

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES - ITBA
ESCUELA DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

TRABAJO PRÁCTICO FINAL

Péndulo doble invertido

AUTORES: Lambertucci, Guido Enrique (Leg. N° 58009)
Mechoulam, Alan (Leg. N° 58438)

DOCENTES: Ghersein, Alejandro Simón
Silva Rodrigues, Reurison

22.93 - Control Automático

BUENOS AIRES

0.0. Contenidos

1	Glosario	2
2	Resumen	3
3	Modelo Teórico	4
3.1	Modelo Físico	4
3.2	Espacio de estados	5
3.3	Controlabilidad y Observabilidad	6
3.3.1	Estudio con diagramas de Mason	6
3.3.1.1	Sistema con fricción y mediciones de θ_1, θ_2 y x_0	7
3.3.1.2	Sistema con fricción y mediciones de x_0	9
3.3.1.3	Sistema sin fricción y mediciones de x_0	10
4	Simulación	11
4.1	Modelo de Simscape	11
5	Modelo de Control	13
5.1	Realimentación de Estados	13
5.2	Observador	14
5.3	Discretización	15
6	Análisis de Resultados	17
6.1	Caracterización de la señales de entrada y perturbación	17
6.2	Realimentación de Estados	17
6.3	Observador	18
6.4	Discretización	19
6.5	Comparativa con péndulo invertido simple	21
7	Conclusiones	22
8	Referencias	22

1. Glosario

Término	Descripción
x_0	Posición horizontal del carrito.
θ_1	Ángulo entre el primer link con la vertical.
θ_2	Ángulo entre el segundo link con la vertical.
m_0	Masa del carrito.
m_1	Masa del primer link del péndulo.
m_2	Masa del segundo link del péndulo..
L_1	Longitud del primer link.
L_2	Longitud del segundo link..
l_1	Distancia entre la base del primer link y su centro de masas.
l_2	Distancia entre la base del segundo link y su centro de masas.
I_1	Momento de inercia del primer link.
I_2	Momento de inercia del segundo link.
g	Constante de aceleración de la gravedad.
$u(t)$	Acción de Control.
Θ	Vector de estados.
Y	Vector de salida del sistema.
$\hat{\Theta}$	Vector de estados estimado.
\hat{Y}	Vector de salida del sistema estimado.
Θ_0	Condición Inicial.
L	Lagrangiano.
$M(\Theta)$	Matriz de influencia de masas/inercia en vector de torques.
$V(\Theta, \dot{\Theta})$	Vector de influencia de términos centrífugos y de Coriolis.
$G(\Theta)$	Vector de influencia de la gravedad.

2. Resumen

En el presente trabajo se realiza el control por realimentación de estados tanto integral, para el caso continuo y discreto con observador, para el doble péndulo invertido.

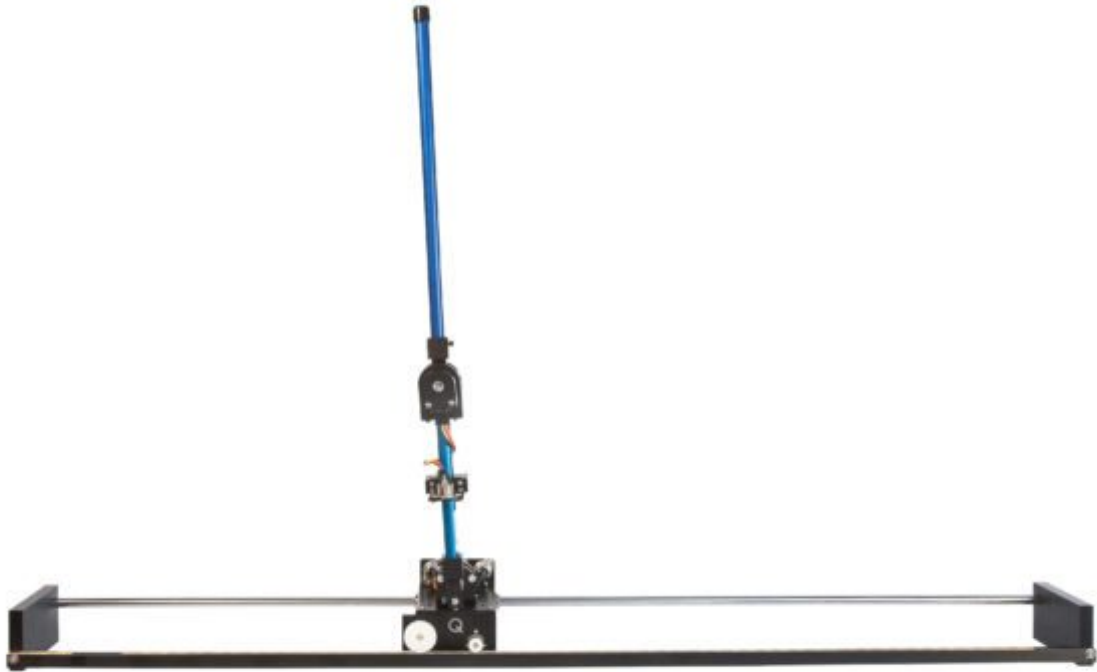


Figura 2.1: Pendulo doble invertido.

Obteniendo el modelo teórico del mismo a partir de ecuaciones, cotejando dicho modelo con los valores linealizados de la planta implementada en Matlab con la ayuda del framework de Simscape para su simulación. También se realiza un estudio en las diferencias entre dichos modelos, y entre los distintos resultados de los métodos de control.

Adicionalmente se calcula si el sistema es en efecto controlable y observable, y si existen condiciones en las cuales esto se ve afectado a través del uso de diagramas de Mason.

3. Modelo Teórico

3.1 Modelo Físico

El doble péndulo invertido fue modelado como un manipulador Prismático-Rotacional-Rotacional.

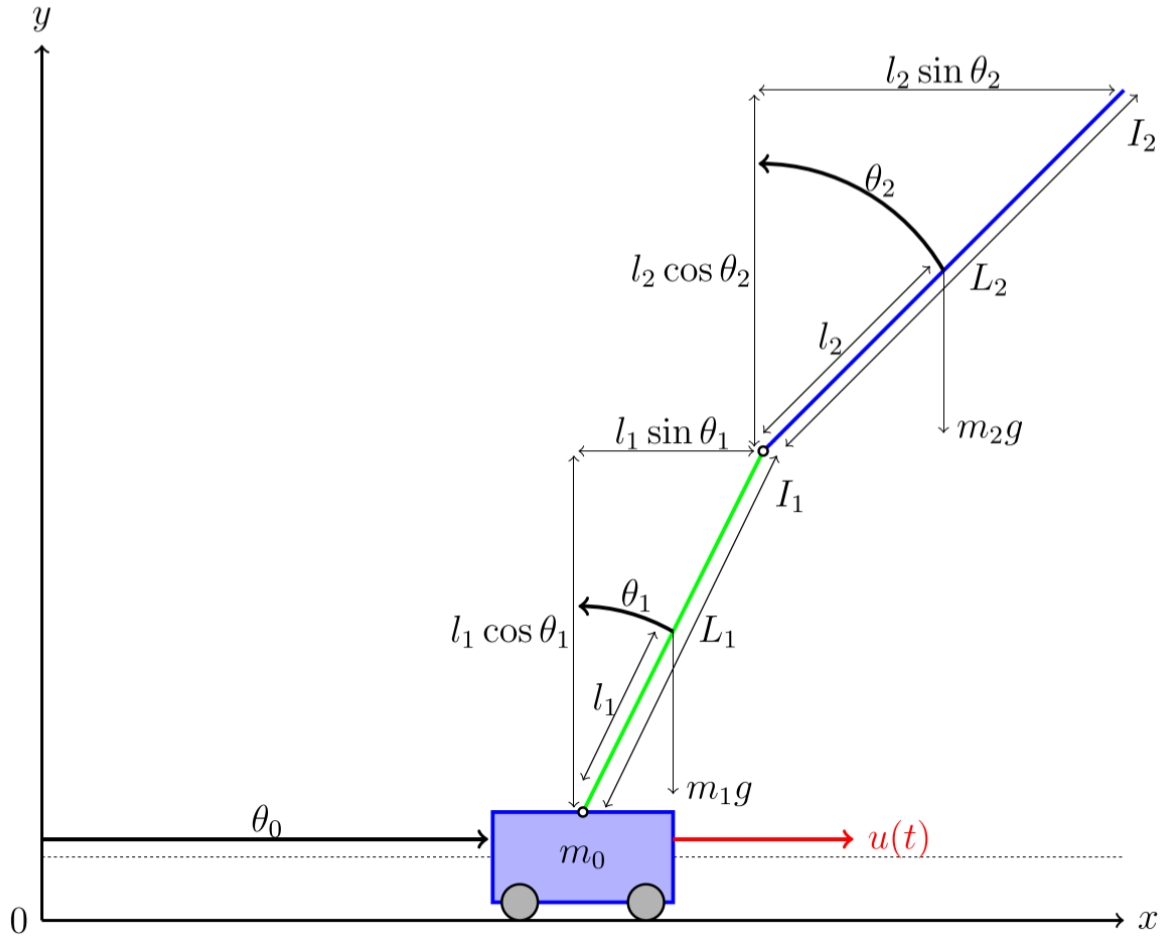


Figura 3.1.1: Modelo teórico del doble péndulo invertido.

Luego utilizando la formulación de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = \tau \quad (1)$$

$$L(\Theta, \dot{\Theta}) = \sum_{i=0}^2 \left(\frac{1}{2} m_i v_{Ci}^T v_{Ci} + \frac{1}{2} I_i \omega_{Ci}^T \omega_{Ci} + u_{refi} - m_i g d_{Ci} \right) \quad (2)$$

Se llega al sistema de segundo orden no lineal:

$$\tau = M(\Theta) \ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) \quad (3)$$

Siendo las matrices:

$$M(\Theta) \ddot{\Theta} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 & m_2 l_2 \cos \theta_2 \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 & m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_2 \cos \theta_2 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 + I_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -(m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & -m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & -m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_1 l_1 + m_2 L_1)g \sin \theta_1 \\ -m_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tau = H \cdot u(t) \quad (7)$$

Si se asume los siguientes valores:

$$l_1 = \frac{1}{2}L_1 \quad l_2 = \frac{1}{2}L_2 \quad I_1 = \frac{1}{12}m_1 L_1^2 \quad I_2 = \frac{1}{12}m_2 L_2^2 \quad (8)$$

Se simplifica a :

$$M(\Theta) \ddot{\Theta} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (\frac{1}{2}m_1 L_1 + m_2) L_1 \cos \theta_1 \frac{1}{2} & m_2 L_2 \cos \theta_2 \\ (\frac{1}{2}m_1 + m_2) L_1 \cos \theta_1 & (\frac{1}{3}m_1 + m_2) L_1^2 & \frac{1}{2}m_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{1}{2}m_2 L_2 \cos \theta_2 & \frac{1}{2}m_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \frac{1}{3}m_2 L_2^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -(\frac{1}{2}m_1 + m_2) L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & -\frac{1}{2}m_2 L_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & -\frac{1}{2}m_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)L_1 g \sin \theta_1 \\ -\frac{1}{2}m_2 g L_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tau = H \cdot u(t) \quad (12)$$

Cabe mencionar que $M(\Theta)$ es una matriz simétrica no-singular, por lo que existe la inversa y también es simétrica.

3.2 Espacio de estados

Luego de hacer la linealización del sistema :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3g(2m_1^2 + 5m_1 m_2 + 2m_2^2)}{2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & \frac{3gm_1 m_2}{2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3g(4m_1^2 + 9m_1 m_2 + 4m_0 m_1 + 2m_2^2 + 8m_0 m_2)}{2L_1(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & -\frac{9g*(2m_0 m_2 + m_1 m_2)}{2L_1(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9g(2m_0 m_1 + 4m_0 m_2 + 2m_1 m_2 + m_1^2)}{2L_2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & \frac{3g(4m_0 m_1 + 12m_0 m_2 + 4m_1 m_2 + m_1^2)}{2L_2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4m_1 + 3m_2}{4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2} \\ -\frac{3(2m_1 + m_2)}{L_1(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} \\ \frac{2m_2}{L_2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Si se opta por los siguientes valores:

$$m_0 = 5 \text{ Kg} \quad m_1 = 1 \text{ Kg} \quad m_2 = 1 \text{ Kg} \quad L_1 = 1 \text{ m} \quad L_2 = 1.5 \text{ m} \quad g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (15)$$

Se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3.5757 & 0.3973 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29.7973 & -13.1108 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -26.2216 & 22.5135 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1892 \\ -0.2432 \\ 0.036 \end{bmatrix} \quad (17)$$

3.3 Controlabilidad y Observabilidad

Se define al set de estados alcanzables \mathcal{R}_t en un tiempo t como aquellos estados en los que el sistema se puede encontrar. Por otro lado, se define al subespacio controlable \mathcal{C}_{AB} como aquellos estados a los que se puede forzar el sistema mediante una entrada $u(t)$ apropiada. Se puede probar que para $t > 0$ el set de estados alcanzables \mathcal{R}_t es igual que el subespacio controlable \mathcal{C}_{AB} . [2]

Se dice que el par (A, B) es controlable, y por ende un sistema definido con esas matrices es controlable si la matriz de controlabilidad

$$[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (18)$$

es de rango completo.

Para el caso del péndulo doble, se tiene que

$$[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = \begin{bmatrix} 0 & 0.1892 & 0 & 0.8839 & 0 & 30.4554 \\ 0 & -0.2432 & 0 & -7.7189 & 0 & -324.2311 \\ 0 & 0.0360 & 0 & 7.1876 & 0 & 364.2140 \\ 0.1892 & 0 & 0.8839 & 0 & 30.4554 & 0 \\ -0.2432 & 0 & -7.7189 & 0 & -324.2311 & 0 \\ 0.0360 & 0 & 7.1876 & 0 & 364.2140 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde se puede observar que la matriz es de rango completo, por lo que el sistema es controlable.

Otros dos aspectos importantes del sistema son la detectabilidad y la observabilidad, dado que en la vida real muchas veces no es posible medir todas las variables del sistema.

El estudio de la observabilidad del sistema se basa en comprobar la posibilidad de estimar las variables de estado a partir de la salida. Por otro lado, un estudio más débil pero de igual importancia teórica es la detectabilidad. Un sistema es detectable si todos sus estados no observables son estables. Se puede probar que si el par (C^*, A^*) es controlable, entonces el par (A, C) es observable.

En el caso del problema estudiado, se tiene que, midiendo la posición del carrito y las dos posiciones angulares, es decir

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

luego

$$[C^* \ A^*C^* \ \dots \ A^{*n-1}C^*] \quad (21)$$

es de rango completo, por lo que el sistema será observable midiendo las variables de estado definidas por la matriz C .

3.3.1 Estudio con diagramas de Mason

En la modelización de la planta como se verá en la sección (4.1) se debate entre el sistema con y sin fricción. En la sección anterior se definió y estudió la observabilidad y controlabilidad del sistema sin fricción. A continuación se realizará el estudio y la comparación de la controlabilidad y observabilidad para ambos sistemas utilizando diagramas de Mason asumiendo un sistema en espacio de estados de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & b & c & d & e \\ 0 & f & g & h & i & j \\ 0 & k & l & m & n & o \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

3.3.1.1 Sistema con fricción y mediciones de θ_1 , θ_2 y x_0

A continuación se presenta el diagrama de Mason para el sistema con fricción y mediciones de θ_1 , θ_2 y x_0 .

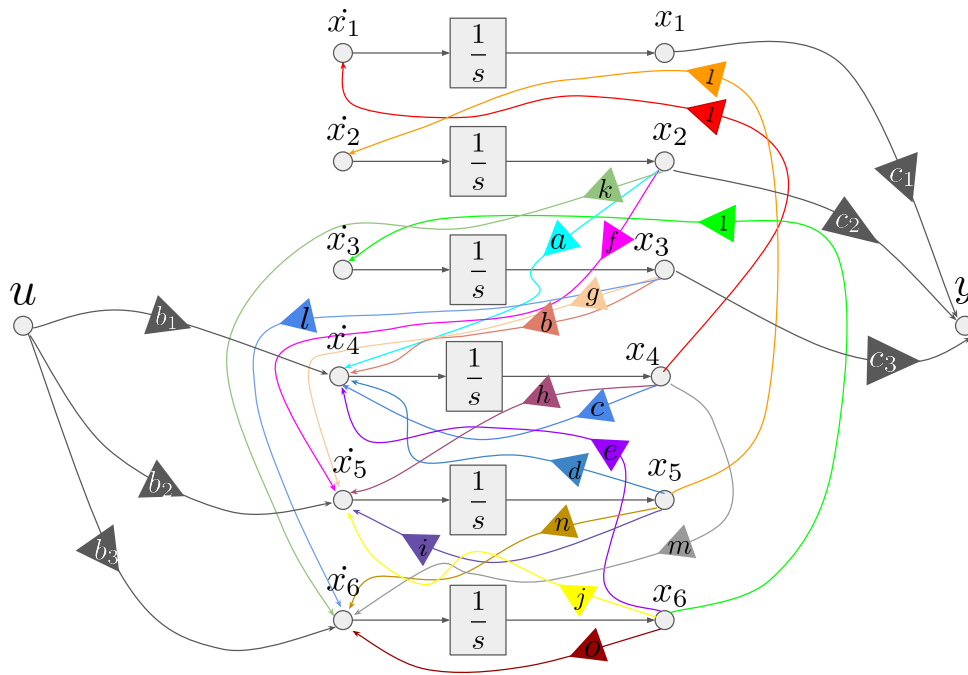


Figura 3.3.1.1.1: Diagrama de Mason del sistema con fricción y mediciones de θ_1 , θ_2 y x_0 .

Para el caso de la controlabilidad, se hará un solo estudio debido a que es el mismo para los 3 casos que observaremos. Se puede arribar desde la entrada a todas las variables de estado con un recorrido corto:

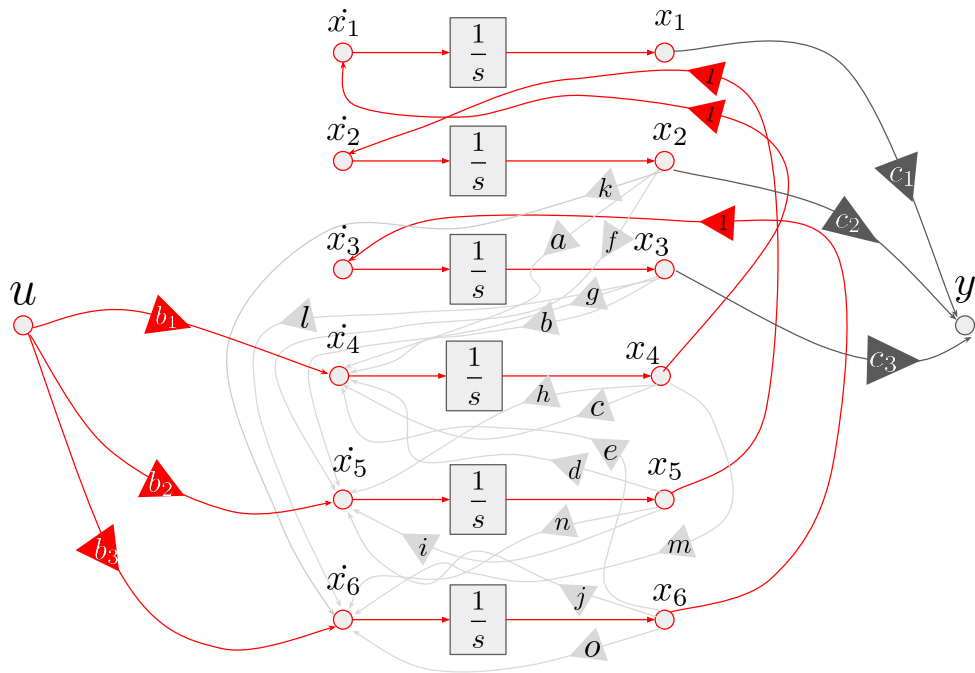


Figura 3.3.1.1.2: Diagrama de Mason marcando la controlabilidad.

por lo que todos los casos estudiados son controlables bajo las condiciones mencionadas. Para el estudio de observabilidad, se desea comprobar que es posible arribar a alguna salida partiendo de la derivada de cada variable de estado. En el caso del sistema con fricción y midiendo la posición y ángulos se nota que el nivel de anidamiento de las variables de estado es de un solo nivel, teniendo que para medir las variables x_6 , x_5 y x_4 , basta con derivar las salidas.

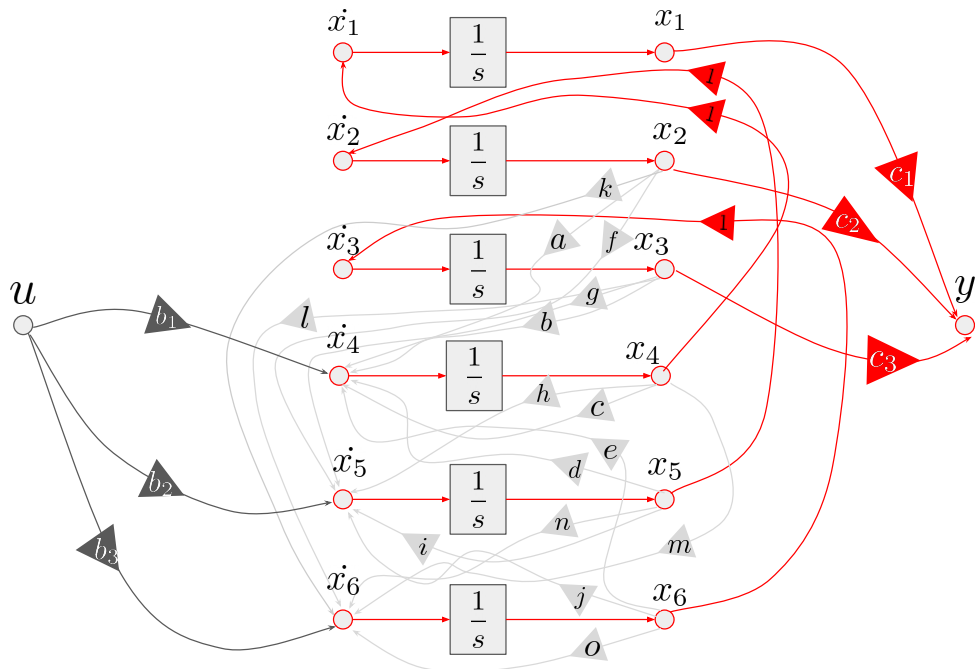


Figura 3.3.1.1.3: Diagrama de Mason marcando la observabilidad.

Por lo que resulta muy claro que el sistema es observable.

3.3.1.2 Sistema con fricción y mediciones de x_0

Aquí se muestra el diagrama de Mason del sistema con fricción y mediciones únicamente de x_0 . Este sistema tiene la particularidad de que al tener una única salida por x_1 llegar a todas las variables de estado se torna mucho más difícil.

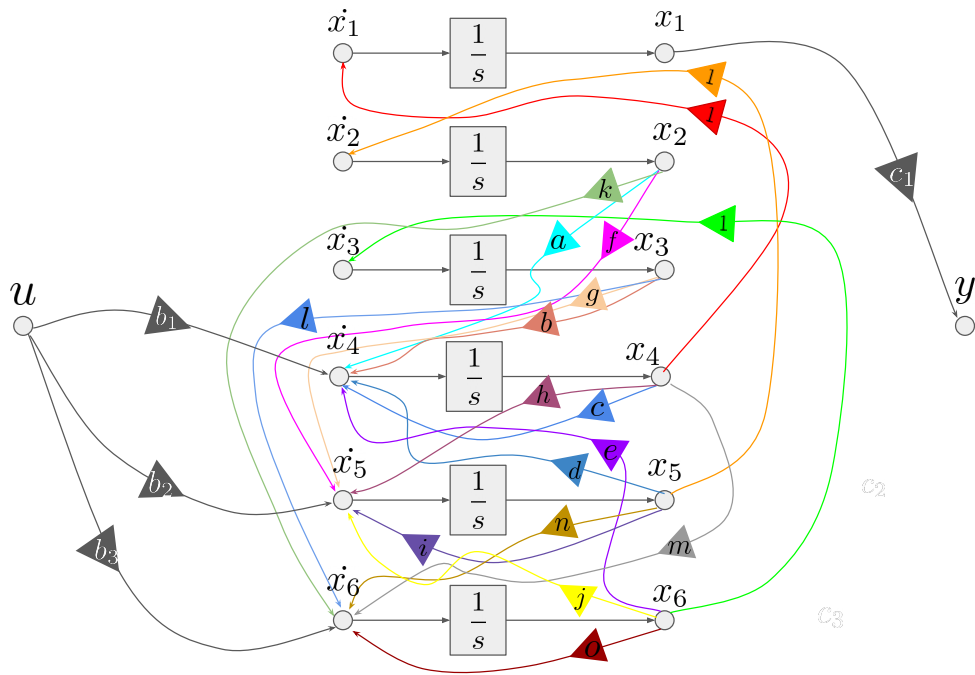


Figura 3.3.1.2.1: Diagrama de Mason del sistema con fricción y mediciones de x_0 .

Aquí veremos el camino que debe realizar cada variable de estado para llegar a la salida, o visto de otra manera, el camino inverso que debe hacer el observador para estimar dichas variables.

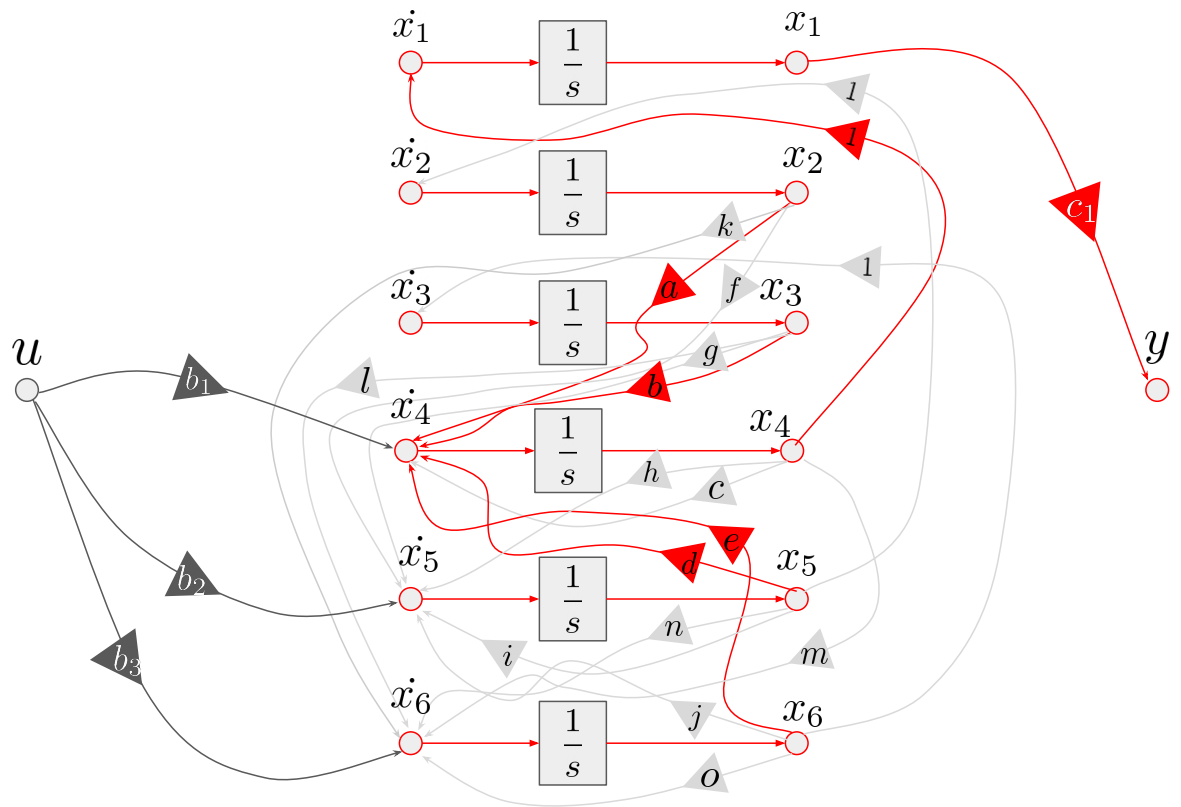


Figura 3.3.1.2.2: Diagrama de Mason marcando observabilidad.

Se observa que en este caso el camino hacia la salida es mucho menos directo. Todas las variables de estado pasan por la variable x_4 por lo que el anidamiento es superior al caso anterior y estimar las variables se torna mas difícil, teniendo en cuenta que ahora están multiplicadas por las ganancias a, b, c, \dots etc. Si bien en el sentido estricto de la palabra el sistema es completamente observable al igual que el anterior, en una aplicación real, teniendo en cuenta las diversas fuentes de ruido, este sistema resulta significativamente mas difícil de observar.

3.3.1.3 Sistema sin fricción y mediciones de x_0

Finalmente observaremos el caso del sistema ideal sin fricción, midiendo únicamente la posición. El diagrama de Mason correspondiente es el siguiente:

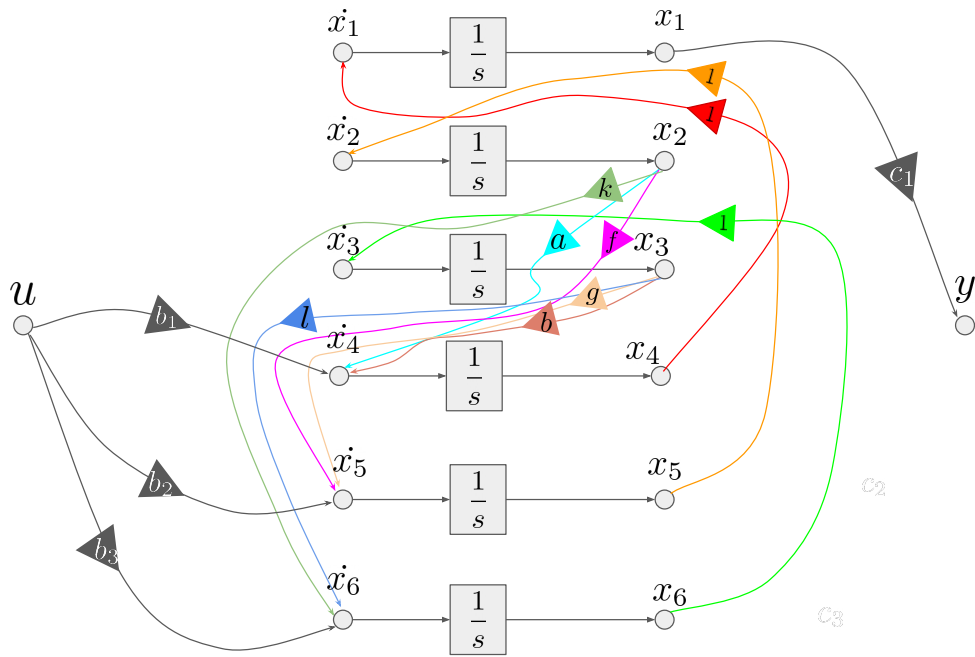


Figura 3.3.1.3.1: Diagrama de Mason del sistema sin fricción y mediciones de x_0 .

En este caso se observa el mayor nivel de anidamiento de los tres casos. Si se intentase replicar a este sistema con un observador midiendo únicamente la posición x_0 en la realidad, menor probabilidad de éxito tendría. Si bien en el caso ideal funcionaría no es así en la realidad.

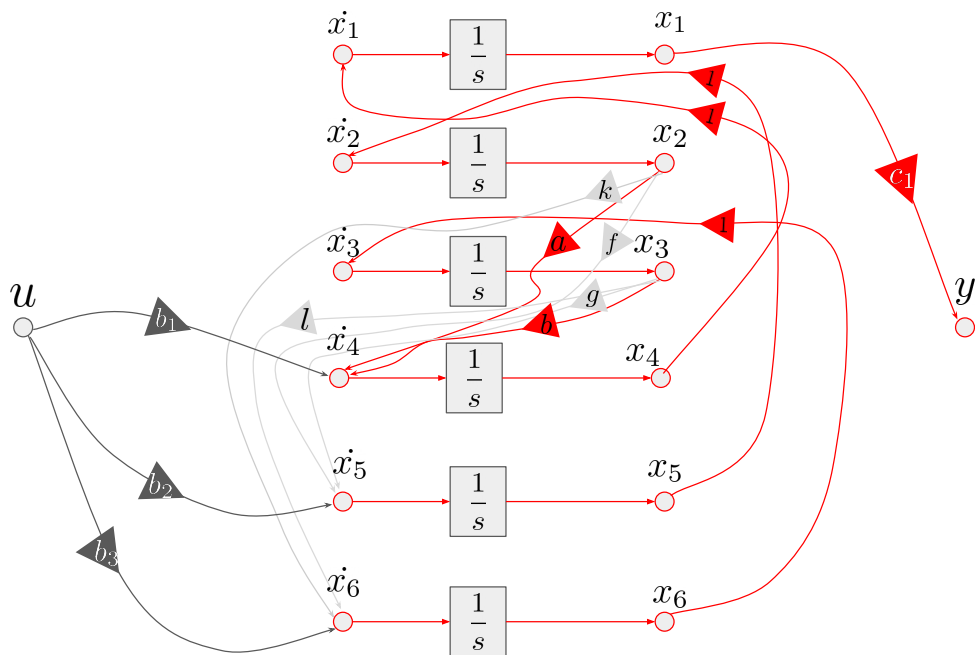


Figura 3.3.1.3.2: Diagrama de Mason marcando observabilidad.

4. Simulación

4.1 Modelo de Simscape

Para lograr mayor apego a la realidad, se decidió utilizar un modelo con fricción obtenido utilizando el framework de Simscape de Simulink, que se pueden observar en las Figuras (4.1.1) y (4.1.2).

Los valores de fricción que se utilizaron para cada joint son de $0.004 \frac{N \cdot s}{m}$, resultando así en las siguientes matrices:

$$A_{simscape} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3.1784 & 0.3973 & -0.0008 & 0.0557 & -0.0681 \\ 0 & 16.6865 & -13.1108 & 0.001 & -0.4646 & 0.8734 \\ 0 & -20.3946 & 35.6243 & -0.0012 & 0.8734 & -1.9842 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$B_{simscape} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1892 \\ -0.2432 \\ 0.2973 \end{bmatrix} \quad (26)$$

de ahora en más llamadas simplemente A y B. Estas matrices son muy similares a las obtenidas teóricamente, con la excepción más notoria del corrimiento de uno de los dos polos en el origen hacia el semiplano izquierdo.

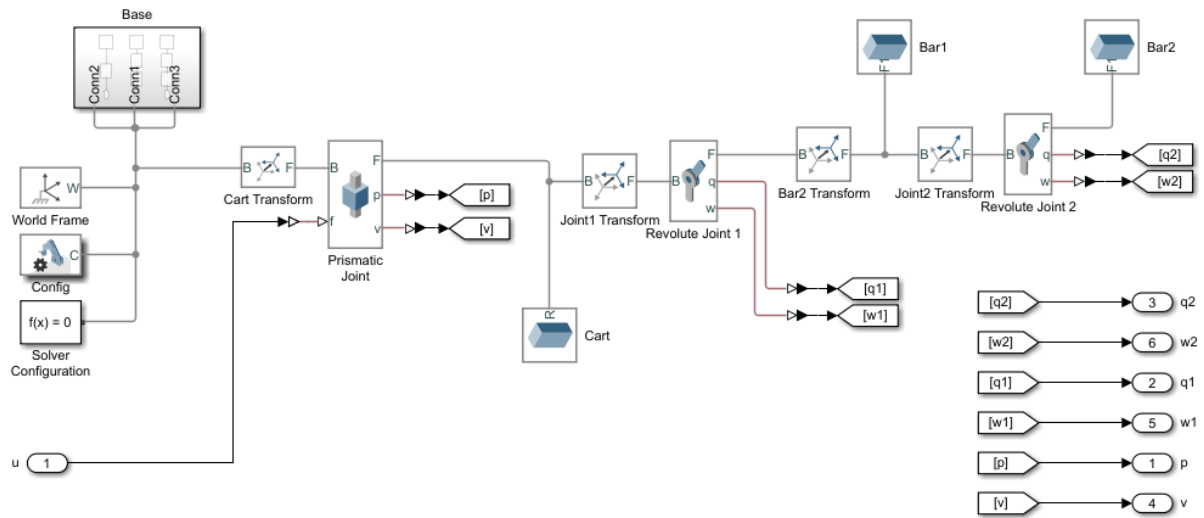


Figura 4.1.1: Bloques de la simulación del péndulo doble realizada con el framework de Simscape en Simulink.

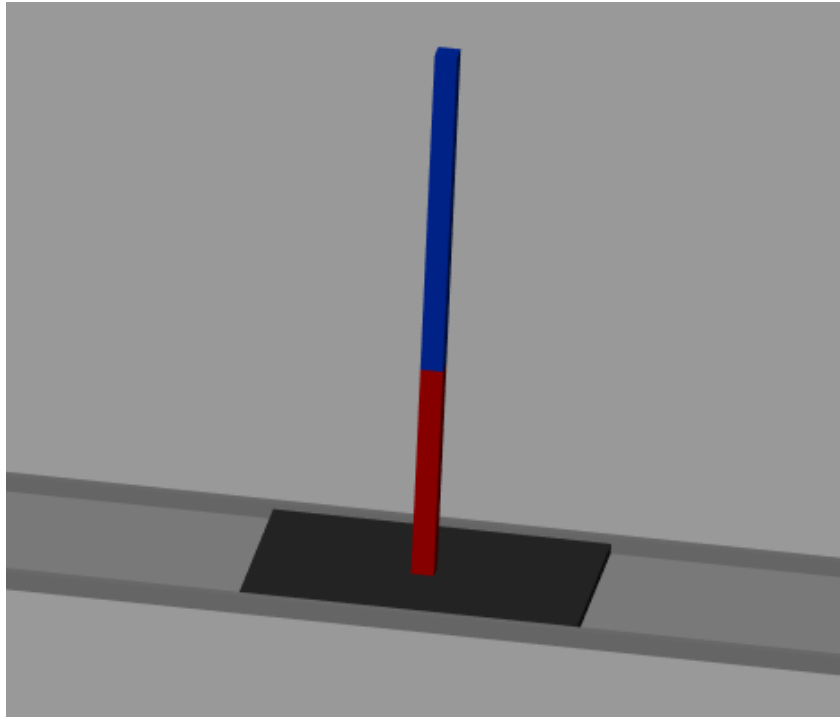


Figura 4.1.2: Simulación del péndulo doble realizada con el framework de Simscape en Simulink.

5. Modelo de Control

5.1 Realimentación de Estados

Partiendo del sistema con fricción de la simulación, se comprueba la controlabilidad de este de manera homogénea a la explicada en la Sección (3.3).

Luego, se realizó la realimentación de estados utilizando el comando *place* de Matlab, colocando a los polos según la Tabla (5.1).

Posición de los Polos					
-3	-2.5	-2.4	-2	-1.9	-1.8

La posición de los polos fue seleccionada de manera tal que el control sea rápido, pero no lo suficientemente rápido como para que la entrada no desvíe demasiado al sistema del punto de trabajo, lo cual haría que este se desestabilice ya que se está utilizando una técnica de control lineal en un sistema intrínsecamente no lineal. Quedando entonces las ganancias de realimentación de la siguiente manera

Ganancias					
2.63	20.81	517.25	7.36	74.88	94.07

Se puede observar que el valor de las ganancias para el realimentador son relativamente bajas, por lo que su implementación en un dsp es más sencillo. Se puede observar en la Figura (5.1.1) la simulación en bloques implementada en Simulink.

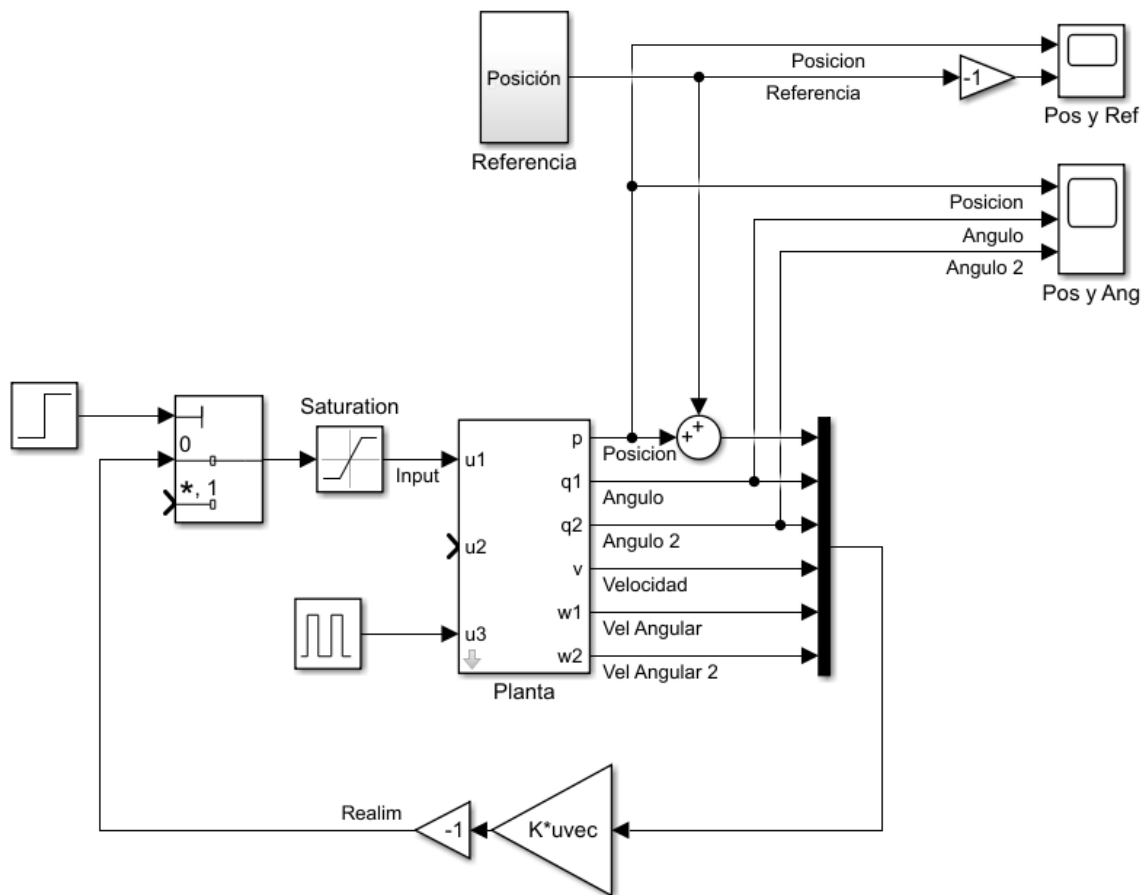


Figura 5.1.1: Simulación en bloques de la realimentación de estados.

5.2 Observador

Como paso siguiente, se implementó una realimentación de estados con observador. Para esto, se comprobó la observabilidad del sistema con fricción, midiendo la posición del carrito y ambas posiciones angulares para estimar las variables del sistema restantes.

Se decidió colocar los polos del observador de manera tal que estos sean mucho más rápidos que los del sistema. Esto es para que la señal error entre las variables de estado y las estimaciones del observador converga rápidamente a cero. De esta manera, quedaron los polos del observador colocados según la Tabla (5.2).

Posición de los Polos del Observador					
-30	-25	-24	-20	-19	-18

por lo que las ganancias del observador quedan

Ganancias					
47.18	3.05	0.88	528.29	60.25	18.75
2.16	43.35	0.73	40	468.40	12.29
0.40	0.80	43.02	6.67	22.13	450.94

Cabe destacar que el valor de las ganancias para el observador son relativamente bajas, por lo que su implementación en un dsp es más sencillo.

Se puede observar en la Figura (5.2.1) la simulación en bloques implementada en Simulink.

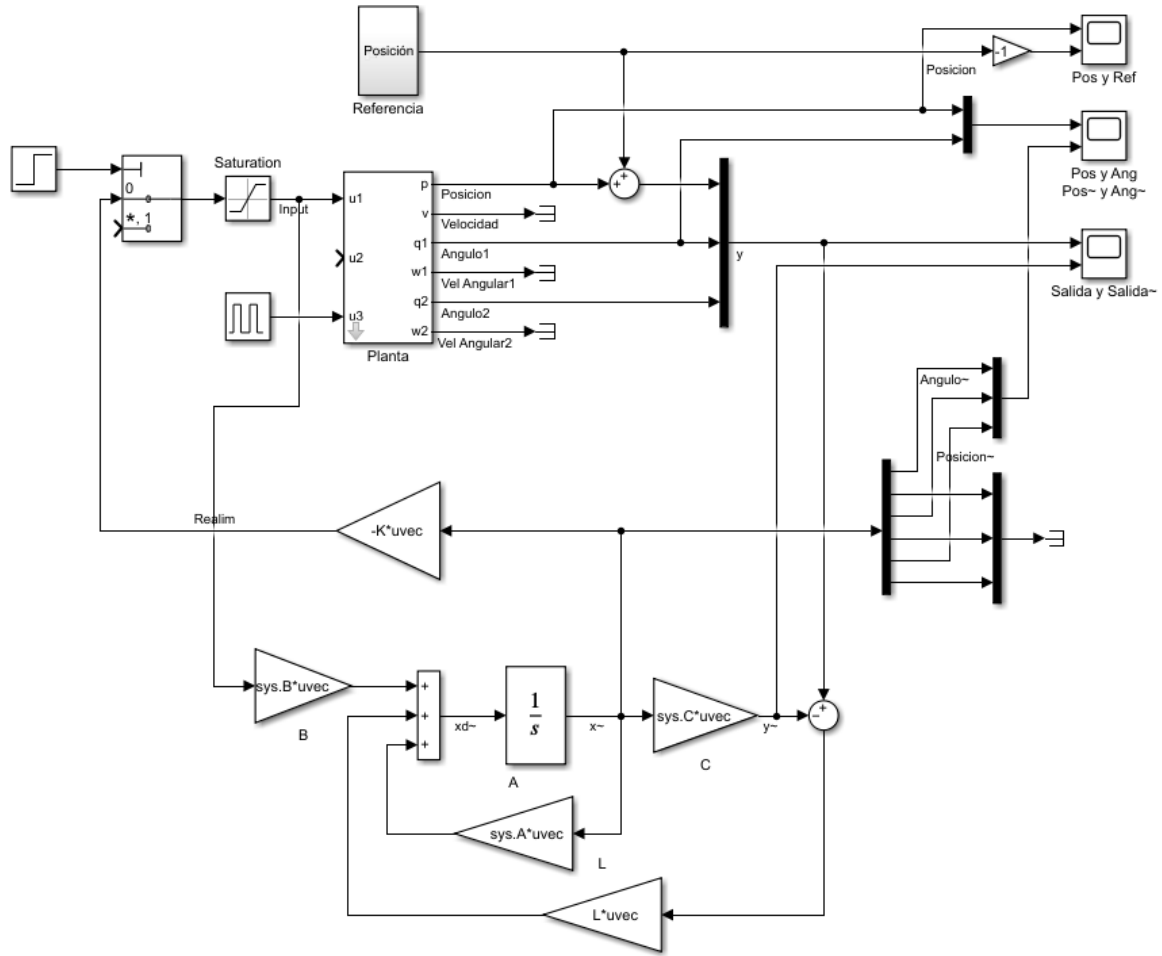


Figura 5.2.1: Simulación en bloques de la realimentación de estados con observador.

5.3 Discretización

Como último paso, se decidió pasar a tiempo discreto el sistema original con fricción utilizando la aproximación de Tustin con una tasa de muestreo de 30 ms. Así quedando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.0010 & 0.0001 & 0.0250 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0051 & -0.0040 & 0 & 0.0249 & 0.0002 \\ 0 & -0.0062 & 1.0109 & 0 & 0.0002 & 0.0245 \\ 0 & -0.0790 & 0.0092 & 1 & 0.0004 & -0.0015 \\ 0 & 0.4114 & -0.3190 & 0 & 0.9938 & 0.0173 \\ 0 & -0.4971 & 0.8714 & 0 & 0.0151 & 0.9624 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ -0.0001 \\ 0.0001 \\ 0.0047 \\ -0.0060 \\ 0.0072 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -0.0005 & 0.0001 & 0.0125 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0026 & -0.0020 & 0 & 0.0125 & 0.0001 \\ 0 & -0.0031 & 1.0054 & 0 & 0.0001 & 0.0123 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.2952 \cdot 10^{-4} \\ -0.3748 \cdot 10^{-4} \\ 0.4529 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (30)$$

para luego realizar la realimentación de estados con observador, midiendo la posición del carrito y las posiciones angulares. Los polos se colocaron de manera siguiente

Posición de los Polos (Plano Z)					
0.9560	0.9531	0.9503	0.9418	0.9389	0.9361
Posición de los Polos del Observador (Plano Z)					
0.4066	0.3829	0.3606	0.3012	0.2837	0.2671

quedando las ganancias de realimentación

Ganancias de Realimentación					
0.7006	-34.1842	339.4479	2.3704	34.6514	56.0334
Ganancias de Realimentación del Observador					
1.4308	0.0081	0.0018	28.9658	0.4876	0.1119
0.0061	1.4318	0.0063	0.3489	29.0873	0.4613
0.0007	0.0071	1.4153	0.0161	0.6202	27.7099

Aquí las ganancias varían entre 10^2 y 10^{-4} por lo que el realizar cuentas con estos en un dsp resulta sencillo. Se puede observar en la Figura (5.3.1) la simulación en bloques implementada en Simulink.

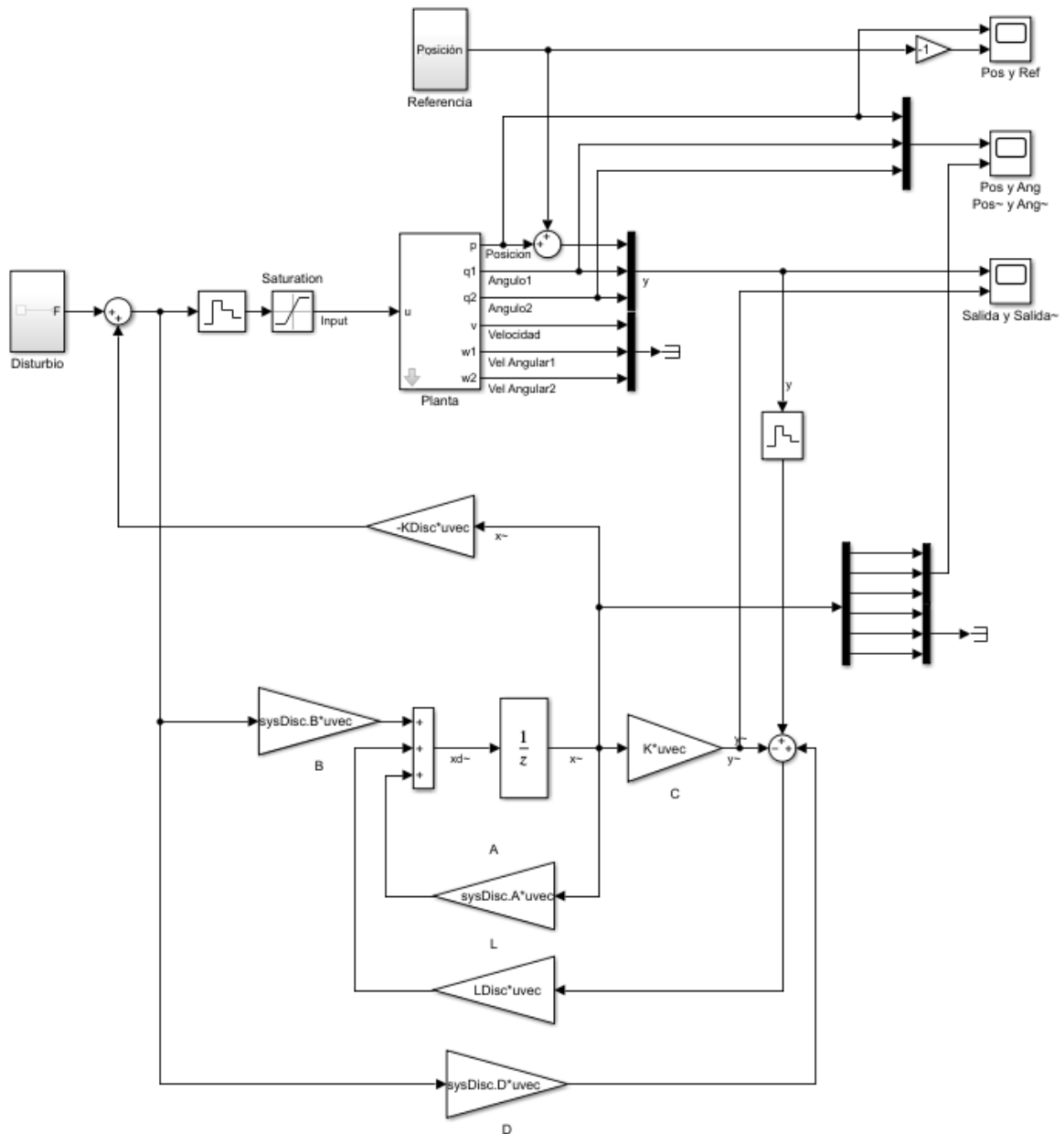


Figura 5.3.1: Simulación en bloques de la realimentación de estados con observador discreto.

6. Análisis de Resultados

6.1 Caracterización de la señales de entrada y perturbación

La señal de entrada es un escalón, el cual cumple la función de referencia a seguir. Apenas esta entra al sistema, atraviesa un filtro pasa bajos para que el cambio de referencia resulte gradual y no desplace al sistema demasiado de su punto de trabajo. Adicionalmente, en el segundo 10 se perturba al péndulo al aplicarle una fuerza sobre el segundo link. Luego en el segundo 18 se procede a desactivar el sistema de control.

6.2 Realimentación de Estados

En las siguientes figuras se puede observar la típica respuesta a un sistema con singularidades en el semiplano derecho. Esta respuesta se ve caracterizada por un pequeño desplazamiento hacia la dirección contraria respecto de la señal de referencia.

Comenzando con la realimentación de estados, en la Figura (6.2.1) se puede observar la respuesta al cambio de referencia y perturbaciones detalladas anteriormente.

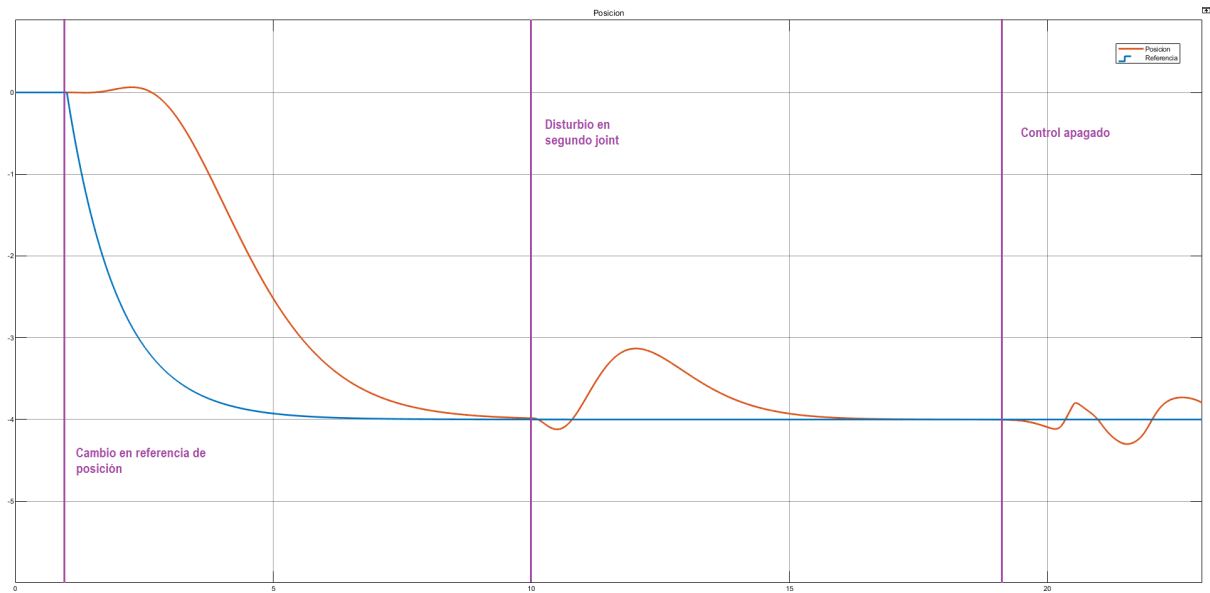


Figura 6.2.1: Comparación entre la posición de referencia (azul) y la posición medida (naranja) para el caso de la realimentación ideal de estados.

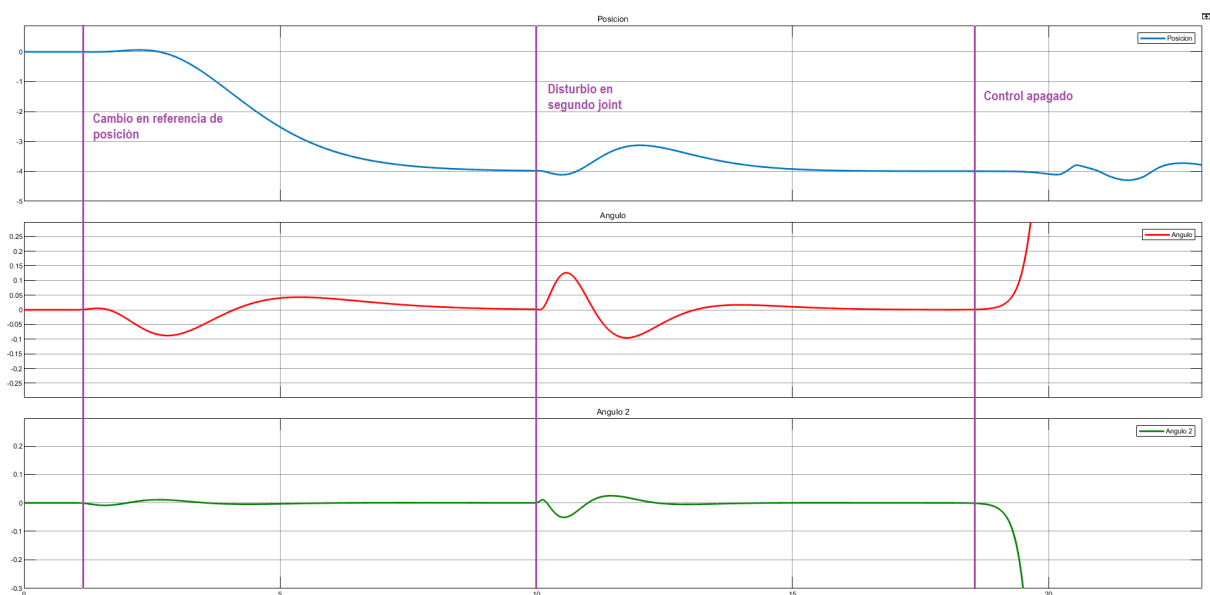


Figura 6.2.2: Posiciones angulares y del carrito del sistema para el caso de la realimentación ideal de estados.

Para el caso de la realimentación ideal de estados, se puede notar una respuesta al escalón filtrado sin sobre-pico para la posición y robustez general ante disturbios.

6.3 Observador

El sistema con observador presenta mayor sobrepico que el sistema anterior, sin embargo los tiempos para volver a la referencia son similares dado que los polos de la realimentación están situados en los mismos lugares que con la realimentación ideal.

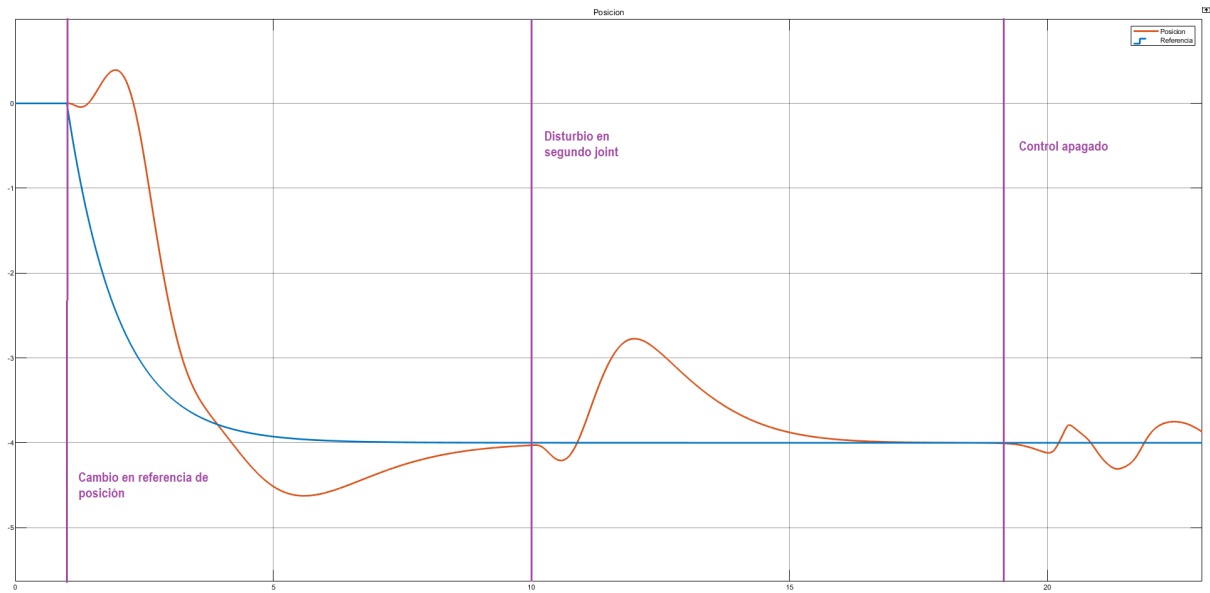


Figura 6.3.1: Comparación entre la posición de referencia (azul) y la posición medida (naranja) para el caso de la realimentación de estados con observador.

En la Figura (6.3.2) se puede observar la comparación entre la estimación y el valor real de las velocidades. Se puede notar que las estimaciones del observador de estados son prácticamente iguales excepto en dos puntos: a la hora de apagar el control, dado que se pierde una de las realimentaciones; y cuando cambia la referencia de posición, ya que el cambio de referencia se realiza en el lazo de realimentación.

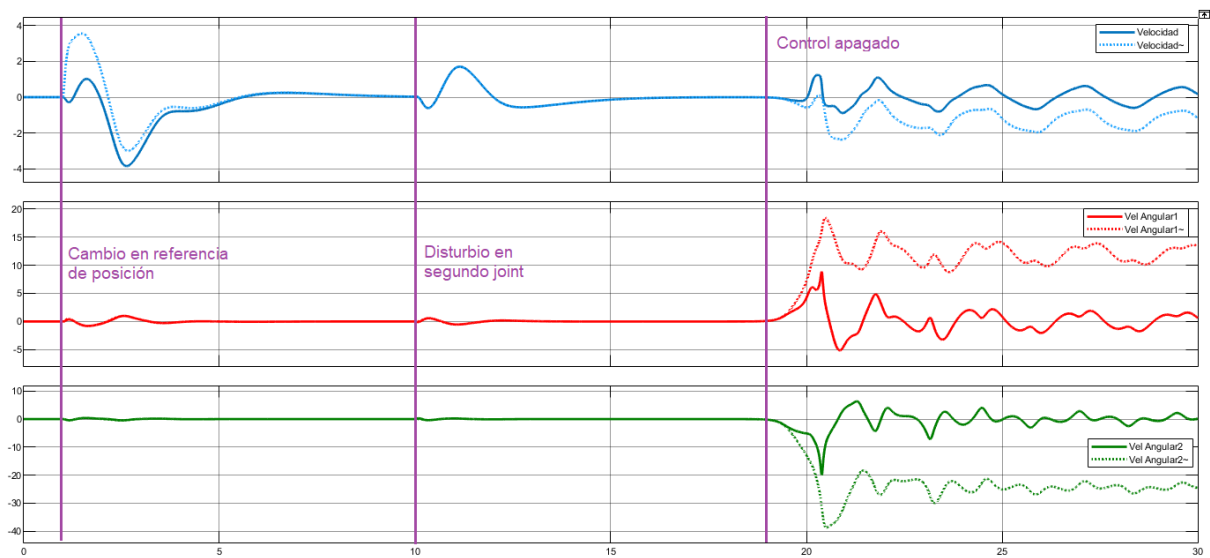


Figura 6.3.2: Posiciones angulares y del carrito del sistema para el caso de la realimentación de estados con observador junto a las estimaciones de las mismas señales del observador en línea punteada.

6.4 Discretización

En el caso discreto se debió ralentizar levemente los polos por efecto de la discretización. Esto se puede notar en la Figura (6.4.1) dado que el sistema tarda más en seguir la referencia.

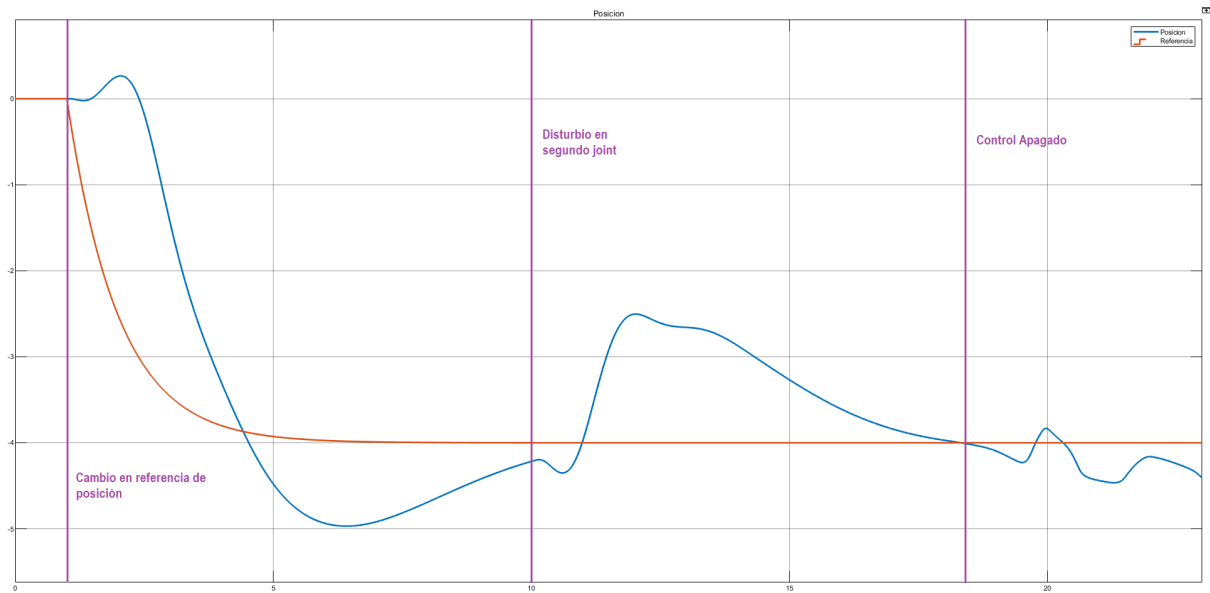


Figura 6.4.1: Comparación entre la posición de referencia (azul) y la posición medida (naranja) para el caso de la realimentación de estados con observador discreto.

En la Figura (6.4.2) se puede observar una comparación entre la posición real medida y aquella estimada utilizando el observador discreto.

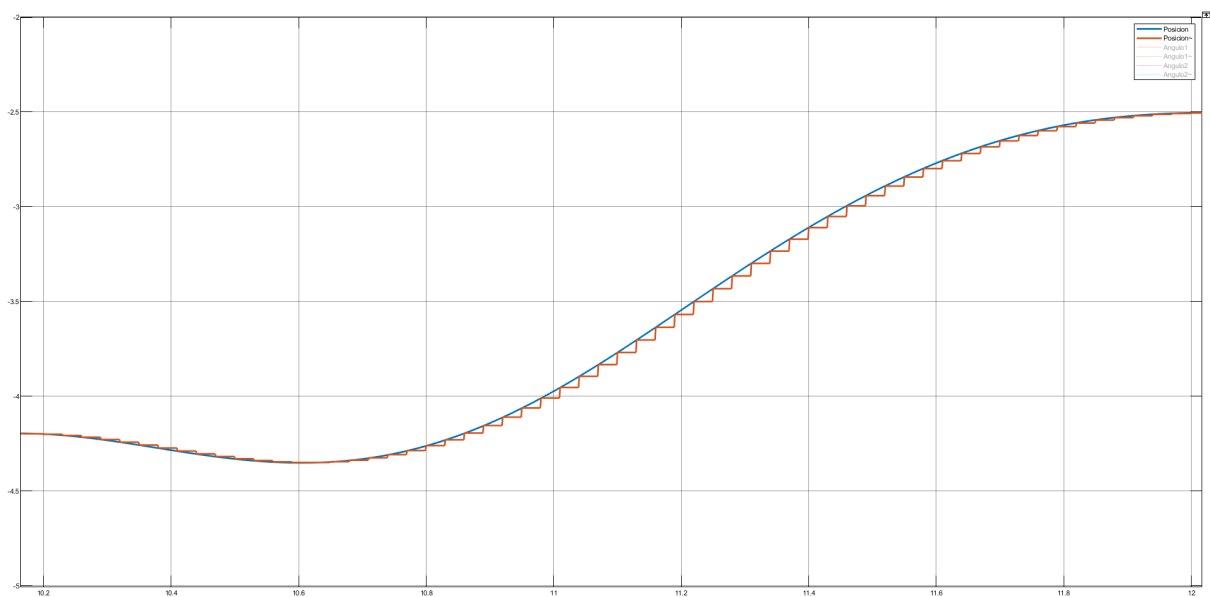


Figura 6.4.2: Detalle de las señales de posición real y posición estimada del observador discreto.

Finalmente, se pueden observar en la Figura (6.4.3) las posiciones tanto del carrito como las angulares comparadas entre el sistema de realimentación ideal de estados y el sistema con observador discreto.

Se puede notar cómo debido al muestreo y su introducción del cero en el semiplano derecho el sistema se vuelve mucho más inestable.

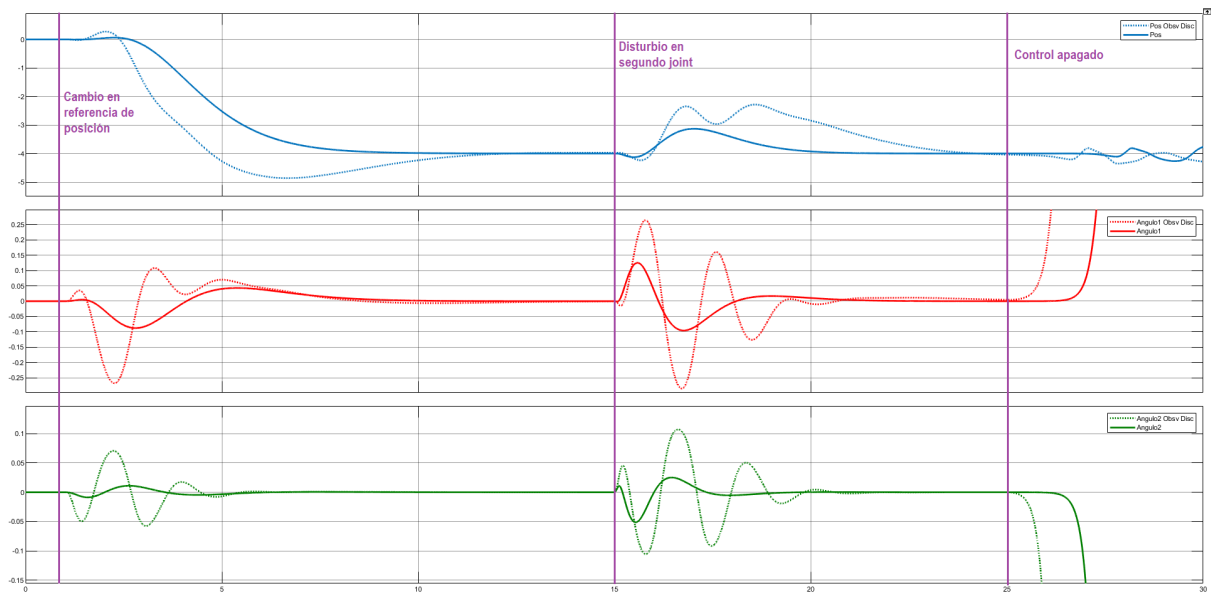
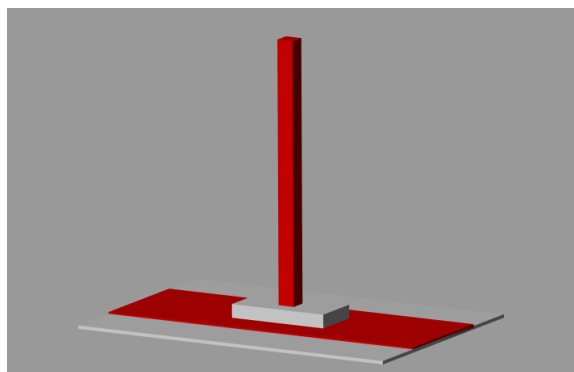


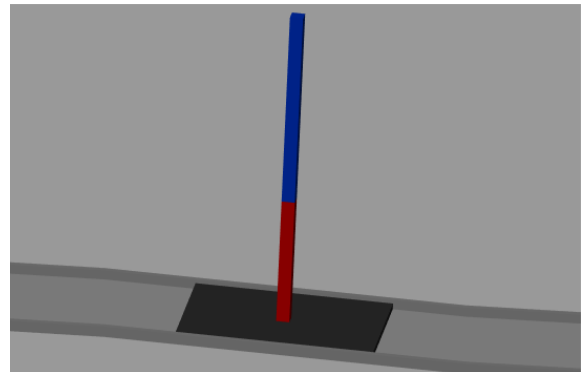
Figura 6.4.3: Comparación de las posiciones angulares y de carrito para los casos de realimentación de estados ideal y realimentación de estados con observador discreto.

6.5 Comparativa con péndulo invertido simple

Para comenzar, la principal diferencia entre estos dos sistemas es la cantidad de variables de estados con los que cuentan ambos sistemas. Esto se debe a que uno es una versión más compleja mecánicamente del otro.



(a) Simple.



(b) Doble.

Figura 6.5.1: Péndulo invertido.

Si bien esto es cierto, si se opta por cambiar los parámetros de segundo, haciendo que el segundo link tenga una longitud que tienda a cero, ambos sistemas coinciden, como es de esperarse.

Ambos sistemas son estrictamente observables en todos los casos de fricción tomando mediciones únicamente de la posición por lo explicado anteriormente. Sin embargo, en la realidad, realizar el control del péndulo doble midiendo únicamente la posición resulta mucho más difícil, que en el caso del péndulo simple. Esto se ve reflejado en las ganancias resultantes de realimentación las cuales son mucho mayores en el caso de la medición únicamente de la posición del carrito, donde además no se pudo implementar un control exitoso. En la Tabla (6.5) se puede observar las ganancias de realimentación del observador para el caso del péndulo doble midiendo únicamente la posición del carrito y midiendo todas las posiciones del sistema.

También resulta curioso que en ambos casos al ampliar el sistema para realizar el control integral con roce y amortiguamiento estos no son controlables.

Ganancias	x1	x2	x3	x4	x5	x6
Solo posición del carrito	100	-70000	1387800	7400	-1238700	7161400
Todas las posiciones (primera fila únicamente)	47.20	3	0.88	528.30	60.25	18.75

7. Conclusiones

En este trabajo fue posible modelar una planta física a través de la formulación de Euler-Lagrange y la linealización del mismo. También se definió la observabilidad y controlabilidad del sistema, tanto mediante cuentas analíticas como por inspección de diagramas de Mason. En el caso de estos, se optó por realizarlos para los tres casos estudiados, siendo estos: el sistema con fricción midiendo posición y ángulos de los joints; el sistema midiendo únicamente la posición; y el caso en el que se mide únicamente la posición y no hay fricción. Adicionalmente se diseñaron lazos de control por realimentación de estados, tanto para el caso continuo como para el caso discreto discreto y también para el caso del sistema ampliado para realizar un control integral. Cabe mencionar que también se implementaron observadores para dichos sistemas exceptuando aquel con control integral.

Se logró diseñar el control para estos casos obteniendo ganancias de realimentación relativamente chicas lo cual favorece la implementación del control en la vida real.

Se aprendió aun más acerca del paquete Simscape y Simulink. Con ayuda de este, se pudo graficar la planta de manera dinámica y estética, realizar una comparativa entre los resultados de las diversas plantas y la velocidad con las que estas alcanzan a la referencia y analizar el error que presenta el observador comparado con el sistema realimentado idealmente.

Finalmente se realizó una pequeña comparativa entre el problema del doble péndulo invertido con carrito y el péndulo invertido con carrito simple.

8. Referencias

- [1] Control Theory: The Double Pendulum Inverted on a Cart
https://digitalrepository.unm.edu/math_etds/132/ .
- [2] G. Dullerud and F. Paganini, A course in robust control theory. New York, NY: Springer, 2005.
- [3] Norman S. Nise Control Systems Engineering 8th Edition