

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES - ITBA  
ESCUELA DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

# TRABAJO PRÁCTICO FINAL

## Péndulo doble invertido

AUTORES: Lambertucci, Guido Enrique (Leg. N° 58009)  
Mechoulam, Alan (Leg. N° 58438)

DOCENTES: Ghersein, Alejandro Simón  
Silva Rodrigues, Reurison

22.93 - Control Automatico

BUENOS AIRES

## 0.0. Contenidos

<b>1</b>	<b>Glosario</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Modelo Teórico</b>	<b>4</b>
3.1	Modelo Físico	4
<b>4</b>	<b>Modelo de Control</b>	<b>5</b>
4.1	Espacio de estados	5
4.2	Controlabilidad y Observabilidad	6
4.3	Realimentación de Estados	6
4.4	Observador	6
4.5	Discretización	6
<b>5</b>	<b>Simulaciones</b>	<b>6</b>
5.1	Modelo de Simscape	6
5.2	Simulink	6
<b>6</b>	<b>Análisis de Resultados</b>	<b>6</b>
6.1	Diferencias entre modelo y simulación	6
6.2	Error	6
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>6</b>
<b>8</b>	<b>Referencias</b>	<b>6</b>

## 1. Glosario

Término	Descripción
$x_0$	Posición horizontal del carrito.
$\theta_1$	Ángulo entre el primer link con la vertical.
$\theta_2$	Ángulo entre el segundo link con la vertical.
$m_0$	Masa del carrito.
$m_1$	Masa del primer link del péndulo.
$m_2$	Masa del segundo link del péndulo..
$L_1$	Longitud del primer link.
$L_2$	Longitud del segundo link..
$l_1$	Distancia entre la base del primer link y su centro de masas.
$l_2$	Distancia entre la base del segundo link y su centro de masas.
$I_1$	Momento de inercia del primer link.
$I_2$	Momento de inercia del segundo link.
$g$	Constante de aceleración de la gravedad.
$u(t)$	Acción de Control.
$\Theta$	Vector de estados.
$Y$	Vector de salida del sistema.
$\hat{\Theta}$	Vector de estados estimado.
$\hat{Y}$	Vector de salida del sistema estimado.
$\Theta_0$	Condición Inicial.
$L$	Lagrangiano.
$M(\Theta)$	Matriz de influencia de masas/inercia en vector de torques.
$V(\Theta, \dot{\Theta})$	Vector de influencia de términos centrífugos y de Coriolis.
$G(\Theta)$	Vector de influencia de la gravedad.

## 2. Resumen

En el presente trabajo se realiza el control por realimentación de estados tanto integral, para el caso continuo y discreto con observador, para el doble péndulo invertido.

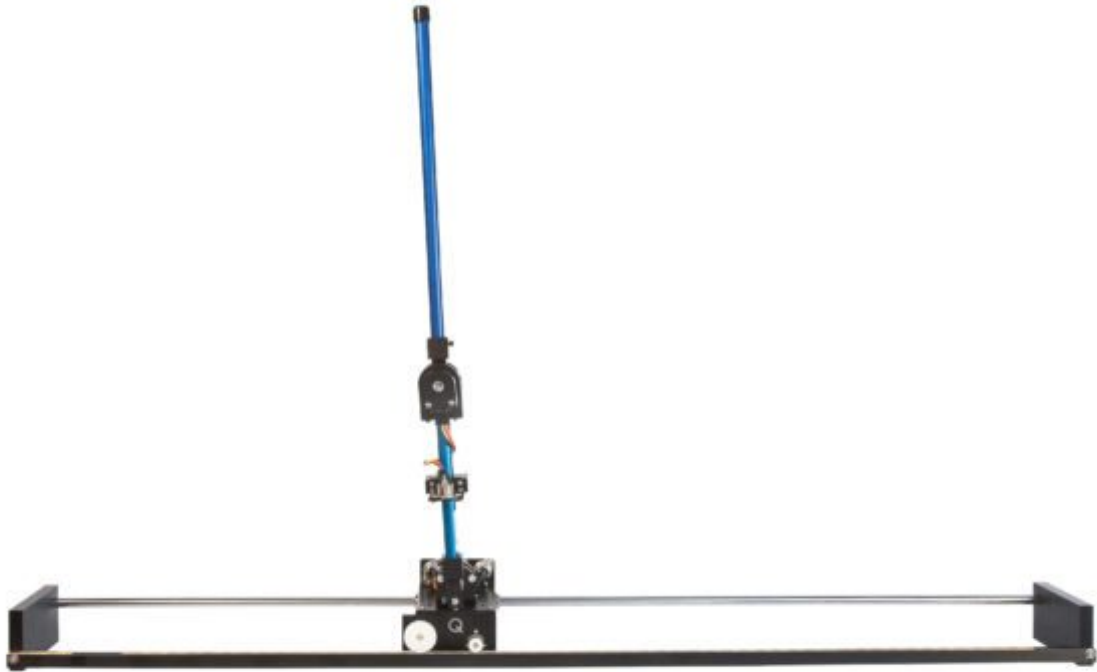


Figura 2.1: Pendulo doble invertido.

Obteniendo el modelo teórico del mismo a partir de ecuaciones, cotejando dicho modelo con los valores linealizados de la planta implementada en Matlab con la ayuda del framework de Simscape para su simulación. También se realiza un estudio en las diferencias entre dichos modelos, y entre los distintos resultados de los métodos de control. Adicionalmente se calcula si el sistema es en efecto controlable y observable, y si existen condiciones en las cuales esto se ve afectado.

### 3. Modelo Teórico

#### 3.1 Modelo Físico

El doble péndulo invertido fue modelado como un manipulador Primático-Rotacional-Rotacional.

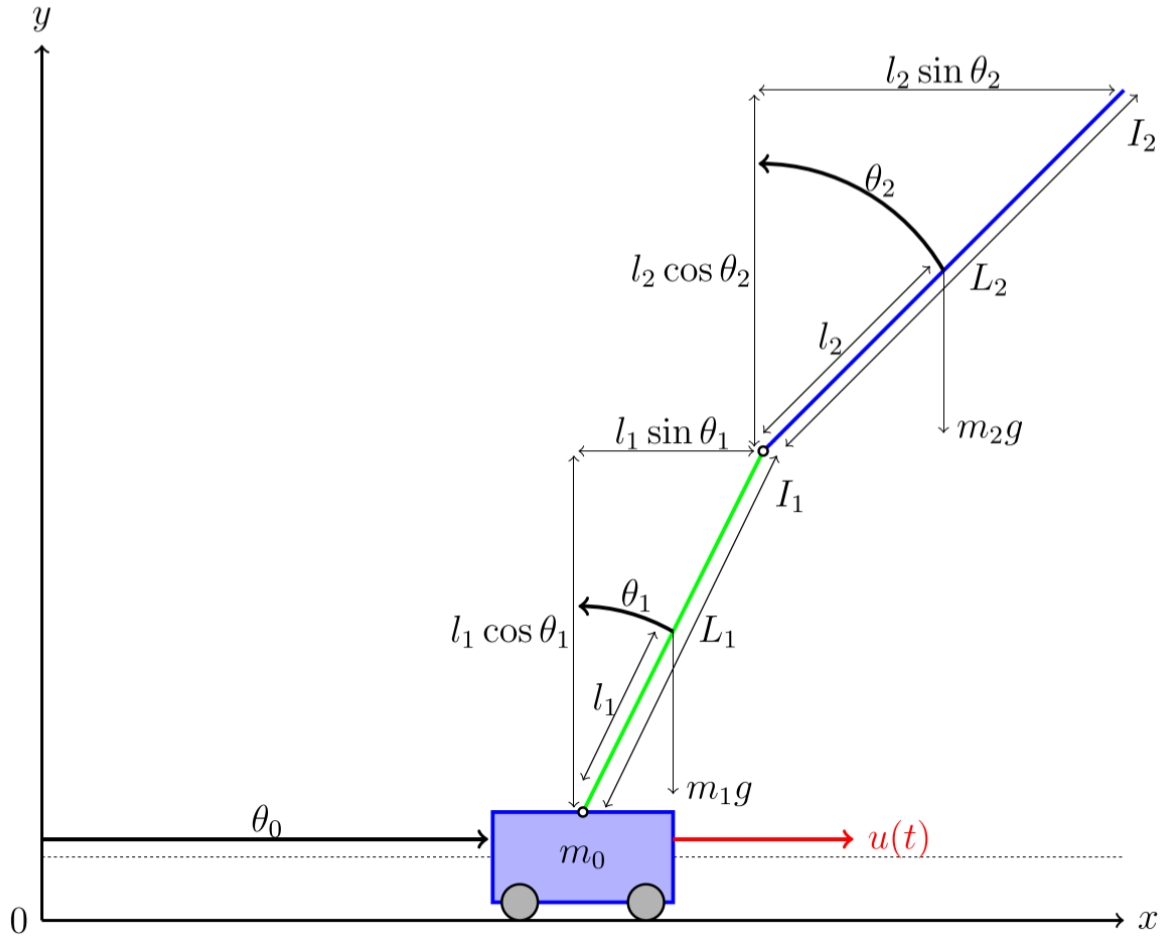


Figura 3.1.1: Modelo teórico del doble péndulo invertido.

Luego utilizando la formulación de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = \tau \quad (1)$$

$$L(\Theta, \dot{\Theta}) = \sum_{i=0}^2 \left( \frac{1}{2} m_i v_{Ci}^T v_{Ci} + \frac{1}{2} I_i \omega_{Ci}^T \omega_{Ci} + u_{refi} - m_i g d_{Ci} \right) \quad (2)$$

Se llega al sistema de segundo orden no lineal:

$$\tau = M(\Theta) \ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) \quad (3)$$

Siendo las matrices:

$$M(\Theta) \ddot{\Theta} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 & m_2 l_2 \cos \theta_2 \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 & m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_2 \cos \theta_2 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 + I_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -(m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & -m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & -m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_1 l_1 + m_2 L_1)g \sin \theta_1 \\ -m_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tau = H \cdot u(t) \quad (7)$$

Si se asume los siguientes valores:

$$l_1 = \frac{1}{2}L_1 \quad l_2 = \frac{1}{2}L_2 \quad I_1 = \frac{1}{12}m_1 L_1^2 \quad I_2 = \frac{1}{12}m_2 L_2^2 \quad (8)$$

Se simplifica a :

$$M(\Theta) \ddot{\Theta} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (\frac{1}{2}m_1 L_1 + m_2) L_1 \cos \theta_1 \frac{1}{2} & m_2 L_2 \cos \theta_2 \\ (\frac{1}{2}m_1 + m_2) L_1 \cos \theta_1 & (\frac{1}{3}m_1 + m_2) L_1^2 & \frac{1}{2}m_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{1}{2}m_2 L_2 \cos \theta_2 & \frac{1}{2}m_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \frac{1}{3}m_2 L_2^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -(\frac{1}{2}m_1 + m_2) L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & -\frac{1}{2}m_2 L_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & -\frac{1}{2}m_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)L_1 g \sin \theta_1 \\ -\frac{1}{2}m_2 g L_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tau = H \cdot u(t) \quad (12)$$

Cabe mencionar que  $D(\Theta)$  es una matriz simétrica no-singular, por lo que existe la inversa y también es simétrica.

## 4. Modelo de Control

### 4.1 Espacio de estados

Luego de hacer la linealización del sistema :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3g(2m_1^2 + 5m_1 m_2 + 2m_2^2)}{2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & \frac{3gm_1 m_2}{2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3g(4m_1^2 + 9m_1 m_2 + 4m_0 m_1 + 2m_2^2 + 8m_0 m_2)}{2L_1(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & -\frac{9g*(2m_0 m_2 + m_1 m_2)}{2L_1(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9g(2m_0 m_1 + 4m_0 m_2 + 2m_1 m_2 + m_1^2)}{2L_2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & \frac{3g(4m_0 m_1 + 12m_0 m_2 + 4m_1 m_2 + m_1^2)}{2L_2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4m_1 + 3m_2}{4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2} \\ -\frac{3(2m_1 + m_2)}{L_1(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} \\ \frac{2m_2}{L_2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Si se opta por los siguientes valores:

$$m_0 = 5 \text{ Kg} \quad m_1 = 1 \text{ Kg} \quad m_2 = 1 \text{ Kg} \quad L_1 = 1 \text{ m} \quad L_2 = 1.5 \text{ m} \quad g = 9.8 \frac{m}{s^2} \quad (15)$$

Se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3.5757 & 0.3973 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29.7973 & -13.1108 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -26.2216 & 22.5135 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1892 \\ -0.2432 \\ 0.036 \end{bmatrix} \quad (17)$$

## 4.2 Controlabilidad y Observabilidad

Hablar de alcanzabilidad detectabilidad Observabilidad controlabilidad Test PBH

### 4.3 Realimentación de Estados

### 4.4 Observador

### 4.5 Discretización

## 5. Simulaciones

### 5.1 Modelo de Simscape

### 5.2 Simulink

## 6. Análisis de Resultados

### 6.1 Diferencias entre modelo y simulación

### 6.2 Error

## 7. Conclusiones

Conclusiones es que esta god

## 8. Referencias

- [1] "Limit switch - Wikipedia", En.wikipedia.org, 2021. [Online]. Disponible: [https://en.wikipedia.org/wiki/Limit\\_switch](https://en.wikipedia.org/wiki/Limit_switch).
- [2] Control Theory: The Double Pendulum Inverted on a Cart [https://digitalrepository.unm.edu/math\\_etds/132/](https://digitalrepository.unm.edu/math_etds/132/) .