

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES - ITBA  
ESCUELA DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

# TRABAJO PRÁCTICO FINAL

AUTOR: Londero Bonaparte, Tomás Guillermo (Leg. N° 58150)  
Maselli, Carlos Javier (Leg. N° 59564)

DOCENTES: Ghersin, Alejandro Simon  
Silva Rodrigues, Reurison

22.93 - Control Automático

BUENOS AIRES

# 1. Índice

## 1.1. Contenidos

<b>1</b>	<b>Índice</b>	<b>1</b>
1.1	Contenidos	1
1.2	Lista de Figuras	1
<b>2</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Diseño de Planta</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Realimentación de Estados</b>	<b>2</b>
4.1	Consideraciones previas	2
4.2	Linealización	3
4.3	Tiempo continuo	3
4.4	Control integral en tiempo continuo	3
4.5	Control integral en tiempo discreto	4
<b>5</b>	<b>Loop Shaping</b>	<b>5</b>
5.1	Control del ángulo	5
5.2	Control del posición	6
5.3	Control en tiempo discreto	8

## 1.2. Lista de Figuras

3.1	Planta empleada en Simulink desarrollada con Simscape.	2
4.2	Control por Realimentación de estados en tiempo continuo.	3
4.3	Salidas y entradas del control por realimentación de estados en tiempo continuo	3
4.4	Control por Realimentación de estados con acción integral en tiempo continuo.	4
4.5	Entradas y salidas del Control por Realimentación de estados con acción integral en tiempo continuo.	4
4.6	Control por Realimentación de estados con acción integral en tiempo discreto.	5
4.7	Salidas del Control por Realimentación de estados con acción integral en tiempo discreto.	5
5.8	Diagrama de Bode de la ganancia de lazo $P_t \cdot C_t$ .	6
5.9	Diagrama de Nyquist de la ganancia de lazo $P_t \cdot C_t$ .	6
5.10	Control por Loop Shaping del ángulo.	6
5.11	Diagrama de Bode de la ganancia de lazo $P_x \cdot C_x$ .	7
5.12	Diagrama de Nyquist de la ganancia de lazo $P_x \cdot C_x$ .	7
5.13	Posición del carro y ángulo el péndulo frente a una perturbación.	8

## 2. Introducción

En el siguiente informe se muestra el desarrollo de distintos tipos de controladores discretos para una planta compuesta por un actuador prismático y uno rotacional, es decir un péndulo simple con carrito.

## 3. Diseño de Planta

Para el modelado de la planta, se tomaron las ecuaciones provistas del libro de Astrom y Murray:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{-ml\sin(x_3)x_4^2 + mg \left[ \frac{ml^2}{J_t} \cos(x_3)\sin(x_3) + F \right]}{M_t - m \left[ \frac{ml^2}{J_t} \cos(x_3)^2 \right]} \\ \dot{x}_4 &= \frac{-ml^2\sin(x_3)\cos(x_3)x_4^2 + M_t g l \sin(x_3) + l \cos(x_3)F}{\frac{J_t M_t}{m} - m [l \cos(x_3)]^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Donde:

- La masa del carro es  $M = 0.5 \text{ kg}$ .
- La masa del péndulo es  $m = 0.2 \text{ kg}$ .
- La inercia es  $J = 0.006 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
- La gravedad es  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .
- El largo del péndulo es  $L = 0.6 \text{ m}$ .
- La distancia la centro de masa del péndulo  $l = 0.3 \text{ m}$ .
- $M_t = M + m$ .
- $J_t = J + ml^2$ .

Para el desarrollo en Simulink se valió del sistema presente en la Figura (3.1).

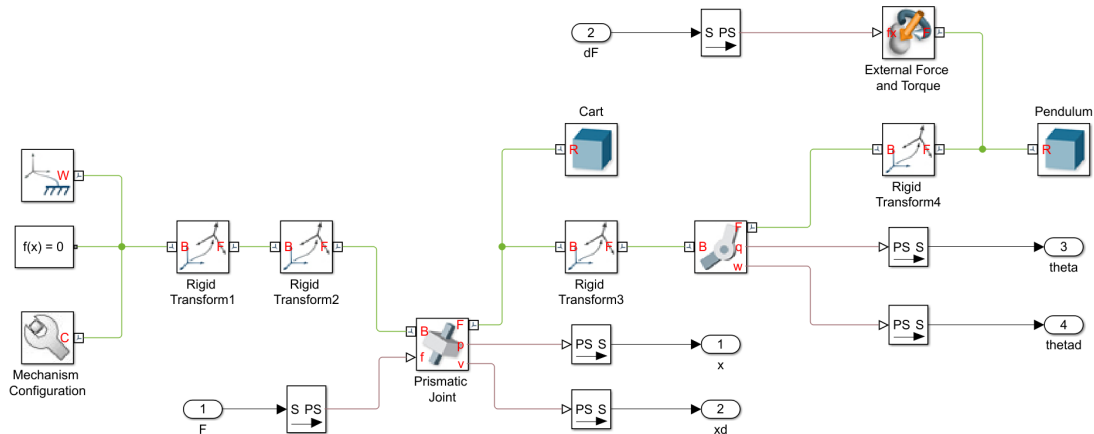


Figura 3.1: Planta empleada en Simulink desarrollada con Simscape.

En dicho sistema posee 2 entradas y 4 salidas. Las primeras consisten en la fuerza aplicada al carro (entrada 1 llamada  $F$ ) y un disturbio en el péndulo (entrada 2 denominada  $dF$ ). Por otro lado, las 4 salidas son las variables de estado: posición del carro, velocidad del carro, ángulo del péndulo y velocidad angular del péndulo.

## 4. Realimentación de Estados

### 4.1 Consideraciones previas

Antes de comenzar el análisis es importante destacar que previo a iniciar con el proceso que se describe a continuación, se verificó la controlabilidad y observabilidad del sistema. Los resultados de esto, son que el sistema es observable cuando se toma como salida del mismo la posición del carrito. Sin embargo, no lo es tomando como salida el ángulo del péndulo.

## 4.2 Linealización

En base a las Ecuaciones (1), se linealiza el sistema en el punto de equilibrio donde todas las variables de estado son nulas. Además, se toma como salida del sistema, la posición del carrito, para poder implementar luego un observador de estados. Se obtiene entonces el siguiente sistema en espacio de estados.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.6727 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 31.1818 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.8182 \\ 0 \\ 4.5455 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad D = 0 \quad (2)$$

Estas matrices representativas del sistema linealizado en espacio de estados, son utilizadas luego para calcular las ganancias en la realimentación para cada uno de los estados.

## 4.3 Tiempo continuo

Para realizar el análisis es este caso se utiliza el diagrama de Simulink que se observa en la Figura (4.2), colocando todos los polos del sistema en -10 con la función *acker()*.

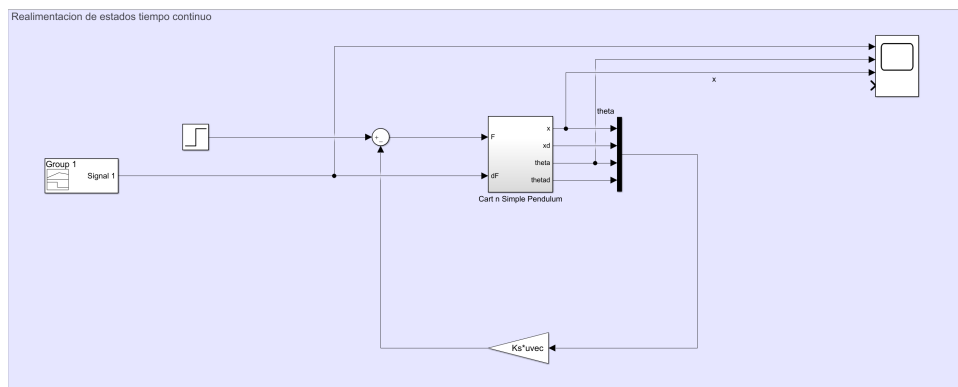


Figura 4.2: Control por Realimentación de estados en tiempo continuo.

Se muestra en la Figura (4.3) tanto las salidas como las entradas del sistema. Puede observarse que tanto al aplicar el escalón inicial de fuerza como al aplicar un disturbio a los 4 segundos, el sistema es capaz de retornar a la posición de equilibrio en un tiempo menor a 3 segundos para el caso de la mayor perturbación.

Se observa además, que el sistema tiene error permanente en la posición del carrito, es por ello que se implementa a continuación la acción integral.

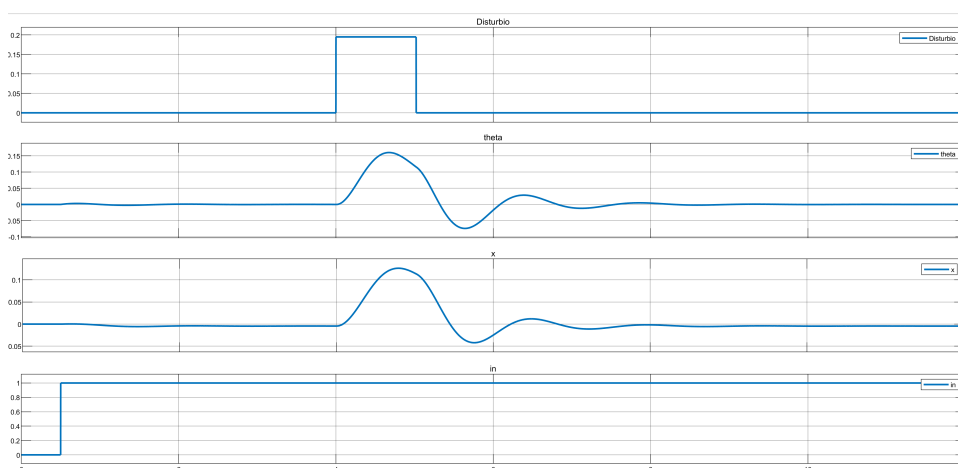


Figura 4.3: Salidas y entradas del control por realimentación de estados en tiempo continuo

## 4.4 Control integral en tiempo continuo

Con el fin de eliminar el error permanente, se implementa el sistema con acción integral como se ve en la Figura (4.4). Cabe aclarar que se le agrega la posibilidad de cambiar la referencia del sistema, pudiendo así seleccionar

la posición final del carrito respecto al origen.

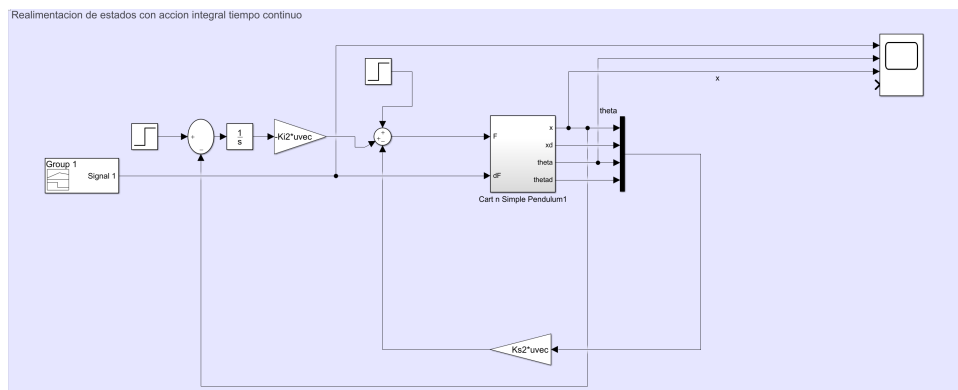


Figura 4.4: Control por Realimentación de estados con acción integral en tiempo continuo.

Los polos del sistema se ubican teniendo cuidado de colocar 2 polos lentos relacionados con las variables de posición y velocidad de carrito y 2 polos mas rápidos relacionados con el ángulo y la velocidad angular del péndulo, siendo así estos ubicados en -3 y -15 respectivamente.

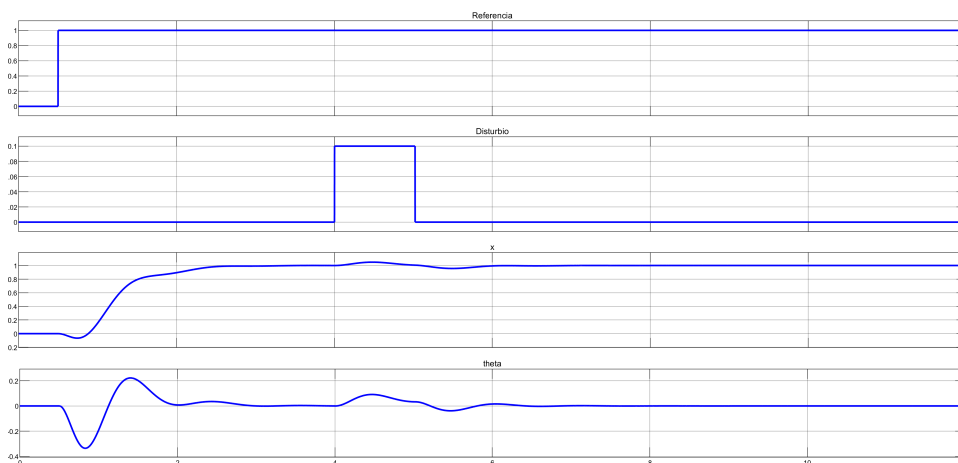


Figura 4.5: Entradas y salidas del Control por Realimentación de estados con acción integral en tiempo continuo.

En la Figura (4.5) se observa que el sistema se estabiliza rápidamente tanto al cambiar la referencia como ante un disturbio y en este caso se logra eliminar el error permanente.

## 4.5 Control integral en tiempo discreto

Por último se implementa el sistema con acción integral en tiempo discreto, utilizando un integrador discreto y los *Zero Order Hold* correspondientes, como se observa en la Figura (4.6)

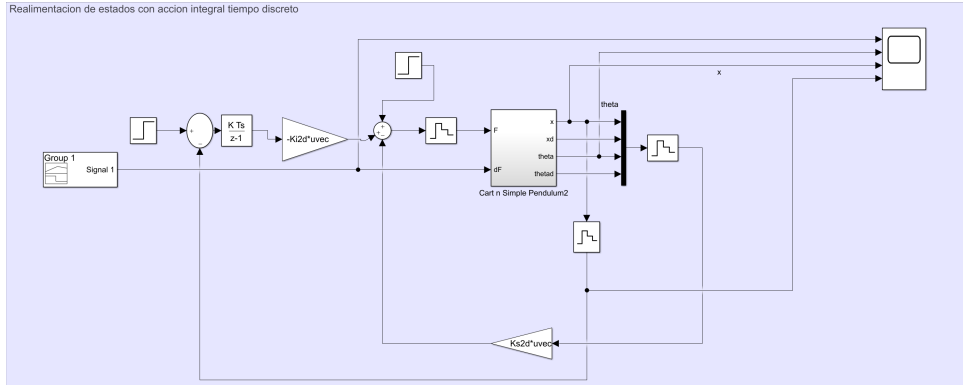


Figura 4.6: Control por Realimentación de estados con acción integral en tiempo discreto.

Para ubicar los polos, se utiliza *lqi* (*lqr* con acción integral), dándole poca penalización en la matriz Q a la posición y a la velocidad del carrito, y mucha al ángulo en el que se encuentra. Además, se selecciona un tiempo de muestreo de 50 ms.

Conservando las entradas del caso anterior, se muestran las salidas del sistema continuo y su discretización en la Figura (4.7).

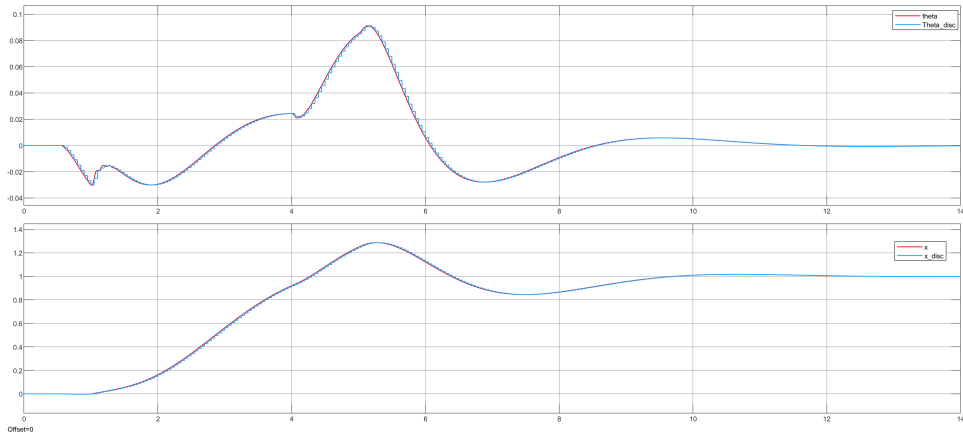


Figura 4.7: Salidas del Control por Realimentación de estados con acción integral en tiempo discreto.

Se puede observar que en este caso el funcionamiento del sistema continua siendo correcto.

## 5. Loop Shaping

### 5.1 Control del ángulo

Se tomó la transferencia de la planta a lazo abierto tomando como salida la posición angular, siendo esta:

$$P_t = \frac{6.6667}{(s - 6.763)(s + 6.763)}$$

Separando la transferencia en parte de fase mínima y pasa todo se obtienen las siguientes transferencias:

$$P_{tpap} = \frac{s + 6.763}{s - 6.763} \quad P_{tmp} = \frac{6.6667}{(s + 6.763)^2}$$

Definiendo la ganancia de lazo  $L_t = P_t \cdot C_t$ , siendo  $C_t$  el controlador, se observan los diagramas de Bode y Nyquist. Iterando y buscando que el controlador sea propio, se obtiene el siguiente modelo:

$$C_t = \frac{7.0795 \cdot 10^5}{P_{tmp}} \frac{s + 20}{s(s + 100)^3}$$

Con dicha transferencia se obtienen los diagramas presentados en las Figuras (5.8) y (5.9).

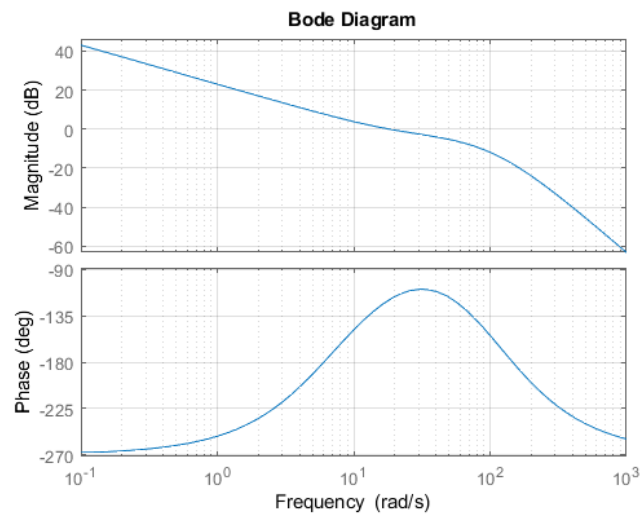


Figura 5.8: Diagrama de Bode de la ganancia de lazo  $P_t \cdot C_t$ .

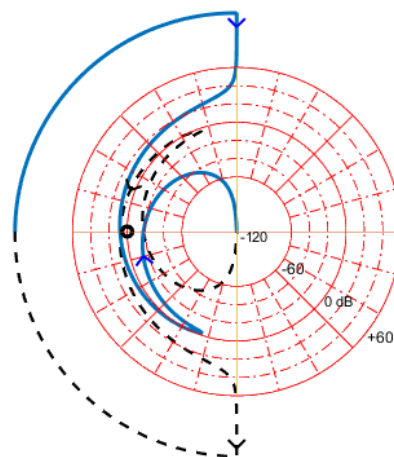


Figura 5.9: Diagrama de Nyquist de la ganancia de lazo  $P_t \cdot C_t$ .

## 5.2 Control del posición

Con lo obtenido en la sección anterior se realiza un subsistema con la planta y el controlador desarrollado.

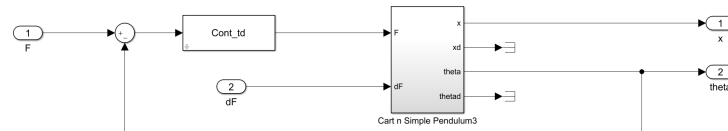


Figura 5.10: Control por Loop Shaping del ángulo.

Linealizando dicho sistema, tomando la posición del carro como salida y con condiciones iniciales nulas, se obtiene la siguiente transferencia:

$$P_x = \frac{2.1238 \cdot 10^5 (s+20)(s+6.763)^2 (s+5.718)(s-5.718)}{s^2 (s+183.7)(s+6.766)(s^2+8.029s+74.89)(s^2+101.5s+6958)}$$

Dado que el sistema no pose polo inestables, no se separa el sistema en parte pasa todo y de fase mínima. De forma análoga a lo realizado en la Sección (5.1), se consigue el siguiente modelo de controlador:

$$C_x = -10.9648 \frac{s + 1}{s + 100}$$

Se obtuvieron así los diagramas presentados en las Figuras (5.11) y (5.12).

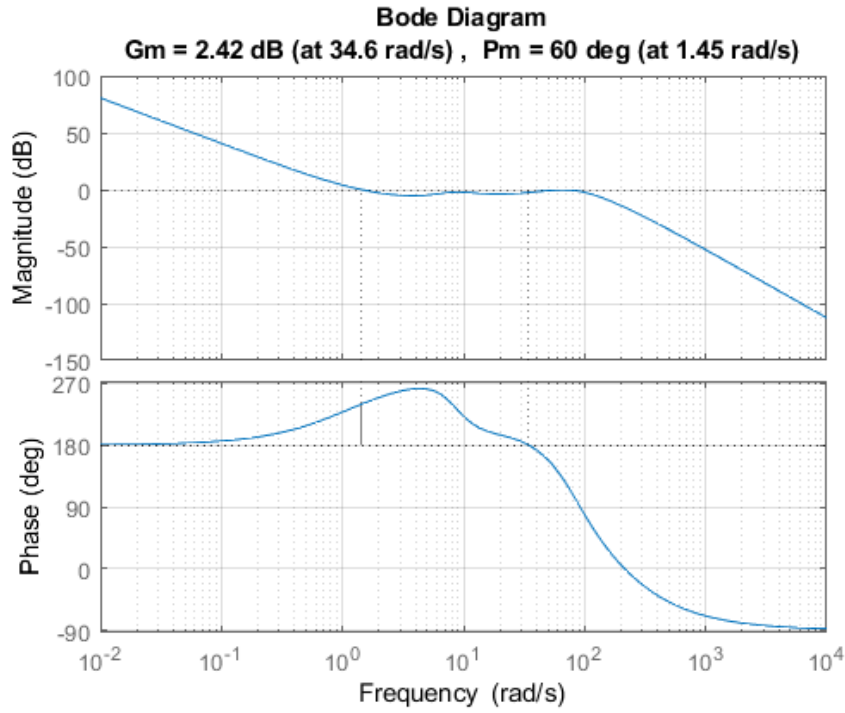


Figura 5.11: Diagrama de Bode de la ganancia de lazo  $P_x \cdot C_x$ .

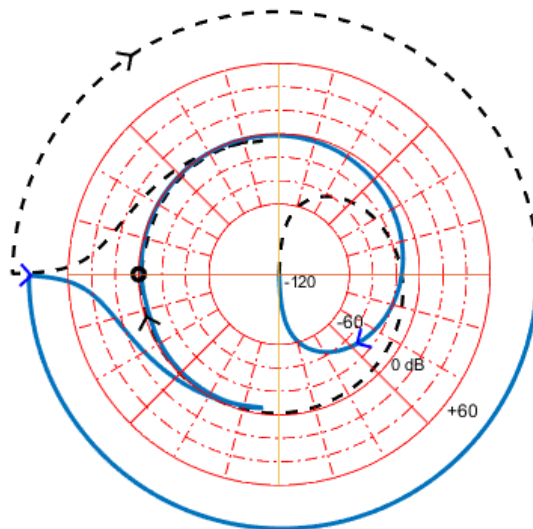


Figura 5.12: Diagrama de Nyquist de la ganancia de lazo  $P_x \cdot C_x$ .



### 5.3 Control en tiempo discreto

Para conseguir el control en tiempo discreto, se define un período de muestreo  $T_s = 1 \text{ ms}$ . Además, se consiguen transformar las transferencias  $C_t$  y  $C_x$  en tiempo discreto mediante la función  $c2d$ , siendo estas las siguientes:

$$C_{td} = 46.639 \cdot \frac{(z+1)(z-0.9933)^2(z-0.9802)}{(z-1)(z-0.9048)^3}$$

$$C_{xd} = -10.448 \cdot \frac{z-0.999}{(z-0.9048)}$$

Colocando bloques de *Zero Order Hold* tanto a la entrada como a las salidas de la planta, se observan las salidas del sistema:

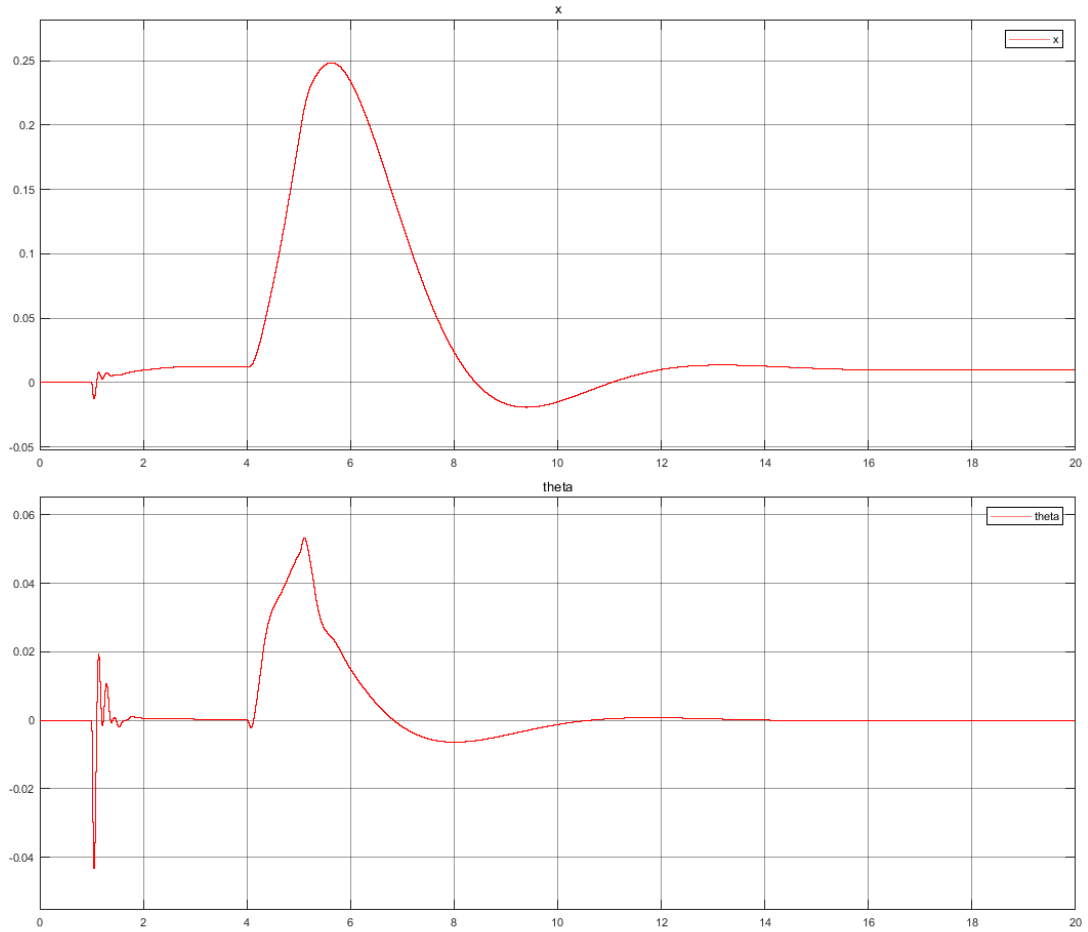


Figura 5.13: Posición del carro y ángulo el péndulo frente a una perturbación.