

## 0.1 Modelo Físico

El doble péndulo invertido fue modelado como un manipulador Primático-Rotacional-Rotacional.

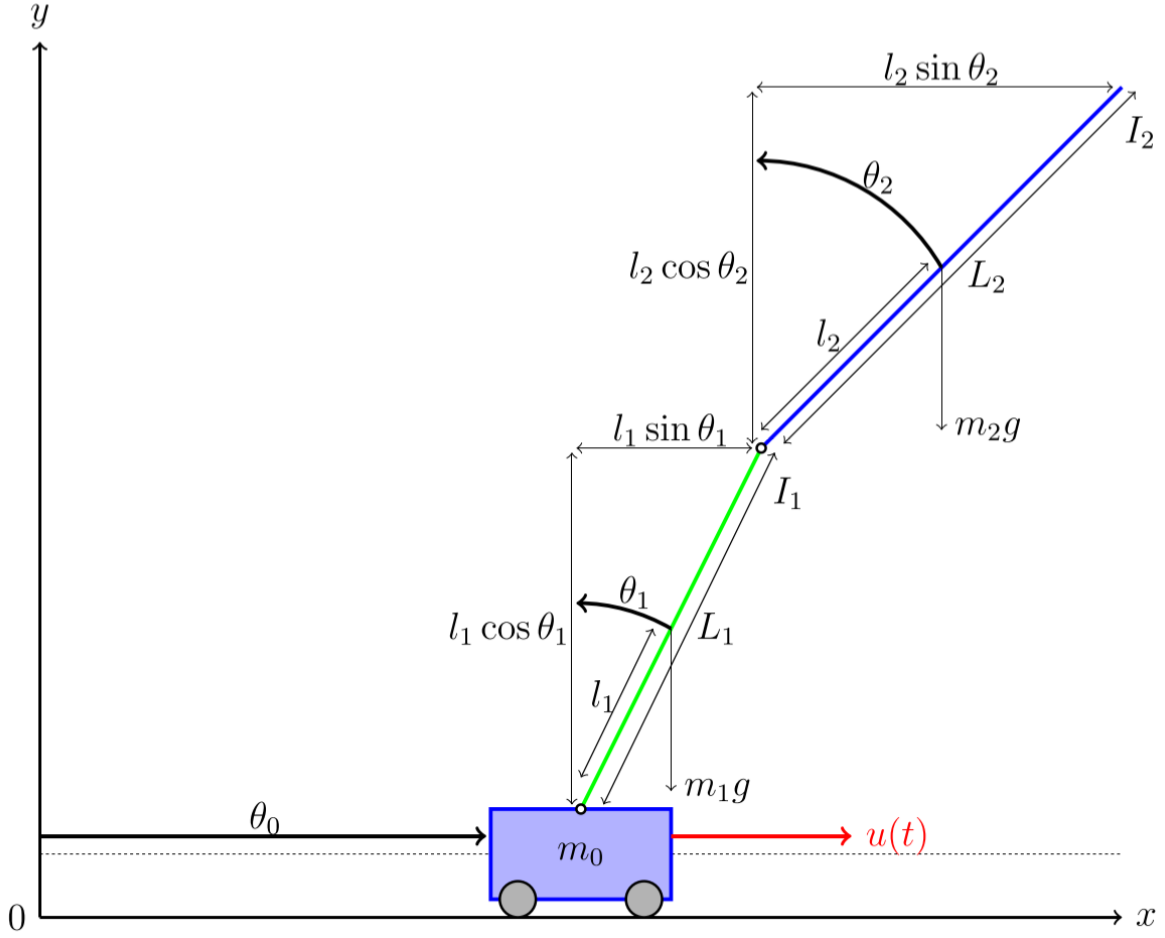


Figura 0.1.1: Modelo teórico del doble péndulo invertido.

Luego utilizando la formulación de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = \tau \quad (1)$$

$$L(\Theta, \dot{\Theta}) = \sum_{i=0}^2 \left( \frac{1}{2} m_i v_{Ci}^T v_{Ci} + \frac{1}{2} I_i \omega_{Ci}^T \omega_{Ci} + u_{refi} - m_i g d_{Ci} \right) \quad (2)$$

Se llega al sistema de segundo orden no lineal:

$$\tau = M(\Theta) \ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) \quad (3)$$

Siendo las matrices:

$$M(\Theta) \ddot{\Theta} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 & m_2 l_2 \cos \theta_2 \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 & m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_2 \cos \theta_2 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 + I_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -(m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & -m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & -m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_1 l_1 + m_2 L_1) g \sin \theta_1 \\ -m_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tau = H \cdot u(t) \quad (7)$$

Si se asume los siguientes valores:

$$l1 = \frac{1}{2}L_1 \quad l2 = \frac{1}{2}L_2 \quad I_1 = \frac{1}{12}m_1L_1^2 \quad I_2 = \frac{1}{12}m_2L_2^2 \quad (8)$$

Se simplifica a :

$$M(\Theta)\ddot{\Theta} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (\frac{1}{2}m_1L_1 + m_2)L_1 \cos \theta_1 \frac{1}{2} & m_2L_2 \cos \theta_2 \\ (\frac{1}{2}m_1 + m_2)L_1 \cos \theta_1 & (\frac{1}{3}m_1 + m_2)L_1^2 & \frac{1}{2}m_2L_1L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{1}{2}m_2L_2 \cos \theta_2 & \frac{1}{2}m_2L_1L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \frac{1}{3}m_2L_2^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -(\frac{1}{2}m_1 + m_2)L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & -\frac{1}{2}m_2L_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m_2L_1L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & -\frac{1}{2}m_2L_1L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)L_1g \sin \theta_1 \\ -\frac{1}{2}m_2gL_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tau = H \cdot u(t) \quad (12)$$

Cabe mencionar que  $M(\Theta)$  es una matriz simétrica no-singular, por lo que existe la inversa y también es simétrica.

## 0.2 Espacio de estados

Luego de hacer la linealización del sistema :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3g(2m_1^2+5m_1m_2+2m_2^2)}{2(4m_0m_1+3m_0m_2+m_1m_2+m_1^2)} & \frac{3gm_1m_2}{2(4m_0m_1+3m_0m_2+m_1m_2+m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3g(4m_1^2+9m_1m_2+4m_0m_1+2m_2^2+8m_0m_2)}{2L_1(4m_0m_1+3m_0m_2+m_1m_2+m_1^2)} & -\frac{9g*(2m_0m_2+m_1m_2)}{2L_1(4m_0m_1+3m_0m_2+m_1m_2+m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9g(2m_0m_1+4m_0m_2+2m_1m_2+m_1^2)}{2L_2(4m_0m_1+3m_0m_2+m_1m_2+m_1^2)} & \frac{3g(4m_0m_1+12m_0m_2+4m_1m_2+m_1^2)}{2L_2(4m_0m_1+3m_0m_2+m_1m_2+m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4m_1+3m_2}{4m_0m_1+3m_0m_2+m_1m_2+m_1^2} \\ -\frac{3(2m_1+m_2)}{L_1(4m_0m_1+3m_0m_2+m_1m_2+m_1^2)} \\ \frac{2m_2}{L_2(4m_0m_1+3m_0m_2+m_1m_2+m_1^2)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Si se opta por los siguientes valores:

$$m_0 = 5 \text{ Kg} \quad m_1 = 1 \text{ Kg} \quad m_2 = 1 \text{ Kg} \quad L_1 = 1 \text{ m} \quad L_2 = 1.5 \text{ m} \quad g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (15)$$

Se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3.5757 & 0.3973 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29.7973 & -13.1108 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -26.2216 & 22.5135 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1892 \\ -0.2432 \\ 0.036 \end{bmatrix} \quad (17)$$

### 0.3 Controlabilidad y Observabilidad

Se define al set de estados alcanzables  $\mathcal{R}_t$  en un tiempo  $t$  como aquellos estados en los que el sistema se puede encontrar. Por otro lado, se define al subespacio controlable  $\mathcal{C}_{AB}$  como aquellos estados a los que se puede forzar el sistema mediante una entrada  $u(t)$  apropiada. Se puede probar que para  $t > 0$  el set de estados alcanzables  $\mathcal{R}_t$  es igual que el subespacio controlable  $\mathcal{C}_{AB}$ . [?]

Se dice que el par  $(A, B)$  es controlable, y por ende un sistema definido con esas matrices es controlable si la matriz de controlabilidad

$$[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (18)$$

es de rango completo.

Para el caso del péndulo doble, se tiene que

$$[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = \begin{bmatrix} 0 & 0.1892 & 0 & 0.8839 & 0 & 30.4554 \\ 0 & -0.2432 & 0 & -7.7189 & 0 & -324.2311 \\ 0 & 0.0360 & 0 & 7.1876 & 0 & 364.2140 \\ 0.1892 & 0 & 0.8839 & 0 & 30.4554 & 0 \\ -0.2432 & 0 & -7.7189 & 0 & -324.2311 & 0 \\ 0.0360 & 0 & 7.1876 & 0 & 364.2140 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde se puede observar que la matriz es de rango completo, por lo que el sistema es controlable.

Otros dos aspectos importantes del sistema son la detectabilidad y la observabilidad, dado que en la vida real muchas veces no es posible medir todas las variables del sistema.

El estudio de la observabilidad del sistema se basa en comprobar la posibilidad de estimar las variables de estado a partir de la salida. Por otro lado, un estudio más débil pero de igual importancia teórica es la detectabilidad. Un sistema es detectable si todos sus estados no observables son estables. Se puede probar que si el par  $(C^*, A^*)$  es controlable, entonces el par  $(A, C)$  es observable.

En el caso del problema estudiado, se tiene que, midiendo la posición del carrito y las dos posiciones angulares, es decir

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

luego

$$[C^* \ A^*C^* \ \dots \ A^{*n-1}C^*] \quad (21)$$

es de rango completo, por lo que el sistema será observable midiendo las variables de estado definidas por la matriz  $C$ .

#### 0.3.1 Estudio con diagramas de Mason

En la modelización de la planta como se verá en la sección (??) se debate entre el sistema con y sin fricción. Por lo que a continuación se define la observabilidad y controlabilidad de ambos sistemas. Por lo que se realizaron los diagramas de Mason para cada sistema. Asumiendo un espacio en variables de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & b & c & d & e \\ 0 & f & g & h & i & j \\ 0 & k & l & m & n & o \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

### 0.3.1.1 Sistema con fricción y mediciones de $\theta_1$ , $\theta_2$ y $x_0$

A continuación se ve el diagrama de Mason para el sistema mencionado.

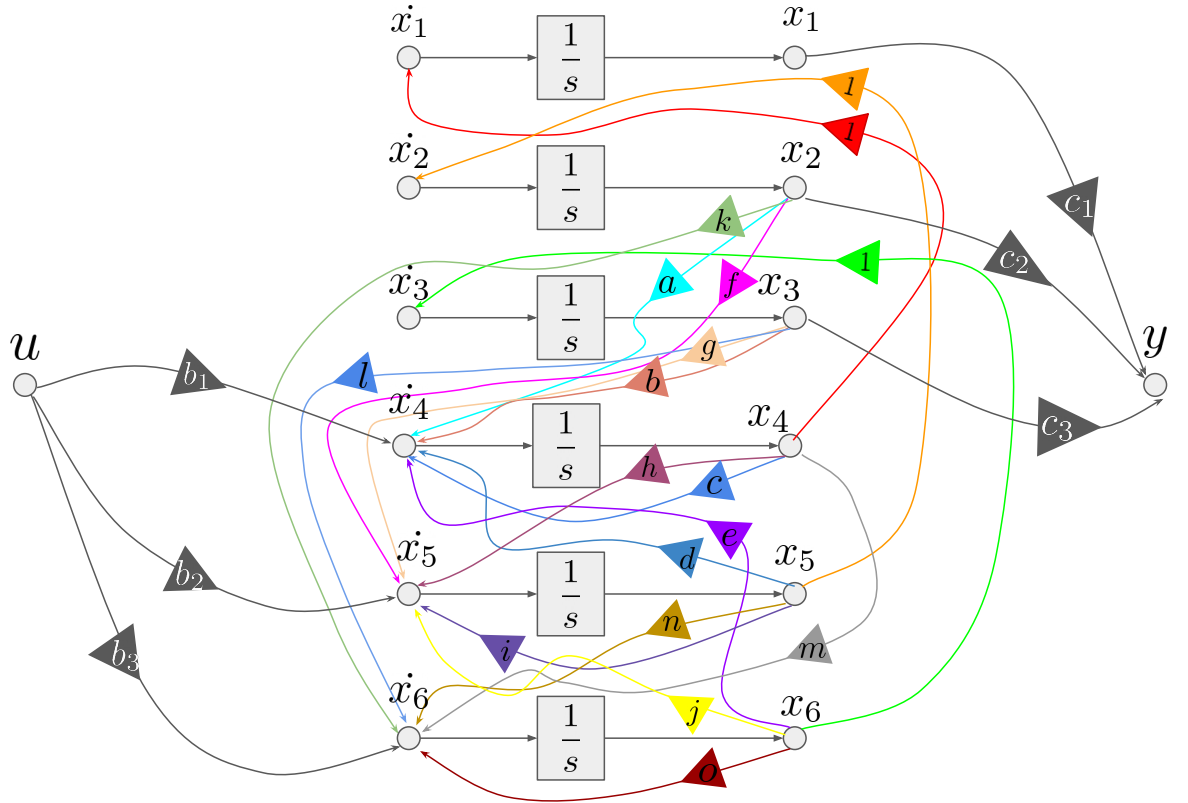


Figura 0.3.1.1.1: Diagrama de Mason del sistema con fricción y mediciones de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $x_0$ .

En el caso de la controlabilidad se hará un solo estudio debido a que es el mismo para los 3 casos que observaremos. Se observa que se puede llegar desde la acción de control a todas las variables de estado con un recorrido corto.

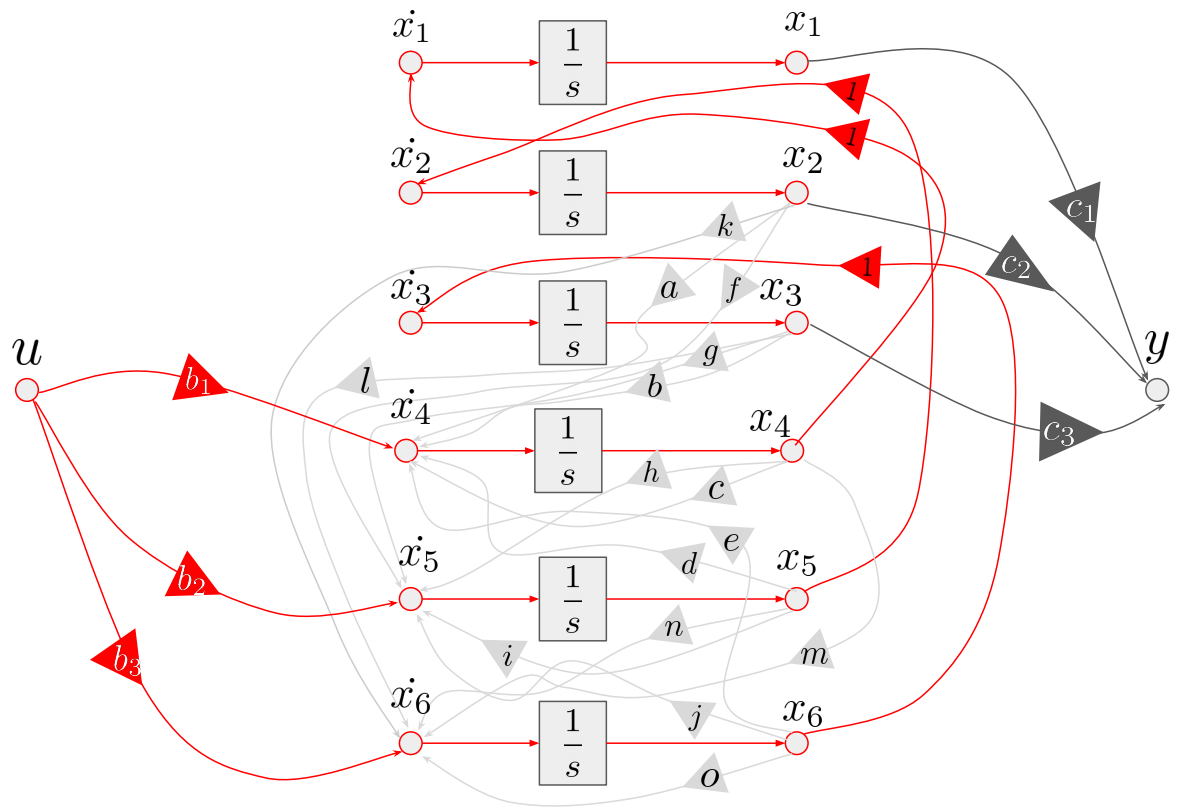


Figura 0.3.1.1.2: Diagrama de Mason marcando la controlabilidad.

Luego veremos la observabilidad, que en el caso del sistema con fricción y midiendo la posición y ángulos, se nota que el nivel de anidamiento de las variables de estado es de un solo nivel, teniendo que para medir las variables  $x_6$ ,  $x_5$  y  $x_4$ , basta con derivar las salidas.

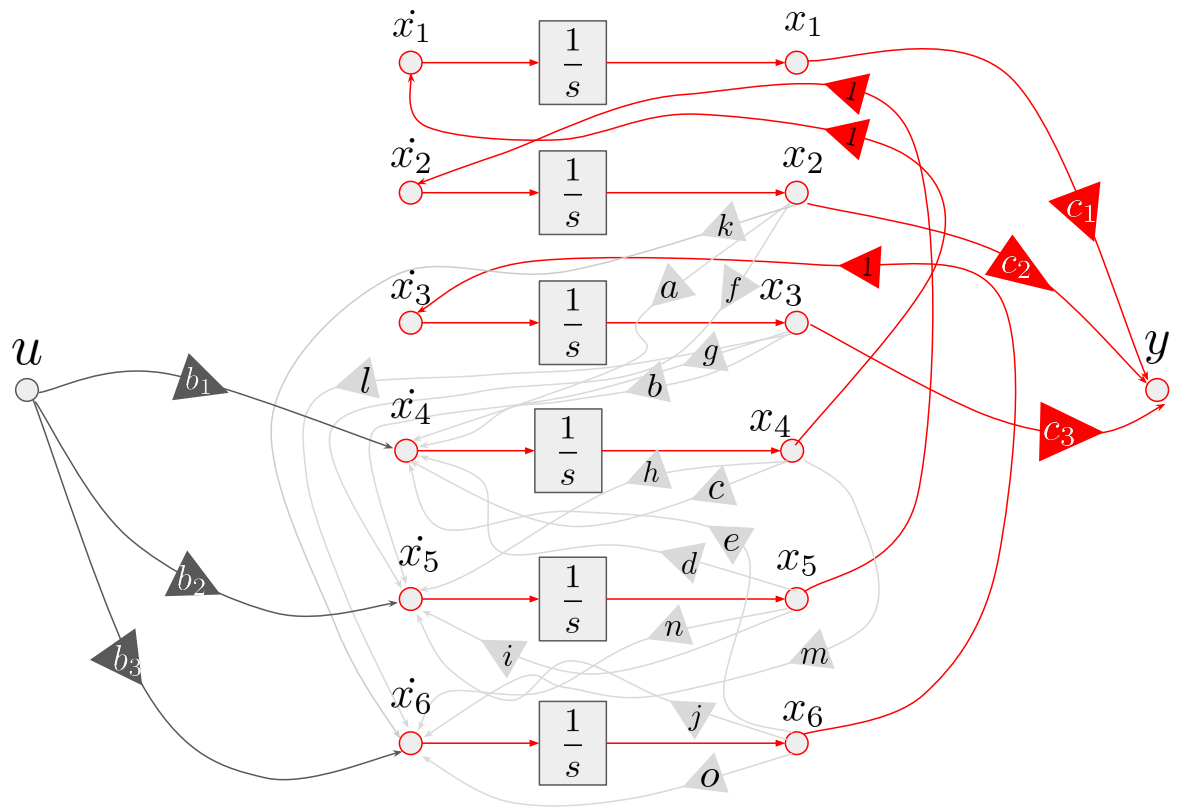


Figura 0.3.1.1.3: Diagrama de Mason marcando la observabilidad.

Por lo que el sistema es sumamente observable.

### 0.3.1.2 Sistema con fricción y mediciones de $x_0$

Aquí se muestra el diagrama de mason del sistema con fricción y mediciones únicamente de  $x_0$ . Este sistema tiene la particularidad de que al tener una única salida por  $x_1$  llegar a todas las variables de estado se torna mas difícil.

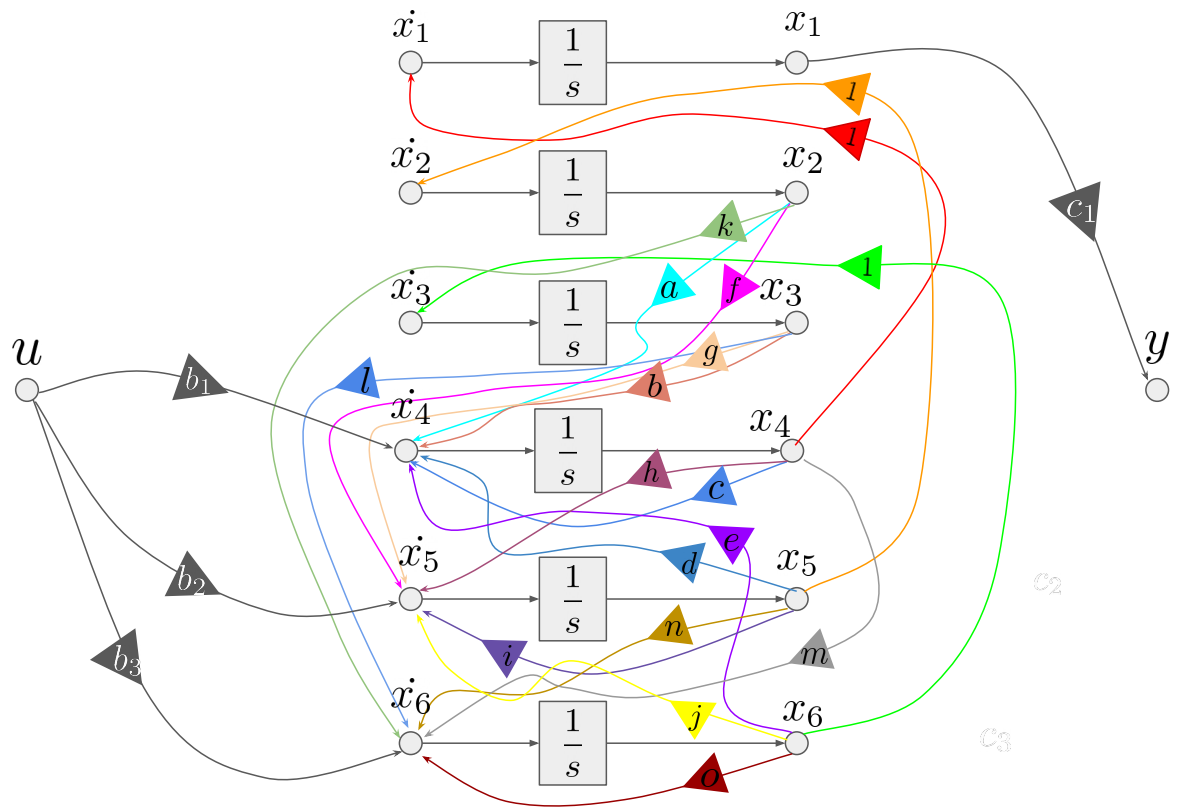


Figura 0.3.1.2.1: Diagrama de Mason del sistema con fricción y mediciones de  $x_0$ .

Aquí veremos el camino que debe realizar cada variable de estado para llegar a la salida, o visto de otra manera el camino inverso que debe hacer el observador para estimar dichas variables.

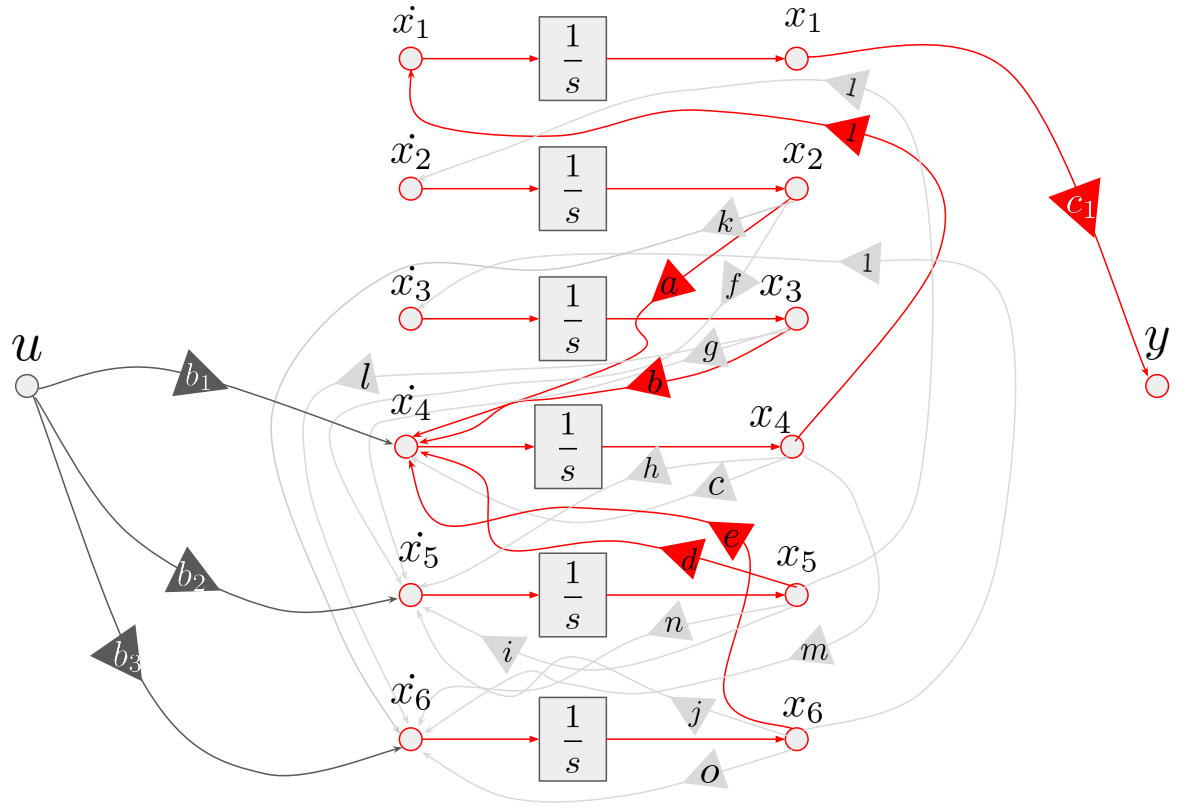


Figura 0.3.1.2.2: Diagrama de Mason marcando observabilidad.

Se observa que En este caso el camino hacia la salida es mucho menos directo, y todas las variables de estado pasan por la variable  $x_4$  por lo que el anidamiento es superior al caso anterior y estimar las variables se torna mas difícil, teniendo en cuenta que ahora estan multiplicadas por las ganancias  $a, b, c$ , etc. Si bien en el sentido estricto de la palabra el sistema es completamente observable al igual que el anterior, en una aplicación real, teniendo en cuenta las diversas fuentes de ruido, este sistema resulta significativamente mas difícil de observar.

### 0.3.1.3 Sistema sin fricción y mediciones de $x_0$

Finalmente observaremos el caso del sistema ideal sin fricción, midiendo únicamente la posición. El diagrama de Mason correspondiente es el siguiente:



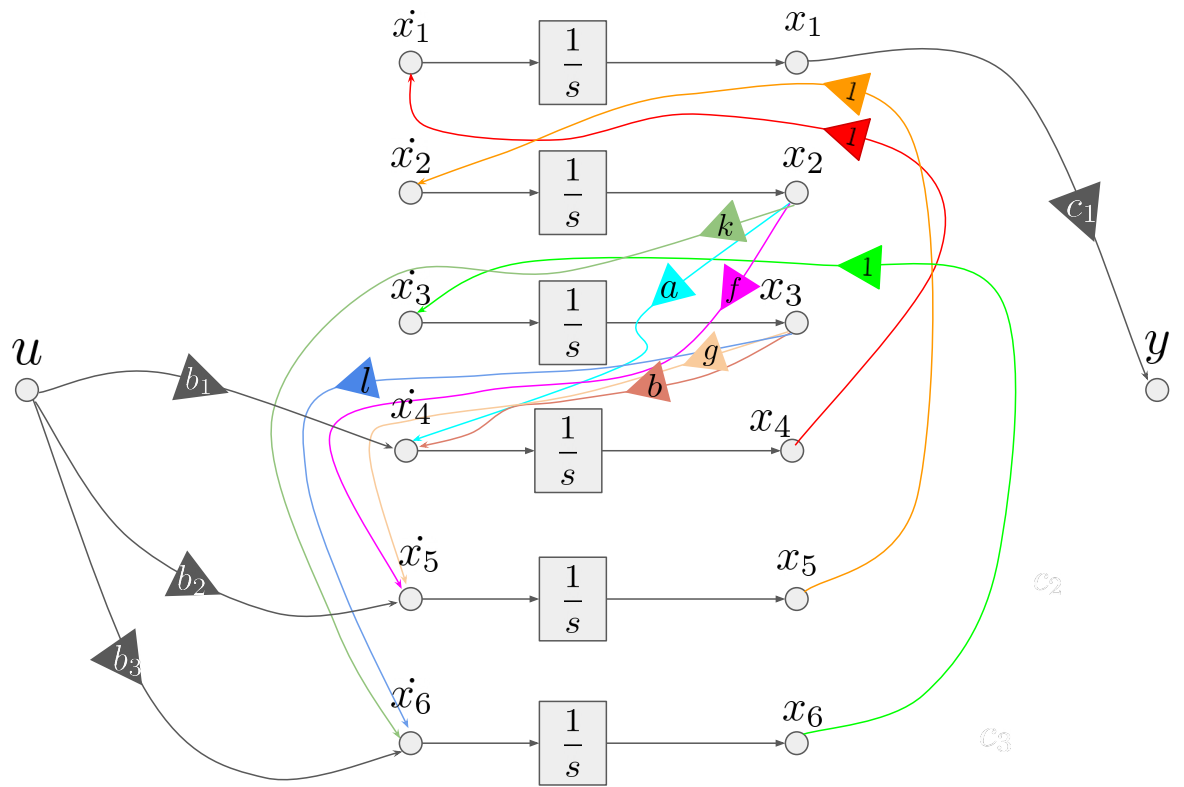


Figura 0.3.1.3.1: Diagrama de Mason del sistema sin fricción y mediciones de  $x_0$ .

En este caso se observa el mayor nivel de anidamiento de los 3 casos, resultando en el sistema que si se intentase replicar en la realidad menos probabilidad de éxito tendría. Si bien en el caso ideal funcionaría no es así en la realidad.

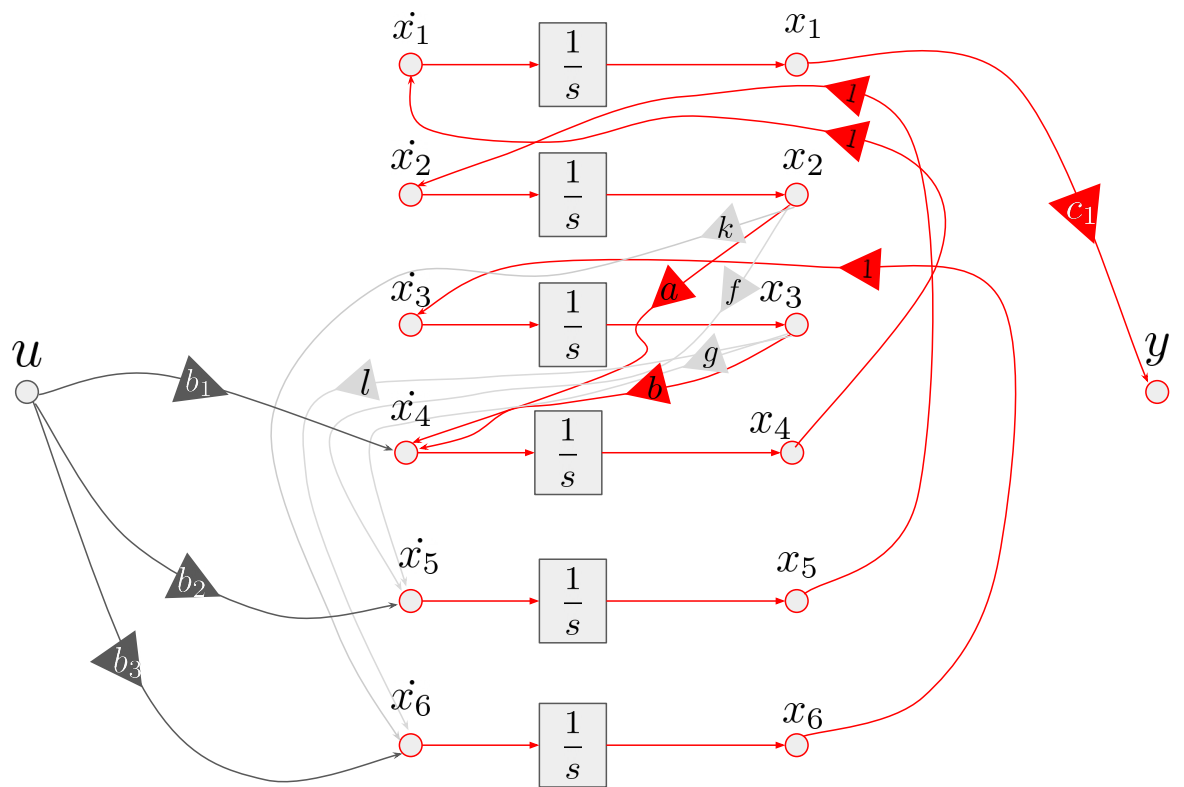


Figura 0.3.1.3.2: Diagrama de Mason marcando observabilidad.