

1. Filtros

1.1. Introducción a filtro Anti Aliasing

El filtro **Anti Aliasing** es un filtro pasa bajos, el cual se encarga de que se cumpla el criterio de muestreo de **Nyquist**, el cual postula que para la reconstrucción exacta de una señal periódica continua en banda base, es necesaria una frecuencia de muestreo f_s por lo menos 2 veces superior al ancho de banda B de la señal original. Bajo estas hipótesis, para reconstruir la señal solo hará falta realizar la convolución de la señal muestreada con la función $\text{sinc}(B \cdot t)$. La señal original se puede expresar como:

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{f_s}\right) \cdot \text{sinc}\left(t - \frac{n}{f_s}\right) \quad (1)$$

En caso de que no se cumplan las hipótesis de Nyquist se presentará un problema el cual es fácilmente observable utilizando el análisis de Fourier. Sea $x(t)$ una señal en tiempo continuo la cual se desea digitalizar. Utilizando un muestreo ideal, multiplicaremos la señal por un tren periódico de deltas de período $T_s = \frac{1}{f_s}$ y observaremos su transformada de Fourier.

$$\mathcal{F}\{x_q(t)\}(f) = \mathcal{F}\{\delta_{T_s}(t) \cdot x(t)\}(f) = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \cdot x(nT_s)\right\}(f) = X(f) * \delta_{T_s}(f) \quad (2)$$

$$\delta_{T_s}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} \delta(f - nf_s) \quad (3)$$

Dado que es sabido que el papel de la delta en una convolución es aquel de la unidad, es fácil de observar que realizar la convolución con un tren de ellas, es equivalente a montar el espectro de la señal $x(t)$ sobre cada delta. El problema fundamental radica en la superposición de espectros entre una delta y la continua, como está ilustrado en (1) se encuentra la señal de entrada junto a su espectro, en (2) se observa la señal cuantizada, en el caso de que se cumple el teorema de Nyquist, en cambio en (3) se observa el caso en el cual no se cumple el teorema, y se aprecia la superposición de espectros, en (4) se ve la resultante y por consiguiente en (5) la señal recuperada en caso de que no se cumpla el teorema¹.

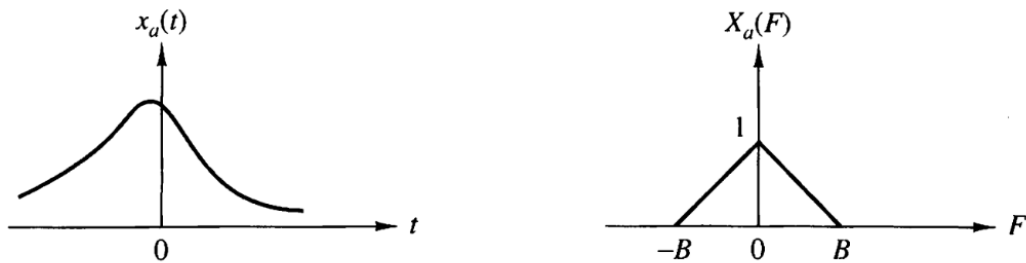


Figura 1: Señal de entrada junto a su espectro.

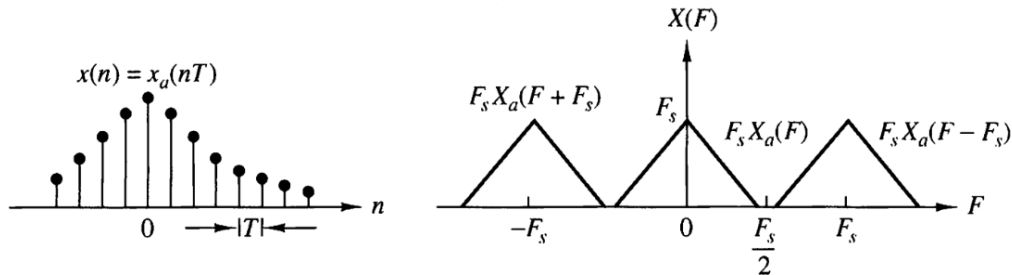


Figura 2: Señal cuantizada junto a su espectro con $f_s > 2B$.

¹Las imágenes fueron extraídas de :J. G. Proakis and D. G. Manolakis, Digital signal processing. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 2014. pag 388

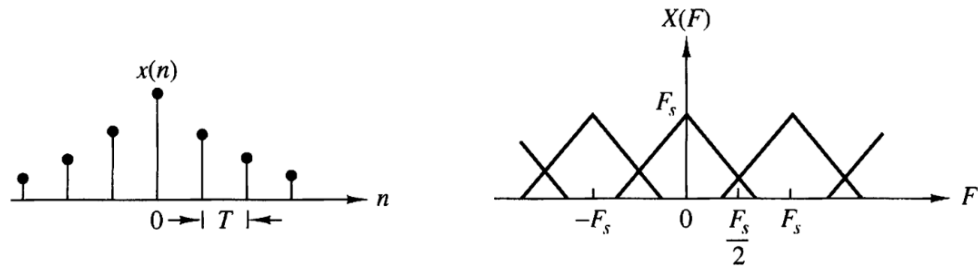


Figura 3: Señal cuantizada junto a su espectro con $f_s < 2B$.

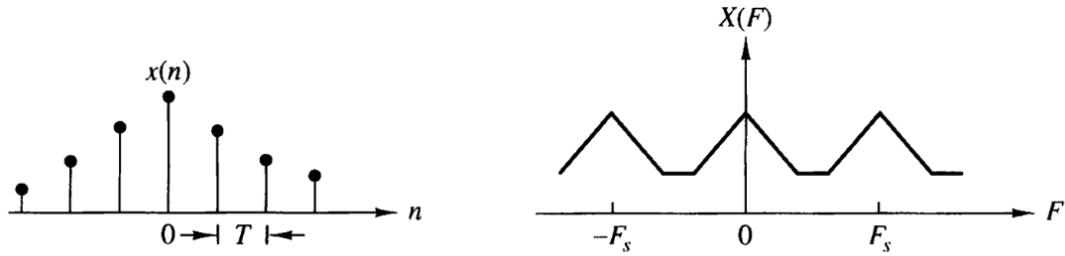


Figura 4: Señal cuantizada junto a su espectro resultante.

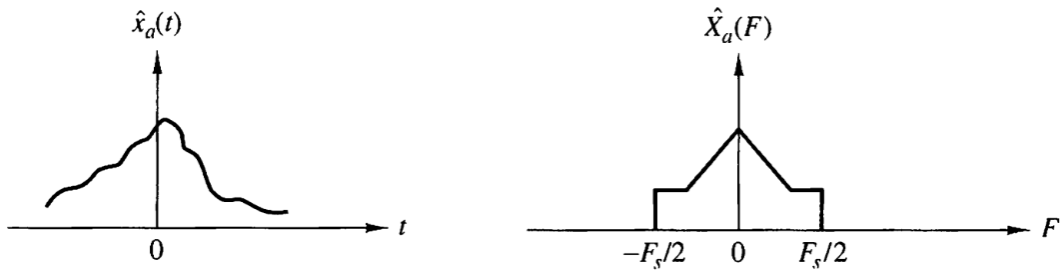


Figura 5: Señal reconstruida junto a su espectro.

Otro factor importante es que la frecuencia de Nyquist está definida como $2B$ únicamente para un filtro ideal, en la realidad se debe tomar una frecuencia mayor a $f_s > 2B$ dado que se utilizará un filtro real.

1.2. Introducción a filtro Recuperador

El filtro recuperador cumple la vital importancia de como su nombre indica, recuperar la señal a partir de su espectro, dado que previo al filtro, se tiene un espectro como es observado en (6) el objetivo del filtro recuperador es filtrar los espectros ajenos a la banda base, para obtener en el dominio temporal la señal original.

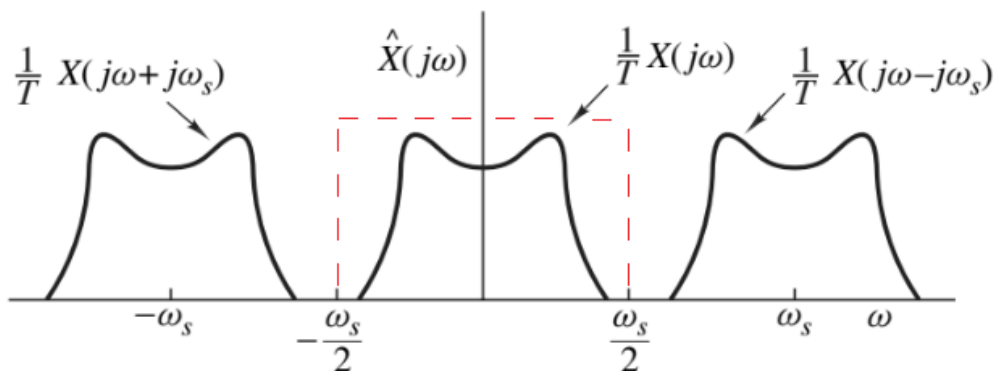


Figura 6: Espectro de la señal cuantizada.

1.3. Análisis espectral

En esta sección se procede a analizar el tipo de señales que recibirá el circuito, se especificaron las siguientes señales por la cátedra:

$$X_a = \cos(2\pi f_{in} t) \sim X_b: \frac{3}{2} \text{ seno} \sim X_c: \text{Señal triangular}$$

Para esto se utilizará como herramienta la serie de fourier de cada una de estas señales, con esta definida como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \cdot e^{j2\pi n f_0 t} \quad \wedge \quad X_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (4)$$

Teniendo en cuenta que tambien se puede expresar de forma trigonométrica como:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \cdot \sin(2\pi n f_0 t) \quad \wedge \quad a_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad \wedge \quad b_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(2\pi n f_0 t) dt \quad (5)$$

Realizando las cuentas para cada señal queda que:

X_a ya es su propio desarrollo en serie.

$$X_b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{12}{\pi} \cdot \frac{1}{9 - 4n^2} \cdot \cos(2\pi n f_0 t) \quad X_c = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{8 \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi^2 n^2} \cdot \sin(2\pi n f_0 t) \quad (6)$$

El criterio que se utilizará para saber hasta que armónico conservaremos, dado que estas ultimas 2 señales cuentan con infinitos, sera hasta obtener una potencia del 99 %, es útil recordar que la potencia de una señal se encuentra en sus coeficientes de fourier, mediante la **igualdad de Parseval**

$$\frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \quad (7)$$

Para las señales X_b y X_c se graficó la potencia en función del armónico y como quedaría la señal reconstruida luego de este filtro.

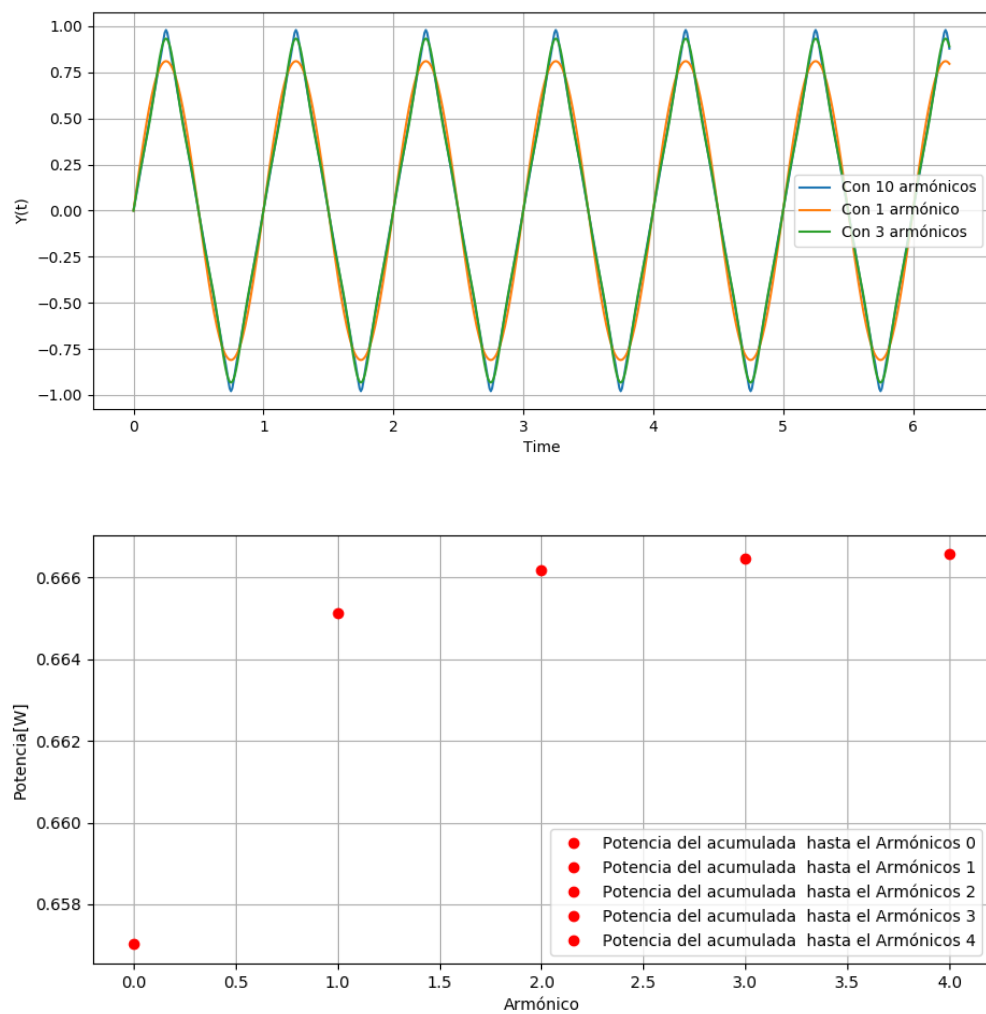


Figura 7: Señal triangular reconstruida junto a su espectro de potencias.

Es de apreciar que incluyendo hasta el 3er armónico se obtiene una potencia superior al 95 %
 Luego con la señal seno $\frac{3}{2}$

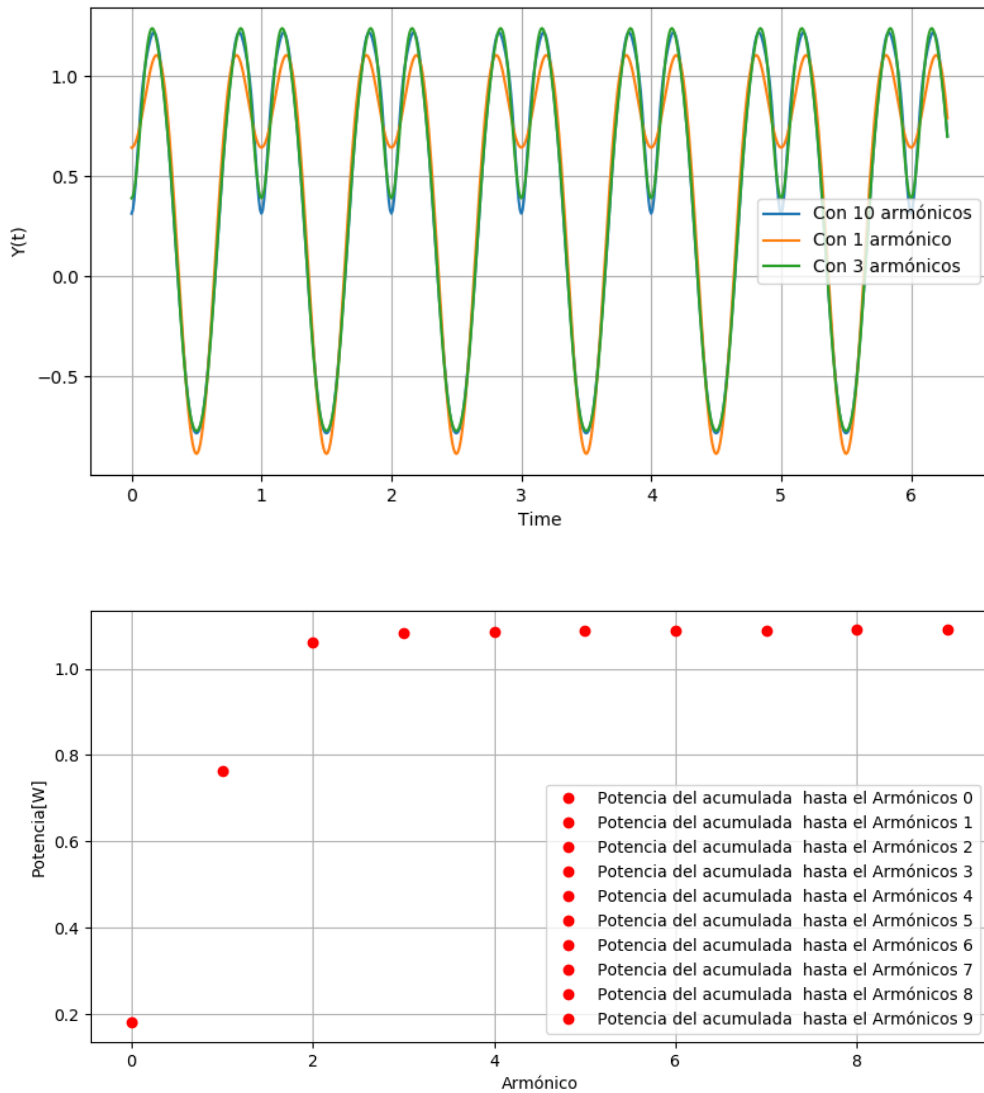


Figura 8: Señal seno $\frac{3}{2}$ reconstruida junto a su espectro de potencias.

Es de apreciar que incluyendo hasta el 3er armónico se obtiene una potencia superior al 95 %. La frecuencia fundamental de estas señales será $f_0 = \frac{N}{2} kHz = 1,5 kHz$, correspondiéndole la frecuencia del máximo armónico (el 3er) de $4,5 kHz$, asimismo, es favorable considerar la señal de AM que también será probada por el sistema, cuya máxima frecuencia será $2 \cdot f_0 = 3 kHz$. Se tomará $f_p = 5 kHz$ definiendo así la plantilla del filtro.

f_p	f_a	A_p	A_s
5kHz	7.5kHz	1dB	41dB

1.4. Diseño del filtro

Una vez con los parámetros definidos, se procedió a elegir la aproximación a utilizar, se descartaron cheby II y cauer, debido a los ceros de transmisión que estos poseen, y cheby 1 debido a el ripple de banda pasante que este posee, luego Guass y Bessel fueron descartados ya que su principal característica es la linealidad de la fase, finalmente quedan Butterworth y Legendre, de los cuales si bien Butterworth tiene la mayor planicie de banda pasante, tiene el problema de que para cumplir la plantilla necesitaría un orden superior que utilizando la aproximación de legendre, ademas agregado que legendre cuenta con el mayor cambio de pendiente, por estas razones, se eligió utilizar la aproximación de Legendre. Realizando la aproximación se obtuvo el siguiente diagrama de polos y ceros:

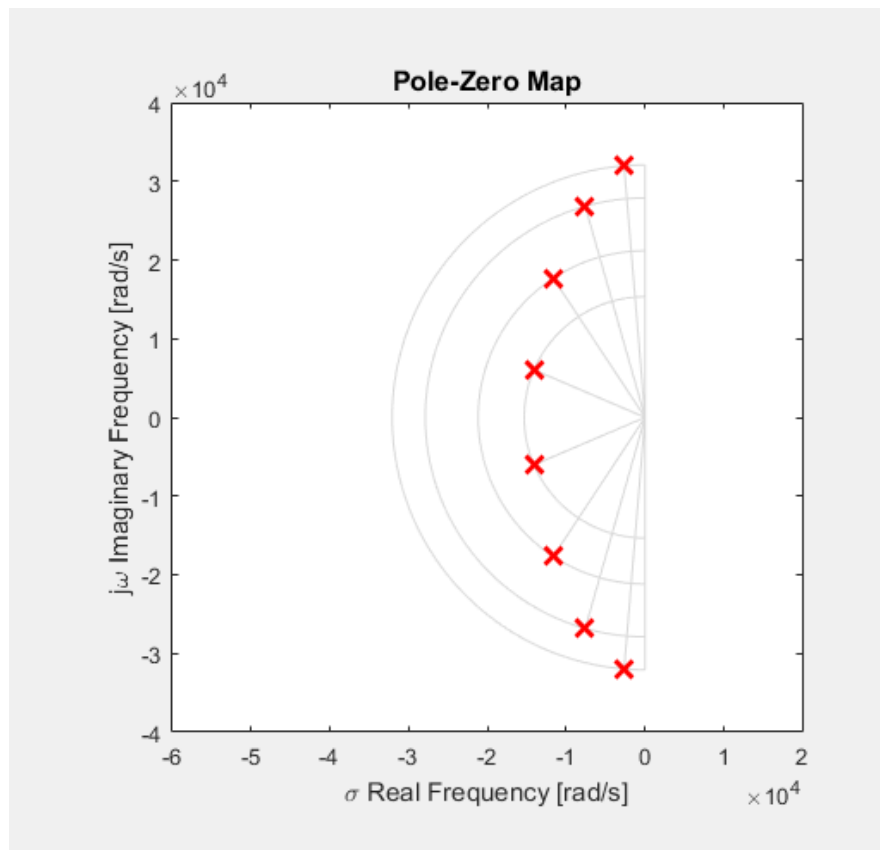


Figura 9: Diagrama de polos y ceros.

Ademas de obtener una transferencia teórica de la siguiente forma:

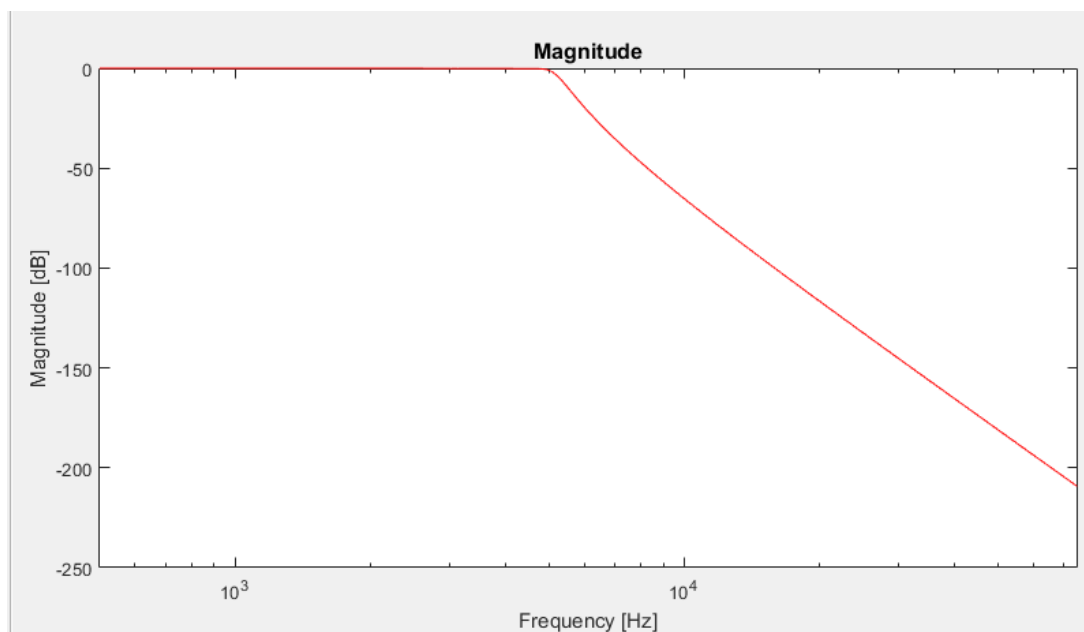


Figura 10: Respuesta en frecuencia teórica.

Lo cual corresponde a un filtro de orden 7, con frecuencias de corte y Q como indica la siguiente tabla: