0.1 Modelo Físico

El doble péndulo invertido fue modelado como un manipulador Primático-Rotacional-Rotacional.

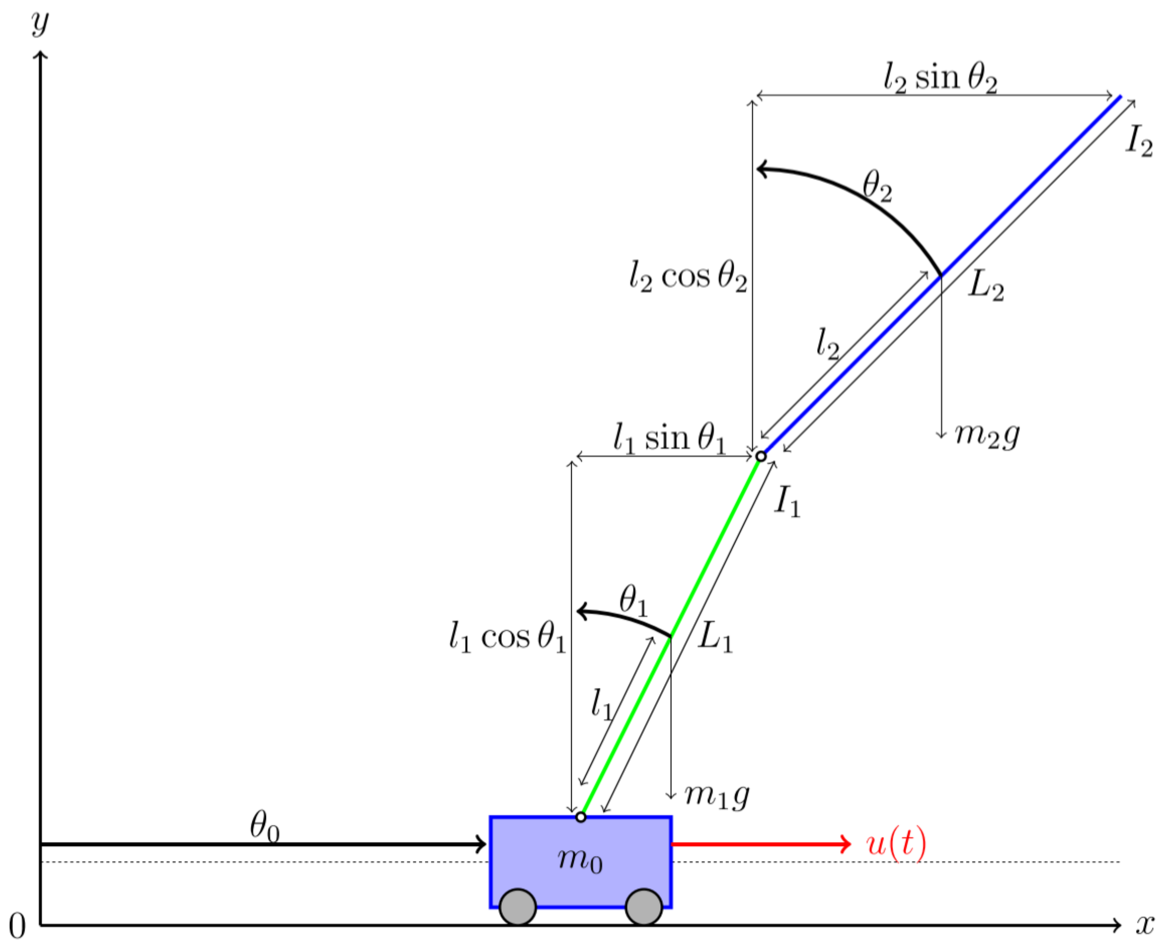

Figura 0.1.1: Modelo teórico del doble péndulo invertido.

Luego utilizando la formulación de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = \tau \tag{1}$$

$$L\left(\Theta, \dot{\Theta}\right) = \sum_{i=0}^{2}\left(\frac{1}{2}m_i v_{Ci}^T v_{Ci} + \frac{1}{2}I_i \omega_{Ci}^T \omega_{Ci} + u_{refi} - m_i g d_{Ci}\right) \tag{2}$$

Se llega al sistema de segundo orden no lineal:

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V\left(\Theta, \dot{\Theta}\right) + G(\Theta) \tag{3}$$

Siendo las matrices:

$$M(\Theta)\ddot{\Theta} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (m_1 l_1 + m_2 L_1)\cos\theta_1 & m_2 l_2 \cos\theta_2 \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1)\cos\theta_1 & m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_2 \cos\theta_2 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 + I_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$V\left(\Theta, \dot{\Theta}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -(m_1 l_1 + m_2 L_1)\sin\theta_1 \dot{\theta_1} & -m_2 l_2 \sin\theta_2 \dot{\theta_2} \\ 0 & 0 & m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta_2} \\ 0 & -m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta_1} & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_1 l_1 + m_2 L_1) g \sin\theta_1 \\ -m_2 g l_2 \sin\theta_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \tau = H \cdot u(t) \tag{7}$$

Si se asume los siguientes valores:

$$l1 = \frac{1}{2}L_1 \qquad l2 = \frac{1}{2}L_2 \qquad I_1 = \frac{1}{12}m_1 L_1^2 \qquad I_2 = \frac{1}{12}m_2 L_2^2 \tag{8}$$

Se simplifica a :

$$M\left(\Theta\right)\ddot{\Theta} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & \left(\frac{1}{2}m_1 L_1 + m_2\right) L_1 \cos\theta_1 \frac{1}{2} & m_2 L_2 \cos\theta_2 \\ \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right) L_1 \cos\theta_1 & \left(\frac{1}{3}m_1 + m_2\right) L_1^2 & \frac{1}{2}m_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{1}{2}m_2 L_2 \cos\theta_2 & \frac{1}{2}m_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \frac{1}{3}m_2 L_2^2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$V\left(\Theta, \dot{\Theta}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right) L_1 \sin\theta_1 \dot{\theta_1} & -\frac{1}{2}m_2 L_2 \sin\theta_2 \dot{\theta_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta_2} \\ 0 & -\frac{1}{2}m_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta_1} & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$G\left(\Theta\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)L_1 g \sin\theta_1 \\ -\frac{1}{2}m_2 g L_2 \sin\theta_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \tau = H \cdot u(t) \tag{12}$$

0.2 Linealización

asd