Metody Bazodanowe i Bazy Danych — zadania

dr Piotr Syga
feat. Konrad Kleczkowski

29 grudnia 2017

Przykładowe kolowkium nr 2, grupa A

Zadanie 1. Dana jest relacja o schemacie R i zależnościach funkcyjnych $\mathcal{F}$.

$$R = ABCDEF$$
$$\mathcal{F} = \{AD \to FE, BC \to E, FBA \to D, AC \to DE, F \to E, BD \to A, F \to C, ABC \to AEF, B \to F\}$$

(a) Wyznacz domknięcie atrybutu B.

(b) Wyznacz (minimalne) klucze relacji. Udowodnij, że wybrane zbiory są kluczami oraz uargumentuj, że nie ma ich więcej.

(c) Wyznacz $\mathcal{F}_{\mathrm{min}}$ w postaci kanonicznej, udowodnij, że $\mathcal{F}^+_{\mathrm{min}} = \mathcal{F}^+$.

(d) W jakiej najwyższej postaci normalnej znajduje się powyższa relacja? (Odpowiedź uzasadnij).

(e) Znormalizuj relację do 3NF zachowując zależności. Wyraźnie zaznacz, które relacje tworzą podział wynikowy. Dla każdej z uzyskanej relacji zaznacz atrybuty kluczowe.

Metoda (a). Domknięciem[1] $A^+_{\mathcal{F}}$ zbioru atrybutów A względem zbioru zależności funkcyjnych $\mathcal{F}$ nazywamy zbiór atrybutów, który spełnia poniższe warunki:

1. $A \subseteq A^+_{\mathcal{F}}$
2. Jeśli $(X \to Y) \in \mathcal{F}$ oraz $X \subseteq A^+_{\mathcal{F}}$, to $Y \subseteq A^+_{\mathcal{F}}$.

Intuicyjnie, domknięcie $A^+_{\mathcal{F}}$ zbioru atrybutów A jest to odpowiedź na pytanie, co „wylicza" zbiór atrybutów A na podstawie zależności $\mathcal{F}$. Algorytm wygląda następująco:

1. Zapisujemy dotychczasowy zbiór atrybutów, który rozpinamy.
2. Sprawdzamy, czy jakiś podzbiór tych atrybutów pozwala obliczyć dodatkowe atrybuty na podstawie jakiejś zależności funkcyjnej. Jeśli znaleźliśmy taką zależność funkcyjną, która oblicza nam nowe atrybuty, zapisujemy prawą stronę tej zależności do naszego domknięcia.
3. Powtarzamy krok 2. (łącznie z dopisanymi wcześniej atrybutami), aż żadna zależność nie da nam nowych atrybutów do domknięcia.
4. Żądanym zbiorem jest domknięcie.

Z definicji (1) zapewnia nam warunek początkowy algorytmu a (2) krok indukcyjny, stąd algorytm jest poprawny.

[1] Mylnie określane *dopełnieniem*.

Rozwiązanie (a).

$$\begin{aligned}
\{B\}^+ &= \{BF\}^+ && \text{z zależności } B \to F \\
&= \{BFEC\}^+ && \text{z zależności } F \to E \text{ i } F \to C \\
&= \{BFEC\} && \text{ponieważ nie ma nowych zależności}
\end{aligned}$$

Metoda (b). By wyznaczyć klucze kandydujące, warto wpierw wyliczyć minimalne pokrycie zbioru zależności funkcyjnych. Pokryciem[2] $\mathcal{F}^+$ zbioru zależności funkcyjnych $\mathcal{F}$ w relacji R nazywamy zbiór zależności funkcyjnych, który spełnia następujące warunki:

1. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^+$
2. Jeśli $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}^+$ i z aksjomatów Armstronga otrzymujemy wnioskowanie $f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g$, to $g \in \mathcal{F}^+$

Przez aksjomaty Armstronga rozumiemy następujące reguły wnioskowania:

1. Dla każdego $Y \subseteq X$ zachodzi $\vdash X \to Y$ (zwrotność).
2. $X \to Y, Y \to Z \vdash X \to Z$ (przechodniość).
3. Dla dowolnego atrybutu Z mamy $X \to Y \vdash XZ \to YZ$ (powiększenie).

Mówimy, że zbiory zależności funkcyjnych są równoważne ($\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$) wtedy i tylko wtedy, gdy ich pokrycia są równe ($\mathcal{F}^+ = \mathcal{G}^+$). Minimalne pokrycie $\mathcal{F}_{\min}$ zbioru $\mathcal{F}$ to takie, które $\mathcal{F}_{\min} \sim \mathcal{F}$ oraz po usunięciu dowolnej zależności przestaje pokrywać $\mathcal{F}$, to znaczy, dla każdego $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{F}_{\min}$ zachodzi $\mathcal{F}_{\min} \nsim \mathcal{G}$.

Intuicyjnie, minimalnym pokryciem nazywamy najmniejszy podzbiór, który nie zmienia sensu wyjściowego zbioru zależności funkcyjnych. Pozwala to na redukcję potencjalnej pomyłki podczas obliczania kluczy kandydujących.

Każdy zbiór zależności funkcyjnych ma swoje minimalne pokrycie. Można to udowodnić przez wprowadzenie częściowego porządku (dokładnie zawierania) na zbiorze $\{\mathcal{G} : \mathcal{F} \sim \mathcal{G}\}$ i pokazaniu (nie wprost), że poset ma element minimalny. Stąd otrzymujemy, że istnieje taki element $\mathcal{G}$, dla którego mamy $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$. [3]

Zależność $(f : X \to Y) \in \mathcal{F}$ jest redundantna, gdy $Y \subseteq X^+_{\mathcal{F}-\{f\}}$. Po usunięciu wszystkich zależności redundantnych otrzymujemy minimalne pokrycie (bez dowodu, patrz przypisy).

Gdy znajdziemy minimalne pokrycie, wybieramy takie atrybuty, które w tym pokryciu nie występują po prawej stronie żadnej zależności funkcyjnej. Następnie rozpinamy je i dodajemy najmniejsze podzbiory dopełnienia tego domknięcia. Uzyskane klucze są minimalne.

Rozwiązanie (b). Będą podkreślane i komentowane elementy, które zostaną usunięte z pokrycia, bądź zredukowane; najpierw usuwamy trywialne zależności redundantne.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = \{&AD \to FE, \underline{BC \to E}, FBA \to D, AC \to DE, F \to E, \\
&BD \to A, F \to C, ABC \to AEF, B \to F\} && \text{bo } B \to F \to E \\
\sim \{&AD \to FE, FBA \to D, AC \to DE, F \to E, \\
&BD \to A, F \to C, \underline{ABC \to AEF}, B \to F\} && \text{zal. trywialna, gdy } B \to F \to E \\
\sim \{&\underline{AD \to FE}, FBA \to D, AC \to DE, F \to E, \\
&BD \to A, F \to C, B \to F\} && \text{bo } AD \to FE \to F \to E \\
\sim \{&AD \to F, FBA \to D, AC \to D, AC \to E, F \to E, \\
&BD \to A, F \to C, B \to F\} && \text{zamiana na postać kanoniczną}
\end{aligned}$$

[2] W literaturze zdarza się nazwać pokrycie $\mathcal{F}$-*domknięciem*.

[3] Nie chcę tego dowodzić, bo to co najmniej wywoła przerażenie w oczach potencjalnego czytelnika, który chce tylko powtórzyć do kolokwium. [przyp. aut.]

Teraz będziemy eliminować zależności, które są nietrywialnie redundantne. Zauważmy, że $AD \to F$ nie zostanie zredukowana, ponieważ, nie ma takiego podzbioru $\{AD\}$, który by mógł wygenerować F w domknięciu. Natomiast

$$\begin{aligned}
\{FBA\}^+_{\mathcal{F}-\{FBA\to D\}} &= \{FBAC\}^+ && \text{z zależności } F \to C\\
&= \{FBACD\}^+ \ni D && \text{z zależności } AC \to D,
\end{aligned}$$

czyli $FBA \to D$ jest redundantne.

Zauważmy, że zależności $AC \to D$ oraz $AC \to E$ też nie są redukowalne jak $AD \to F$, ponieważ nie można uzyskać D i E na podstawie odpowiednio pozbiorów $\{ACE\}$ oraz $\{ACD\}$. Podobnie mamy dla $F \to E$ i $F \to C$, ponieważ dla $F \to E$ mamy uzyskać E za pomocą podzbiorów $\{FC\}$, gdy można tylko to zrobić za pomocą $AC \to E$, co jest niemożliwe; tylko zależność $F \to C$ wylicza C, dlatego nie można jej zredukować. Ostatecznie, $B \to F$ jest nieredukowalne, ponieważ nie ma takiej zależności by dla B wyliczała nam F (ta, zresztą jedyna, zależność została wykluczona, zgodnie z definicją redundantnej zależności).

Stąd otrzymujemy następujące minimalne pokrycie:

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{F}_{\min} = \{AD \to F, AC \to D, AC \to E, F \to E, BD \to A, F \to C, B \to F\}$$

Teraz znajdźmy takie atrybuty, które nie są wyliczalne przez żadną zależność funkcyjną w tym pokryciu. Jest to atrybut B. Wobec tego policzmy domknięcie B wobec $\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned}
\{B\}^+ &= \{BF\}^+ && \text{z zależności } B \to F\\
&= \{BFC\}^+ && \text{z zależności } F \to C\\
&= \{BFCE\}^+ && \text{z zależności } F \to E\\
&= \{BFCE\} && \text{ponieważ nie ma nowych zależności}
\end{aligned}$$

Mamy więc $\{B\}^+ = \{BFCE\} = R - \{AD\}$. Wobec tego policzmy domknięcia $\{BA\}^+$ oraz $\{BD\}^+$.

$$\begin{aligned}
\{BA\}^+ &= \{BAF\}^+ && \text{z zależności } B \to F\\
&= \{BAFC\}^+ && \text{z zależności } F \to C\\
&= \{BAFCE\}^+ && \text{z zależności } F \to E\\
&= \{BAFCED\}^+ = R && \text{z zależności } AC \to D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{BD\}^+ &= \{BDF\}^+ && \text{z zależności } B \to F\\
&= \{BDFC\}^+ && \text{z zależności } F \to C\\
&= \{BDFCE\}^+ && \text{z zależności } F \to E\\
&= \{BDFCEA\}^+ = R && \text{z zależności } BD \to A
\end{aligned}$$

Mamy wobec tego minimalne klucze kandydujące — BA oraz BD. Istotnie, ponieważ dodając najmniejsze podzbiory $\{AD\}$ do $\{B\}$ otrzymaliśmy klucze tej relacji. Dodając większe podzbiory, do których należą A lub D, otrzymamy nadal klucz, wynika to z własności domknięcia.

Rozwiązanie (c). W poprzednim punkcie obliczyliśmy pokrycie minimalne.

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{F}_{\min} = \{AD \to F, AC \to D, AC \to E, F \to E, BD \to A, F \to C, B \to F\}$$

Pokażmy, że poniższe pokrycie jest poprawne (co sugeruje nam teza podana przez autora kolokwium). Podkreślone zależności znajdują się w $\mathcal{F}$. Do wnioskowania wykorzystujemy tylko $\mathcal{F}_{\min}$ jako przesłanki, bądź inne w poprzednich wnioskowaniach.

$$
\begin{array}{rll}
F \to E, AD \to F \vdash AD \to E & & \text{z przechodniości} \\
AD \to E, AD \to F \vdash \underline{AD \to FE} & & \text{z odwróconej dekompozycji} \\
\\
B \to F, F \to E \vdash B \to E & & \text{z przechodniości} \\
\vdash C \to \emptyset & & \text{ze zwrotności} \\
B \to E, C \to \emptyset \vdash \underline{BC \to E} & & \text{z kompozycji} \\
\\
AC \to D, F \to C \vdash FA \to D & & \text{z pseudoprzechodniości} \\
\vdash B \to \emptyset & & \text{ze zwrotności} \\
FA \to D, B \to \emptyset \vdash \underline{FBA \to D} & & \text{z kompozycji} \\
\\
AC \to D, AC \to E \vdash \underline{AC \to DE} & & \text{z odwróconej dekompozycji} \\
\\
F \to E \vdash \underline{F \to E} & & \text{trywialne} \\
\\
BD \to A \vdash \underline{BD \to A} & & \text{jw.} \\
\\
F \to C \vdash \underline{F \to C} & & \text{jw.} \\
\\
\vdash C \to \emptyset & & \text{ze zwrotności} \\
B \to E, C \to \emptyset \vdash BC \to E & & \text{z kompozycji} \\
\vdash A \to A & & \text{ze zwrotności} \\
A \to A, BC \to E \vdash ABC \to AE & & \text{z kompozycji} \\
ABC \to AE, B \to F \vdash \underline{ABC \to AEF} & & \text{z kompozycji} \\
\\
B \to F \vdash \underline{B \to F} & & \text{trywialne}
\end{array}
$$

co oczywiście kończy dowód.[4] □

Metoda (d). By móc odpowiedzieć, w której postaci normalnej jest relacja, trzeba wiedzieć, jak są zdefiniowane postacie normalne. Oto definicje.

(1NF) Każdy atrybut jest atomowy, tzn. atrybut nie posiada wielu znaczeń.[5]

(2NF) Relacja jest w 1NF i żaden atrybut niekluczowy nie jest zależny od właściwego podzbioru dowolnego klucza kandydującego.

(3NF) Relacja jest w 2NF i żaden atrybut niekluczowy nie jest zależny przechodnio od dowolnego klucza kandydującego.

(BCNF) Każda zależność funkcyjna $X \to Y$ jest trywialna (tzn. dla $Y \subseteq X$ jest $X \to Y$), lub X jest nadkluczem (nadzbiorem dowolnego klucza kandydującego) relacji R.

[4] Jeśli nie ma jakiejś zasady, spokojnie, można ją uzyskać z trzech podanych wyżej. Dokładne treści zasad są tutaj.

[5] Zazwyczaj zakłada się, że relacja jest w 1NF w wypadku kolowkium. W rzeczywistości często jest to bardziej skomplikowane, stąd wyróżnia się 1NF.

Przez atrybuty kluczowe rozumiemy atrybuty wchodzące w skład wszystkich kluczy kandydujących. Atrybuty niekluczowe to dopełnienie atrybutów kluczowych względem R.

Rozwiązanie (d). Zauważmy, że zależność $B \to F$ łamie nam 2NF, ponieważ BA i BD są kluczami kandydującymi R, $\{B\} \subsetneq \{BA\}$ oraz $F \in R - \{BAD\}$. Stąd relacja jest w 1NF.

Metoda (e). By znormalizować bazę do pożądanej postaci normalnej, musimy znaleźć takie zależności, które łamią nam daną postać normalną, a następnie wyodrębnić dane zależności funkcyjne z tej relacji. Dla każdej z części powtarzamy algorytm, aż otrzymamy taki podział relacji, który dla każdej partycji będzie miał taką samą postać normalną.

Należy pamiętać, że przy podziale klucz może ulec zmianie. Za każdym razem powinniśmy określić klucze kandydujące relacji. Jeśli nie jest to widoczne od razu, zawsze warto wykonać algorytm podany wyżej. Niektóre z obliczeń będą pominięte i, jeśli będzie potrzebne, zostanie to skomentowane.

Rozwiązanie (e). Docelową postacią jest 3NF. Zauważmy, że zależność $B \to F$ łamie 2NF, wobec tego dzielimy relację. Rozpinamy lewą stronę zależności, następnie zapisujemy, które zależności zostały użyte do rozpięcia tego atrybutu.

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{B\}^+ \\
&= \{\underline{B}FCE\} \\
\mathcal{F}_1 &= \{B \to F, F \to E, F \to C\} \\
\mathcal{F}_2 &= \{AD \to F, AC \to D, AC \to E, BD \to A\} \\
R_2 &= \{\underline{ABCD}EF\}
\end{aligned}$$

Zauważmy, że kluczem kandydackim w R_1 jest B. Stąd mamy, że R_1 jest w 2NF, jednakże nie jest w 3NF, bo

$$\begin{aligned}
&B \to F, F \to E \vdash \underline{B} \to E && \text{z przechodniości} \\
&B \to F, F \to C \vdash \underline{B} \to C && \text{z przechodniości}
\end{aligned}$$

stąd dzielimy R_1.

$$\begin{aligned}
R_{1,1} &= \{F\}^+ \\
&= \{\underline{F}CE\} \\
\mathcal{F}_{1,1} &= \{F \to E, F \to C\} \\
\mathcal{F}_{1,2} &= \{B \to F\} \\
R_{1,2} &= \{\underline{B}F\}
\end{aligned}$$

Te relacje spełniają 3NF. Teraz kluczami kandydującymi dla R_2 są ABC i DBC (liczenie pozostawiam Czytelnikowi). Wobec tego 2NF łamie nam $AC \to E$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
R_{2,1} &= \{AC\}^+ \\
&= \{\underline{AC}EDF\} \\
\mathcal{F}_{2,1} &= \{AD \to F, AC \to D, AC \to E\} \\
\mathcal{F}_{2,2} &= \{BD \to A\} \\
R_{2,2} &= \{\underline{BD}A\}
\end{aligned}$$

Zauważmy, że $AD \to F$ łamie nam 3NF, ponieważ

$$\begin{aligned}
AC \to D &\vdash AC \to AD && \text{z powiększenia} \\
AC \to AD, AD \to F &\vdash \underline{AC} \to F && \text{z przechodniości}
\end{aligned}$$

stąd poddajemy $R_{2,1}$ podziałowi

$$\begin{aligned} R_{2,1,1} &= \{AD\}^+ \\ &= \{\underline{AD}F\} \\ \mathcal{F}_{2,1,1} &= \{AD \to F\} \\ \mathcal{F}_{2,1,2} &= \{AC \to D, AC \to E\} \\ R_{2,1,2} &= \{\underline{AC}DE\} \end{aligned}$$

Te relacje są w 3NF. Stąd nasza relacja została znormalizowana do 3NF.

$$R = R_{1,,1} \cup R_{1,2} \cup R_{2,1,1} \cup R_{2,1,2} \cup R_{2,2}$$