

Instituto Tecnológico de Buenos Aires

22.67 SEÑALES ALEATORIAS

Trabajo práctico N°1

Integrantes

| | |
|------------------------------------|-------|
| LAMBERTUCCI, Guido Enrique | 58009 |
| LONDERO BONAPARTE, Tomás Guillermo | 58150 |
| MORICONI, Franco | 58495 |
| MUSICH, Francisco | 58124 |
| TOLABA, Francisco Martin | 58424 |

Profesor

HIRCHOREN, Gustavo Abraham

Presentado: 08/04/20

1. Ejercicio 1

Utilizando el método de simulación de Montecarlo, se obtiene que, siendo X un variable aleatoria uniforme entre 0 y 1, se puede obtener una distribución exponencial Y dada por la función densidad de probabilidad

$$y(x) = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

Valiéndose de las funciones “hist”, “mean” y “std” de **Matlab**, se asignó arbitrariamente un valor a lambda, en este caso $\lambda = 2$. Además se tomaron 5000 muestras, de forma que se obtuvieron los siguientes resultados:

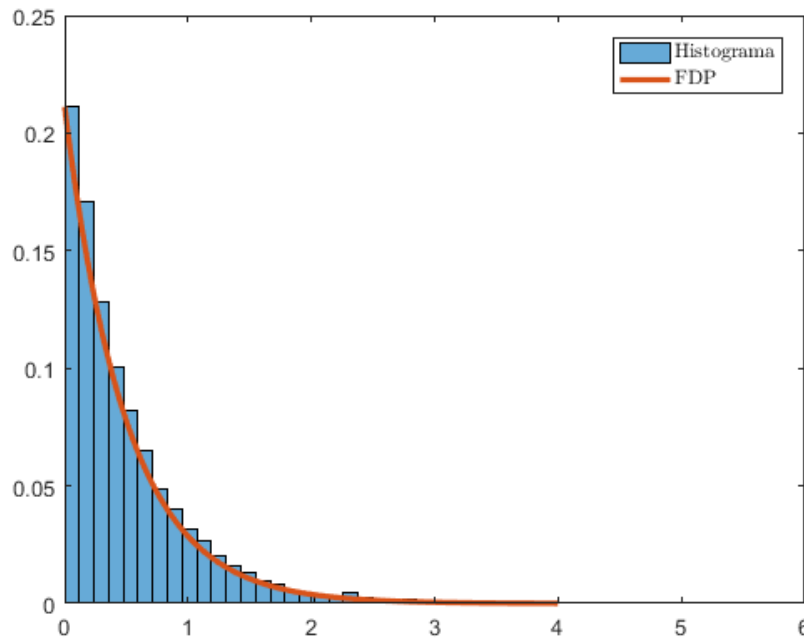


Figura 1: Iteración del método de Montecarlo.

$$\begin{aligned} \mu_Y &= 0.5048 \\ \sigma_Y^2 &= 0.2617 \end{aligned} \quad (2)$$

Es así que se observa en la Figura (1) la curva de la f.d.p. teórica sobre el histograma obtenido, confirmando así que se obtuvo realmente una variable aleatoria con la distribución deseada. Además, se desea constatar que los valores de μ_Y y σ_Y^2 , son correctos. Por ser Y una V.A. exponencial, se sabe que $\mu_Y = \frac{1}{\lambda}$ y $\sigma_Y^2 = \frac{1}{\lambda^2}$, que para el caso presentado son 0.5 y 0.25 respectivamente. Si bien los resultados obtenidos no son exactamente iguales, son próximos, siendo el error existente aceptable.

Bajo las condiciones mencionadas previamente, se realizaron 10 iteraciones más. De esta forma, se obtuvieron los siguientes valores de media y varianza:

| Iteración | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| μ | 0,4966 | 0,5015 | 0,5091 | 0,5011 | 0,5095 | 0,4986 | 0,5054 | 0,4856 | 0,4948 | 0,4958 |
| σ^2 | 0,2523 | 0,2548 | 0,2511 | 0,2593 | 0,2600 | 0,2565 | 0,2567 | 0,2373 | 0,2352 | 0,2431 |

Tabla 1: Iteraciones con valores de media y varianza para la V.A. generada.

Observando la tabla previa, se repite lo mencionado anteriormente, es decir, que si bien no se obtienen los valores teóricos exactos, estos son proximos a los deseados.

Luego, se realizaron nuevas iteraciones, bajo las mismas especificaciones previas, con el objetivo de presentar en un histograma los distintos valores obtenidos de la media. Es así que luego de 1000 iteraciones se pudo efectuar el siguiente gráfico.

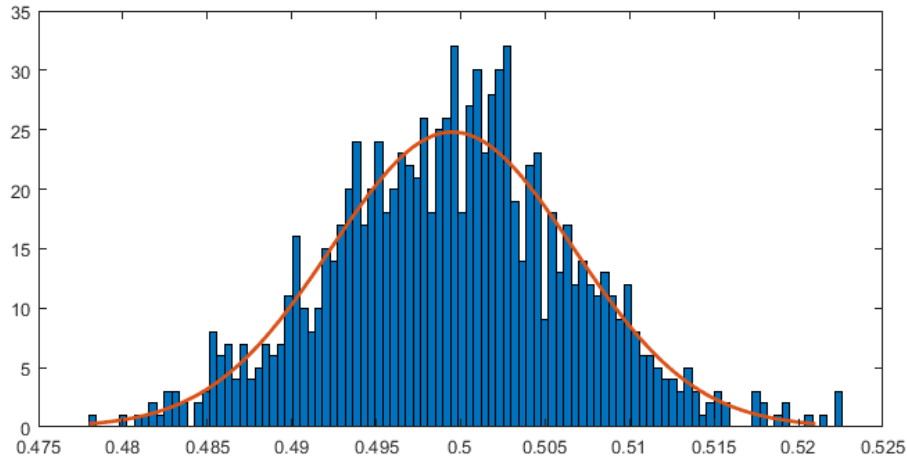


Figura 2: Distribución de la media para 1000 iteraciones.

Se concluye que la media comprende una V.A. gaussiana, con media $\mu = \frac{1}{\lambda}$ y varianza $\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\lambda^2}$. Esto se debe a el teorema central del límite, el cual indica que, en condiciones muy generales, si S_n es la suma de n variables aleatorias independientes y de varianza no nula pero finita, entonces la función de distribución de S_n se aproxima bien, a una distribución normal. Así pues, el teorema asegura que esto ocurre cuando la suma de estas variables aleatorias es lo suficientemente grande, el cual es nuestro caso.

Finalmente, se desea estimar la cantidad de elementos que se deben generar para estimar la media μ_Y a través del estimador tal que la probabilidad de que el valor estimado de la media m_Y se aparte más del 6 % del valor teórico sea menor al 1 %, es decir calcular $P\{|m_Y - \mu_Y| > 0.06\mu_Y\} \leq 0.01$. Por lo tanto, se pide calcular:

$$P\{|m_Y - \mu_Y| > 0.06\mu_Y\} \leq 0.01$$

$$2 \cdot P\{m_Y - \mu_Y < -0.06\mu_Y\} \leq 0.01$$

$$P\left\{\frac{m_Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \cdot \sqrt{N} < -0.06 \cdot \frac{\mu_Y}{\sigma_Y} \cdot \sqrt{N}\right\} \leq 0.005$$

Siendo $\frac{m_Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \cdot \sqrt{N}$ mi nueva V.A. con distribución normal estándar Φ

$$\Phi\left(-0.06 \cdot \frac{\mu_Y}{\sigma_Y} \cdot \sqrt{N}\right) \leq 0.005$$

$$\Phi\left(0.06 \cdot \frac{\mu_Y}{\sigma_Y} \cdot \sqrt{N}\right) \geq 0.995$$

$$0.06 \cdot \frac{\mu_Y}{\sigma_Y} \cdot \sqrt{N} \geq \Phi(0.995)^{-1}$$

$$N \geq \left[\Phi(0.995)^{-1} \cdot \frac{\sigma_Y}{\mu_Y \cdot 0.06}\right]^2$$

Sabiendo que $\mu_Y = \frac{1}{\lambda} = \sigma_Y$ y $\Phi(0.995)^{-1} = 2.576$

$$N \geq 1843 \quad (3)$$

Finalmente se implementó el siguiente código en Matlab para verificar que la conclusión obtenida es correcta.

```
>> N= 1843;
mu = 0.5;
sigma = 0.5./sqrt(N);
mx = makedist('Normal','mu',mu,'sigma',sigma);
P = 2. * cdf(mx,0.94.*mu)%La probabilidad

P =

    0.0100
```

Figura 3: Código de verificación en Matlab.

2. Ejercicio 2

Introducción

Utilizando el método de simulación de Montecarlo y luego la transformación por autovectores estudiada en clase, es posible simular una variable aleatoria Gaussiana bidimensional correlacionada.

Se llevaron a cabo dos simulaciones con los siguientes parámetros.

$$\text{Caso 1: } \mu_1 = 1 \quad \mu_2 = 2 \quad \sigma_1 = 0.5 \quad \sigma_2 = 0.5 \quad \rho = 0.6$$

$$\text{Caso 2: } \mu_1 = 1 \quad \mu_2 = 2 \quad \sigma_1 = 0.5 \quad \sigma_2 = 1 \quad \rho = 0.9$$

En primer lugar, se generó una muestra de puntos correspondientes a una Gaussiana bidimensional no correlacionada. Mediante el método de Montecarlo se generó una V.A. de distribución de Rayleigh y una V.A. uniforme, con ellas se obtuvo la Gaussiana bivariable. Luego, conociendo la matriz de covarianza requerida, se planteó la transformación lineal pertinente que llevo a una muestra correlacionada.

Implementación

El código en Matlab empleado en esta sección se reduce a archivo principal o main:

```
function [X, Y2] = main(mean1, mean2, sigx1, sigx2, corr, samples)

%1) Creamos el vector media de X y su matriz de covarianza sigma X.
meanX = [mean1; mean2];
sigX = [sigx1*sigx1, corr*sigx1*sigx2; corr*sigx1*sigx2, sigx2*sigx2];

%Ahora calculamos los avas de X. "eig" nos devuelve los autovectores
%ya normalizados.
[A0, sigY0] = eig(sigX);

%Invierto el orden de las filas, que por algun motivo si no se realiza
% se invierten los ejes luego.
A = [A0(2,:);A0(1,:)];
sigY = [sigY0(2,2), 0;0, sigY0(1,1)];

% Generamos Y, siendo sus varianzas los autovalores de sigma X. y su
%vector de medias meanY
[y1, y2] = genX(sqrt(sigY(1,1)), sqrt(sigY(2,2)), samples);
Y = [y1; y2];
meanY = A*meanX; % Esto es una ecuacion del libro y ya.
meanY = A*meanX; % Esto es una ecuacion del libro y ya.

%generamos el vector aleatorio Y2 con media distinta de 0
Y2 = Y + meanY;
AT = A'; %Matriz ortogonal -> Inversa = Traspuesta

%Vector aleatorio X gaussiano Bivariable
X = AT*Y2;

%Ploteamos el vector Y2 incorrelacionadas
figure(1)
plot(Y2(1,:),Y2(2,:),'.');
axis equal

%ploteamos el vector X ya correlacionadas
figure(2)
plot(X(1,:), X(2,:),'.');
axis equal

end
```

Figura 4: Programa principal.

Donde las funciones utilizadas se definen a continuación: La función genX genera las gaussianas incorrelacionas:

```

function [x1,x2] = genX( sig1, sig2, samples )
%genX Recibe los desvios para generar un vector bidimensional de muestras
% con valores dist normal no correlacionados
%LLama las funciones rayleigh_dist y theta_dist para generar las variables
% gaussianas
%Devuelve dos vectores con distribucion gaussiana
ray = rayleigh_dist(samples);
thet = theta_dist(samples);
%genero las gaussianas
x1 = sig1*ray.*(cos(thet));
x2 = sig2*ray.*(sin(thet));
end

```

Figura 5: Función genX.

La función rayleigh dist que genera la simulación de una V.A. con distribución de Rayleigh:

```

function [ rayleigh_samples ] = rayleigh_dist( muestras )
%RAYLEIGH_DIST Muestras distribucion Rayleigh
% Metodo Monte Carlo, muestras con distribucion Rayleigh
samples = unifrnd(0,1,1, muestras);
rayleigh_samples = sqrt(-2*log(samples));
end

```

Figura 6: Función rayleigh dist.

La función theta dist que genera valores de un ángulo theta como V.A. de distribución uniforme:

```

function [ angulos ] = theta_dist(muestras)
%THETA_DIST Devuelve angulos dist uniforme
% Monte Carlo para numeros entre 0 y 2pi
samples = unifrnd(0,1,1, muestras);
angulos = samples*2*pi;
end

```

Figura 7: Función theta dist.

Resultados

Se consideró a las V.A. con subíndice 1 que se grafiquen en el eje X y con subíndice 2 en el eje Y. Las nubes de puntos que representan los vectores aleatorios se realizaron con 10000 muestras generadas por la distribución uniforme y la de rayleigh.

Para el caso 1 en la simulación se obtuvo la nube de puntos de una gaussiana bivariable no correlacionadas como en la siguiente figura:

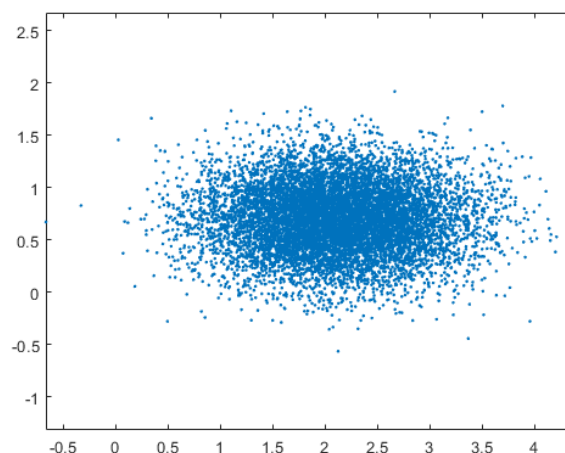
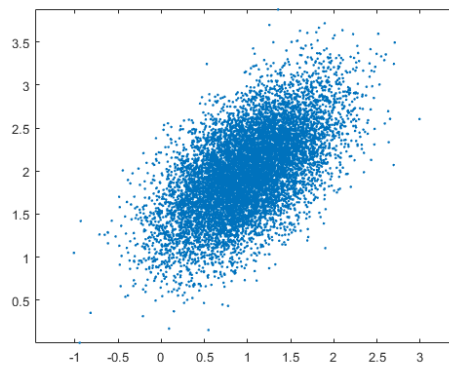
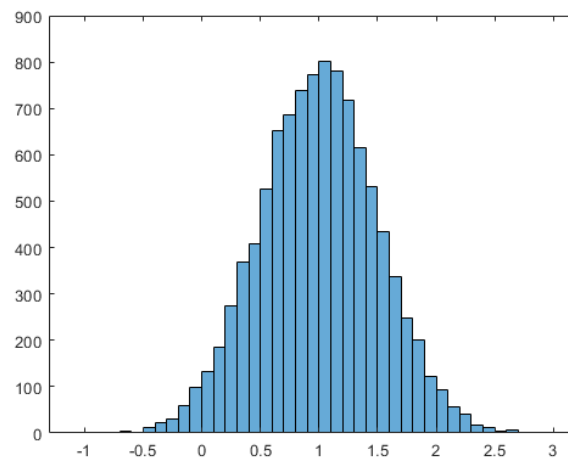
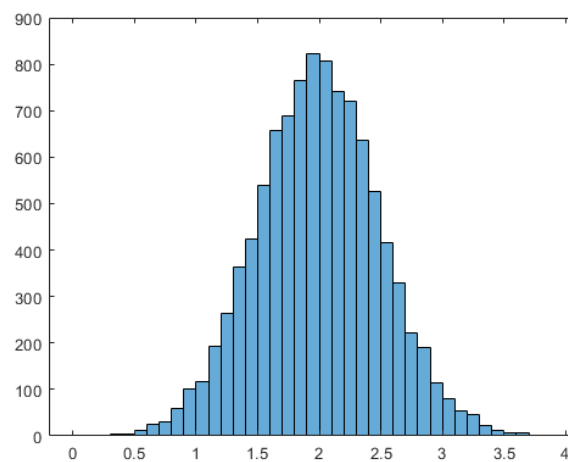


Figura 8: Caso 1, sin correlación.

Luego, al aplicar la transformación, se obtiene la forma correlacionada de ambas gaussianas:

Figura 9: Caso 1, con correlación ($\rho=0.6$).

También, se puede observar como quedaron ambas V.A. con distribución Gaussiana:

Figura 10: Variable X1 con $\mu_1 = 1$ y $\sigma_1 = 0.5$.Figura 11: Variable X2 con $\mu_2 = 2$ y $\sigma_2 = 0.5$.

De igual manera para el caso 2, primero se obtuvieron las gaussianas no correlacionadas:

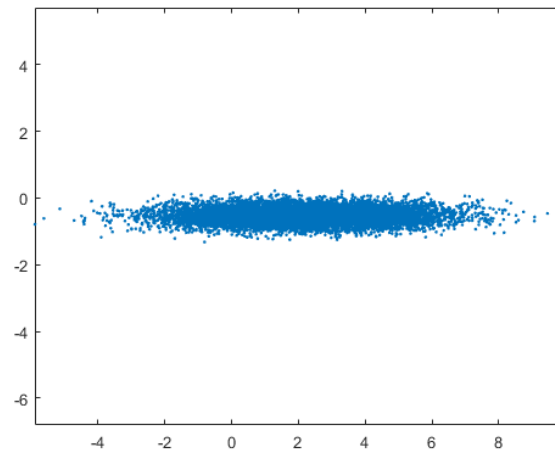
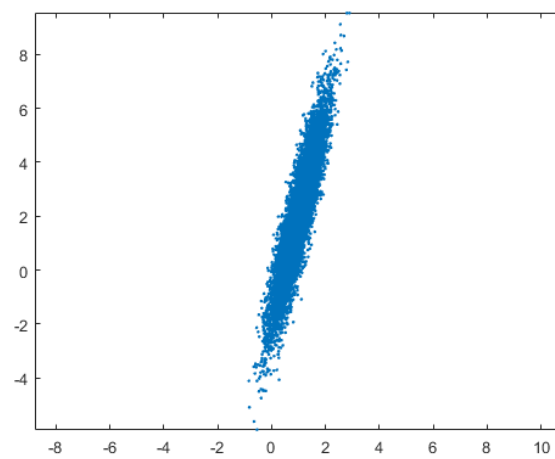


Figura 12: Caso 2, sin correlación.

Nuevamente, aplicamos la transformación:

Figura 13: Caso 2, con correlación($\rho=0.9$).

Finalmente, como observación las distribuciones de las V.A. gaussianas:

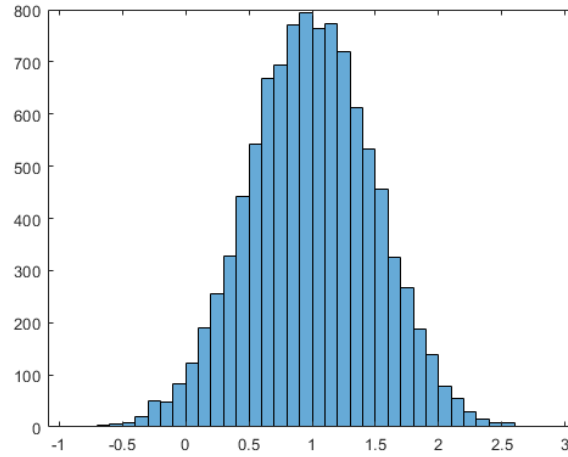


Figura 14: Variable X1 con $\mu_1 = 1$ y $\sigma_1 = 0.5$.

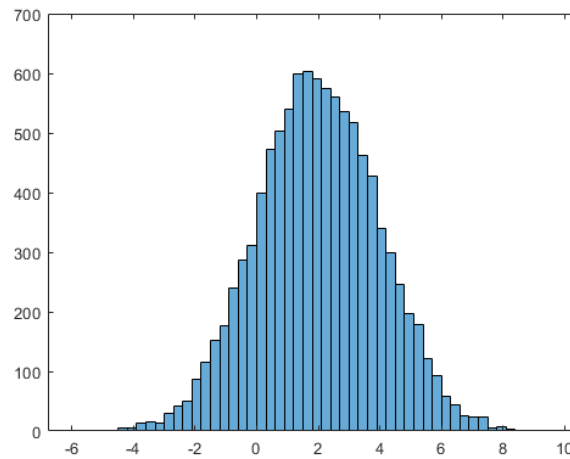


Figura 15: Variable X2 con $\mu_2 = 2$ y $\sigma_2 = 2$.

Análisis de resultados

Se realizó de manera exitosa la simulación y obtención de una distribución gaussiana bimensional. Ambas simulaciones muestran los resultados esperados. En primer lugar, ambas nubes de puntos se pueden encontrar centradas en los puntos correspondientes a la media de cada eje según lo pedido. Además se observa una orientación en la nube de los puntos que manifiesta la correlación entre las variables, nula en las Figuras (8) y (12), mientras que se presenta un claro cambio cuando se aplica la transformación que rota la nube de correlación de ambas variables, con $\rho = 0.6$ en la Figura (9) y $\rho = 0.9$ en la Figura (13). Por otra parte, ambas tienen valores de ρ positivo y se observa que las pendientes de las nubes son positivas. En la segunda simulación, caso 2, la pendiente es mas precipitada, debido a que el factor de correlación es mayor como era de esperar. Otra observación a destacar es que la diferencia en ancho de las muestras se atribuye a que en el caso 2 existe un mayor desvío en la V.A. graficada en el eje y, por lo cual la elipse se ve más “alargada” y esta tiende a una recta cuanto más se acerca ρ a 1 o a -1.