Równoważność DFA, NFA i RE. Minimalny DFA

Języki formalne i techniki translacji - Wykład 2

Maciek Gębala

9 października 2018

Notatki

Równoważność DFA i NFA

Fakt. Każdy DFA jest NFA.

Twierdzenie. Niech L będzie językiem akceptowanym przez NFA. Wtedy istnieje DFA akceptujący język L.

Dowód

Niech NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
Definiujemy DFA $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ symulujący równolegle wszystkie przejścia przez automat M.

$$\begin{aligned} Q' &= 2^Q && \text{śledzimy wszystkie podzbiory stanów } M \\ F' &\subseteq Q' && q \in F' \iff \exists_{p \in q}\, p \in F \\ q_0' &= \{q_0\} \\ \delta'(q, a) &= \bigcup_{p \in q} \delta(p, a) \end{aligned}$$

Dowód indukcyjny po długości wczytywanego słowa.

Notatki

Przykład

NFA

$$M = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$$

δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_0, q_1\}$

Równoważny DFA

$$M' = (\{\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_0, q_1\}, \emptyset\}, \{0, 1\}, \delta', \{q_0\}, \{\{q_1\}, \{q_0, q_1\}\})$$

δ'	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Notatki

Równoważność NFA i NFA$_\varepsilon$

Fakt. Każdy NFA jest NFA$_\varepsilon$.

Twierdzenie. Jeśli L jest językiem akceptowanym przez NFA$_\varepsilon$ to jest również akceptowany przez NFA.

Dowód

Niech NFA$_\varepsilon$ $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
Definiujemy NFA $M' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F')$

$$F' = \begin{cases} F \cup \{q_0\} & \text{jeśli z } q_0 \text{ można dojść do } q \in F\ \varepsilon\text{-przejściami} \\ F & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$\delta'(q, a) = \bigcup_{x \in (\varepsilon^* a \varepsilon^*)} \hat{\delta}(q, x)$$

M' nie ma ε-przejść. Równość języków przez dowód indukcyjny po długości słowa.

Notatki

Równoważność DFA i RE

Twierdzenie. Niech r będzie wyrażeniem regularnym opisującym język L. Wtedy istnieje NFA$_\varepsilon$ który akceptuje L.

Dowód

Indukcja po budowie wyrażenia regularnego.

Dowód na tablicy.

Notatki

Równoważność DFA i RE

Twierdzenie. Jeżeli L jest akceptowany przez DFA, to L jest reprezentowany przez wyrażenie regularne.

Dowód

Niech L będzie akceptowany przez DFA
$M = (\{q_1, \ldots, q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, F)$.
Zdefiniujmy

$$R_{ij}^k = \{x \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_i, x) = q_j \wedge \forall_{y=prefix(x), y \neq \varepsilon, y \neq x} \hat{\delta}(q_i, y) = q_l \implies l \leqslant k\}$$

R_{ij}^k – zbiór wszystkich słów z jakimi można przejść ze stanu q_i do stanu q_j używając po drodze tylko pierwszych k stanów (i,j mogą być większe od k). R_{ij}^n - wszystkie łańcuchy z którymi możemy przejść z q_i do q_j.

$$L = \bigcup_{q_j \in F} R_{1j}^n$$

Notatki

Równoważność DFA i RE

Dowód cd.

Definicja rekurencyjna

$$R_{ij}^0 = \begin{cases} \{a : \delta(q_i, a) = q_j\} & i \neq j \\ \{a : \delta(q_i, a) = q_i\} \cup \{\varepsilon\} & i = j \end{cases}$$

$$R_{ij}^k = R_{ik}^{k-1}(R_{kk}^{k-1})^* R_{kj}^{k-1} \cup R_{ij}^{k-1} \qquad k > 0$$

Łatwo skonstruować wyrażenie regularne r_{ij}^k opisujące R_{ij}^k.
Dowód poprawności przez indukcję po k.

Duży przykład

Na ćwiczeniach.

Notatki

Mały przykład dla $(\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{((q_1, 0), q_1), ((q_1, 1), q_2), ((q_2, 0), q_1), ((q_2, 1), q_2)\}, q_1, \{q_1\})$

$r_{ij}^k = r_{ij}^{k-1} + r_{ik}^{k-1}(r_{kk}^{k-1})^* r_{kj}^{k-1}$ dla $k > 0$

$$\begin{aligned}
r_{11}^0 &= 0 + \varepsilon \\
r_{12}^0 &= 1 \\
r_{21}^0 &= 0 \\
r_{22}^0 &= 1 + \varepsilon \\
r_{11}^1 &= (0 + \varepsilon) + (0 + \varepsilon)(0 + \varepsilon)^*(0 + \varepsilon) \equiv 0^* \\
r_{12}^1 &= 1 + (0 + \varepsilon)(0 + \varepsilon)^* 1 \equiv 0^* 1 \\
r_{21}^1 &= 0 + 0(0 + \varepsilon)^*(0 + \varepsilon) \equiv 00^* \\
r_{22}^1 &= (1 + \varepsilon) + 0(0 + \varepsilon)^* 1 \equiv \varepsilon + 0^* 1 \\
r_{11}^2 &= 0^* + 0^* 1(0^* 1)^* 0^* 0
\end{aligned}$$

Najprostsze wyrażenie regularne dla tego języka: $\varepsilon + (0 + 1)^* 0$

Notatki

Minimalny DFA

Dla każdego języka regularnego istnieje dokładnie jeden (z dokładnością do izomorfizmów) DFA o minimalnej liczbie stanów. (Własność ta wynika z twierdzenia Myhill-Nerode, które jednak zostanie pominięte na wykładzie.)

Idea algorytmu

Chcemy znaleźć takie stany które można ze sobą połączyć (stany równoważne). Dwa stany równoważne to takie, że dla każdego x startując z tych stanów albo znajdziemy się równocześnie w stanach akceptujących albo nieakceptujących.

Notatki

Algorytm minimalizacji

Oznaczamy pary stanów, które nie są równoważne.

1. `forall` $p \in F \wedge q \in Q \setminus F$ `do` oznacz parę (p, q)
2. `forall` $p, q \in (F \times F) \cup (Q \setminus F \times Q \setminus F)$ t.że $p \neq q$ `do`
   - `if` $\exists_{a \in \Sigma}$ t.że $(\delta(p, a), \delta(q, a))$ jest oznaczona `then`
     - oznacz (p, q)
     - oznacz w sposób rekurencyjny wszystkie nieoznaczone pary na liście (p, q)
   - `else` /* żadna para $(\delta(p, a), \delta(q, a))$ nie jest oznaczona */
     - `forall` $a \in \Sigma$ `do`
       - umieść parę (p, q) na liście $(\delta(p, a), \delta(q, a))$, o ile $\delta(p, a) \neq \delta(q, a)$

DFA uzyskany przez złączenie stanów równoważnych uzyskanych przez powyższy algorytm, z usuniętymi stanami nieosiągalnymi, jest minimalnym DFA dla danego języka.

Notatki

Przykład

$$M = (\{a, b, c, d, e, f\}, \{0, 1\}, \delta, a, \{c, d, e\})$$

δ	0	1
a	b	c
b	a	d
c	e	f
d	e	f
e	e	f
f	f	f

Wykonanie algorytmu na tablicy.

Notatki

Przykład cd.

DFA po minimalizacji

$$M' = (\{ab, cde, f\}, \{0, 1\}, \delta, ab, \{cde\})$$

δ	0	1
ab	ab	cde
cde	cde	f
f	f	f

Notatki