

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES - ITBA  
ESCUELA DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

# TRABAJO PRÁCTICO FINAL

## Péndulo doble invertido

AUTORES: Lambertucci, Guido Enrique (Leg. N° 58009)  
Mechoulam, Alan (Leg. N° 58438)

DOCENTES: Gherisin, Alejandro Simón  
Silva Rodrigues, Reurison

22.93 - Control Automatico

BUENOS AIRES

## 0.0. Contenidos

<b>1</b>	<b>Glosario</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Modelo Teórico</b>	<b>4</b>
3.1	Modelo Físico	4
3.2	Espacio de estados	5
3.3	Controlabilidad y Observabilidad	6
3.3.1	Estudio con diagramas de Mason	6
3.3.1.1	Sistema con fricción y mediciones de $\theta_1, \theta_2$ y $x_0$	7
3.3.1.2	Sistema con fricción y mediciones de $x_0$	8
3.3.1.3	Sistema sin fricción y mediciones de $x_0$	10
<b>4</b>	<b>Simulación</b>	<b>11</b>
4.1	Modelo de Simscape	11
4.2	Simulink	12
<b>5</b>	<b>Modelo de Control</b>	<b>12</b>
5.1	Realimentación de Estados	12
5.2	Observador	13
5.3	Discretización	14
<b>6</b>	<b>Análisis de Resultados</b>	<b>16</b>
6.1	Diferencias entre modelo y simulación	16
6.2	Error	16
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>17</b>
<b>8</b>	<b>Referencias</b>	<b>17</b>

## 1. Glosario

Término	Descripción
$x_0$	Posición horizontal del carrito.
$\theta_1$	Ángulo entre el primer link con la vertical.
$\theta_2$	Ángulo entre el segundo link con la vertical.
$m_0$	Masa del carrito.
$m_1$	Masa del primer link del péndulo.
$m_2$	Masa del segundo link del péndulo..
$L_1$	Longitud del primer link.
$L_2$	Longitud del segundo link..
$l_1$	Distancia entre la base del primer link y su centro de masas.
$l_2$	Distancia entre la base del segundo link y su centro de masas.
$I_1$	Momento de inercia del primer link.
$I_2$	Momento de inercia del segundo link.
$g$	Constante de aceleración de la gravedad.
$u(t)$	Acción de Control.
$\Theta$	Vector de estados.
$Y$	Vector de salida del sistema.
$\hat{\Theta}$	Vector de estados estimado.
$\hat{Y}$	Vector de salida del sistema estimado.
$\Theta_0$	Condición Inicial.
$L$	Lagrangiano.
$M(\Theta)$	Matriz de influencia de masas/inercia en vector de torques.
$V(\Theta, \dot{\Theta})$	Vector de influencia de términos centrífugos y de Coriolis.
$G(\Theta)$	Vector de influencia de la gravedad.

## 2. Resumen

En el presente trabajo se realiza el control por realimentación de estados tanto integral, para el caso continuo y discreto con observador, para el doble péndulo invertido.

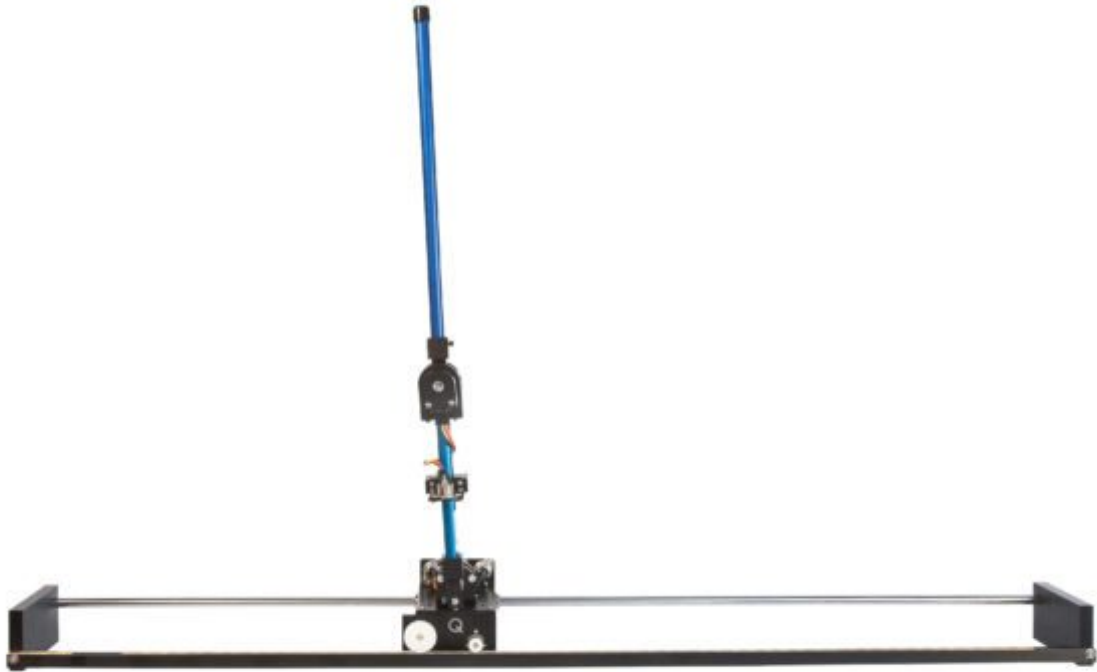


Figura 2.1: Pendulo doble invertido.

Obteniendo el modelo teórico del mismo a partir de ecuaciones, cotejando dicho modelo con los valores linealizados de la planta implementada en Matlab con la ayuda del framework de Simscape para su simulación. También se realiza un estudio en las diferencias entre dichos modelos, y entre los distintos resultados de los métodos de control.

Adicionalmente se calcula si el sistema es en efecto controlable y observable, y si existen condiciones en las cuales esto se ve afectado a través del uso de diagramas de Mason.

### 3. Modelo Teórico

#### 3.1 Modelo Físico

El doble péndulo invertido fue modelado como un manipulador Primático-Rotacional-Rotacional.

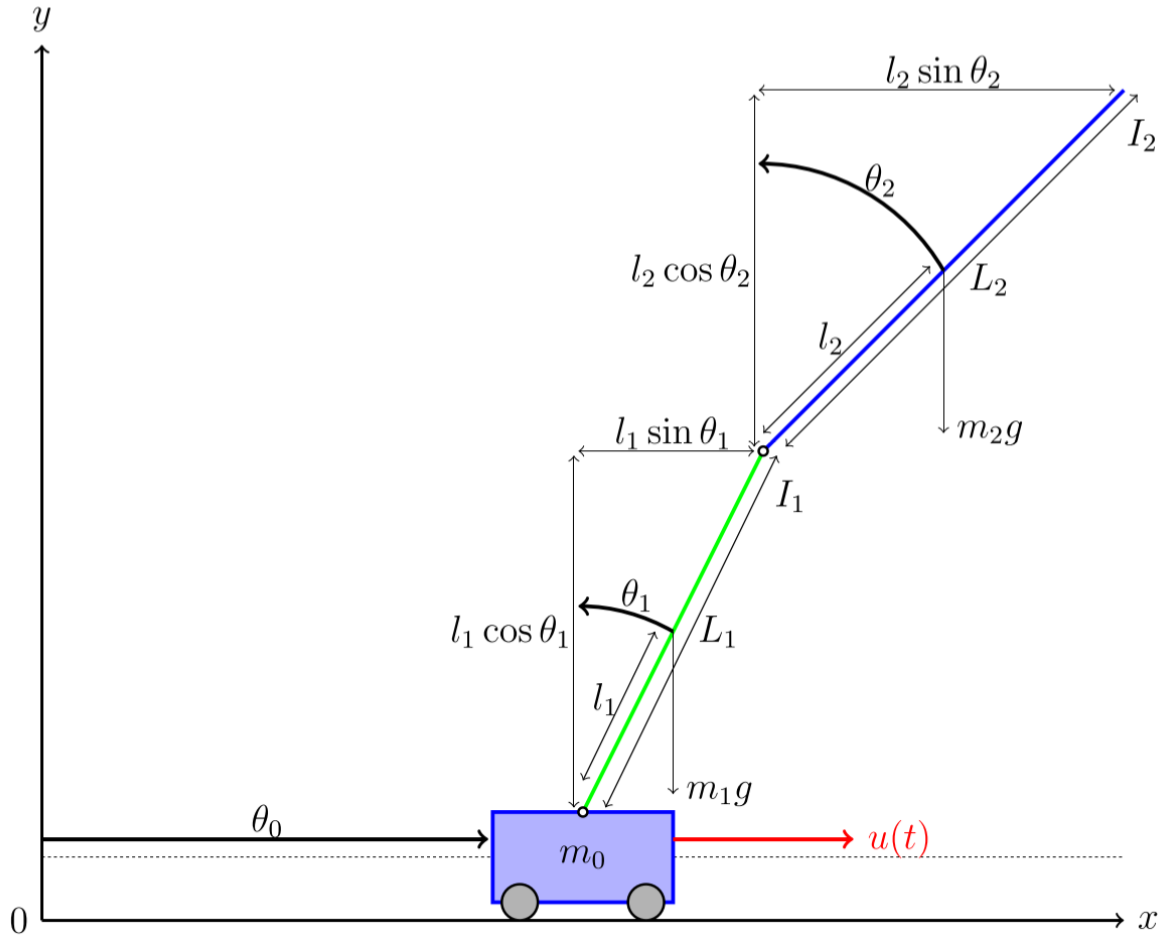


Figura 3.1.1: Modelo teórico del doble péndulo invertido.

Luego utilizando la formulación de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = \tau \quad (1)$$

$$L(\Theta, \dot{\Theta}) = \sum_{i=0}^2 \left( \frac{1}{2} m_i v_{Ci}^T v_{Ci} + \frac{1}{2} I_i \omega_{Ci}^T \omega_{Ci} + u_{refi} - m_i g d_{Ci} \right) \quad (2)$$

Se llega al sistema de segundo orden no lineal:

$$\tau = M(\Theta) \ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) \quad (3)$$

Siendo las matrices:

$$M(\Theta) \ddot{\Theta} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 & m_2 l_2 \cos \theta_2 \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 & m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_2 \cos \theta_2 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 + I_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -(m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & -m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & -m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_1 l_1 + m_2 L_1) g \sin \theta_1 \\ -m_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tau = H \cdot u(t) \quad (7)$$

Si se asume los siguientes valores:

$$l_1 = \frac{1}{2} L_1 \quad l_2 = \frac{1}{2} L_2 \quad I_1 = \frac{1}{12} m_1 L_1^2 \quad I_2 = \frac{1}{12} m_2 L_2^2 \quad (8)$$

Se simplifica a :

$$M(\Theta) \ddot{\Theta} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (\frac{1}{2} m_1 L_1 + m_2) L_1 \cos \theta_1 \frac{1}{2} & m_2 L_2 \cos \theta_2 \\ (\frac{1}{2} m_1 + m_2) L_1 \cos \theta_1 & (\frac{1}{3} m_1 + m_2) L_1^2 & \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{1}{2} m_2 L_2 \cos \theta_2 & \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -(\frac{1}{2} m_1 + m_2) L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & -\frac{1}{2} m_2 L_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & -\frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} (m_1 + m_2) L_1 g \sin \theta_1 \\ -\frac{1}{2} m_2 g L_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tau = H \cdot u(t) \quad (12)$$

Cabe mencionar que  $M(\Theta)$  es una matriz simétrica no-singular, por lo que existe la inversa y también es simétrica.

### 3.2 Espacio de estados

Luego de hacer la linealización del sistema :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3g(2m_1^2 + 5m_1 m_2 + 2m_2^2)}{2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & \frac{3gm_1 m_2}{2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3g(4m_1^2 + 9m_1 m_2 + 4m_0 m_1 + 2m_2^2 + 8m_0 m_2)}{2L_1(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & -\frac{9g*(2m_0 m_2 + m_1 m_2)}{2L_1(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9g(2m_0 m_1 + 4m_0 m_2 + 2m_1 m_2 + m_1^2)}{2L_2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & \frac{3g(4m_0 m_1 + 12m_0 m_2 + 4m_1 m_2 + m_1^2)}{2L_2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4m_1 + 3m_2}{4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2} \\ -\frac{3(2m_1 + m_2)}{L_1(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} \\ \frac{2m_2}{L_2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Si se opta por los siguientes valores:

$$m_0 = 5 \text{ Kg} \quad m_1 = 1 \text{ Kg} \quad m_2 = 1 \text{ Kg} \quad L_1 = 1 \text{ m} \quad L_2 = 1.5 \text{ m} \quad g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (15)$$

Se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3.5757 & 0.3973 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29.7973 & -13.1108 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -26.2216 & 22.5135 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1892 \\ -0.2432 \\ 0.036 \end{bmatrix} \quad (17)$$

### 3.3 Controlabilidad y Observabilidad

Se define al set de estados alcanzables  $\mathcal{R}_t$  en un tiempo  $t$  como aquellos estados en los que el sistema se puede encontrar. Por otro lado, se define al subespacio controlable  $\mathcal{C}_{AB}$  como aquellos estados a los que se puede forzar el sistema mediante una entrada  $u(t)$  apropiada. Se puede probar que para  $t > 0$  el set de estados alcanzables  $\mathcal{R}_t$  es igual que el subespacio controlable  $\mathcal{C}_{AB}$ . [3]

Se dice que el par  $(A, B)$  es controlable, y por ende un sistema definido con esas matrices es controlable si la matriz de controlabilidad

$$[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (18)$$

es de rango completo.

Para el caso del péndulo doble, se tiene que

$$[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = \begin{bmatrix} 0 & 0.1892 & 0 & 0.8839 & 0 & 30.4554 \\ 0 & -0.2432 & 0 & -7.7189 & 0 & -324.2311 \\ 0 & 0.0360 & 0 & 7.1876 & 0 & 364.2140 \\ 0.1892 & 0 & 0.8839 & 0 & 30.4554 & 0 \\ -0.2432 & 0 & -7.7189 & 0 & -324.2311 & 0 \\ 0.0360 & 0 & 7.1876 & 0 & 364.2140 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde se puede observar que la matriz es de rango completo, por lo que el sistema es controlable.

Otros dos aspectos importantes del sistema son la detectabilidad y la observabilidad, dado que en la vida real muchas veces no es posible medir todas las variables del sistema.

El estudio de la observabilidad del sistema se basa en comprobar la posibilidad de estimar las variables de estado a partir de la salida. Por otro lado, un estudio más débil pero de igual importancia teórica es la detectabilidad. Un sistema es detectable si todos sus estados no observables son estables. Se puede probar que si el par  $(C^*, A^*)$  es controlable, entonces el par  $(A, C)$  es observable.

En el caso del problema estudiado, se tiene que, midiendo la posición del carrito y las dos posiciones angulares, es decir

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

luego

$$[C^* \ A^*C^* \ \dots \ A^{*n-1}C^*] \quad (21)$$

es de rango completo, por lo que el sistema será observable midiendo las variables de estado definidas por la matriz  $C$ .

#### 3.3.1 Estudio con diagramas de Mason

En la modelización de la planta como se verá en la sección (4.1) se debate entre el sistema con y sin fricción. Por lo que a continuación se define la observabilidad y controlabilidad de ambos sistemas. Por lo que se realizaron los diagramas de Mason para cada sistema. Asumiendo un espacio en variables de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & b & c & d & e \\ 0 & f & g & h & i & j \\ 0 & k & l & m & n & o \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

### 3.3.1.1 Sistema con fricción y mediciones de $\theta_1, \theta_2$ y $x_0$

A continuación se ve el diagrama de Mason para el sistema mencionado.

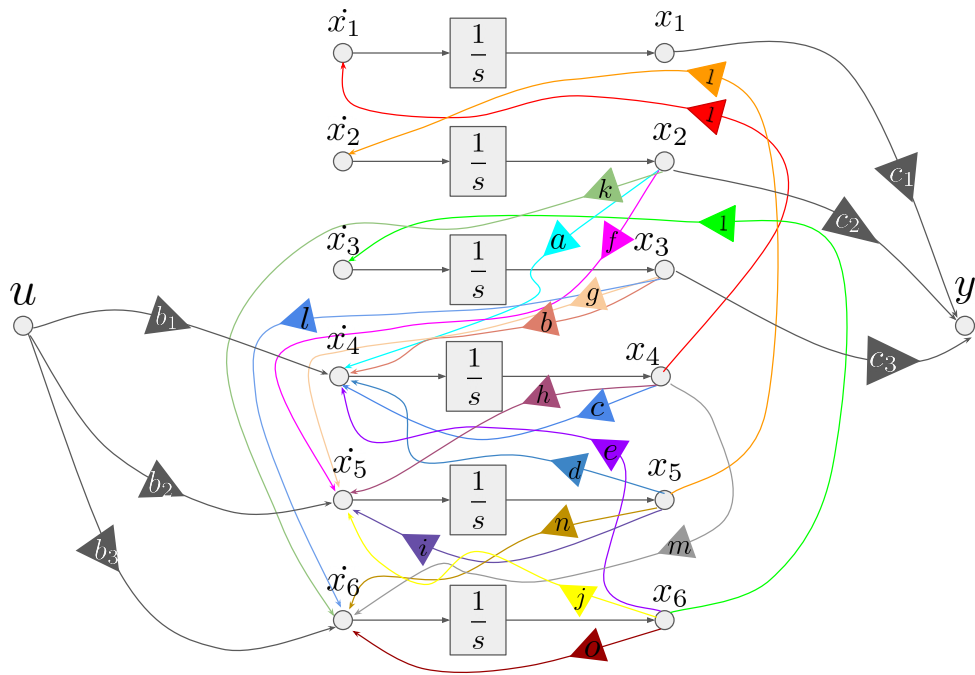


Figura 3.3.1.1.1: Diagrama de Mason del sistema con fricción y mediciones de  $\theta_1, \theta_2$  y  $x_0$ .

En el caso de la controlabilidad se hará un solo estudio debido a que es el mismo para los 3 casos que observaremos. Se observa que se puede llegar desde la acción de control a todas las variables de estado con un recorrido corto.



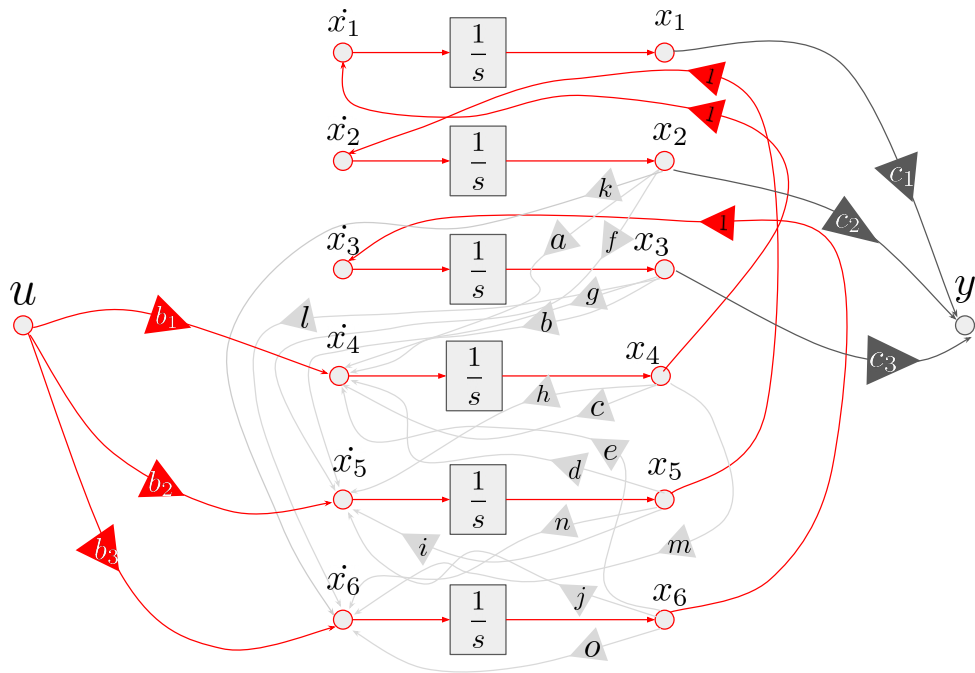


Figura 3.3.1.1.2: Diagrama de Mason marcando la controlabilidad.

Luego veremos la observabilidad, que en el caso del sistema con fricción y midiendo la posición y ángulos, se nota que el nivel de anidamiento de las variables de estado es de un solo nivel, teniendo que para medir las variables  $x_6$ ,  $x_5$  y  $x_4$ , basta con derivar las salidas.

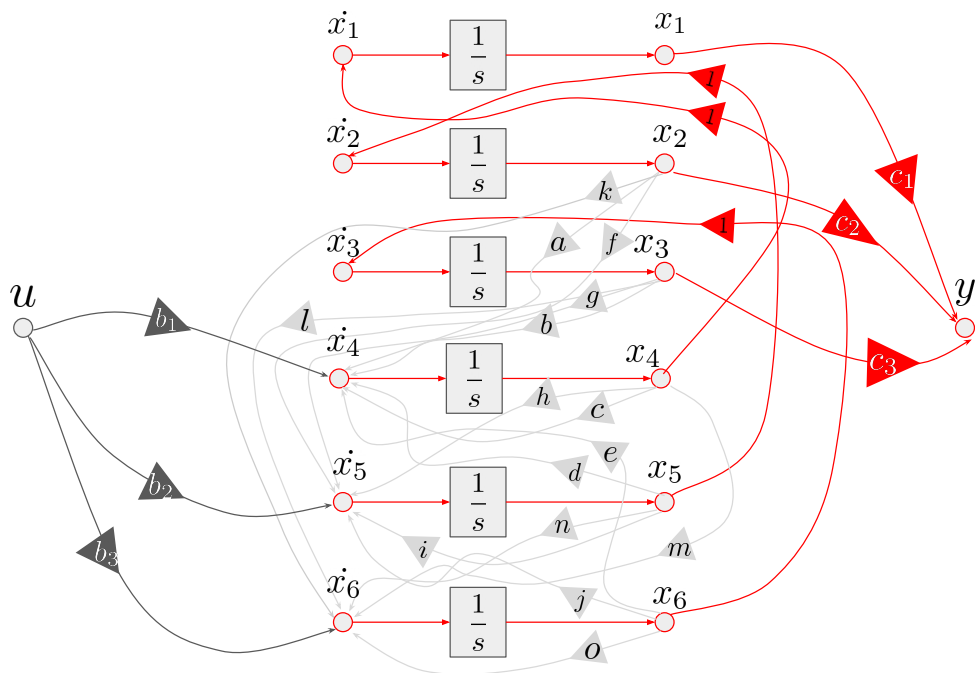


Figura 3.3.1.1.3: Diagrama de Mason marcando la observabilidad.

Por lo que el sistema es sumamente observable.

### 3.3.1.2 Sistema con fricción y mediciones de $x_0$

Aquí se muestra el diagrama de mason del sistema con fricción y mediciones únicamente de  $x_0$ . Este sistema tiene la particularidad de que al tener una única salida por  $x_1$  llegar a todas las variables de estado se torna mas

difícil.

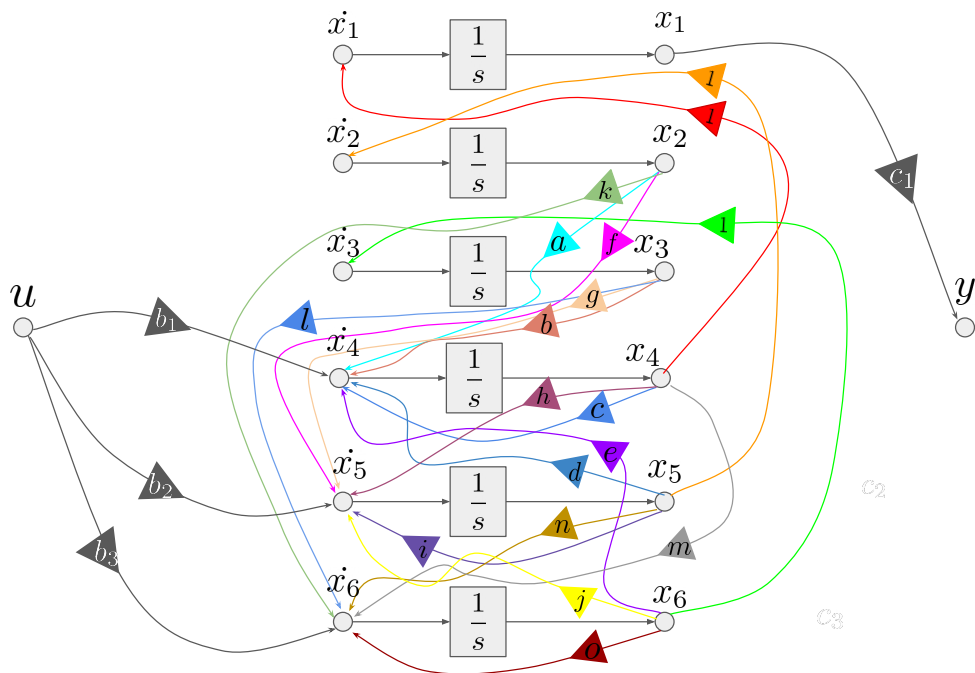


Figura 3.3.1.2.1: Diagrama de Mason del sistema con fricción y mediciones de  $x_0$ .

Aquí veremos el camino que debe realizar cada variable de estado para llegar a la salida, o visto de otra manera el camino inverso que debe hacer el observador para estimar dichas variables.

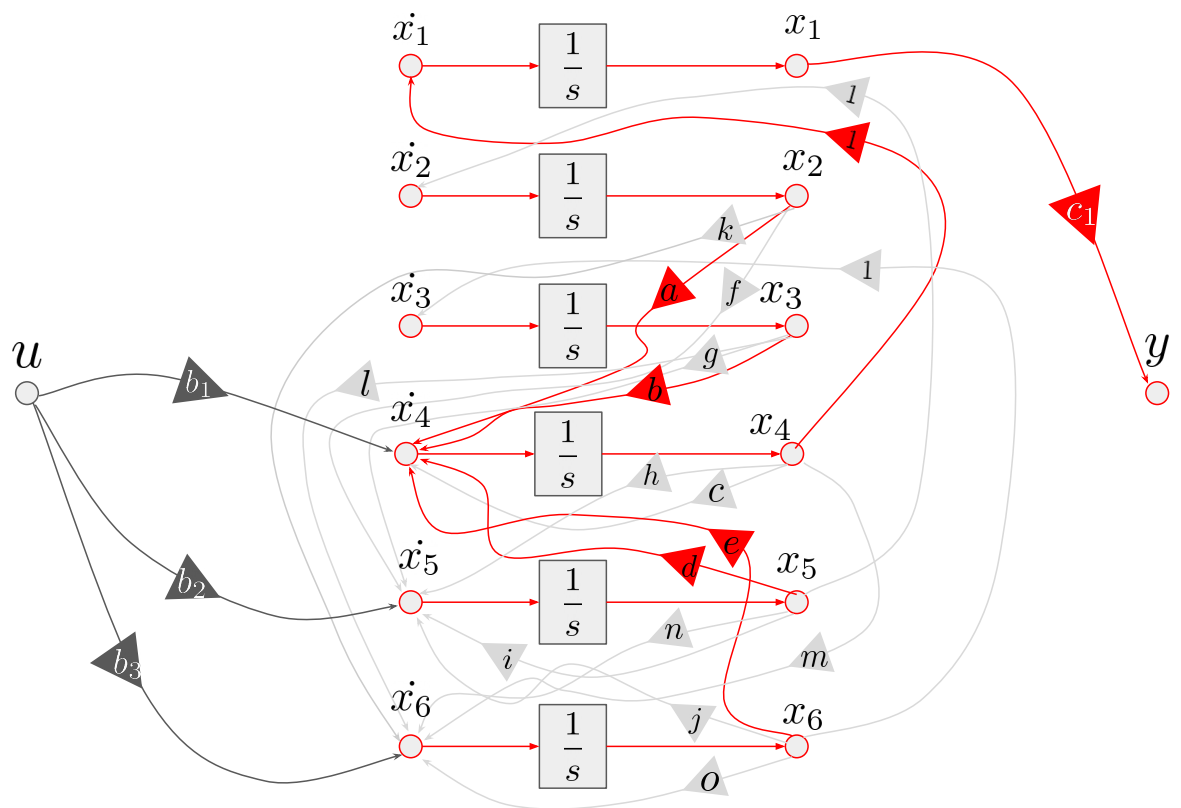


Figura 3.3.1.2.2: Diagrama de Mason marcando observabilidad.

Se observa que En este caso el camino hacia la salida es mucho menos directo, y todas las variables de estado

pasan por la variable  $x_4$  por lo que el anidamiento es superior al caso anterior y estimar las variables se torna mas difícil, teniendo en cuenta que ahora estan multiplicadas por las ganancias  $a, b, c$ , etc. Si bien en el sentido estricto de la palabra el sistema es completamente observable al igual que el anterior, en una aplicación real, teniendo en cuenta las diversas fuentes de ruido, este sistema resulta significativamente mas difícil de observar.

### 3.3.1.3 Sistema sin fricción y mediciones de $x_0$

Finalmente observaremos el caso del sistema ideal sin fricción, midiendo únicamente la posición. El diagrama de Mason correspondiente es el siguiente:

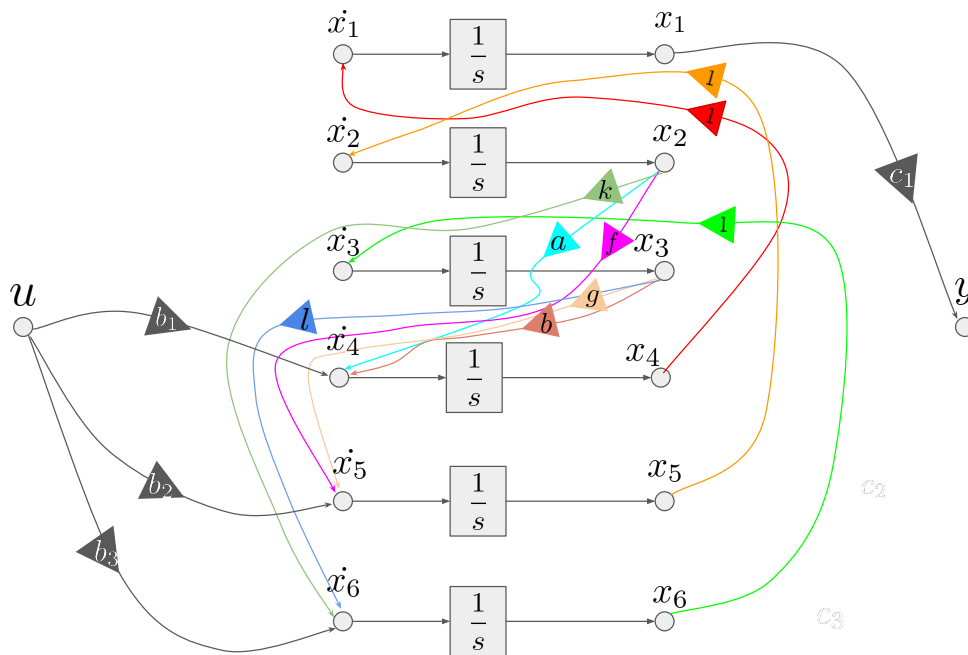


Figura 3.3.1.3.1: Diagrama de Mason del sistema sin fricción y mediciones de  $x_0$ .

En este caso se observa el mayor nivel de anidamiento de los 3 casos, resultando en el sistema que si se intentase replicar en la realidad menos probabilidad de éxito tendría. Si bien en el caso ideal funcionaría no es así en la realidad.

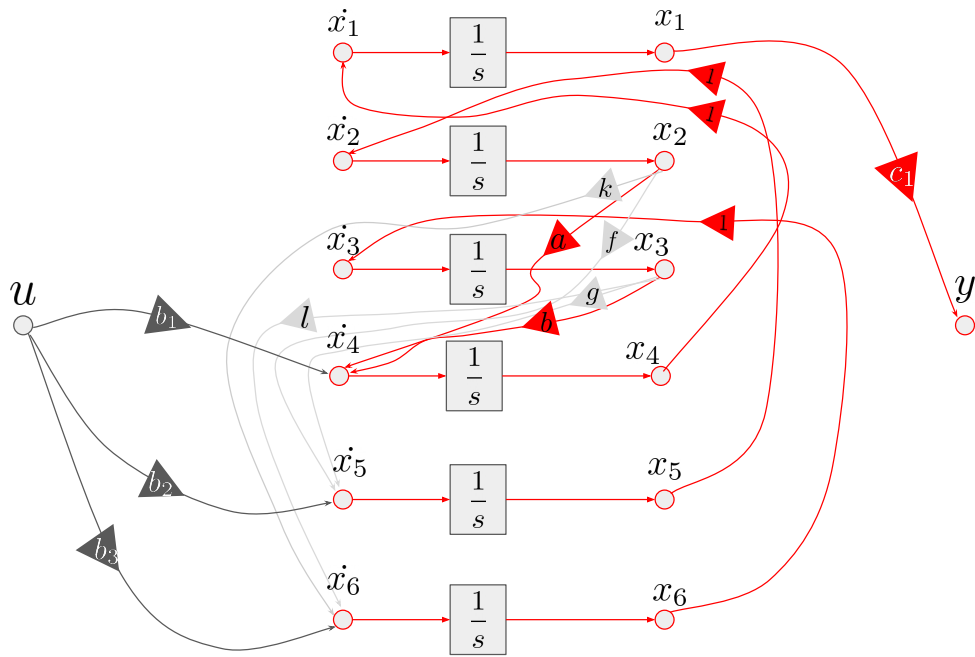


Figura 3.3.1.3.2: Diagrama de Mason marcando observabilidad.

## 4. Simulación

### 4.1 Modelo de Simscape

Para lograr mayor apego a la realidad, se decidió utilizar un modelo con fricción obtenido utilizando el framework de Simscape de Simulink, que se pueden observar en las Figuras (4.1.1) y (4.1.2).

Los valores de fricción que se utilizaron para cada joint son de  $0.004 \frac{N \cdot s}{m}$ , resultando así en las siguientes matrices:

$$A_{simscape} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3.1784 & 0.3973 & -0.0008 & 0.0557 & -0.0681 \\ 0 & 16.6865 & -13.1108 & 0.001 & -0.4646 & 0.8734 \\ 0 & -20.3946 & 35.6243 & -0.0012 & 0.8734 & -1.9842 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$B_{simscape} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1892 \\ -0.2432 \\ 0.2973 \end{bmatrix} \quad (26)$$

de ahora en más llamadas simplemente A y B. Estas matrices son muy similares a las obtenidas teóricamente, con la excepción más notoria del corrimiento de uno de los dos polos en el origen hacia el semiplano izquierdo.





Posición de los Polos del Observador					
-30	-25	-24	-20	-19	-18

Ganancias					
47.18	3.05	0.88	528.29	60.25	18.75
2.16	43.35	0.73	40	468.40	12.29
0.40	0.80	43.02	6.67	22.13	450.94

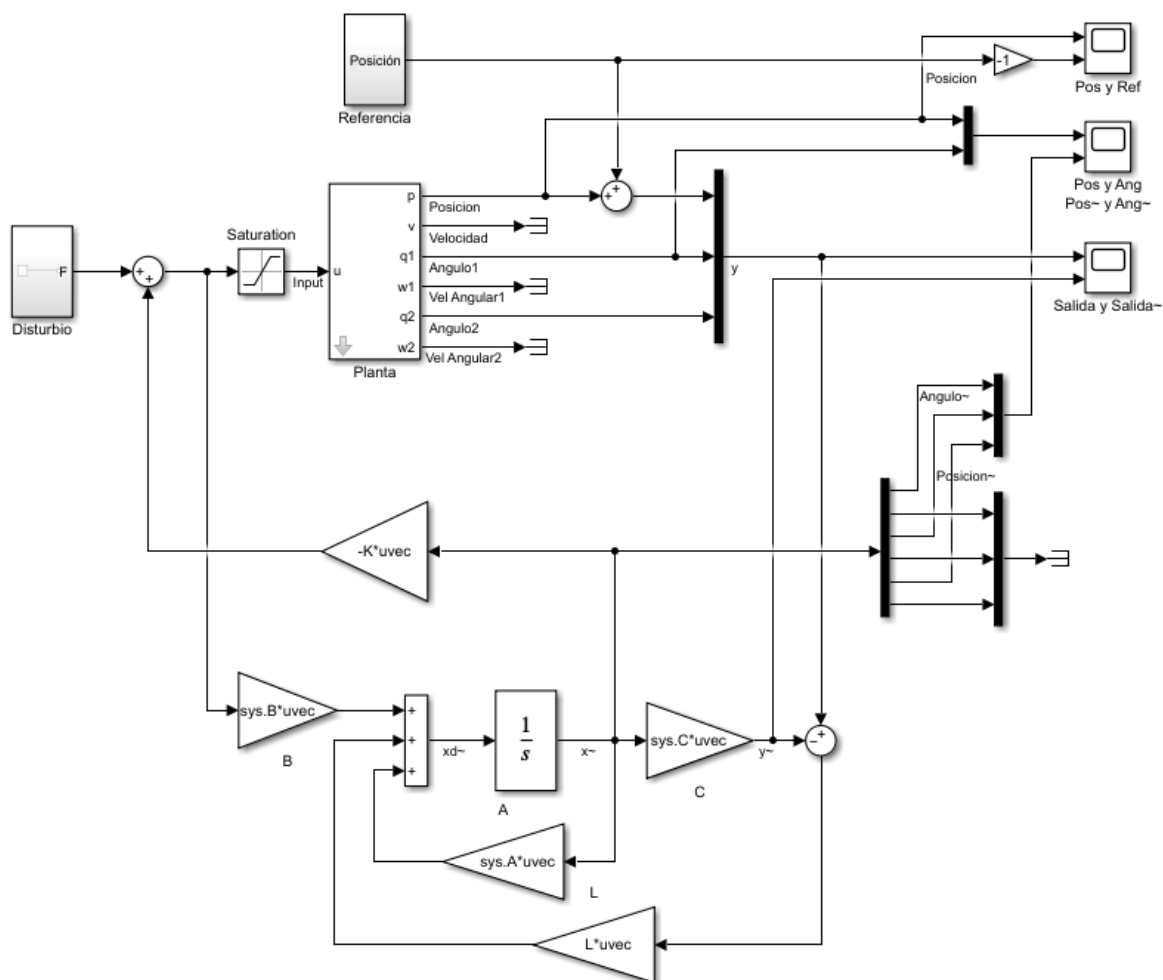


Figura 5.2.1: Simulación en bloques de la realimentación de estados con observador.

Como último paso, se decidió pasar a tiempo discreto el sistema original con fricción utilizando la aproximación de Tustin con una tasa de muestreo de 30 *ms*. Así quedando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.0010 & 0.0001 & 0.0250 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0051 & -0.0040 & 0 & 0.0249 & 0.0002 \\ 0 & -0.0062 & 1.0109 & 0 & 0.0002 & 0.0245 \\ 0 & -0.0790 & 0.0092 & 1 & 0.0004 & -0.0015 \\ 0 & 0.4114 & -0.3190 & 0 & 0.9938 & 0.0173 \\ 0 & -0.4971 & 0.8714 & 0 & 0.0151 & 0.9624 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ -0.0001 \\ 0.0001 \\ 0.0047 \\ -0.0060 \\ 0.0072 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -0.0005 & 0.0001 & 0.0125 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0026 & -0.0020 & 0 & 0.0125 & 0.0001 \\ 0 & -0.0031 & 1.0054 & 0 & 0.0001 & 0.0123 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.2952 \cdot 10^{-4} \\ -0.3748 \cdot 10^{-4} \\ 0.4529 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (30)$$

para luego realizar la realimentación de estados con observador, midiendo la posición del carrito y las posiciones angulares. Los polos se colocaron de manera siguiente

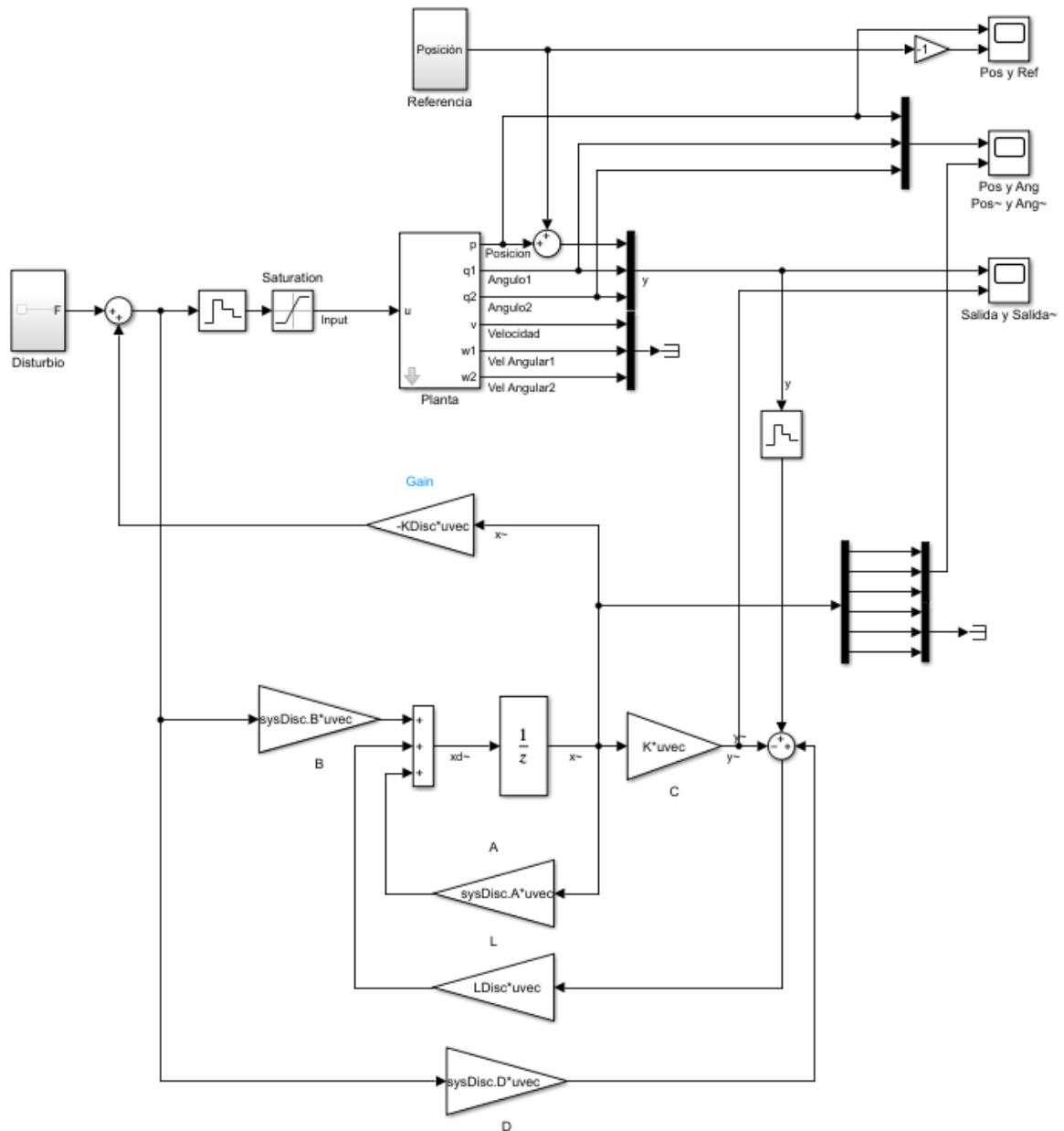
Posición de los Polos (Plano Z)					
0.9560	0.9531	0.9503	0.9418	0.9389	0.9361
Posición de los Polos del Observador (Plano Z)					
0.4066	0.3829	0.3606	0.3012	0.2837	0.2671

quedando las ganancias de realimentación

Ganancias de Realimentación					
0.7006	-34.1842	339.4479	2.3704	34.6514	56.0334
Ganancias de Realimentación del Observador					
1.4308	0.0081	0.0018	28.9658	0.4876	0.1119
0.0061	1.4318	0.0063	0.3489	29.0873	0.4613
0.0007	0.0071	1.4153	0.0161	0.6202	27.7099

Se puede observar en la Figura (5.3.1) la simulación en bloques implementada en Simulink.





## Realimentación de Estados con Observador Discreto

Figura 5.3.1: Simulación en bloques de la realimentación de estados con observador discreto.

## 6. Análisis de Resultados

### 6.1 Diferencias entre modelo y simulación

### 6.2 Error

## 7. Conclusiones

En este trabajo fue posible modelar una planta física a través de la formulación de Euler-Lagrange, y la linealización del mismo. También se definió la observabilidad y controlabilidad del sistema, tanto mediante cuentas analíticas como por inspección de diagramas de Mason, que en caso de estos diagramas se optó por realizarlos para los tres casos estudiados, siendo estos sistema con fricción midiendo posición y ángulos de los joints, midiendo únicamente la posición, y el caso en el que se mide únicamente la posición y no hay fricción. Adicionalmente se diseñaron lazos de control por realimentación de estados, para el caso continuo como discreto y también para el caso de ampliar el sistema para realizar un control integral. Cabe mencionar que también se optó por implementar un observador para dichos sistemas.

Se aprendió aun mas acerca del paquete Simscape y Simulink. Con ayuda de este pudiendo graficar la planta de manera dinámica y estética. Pudiendo también a partir de los gráficos realizados hacer una comparativa entre los resultados entre las diversas plantas y la velocidad con las que estas alcanzan a la referencia. Y el error que presenta el observador comparado con el sistema realimentado idealmente.

Finalmente se realizó una pequeña comparativa entre el problema del Doble péndulo invertido con carrito y el péndulo invertido con carrito simple.

## 8. Referencias

- [1] "Limit switch - Wikipedia", En.wikipedia.org, 2021. [Online]. Disponible: [https://en.wikipedia.org/wiki/Limit\\_switch](https://en.wikipedia.org/wiki/Limit_switch).
- [2] Control Theory: The Double Pendulum Inverted on a Cart  
[https://digitalrepository.unm.edu/math\\_etds/132/](https://digitalrepository.unm.edu/math_etds/132/) .
- [3] G. Dullerud and F. Paganini, A course in robust control theory. New York, NY: Springer, 2005.