

Instituto Tecnológico de Buenos Aires

22.67 SEÑALES ALEATORIAS

Trabajo práctico N°2

Integrantes

LAMBERTUCCI, Guido Enrique	58009
LONDERO BONAPARTE, Tomás Guillermo	58150
MORICONI, Franco	58495
MUSICH, Francisco	58124
TOLABA, Francisco Martin	58424

Profesor

HIRCHOREN, Gustavo Abraham

Presentado: 10/06/20

Índice

1. Ejercicio 2

1.1. Introducción

Se analiza una secuencia $X(n)$, estimando y calculando parámetros de interés, como lo son la autocorrelación, los coeficientes de correlación parcial y la densidad espectral de potencia.

1.2. Autocorrelación

Se estiman la autocorrelación mediante el uso de los primeros 128 elementos de la secuencia brindada. Para ello, se vale los estimadores polarizados (R_p) y no polarizados (R_{np}) de dicho parámetro. Estas funciones son las empleadas para estimar otras funciones mediante información digitalizada.

$$\begin{aligned} R_p(k) &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-k-1} X(i)X(i+k) \\ R_{np}(k) &= \frac{1}{N-k} \sum_{i=0}^{N-k-1} X(i)X(i+k) \end{aligned} \quad (1)$$

En ellas se observan los parámetros N , es decir, el largo de $X(n)$, y k , variable que puede tomar los valores $0, 1, \dots, 127$. Mediante el uso de estos estimadores, se normaliza para poder obtener los coeficientes de autocorrelación r_{XXp} y r_{XXnp} .

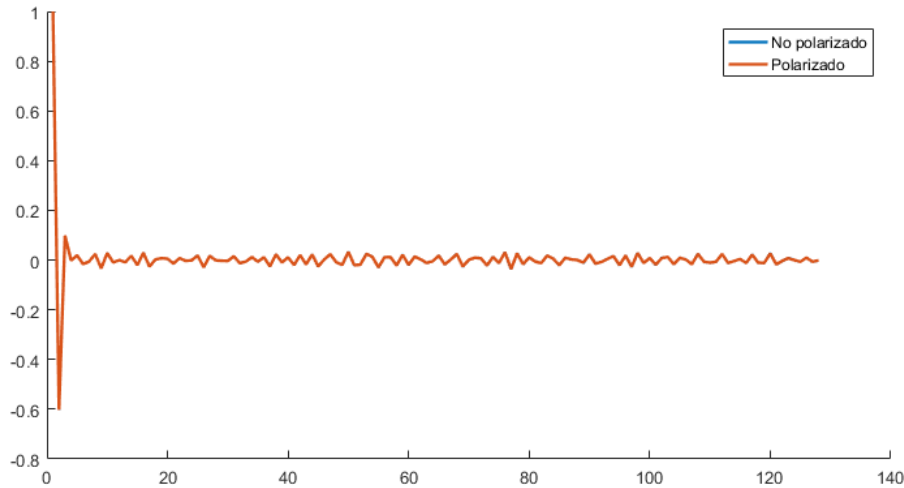


Figura 1: Grafica de los coeficientes de autocorrelación total estimados.

Se puede observar en la Figura (1) como ambas curvas se encuentran solapadas, haciendo que sea prácticamente imposible distinguirlas. Esto se debe a que existe una relación entre cada estimador, siendo esta

$$R_p(k) = \frac{N-k}{N} R_{np}(k)$$

Ya que, para el caso del vector analizado, se da la condición de que $N = 4096$ y además $N \gg k_{max} = 127$, siendo entonces

$$R_p(k) \approx R_{np}(k)$$

1.3. Coeficientes de correlación parcial

Con los datos ya extraídos y mediante la resolución de la ecuación de Yule-Walker, fue posible obtener los coeficientes deseados. Esto se realizó con los coeficientes totales obtenidos a través de las estimaciones polarizada y no polarizada.

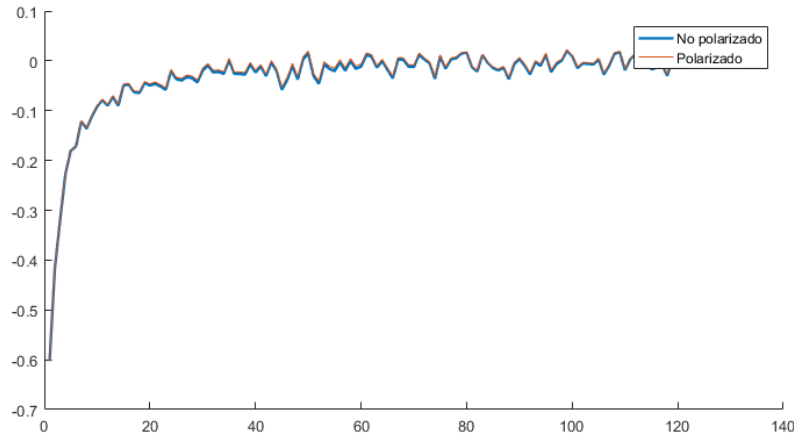


Figura 2: Grafica de los coeficientes de autocorrelación parcial obtenidos.

En la Figura (2) se obtuvo nuevamente una diferencia entre ambas curvas, la cual no es significativa.

1.4. Modelo del proceso

Se procede a determinar que tipo de modelo utilizar para el proceso analizado. Observando la Figura (1), se denota que $r_{XX}(1)$ y $r_{XX}(2)$ son valores distintos de 0 ($-0,603$ y $0,099$ para ambas aproximaciones), mientras que los valores siguientes, si bien no son exactamente 0, son todos menores en modulo a $0,03$, lo que permite aproximarlos a 0. Además, observando la Figura (2), se puede afirmar que los ϕ_{kk} presentan un comportamiento exponencial. Es por ello que se determina que el proceso es un **MA(2)** (**ARMA(0,2)**).

Para el calculo de los θ , se utilizaron las ecuaciones

$$r_{XX}(1) = \frac{R_{XX}(1)}{\sigma_X^2} = \frac{\theta_{2,1} + \theta_{2,1}\theta_{2,2}}{1 + \theta_{2,1}^2 + \theta_{2,2}^2} \quad (2)$$

$$r_{XX}(2) = \frac{\theta_{2,2}}{1 + \theta_{2,1}^2 + \theta_{2,2}^2} \quad (3)$$

Resolviendo dicho sistema, se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \theta_{2,1} &= -1,280 \\ \theta_{2,2} &= 0,268 \end{aligned} \quad (4)$$

Con lo ya dicho, se procede a estimar los parámetros del proceso y compararlos con los ya obtenidos.

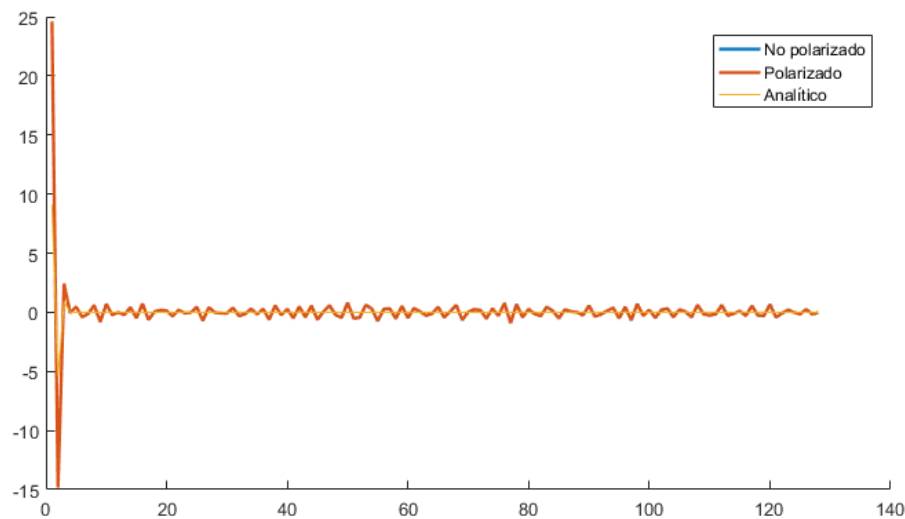


Figura 3: Comparación de los coeficientes de autocorrelación.

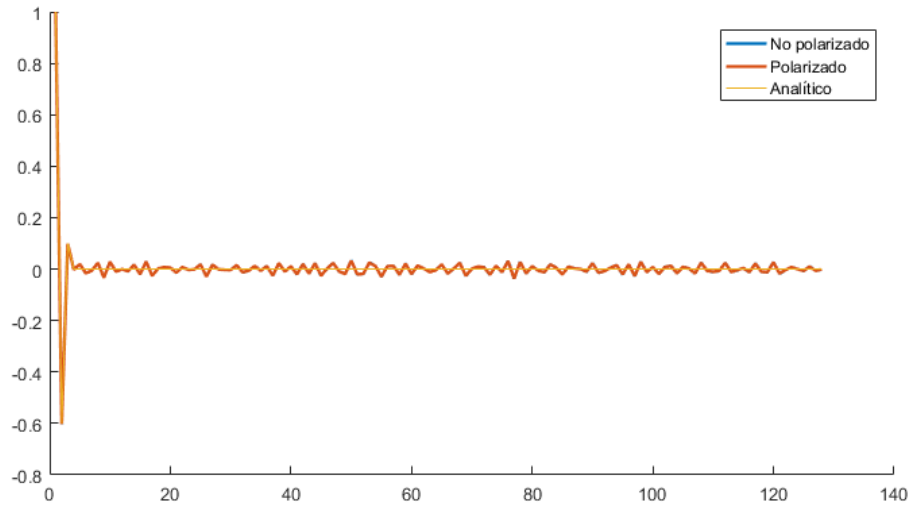


Figura 4: Comparación de los coeficientes de autocorrelación normalizados.

1.5. Densidad espectral de potencia

A continuación, se estima la densidad espectral de potencia del vector $X(n)$. Para ello, se emplean dos técnicas distintas. La primera consiste en el uso de la transformada de Fourier de la estimación realizada de las funciones de autocorrelación.

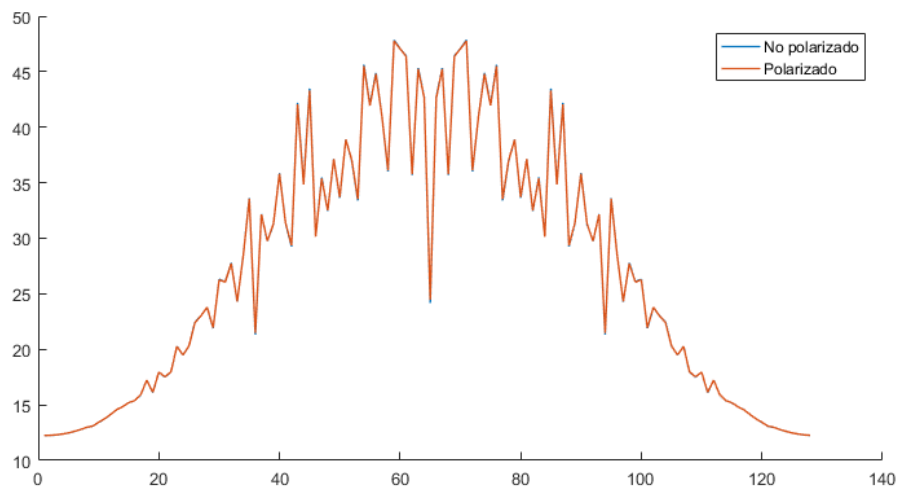


Figura 5: Periodogramas obtenidos a partir de las estimaciones de R_{XX} .

Como era de esperarse, la diferencia entre el gráfico obtenido a través de la estimación polarizada no difiere tanto de la no polarizada.

La segunda técnica consta de la promediación de periodogramas. Para esto se partió el vector original en 16 grupos de 256 elementos, en cada grupo se calculó los primeros 128 valores de la autocorrelación con el estimador no polarizado, luego a cada vector se le calcula la densidad espectral de potencia y finalmente se las promedia.¹

¹Se utilizó la formula 9.24 del libro

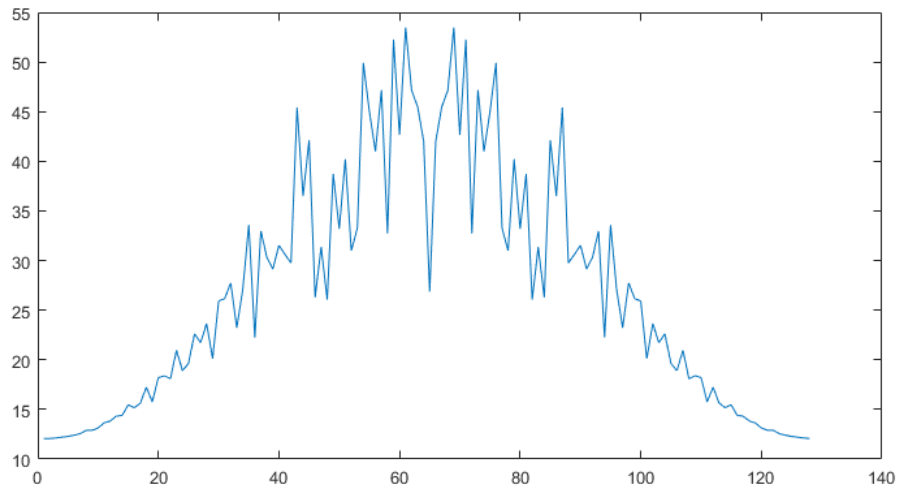


Figura 6: Estimación de la densidad espectral de potencia mediante el uso de promediación de periodogramas.

Finalmente, a modo comparativo, se ilustran las estimaciones obtenidas superpuestas:

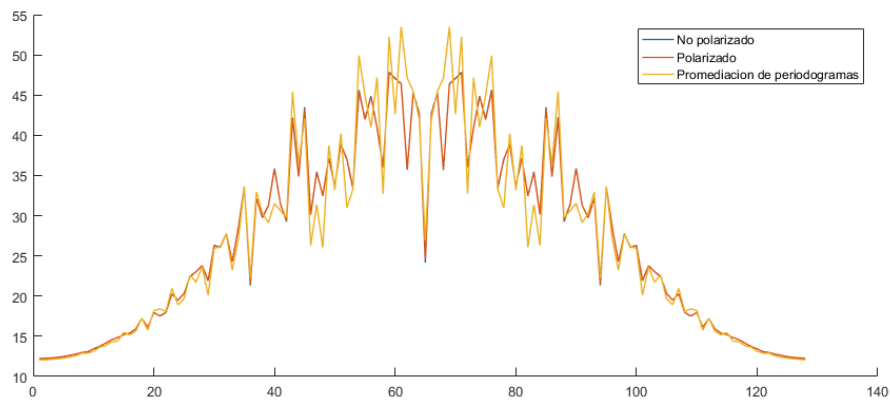


Figura 7: Estimaciones de potencia.

Se puede apreciar que son muy similares tanto la promediación de periodogramas con la transformada de la estimación de la función de autocorrelación.

1.6. Código implementado

■ Main.m:

```

1 function [rxnp, rxnp, phiknp, phiknp] = Main(x,kmax)
2 %Hay que cargar el archivo1 y llamar a la funcion > Main(x, 128);
3 %PUNTO 1
4
5 %Creamos Rxxs (estimaciones)
6 Rxnp = Rnp(x,kmax);
7 Rxnp = Rp(x,kmax);
8
9 %Creamos rxxs (estimaciones)
10 rxnp = Rxnp./Rxnp(1);
11 rxnp = Rxnp./Rxnp(1);
12
13 aux_rxx = 1:1:kmax;
14 aux_phi = 1:1:(kmax-1);
15
16 %Ploteamos rxxs (estimaciones)

```

```

17     hold on
18     p1 = plot(aux_rxx, rxnp, aux_rxx, rxp);
19     p1(1).LineWidth = 1.75;
20     p1(2).LineWidth = 1.75;
21     legend('No polarizado', 'Polarizado');
22     title('r_{xx}');
23     figure();
24     %figure(' $r_{xx}$ normalizado y no normalizado ');
25
26     %PUNTO 2
27
28     %Creamos phikk
29     phiknp = cpar(rxnp, kmax);
30     phikp = cpar(rxp, kmax);
31
32     %Ploteamos phikk
33     hold on
34     p2 = plot(aux_phi, phiknp, aux_phi, phikp);
35     legend('No polarizado', 'Polarizado');
36     p2(1).LineWidth = 1.75;
37     p1(2).LineWidth = 1.75;
38     title('\phi_{kk}');
39     figure();
40
41
42     %PUNTO 3 y 4
43     %Debemos modelar X(n) a través de un Moving Average de orden 2.
44     syms th21x th22x %resuelvo el sistema de ecuaciones
45     S= solve((round(rxnp(2)*100)/100) * (th21x^2+th22x^2+1) == th21x*th22x+th21x,
46             (round(rxnp(3)*100)/100) * (th21x^2+th22x^2+1) == th22x);
47     theta21v=vpa(S.th21x);
48     theta22v= vpa(S.th22x);
49     theta21= theta21v(1); %valor de theta 21
50     theta22=theta22v(1); %valor de theta 22
51     rxxCalc= zeros(1, 128);
52     rxxCalc(1)=(theta21*theta21+theta22*theta22+1)/(1+theta21^2+theta22^2);
53     rxxCalc(2)= (theta21+theta21*theta22)/(1+theta21^2+theta22^2);
54     rxxCalc(3)= theta22/(1+theta21^2+theta22^2);
55     Varn = double((round(Rxnp(3)*1000)/1000)./theta22);
56
57     RxxCalc= rxxCalc*Varn ;
58
59     %Graficorxx estimaciones y analitico
60     hold on
61     p7 = plot(aux_rxx, rxnp, aux_rxx, rxp,aux_rxx,rxxCalc);
62     p7(1).LineWidth = 1.75;
63     p7(2).LineWidth = 1.75;
64     legend('No polarizado', 'Polarizado', 'Analítico');
65     title('r_{xx}');
66     figure();
67     %GraficoRxx estimaciones y analitico
68     hold on
69     p7 = plot(aux_rxx, Rxnp, aux_rxx, Rxp,aux_rxx,RxxCalc);
70     p7(1).LineWidth = 1.75;
71     p7(2).LineWidth = 1.75;
72     legend('No polarizado', 'Polarizado', 'Analítico');
73     title('R_{xx}');
74     figure();
75     %periodograma

```

```

75 aux = zeros(16,128);
76
77 for k = 1:16
78     for j = 0:127
79         prev = 0;
80         for i = 0:256-j-1
81             prev = prev + x(256*(k-1)+i+1+j) * x(256*(k-1)+i+1) ; %%Lo parto en
                bloques
82         end
83         aux(k,j+1) = (1/(256-j)) * prev;
84     end
85 end
86 Sxx = zeros(128,16);
87 for j = 1:16
88     Sxx(:,j) = fft(aux(j,:)); %%Se calcula la fft de la particion
89 end
90 Sxx = Sxx';
91 uSxx = zeros(1,128); %%Vector de la potencia media de los periodogramas
92 for j = 1:16
93     uSxx = uSxx + Sxx(j,:); %%Promedio
94 end
95 uSxx = uSxx/16;
96
97 %%FFT de Rxxs (estimados)
98 FftRxxnp=abs(fft([Rxxnp]));
99 FftRxxp=abs(fft([Rxxp]));
100 hold on
101 p4 = plot([1:length(FftRxxnp)], FftRxxnp); %%No polarizado
102 p4(1).LineWidth = 1;
103 p5 = plot([1:length(FftRxxp)], FftRxxp); %%polarizado
104 p5(1).LineWidth = 1;
105 p3 = plot([1:128],abs(uSxx)); %%Periodograma
106 p3(1).LineWidth = 1;
107 title('Densidad espectral de Potencia');
108 legend('No polarizado', 'Polarizado', 'Promediacion de periodogramas');
109
110 end

```

■ Cpar.m:

```

1 function [phikk] = cpar(rxx,kmax)
2     phikk = rxx(2);
3     for i = 2:kmax-1
4         R = toeplitz([rxx(1:i)]);
5         phi = linsolve(R,rxx(2:i+1).'); %%Resuelvo el sistema de ecuaciones para
                obtener los phikk
6         phikk = [phikk, phi(end)];
7     end
8 end

```

■ Rnp.m:

```

1 function [Rxx] = Rnp(x,kmax)
2     N=max(size(x));
3     Rxx=0;
4     for i = 0:kmax-1
5         Rxx=[Rxx,(sum(x(1:N-i) .* x(i+1:N))*(1/(N-i)))]; %%aplico el algoritmo
6     end
7     Rxx=Rxx(2:end);
8 end

```


■ Rp.m:

```
1 function [Rxx] = Rp(x,kmax)
2     N=max(size(x));
3     Rxx=0;
4     for i = 0:kmax-1
5         Rxx=[Rxx,(sum(x(1:N-i) .* x(i+1:N))*(1/(N)))];
6     end
7     Rxx=Rxx(2:end);
8 end
```