0.1. Introducción

El siguiente ejercicio parte de un análisis sobre el proceso aleatorio presente en la página 138 del libro selecto por la cátedra. Se realizarán simulaciones de dicho proceso y se calcularán experimentalmente la media, la varianza, la autocorrelación y el coeficiente de autocorrelación para ciertos valores de t dados y se realizará una comparación con los valores teóricos.

0.2. Valores teóricos

El experimento que determina el proceso es la tirada de un dado no cargado y el ensamble del mismo se detalla a continuación:

$$\begin{aligned} y_{1(t)} &= 6 \\ y_{2(t)} &= 3sin(t) \\ y_{3(t)} &= -3sin(t) \\ y_{4(t)} &= 3cos(t) \\ y_{5(t)} &= -3cos(t) \\ y_{6(t)} &= -6 \end{aligned} \tag{1}$$

El proceso es $Y_{(t)} = y_{i(t)}$ donde i indica el número obtenido en la tirada del dado.

El valor esperado teórico del proceso se obtiene de la siguiente forma:

$$E\left[Y_{(t)}\right] = \sum_{i=1}^{6}\left(P(Y_{(t)} = y_{i(t)}) \times y_{i(t)}\right)$$

Reemplazando las funciones muestra dadas y que la probabilidad $P(Y_{(t)} = y_{i(t)}) = \frac{1}{6}\ \forall i$ obtenemos que:

$$E\left[Y_{(t)}\right] = 0\ \forall t$$

La varianza se obtiene como:

$$Var^2_{(t)} = E\left[Y^2_{(t)}\right] - \left(E\left[Y_{(t)}\right]\right)^2 = \sum_{i=1}^{6}\left(P(Y_{(t)} = y_{i(t)}) \times y^2_{i(t)}\right) - 0^2 = 15\ \forall t$$

Donde ya se obtuvo que $E\left[Y_{(t)}\right] = 0$ y

$$E\left[Y^2_{(t)}\right] = \sum_{i=1}^{6}\left(P(Y_{(t)} = y_{i(t)}) \times y^2_{i(t)}\right)$$

Este proceso tiene media y "varianza" constantes para todo instante t.
La autocorrelación para dos instantes t1 y t2 se encuetra calculada en el libro y nos queda como:

$$R_{xx(t_1,t_2)} = \frac{1}{6}\left(72 + 18\cos(t_2 - t_1)\right)$$

El proceso tiene media constante y autocorrelación dependiente de $(t_2 - t_1)$, entonces es WSS. Por lo tanto:

$$R_{xx(t,t)} = R_{xx(0,0)} = \frac{1}{6}\left(72 + 18\cos(0)\right) = 15$$

El coeficiente de autocorrelación se obtiene con la definición del mismo:

$$r_{xx(t_1,t_2)} = \frac{R_{xx(t_1,t_2)} - \mu^*_{X_{(t_1)}}\mu_{X_{(t_2)}}}{\left(R_{xx(t_1,t_1)}.R_{xx(t_2,t_2)}\right)^{1/2}}$$

Como el proceso es WSS y su media es cero cualquiera sea t:

$$r_{xx(t_1,t_2)} = \frac{R_{xx(t_1,t_2)} - 0}{(R^2_{xx(0,0)})^{1/2}} = \frac{\frac{1}{6}\left(72 + 18\cos(t_2 - t_1)\right)}{15}$$

Para los instantes de t requeridos, obtenemos los siguientes resultados:

- $\mathrm{E}\left[Y_{(\frac{\pi}{2})}\right] = 0$
- $\mathrm{Var}\left[Y_{(\frac{\pi}{2})}\right] = 15$
- $R_{xx(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{6}(72 + 18\cos(\frac{\pi}{4})) = 14.12132$
- $r_{xx(2\pi,\pi)} = \frac{R_{xx(\pi,2\pi)}}{15} = \frac{(12+3\cos(\pi))}{15} = 0.6$

Observando el ensamble dado se puede comprobar fácilmente que el proceso no es ergódico en la media puesto que con la función muestra $y_{1(t)} = 6$:

$$\lim_{T\to\infty} < Y_{(t)} >_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} Y(t)dt \neq \mu$$

De la misma forma, se puede concluir que no es ergódico en la autocorrelación con la misma función muestra:

$$\lim_{T\to\infty} < R_{YY}(\tau) >_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} Y(t)Y(t+\tau)dt \neq RYY(\tau)\ \forall\tau$$

Dado que para una de las funciones no se cumple que tienda a la autocorrelación, no es ergódico en en dicha variable.

0.3. Análisis Experimental

Para el análisis sobre los valores pedidos es necesario generar múltiples muestras sobre el proceso, en los instantes de tiempo requeridos. En primer lugar, se obtiene un número entero al azar entre 1 y 6, simulando la tirada de un dado, el cual determina qué función miembro del ensamble resulta. A partir de la determinacion de la función correspondiente se evalua en los valores de instantes t pedidos, obteniendose:

- $Y(\pi/2)$
- $Y(\pi/4)$
- $Y(\pi)$
- $Y(2\pi)$

Estos valores obtenidos se guardan como un vector. Luego, se repite el procedimiento N = 1000 veces y se obtiene un arreglo de vectores conteniendo muestras del proceso. El codigo de Matlab empleado para la simulaci[on de este proceso se detalla a continuaci[on

```
function [exp_mean_t1,var_t1,autocorr_t1_t2,coef_autocorr_t3_t4] = simulacion(cantidad_muestras)
%SIMULACION EJERCICIO 1
%   Cada Muestra tiene la forma [ x(pi/2)
%                                 x(pi/4)
%                                 x(pi)
%                                 x(2*pi)]
%Devuelve el valor esperado en pi/2
% Genero un vector que contiene a las funciones miembro del proceso
ensamble = fun_array();

% Genero muestras de valores posibles del proceso a ciertos tiempos
for i=1:cantidad_muestras
    indice_funcion =  randi(6); %Tiro el dado que determina funcion del ensamble
    %Muestreo funcion correspondiente
    muestra_funcion =[ensamble{indice_funcion}(pi/2)  %t1 = pi/2
                      ensamble{indice_funcion}(pi/4)  %t2 = pi/4
                      ensamble{indice_funcion}(pi)    %t3 = pi
                      ensamble{indice_funcion}(2*pi)  %t4 = 2pi
                      ];
   muestras_totales(:,i) = muestra_funcion; %#ok<AGROW>
end
```

Figura 1: Código Matlab de la simulación del proceso.

Donde la funcion fun-array() designa el ensamble solicitado, el c[odigo en Matlab:

```
function [ funciones ] = fun_array()
%FUN_ARRAY Funcion que devuelve n muestras de un proceso aleatorio

funciones = {};

f1 = @(t)[6];
funciones{1} = f1;
  f2 = @(t)[3*sin(t)];
funciones{2} = f2;
f3 = @(t)[-3*sin(t)];
funciones{3} = f3;
f4 = @(t)  [3*cos(t)];
funciones{4} = f4;
f5 = @(t)[-3*cos(t)];
funciones{5} = f5;
f6 = @(t)[-6];
funciones{6} = f6;

end
```

Figura 2: La función que contiene el ensamble del proceso.

A continuación, por ejemplo se muestran los resultados para $Y(\pi/2)$ para N $= 100$ experimentos realizados.

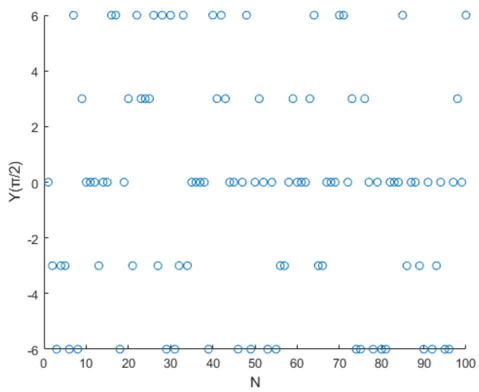

Figura 3: Valores del proceso $Y_(t)$ en $t = \frac{\pi}{2}$.

También para $Y(\pi/4)$.

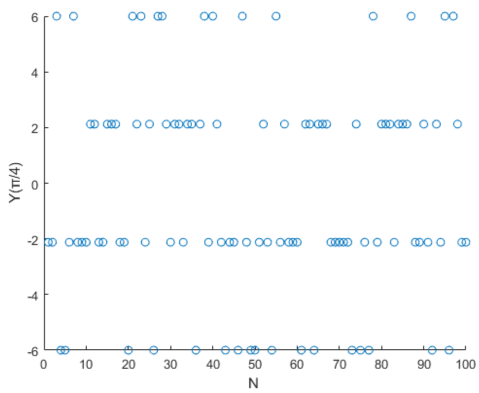

Figura 4: Valores del proceso $Y_(t)$ en $t = \frac{\pi}{4}$.

Luego, se calculan promediando los valores pedidos con el código:

```
%Ploteo valores de funcion evaluada en t = pi/2 para multiples experimentos
figure (1);
ejex = linspace(1,cantidad_muestras,cantidad_muestras);
scatter(ejex, muestras_totales(1,:));

%Ploteo valores de funcion evaluada en t = pi/4 para multiples experimentos
figure(2);
ejex = linspace(1,cantidad_muestras,cantidad_muestras);
scatter(ejex, muestras_totales(2,:));

%Estimamos la media en t1= pi/2
exp_mean_t1 = expected_value(cantidad_muestras,muestras_totales(1,:));

%Estimamos la varianza en t2= pi/2
var_t1 = var_exp(cantidad_muestras,muestras_totales(1,:));

%Estimamos la autocorrelacion en t1= pi/2 y t2= pi/4
autocorr_t1_t2 = autocorr_exp(cantidad_muestras,muestras_totales(1,:),muestras_totales(2,:));

%Estimamos el coeficiente de autocorrelacion en t3= pi y t4= 2pi
coef_autocorr_t3_t4 = autocorr_coef_exp(cantidad_muestras,muestras_totales(3,:),muestras_totales(4,:));

end
```

Figura 5: Código de Matlab de la simulación del proceso.

Detallando cada función:

- La funcio[n estimadora de la media en $t = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{E}\left[Y_{(\frac{\pi}{2})}\right]$

```
function [ exp_mean ] = expected_value( cant_muestras, muestras)
%EXPECTED_VALUE Valor esperado experimental de arreglo de muestras
%cant_muestras = la cantidad total de valores experimentales
% muestras = es el vector de las funciones muestras
% evaluadas en un instante t

exp_mean = 0;%inicializo en 0

for i=1:cant_muestras
    %promediamos el valor esperado
    exp_mean = exp_mean + (1/cant_muestras)*(muestras(i));
end

end
```

Figura 6: La función que calcula la media experimental del proceso.

- La función estimadora de la varianza en $t = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Var}\left[Y_{(\frac{\pi}{2})}\right]$

```
function [ exp_var ] = var_exp(cant_muestras, muestras)
%VAR_EXP Varianza experimental de arreglo de muestras
%cant_muestras = la cantidad total de valores experimentales
% muestras = es el vector de las funciones muestras
% evaluadas en un instante t
%Para calcular la varianza experimental precisamos de la media
%experimental

exp_var = 0;   %inicializo en 0
%Calculo la media experimental
exp_mean = expected_value(cant_muestras, muestras);

%Estimamos la varianza experimental
for i=1:cant_muestras
    exp_var = exp_var + (1/cant_muestras)*(muestras(i)- exp_mean)^2;
end

end
```

Figura 7: La función que calcula la varianza experimental.

- La función estimadora de la autocorrelación en $t_1 = \frac{\pi}{4}$ y $t_2 = \frac{\pi}{2}$, $R_{xx(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})}$

```
function [autocorr] = autocorr_exp(cant_muestras, muestras_t1, muestras_t2)
%AUTOCORR_EXP autocorrelacion experimental entre dos instantes de tiempo
%t1 y t2
%cant_muestras = la cantidad total de valores experimentales
% muestras_t1, muestras_t2 = son los vectores de las funciones muestras
% evaluados en los instantes t1 y t2 respectivamente
%Para calcular la autocorrelacion se estima el valor esperado del
% producto entre los valores que adquieren las funciones muestra en los
% instantes t1 y t2 promediando

autocorr = 0;   %inicializo en 0

for i=1:cant_muestras
    autocorr =autocorr+(1/cant_muestras)*(muestras_t1(i))*(muestras_t2(i));
end

end
```

Figura 8: La función estimadora de la autocorrelación.

- La función estimadora del coeficiente de autocorrelación en $t_3 = \frac{2\pi}{4}$ y $t_4 = \pi$, $r_{xx(2\pi,\pi)}$

```
function [ coef_auto ] = autocorr_coef_exp(cant_muestras, muestras_t1, muestras_t2)
%COEF_AUTO autocorrelacion experimental entre dos instantes de tiempo
%t1 y t2
%cant_muestras  = la cantidad total de valores experimentales
%muestras_t1, muestras_t2 = son los vectores de las funciones muestras
%evaluados en los instantes t1 y t2 respectivamente
%Para calcular el coeficiente de autocorrelacion debemos calcular la
%la autocorrelacion en (t1,t2), los valores esperados en t1 y t2
%y por ultimo, la autocorrelacion en (t1,t1) y la autocorrelacion en
%(t2,t2)

autocorr = autocorr_exp(cant_muestras, muestras_t1, muestras_t2);
exp_mean_t1 = expected_value(cant_muestras,muestras_t1);
exp_mean_t2 = expected_value(cant_muestras, muestras_t2);

autocorr_t1 = autocorr_exp(cant_muestras, muestras_t1, muestras_t1);
autocorr_t2 = autocorr_exp(cant_muestras, muestras_t2, muestras_t2);

%Calculo del coeficiente de autocorrelacion
coef_auto=(autocorr-(exp_mean_t1*exp_mean_t2))/sqrt(autocorr_t1*autocorr_t2);

end
```

Figura 9: La función estimadora del coeficiente de autocorrelación.

Corriendo la simulación para N = 1000, se arrojaron los siguientes resultados:

```
>> [exp_mean_t1,var_t1,autocorr_t1_t2,coef_autocorr_t3_t4] = simulacion(1000)

exp_mean_t1 =

    0.0120


var_t1 =

   14.6159


autocorr_t1_t2 =

   13.7303


coef_autocorr_t3_t4 =

    0.5801
```

Figura 10: Resultados de la simulación con N = 1000 muestras

Observando la figura (10) obtenemos que:

- $\mathrm{E}\left[Y_{(\frac{\pi}{2})}\right] = 0.0120$
- $\mathrm{Var}\left[Y_{(\frac{\pi}{2})}\right] = 14.6159$
- $R_{xx(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})} = 13.7303$
- $r_{xx(2\pi,\pi)} = 0.5801$

Adicionalemente, analizamos para la media en $t_1 = \frac{\pi}{2}$ que $\mathrm{E}\left[Y_{(\frac{\pi}{2})}\right] \to 0$ a medida que se realizan simulaciones con N$\to \infty$

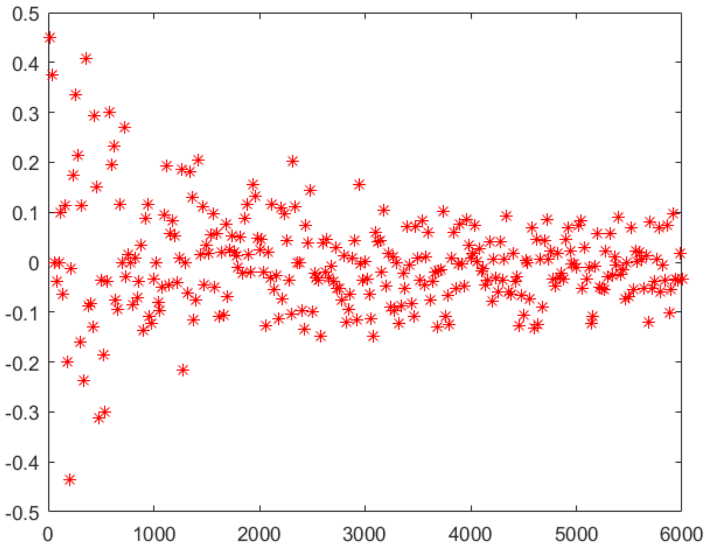

Figura 11: El valor esperado del proceso en $t_1 = \frac{\pi}{2}$ cuando la cantidad de muetras aumenta.

0.4. Conclusiones sobre los resultados

En primer lugar, en las figuras (3) y (4) se puede "estimar" visualmente que la media para el proceso es cero como primer aproximación a los valores teóricos.

Luego, se puede concluir que para los valores experimentales, la media en $t_1 = \frac{\pi}{2}$ es cercana a cero y a medida que aumentamos la cantidad de valores muestreados la diferencia entre el valor experimental y el valor teórico es cada vez más pequeña. De igual manera, para la varianza en $t_1 = \frac{\pi}{2}$, no se observan diferencias significativas. También, la autocorrelación en $t_1 = \frac{\pi}{2}$ y $t_2 = \frac{\pi}{4}$ y la autocorrelación en $t_3 = \pi$ y $t_4 = 2\pi$ denotan el mismo comportamiento hacia el valor teórico.

A medida que se toman mayor cantidad de muestras ($N \to \infty$) los valores que se estimaron convergieron a los valores teoricos, lo cual era de esperarse puesto que el proceso tiene un ensamble simétrico y equiprobable.

Los valores estimados con los muestreos del proceso no pueden estimarse mediante promedios temporales eligiendo alguna de las funciones muestras experimentales porque el proceso no es ergódico en la media ni tampoco en la autocorrelación. Esto puede observarse facilmente cuando el experimento aleatorio que determina el proceso cae en los valores de $y_{1(t)} = 6$ o $y_{6(t)} = -6$