Metody planowania i analizy eksperymentów
(Zadania do samodzielnego rozwiązania)

Część I: Zmienne losowe i ich rozkłady.

3 kwietnia 2020

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Firma posiada pięć jednakowych drukarek pracujących niezależnie od siebie. Prawdopodobieństwo tego, że w danym dniu drukarka ulegnie awarii wynosi 0,2. Oblicz:

a) prawdopodobieństwo, że w ciągu dnia wszystkie drukarki będą sprawne;

b) prawdopodobieństwo, że awarii ulegną więcej niż dwie drukarki.

Jaka jest oczekiwana liczba drukarek, które ulegną awarii w ciągu dnia?

Odp.: a) 0.32768, b) 0.05792, EX = 1.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Po mieście jeździ 1000 samochodów. Prawdopodobieństwo, ze samochód ulegnie uszkodzeniu w ciągu doby jest równe p = 0.002. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej jeden samochód w ciągu doby ulegnie uszkodzeniu? (zakładamy, że samochody psują się niezależnie). Porównaj wynik dokładny z wynikiem uzyskanym w oparciu o przybliżenie rozkładem Poissona.

Odp.: a) z rozkładu Bernoulliego (wynik dokładny) ≈ 0.8649, b) na podstawie przybliżenia rozkładem Poissona: ≈ 0.8647.

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Zmienna losowa X, dla której $P(X = x_k) = p_k$, ma rozkład prawdopodobieństwa podany w tabeli

x_k	-1	2	4	6
p_k	0.2	0.4	0.3	A

Wyznacz A, a następnie oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej losowej X.

Odp.: A = 0.1, EX = 2.4, VarX = 4.44.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot x(2-x) & \text{dla } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie C jest pewną stałą dodatnią. Wyznacz wartość stałej C. Następnie oblicz wartość oczekiwaną zmiennej X oraz $P(0.5 < X < 1)$.

Odp.: $C = 3/4$, $EX = 1$, $P(0.5 < X < 1) = 11/32$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Urządzenie stosowane do pomiaru średnicy produkowanych elementów charakteryzuje się błędem pomiaru, będącym zmienną o rozkładzie normalnym o średniej równej 0 i wariancji równej 4. Korzystając z tablic rozkładu normalnego, oblicz prawdopodobieństwo, że:

a) błąd pomiaru będzie zawarty w przedziale $[0, 0.2]$;

b) błąd pomiaru nie przekroczy 0.5.

Odp.: a) 0.0398, b) 0.5987.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Zakładamy, że zmienna X ma rozkład normalny o średniej 2 i wariancji 9. Korzystając z tablic, wyznacz wartość A, dla której: **a)** $P(X \leq A) = 0.95$, **b)** $P(X > A) = 0.25$.

Odp.: $a)A \approx 6.935$, b) $A \approx 4.01$.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Zakładamy, że zmienna X ma rozkład normalny o wartości średniej 3 i wariancji 4. Korzystając z tablic rozkładu normalnego oblicz $P(X > 0)$ oraz $P(-5 < X \leq 5)$.

Odp.: a) $P(X > 0) \approx 0.9332$, b) $P(-5 < X \leq 5) \approx 0.8413$.

$\boxed{\textbf{8.}}$ Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na [0,1], a niezależna od niej zmienna losowa Y ma rozkład Bernoulliego o parametrach $n = 10$ i $p = 0.5$. Oblicz:

a) $E(2X - 3Y)$, **b)** EXY, **c)** $Var(\frac{3Y-X}{2})$.

Odp.: a) -14, b) 2.5, c) $5\frac{31}{48}$.

$\boxed{\textbf{9.}}$ Czas sprawnej pracy pewnego urządzenia (liczony w dniach) ma rozkład normalny o parametrach $m = 50$ i $\sigma = 5$. Jaki powinien być okres gwarancji T aby na 90% urządzenie działało przynajmniej przez okres gwarancji? *Wskazówka:* Szukamy T, dla którego $P(X \geq T) \geq 0.90$.

Odp.: $T \leq 43$

$\boxed{\textbf{10.}}$ Zakładamy, że rozkład płac pracowników w pewnej firmie jest normalny z wartością średnią $m = 3000$ oraz wariancją $\sigma^2 = 10^6$.

a) Wybrano losowo jednego pracownika. Oblicz prawdopodobieństwo, że płaca wylosowanego pracownika zawiera się w przedziale od 2800zł do 3200zł.

b) Wybrano losowo $n = 25$ pracowników. Wykorzystując tablice rozkładu normalnego, oblicz prawdopodobieństwo, że średnia płaca wylosowanych pracowników jest większa od 2800zł. *Wskazówka: wykorzystaj fakt, że średnia płaca* $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ *ma rozkład* $N(m, \sigma/\sqrt{n})$.

Odp.: a) 0.1586 b) 0.8413.