

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES - ITBA
ESCUELA DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

TRABAJO PRÁCTICO FINAL

Péndulo doble invertido

AUTORES: Lambertucci, Guido Enrique (Leg. N° 58009)
Mechoulam, Alan (Leg. N° 58438)

DOCENTES: Gherisin, Alejandro Simón
Silva Rodrigues, Reurison

22.93 - Control Automatico

BUENOS AIRES

0.0. Contenidos

1	Glosario	2
2	Resumen	3
3	Modelo Teórico	4
3.1	Modelo Físico	4
4	Modelo de Control	5
4.1	Espacio de estados	5
4.2	Controlabilidad y Observabilidad	6
4.3	Realimentación de Estados	6
4.4	Observador	6
4.5	Discretización	6
5	Simulaciones	7
5.1	Modelo de Simscape	7
5.2	Simulink	8
6	Análisis de Resultados	8
6.1	Diferencias entre modelo y simulación	8
6.2	Error	8
7	Conclusiones	8
8	Referencias	8

1. Glosario

Término	Descripción
x_0	Posición horizontal del carrito.
θ_1	Ángulo entre el primer link con la vertical.
θ_2	Ángulo entre el segundo link con la vertical.
m_0	Masa del carrito.
m_1	Masa del primer link del péndulo.
m_2	Masa del segundo link del péndulo..
L_1	Longitud del primer link.
L_2	Longitud del segundo link..
l_1	Distancia entre la base del primer link y su centro de masas.
l_2	Distancia entre la base del segundo link y su centro de masas.
I_1	Momento de inercia del primer link.
I_2	Momento de inercia del segundo link.
g	Constante de aceleración de la gravedad.
$u(t)$	Acción de Control.
Θ	Vector de estados.
Y	Vector de salida del sistema.
$\hat{\Theta}$	Vector de estados estimado.
\hat{Y}	Vector de salida del sistema estimado.
Θ_0	Condición Inicial.
L	Lagrangiano.
$M(\Theta)$	Matriz de influencia de masas/inercia en vector de torques.
$V(\Theta, \dot{\Theta})$	Vector de influencia de términos centrífugos y de Coriolis.
$G(\Theta)$	Vector de influencia de la gravedad.

2. Resumen

En el presente trabajo se realiza el control por realimentación de estados tanto integral, para el caso continuo y discreto con observador, para el doble péndulo invertido.



Figura 2.1: Pendulo doble invertido.

Obteniendo el modelo teórico del mismo a partir de ecuaciones, cotejando dicho modelo con los valores linealizados de la planta implementada en Matlab con la ayuda del framework de Simscape para su simulación. También se realiza un estudio en las diferencias entre dichos modelos, y entre los distintos resultados de los métodos de control. Adicionalmente se calcula si el sistema es en efecto controlable y observable, y si existen condiciones en las cuales esto se ve afectado.

3. Modelo Teórico

3.1 Modelo Físico

El doble péndulo invertido fue modelado como un manipulador Primático-Rotacional-Rotacional.

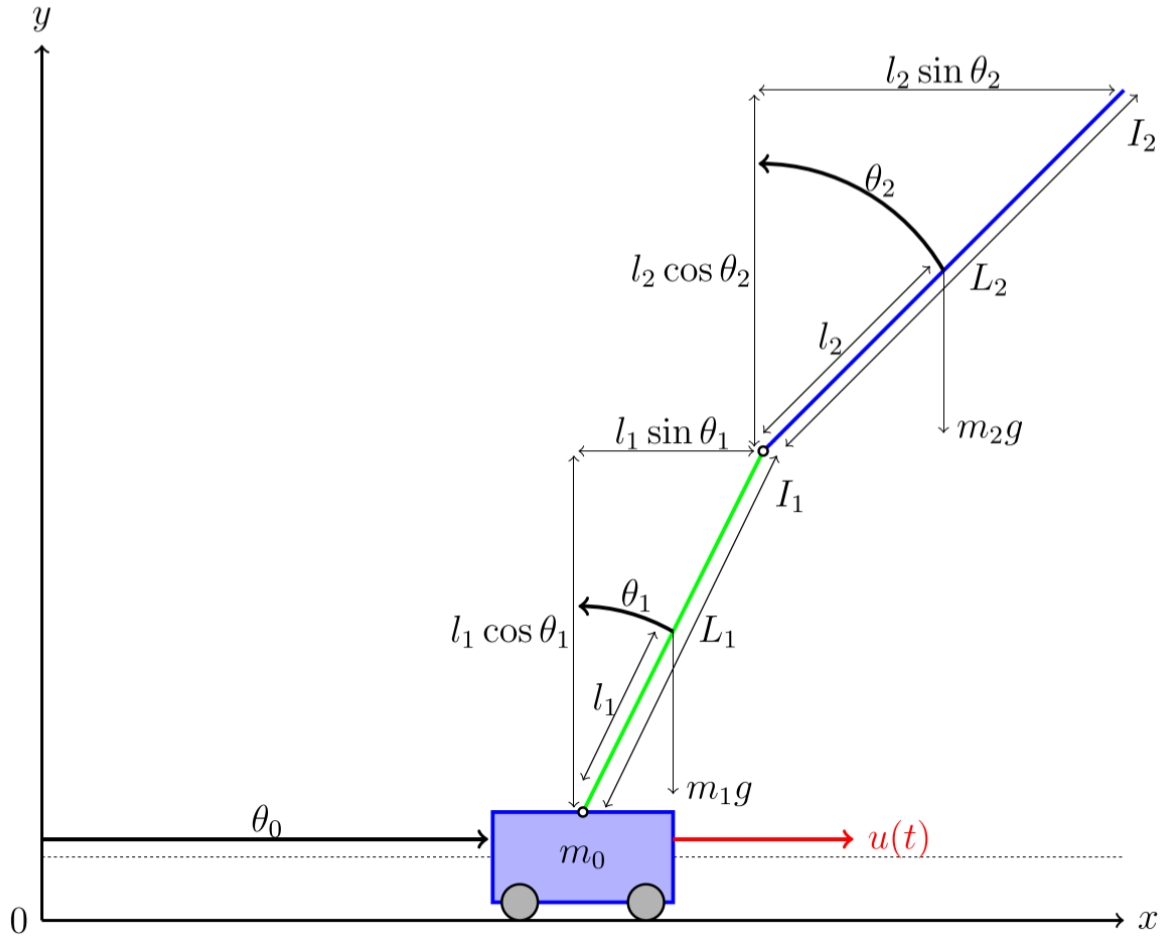


Figura 3.1.1: Modelo teórico del doble péndulo invertido.

Luego utilizando la formulación de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = \tau \quad (1)$$

$$L(\Theta, \dot{\Theta}) = \sum_{i=0}^2 \left(\frac{1}{2} m_i v_{Ci}^T v_{Ci} + \frac{1}{2} I_i \omega_{Ci}^T \omega_{Ci} + u_{refi} - m_i g d_{Ci} \right) \quad (2)$$

Se llega al sistema de segundo orden no lineal:

$$\tau = M(\Theta) \ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) \quad (3)$$

Siendo las matrices:

$$M(\Theta) \ddot{\Theta} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 & m_2 l_2 \cos \theta_2 \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 & m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_2 \cos \theta_2 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 + I_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -(m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & -m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & -m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_1 l_1 + m_2 L_1)g \sin \theta_1 \\ -m_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tau = H \cdot u(t) \quad (7)$$

Si se asume los siguientes valores:

$$l_1 = \frac{1}{2}L_1 \quad l_2 = \frac{1}{2}L_2 \quad I_1 = \frac{1}{12}m_1 L_1^2 \quad I_2 = \frac{1}{12}m_2 L_2^2 \quad (8)$$

Se simplifica a :

$$M(\Theta) \ddot{\Theta} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (\frac{1}{2}m_1 L_1 + m_2) L_1 \cos \theta_1 \frac{1}{2} & m_2 L_2 \cos \theta_2 \\ (\frac{1}{2}m_1 + m_2) L_1 \cos \theta_1 & (\frac{1}{3}m_1 + m_2) L_1^2 & \frac{1}{2}m_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{1}{2}m_2 L_2 \cos \theta_2 & \frac{1}{2}m_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \frac{1}{3}m_2 L_2^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -(\frac{1}{2}m_1 + m_2) L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & -\frac{1}{2}m_2 L_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & -\frac{1}{2}m_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)L_1 g \sin \theta_1 \\ -\frac{1}{2}m_2 g L_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tau = H \cdot u(t) \quad (12)$$

Cabe mencionar que $D(\Theta)$ es una matriz simétrica no-singular, por lo que existe la inversa y también es simétrica.

4. Modelo de Control

4.1 Espacio de estados

Luego de hacer la linealización del sistema :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3g(2m_1^2 + 5m_1 m_2 + 2m_2^2)}{2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & \frac{3gm_1 m_2}{2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3g(4m_1^2 + 9m_1 m_2 + 4m_0 m_1 + 2m_2^2 + 8m_0 m_2)}{2L_1(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & -\frac{9g*(2m_0 m_2 + m_1 m_2)}{2L_1(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9g(2m_0 m_1 + 4m_0 m_2 + 2m_1 m_2 + m_1^2)}{2L_2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & \frac{3g(4m_0 m_1 + 12m_0 m_2 + 4m_1 m_2 + m_1^2)}{2L_2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4m_1 + 3m_2}{4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2} \\ -\frac{3(2m_1 + m_2)}{L_1(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} \\ \frac{2m_2}{L_2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Si se opta por los siguientes valores:

$$m_0 = 5 \text{ Kg} \quad m_1 = 1 \text{ Kg} \quad m_2 = 1 \text{ Kg} \quad L_1 = 1 \text{ m} \quad L_2 = 1.5 \text{ m} \quad g = 9.8 \frac{m}{s^2} \quad (15)$$

Se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3.5757 & 0.3973 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29.7973 & -13.1108 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -26.2216 & 22.5135 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1892 \\ -0.2432 \\ 0.036 \end{bmatrix} \quad (17)$$

4.2 Controlabilidad y Observabilidad

Se define al set de estados alcanzables \mathcal{R}_t en un tiempo t como aquellos estados en los que el sistema se puede encontrar. Por otro lado, se define al subespacio controlable \mathcal{C}_{AB} como aquellos estados a los que se puede forzar el sistema mediante una entrada $u(t)$ apropiada. Se puede probar que para $t > 0$ el set de estados alcanzables \mathcal{R}_t es igual que el subespacio controlable \mathcal{C}_{AB} .

Se dice que el par (A, B) es controlable, y por ende un sistema definido con esas matrices es controlable si la matriz de controlabilidad

$$[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (18)$$

es de rango completo.

Para el caso del péndulo doble, se tiene que

$$[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = \begin{bmatrix} 0 & 0.1892 & 0 & 0.8839 & 0 & 30.4554 \\ 0 & -0.2432 & 0 & -7.7189 & 0 & -324.2311 \\ 0 & 0.0360 & 0 & 7.1876 & 0 & 364.2140 \\ 0.1892 & 0 & 0.8839 & 0 & 30.4554 & 0 \\ -0.2432 & 0 & -7.7189 & 0 & -324.2311 & 0 \\ 0.0360 & 0 & 7.1876 & 0 & 364.2140 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde se puede observar que la matriz es de rango completo, por lo que el sistema es controlable.

Otros dos aspectos importantes del sistema son la detectabilidad y la observabilidad, dado que en la vida real muchas veces no es posible medir todas las variables del sistema.

El estudio de la observabilidad del sistema se basa en comprobar la posibilidad de estimar las variables de estado a partir de la salida. Por otro lado, un estudio más débil pero de igual importancia teórica es la detectabilidad. Un sistema es detectable si todos sus estados no observables son estables. Se puede probar que si el par (C^*, A^*) es controlable, entonces el par (A, C) es observable.

En el caso del problema estudiado, se tiene que, tomando

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

4.3 Realimentación de Estados

4.4 Observador

4.5 Discretización

5. Simulaciones

5.1 Modelo de Simscape

Para lograr mayor apego a la realidad, se decidió utilizar un modelo con fricción obtenido utilizando el framework de Simscape de Simulink, que se pueden observar en las Figuras (5.1.1) y (5.1.2).

Los valores de fricción que se utilizaron para cada joint son de $0.004 \frac{N \cdot s}{m}$, resultando así en las siguientes matrices:

$$A_{simscape} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3.1784 & 0.3973 & -0.0008 & 0.0557 & -0.0681 \\ 0 & 16.6865 & -13.1108 & 0.001 & -0.4646 & 0.8734 \\ 0 & -20.3946 & 35.6243 & -0.0012 & 0.8734 & -1.9842 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$B_{sim scape} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1892 \\ -0.2432 \\ 0.2973 \end{bmatrix} \quad (22)$$

de ahora en más llamadas simplemente A y B. Estas matrices son muy similares a las obtenidas teóricamente, con la excepción más notoria del corrimiento de uno de los dos polos en el origen hacia el semiplano izquierdo.

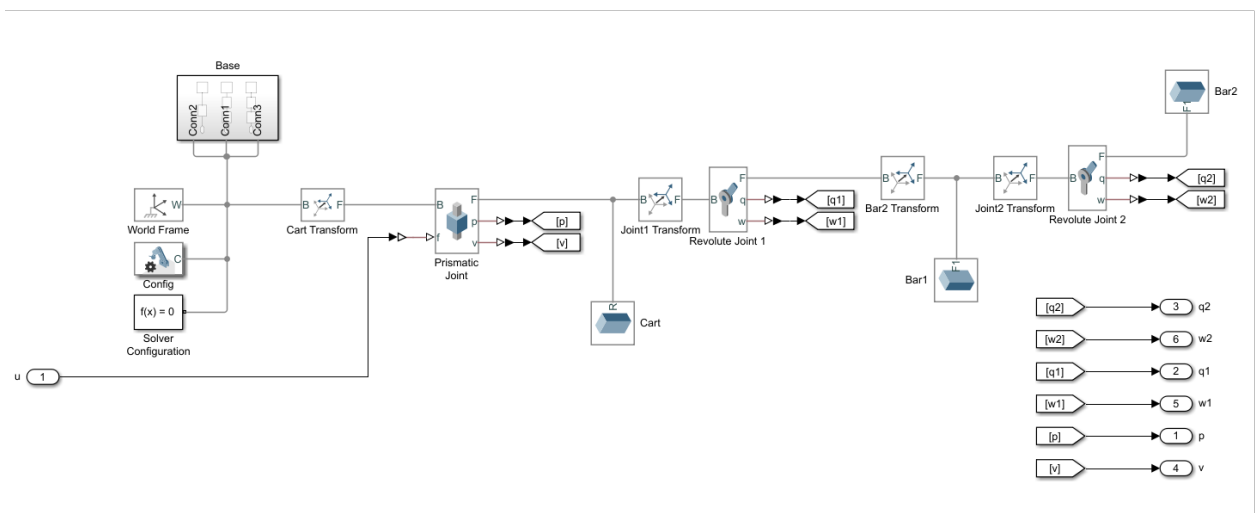


Figura 5.1.1: Bloques de la simulación del péndulo doble realizada con el framework de Simscape en Simulink.

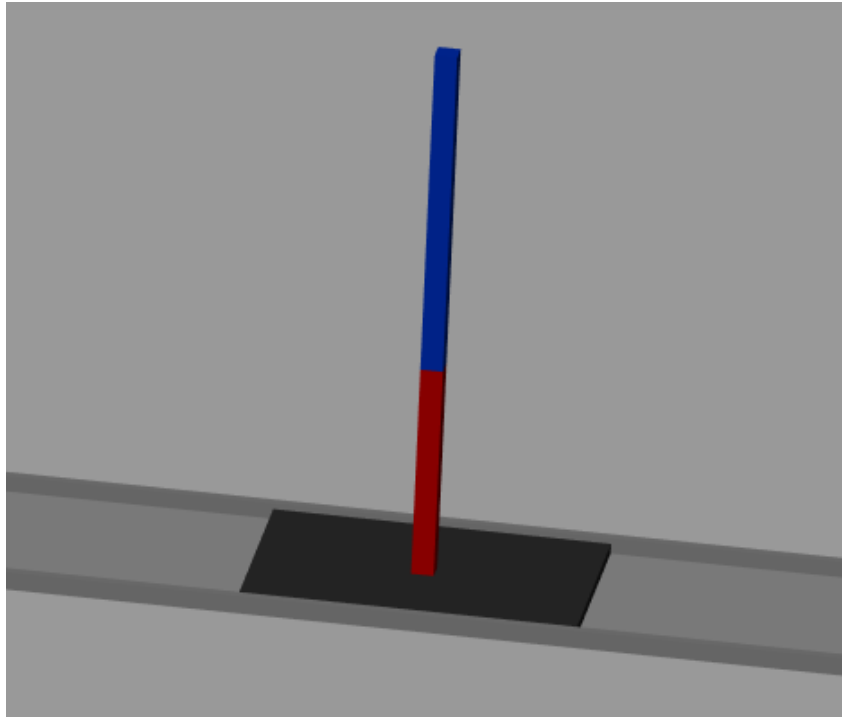


Figura 5.1.2: Simulación del péndulo doble realizada con el framework de Simscape en Simulink.

5.2 Simulink

6. Análisis de Resultados

6.1 Diferencias entre modelo y simulación

6.2 Error

7. Conclusiones

Conclusiones es que esta god

8. Referencias

[1] "Limit switch - Wikipedia", En.wikipedia.org, 2021. [Online]. Disponible: https://en.wikipedia.org/wiki/Limit_switch.

[2] Control Theory: The Double Pendulum Inverted on a Cart
https://digitalrepository.unm.edu/math_etds/132/ .