

A. pq^{n+1}　　B. pq^{n-1}　　C. pq^{n}　　D. pq^{m+n-1}

10. 若数列$\{a_n\}$是等比数列，公比为q，则下列命题中是真命题的是（　　）

A. 若$q>1$，则$a_{n+1}>a_n$　　B. 若$0<q<1$，则$a_{n+1}<a_n$

C. 若$q=1$，则$S_{n+1}=S_n$　　D. 若$-1<q<0$，则$|a_{n+1}|<|a_n|$

11. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_9+a_{10}=a\ (a\neq 0)$，$a_{19}+a_{20}=b$，则$a_{99}+a_{100}$的值为（　　）

A. $\frac{b^9}{a^8}$　　B. $(\frac{b}{a})^9$　　C. $\frac{b^{10}}{a^9}$　　D. $(\frac{b}{a})^{10}$

12. 在 2 与 6 之间插入n个数，使它们组成等比数列，则这个数列的公比为（　　）

A. $\sqrt[n]{3}$　　B. $\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$　　C. $\sqrt[n+1]{3}$　　D. $\sqrt[n+2]{3}$

13. 若x，$2x+2$，$3x+3$是一个等比数列的连续三项，则x的值为（　　）

A. -4　　B. -1　　C. 1 或 4　　D. -1 或-4

14. 已知数列$\{a_n\}$是公比$q\neq 1$的等比数列，给出下列六个数列：(1) $\{ka_n\}\ (k\neq 0)$；(2) $\{a_{2n-1}\}$；(3) $\{a_{n+1}-a_n\}$；(4) $\{a_n a_{n+1}\}$；(5) $\{na_n\}$；(6) $\{a_n^3\}$，其中仍能构成等比数列的个数为（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 3

15. a，b，c成等比数列是$b=\sqrt{ac}$的（　　）

A. 充分但不必要条件　　B. 必要但不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

16. 某种放射性物质不断变化为其他物质，每经过一年剩留的这种物质是原来的84%，这种物质的半衰期为多长（精确到1年）？

7.3（2）：等比数列

1．在$\{a_n\}$为等比数列中，$a_n>0$，$a_2a_4+2a_3a_5+a_5^2=16$，那么$a_3+a_5=$__________.

2．若-9，a_1，a_2，-1四个实数成等差数列，-9，b_1，b_2，b_3，-1五个实数成等比数列，则$b_2\left(a_2-a_1\right)=$______________.

3. 若正数 a，b，c 依次成公比大于 1 的等比数列，则当$x>1$时，$\log_a x$，$\log_b x$，$\log_c x$（　　）

A. 依次成等差数列　　B. 各项的倒数依次成等差数列

C. 依次成等比数列　　D. 各项的倒数依次成等比数列

4．在两数1，16之间插入三个数，使它们成为等比数列，则中间数等于______________.

5. 在各项都为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_5a_6=9$，则$\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{10}=$_____.

6．在$\{a_n\}$为等比数列中，$a_1a_9=64$，$a_3+a_7=20$，求a_{11}的值______________.

7．已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d\neq 0$，且a_1，a_3，a_9成等比数列，求$\dfrac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}$.

8．一个直角三角形三边成等比数列，则（　　）

A. 三边之比为 3：4：5　　B. 三边之比为 1：$\sqrt{3}$：3

C. 较小锐角的正弦为$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D. 较大锐角的正弦为$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

9. 已知等比数列$\{a_n\}$，公比为-2，它的第n项为48，第$2n-3$项为192，求此数列的通项公式.

10. 已知等比数列1，x_1，x_2，…，x_{2n}，2，求$x_1x_2\cdots x_{2n}$.

11. 三个数成等比数列，若第二个数加 4 就成等差数列，再把这个等差数列的第 3 项加 32 又成等比数列，求这三个数.

12. 设数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=-\dfrac{1}{2},a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$；（1）求证：数列$\left\{a_n-2\right\}$为等比数列；（2）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式.

13. 某产品经过4次革新后，成本由原来的105元下降到60元. 如果这种产品的成本每次下降的百分率相同，那么每次下降的百分率是多少（精确到0.1%）？

14. 已知$\left(b-c\right)\log_m x+\left(c-a\right)\log_m y+\left(a-b\right)\log_m z=0$.

(1)设a，b，c依次成等差数列，且公差不为零，求证：x，y，z成等比数列.

(2)设正数x，y，z依次成等比数列，且公比不为1，求证：a，b，c成等差数列.

7.3（3）：等比数列

1. 在等比数列$\left\{a_n\right\}$中，

（1）$a_1=8,q=\dfrac{1}{2}$，则a_6与a_8的等比中项为__________.

（2）若$a_5=2$，则$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_9=$__________.

（3）若$a_5=16$，则$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_9=$_____________.

（4）若$a_4a_7=-512,a_3+a_8=124$，且公比为整数，则$a_{10}=$_____________.

2. 已知$\left\{a_n\right\}$为等比数列，$a_6=4,a_{14}=64$，若a_6与a_{14}的等比中项为b，a_6与b的等比中项c，b与a_{14}的等比中项为d，求b,c,d的值.

3. 下列命题中，真命题的是____________.

（1）若数列$\left\{a_n\right\}$是一个以 1 为公比的等比数列，那么该数列一定是等差数列；

（2）若数列$\left\{a_n\right\}$是一个以 0 为公差的等差数列，那么该数列一定是等比数列；

（3）若数列$\left\{a_n\right\}$既是等差数列，又是等比数列，那么该数列一定是常数列；

（4）若数列$\left\{a_n\right\}$是常数列，则该数列既是等差数列，又是等比数列.

4. 有四个数，其中前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，并且第一个数与第四个数的和是 16，第二个数与第三个数的和是 12，求这四个数.

5. 已知等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差和等比数列$\left\{b_n\right\}$的公比都是d，又知$d\neq 1$，且$a_1=b_1$，$a_4=b_4$，$a_{10}=b_{10}$.

（1）求a_1与d的值；（2）b_{16}是不是$\left\{a_n\right\}$中的项？

6. 设$\{a_n\}$是等差数列，$b_n=(\frac{1}{2})^{a_n}$，$b_1+b_2+b_3=\frac{21}{8},b_1b_2b_3=\frac{1}{8}$，求$\{a_n\}$的通项公式.

7. 已知函数$f(x)=-3x+3,x\in[\frac{2}{3},1]$，（1）求$f(x)$的反函数$y=g(x)$；（2）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_2=g(a_1),a_3=g(a_2),\cdots a_n=g(a_{n-1})$，求证：数列$\left\{a_n-\frac{3}{4}\right\}$是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；（3）解关于$n$的不等式$a_n\ge\frac{7}{9}$.

8. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_6=33$，$a_3\cdot a_4=32$，$a_{n+1}<a_n$，

（1）求a_n；（2）若$T_n=\lg a_1+\lg a_2+\cdots+\lg a_n$，求$T_n$的最大值.

9. 已知二次函数$y=f\left(x\right)$在$x=\frac{t+2}{2}$处取得最小值$-\frac{t^2}{4}$ $\left(t>0\right)$，$f\left(1\right)=0$.

（1）求$y=f\left(x\right)$的表达式；

（2）若任意实数x都满足等式$f\left(x\right)g\left(x\right)+a_nx+b_n=x^{n+1}g\left(x\right)$为多项式（$n\in N^*$），试用$t$表示$a_n$和$b_n$.

7.3（4）：等比数列的前 n 项和

1. 数列 1，a，a^2，a^3，…，a^{n-1}，…的前 n 项和为（　　）

A. $\dfrac{1-a^n}{1-a}$　　B. $\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$　　C. $\dfrac{1-a^{n+2}}{1-a}$　　D. 以上都不对

2. 等比数列中，已知 $a_1+a_2=20$，$a_3+a_4=40$，则 $a_5+a_6=$________________.

3. 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列，公比为2，且 $a_1a_2a_3\cdots a_{30}=2^{30}$，求 $a_3a_6a_9\cdots a_{30}$.

4. 等比数列的各项都是正数，若 $a_1=81$，$a_5=16$，求它的前5项和.

5. 已知 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和，$S_n=93$，$a_n=48$，公比 $q=2$，求项数 n.

6. 等比数列中，已知 $a_1=-1$，$a_4=64$，求 q 及 S_4.

7. 已知等比数列中，$a_1=3$，$a_5=48$，求此数列的前 5 项和.

8. 等比数列中，$a_3=\dfrac{3}{2}$，$S_3=\dfrac{9}{2}$，求 a_1 及 q.

9．在等比数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1+a_6=33$，$a_2a_5=32$，求S_6.

10．某商场今年销售计算机 5000 台，如果平均每年的销售量比上一年的销售量增加 10%，那么从今年起，大约几年可使总销售量达到 30000 台（结果保留到个位）？

11．一个球从 100m 高出处自由落下，每次着地后又弹回到原来高度的一半再落下，当它第 10 次着地时，共经过的路程是多少？（精确到 1m）

12. 在等比数列$\left\{a_n\right\}$ $\left(n\in N^*\right)$中，$a_1>1$，公比$q>0$.设$b_n=\log_2 a_n$，且$b_1+b_3+b_5=6$，$b_1b_3b_5=0$.

（1）求证：数列$\left\{b_n\right\}$是等差数列；（2）求$\left\{b_n\right\}$的前n项和S_n及$\left\{a_n\right\}$的通项a_n；

（3）试比较a_n与S_n的大小.

7.3（5）：等比数列的前 n 项和

1. 求等比数列 1，2，4，…从第 5 项到第 10 项的和.

2. 一条信息，若一人得知后用一小时将信息传给两个人，这两个人又用一小时各传给未知此信息的另外两人，如此继续下去，一天时间可传遍多少人？

3. 在等比数列$\{a_n\}$中，S_n表示前n项和，若$a_3=2S_2+1$，$a_4=2S_3+1$，则公比q等于（　　）

A．3　　B．－3　　C．－1　　D．1

4. 已知数列$\{a_n\}$为等比数列，S_n是它的前n项和．若$a_2a_3=2a_1$，且a_4与$2a_7$的等差中项为$\frac{5}{4}$，则$S_5=$（　　）

A．35　　B．33　　C．31　　D．29

5. 在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_1+a_2+a_3=1$，$a_4+a_5+a_6=-2$，则该数列前15项的和$S_{15}=$________.

6. 设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=1$，$S_6=4S_3$，则$a_4=$________.

7. 若等比数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2^n+r$，则$r=$（　　）

A.　2　　B.　1　　C.　0　　D.　-1

8. 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_n=2\times 3^{n-1}$，则由此数列的偶数项所组成的新数列的前n项和为（　　）

A.　3^{n-1}　　B.　$3(3^{n-1})$　　C.　$\frac{1}{4}(9^n-1)$　　D.　$\frac{3}{4}(9^n-1)$

9. 等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，其前n项中，数值最大的一项是 54，若该数列的前n项之和为S_n，且$S_n=80$，$S_{2n}=6560$，求：（1）前 100 项之和S_{100}.（2）通项公式a_n.

10. 已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和S_n，且$S_{n+1}=4a_n+2$，$a_1=1$，设$b_n=a_{n+1}-2a_n$，求证：数列$\left\{b_n\right\}$是等比数列.

11. 已知一个等比数列$\left\{a_n\right\}$的首项为 1，项数为偶数，其奇数项的和为 85，偶数项的和为 170，求这个数列的公比和项数.

12. 一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列，其最小内角是（　　）

A. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　B. $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}$　　D. $\arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

13. 某纯净水制造厂在净化水过程中，每增加一次过滤可减少水中杂质 20%，要使水中杂质减少到原来的 5%以下，则至少需过滤的次数为（　　）

A.5　　B.10　　C.14　　D.15

14. 已知等比数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_3=3$，$a_{10}=384$，则该数列的通项$a_n=$____________.

15. 若等比数列的公比$q<0$，前n项和为S_n，则S_8a_9与S_9a_8的大小关系是（　　）

A. $S_8a_9>S_9a_8$　　B. $S_8a_9<S_9a_8$　　C. $S_8a_9=S_9a_8$　　D.不确定

16. 银行一年定期的年利率为 r，三年定期的年利率为 q，银行为吸收长期资金，鼓励储户存三年定期的存款，那么q的值应略大于（　　）

A.$\sqrt{(1+r)^3-1}$　　B. $\frac{1}{3}\left[(1+r)^3-1\right]$　　C. $(1+r)^3-1$　　D. r

17. 定义一种运算“＊”对于任意非零自然数 n 满足以下运算性质：（1）$1*1=1$；（2）$(n+1)*1=3(n*1)$.试求$n*1$关于n的代数式____________

18. 已知等差数列$\left\{a_n\right\}$的第 2 项为 8，前 10 项的和为 185，从数列$\left\{a_n\right\}$中，依次取出第 2 项、第 4 项、第 8 项、…、第2^n项按原来的顺序排成一个新数列$\left\{b_n\right\}$，求数列$\left\{b_n\right\}$的通项公式及前n项和S_n.

19. 已知 $f(x)=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$，若 $2, f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n), 2n+4 (n\in N^*)$ 成等差数列，

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n；

（2）令 $c_n = a_n \lg a_n$，问是否存在正数 a，使得 $\{c_n\}$ 是一个单调递增的数列，若存在，求出 a 的范围；若不存在，请说明理由.

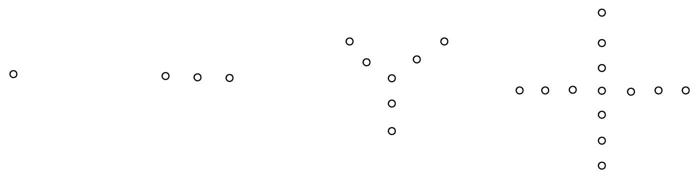
20. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，数列 $\{b_n\}$ 中，$b_1 = a_1$，$b_n = a_n - a_{n-1}\ (n \geq 2)$，若 $a_n + S_n = n$.

（1）设 $c_n = a_n - 1$，求证：数列 $\{c_n\}$ 是等比数列；（2）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

21. 设数列 $\{a_n\}$，$a_1 = \dfrac{5}{6}$，若以 a_1，a_2，…，a_n 为系数的二次方程：$a_{n-1}x^2 - a_n x + 1 = 0\ (n\in N^* 且 n \geq 2)$ 都有根 α、β 满足 $3\alpha - \alpha\beta + 3\beta = 1$.（1）求证：$\left\{a_n - \dfrac{1}{2}\right\}$ 为等比数列；（2）求 a_n；（3）求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

7.4：数列通项公式的求解

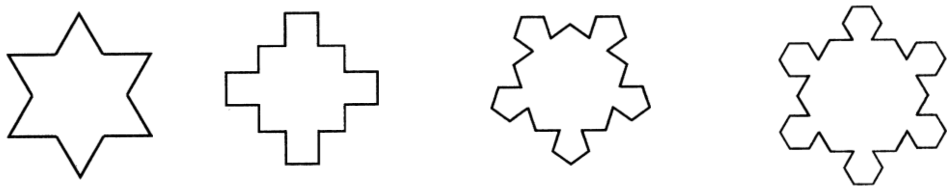
1. 根据下列 4 个图形及相应点的个数的变化规律，猜测第 n 个图中有___________个点.



（1）　　　　　（2）　　　　　（3）　　　　　（4）

2. 按照以下规律：那么从 2006 到 2008 的顺序为（　　）

3. 如图，第 n 个图形是由正 $n+2$ 边形“扩展”而来，则第 $n-2$ 个图形中共有_____个凸点



4. 求 $\{a_n\}$ 的通项公式

（1）$a_1=1, a_n=3^{n-1}+a_{n-1}(n\ge 2)$　　　　（2）$a_1=1$，且 $a_{n+1}=a_n+2n(n\in N^*)$

（3）$a_1=2$，且 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n+1}$　　　　（4）$a_1=1$，$a_n>0$，$(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0, n\in N^*$

（5）$a_1=1,a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1\ (n\in N^*)$．

（6）$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2},(n\in N_+)$

（7）a_1=1，$a_{n+1}-2a_n=2^n$

（8）$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n^2$

5. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{3}$，前n项和S_n与a_n的关系是$S_n=n(2n-1)a_n$，试求通项公式a_n.

6. 已知正项数列$\{a_n\}$，其前 n 项和S_n满足$10S_n=a_n{}^2+5a_n+6$且a_1，a_3，a_{15}成等比数列，求数列$\{a_n\}$ 的通项a_n。

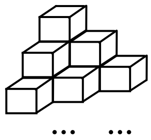
7. 数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=a_{n+1}$，$(n\in N_+)$，$a_1=2$，求a_n和S_n.

7.5：数列的求和

1. 将棱长相等的正方体按右下图所示的形状摆放，从上往下依次为第 1 层，第 2 层，第 3 层，…，则第 2005 层正方体的个数是（　　）

   A．4011　　B．4009　　C．2011015　　D．2009010

2. 求等比数列$1,2,2^2,2^3,\cdots$中的第 5 项到第 10 项的和.



3. 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为 18，前$2n$项为和 28，求前$3n$项和.

4. 求和：$S_n=\ln x+\ln x^3+\ln x^5+\cdots+\ln x^{2n-1}$.

5. 求数列$1\frac{1}{3},2\frac{1}{9},3\frac{1}{27},4\frac{1}{81},\cdots$的前$n$项和.

6. 求数列$a_n = x^n + \dfrac{1}{x^n} + 1$的前 n 项和.

7. 求数列 5，55，555，5555，……的前 n 项和.

8.（1）求和：$\dfrac{1}{1\times 3} + \dfrac{1}{2\times 4} + \dfrac{1}{3\times 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+2)}$；

（2）求和：$\dfrac{1}{1\times 4} + \dfrac{1}{4\times 7} + \dfrac{1}{7\times 10} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$；

（3）求和：$\dfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$.

9. 数列$1,\dfrac{1}{1+2},\dfrac{1}{1+2+3},\dfrac{1}{1+2+3+4},\cdots,\dfrac{1}{1+2+3+\cdots n}$的前$n$项和为$\dfrac{49}{25}$，求 n.

10. 已知函数 $f(x)=\dfrac{4^x}{2+4^x}$. 则 ① $f(\dfrac{1}{3})+f(\dfrac{2}{3})=$________.

② $f(\dfrac{1}{2009})+f(\dfrac{2}{2009})+\cdots+f(\dfrac{2008}{2009})=$___________.

③求 $f(\dfrac{1}{n})+f(\dfrac{2}{n})+f(\dfrac{3}{n})+\cdots+f(\dfrac{n-2}{n})+f(\dfrac{n-1}{n})$.

11. 数列求和：$1+3q+5q^2+7q^3+9q^4$

12. 设 a 为常数，求数列 a，$2a^2$，$3a^3$，…，na^n，…的前 n 项和.

13. 若数列$\{a_n\}$的通项$a_n=(2n-1)\cdot 3^n$，求此数列的前n项和S_n.

14. 求和：$1-3+5-7+9+\ldots+(-1)^{n-1}(2n-1)$.

15. 设S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_1=1$，$S_n^2=a_n\left(S_n-\frac{1}{2}\right)(n\geq 2)$.

（1）求$\{a_n\}$的通项；（2）设$b_n=\frac{S_n}{2n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

16. 观察下面由奇数组成的数阵，回答下列问题：

（1）求第六行的第一个数；

（2）求第 20 行的第一个数；

（3）求第 20 行的所有数的和.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 5 & & \\ & 7 & & 9 & & 11 & \\ 13 & & 15 & & 17 & & 19 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

17. 已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前n项和s_n满足$s_1>1$，且$6s_n=(a_n+1)(a_n+2)(n$为正整数）.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\begin{cases} a_n, n为偶数 \\ 2^{a_n}, n为奇数 \end{cases}$，求$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$.

7.6（1）：数学归纳法

1. 用数学归纳法证明：“凸n边形的对角线有$\frac{n(n-3)}{2}$条”，第一步是验证$n=$_____成立.

2. 已知n为正偶数，则用数学归纳法证明等式$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$，在第一步应该验证$n=$__________时，左边=____________________，右边=__________________.

3. 某个与自然数n有关的命题，若$n=k$时，该命题成立，那么可推得当$n=k+1$时该命题也成立，现已知当$n=5$时该命题不成立，那么可推得（　　）

A. 当$n=6$时该命题不成立　　B. 当$n=6$时该命题成立

C. 当$n=4$时该命题不成立　　D. 当$n=4$时该命题成立

4. 若命题$P(n)$对$n=k$成立，则它对$n=k+2$也成立，又若$P(n)$对$n=2$成立，则下列结论中正确的是（　　）

A. $P(n)$对所有正整数n成立　　B. $P(n)$对所有正偶数n成立

C. $P(n)$对所有正奇数n成立　　D. $P(n)$对所有大于1的正整数n成立

5. 在用数学归纳法证明等式$1-2+4-8+\cdots+(-2)^{n-1}=\frac{1+(-1)^{n-1}2^n}{3}$的第（2）步中，假设$n=k$时原等式成立，证明$n=k+1$时原等式也成立时，需要证明的等式是____________________________________.

6. 用数学归纳法证明等式$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$的第（2）步中，假设$n=k$时原等式成立，证明$n=k+1$时原等式也成立时，需要证明的等式是____.

7. 下列各式从$n=k$到$n=k+1$式子增加了什么？

（1）$1+2+3+\cdots+2n$；　　（2）$2+4+\cdots+2n$；

（3）$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+2n$；　　（4）$1+2+3+\cdots+2^n$；

（5）$2^n \times 2^{n+1} \times 2^{n+2} \times \cdots \times 2^{3n}$；　　　（6）$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2$.

8. 小明用数学归纳法证明等式：$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n},\left(n\in N^*\right)$的证明过程如下：

（i）当$n=1$时，左式$=\dfrac{1}{2}$，右式$=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$．　$\therefore$左式=右式.

（ii）假设$n=k$时，等式成立，即$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^k}=1-\dfrac{1}{2^k}$，

那么当$n=k+1$时，左式$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^{k+1}}=1-\dfrac{1}{2^{k+1}}=$右式.

根据（i）、（ii）可知，对任意$n\in N^*$，等式均成立.

指出小明证明过程中的错误，并给出纠正.

9. 用数学归纳法证明下列等式

（1）$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$；

（2）$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$.

7.6（2）：数学归纳法的应用

1. 用数学归纳法证明$1+2+2^2+\cdots+2^{3n-1}$能被7整除，从$n=k$到$n=k+1$时，原式添加的项数是____________.

2. 用数学归纳法证明等式$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$，从假设当$n=k$时等式成立，到证明$n=k+1$时等式也成立，等式左端需增加的式子为______________________；右端需增加的式子为______________________.

3. 用数学归纳法证明下列等式

（1）$2+4+6+\cdots 2n=n(n+1)$；

（2）$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

4. 用数学归纳法证明：

（1）$2^{3n}-1,\left(n\in N^*\right)$能被7整除；

（2）$4^{2n+1}+3^{n+2},\left(n\in N^*\right)$能被13整除.

（3）$n^3+5n\left(n\in N^*\right)$能被 6 整除.

5. 已知数列$\left\{a_n\right\}$满足：$a_1=1,a_{n+1}=2a_n+1,\left(n\in N^*\right)$，用数学归纳法证明：$a_n=2^n-1$.

6. 用数学归纳法证明：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$.

7. 已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1$，设该数列的前n项和为S_n，且$S_n,S_{n+1},2a_1$成等差数列，用数学归纳法证明：$S_n=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$.

7.6（3）：归纳—猜想—论证

1. 观察下式：$1=1$，$1-4=-(1+2)$，$1-4+9=1+2+3$，……，猜想第 n 个式子为____________________.

2. 观察下列各式：$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}$，$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$，$4\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{4+\frac{4}{15}}$，……，归纳猜想用 $n,\left(n\geq 2,n\in N^{*}\right)$ 表示的等式为____________________.

3. 根据下列各式的规律：$1<2$，$1+\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}$，$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}$，……归纳猜想用 $n,\left(n\in N^{*}\right)$表示的不等式为____________________.

4. 依次计算数列$\left(1-\frac{1}{2}\right),\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right),\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right),\cdots\cdots$前四项的值；根据计算的结果，猜想$T_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$的表达式，并用数学归纳法证明.

5. 已知数列 $\frac{1}{1\times 2},\frac{1}{2\times 3},\frac{1}{3\times 4},\cdots,\frac{1}{n\times(n+1)}$，设 S_n 是该数列的前 n 项和.（1）计算：S_1,S_2,S_3,S_4的值；（2）根据计算的结果，猜想$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}$的表达式，并用数学归纳法证明.

6. 在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=1, a_n=a_{n-1}+2n-1, n\geq 2$.

（1）求a_2, a_3, a_4；（2）猜想数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式$a_n=f\left(n\right)$，并用数学归纳法证明你的猜想.

7. 在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=1, S_n=n^2a_n, n\geq 2$.

（1）求a_2, a_3, a_4；（2）猜想数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式$a_n=f\left(n\right)$，并用数学归纳法证明你的猜想.

8. 证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}>1+\frac{n}{2}\quad (n\geq 2)$