Własności języków bezkontekstowych

Języki formalne i techniki translacji - Wykład 6

Maciek Gębala

13 listopada 2018

Notatki

Lemat o pompowaniu dla języków bezkontekstowych

Lemat. Niech L będzie dowolnym językiem bezkontekstowym. Wtedy istnieje stała n, zależna tylko od L, taka że jeśli z należy do L i $|z| \geqslant n$ to$z = uvwxy$, i

1. $|vx| \geqslant 1$,
2. $|vwx| \leqslant n$,
3. dla każdego $i \geqslant 0$ $uv^iwx^iy \in L$.

Dowód

Na tablicy.

Lemat wykorzystywany do udowadniania że język nie jest bezkontekstowy.

Notatki

Przykład

$$L = \{\ a^ib^ic^i\ :\ i \geqslant 1\ \}$$

Dowód że L nie jest bezkontekstowy

Weźmy n z lematu i słowo $z = a^nb^nc^n$.
1) Zgodnie z lematem możemy pompować w obrębie jednego bloku znaków (a lub b lub c) ale wtedy zmienia się ilość tych znaków a nie zmienia się pozostałych, czyli wychodzimy z języka.
2) Możemy pompować też znaki z dwóch sąsiednich bloków (a i b lub b i c) utrzymując ich równoliczność, ale wtedy zostaje problem z trzecim blokiem i także wypadamy z języka.
3) Innych możliwości nie ma więc L nie jest bezkontekstowy.

A co z następującym językiem

$$L = \{\ a^ib^jc^k\ :\ i \neq j \wedge j \neq k\ \}$$

Notatki

Lemat Ogdena - silniejsza wersja lematu o pompowaniu

Lemat. Niech L będzie językiem bezkontekstowym. Wtedy istnieje stała n taka że jeśli w $z \in L$ oznaczymy co najmniej n liter to możemy z zapisać jako $uvwxy$ i

1. v i x mają łącznie co najmniej jedną oznaczoną literę,
2. vwx ma co najwyżej n oznaczonych liter,
3. dla każdego $i \geqslant 0$ $uv^iwx^iy \in L$.

Dowód

Na tablicy.

Notatki

Przykład

$$L = \{ a^i b^j c^k \ : \ i \neq j \wedge j \neq k \}$$

Dowód że L nie jest bezkontekstowy

Weźmy n z lematu i $m > n$. Weźmy $z = a^{m+m!} b^m c^{m+m!}$ i oznaczmy wszystkie litery b.
łatwo zauważyć, że zgodnie z lematem musimy pompować co najmniej jedno b i nie możemy pompować jednocześnie a i c.
Załóżmy, że pompujemy $1 \leqslant k \leqslant n$ symboli b i nie pompujemy symboli c. Wtedy dla $i = 1 + m!/k$ mamy $m + m!$ symboli b i słowo wypada z języka. Analogicznie jeśli nie pompujemy a.

Notatki

Własności języków bezkontekstowych

Twierdzenie. Języki bezkontekstowe są zamknięte na sumę, złożenie i domknięcie Kleene'ego.

Dowód

$G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$ i $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ i $S \notin N_1 \cup N_2$.
$G_3 = (\{S\} \cup N_1 \cup N_2, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 | S_2\})$
i $L(G_3) = L(G_1) \cup L(G_2)$
$G_4 = (\{S\} \cup N_1 \cup N_2, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\})$
i $L(G_4) = L(G_1)L(G_2)$
$G_5 = (\{S\} \cup N_1, T_1, S, P_1 \cup \{S \to S_1 S | \varepsilon\})$ i $L(G_5) = L(G_1)^*$

Notatki

Własności języków bezkontekstowych

Twierdzenie. Języki bezkontekstowe nie są zamknięte na przecięcie.

Dowód

$\{a^i b^i c^i\} = \{a^i b^i c^j\} \cap \{a^j b^i c^i\}$

Wniosek. Języki bezkontekstowe nie są zamknięte na dopełnienie.

Twierdzenie. Jeśli L - język bezkontekstowy i R - język regularny to $L \cap R$ - język bezkontekstowy.

Notatki

Notatki