Metody planowania i analizy eksperymentów
(Zadania do samodzielnego rozwiązania)

Część II: Estymacja punktowa i przedziałowa.
17 kwietnia 2020

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Wiadomo, ze rozkład liczby punktów w teście kwalifikacyjnym (dla ogółu kandydatów na pewnej uczelni) jest normalny z wartością oczekiwaną $m = 60$ oraz wariancją $\sigma^2 = 400$. Wybrano losowo grupę 100 kandydatów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w losowo wybranej grupie średnia próbkowa będzie różniła się (co do wartości bezwzględnej) od średniej dla ogółu kandydatów o mniej niż 1 punkt? *Wskazówka:* $P(|\overline{X} - m| < 1) = P(-1 < \overline{X} - m < 1) = \ldots..$ *Wykorzystaj fakt, że* $\frac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}$ *ma rozkład* $N(0, 1)$.

Odp.: $P(|\overline{X} - m| < 1) \approx 0,383$.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Niech X_1, X_2, X_3 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z nieznaną wartością oczekiwaną m i wariancją σ^2. Rozważamy trzy estymatory parametru m: $\hat{m}_1 = \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{6}X_2 + \frac{2}{3}X_3$, $\hat{m}_2 = \frac{1}{5}X_1 + \frac{2}{5}X_2 + \frac{2}{5}X_3$, $\hat{m}_3 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$. Który z estymatorów jest nieobciążony? Który z nich jest najlepszy?

Odp.: Wszystkie estymatory są nieobciążone. Najlepszy jest $\hat{m}_3$ bo ma najmniejszą wariancję (dla dowolnego m).

$\boxed{\mathbf{3.}}$ W doświadczeniu medycznym bada się czas snu pacjentów leczonych na pewną chorobę. U 16 pacjentów, wylosowanych niezależnie, zmierzono czas snu i otrzymano następujące wyniki (w minutach): $435, 533, 393, 458, 525, 481, 324, 437, 348, 503, 383, 395, 416, 553, 500, 488$. Przyjmując, że czas snu ma rozkład $N(m, \sigma = 70)$, oszacuj średnią m czasu snu pacjentów metodą przedziałową, przyjmując poziom ufności 0.99.

Odp.: $[403.173; 493.327]$.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Zmierzono wytrzymałość 10 losowo wybranych gotowych elementów konstrukcji budowlanej i otrzymano następujące wyniki (w MPa): $383, 284, 339, 340, 305, 386, 378, 335, 344, 346$. Zakładając, że rozkład wytrzymałości tych elementów jest rozkładem $N(m, \sigma^2)$ o nieznanych parametrach, wyznacz na podstawie tej próby przedział ufności dla m na poziomie ufności 0.90 i 0.95. Porównaj otrzymane wyniki.

Odp.: a) 90% przedz.ufn.: $[L, P] = [324.9811, 363.0189]$,
b) 95% przedz. ufn. $[L, P] = [320.5297, 367.4703]$.

$\boxed{\mathbf{5.}}$ W celu oszacowania średniej miesięcznej kwoty wydatków na rozrywki studentów Warszawy, wybrano losowo grupę 200 studentów i otrzymano: średnią $\overline{X} = 280$ oraz odchylenie standardowe $S = 160$. Przyjmując poziom ufności 0.95 wyznacz przedział ufności dla średniej tych wydatków.

Odp.: $[L, P] = [257.8255, 302.1745]$.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Pewne laboratorium prowadzi czasochłonne i kosztowne badania. Jaka powinna być minimalna liczba n niezależnych pomiarów, aby uzyskać błąd średniej próbkowej nieprzekraczający 2 jednostek pomiarowych na poziomie ufności 95%? Zakładamy, że pomiary są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie normalnym o znanej wariancji $= 4$. *Wskazówka: Błąd średniej próbkowej jest równy połowie długości skonstruowanego przedziału ufności.*

Odp.: $n = 4$.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Dokonano 10 pomiarów wytrzymałości (w $10^5 N/m^2$) pewnego materiału budowlanego i obliczono średnią $\overline{X} = 20.2$ oraz wariancję $S^2 = 0.96$. Przyjmijmy, że zaobserwowane wyniki pomiarów możemy traktować jako próbę prostą z rozkładu normalnego o nieznanej wariancji σ^2. Wyznacz 90-procentowy przedział ufności dla wariancji σ^2.

Odp.: $[L, P] = [0.51067, 2.59841]$.

$\boxed{\textbf{8.}}$ Wiadomo, że dokładność urządzenia pomiarowego zależy od odchylenia standardowego wykonywanych nim pomiarów. W celu zbadania precyzji pewnego przyrządu służącego do pomiaru masy wykonano nim 10 pomiarów (tego samego obiektu) i otrzymano następujące wyniki (w mg): $102, 105, 102, 100, 108, 97, 96, 98, 100, 101$. Zakładając, że wyniki pomiaru mają rozkład normalny wyznacz 95% przedział ufności dla odchylenia standardowego.

Odp.: $[L, P] = [2.50008, 6.63556]$.