Guia Sistemas en tiempo discreto

March 29, 2020

Guia 1 Grupo 3

Ejercicio 1

d) $\mathbf{R}\left[\mathbf{x}\left(\mathbf{nT}\right)\right]=\mathbf{5nTx^2}\left(\mathbf{nT}\right)$

Invariancia:

$R\left[x\left(nT-\alpha\right)\right]=5nTx^2\left(nT-\alpha\right)$

$T\left[R\left[x\left(nT\right)\right]\right]=T\left[5nTx^2\left(nT\right)\right]=5(nT-T)x^2\left(nT-\alpha\right)$

No es tiempo invariante.

Causalidad: Es causal ya que no depende de entradas futuras.

Linealidad:

$R\left[ax_1\left(nT\right)+bx_2\left(nT\right)\right]=5nT\left(a{x_1}^2+bx_2^2\right)\left(nT\right)\neq aR\left[x_1\left(nT\right)\right]+bR\left[x_2\left(nT\right)\right]$

No es un sistema lineal.

e) $\mathbf{R}\left[\mathbf{x}\left(\mathbf{nT}\right)\right]=\mathbf{3x}\left(\mathbf{nT}+\mathbf{3T}\right)$

Invariancia:

$R\left[x\left(nT-T\right)\right]=3x\left(nT+3T-\alpha\right)$

$T\left[R\left[x\left(nT\right)\right]\right]=T\left[3x\left(nT+3T\right)\right]=3x\left(nT+3T-\alpha\right)$

Es tiempo invariante.

Causalidad: No es causal ya que depende de entradas futuras.

Linealidad:

$R\left[ax_1\left(nT\right)+bx_2\left(nT\right)\right]=3\left[ax_1\left(nT+3T\right)+bx_2\left(nT+3T\right)\right]=a3x_1\left(nT+3T\right)+b3x_2\left(nT+3T\right)=aR\left[x_1\left(nT\right)\right]+bR\left[x_2\left(nT\right)\right]$

Es un sistema lineal.

i) $\mathbf{R}\left[\mathbf{x}\left(\mathbf{nT}\right)\right]=\mathbf{x}\left(\mathbf{nT}+\mathbf{T}\right)\mathbf{e^{-nT}}$

Invariancia:

$R\left[x\left(nT-\alpha\right)\right]=x\left(nT+T-\alpha\right)e^{-nT}$

$T\left[R\left[x\left(nT\right)\right]\right]=T\left[x\left(nT+T-\alpha\right)e^{-nT+\alpha}\right]=x\left(nT+T-\alpha\right)e^{-nT+\alpha}$

No es tiempo invariante.

Causalidad: No es causal ya que depende de entradas futuras.

Linealidad:

$R\left[ax_1\left(nT\right)+bx_2\left(nT\right)\right] = \left[ax_1\left(nT\right)+bx_2\left(nT\right)\right]e^{-nT+T} = ax_1\left(nT\right)e^{-nT+T} + bx_2\left(nT\right)e^{-nT+T} = aR\left[x_1\left(nT\right)\right]+bR\left[x_2\left(nT\right)\right]$

Es un sistema lineal.

Ejercicio 2b

La ecuación en diferencia del sistema se vale de la función auxiliar $e(nT)$.

1. $e(nT) = x(nT) + e(nT-T) - 0.5e(nT-2T)$
2. $y(nT) = e(nT) + e(nT-T)$

Ejercicio 9

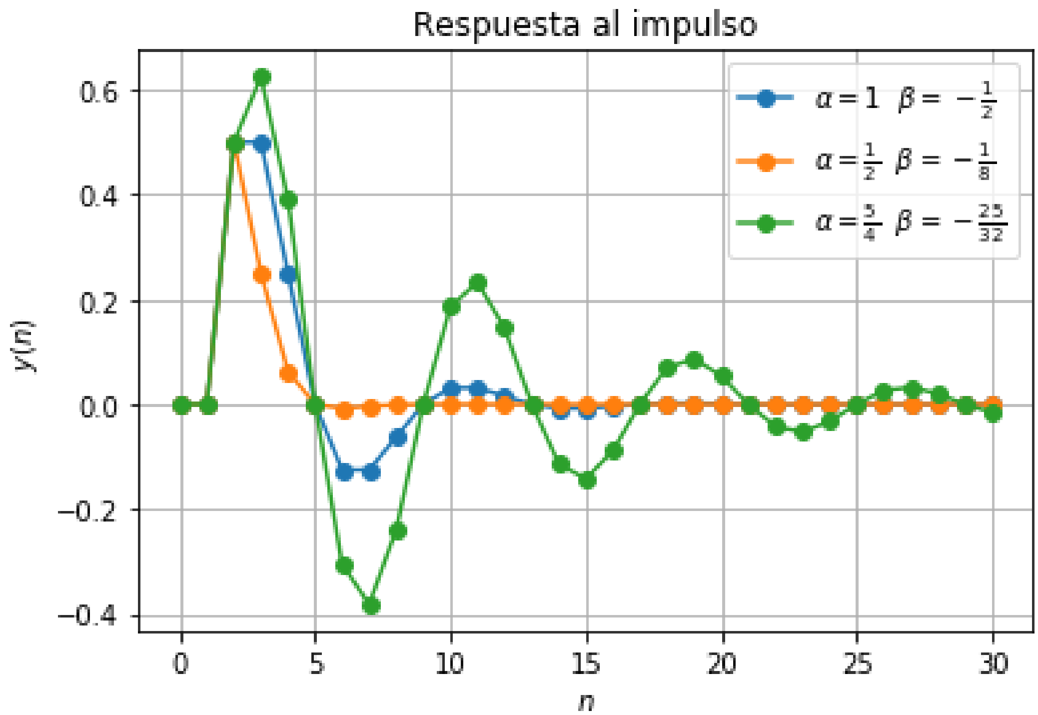
La ecuación en diferencia del sistema es

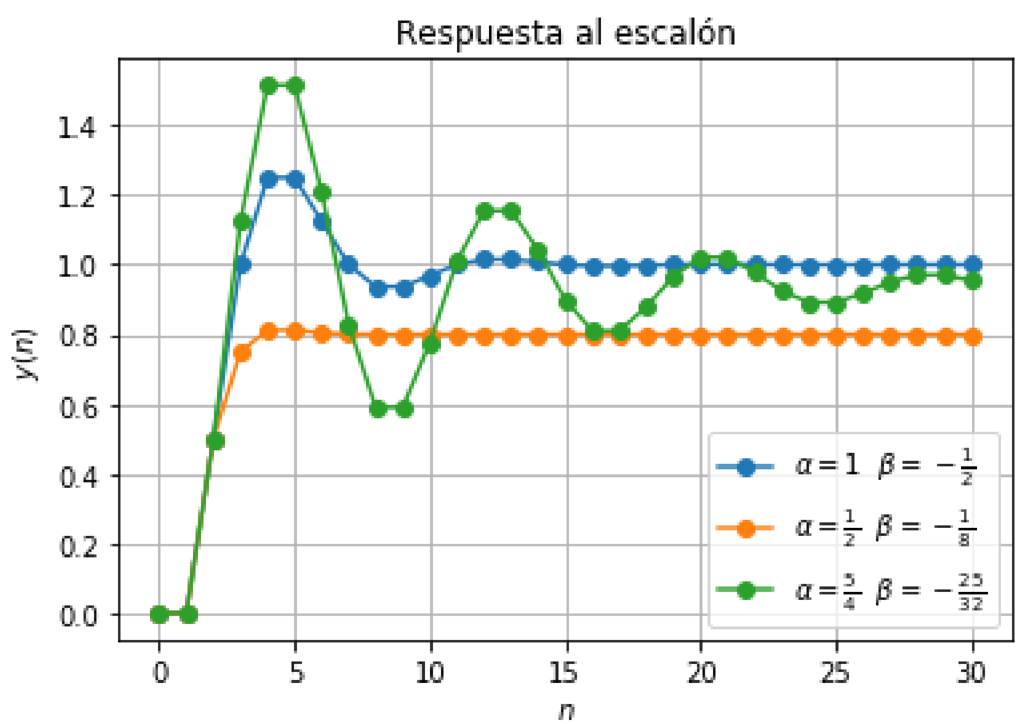
$$y(nT) = 0.5x(nT-2T) + \alpha y(nT-T) + \beta y(nT-2T)$$

De esta forma se obtienen los siguientes resultados.

[3]:
```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

class ejercicio9():

    def __init__(self, w):
        self.n = []
        self.xn = []
        self.xn.append(1)
        for i in range(30):
            self.xn.append(w)
            self.n.append(i)
        self.n.append(30)

    def giveN(self):
        return self.n

    def giveXn(self):
        return self.xn

    def salida(self, a, b):
        yn = []
        for i in range(31):
            if i == 0:
```

```python
                yn.append(0)
            if i == 1:
                yn.append(a*yn[0])
            if i == 2:
                yn.append(0.5*self.xn[0] + a*yn[1] +b*yn[0])
            elif i >= 3:
                yn.append(0.5*self.xn[i-2] + a*yn[i-1] + b*yn[i-2])

        return yn

impulso = ejercicio9(0)
escalon = ejercicio9(1)

#print(impulso.giveN())
#print(impulso.salida(1, -0.5))      #13 - 5

#print(escalon.giveN())
#print(escalon.salida(5/4, -25/32))      #12 - 4

plt.title("Respuesta al impulso")
plt.xlabel("$n$")
plt.ylabel("$y(n)$")
plt.plot(impulso.giveN(), impulso.salida(1, -0.5), '-o' , label = r'$\alpha=1$ ␣
 ↪$\beta=-\frac{1}{2}$')
plt.plot(impulso.giveN(), impulso.salida(0.5, -1/8), '-o', label =␣
 ↪r'$\alpha=\frac{1}{2}$  $\beta=-\frac{1}{8}$')
plt.plot(impulso.giveN(), impulso.salida(5/4, -25/32), '-o', label =␣
 ↪r'$\alpha=\frac{5}{4}$  $\beta=-\frac{25}{32}$')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

plt.title("Respuesta al escalón")
plt.xlabel("$n$")
plt.ylabel("$y(n)$")
plt.plot(impulso.giveN(), escalon.salida(1, -0.5), '-o' , label = r'$\alpha=1$ ␣
 ↪$\beta=-\frac{1}{2}$')
plt.plot(impulso.giveN(), escalon.salida(0.5, -1/8), '-o', label =␣
 ↪r'$\alpha=\frac{1}{2}$  $\beta=-\frac{1}{8}$')
plt.plot(impulso.giveN(), escalon.salida(5/4, -25/32), '-o', label =␣
 ↪r'$\alpha=\frac{5}{4}$  $\beta=-\frac{25}{32}$')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```


Respuesta al impulso
$\alpha = 1 \ \ \beta = -\frac{1}{2}$
$\alpha = \frac{1}{2} \ \ \beta = -\frac{1}{8}$
$\alpha = \frac{5}{4} \ \ \beta = -\frac{25}{32}$
$y(n)$
n


Respuesta al escalón
$\alpha = 1 \ \ \beta = -\frac{1}{2}$
$\alpha = \frac{1}{2} \ \ \beta = -\frac{1}{8}$
$\alpha = \frac{5}{4} \ \ \beta = -\frac{25}{32}$
$y(n)$
n

Se puede determinar la frecuencia de oscilación para los casos de $\alpha = 1$ y $\beta = -\frac{1}{2}$ y $\alpha = \frac{5}{4}$ y $\beta = -\frac{25}{32}$, tanto de la respuesta al impulso como del escalón. Para todos los casos se obtiene $f_o = \frac{125}{T}$.\ Para estimar la respuesta en frecuencia basta con proveer al sistema con sinusoides de distinta frecuencia, y obteniendo el autovalor asociado, donde dicho autovalor es la respuesta en frecuencia evaluada para aquella frecuencia, obteniendo varios puntos de estos, se logra estimar la respuesta en frecuencia.

1 Ejercicio 11

La ecuación en diferencia del sistema es:

$$y(n) = 0.4y(n-1) + 0.4x(n)$$

Siendo este un sistema relajado, se busca $y(n)$ con $x(n) = \delta(n)$:

$$h(0) = 0.4x(0) + 0.4h(-1) = 0.4$$

$$h(1) = 0.4x(1) + 0.4h(0) = 0.4^2$$

$$h(2) = 0.4x(2) + 0.4h(1) = 0.4^3$$

$$...$$

$$h(n) = 0.4^{n+1}$$

Se busca que la salida quede expresada de la forma:

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$$

Donde

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = \lim_{x\to\infty} y_{zi}(n) + y_{zs}(n) \longrightarrow h(n) * x(n) + 0$$

Asumiendo excitación senoidal $x(nt) = cos(n\omega T) = \frac{e^{jn\omega T}}{2j} + \frac{e^{-jn\omega T}}{2j}$

$$y(nT) = R[x(nT)] = \frac{1}{2j}R\left[e^{jn\omega T}\right] + \frac{1}{2j}R\left[e^{-jn\omega T}\right] = \frac{1}{2j}y_1(\omega T) + \frac{1}{2j}y_2(\omega T)$$

Tomando

$$y_1(\omega T) = \sum_{k=0}^{n} x_1(n-k)h(k) = \sum_{k=0}^{n} e^{j(n-k)\omega T}0.4^{n+1} = 0.4\sum_{k=0}^{n} e^{j(n-k)\omega T}e^{ln(0.4)} = 0.4e^{jn\omega T}\sum_{k=0}^{n} e^{j(-k)\omega T\ ln(0.4)}$$

Sabiendo que es una serie geométrica

$$y_1(\omega T) = 0.4e^{jn\omega T}\frac{e^{(ln(0.4)-jk\omega T)(n+1)} - 1}{e^{ln(0.4)-jk\omega T} - 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_1(n) = e^{jn\omega T}\frac{0.4}{1 - e^{ln(0.4)-jk\omega T}} = \tilde{y}_1(n)$$

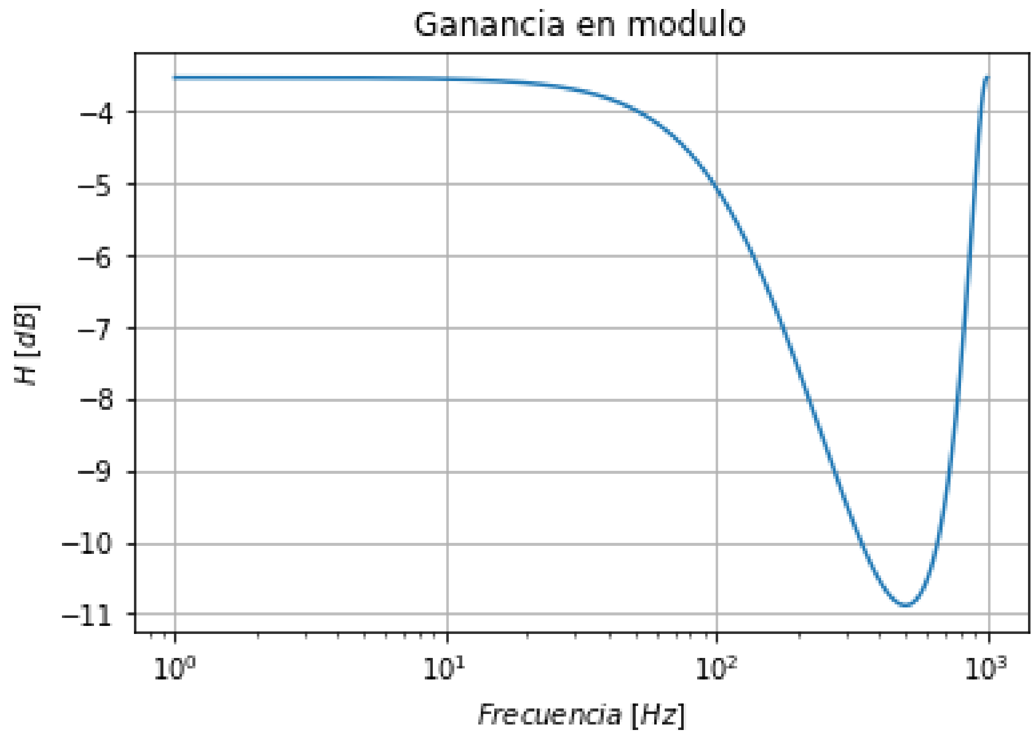
$$H(j\omega) = \frac{0.4}{1 - e^{ln(0.4) - jk\omega T}}$$

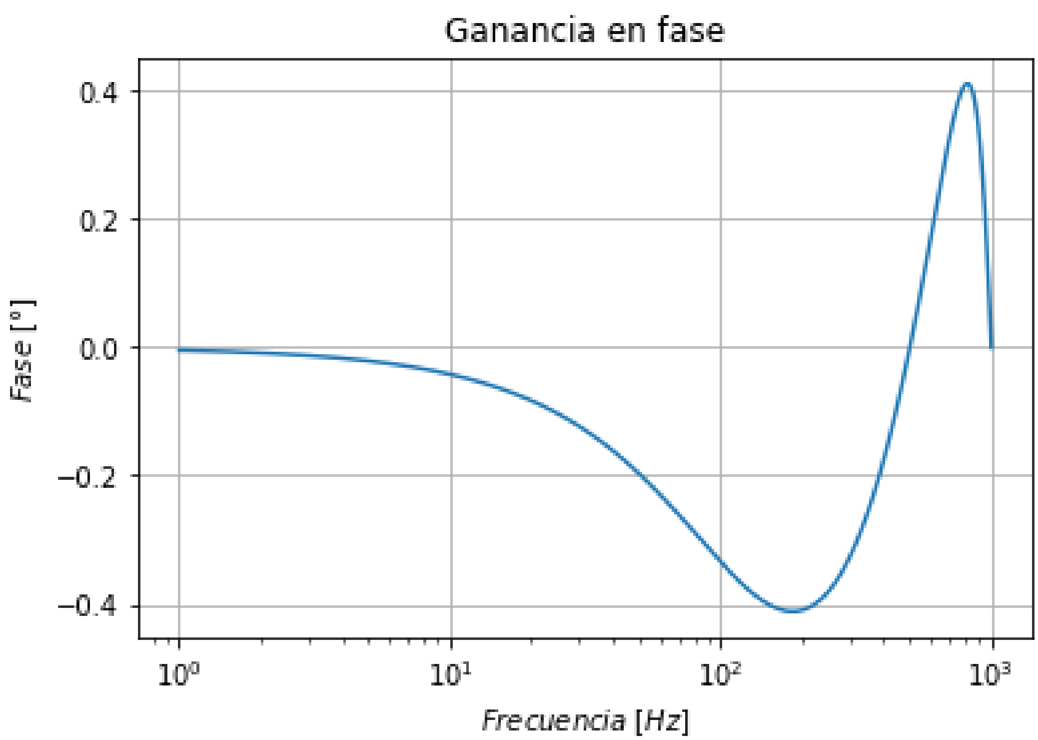
Siendo así:

$$|H(j\omega)| = \frac{0.4}{\sqrt{1 + 0.4^2 - 0.8cos(\omega T)}} \tag{1}$$

$$\angle H(j\omega) = arctan\left(\frac{0.4sen(\omega T)}{0.4cos(\omega T) - 1}\right) \tag{2}$$

[4]:
```
f = np.logspace(0, 3, 1000)
H = []
arg = []
for i in range(len(f)):
    H.append(20*np.log10( 0.4 / np.sqrt(1 + 0.4**2 - 0.8 * np.cos(2*np.
 ↪pi*f[i]*0.001))))
    arg.append(np.arctan((0.4*np.sin(2*np.pi*f[i]*0.001)) / (0.4*np.cos(2*np.
 ↪pi*f[i]*0.001) - 1)))

plt.title("Ganancia en modulo")
plt.xlabel("$Frecuencia \ [Hz]$")
plt.ylabel("$H \ [dB]$")
plt.plot(f, H)
plt.xscale('log')
plt.grid()
plt.show()

plt.title("Ganancia en fase")
plt.xlabel("$Frecuencia \ [Hz]$")
plt.ylabel("$Fase \ [°]$")
plt.plot(f, arg)
plt.xscale('log')
plt.grid()
plt.show()
```


Ganancia en modulo
H [dB]
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
10^0
10^1
10^2
10^3
Frecuencia [Hz]


Ganancia en fase
Fase [°]
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
10^0
10^1
10^2
10^3
Frecuencia [Hz]

Evaluando (1) en 0, se obtiene $H(0) = \frac{2}{3}$. Ahora se busca la frecuencia tal que $|H(j\omega)| = \frac{2}{3\sqrt{2}}$. Despejando, se obtiene $f = \frac{0.99}{2\pi T} = 157.31\ Hz$.