

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES - ITBA
ESCUELA DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

TRABAJO PRÁCTICO FINAL

AUTORES: Londero Bonaparte, Tomás Guillermo (Leg. N° 58150)
Maselli, Carlos (Leg. N° 59564)

DOCENTES: Ghersin, Alejandro Simon
Silva Rodrigues, Reurison

22.93 - Control Automático

BUENOS AIRES
PRIMER CUATRIMESTRE, 2022

1. Índice

1.1. Contenidos

1	Índice	1
1.1	Contenidos	1
2	Planta	2
2.1	Linealización en el equilibrio	3
3	Control de Estados	4
4	Observador	5
5	Matlab	7
6	Referencias	9

2. Planta

Se tomo el péndulo doble con carro y se modeló la planta no lineal. Para ello se definen primero las siguientes variables:

- Masa del carro: $M = 1.5 \text{ kg}$
- Gravedad: $g = 9.8 \text{ m/s}^2$
- Longitud del primer péndulo: $l_1 = 0.5 \text{ m}$
- Longitud del segundo péndulo: $l_2 = 0.75 \text{ m}$
- Posición del centro de masa del primer péndulo: $l_1 = L_1/2 = 0.25 \text{ m}$
- Posición del centro de masa del segundo péndulo: $l_2 = L_2/2 = 0.375 \text{ m}$
- Masa del primer péndulo: $m_1 = 0.5 \text{ kg}$
- Masa del segundo péndulo: $m_2 = 0.75 \text{ kg}$
- Inercia del primer péndulo: $I_1 = (m_1 \cdot l_1^2) / 12 = 0.0104 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- Inercia del segundo péndulo: $I_2 = (m_2 \cdot l_2^2) / 12 = 0.0352 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- Posición del carro: ρ
- Posición angular del primer péndulo: θ_1
- Posición angular del segundo péndulo: θ_2

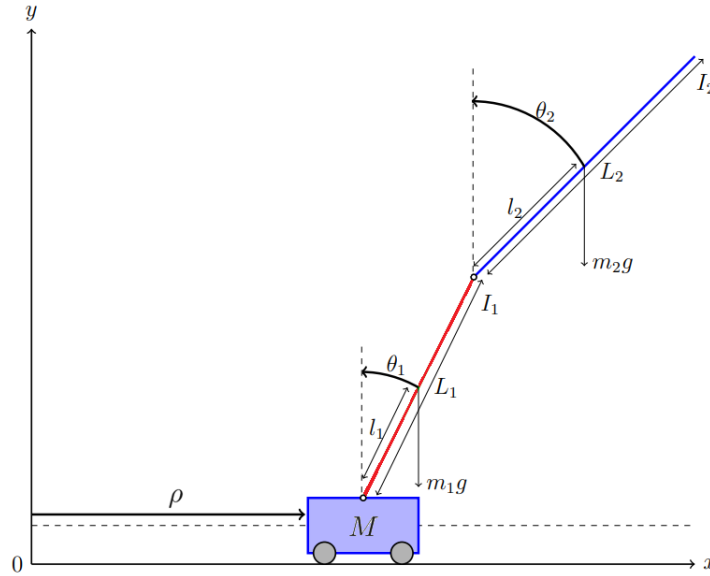


Figura 2.1: Modelo de péndulo doble con carro.

De esta forma, se obtiene el siguiente modelo de estados [1].

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u + L(x) \quad (1)$$

Donde

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -D^{-1}C \end{pmatrix} \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ D^{-1}H \end{pmatrix} \quad L(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -D^{-1}G \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad \theta = \begin{pmatrix} \rho \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

A su vez, las matrices **D**, **C**, **H** y **G** son

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} M + m_1 + m_2 & (m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot l_1) \cdot \cos(\theta_1) & m_2 \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_2) \\ (m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot l_1) \cdot \cos(\theta_1) & m_1 \cdot l_1^2 + m_2 \cdot l_1^2 + I_1 & m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_2) & m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 \cdot l_2^2 + I_2 \end{pmatrix}$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & -(m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot l_1) \cdot \sin(\theta_1) \cdot \dot{\theta}_1 & -m_2 \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 \\ 0 & m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \cdot (m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot l_1) \cdot \sin(\theta_1) \\ -m_2 \cdot l_2 \cdot g \cdot \sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$H(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.1 Linealización en el equilibrio

Para la linealización de la planta, se toma como posición de equilibrio el vector de estados nulo

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \emptyset$$

De esta forma la Ecuación (1) queda de la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Con las matrices **A** y **B** siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7.35 & 0.7875 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 73.5 & -33.075 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -58.8 & 51.1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7.35 & 0.7875 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 73.5 & -33.075 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -58.8 & 51.1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6071 \\ -1.5 \\ 0.2857 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6071 \\ -1.5 \\ 0.2857 \end{pmatrix}$$

Se pueden obtener las transferencias tomando como salida cada una de las posiciones:

$$T_\rho(s) = \frac{0.60714(s + 9.727)(s + 3.386)(s - 9.727)(s - 3.386)}{s^2(s + 10.38)(s + 4.099)(s - 10.38)(s - 4.099)} \quad (2)$$

$$T_{\theta_1}(s) = \frac{-1.5(s - 6.693)(s + 6.693)(s^2 + 1.328 \cdot 10^{-15})}{s^2(s + 10.38)(s + 4.099)(s - 10.38)(s - 4.099)} \quad (3)$$

$$T_{\theta_2}(s) = \frac{0.28571(s + 2.613e - 08)(s - 2.613e - 08)(s^2 + 235.2)}{s^2(s + 10.38)(s + 4.099)(s - 10.38)(s - 4.099)} \quad (4)$$

Con estas matrices linealizadas se puede comprobar que el sistema es controlable ya que la matriz de controlabilidad es de rango completo, pero solo la posición del carro es observable.

3. Control de Estados

Para realizar el control del péndulo doble invertido, se decidió utilizar el método de realimentación de estados. Para el modelo no se coloca entrada, pero se corre del equilibrio ambos péndulos por 5° .

Para estabilizar la planta, tanto para el modelo continuo como para el discreto, se tomaron los siguientes polos

$$pK = (-40 \quad -8 \quad -8 \quad -1 \quad -1 \quad -0.5)$$

En el caso continuo, esto da las ganancias

$$K = (1.9436 \quad -528.232 \quad 619.7518 \quad 8.309 \quad -18.1073 \quad 92.03)$$

Por otro lado, en el caso discreto, al tomar un tiempo de muestreo $T_s = 1 \text{ ms}$, se llegan a las ganancias

$$Kd = e^{pK \cdot T_s} = (3.7087 \quad -517.2027 \quad 604.7757 \quad 8.0674 \quad -17.8455 \quad 89.6826)$$

Con los parámetros seleccionados, se pueden observar las salidas de la planta en las Imágenes (3.1) y (3.2).

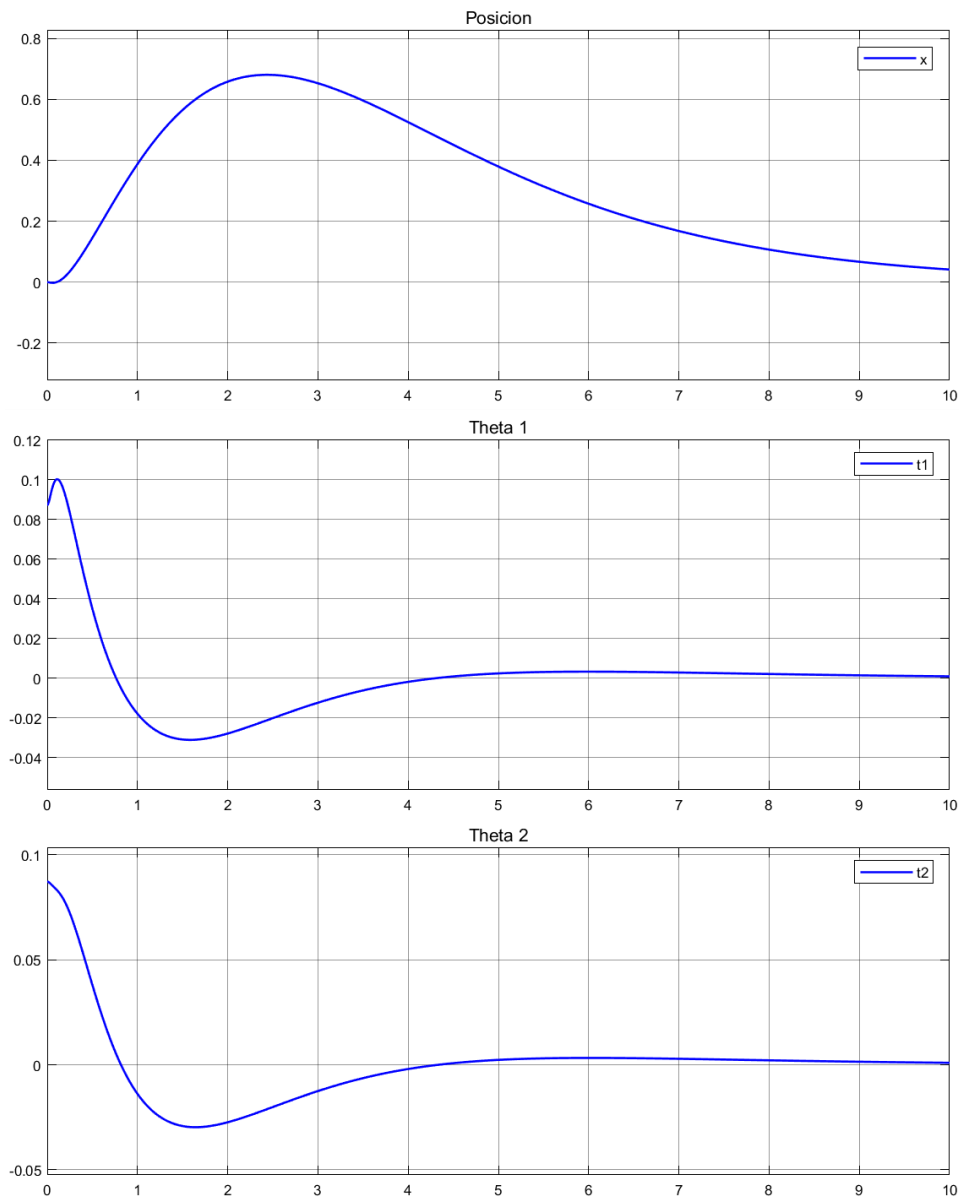


Figura 3.1: Gráfica de ρ , θ_1 y θ_2 de la planta continua con realimentación de estados.

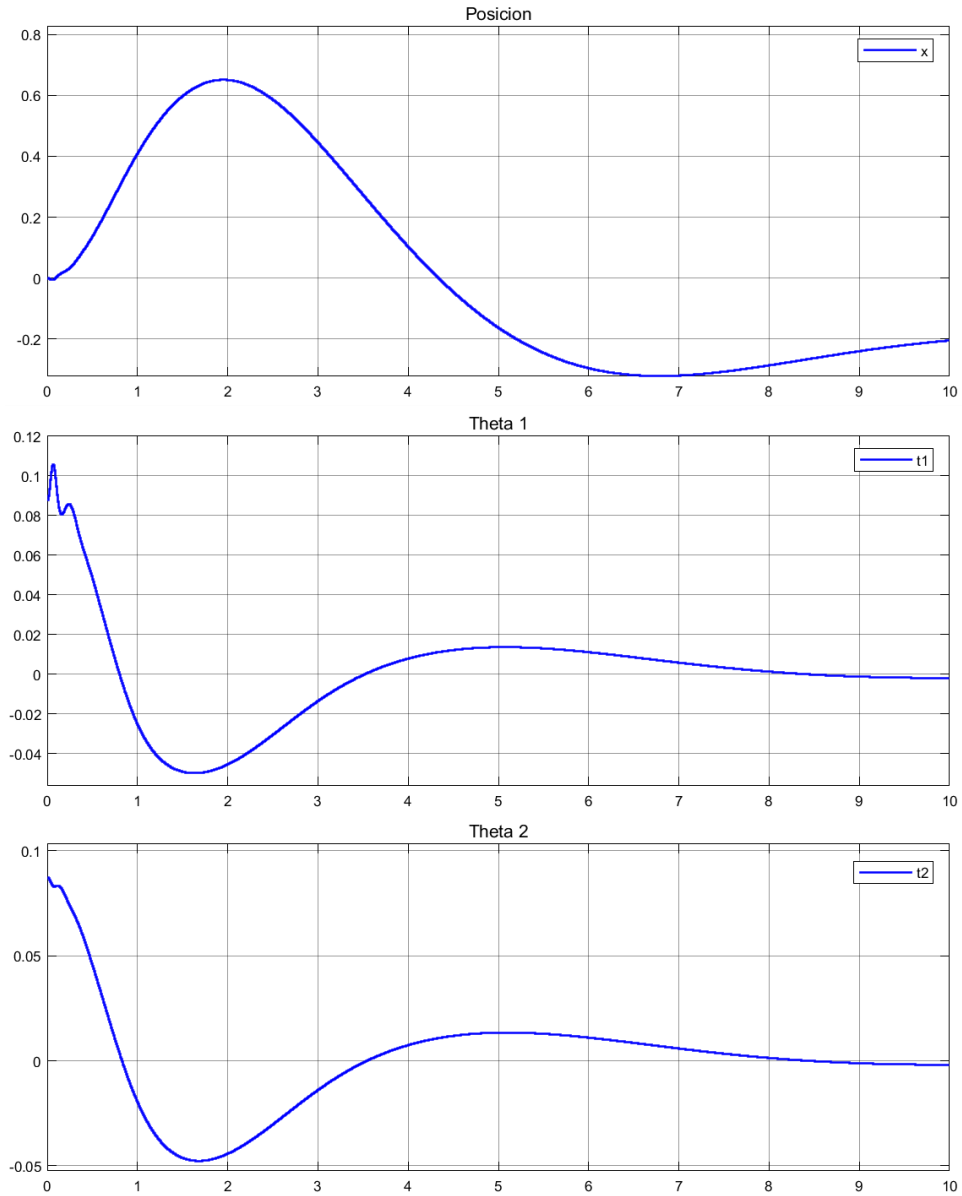


Figura 3.2: Gráfica de ρ , θ_1 y θ_2 de la planta discreta con realimentación de estados.

4. Observador

Como se mencionó en la Sección (2.1), solamente la posición del carro es una variable observable. Es por eso que con esta se alimenta al observador. Este se realizó con las matrices linealizadas en el equilibrio.

Para estabilizar el observador, tanto para el modelo continuo como para el discreto, se tomaron los siguientes polos

$$pL = (-400 \quad -80 \quad -0.01 \quad -10 \quad -10 \quad -0.01)$$

En el caso continuo, esto da las ganancias

$$L = 10^6 \cdot (0.0005 \quad -0.0863 \quad 0.1488 \quad 0.0418 \quad -0.9996 \quad 1.3681)$$

Por otro lado, en el caso discreto, el mismo tiempo de muestreo que se mencionó en la Sección (3), se llegan a las ganancias

$$Ld = e^{pL \cdot T_s} = (0.4 \quad -68.1 \quad 117.3 \quad 33.1 \quad -788.7 \quad 1078.2)$$

A continuación se muestran las salidas de la planta comparadas con las salidas del observador.

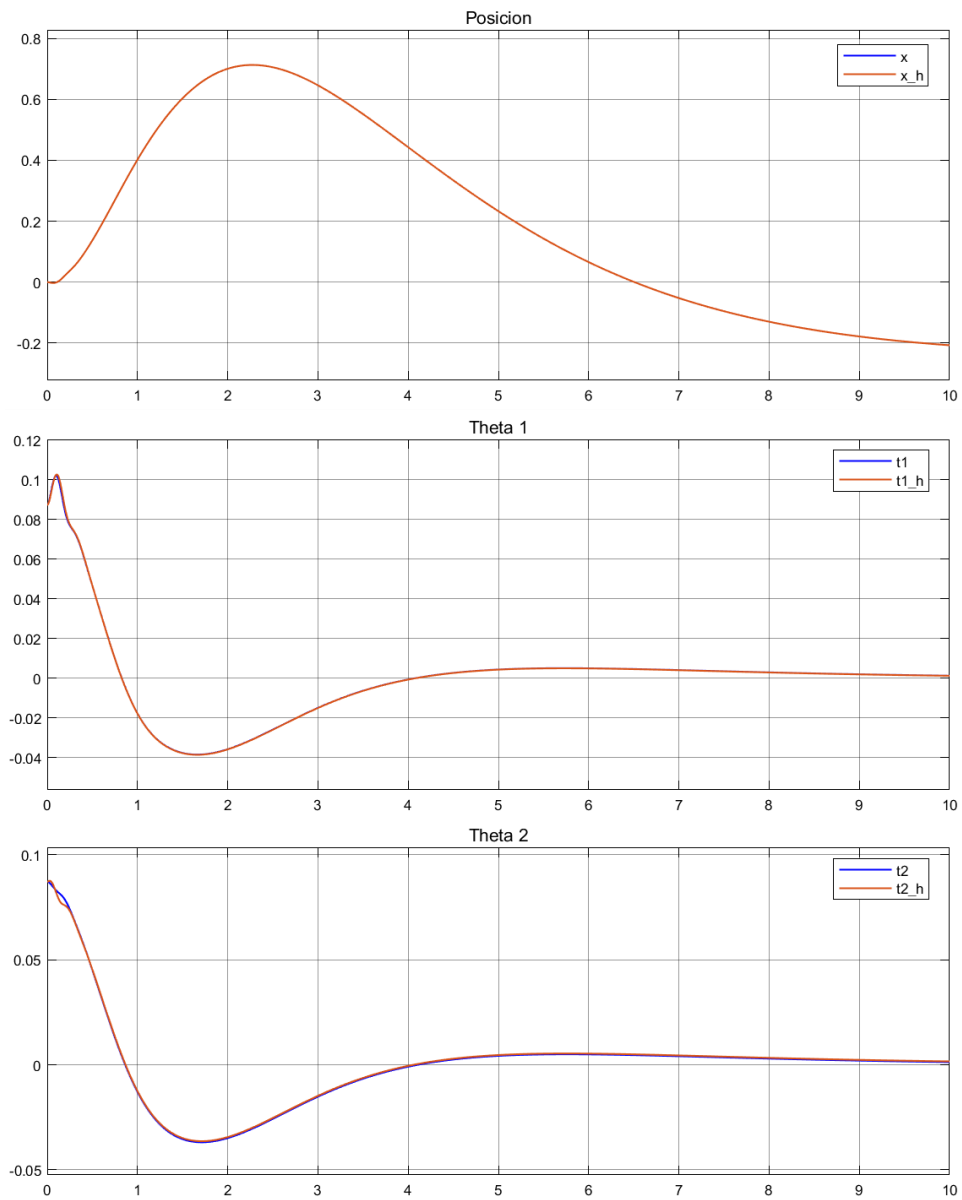


Figura 4.1: Gráfica de ρ , θ_1 y θ_2 de la planta continua con observador.

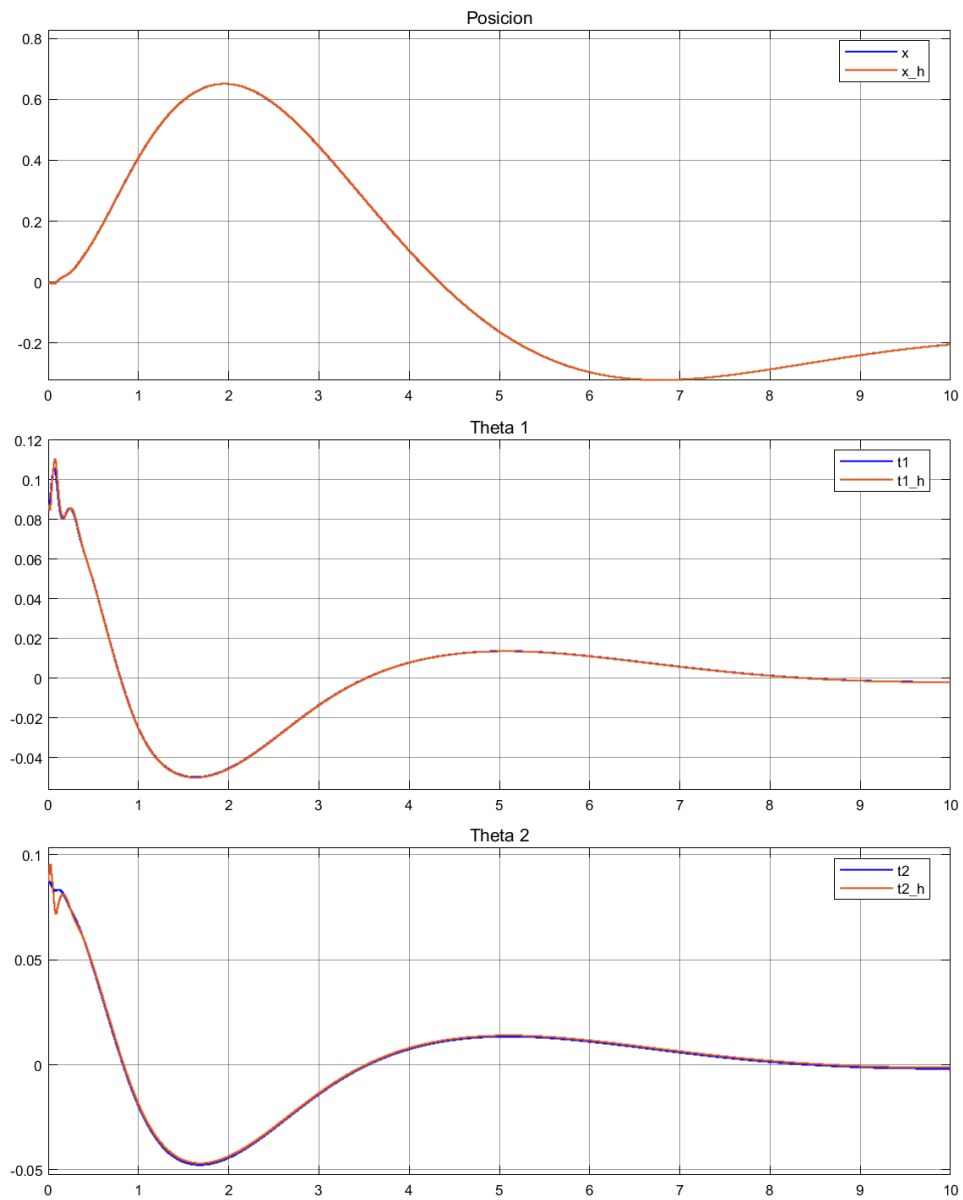


Figura 4.2: Gráfica de ρ , θ_1 y θ_2 de la planta discreta con observador.

5. Matlab

Se separó el modelo continuo del discreto en dos códigos distintos ("PenduloDoble.m" y "PenduloDobleDiscreto.m"). Al correr cada uno, se abre su respectivo archivo de Simulink en caso de no estar abierto. Una vez que se definieron todas las variables necesarias, se ejecuta automáticamente la simulación.

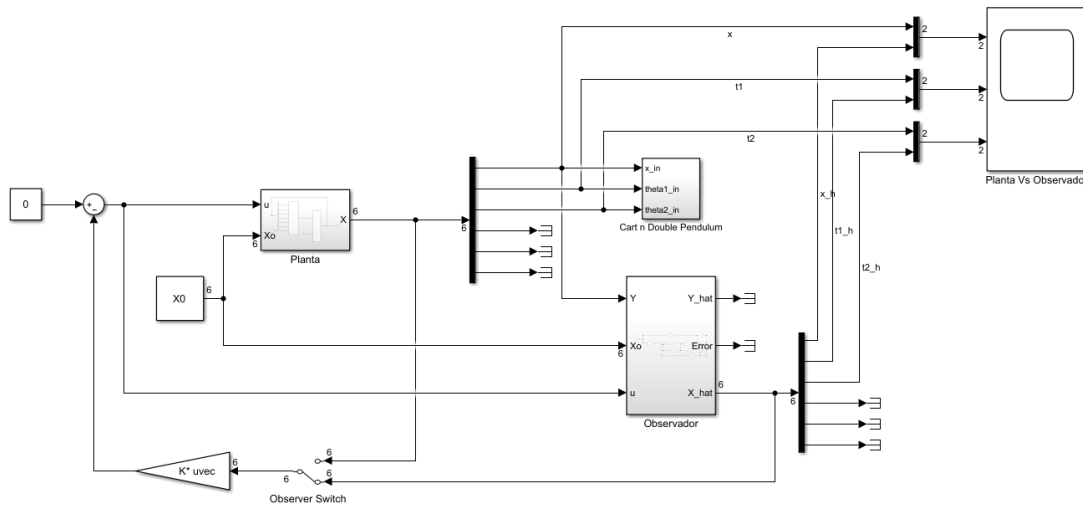


Figura 5.1: Modelo en Simulink de la planta continua.

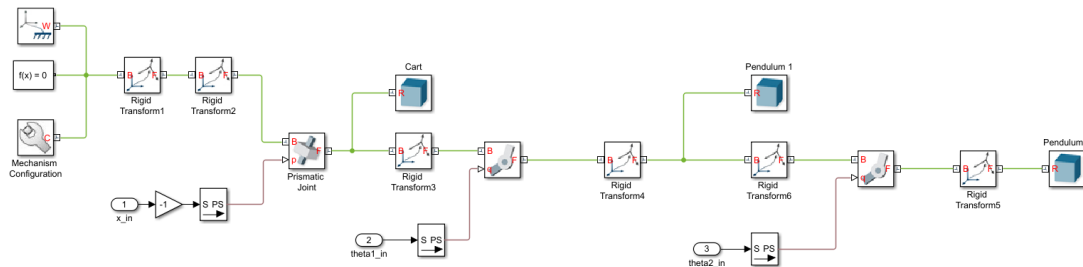


Figura 5.2: Joints y cuerpos rígidos empleados para la simulación.

Se toma las posiciones a través del vector de estado de la planta no lineal. Estos se proporcionan a su vez a los joints del sistema y así se logra visualizar el movimiento del péndulo. Es importante aclarar que se colocó un switch que permite cambiar la realimentación de la plata, pudiendo así elegir entre la realimentación de estados o el observador.

Finalmente, cabe destacar que por una cuestión de practicidad, se definieron 3 variables en el código que no afectan a las ecuaciones del sistema, pero son variables necesarias para la simulación en Simulink y se utilizan únicamente en los joints y cuerpos sólidos. Estas son

- Coeficiente de amortiguamiento del carro: $b = 0 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$
- Longitud del carro: $l = 0.15 \text{ m}$
- Inercia nula: $I_0 = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

6. Referencias

- [1] Ian J. P. Crowe-Wright, Control Theory: The Double Pendulum Inverted. 2018. Disponible en: https://digitalrepository.unm.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1131&context=math_etds [Acceso 19 Febrero 2022].