ANÁLISIS DE SEÑALES Y SISTEMAS DIGITALES

Guía de Problemas N° 2
"Transformada Z"

1. **(*)**Rehacer los problemas 2b y 9 de la Guía Nº1 SD esta vez usando TZ comparar resultados.

2. Obtener la función transferencia del siguiente sistema.

$$y(nT) = y_1(nT) + \frac{7}{4} y(nT - T) - \frac{49}{32} y(nT - 2T)$$

$$y_1(nT) = x(nT) + \frac{1}{2} y_1(nT - T)$$

3. Verificar la estabilidad de los siguientes filtros recursivos. (Ver: Jury-Marden Stability Criterion)

a)**(*)**

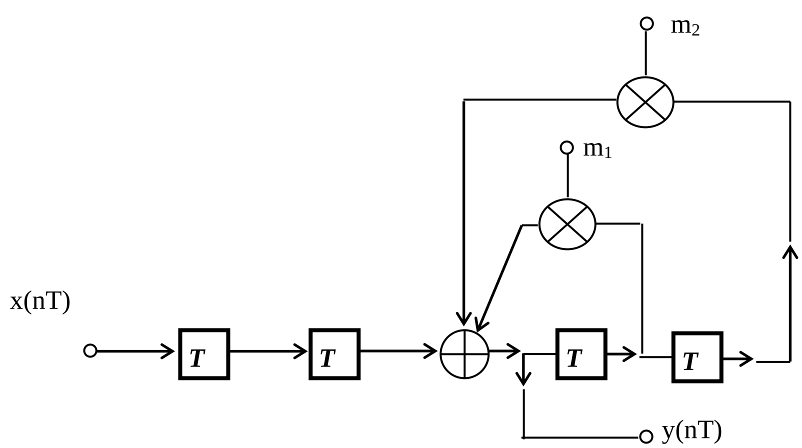
$$H(z) := \frac{z^6}{6 \cdot z^6 + 5 \cdot z^5 + 4 \cdot z^4 + 3 \cdot z^3 + 2 \cdot z^2 + z + 1}$$

b)

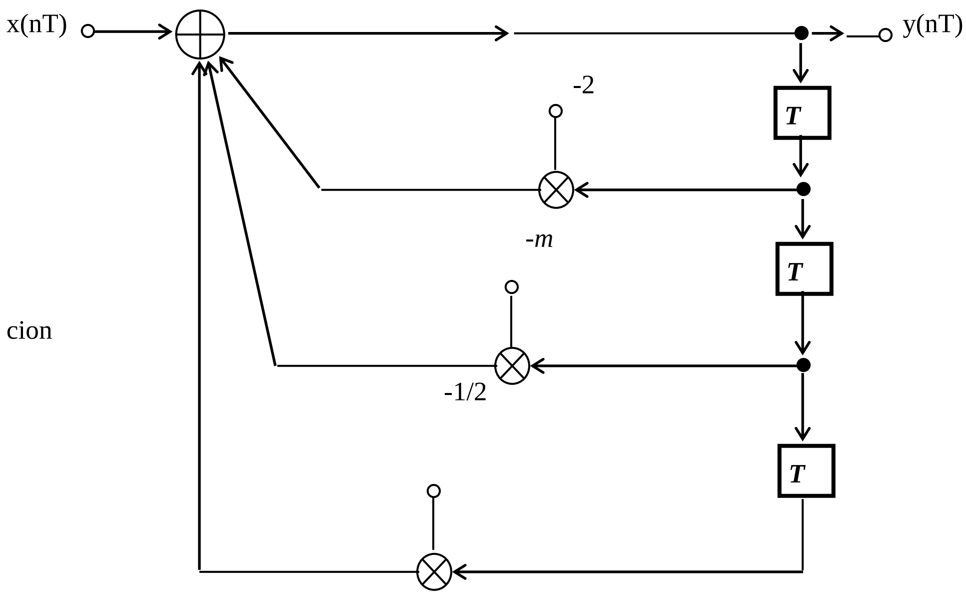
$$H(z) := \frac{z^6}{6 \cdot z^6 + 5 \cdot z^5 - 4 \cdot z^4 + 3 \cdot z^3 + 2 \cdot z^2 + z + 1}$$

4. Obtener (a) la función transferencia, (b) la respuesta al impulso, y (c) la condición necesaria para la estabilidad del siguiente filtro.

$$m_1 = 2\, r \cos(\theta) \quad y \quad m_2 = -\, r^2$$



5. Encontrar el rango permitido de m para que el filtro sea estable



6. **(*)**Dada una H(Z) se pide:

a) Demostrar que

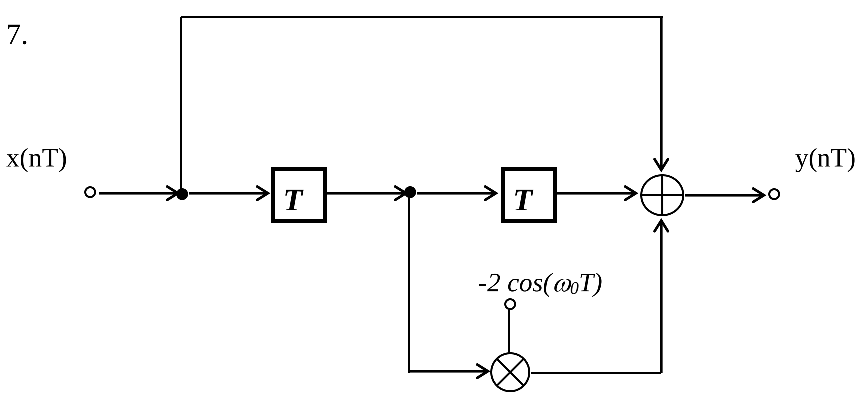
$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = H(z)\,H(z^{-1})\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

b) Usando esta relación demostrar que la siguiente H(z) representa un filtro pasa todo.
Es decir un filtro con ganancia constante en todas las frecuencias.

$$H(z) = \frac{1 - az + bz^2}{b - az + z^2}$$

c) Demostrar que los polos y ceros ocurren en pares recíprocos y conjugados.

7.



Para este filtro no recursivo

(a) Obtener expresiones para la ganancia y la fase.
(b) Determinar los ceros de transmisión del filtro, esto es, la frecuencia donde la ganancia es cero.
(c) Graficar la respuesta de amplitud y de fase.

8. El retardo de grupo en los filtros digitales, como en los analógicos se define como:

$$\tau = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$$

Mostrar que la ecuación

$$y(nT) = x(nT) + 2x(nT-T) + 3x(nT-2T) + 4x(nT-3T) + 3x(nT-4T) + 2x(nT-5T) + x(nT-6T)$$

representa un filtro de retardo de grupo constante.

9. Mostrar que la ganancia y la fase de los filtros digitales satisfacen las siguientes relaciones

$$M(\omega_s - \omega) = M(\omega) \quad y \quad \theta(\omega_s - \omega) = -\theta(\omega)$$

10. Probar los teoremas del valor inicial y valor final.

11. Probar la siguiente identidad

$$X(z^{-1}) = \mathrm{Z}[x(-n)]$$

12. Un filtro digital implementado en un chip de DSP responde a la ecuación diferencia

$$y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + x(n)$$

Para evaluar la performance del filtro, se mide la respuesta al impulso h(n).
El problema que surge es que los registros internos del chip no han sido reseteados antes de inyectar la entrada. Por lo tanto, el filtro sufre el efecto de las condiciones iníciales, que son:
y(-1)= -1 y(-2)= 2
Determinar en forma analítica la respuesta del filtro para n≥0 y compararla para el caso de condiciones iníciales nulas.

13. Repetir el ejercicio anterior esta vez numéricamente usando la función filter de matlab. comparar resultados.

14. La operación de up-sampling consiste en agregar muestras nulas equi-espaciadas entre los valores de una secuencia. A modo de ejemplo, realizar up-sampling de la secuencia x(n) en un factor L equivale a obtener una respuesta y(n) de la forma:

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\dfrac{n}{L}\right) & n = 0, \pm L, \pm 2L \ldots \\ 0 & resto \end{cases}$$

Si X(z) converge para α <|z|< β, hallar la expresión de Y(z) en función de X(z) e indicar donde converge.

15. Dado un filtro digital que responde a la ecuación diferencia:

$$y(n) = x(n) + x(n-1) - 0.9\, y(n-1) + 0.81\, y(n-2)$$

a. Hallar el módulo y la fase de su respuesta en frecuencia.
b. Para la entrada $x(n)= \text{sen}(\pi\, n/3)+ 5 \cos (\pi\, n)$, donde $0 \leq n \leq 200$, hallar y(n) y comparar su régimen permanente con la señal de entrada.