

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES - ITBA  
ESCUELA DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

# TRABAJO PRÁCTICO FINAL

## Péndulo doble invertido

AUTORES: Lambertucci, Guido Enrique (Leg. N° 58009)  
Mechoulam, Alan (Leg. N° 58438)

DOCENTES: Gherisin, Alejandro Simón  
Silva Rodrigues, Reurison

22.93 - Control Automatico

BUENOS AIRES

## 0.0. Contenidos

<b>1</b>	<b>Glosario</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Modelo Teórico</b>	<b>4</b>
3.1	Modelo Físico	4
3.2	Espacio de estados	5
3.3	Controlabilidad y Observabilidad	6
<b>4</b>	<b>Simulación</b>	<b>6</b>
4.1	Modelo de Simscape	6
4.2	Simulink	8
<b>5</b>	<b>Modelo de Control</b>	<b>8</b>
5.1	Realimentación de Estados	8
5.2	Observador	9
5.3	Discretización	10
<b>6</b>	<b>Análisis de Resultados</b>	<b>12</b>
6.1	Diferencias entre modelo y simulación	12
6.2	Error	12
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>12</b>
<b>8</b>	<b>Referencias</b>	<b>12</b>

## 1. Glosario

Término	Descripción
$x_0$	Posición horizontal del carrito.
$\theta_1$	Ángulo entre el primer link con la vertical.
$\theta_2$	Ángulo entre el segundo link con la vertical.
$m_0$	Masa del carrito.
$m_1$	Masa del primer link del péndulo.
$m_2$	Masa del segundo link del péndulo..
$L_1$	Longitud del primer link.
$L_2$	Longitud del segundo link..
$l_1$	Distancia entre la base del primer link y su centro de masas.
$l_2$	Distancia entre la base del segundo link y su centro de masas.
$I_1$	Momento de inercia del primer link.
$I_2$	Momento de inercia del segundo link.
$g$	Constante de aceleración de la gravedad.
$u(t)$	Acción de Control.
$\Theta$	Vector de estados.
$Y$	Vector de salida del sistema.
$\hat{\Theta}$	Vector de estados estimado.
$\hat{Y}$	Vector de salida del sistema estimado.
$\Theta_0$	Condición Inicial.
$L$	Lagrangiano.
$M(\Theta)$	Matriz de influencia de masas/inercia en vector de torques.
$V(\Theta, \dot{\Theta})$	Vector de influencia de términos centrífugos y de Coriolis.
$G(\Theta)$	Vector de influencia de la gravedad.

## 2. Resumen

En el presente trabajo se realiza el control por realimentación de estados tanto integral, para el caso continuo y discreto con observador, para el doble péndulo invertido.

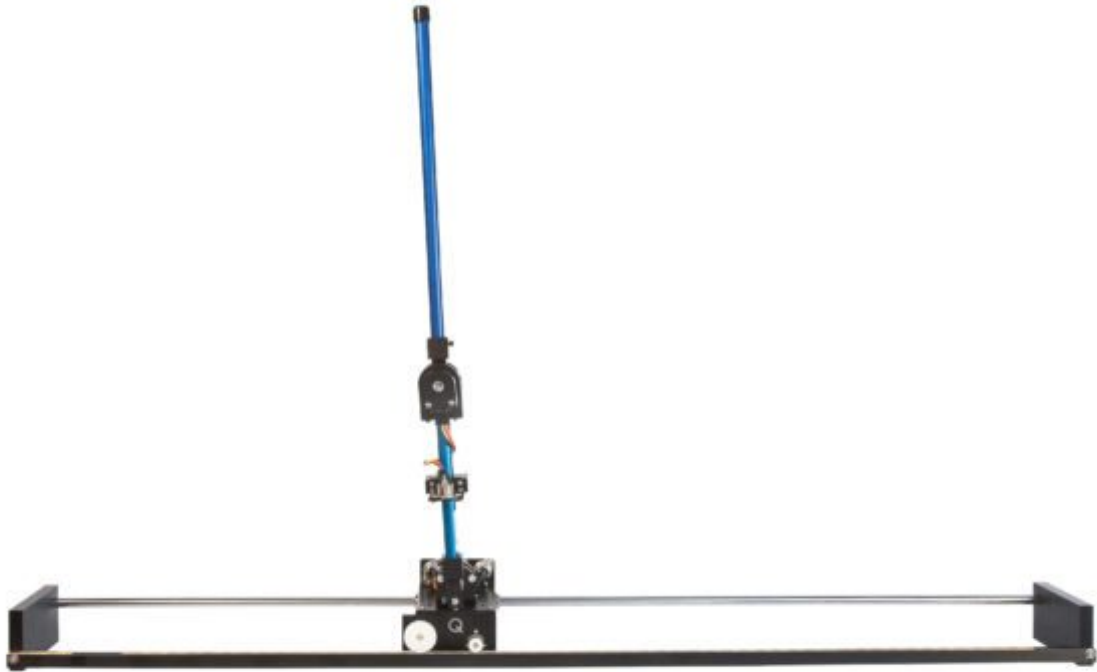


Figura 2.1: Pendulo doble invertido.

Obteniendo el modelo teórico del mismo a partir de ecuaciones, cotejando dicho modelo con los valores linealizados de la planta implementada en Matlab con la ayuda del framework de Simscape para su simulación. También se realiza un estudio en las diferencias entre dichos modelos, y entre los distintos resultados de los métodos de control. Adicionalmente se calcula si el sistema es en efecto controlable y observable, y si existen condiciones en las cuales esto se ve afectado.

### 3. Modelo Teórico

#### 3.1 Modelo Físico

El doble péndulo invertido fue modelado como un manipulador Primático-Rotacional-Rotacional.

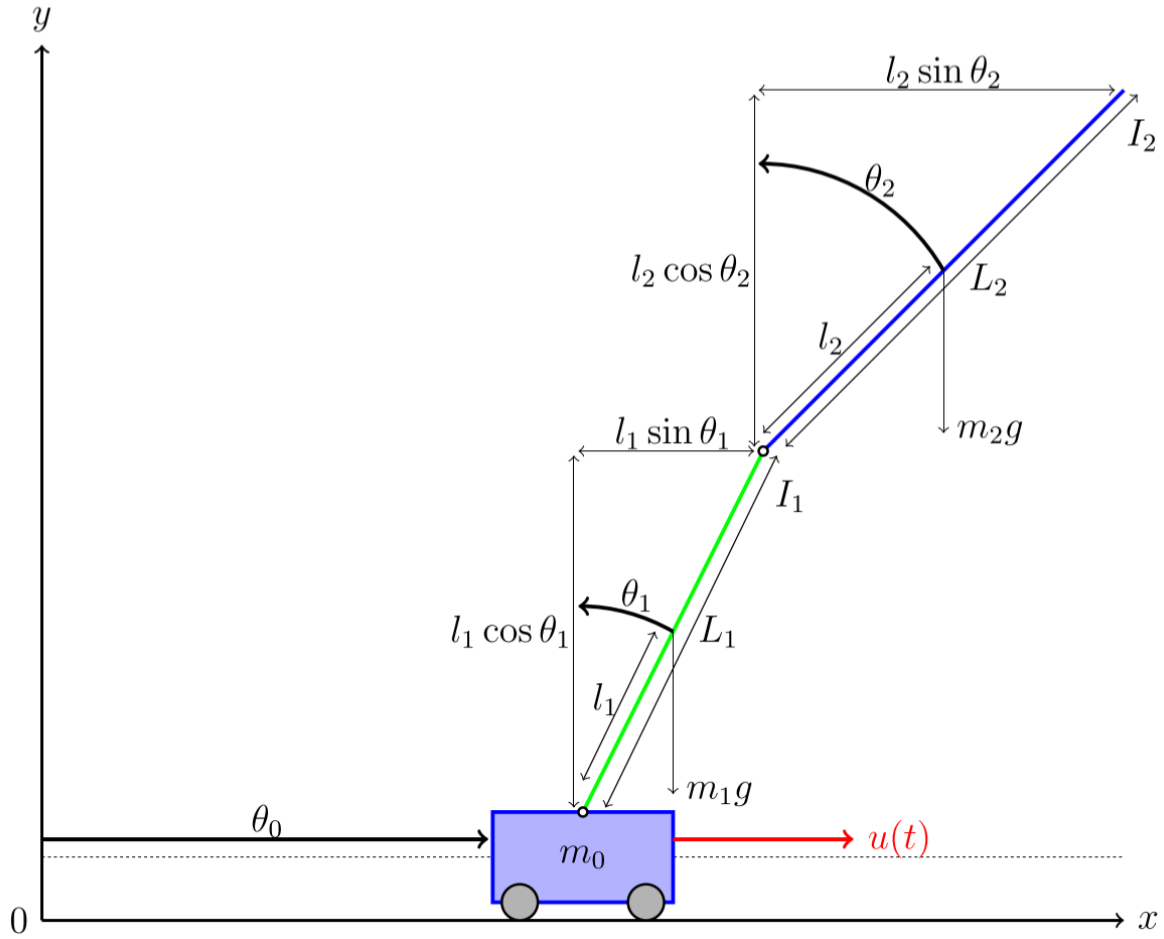


Figura 3.1.1: Modelo teórico del doble péndulo invertido.

Luego utilizando la formulación de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = \tau \quad (1)$$

$$L(\Theta, \dot{\Theta}) = \sum_{i=0}^2 \left( \frac{1}{2} m_i v_{Ci}^T v_{Ci} + \frac{1}{2} I_i \omega_{Ci}^T \omega_{Ci} + u_{refi} - m_i g d_{Ci} \right) \quad (2)$$

Se llega al sistema de segundo orden no lineal:

$$\tau = M(\Theta) \ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) \quad (3)$$

Siendo las matrices:

$$M(\Theta) \ddot{\Theta} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 & m_2 l_2 \cos \theta_2 \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 & m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_2 \cos \theta_2 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 + I_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -(m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & -m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & -m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_1 l_1 + m_2 L_1) g \sin \theta_1 \\ -m_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tau = H \cdot u(t) \quad (7)$$

Si se asume los siguientes valores:

$$l_1 = \frac{1}{2} L_1 \quad l_2 = \frac{1}{2} L_2 \quad I_1 = \frac{1}{12} m_1 L_1^2 \quad I_2 = \frac{1}{12} m_2 L_2^2 \quad (8)$$

Se simplifica a :

$$M(\Theta) \ddot{\Theta} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (\frac{1}{2} m_1 L_1 + m_2) L_1 \cos \theta_1 \frac{1}{2} & m_2 L_2 \cos \theta_2 \\ (\frac{1}{2} m_1 + m_2) L_1 \cos \theta_1 & (\frac{1}{3} m_1 + m_2) L_1^2 & \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{1}{2} m_2 L_2 \cos \theta_2 & \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -(\frac{1}{2} m_1 + m_2) L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & -\frac{1}{2} m_2 L_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & -\frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} (m_1 + m_2) L_1 g \sin \theta_1 \\ -\frac{1}{2} m_2 g L_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tau = H \cdot u(t) \quad (12)$$

Cabe mencionar que  $M(\Theta)$  es una matriz simétrica no-singular, por lo que existe la inversa y también es simétrica.

### 3.2 Espacio de estados

Luego de hacer la linealización del sistema :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3g(2m_1^2 + 5m_1 m_2 + 2m_2^2)}{2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & \frac{3gm_1 m_2}{2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3g(4m_1^2 + 9m_1 m_2 + 4m_0 m_1 + 2m_2^2 + 8m_0 m_2)}{2L_1(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & -\frac{9g*(2m_0 m_2 + m_1 m_2)}{2L_1(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9g(2m_0 m_1 + 4m_0 m_2 + 2m_1 m_2 + m_1^2)}{2L_2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & \frac{3g(4m_0 m_1 + 12m_0 m_2 + 4m_1 m_2 + m_1^2)}{2L_2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4m_1 + 3m_2}{4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2} \\ -\frac{3(2m_1 + m_2)}{L_1(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} \\ \frac{2m_2}{L_2(4m_0 m_1 + 3m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Si se opta por los siguientes valores:

$$m_0 = 5 \text{ Kg} \quad m_1 = 1 \text{ Kg} \quad m_2 = 1 \text{ Kg} \quad L_1 = 1 \text{ m} \quad L_2 = 1.5 \text{ m} \quad g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (15)$$

Se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3.5757 & 0.3973 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29.7973 & -13.1108 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -26.2216 & 22.5135 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1892 \\ -0.2432 \\ 0.036 \end{bmatrix} \quad (17)$$

### 3.3 Controlabilidad y Observabilidad

Se define al set de estados alcanzables  $\mathcal{R}_t$  en un tiempo  $t$  como aquellos estados en los que el sistema se puede encontrar. Por otro lado, se define al subespacio controlable  $\mathcal{C}_{AB}$  como aquellos estados a los que se puede forzar el sistema mediante una entrada  $u(t)$  apropiada. Se puede probar que para  $t > 0$  el set de estados alcanzables  $\mathcal{R}_t$  es igual que el subespacio controlable  $\mathcal{C}_{AB}$ . [3]

Se dice que el par  $(A, B)$  es controlable, y por ende un sistema definido con esas matrices es controlable si la matriz de controlabilidad

$$[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (18)$$

es de rango completo.

Para el caso del péndulo doble, se tiene que

$$[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = \begin{bmatrix} 0 & 0.1892 & 0 & 0.8839 & 0 & 30.4554 \\ 0 & -0.2432 & 0 & -7.7189 & 0 & -324.2311 \\ 0 & 0.0360 & 0 & 7.1876 & 0 & 364.2140 \\ 0.1892 & 0 & 0.8839 & 0 & 30.4554 & 0 \\ -0.2432 & 0 & -7.7189 & 0 & -324.2311 & 0 \\ 0.0360 & 0 & 7.1876 & 0 & 364.2140 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde se puede observar que la matriz es de rango completo, por lo que el sistema es controlable.

Otros dos aspectos importantes del sistema son la detectabilidad y la observabilidad, dado que en la vida real muchas veces no es posible medir todas las variables del sistema.

El estudio de la observabilidad del sistema se basa en comprobar la posibilidad de estimar las variables de estado a partir de la salida. Por otro lado, un estudio más débil pero de igual importancia teórica es la detectabilidad. Un sistema es detectable si todos sus estados no observables son estables. Se puede probar que si el par  $(C^*, A^*)$  es controlable, entonces el par  $(A, C)$  es observable.

En el caso del problema estudiado, se tiene que, midiendo la posición del carrito y las dos posiciones angulares, es decir

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

luego

$$[C^* \ A^*C^* \ \dots \ A^{*n-1}C^*] \quad (21)$$

es de rango completo, por lo que el sistema será observable midiendo las variables de estado definidas por la matriz  $C$ .

## 4. Simulación

### 4.1 Modelo de Simscape

Para lograr mayor apego a la realidad, se decidió utilizar un modelo con fricción obtenido utilizando el framework de Simscape de Simulink, que se pueden observar en las Figuras (4.1.1) y (4.1.2).

Los valores de fricción que se utilizaron para cada joint son de  $0.004 \frac{N \cdot s}{m}$ , resultando así en las siguientes matrices:

$$B_{simscape} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1892 \\ -0.2432 \\ 0.2973 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Figura 4.1.1: Bloques de la simulación del péndulo doble realizada con el framework de Simscape en Simulink.



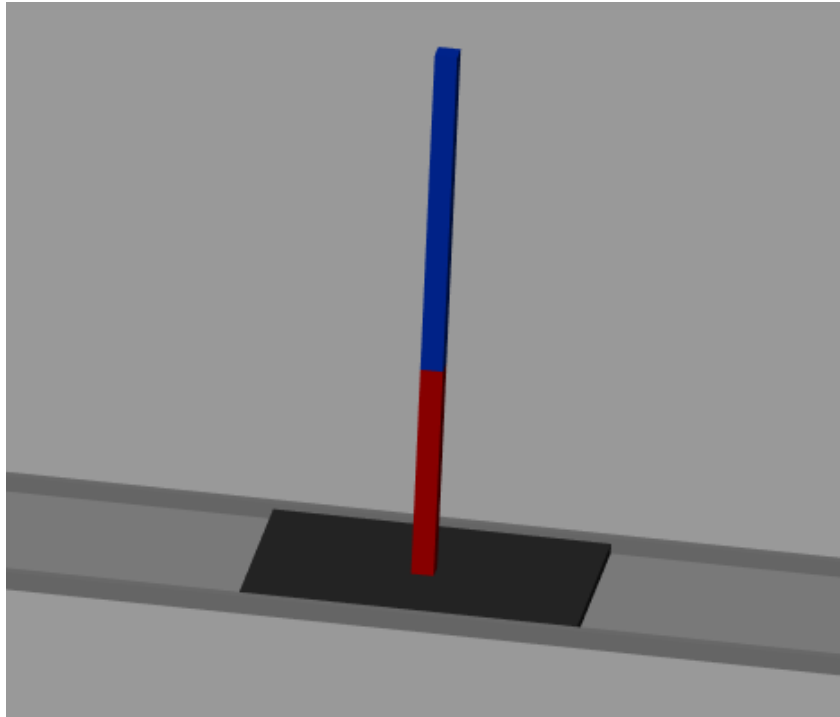


Figura 4.1.2: Simulación del péndulo doble realizada con el framework de Simscape en Simulink.

## 4.2 Simulink

# 5. Modelo de Control

## 5.1 Realimentación de Estados

Partiendo del sistema con fricción de la simulación, se comprueba la controlabilidad de este de manera homogénea a la explicada en la Sección (3.3).

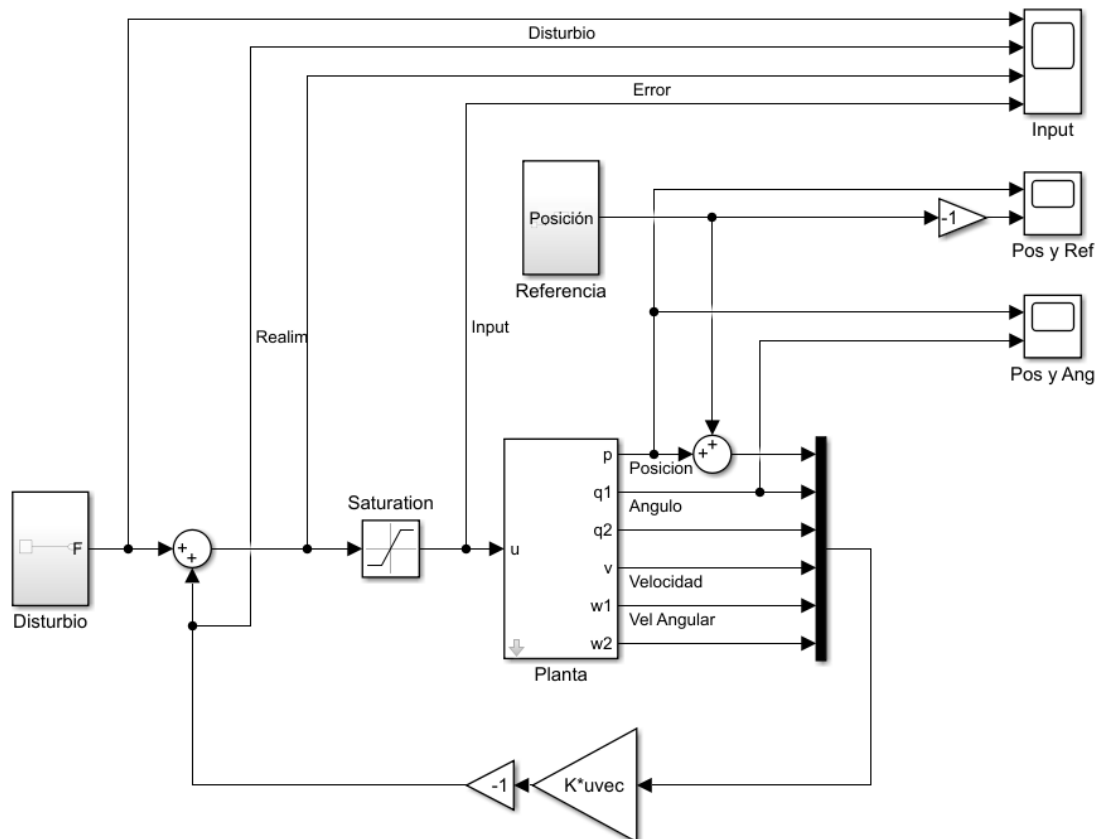
Luego, se realizó la realimentación de estados utilizando el comando *place* de Matlab, colocando a los polos según la Tabla (5.1).

Posición de los Polos					
-3	-2.5	-2.4	-2	-1.9	-1.8

La posición de los polos fue seleccionada de manera tal que el control sea rápido, pero no lo suficientemente rápido como para que la entrada no desvíe demasiado al sistema del punto de trabajo, lo cual haría que este se desestabilice ya que se está utilizando una técnica de control lineal en un sistema intrínsecamente no lineal. Quedando entonces las ganancias de realimentación de la siguiente manera

Ganancias					
2.63	20.81	517.25	7.36	74.88	94.07

Se puede observar en la Figura (5.1.1) la simulación en bloques implementada en Simulink.



## Realimentación de Estados

Figura 5.1.1: Simulación en bloques de la realimentación de estados.

### 5.2 Observador

Como paso siguiente, se implementó una realimentación de estados con observador. Para esto, se comprobó la observabilidad del sistema con fricción, midiendo la posición del carrito y ambas posiciones angulares para estimar las variables del sistema restantes.

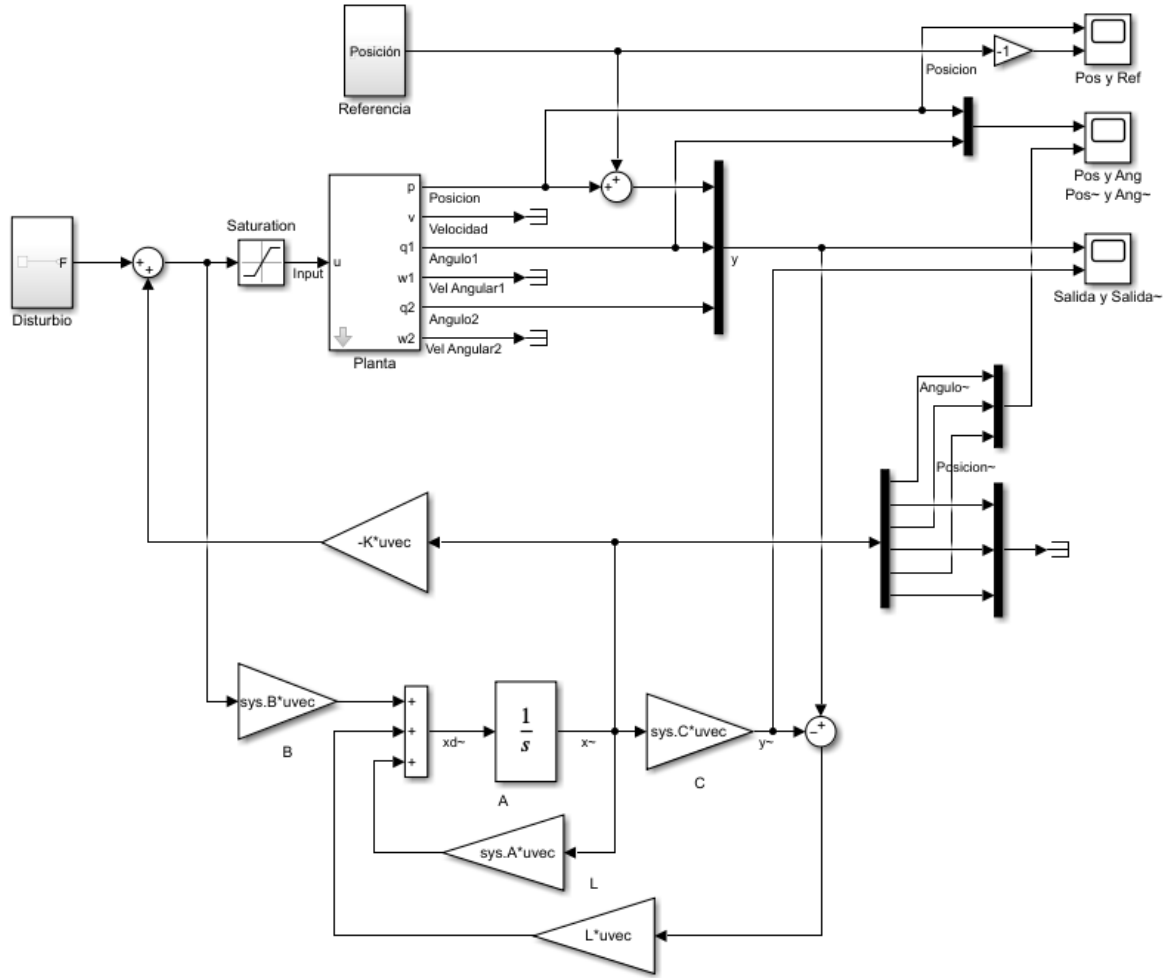
Se decidió colocar los polos del observador de manera tal que estos sean mucho más rápidos que los del sistema. Esto es para que la señal error entre las variables de estado y las estimaciones del observador converga rápidamente a cero. De esta manera, quedaron los polos del observador colocados según la Tabla (5.2).

Posición de los Polos del Observador					
-30	-25	-24	-20	-19	-18

por lo que las ganancias del observador quedan

Ganancias					
47.18	3.05	0.88	528.29	60.25	18.75
2.16	43.35	0.73	40	468.40	12.29
0.40	0.80	43.02	6.67	22.13	450.94

Se puede observar en la Figura (5.2.1) la simulación en bloques implementada en Simulink.



## Realimentación de Estados con Observador

Figura 5.2.1: Simulación en bloques de la realimentación de estados con observador.

### 5.3 Discretización

Como último paso, se decidió pasar a tiempo discreto el sistema original con fricción utilizando la aproximación de Tustin con una tasa de muestreo de 30 ms. Así quedando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.0010 & 0.0001 & 0.0250 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0051 & -0.0040 & 0 & 0.0249 & 0.0002 \\ 0 & -0.0062 & 1.0109 & 0 & 0.0002 & 0.0245 \\ 0 & -0.0790 & 0.0092 & 1 & 0.0004 & -0.0015 \\ 0 & 0.4114 & -0.3190 & 0 & 0.9938 & 0.0173 \\ 0 & -0.4971 & 0.8714 & 0 & 0.0151 & 0.9624 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ -0.0001 \\ 0.0001 \\ 0.0047 \\ -0.0060 \\ 0.0072 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -0.0005 & 0.0001 & 0.0125 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0026 & -0.0020 & 0 & 0.0125 & 0.0001 \\ 0 & -0.0031 & 1.0054 & 0 & 0.0001 & 0.0123 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.2952 \cdot 10^{-4} \\ -0.3748 \cdot 10^{-4} \\ 0.4529 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (27)$$

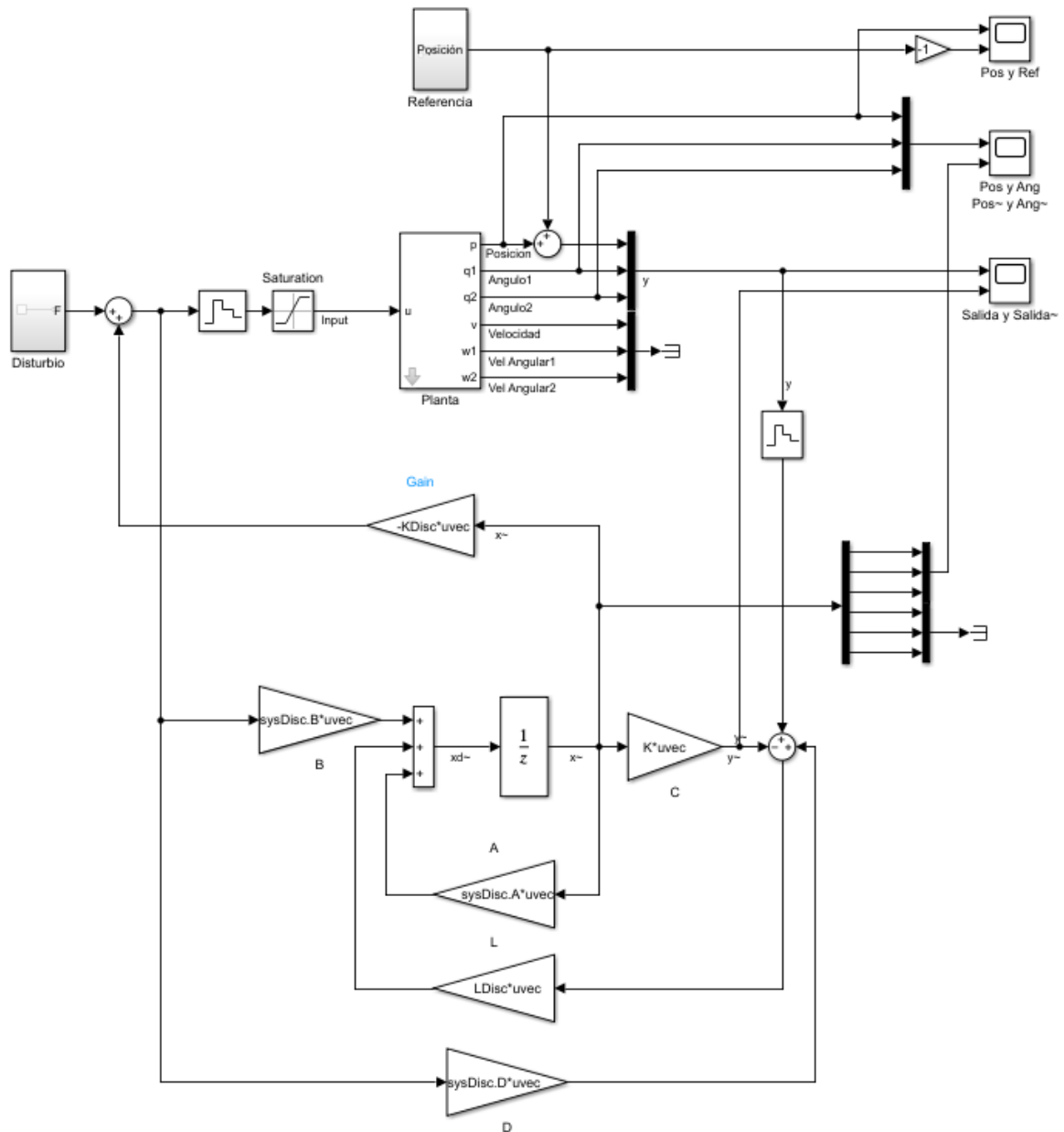
para luego realizar la realimentación de estados con observador, midiendo la posición del carrito y las posiciones angulares. Los polos se colocaron de manera siguiente

Posición de los Polos (Plano Z)					
0.9560	0.9531	0.9503	0.9418	0.9389	0.9361
Posición de los Polos del Observador (Plano Z)					
0.4066	0.3829	0.3606	0.3012	0.2837	0.2671

quedando las ganancias de realimentación

Ganancias de Realimentación					
0.7006	-34.1842	339.4479	2.3704	34.6514	56.0334
Ganancias de Realimentación del Observador					
1.4308	0.0081	0.0018	28.9658	0.4876	0.1119
0.0061	1.4318	0.0063	0.3489	29.0873	0.4613
0.0007	0.0071	1.4153	0.0161	0.6202	27.7099

Se puede observar en la Figura (5.3.1) la simulación en bloques implementada en Simulink.



## Realimentación de Estados con Observador Discreto

Figura 5.3.1: Simulación en bloques de la realimentación de estados con observador discreto.

## 6. Análisis de Resultados

### 6.1 Diferencias entre modelo y simulación

### 6.2 Error

## 7. Conclusiones

Conclusiones es que esta god

## 8. Referencias

- [1] "Limit switch - Wikipedia", En.wikipedia.org, 2021. [Online]. Disponible: [https://en.wikipedia.org/wiki/Limit\\_switch](https://en.wikipedia.org/wiki/Limit_switch).

- [2] Control Theory: The Double Pendulum Inverted on a Cart  
[https://digitalrepository.unm.edu/math\\_etds/132/](https://digitalrepository.unm.edu/math_etds/132/) .
- [3] G. Dullerud and F. Paganini, A course in robust control theory. New York, NY: Springer, 2005.