

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES - ITBA
ESCUELA DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

TRABAJO PRÁCTICO FINAL

AUTORES: Londero Bonaparte, Tomás Guillermo (Leg. N° 58150)
Maselli, Carlos (Leg. N° 59564)

DOCENTES: Ghersin, Alejandro Simon
Silva Rodrigues, Reurison

22.93 - Control Automático

BUENOS AIRES
PRIMER CUATRIMESTRE, 2022

1. Índice

1.1. Contenidos

1	Índice	1
1.1	Contenidos	1
2	Planta	2
2.1	Linealización en el equilibrio	3
3	Control de Estados	5
4	Observador	7
5	Comparación con el péndulo simple	9
6	Matlab	11
7	Referencias	15

2. Planta

Se tomo el péndulo doble con carro y se modeló la planta no lineal. Para ello se definen primero las siguientes variables:

- Masa del carro: $M = 1.5 \text{ kg}$
- Gravedad: $g = 9.8 \text{ m/s}^2$
- Longitud del primer péndulo: $L_1 = 0.5 \text{ m}$
- Longitud del segundo péndulo: $L_2 = 0.75 \text{ m}$
- Posición del centro de masa del primer péndulo: $l_1 = L_1/2 = 0.25 \text{ m}$
- Posición del centro de masa del segundo péndulo: $l_2 = L_2/2 = 0.375 \text{ m}$
- Masa del primer péndulo: $m_1 = 0.5 \text{ kg}$
- Masa del segundo péndulo: $m_2 = 0.75 \text{ kg}$
- Inercia del primer péndulo: $I_1 = (m_1 \cdot L_1^2) / 12 = 0.0104 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- Inercia del segundo péndulo: $I_2 = (m_2 \cdot L_2^2) / 12 = 0.0352 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- Posición del carro: ρ
- Posición angular del primer péndulo: θ_1
- Posición angular del segundo péndulo: θ_2

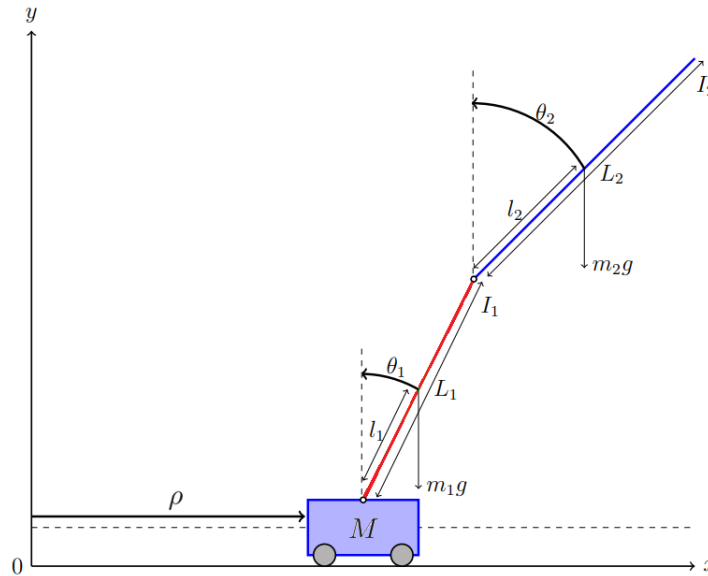


Figura 2.1: Modelo de péndulo doble con carro.

De esta forma, se obtiene el siguiente modelo de estados [1].

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u + L(x) \quad (1)$$

Donde

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -D^{-1}C \end{pmatrix} \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ D^{-1}H \end{pmatrix} \quad L(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -D^{-1}G \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad \theta = \begin{pmatrix} \rho \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

A su vez, las matrices **D**, **C**, **H** y **G** son

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} M + m_1 + m_2 & (m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot l_1) \cdot \cos(\theta_1) & m_2 \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_2) \\ (m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot l_1) \cdot \cos(\theta_1) & m_1 \cdot l_1^2 + m_2 \cdot l_1^2 + I_1 & m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_2) & m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 \cdot l_2^2 + I_2 \end{pmatrix}$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & -(m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot l_1) \cdot \sin(\theta_1) \cdot \dot{\theta}_1 & -m_2 \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 \\ 0 & m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \cdot (m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot l_1) \cdot \sin(\theta_1) \\ -m_2 \cdot l_2 \cdot g \cdot \sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$H(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.1 Linealización en el equilibrio

Para la linealización de la planta, se toma como posición de equilibrio el vector de estados nulo

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \emptyset$$

De esta forma la Ecuación (1) queda de la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Con las matrices **A** y **B** siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7.35 & 0.7875 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 73.5 & -33.075 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -58.8 & 51.1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -D^{-1}(\emptyset) \frac{\partial G(\emptyset)}{\partial \theta} & I \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6071 \\ -1.5 \\ 0.2857 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D^{-1}(\emptyset)H \end{pmatrix} \quad (3)$$

Se pueden obtener las transferencias tomando como salida cada una de las posiciones:

$$T_\rho(s) = \frac{0.60714(s + 9.727)(s + 3.386)(s - 9.727)(s - 3.386)}{s^2(s + 10.38)(s + 4.099)(s - 10.38)(s - 4.099)}$$

$$\begin{aligned} T_{\theta_1}(s) &= \frac{-1.5(s - 6.693)(s + 6.693)(s^2 + 1.328 \cdot 10^{-15})}{s^2(s + 10.38)(s + 4.099)(s - 10.38)(s - 4.099)} \\ &\approx \frac{-1.5(s - 6.693)(s + 6.693)}{(s + 10.38)(s + 4.099)(s - 10.38)(s - 4.099)} \end{aligned}$$

$$T_{\theta_2}(s) = \frac{0.28571(s + 2.613 \cdot 10^{-8})(s - 2.613 \cdot 10^{-8})(s^2 + 235.2)}{s^2(s + 10.38)(s + 4.099)(s - 10.38)(s - 4.099)}$$

$$\approx \frac{0.28571(s^2 + 235.2)}{(s + 10.38)(s + 4.099)(s - 10.38)(s - 4.099)}$$

Una vez obtenidas estas funciones transferencia a lazo abierto, se realiza el gráfico del lugar de raíces para considerar la estrategia de control a utilizar. Como resultado de este análisis se obtienen los gráficos que se muestran a continuación.

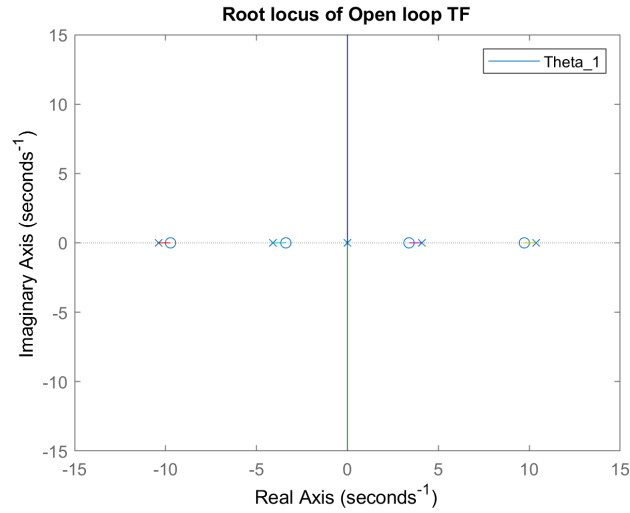


Figura 2.1.1: Root locus de la transferencia de la posición del carro a lazo abierto.

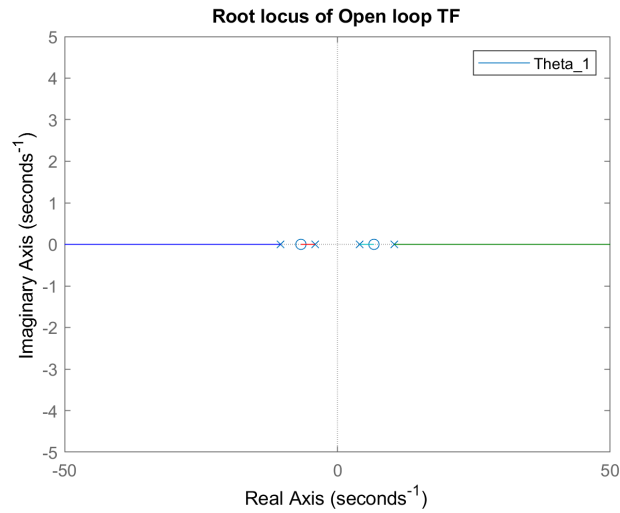


Figura 2.1.2: Root locus de la transferencia de la posición del primer brazo del pendulo a lazo abierto.

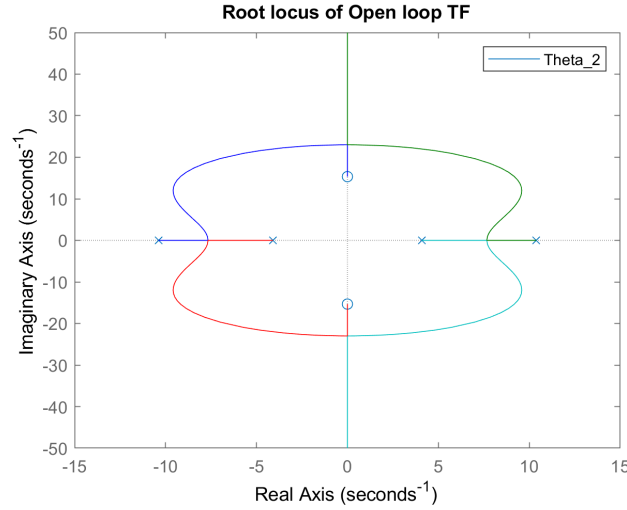


Figura 2.1.3: Root locus de la transferencia de la posición del segundo brazo del péndulo a lazo abierto.

Como puede verse de estos gráficos, si bien algunos polos son compartidos entre las distintas transferencias, un control por loop shaping y en particular considerando que este es un sistema SIMO [3], resulta complicado de implementar. Es por ello que se decide utilizar realimentación de estados simple. Si bien parece una solución sencilla, es posible a partir del esquema seleccionado aplicar estrategias de control óptimo en caso de que la aplicación así lo requiriese.

Una vez decidido el esquema de control a utilizar, se procede a analizar la observabilidad del sistema contemplando el rango de la matriz de observabilidad. Si se toma una única salida, se observa que dicho rango es completo solo con la posición del carro, esto es con la matriz C de la forma

$$C = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

Es imperante remarcar que analizando únicamente cualquiera de las otras salidas, el sistema no es observable.

Por otro lado, midiendo más de una variable a la vez se puede llegar a un sistema observable. Algunos ejemplos de esto son midiendo las tres posiciones o también la posición del carro y las dos velocidades angulares. Esto se refleja matemáticamente en la matriz C , siendo esta de las formas

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente.

3. Control de Estados

Para realizar el control del péndulo doble invertido, se decidió utilizar el método de realimentación de estados. Se decidió colocar una entrada nula a la planta, pero a la vez se corrió del equilibrio ambos péndulos por 5° , forzando así al sistema a volver al equilibrio.

Para estabilizar la planta, tanto para el modelo continuo como para el discreto, se tomaron los siguientes polos

$$pK = (-40 \ -8 \ -8 \ -1 \ -1 \ -0.5)$$

En el caso continuo, esto da las ganancias

$$K = (1.9436 \ -528.232 \ 619.7518 \ 8.309 \ -18.1073 \ 92.03)$$

Por otro lado, en el caso discreto, al tomar un tiempo de muestreo $T_s = 1 \text{ ms}$, se llega a las ganancias

$$Kd = e^{pK \cdot T_s} = (3.7087 \ -517.2027 \ 604.7757 \ 8.0674 \ -17.8455 \ 89.6826)$$

Con los parámetros seleccionados, se pueden observar las salidas de la planta en las Imágenes (3.1) y (3.2).

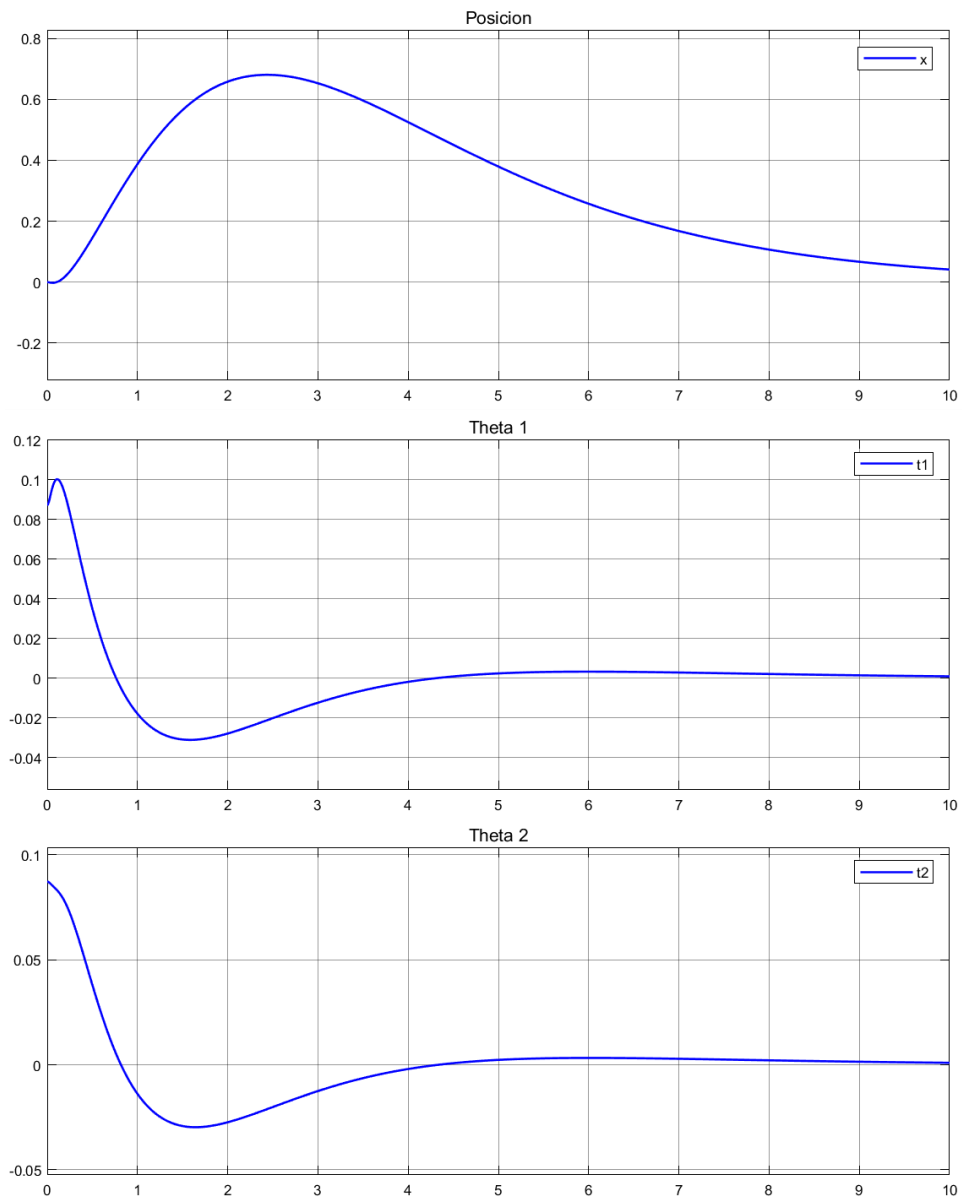


Figura 3.1: Gráfica de ρ , θ_1 y θ_2 de la planta continua con realimentación de estados.

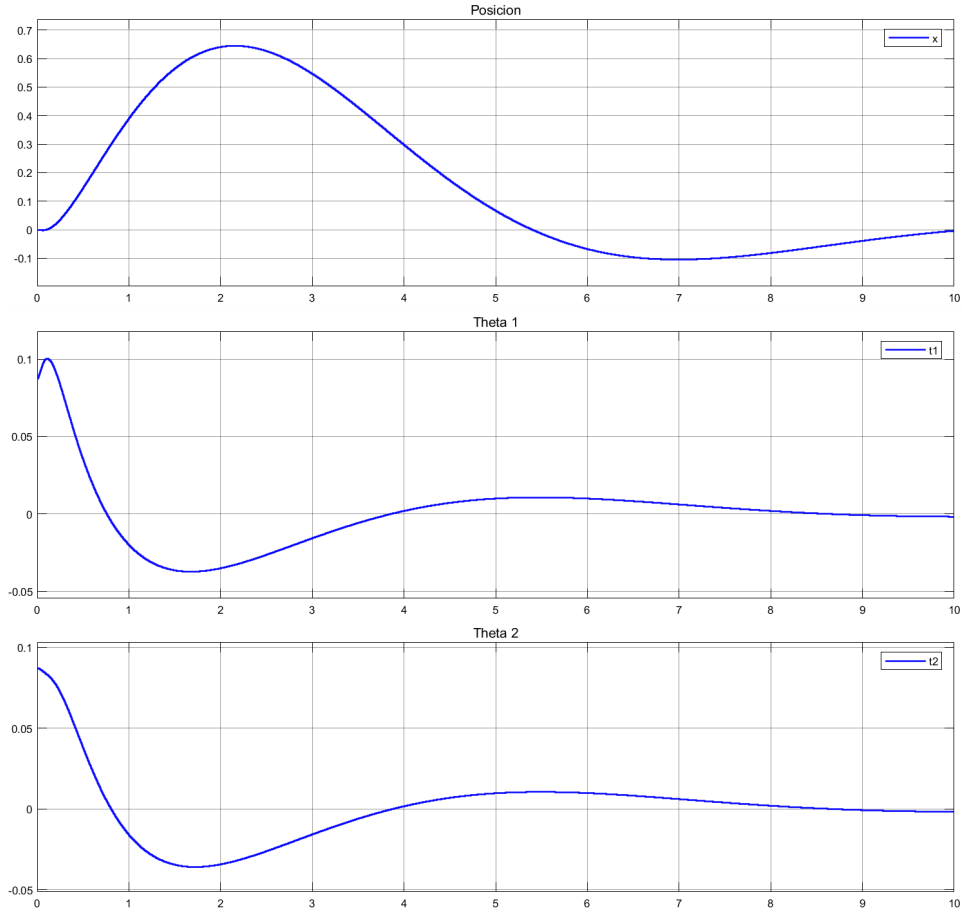


Figura 3.2: Gráfica de ρ , θ_1 y θ_2 de la planta discreta con realimentación de estados.

4. Observador

Como se mencionó en la Sección (2.1), existen varias formas de alimentar al observador. Es por ello que se tomó las matrices linealizadas en el equilibrio y la matriz \mathbf{C} de la forma

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en otras palabras, midiendo la posición del carro y las velocidades de los dos ángulos.

Para estabilizar el observador, tanto para el modelo continuo como para el discreto, se tomaron los mismos polos que para la realimentación de estados, pero se escaló estos en un factor de 8, quedando esto así de la forma

$$pL = (-320 \quad -64 \quad -64 \quad -8 \quad -8 \quad -4)$$

Dado que se alimenta con tres mediciones, las ganancias del observador se componen por una matriz de 6×3 . Para el caso continuo, las ganancias son

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 76.1398 & 9.2495 & -5.5724 & 286.4675 & 56.1457 & -54.1263 \\ 20.7878 & 27.7420 & 8.9074 & 62.9178 & 200.3036 & -123.8686 \\ -20.3559 & -2.5060 & 29.2204 & -81.4468 & -123.8369 & 191.5566 \end{pmatrix}'$$

Por otro lado, en el caso discreto, con el mismo tiempo de muestreo que se mencionó en la Sección (3), se llegan a las ganancias

$$\mathbf{L}_d = e^{pL \cdot T_s} = \begin{pmatrix} 0.0665 & 0.0026 & -0.0014 & 0.2491 & 0.0138 & -0.0133 \\ 0.0056 & 0.0243 & 0.0101 & 0.0020 & 0.1788 & -0.1052 \\ -0.0057 & 0 & 0.0267 & -0.0219 & -0.1051 & 0.1711 \end{pmatrix}'$$

Si se realimenta el observador únicamente con la posición, y tomando los mismos polos mencionados las ganancias son

$$L = 10^6 \cdot (0.0005 \quad -0.1793 \quad 1.2823 \quad 0.0543 \quad -4.3254 \quad 8.9706)'$$

$$Ld = 10^3 \cdot (0.0004 \quad -0.1444 \quad 1.0232 \quad 0.0441 \quad -3.4625 \quad 7.1641)'$$

para el caso continuo y discreto respectivamente. Si bien las matrices se reducen a vectores de 6×1 , el módulo de estas ganancias es mucho mayor.

Al realimentar con más de una variable permite un mejor control de la planta. En la realidad, observando únicamente la posición no se podría lograr estabilizar el sistema. Otra ventaja que representan las primeras ganancias es que al ser más chicas hacen más fácil la implementación en un microcontrolador.

A continuación se muestran las salidas de la planta comparadas con las salidas del observador.

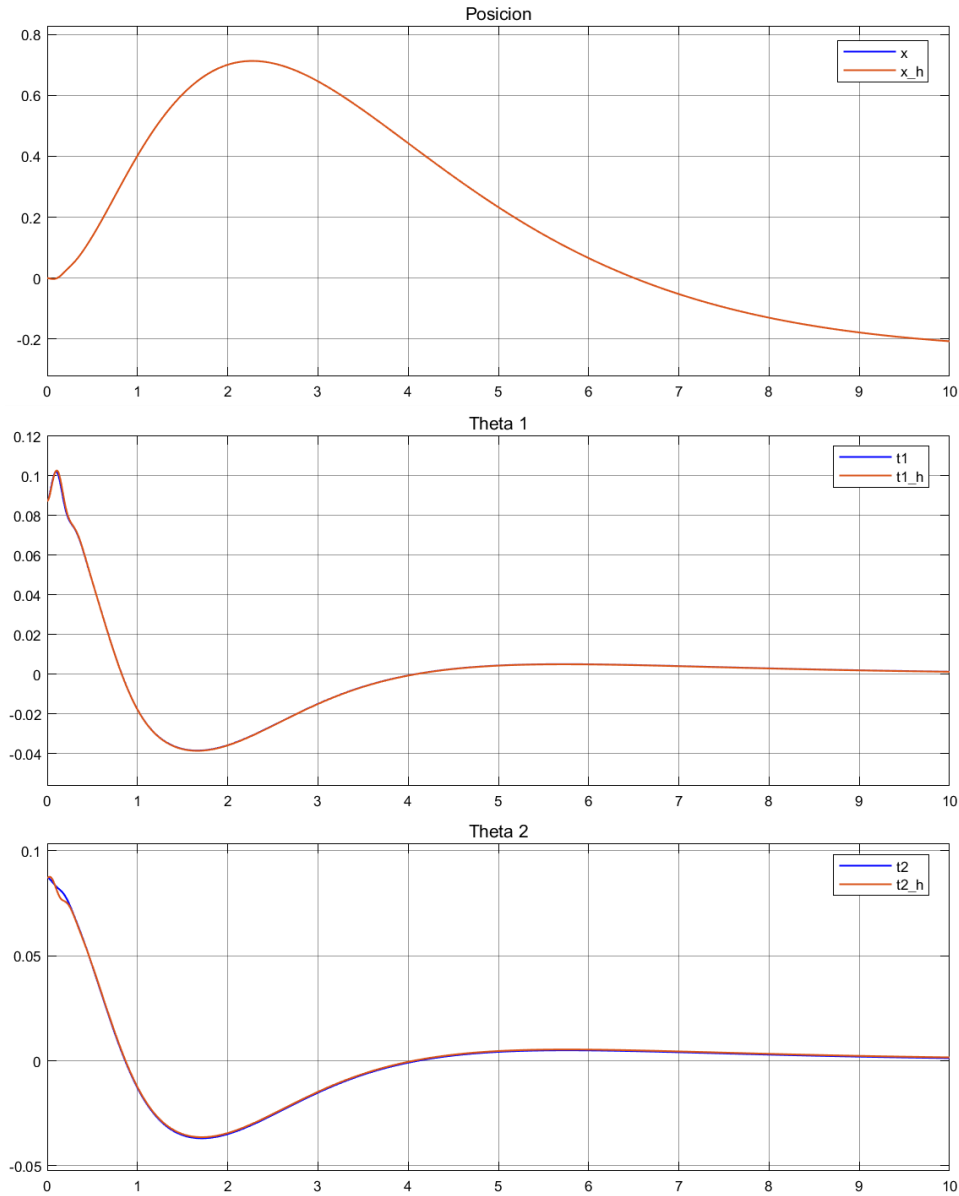


Figura 4.1: Gráfica de ρ , θ_1 y θ_2 de la planta continua con observador.

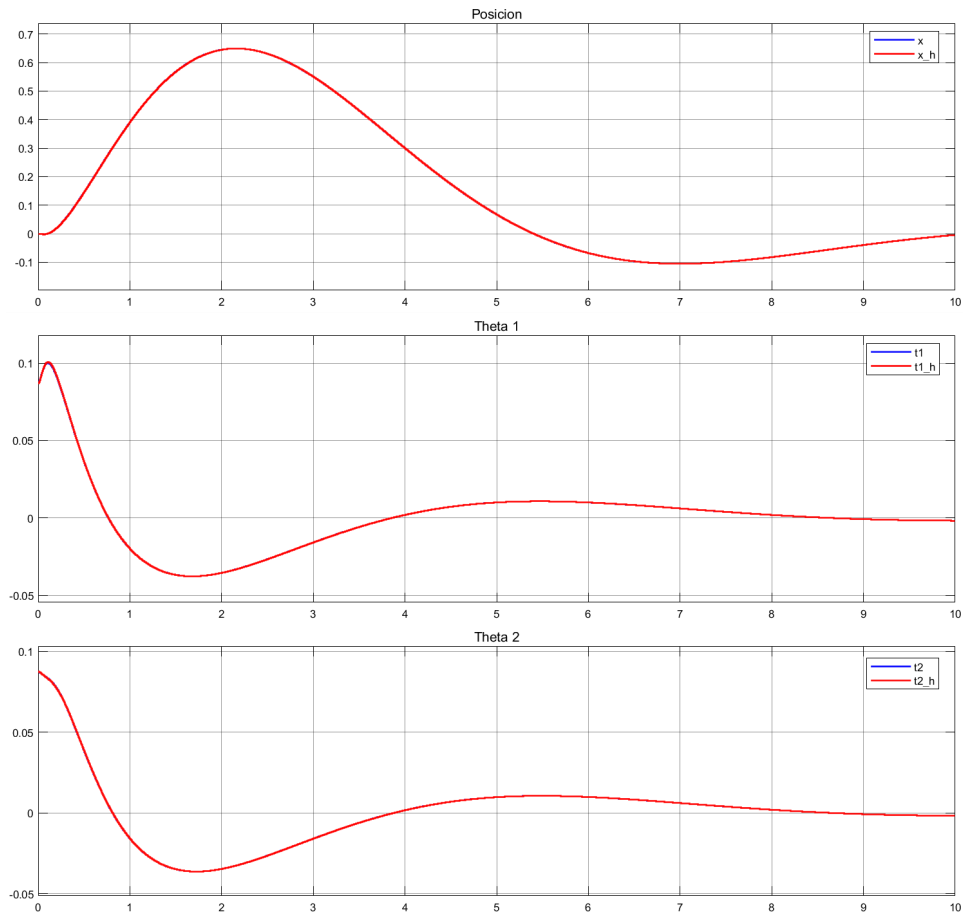


Figura 4.2: Gráfica de ρ , θ_1 y θ_2 de la planta discreta con observador.

5. Comparación con el péndulo simple

El modelo del péndulo simple posee un joint menos. Este sistema es más sencillo de controlar y estabilizar por dicha razón.

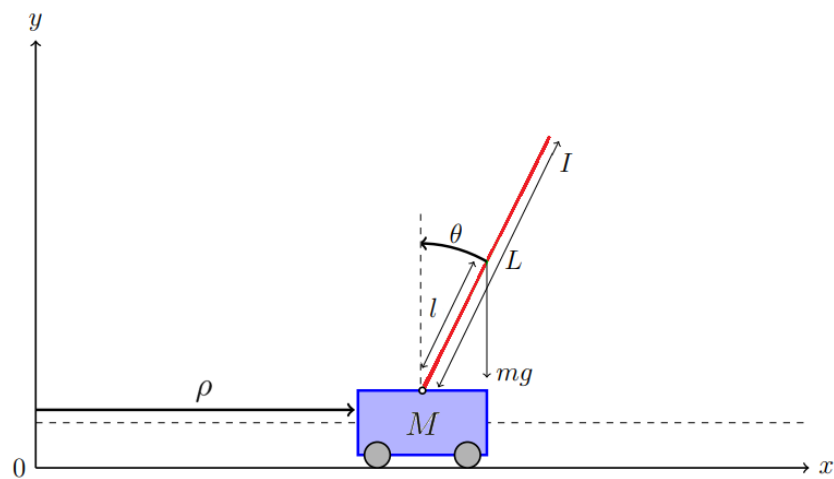


Figura 5.1: Modelo de péndulo simple con carro.

Las matrices **A** y **B** se reducen a matrices de 4×4 y 4×1 tomando como nula la masa y la longitud del segundo

péndulo. Es así que linealizándolas en el equilibrio de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3gLm/(4M + 4m - 3Lm) & 0 & 0 \\ 0 & 6g(M + m)/L(4M + 4m - 3Lm) & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.0138 & 0 & 0 \\ 0 & 32.4414 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4/(4M + 4m - 3Lm) \\ -6/L(4M + 4m - 3Lm) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5517 \\ -1.6552 \end{pmatrix}$$

Donde

- Masa del carro: $M = 1.5 \text{ kg}$
- Gravedad: $g = 9.8 \text{ m/s}^2$
- Longitud del péndulo: $L = 0.5 \text{ m}$
- Posición del centro de masa del péndulo: $l = L/2 = 0.25 \text{ m}$
- Masa del péndulo: $m = 0.5 \text{ kg}$
- Inercia del péndulo: $I = (m \cdot L^2) / 12 = 0.0104 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Para estabilizar la planta, alcanza con tomar los siguientes polos

$$pK = (-40 \quad -8 \quad -1 \quad -1)$$

Esto da las siguientes ganancias

$$K = (-19.7279 \quad -278.1135 \quad -42.4150 \quad -44.3467)$$

Mientras que para el observador, con los polos

$$pL = (-320 \quad -64 \quad -8 \quad -8)$$

Se obtienen las ganancias

$$L = 10^3 \cdot \begin{pmatrix} 0.3280 & 0 & 2.56 & 0 \\ 0 & 0.0720 & -0.0010 & 0.5444 \end{pmatrix}'$$

Como se puede observar en las ecuaciones, se reducen la cantidad de variables de estados ya que no se contemplan ni la posición ni velocidad angular del segundo péndulo.

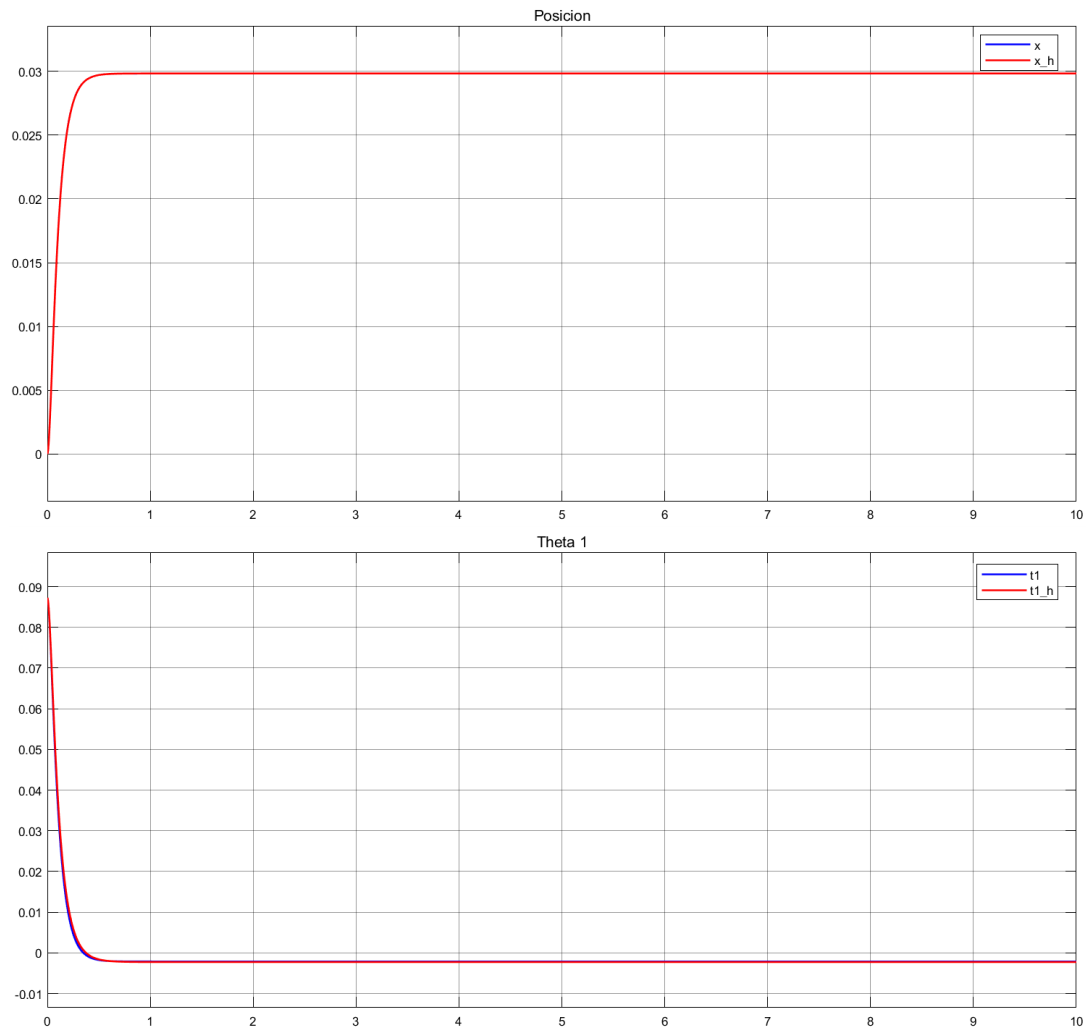


Figura 5.2: Posición del carro y ángulo del péndulo con observador continuo.

Se puede observar que con estas condiciones además de tener ganancias más grandes en el observador, hay error permanente en la posición del carro. Esto se puede solucionar aplicando control integral.

Otra forma de controlar el sistema es aplicando loop shaping, pero se debe realizar un lazo para cada variable a controlar, es decir, uno para la posición y otro para el ángulo. En el caso del péndulo doble serían tres lazos, ya que se debe controlar un ángulo más, lo cual resulta más complicado por la mayor cantidad de polos y ceros que deben ser reubicados.

6. Matlab

Se separó el modelo continuo del discreto en dos códigos distintos ("PenduloDoble.m" y "PenduloDobleDiscreto.m"). Al correr cada uno, se abre su respectivo archivo de Simulink en caso de no estar abierto. Una vez que se definieron todas las variables necesarias, se ejecuta automáticamente la simulación.

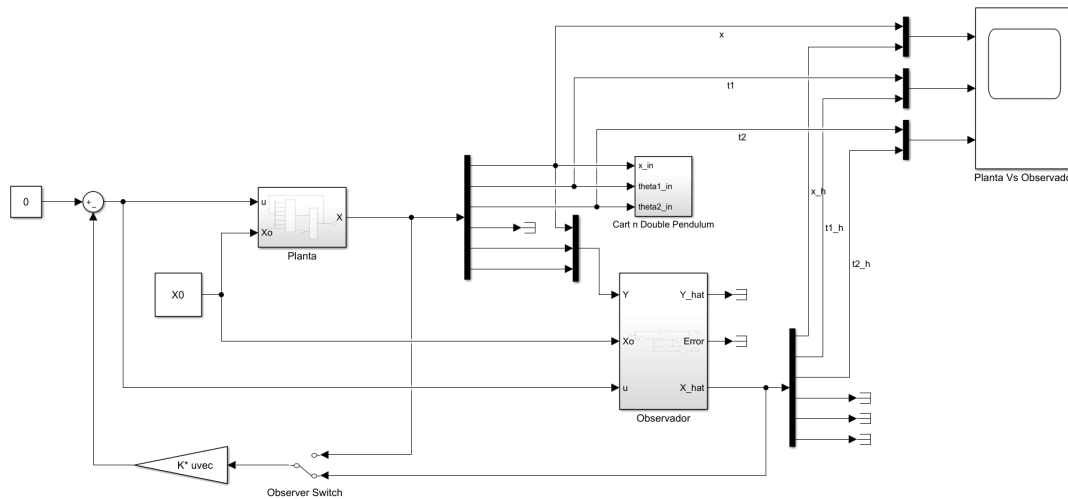


Figura 6.1: Modelo en Simulink de la planta continua.

La planta fue modelada a partir de lo planteado en la Sección (2), es decir, usando el modelo no lineal. Con este se utilizó una “MATLAB Function” que permite integrar las variables de estado y realimentar con estas.

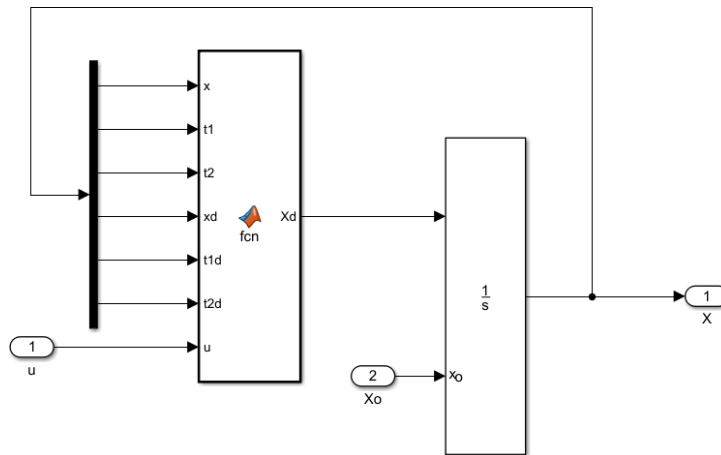


Figura 6.2: Planta en Simulink.

Se toma las posiciones a través del vector de estado de la planta no lineal. Estos se proporcionan a su vez a los joints del sistema y así se logra visualizar el movimiento del péndulo.

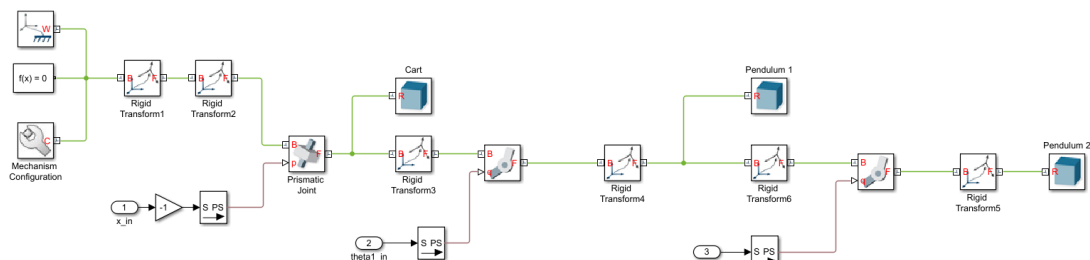


Figura 6.3: Joints y cuerpos rígidos empleados para la simulación.

Es importante aclarar que se colocó un switch que permite cambiar la realimentación de la plata, pudiendo así elegir entre la realimentación de estados o el observador.

Finalmente, cabe destacar que por una cuestión de practicidad, se definieron 3 variables en el código que no afectan a las ecuaciones del sistema, pero son variables necesarias para la simulación en Simulink y se utilizan únicamente en los joints y cuerpos sólidos. Estas son

- Coeficiente de amortiguamiento del carro: $b = 0 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$
- Longitud del carro: $l = 0.15 \text{ m}$
- Inercia nula: $I_0 = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Cabe aclarar que si se toma el modelo de la planta presentado en la Figura (6.3) y se lo linealiza, se obtienen resultados distintos a los presentados en las Ecuaciones (2) y (3). Esto se debe a que los modelos del Matlab consideran fricciones que no son consideradas en (1) [2]. Las matrices obtenidas de dicha linealización son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6.871 & 1.378 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40.81 & -14.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -31.32 & 36.6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6274 \\ 1.537 \\ -1.173 \end{pmatrix} \quad (5)$$

A modo de comprobación de lo planteado, se anexa también un archivo en Matlab llamado “PenduloSimpleLin.m” donde, utilizando el modelo de Simscape como planta linealizada, se controla el sistema utilizando realimentación de estados y control óptimo con LQR [4].

Se muestra a continuación los resultados de dicha simulación.

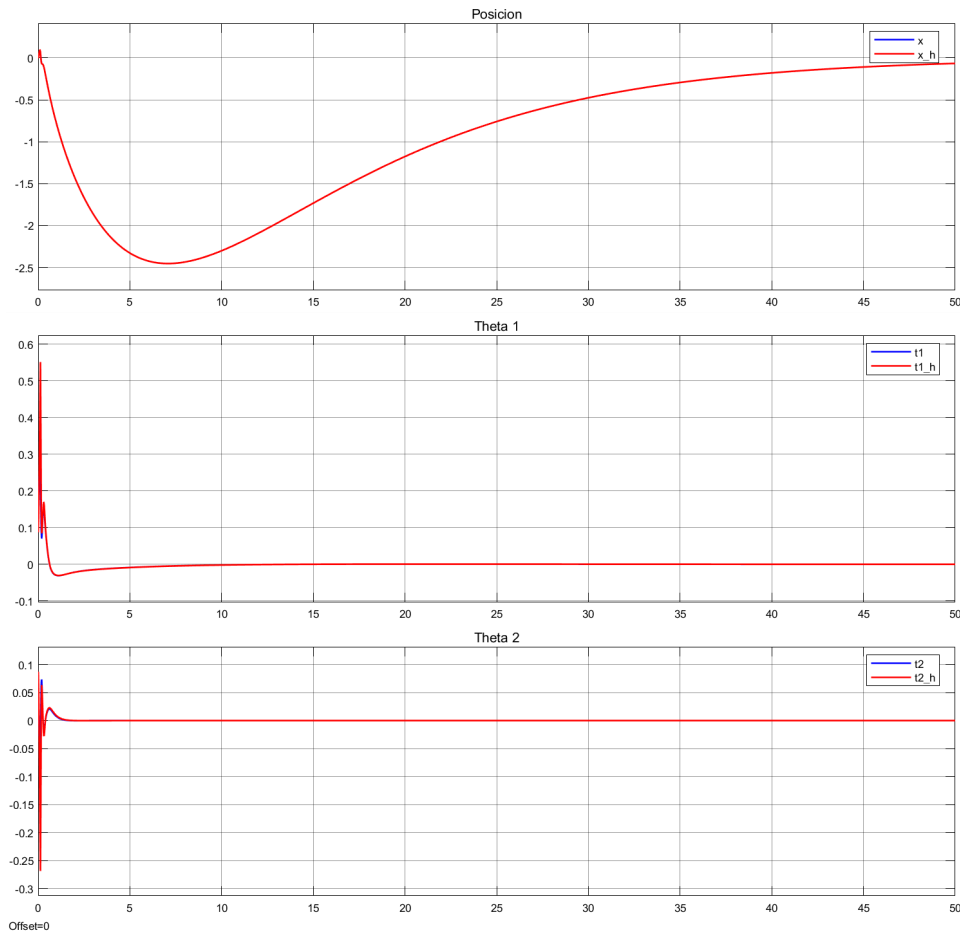


Figura 6.4: Resultados de posición con realimentación de estados.

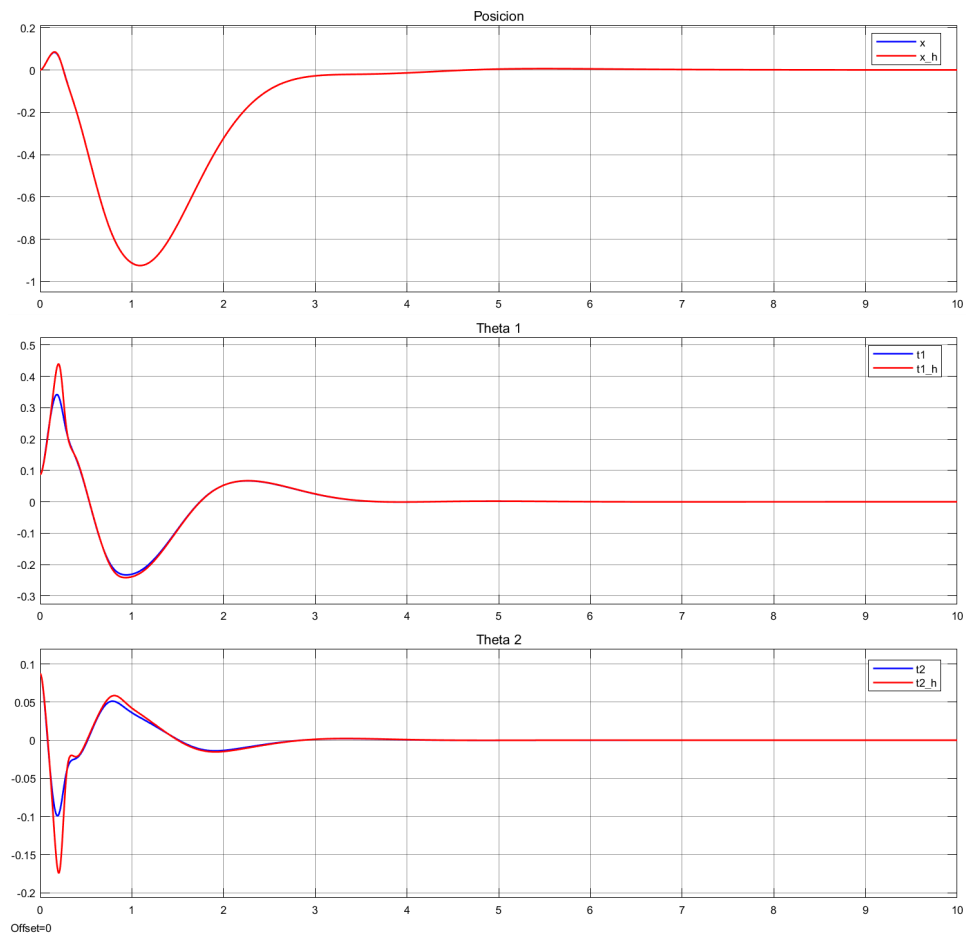


Figura 6.5: Resultados de posición con control óptimo.

7. Referencias

- [1] Ian J. P. Crowe-Wright, Control Theory: The Double Pendulum Inverted. 2018. Disponible en: https://digitalrepository.unm.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1131&context=math_etds [Acceso 19 Febrero 2022].
- [2] Jibril, Mustefa Tadese, Messay Degefa, Reta. (2020). Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/343714652_Stability_Control_of_Double_Inverted_Pendulum_on_a_Cart_using_F [Acceso 30 Julio 2022].
- [3] G. Goodwin, S. Graebe and M. Salgado, Control system design. New Delhi: PHI Learning, 2009.
- [4] G. Dullerud and F. Paganini, A course in robust control theory. New York, NY: Springer, 2005.