

11 ANNEXE – DÉVELOPPEMENT D’UN MODÈLE DE COMPORTEMENT DU BÉTON À JEUNE À ÂGE

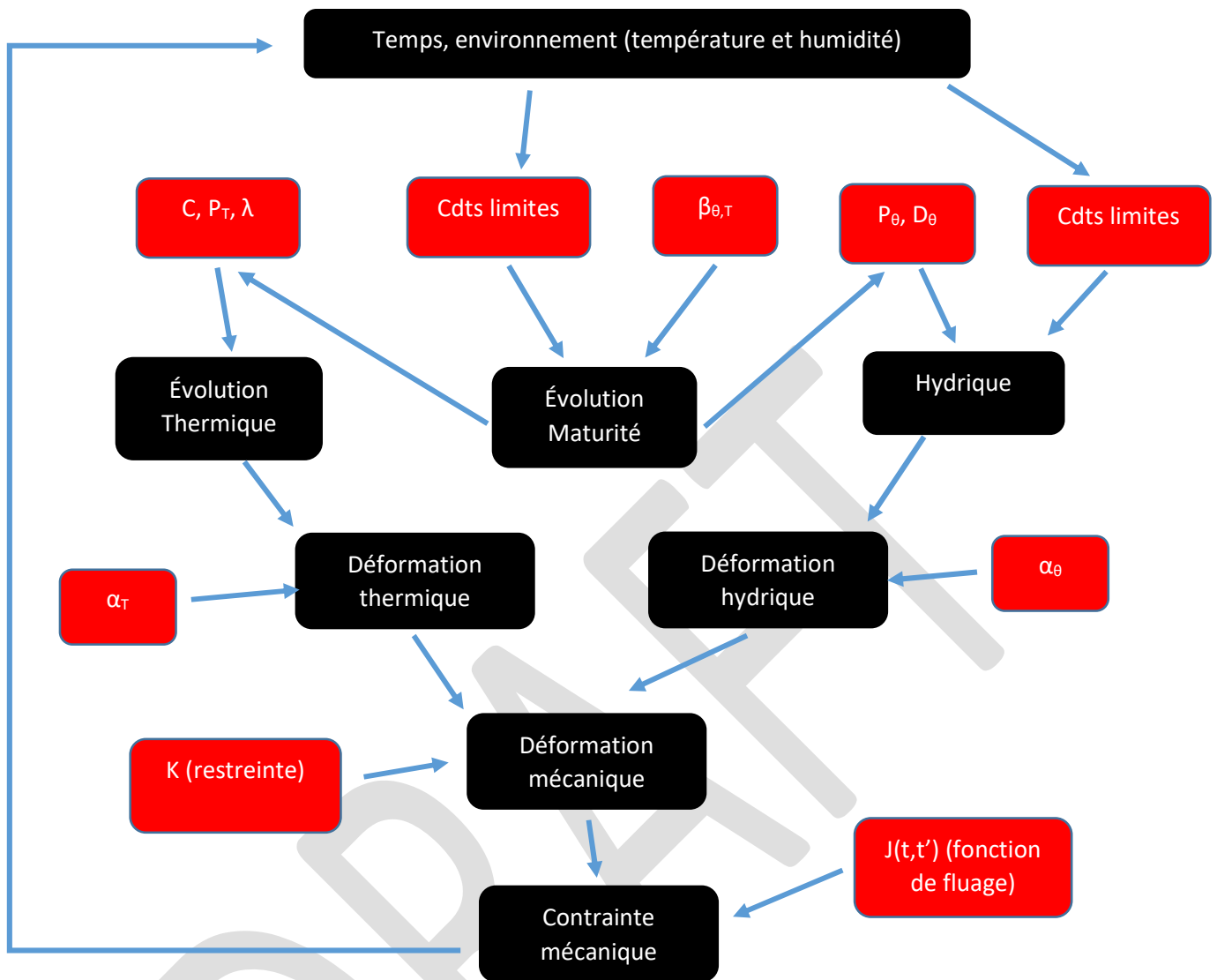
11.1 INTRODUCTION

Un outil pour la prédiction des contraintes induites par les variations volumiques dues aux variations de température et d’humidité est ici présenté. L’idée n’est pas de développer un *autre* outil d’analyse structural type FEA (Finite Element Analysis) mais bien de définir un outil métier orienté vers la prédiction rapide et facile des contraintes induites 3D (inclus impact de l’épaisseur) par le retrait/expansion thermique et le retrait de séchage. Les processus de diffusion de la chaleur et de l’humidité sont capturés avec au haut niveau de modélisation. Cependant, le champ de déformation est quant à lui modélisé via des coefficients de restrainte tels que, par exemple, définis dans l’EC2-3. Un champ de contrainte 3D en est alors directement dédié prenant en compte l’effet de Poisson et de relaxation.

Le comportement du béton à jeune âge est modélisé via la prédiction combinée du champ de température, humidité potentiel et de maturité. L’outil développé est composé de deux parties ; l’une permettant une résolution efficace et rapide des équations et l’autre permettant de modifier très facilement les modèles relatifs aux matériaux. La particularité de l’outil présenté ci-après est donc la séparation entre les modèles d’évolutions (résolues de manière numérique par des bibliothèques écrites en C++/Fortran) et les modèles relatifs aux propriétés de matériaux définies sous Python via des fonctions définies par l’utilisateur et transférées à la bibliothèque de résolution numérique. Une bibliothèque sous python est aussi développée pour aider à définir ces fonctions utilisateurs.

Les équations sont résolues en 3D par la méthode des différences finies d’ordre 2. Ci-après sont inscrits en rouge les informations configurables via Python (donc via l’utilisateur).

11.2 DESCRIPTION DES MODÈLES THÉORIQUES



11.2.1 ÉVOLUTION DU CHAMP DE TEMPÉRATURE (T).

$$c \frac{dT(x, t)}{dt} = \dot{\phi}_T(M) + \nabla \cdot (\lambda(T) \nabla T) \quad \text{Eq. (1)}$$

Où

- c est la capacité thermique volumique ($J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$)
- λ est la conductivité thermique ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)

La diffusivité thermique, D_t ($m^2 \cdot s^{-1}$), est donc définie comme $D_t = \frac{\lambda}{c}$.

$\dot{\phi}_T(M)$ est le taux de production de chaleur émise lors de la réaction chimique exothermique d'hydratation. La chaleur émise est fonction de la maturité (M) et non du temps (t). Cette fonction est typiquement déterminée via un essai (semi-)adiabatique.

11.2.2 ÉVOLUTION DE LA MATURITÉ (M)

Tel que proposé par Bazant [50, 52], une maturité (M) ou un temps «équivalent» (t_e) est intégré en fonction de l'historique de température et d'humidité.

$$\frac{dM(x, t)}{dt} = \beta_{T, \Theta}(T(x, t), \Theta(x, t)) \quad \text{Eq. (2)}$$

Bazant a proposé le modèle suivant :

$$\beta_{T, \Theta}(T, \Theta) = e^{\frac{Q}{R} \left[\frac{1}{T_{ref}} - \frac{1}{T} \right]} \cdot \frac{1}{1 + [a_c - a_c \Theta]^{b_c}} \quad \text{Eq. (3)}$$

Où,

- Q est l'énergie d'activation
- R est la constante

11.2.3 ÉVOLUTION DU CHAMP D'HUMIDITÉ POTENTIEL (Θ)

L'humidité potentielle, Θ , est définie comme l'humidité relative que l'air aurait si elle était en équilibre thermodynamique avec le matériau poreux. La conservation de la masse d'eau contenue dans le matériau poreux, $w(x, t)$, s'écrit :

$$\frac{dw(x, t)}{dt} = -\frac{dw_s}{dt} + \nabla \cdot (D_w \nabla w) \quad \text{Eq. (4)}$$

$$\frac{d\Theta(x, t)}{dt} \left(\frac{d\Theta}{dw} \right) = -\frac{dw_s}{dt} + \nabla \cdot (D_w \nabla w) \quad \text{Eq. (5)}$$

$\frac{d\Theta}{dw}$ est la pente dans la courbe d'isotherme de désorption qui est relativement constant entre 40% et 100%. On peut donc réécrire l'équation précédente :

$$\frac{d\Theta(x, t)}{dt} = \dot{\phi}_{\Theta}(M) + \nabla \cdot (D_{\Theta} \nabla \Theta) \quad \text{Eq. (6)}$$

Où,

- $\dot{\phi}_{\Theta}$ est le taux de perte d'humidité due à la réaction chimique d'hydratation (s^{-1})
- D_{Θ} est la diffusivité hydrique ($m^2 \cdot s^{-1}$)

Les conditions aux limites des deux équations aux dérivées partielles pour T et Θ , peuvent être définies comme

- soit de type Dirichlet

$$\Theta = f_{\Theta}(x, t) \text{ ou } T = f_T(x, t) \quad \text{Eq. (7)}$$

- soit de type Neumann

$$D_{\Theta} \frac{d\Theta}{dn} = f_{\Theta}(\mathbf{x}, t, \Theta_{wall}) \text{ ou } \lambda \frac{dT}{dn} = f_T(\mathbf{x}, t, T_{wall}) \quad \text{Eq. (8)}$$

Celle-ci permet, par exemple, d'imposer des conditions de type convection naturelle ou forcée.

11.2.4 MODÉLISATION DE LA DÉFORMATION THERMIQUE ET HYDRIQUE

$$d\epsilon_T = \alpha_T(T) dT \quad \text{Eq. (9)}$$

Et

$$d\epsilon_{\Theta} = \alpha_{\Theta}(\Theta) d\Theta \quad \text{Eq. (10)}$$

α_T et α_{Θ} sont respectivement les coefficients d'expansion thermique et hydrique. L'EC2-1 définit

$$\epsilon_{\Theta}(\Theta) = 0.85 (220 + 110 \alpha_{ds1}) e^{-\alpha_{ds2} f_{cm}/10} [-1.55 (1 - \theta^3)] 10^{-6} \quad \text{Eq. (11)}$$

avec,

$$\alpha_{\Theta}(\Theta) = \frac{d\epsilon_{\Theta}}{d\Theta} \quad \text{Eq. (12)}$$

11.2.5 MODÉLISATION DU CHAMP DE DÉFORMATION

La déformation totale est la somme de la déformation mécanique, ϵ^M , de la déformation thermique, ϵ^T , et la déformation hydrique, ϵ^{Θ} .

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^M + \epsilon^{\Theta} \delta_{ij} + \epsilon^T \delta_{ij} \quad \text{Eq. (13)}$$

Le champ de déformation total, ϵ , n'est pas capturé comme dans un code classique d'analyse structurale en imposant les conditions aux limites sur le champ de déplacement ou de contrainte. A la place, un niveau de restreinte, R , est imposé :

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \epsilon_M(\mathbf{x}, t) + \epsilon_{\Theta}(\mathbf{x}, t) + \epsilon_T(\mathbf{x}, t) \quad \text{Eq. (14)}$$

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = (1 - R(\mathbf{x}, t)) \cdot (\epsilon_{\Theta}(\mathbf{x}, t) + \epsilon_T(\mathbf{x}, t)) \quad \text{Eq. (15)}$$

Donc,

$$\epsilon_M(\mathbf{x}, t) = R(\mathbf{x}, t) (\epsilon_{\Theta}(\mathbf{x}, t) + \epsilon_T(\mathbf{x}, t)) \quad \text{Eq. (16)}$$

11.2.6 MODÉLISATION DU CHAMP DE CONTRAINTE

$$\epsilon_M(x, t) = \int_0^t J(t, \tau) \mathbf{C} \dot{\sigma}(x, \tau) d\tau \quad \text{Eq. (17)}$$

- $J(t, \tau)$ est la fonction de fluage
- \mathbf{C} est la matrice non-dimensionnelle

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

Sur base de la fonction de fluage J , l'incrément de contrainte est calculé comme suit (cfr. [49]) :

$$\Delta \sigma = \tilde{E}(t) \mathbf{D} \Delta \epsilon_M + \tilde{\sigma}(t) \quad \text{Eq. (18)}$$

Avec,

- $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix}$$

- $\Delta \epsilon_M$ est l'incrément de déformation mécanique sur un pas de temps Δt
- $\tilde{E}(t^*)^{-1} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} J(t+\Delta t, \tau) d\tau$
- $\tilde{\sigma}(t) = -\tilde{E}(t^*) \int_0^t [J(t+\Delta t, \tau) - J(t, \tau)] \dot{\sigma}(\tau) d\tau$

11.2.7 INTÉGRATION SPATIO-TEMPORELLE

Les schémas de discrétisation sont d'ordre deux en temps et en espace.

TBC

11.3 EXEMPLE

11.3.1 SÉCHAGE D'UN PRISME ET DÉVELOPPEMENT DE LA CONTRAINTE DE TRACTION INTERNE CONSÉCUTIF AU RETRAIT PARTIELLEMENT EMPÊCHÉ

Les Figure 120 à Figure 123 illustrent les champs d'humidité, de contrainte et de déformation pour un élément de section (80x80 mm²) dans une atmosphère à 60% et à différents âges.

- À 10 jours (Figure 120) : séchage et retrait dans la peau. Développement de la contrainte dans la peau
- Entre 60 jours (Figure 121) et 100 jours (Figure 122) : séchage et retrait à l'intérieur de l'élément. Relaxation des contraintes dans la peau. Développement de la contrainte dans l'élément. Le champ déformation n'est plus une image du champ de contrainte à cause de la prise en compte de la relaxation.
- À 3 ans (Figure 123) : le processus de retrait est globalement stabilisé. Le champ de contrainte décroît jusqu'à 0 due à la relaxation.

DRAFT

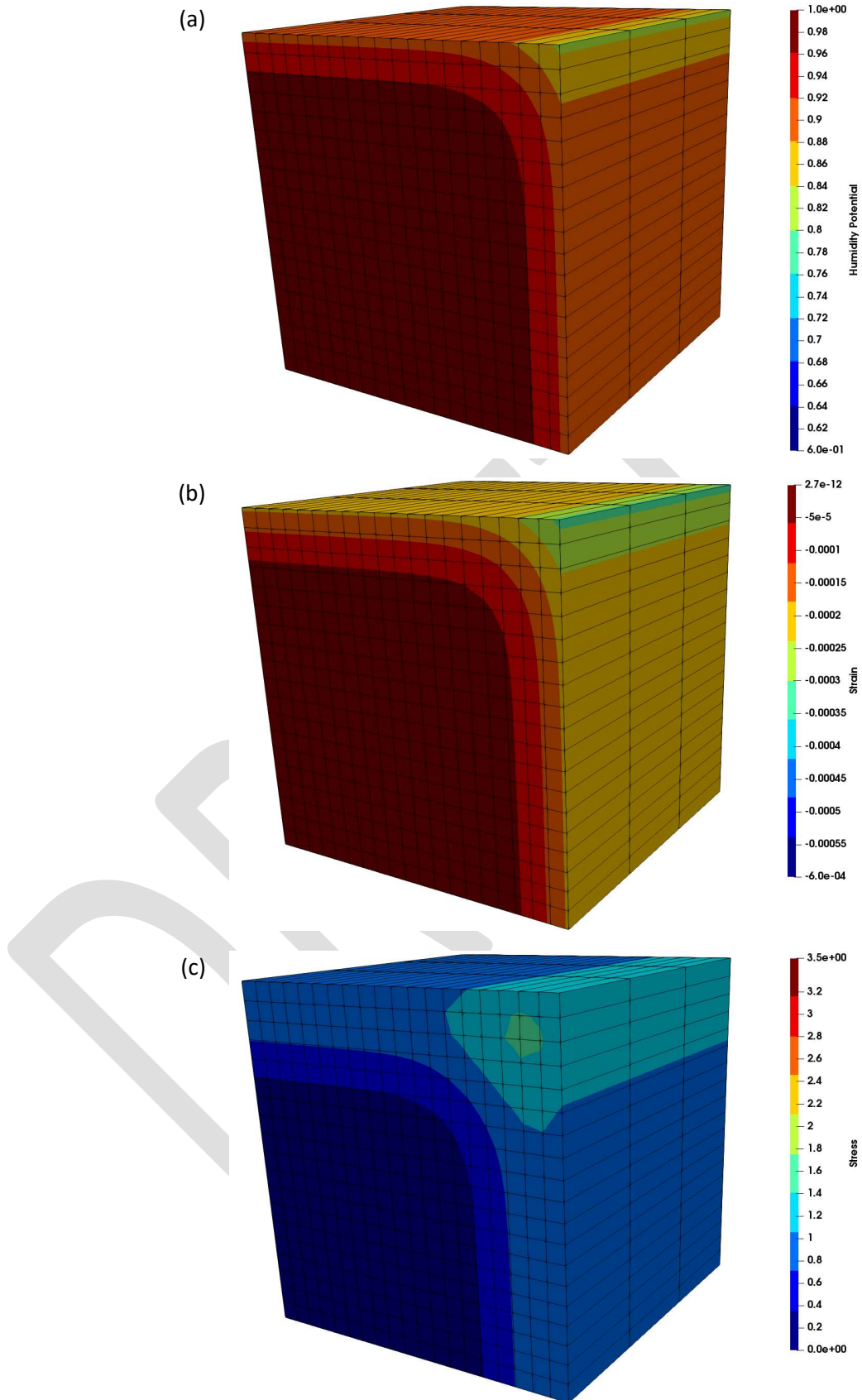


Figure 120 – (a) Champ d'humidité potentielle, (b) norme du champ de déformation et (c) norme du champ de contrainte à 10 jours après décoffrage

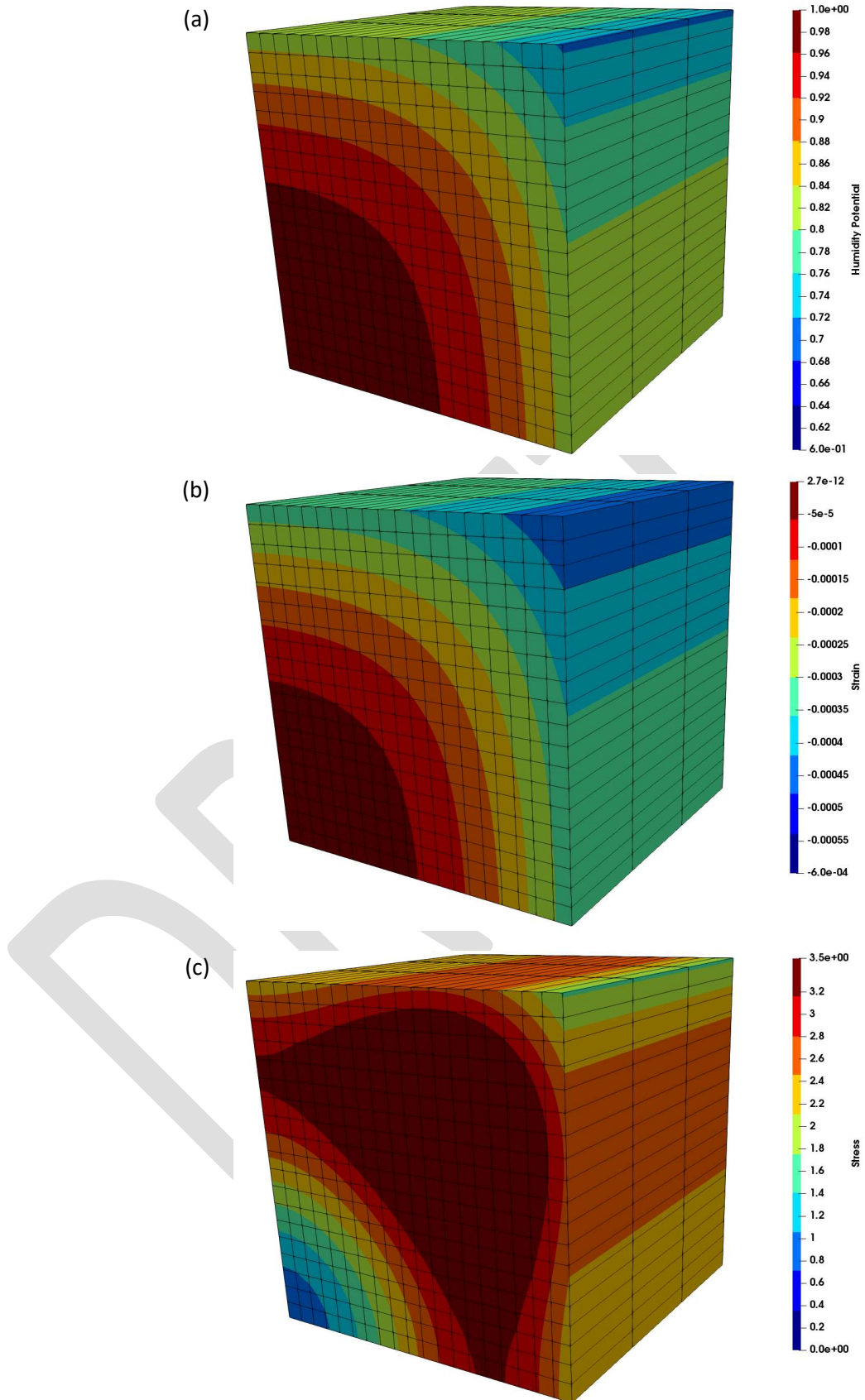


Figure 121 – (a) Champ d'humidité potentielle, (b) norme du champ de déformation et (c) norme du champ de contrainte à 60 jours après décoffrage

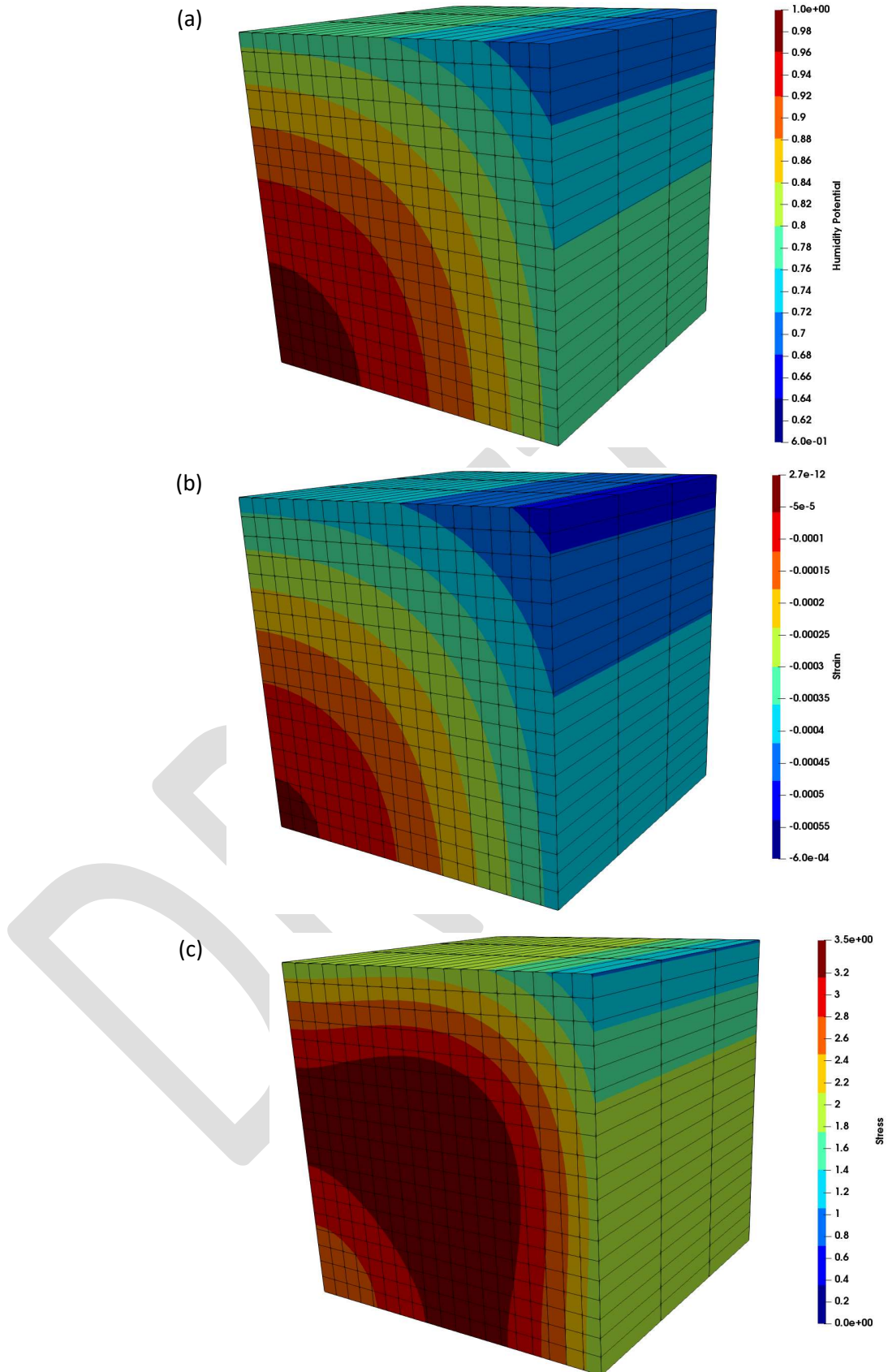


Figure 122 – (a) Champ d'humidité potentielle, (b) norme du champ de déformation et (c) norme du champ de contrainte à 100 après décoffrage

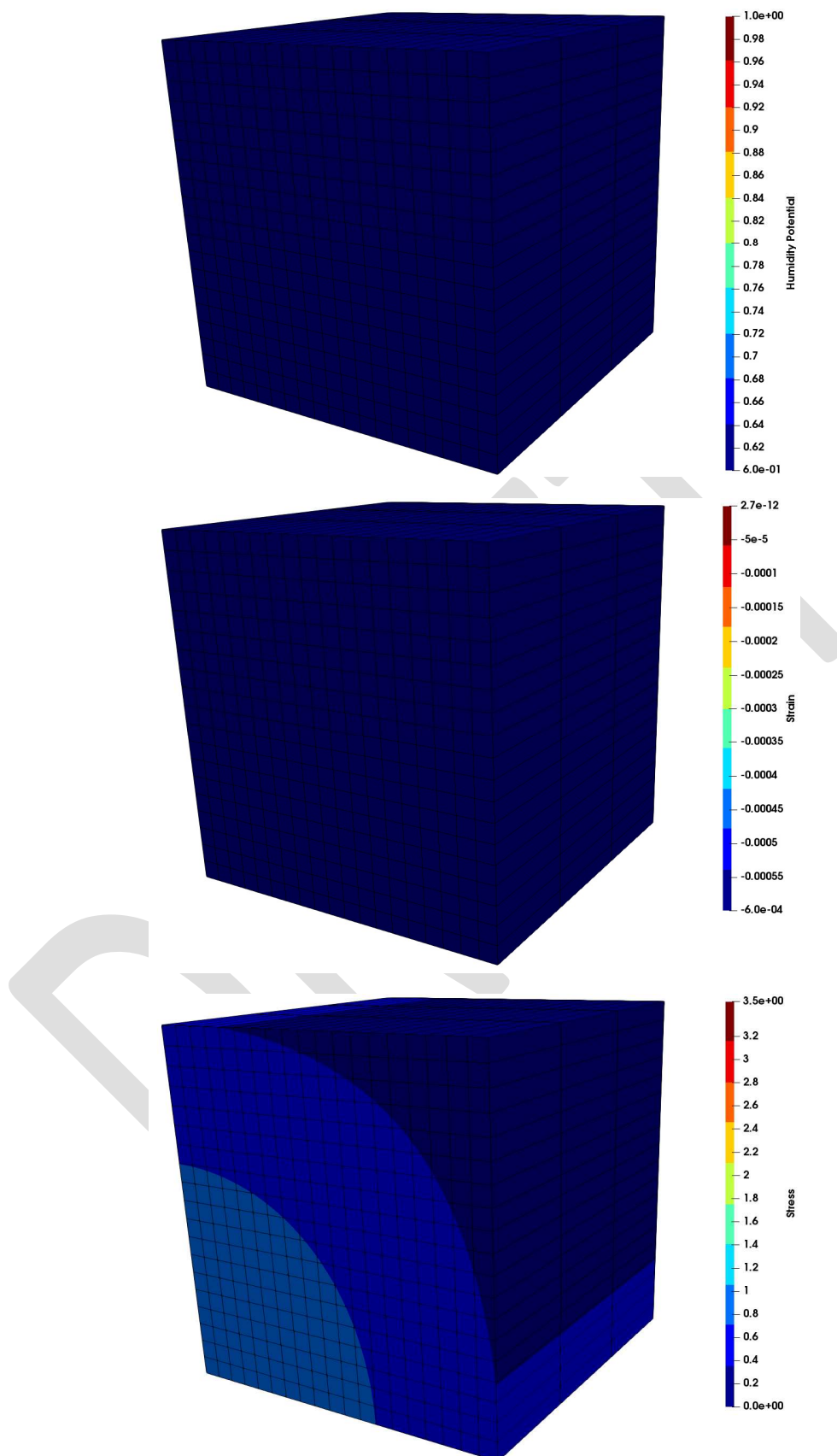


Figure 123 – (a) Champ d'humidité potentielle, (b) norme du champ de déformation et (c) norme du champ de contrainte à 3 ans après décoffrage