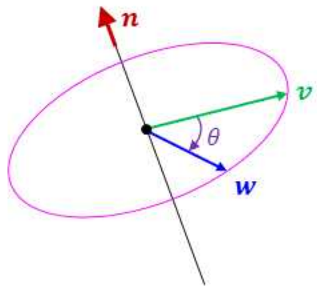
1. 3D 그래픽 기초(3D Graphics Fundamentals)

(8) DirectX Math

⑨ 회전과 방향(Rotation and Orientation)의 표현

게임 객체의 방향(Orientation)은 벡터(법선 벡터: Normal vector)로 표현할 수 있다. 회전(Rotation)은 회전축과 회전각($-\pi \leq \theta \leq \pi$)으로 정의(표현)할 수 있다. 게임 객체를 회전하면 방향이 바뀌게 된다.



게임 객체의 회전을 표현하는 일반적인 방법은 다음과 같다.

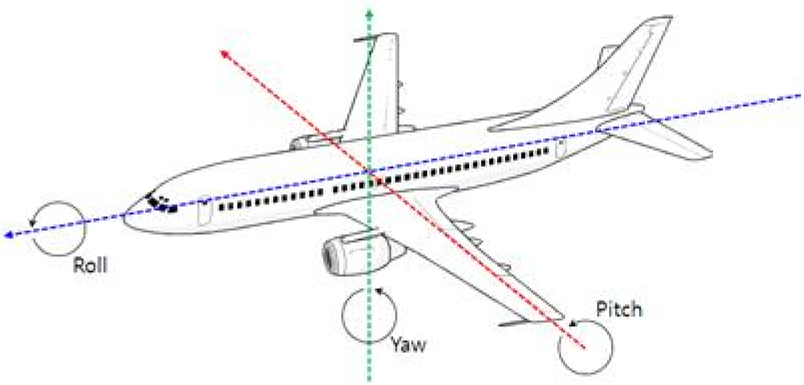
- 회전 행렬(Rotation Matrices)
- 오일러 각도(Euler Angles)
- 축-각도 표현(Axis-Angle)
- 쿼터니언(Quaternions)

각 방법은 장점과 단점을 가지고 있다. 일반적으로 회전을 표현하는 여러 방법들을 평가하기 위하여 사용하는 평가 기준은 적은 개수의 수로 방향 또는 회전을 표현할 수 있는가, 방향 또는 회전을 합성(Concatenation)할 수 있는 가, 점과 벡터를 회전할 수 있는가, 보간(Interpolation)할 수 있는 가 등이 될 수 있다.

▪ 오일러 각도(Euler Angles) 표현

3-차원 공간에서 오일러 각도(Euler Angles)를 사용하여 회전을 표현하는 방법은 3개의 각도(Angles, 실수)를 사용한다. 좌표계에서 서로 수직인 각 축을 회전축으로 하여 연속적인 회전각 (α, β, γ)로 회전을 표현한다. 오일러 각도를 사용하여 회전을 표현하는 방법은 회전을 직관적으로 표현할 수 있고, 회전의 정보를 사람이 읽을 수 있으며, 모든 회전 각도를 표현할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 일반적으로 직교좌표계의 z-축을 중심으로 회전하는 각도, y-축을 중심으로 회전하는 각도, 그리고 x-축을 중심으로 회전하는 각도를 순서대로 나열한다($z-y-x$). 회전축은 월드 좌표계 또는 모델(객체) 좌표계가 될 수 있다. 회전축이 월드 좌표계일 때의 회전 각도를 고정 각도(Fixed Angle)라고 한다. $z-y-x$ 순서의 고정 각도 표현은 행렬 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_z \boldsymbol{R}_y \boldsymbol{R}_x$ 표현과 같다. 회전축이 모델(객체) 좌표계일 때의 회전 각도를 오일러 각도(Euler Angles)라고 한다.

x-축을 중심으로 회전하는 오일러 각도를 끄덕각(Pitch), y-축을 중심으로 회전하는 오일러 각도를 도리각(Heading/Yaw), 그리고 z-축을 중심으로 회전하는 오일러 각도를 갸웃각(Roll)이라고 한다.



$z-y-x$ 오일러 각도에 대한 회전 행렬은 $\boldsymbol{R}_{zyx} = \boldsymbol{R}_z \boldsymbol{R}_y \boldsymbol{R}_x$로 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{R}_{zyx} = \begin{bmatrix} cos(\theta_z) & sin(\theta_z) & 0 \\ -sin(\theta_z) & cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\theta_y) & 0 & -sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(\theta_y) & 0 & cos(\theta_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta_x) & sin(\theta_x) \\ 0 & -sin(\theta_x) & cos(\theta_x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos(\theta_z)cos(\theta_y) & sin(\theta_z) & -cos(\theta_z)sin(\theta_y) \\ -sin(\theta_z)cos(\theta_y) & cos(\theta_z) & sin(\theta_z)sin(\theta_y) \\ sin(\theta_y) & 0 & cos(\theta_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta_x) & sin(\theta_x) \\ 0 & -sin(\theta_x) & cos(\theta_x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos(\theta_z)cos(\theta_y) & sin(\theta_z)cos(\theta_x) + cos(\theta_z)sin(\theta_y)sin(\theta_x) & sin(\theta_z)sin(\theta_x) - cos(\theta_z)sin(\theta_y)cos(\theta_x) \\ -sin(\theta_z)cos(\theta_y) & cos(\theta_z)cos(\theta_x) - sin(\theta_z)sin(\theta_y)sin(\theta_x) & cos(\theta_z)sin(\theta_x) + sin(\theta_z)sin(\theta_y)cos(\theta_x) \\ sin(\theta_y) & -cos(\theta_y)sin(\theta_x) & cos(\theta_y)cos(\theta_x) \end{bmatrix}$$

임의의 회전 행렬 $\boldsymbol{R}$이 주어질 때, 회전 행렬 $\boldsymbol{R}$이 표현하는 회전을 오일러 각도로 표현하는 방법은 다음과 같다. 이것은 회전 행렬 $\boldsymbol{R}_{zyx} = \boldsymbol{R}_z \boldsymbol{R}_y \boldsymbol{R}_x$에서 z-축 회전각 θ_z, y-축 회전각 θ_y, 그리고 x-축 회전각 θ_x를 구하는 것이다.

각도 $(-\pi \le \theta \le \pi)$에 대하여 $sin(\theta)$와 $cos(\theta)$의 부호는 다음과 같다.

$$\begin{cases} (sin(\theta) > 0), (cos(\theta) > 0) & (0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \\ (sin(\theta) > 0), (cos(\theta) < 0) & (\frac{\pi}{2} < \theta < \pi) \\ (sin(\theta) < 0), (cos(\theta) > 0) & (-\frac{\pi}{2} < \theta < 0) \\ (sin(\theta) < 0), (cos(\theta) < 0) & (-\pi < \theta < \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

각도 $(-\pi \le \theta \le \pi)$에 대한 $cos(\theta) = k$일 때, $\theta = \pm cos^{-1}(k)$이므로 θ를 구하려면 $sin(\theta)$의 부호를 알아야 한다. 유사하게 각도 $(-\pi \le \theta \le \pi)$에 대한 $sin(\theta) = k$일 때, $\theta = \pm sin^{-1}(k)$이므로 θ를 구하려면 $cos(\theta)$의 부호를 알아야 한다.

$$sign(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{x}{|x|} & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\theta = sign(sin(\theta))\,cos^{-1}(k) = sign(sin(\theta))\,arccos(\theta)$$

$$\theta = sign(cos(\theta))\,sin^{-1}(k) = sign(cos(\theta))\,arcsin(\theta)$$

$$\boldsymbol{R}_{zyx} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

회전 행렬 $\boldsymbol{R}_{zyx} = \boldsymbol{R}_z \boldsymbol{R}_y \boldsymbol{R}_x$에서 $sin(\theta_y)$는 다음과 같이 직접 구할 수 있다.

$$sin(\theta_y) = r_{31}$$

회전 행렬 $\boldsymbol{R}_{zyx} = \boldsymbol{R}_z \boldsymbol{R}_y \boldsymbol{R}_x$에서 $cos(\theta_y)$의 부호를 구하기 위하여 다음 연산을 해보자.

$$\frac{-r_{11}r_{32}r_{31} - r_{33}r_{21}}{r_{12}} = \frac{cos(\theta_z)cos^2(\theta_y)sin(\theta_x)sin(\theta_y) + cos^2(\theta_y)cos(\theta_x)sin(\theta_z)}{cos(\theta_z)sin(\theta_x)sin(\theta_y) + cos(\theta_x)sin(\theta_z)}$$

$$= \frac{cos^2(\theta_y)(cos(\theta_z)sin(\theta_x)sin(\theta_y) + cos(\theta_x)sin(\theta_z))}{cos(\theta_z)sin(\theta_x)sin(\theta_y) + cos(\theta_x)sin(\theta_z)} = cos^2(\theta_y)$$

$$cos^2(\theta_y) = \frac{-r_{11}r_{32}r_{31} - r_{33}r_{21}}{r_{12}}$$

위의 식에서 $cos(\theta_y)$의 부호를 직접 결정할 수 없으므로 $sin(\theta_y)$에서 θ_y를 직접 구해야 한다. 각도 $(-\frac{\pi}{2} \leq \theta_y \leq \frac{\pi}{2})$에서 $(cos(\theta_y) > 0)$이므로 다음과 같이 $sin(\theta_x)$, $sin(\theta_z)$, $cos(\theta_x)$, $cos(\theta_z)$를 구하면 θ_x, θ_y, θ_z를 구할 수 있다.

$$sin(\theta_y) = r_{31} \qquad \theta_y = arcsin(r_{31})$$

$$cos(\theta_y) = \sqrt{1 - sin^2(\theta_y)} = \sqrt{1 - (r_{31})^2}$$

$$sin(\theta_x) = \frac{-r_{32}}{cos(\theta_y)} = \frac{-r_{32}}{\sqrt{1-(r_{31})^2}}$$

$$cos(\theta_x) = \frac{r_{33}}{cos(\theta_y)} = \frac{r_{33}}{\sqrt{1-(r_{31})^2}}$$

$$sin(\theta_z) = \frac{-r_{21}}{cos(\theta_y)} = \frac{-r_{21}}{\sqrt{1-(r_{31})^2}}$$

$$cos(\theta_z) = \frac{r_{11}}{cos(\theta_y)} = \frac{r_{11}}{\sqrt{1-(r_{31})^2}}$$

$(cos(\theta_y) = 0)$이면, $\theta_y = \pm\frac{\pi}{2}$이고 짐벌-락(Gimbal Lock)에 해당한다. θ_x와 θ_z를 구별할 수 없게 되므로, θ_z를 0으로 설정한다($cos(\theta_z) = 1, sin(\theta_z) = 0$).

$$sin(\theta_y) = r_{31} \qquad \theta_y = arcsin(r_{31})$$

$$r_{22} = cos(\theta_z)cos(\theta_x) - sin(\theta_z)sin(\theta_y)sin(\theta_x) = cos(\theta_x)$$

$$cos(\theta_x) = r_{22}$$

$$r_{23} = cos(\theta_z)sin(\theta_x) + sin(\theta_z)sin(\theta_y)cos(\theta_x) = sin(\theta_x)$$

$$sin(\theta_x) = -r_{23}$$

$$\theta_z = 0$$

만약 $(cos(\theta_y) > 0)$가 성립하지 않으면 θ_x, θ_z는 정확하지 않게 된다. 그러므로 임의의 회전 행렬을 오일러 각도로 변환하는 것은 정확하지 않다.

오일러 각도의 직접 합성(덧셈 또는 곱셈으로)은 성립하지 않는다. 오일러 각도 $(30^\circ, 50^\circ, 20^\circ)$로 회전을 한 다음에 오일러 각도 $(20^\circ, 10^\circ, 40^\circ)$로 회전을 한 것은 오일러 각도 $(50^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$로 회전을 한 것과 같지 않다. 그러므로 합성을 하려면 오일러 각도를 회전 행렬로 변환하여 합성해야 한다.

오일러 각도를 사용한 회전의 표현은 벡터를 회전(변환)하는 문제를 해결할 수 있지만 계산적인 효율성이 없다. z-축을 중심으로 벡터 $\boldsymbol{v} = (x, y, z)$를 θ만큼 회전한 결과 벡터 $\boldsymbol{w}$는 다음과 같이 구할 수 있다. 그러나 이 계산에는 $cos(\theta)$와 $sin(\theta)$가 포함되어 있어 빠른 계산을 할 수 없다.

$$\boldsymbol{w} = (xcos(\theta) - ysin(\theta), xsin(\theta) + ycos(\theta), z)$$

오일러 각도를 사용한 회전의 표현은 짐벌-락(Gimbal-Lock)이라는 문제를 가지고 있다. $z-y-x$ 오일러 고정 각도 회전에서 y-축으로 90도 회전하면 x-축이 $(-z)$-축과 일치(회전축이 평행)하게 된다. 이 때 z-축에 대한 회전은 x-축에 대한 회전과 같은 결과가 된다. 결과적으로 3-차원 회전이 2-차원의 회전이 되어 회전의 방향에 대한 자유도의 손실을 가지게 된다. 그리고 여러 오일러 각도가 같은 회전을 표현할 수 있다.

$z-y-x$ 오일러 각도에 대한 회전 행렬 $\boldsymbol{R}_{zyx} = \boldsymbol{R}_z \boldsymbol{R}_y \boldsymbol{R}_x$은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{R}_{zyx} = \begin{bmatrix} cos(\theta_z) & sin(\theta_z) & 0 \\ -sin(\theta_z) & cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\theta_y) & 0 & -sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(\theta_y) & 0 & cos(\theta_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta_x) & sin(\theta_x) \\ 0 & -sin(\theta_x) & cos(\theta_x) \end{bmatrix}$$

$z-y-x$ 오일러 각도에 대한 회전에서 y-축으로 90도 회전($\theta_y = 90^\circ$)인 경우를 생각해 보자.

$$\boldsymbol{R}_{zyx} = \begin{bmatrix} cos(\theta_z) & sin(\theta_z) & 0 \\ -sin(\theta_z) & cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(90) & 0 & -sin(90) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(90) & 0 & cos(90) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta_x) & sin(\theta_x) \\ 0 & -sin(\theta_x) & cos(\theta_x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos(\theta_z) & sin(\theta_z) & 0 \\ -sin(\theta_z) & cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta_x) & sin(\theta_x) \\ 0 & -sin(\theta_x) & cos(\theta_x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & sin(\theta_z) & -cos(\theta_z) \\ 0 & cos(\theta_z) & sin(\theta_z) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta_x) & sin(\theta_x) \\ 0 & -sin(\theta_x) & cos(\theta_x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & sin(\theta_z)cos(\theta_x) + cos(\theta_z)sin(\theta_x) & sin(\theta_z)sin(\theta_x) - cos(\theta_z)cos(\theta_x) \\ 0 & cos(\theta_z)cos(\theta_x) - sin(\theta_z)sin(\theta_x) & cos(\theta_z)sin(\theta_x) + sin(\theta_z)cos(\theta_x) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

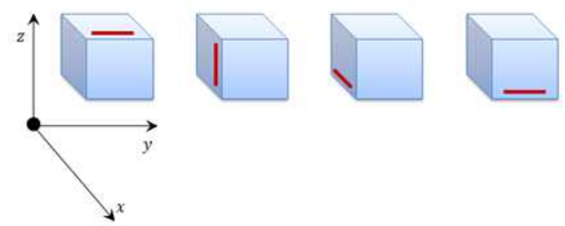
$$= \begin{bmatrix} 0 & sin(\theta_x + \theta_z) & -cos(\theta_x + \theta_z) \\ 0 & cos(\theta_x + \theta_z) & sin(\theta_x + \theta_z) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이 결과는 ($\theta_y = 90^\circ$)일 때, z-축에 대하여 θ_z만큼 회전을 한 다음에 x-축에 대하여 θ_x만큼 회전을 하는 것은 x-축에 대하여 θ_z만큼 회전을 한 다음에 z-축에 대하여 θ_x 만큼 회전을 하는 것과 같음을 나타낸다. 그리고 θ_x를 변경하는 것은 θ_z를 변경하는 것과 회전의 결과가 같으며 회전축이 z-축으로 남게 된다.

다음은 오일러 각도 표현 방법에서 짐벌-락의 예이다.

- □ $\left(\theta_x, \frac{\pi}{2}, \theta_z\right) = \left(\theta_x - \theta_z, \frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(0, \frac{\pi}{2}, \theta_x - \theta_z\right)$
- □ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$

  다음 그림에서 육면체를 월드 좌표계 x-축으로 90° 회전한 다음에 월드 좌표계 y-축으로 90° 회전한 후 다시 월드 좌표계 z-축으로 90° 회전한 결과는 처음의 육면체를 월드 좌표계 y-축으로 90° 회전한 결과와 같다.

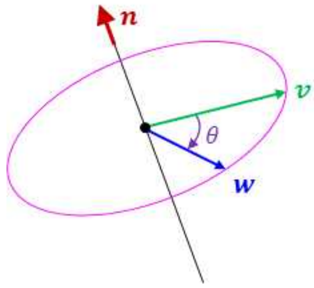


- 축-각도(Axis-Angle) 표현

단위 벡터 $\boldsymbol{v}$를 회전하여 단위벡터 $\boldsymbol{w}$를 얻기 위한 회전축 $\boldsymbol{n}$과 회전각 θ는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$$

$$\theta = tan^{-1}(\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w})$$

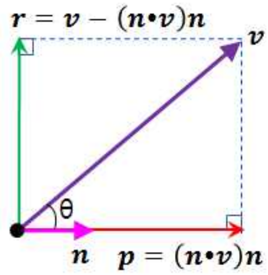


축-각도 표현 방법은 회전축(단위벡터 n)과 회전각 θ가 주어질 때, 벡터 v를 회전한 결과를 표현하는 방법이다. 즉, 위의 그림에서 단위벡터 n, 벡터 v, 회전각 θ가 주어질 때 벡터 w를 단위벡터 n, 벡터 v, 회전각 θ를 사용하여 표현하는 방법이다. 임의의 회전축 n을 중심으로 벡터 v를 θ만큼 회전(변환)한 결과 벡터 $R_n(\theta)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

회전축을 나타내는 벡터 n이 단위 벡터일 때, 다음과 같이 벡터 v를 n에 평행한 벡터 p와 수직인 벡터 r로 분해(투영: Projection)할 수 있다.

$$p = (v \cdot n)n$$

$$r = v - p = v - (v \cdot n)n$$



다음 그림에서 다음이 성립한다.

$$R_n(\theta) = p + R_r$$

$$w = n \times r = n \times v$$

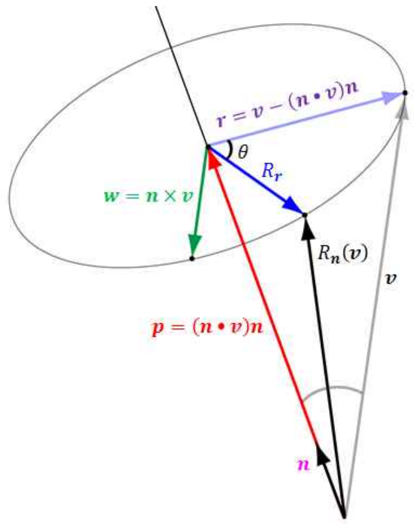
벡터 w와 벡터 r이 수직이고 벡터 w와 벡터 p가 수직이므로 다음이 성립한다.

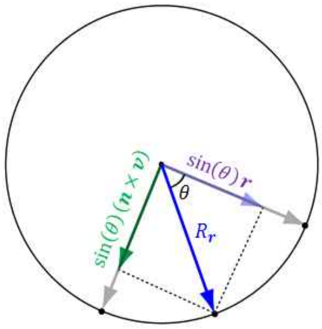
$$R_r = cos(\theta)r + sin(\theta)w$$

$$R_n(\theta) = p + R_r = p + cos(\theta)r + sin(\theta)w$$

$$R_n(\theta) = (v \cdot n)n + cos(\theta)\{v - (v \cdot n)n\} + sin(\theta)(n \times v)$$

$$R_n(\theta) = cos(\theta)v + (1 - cos(\theta))(v \cdot n)n + sin(\theta)(n \times v)$$





위의 식 $R_n(\theta)$는 회전축 n을 중심으로 벡터 v를 θ만큼 회전한 결과를 나타내는 벡터이다. 이 식은 로드리게스 회전 공식(Rodrigues rotation formula)이라고 한다.

왼손좌표계에서 회전축이 단위벡터 $n = (x, y, z)$일 때, 로드리게스 회전 공식 $R_n(\theta)$를 행렬을 사용하여 표현하면 다음과 같다. 다음 행렬 R은 회전축 (x, y, z)를 중심으로 θ만큼 회전하는 변환 행렬이다.

$$R_n(\theta) = vR$$

$$R = \begin{bmatrix} (1-cos(\theta))x^2 + cos(\theta) & (1-cos(\theta))xy + sin(\theta)z & (1-cos(\theta))xz - sin(\theta)y \\ (1-cos(\theta))xy - sin(\theta)z & (1-cos(\theta))y^2 + cos(\theta) & (1-cos(\theta))yz + sin(\theta)x \\ (1-cos(\theta))xz + sin(\theta)y & (1-cos(\theta))yz - sin(\theta)x & (1-cos(\theta))z^2 + cos(\theta) \end{bmatrix}$$

회전 행렬 R이 주어질 때 회전각 θ를 구하는 방법은 다음과 같다.

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = (1 - cos(\theta))(x^2 + y^2 + z^2) + 3cos(\theta) = 1 + 2cos(\theta)$$

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{1}{2}(r_{00} + r_{11} + r_{22} - 1)\right)$$

회전 행렬 R이 주어질 때 회전축 $n = (x, y, z)$을 구하는 방법은 다음과 같다.

- $(\theta = 0)$일 때, 회전축 $n = (x, y, z)$은 임의의 벡터이다.
- $(0 < \theta < \pi)$일 때, 회전축 $n = (x, y, z)$은 다음과 같은 벡터이다.

$$n = (r_{32} - r_{23}, r_{13} - r_{31}, r_{21} - r_{12}) = (2sin(\theta)x, 2sin(\theta)y, 2sin(\theta)z)$$

$$R - R^T = 2sin(\theta)\begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} = 2sin(\theta)S$$

- $(\theta = \pi)$일 때, 회전축 $n = (x, y, z)$은 다음과 같은 벡터이다.
  $(\theta = \pi)$일 때, $(cos(\pi) = -1)$이고 $(sin(\pi) = 0)$이다.

$$R=\begin{bmatrix}(1-cos(\theta))x^2+cos(\theta) & (1-cos(\theta))xy+sin(\theta)z & (1-cos(\theta))xz-sin(\theta)y\\(1-cos(\theta))xy-sin(\theta)z & (1-cos(\theta))y^2+cos(\theta) & (1-cos(\theta))yz+sin(\theta)x\\(1-cos(\theta))xz+sin(\theta)y & (1-cos(\theta))yz-sin(\theta)x & (1-cos(\theta))z^2+cos(\theta)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2x^2-1 & 2xy & 2xz\\2xy & 2y^2-1 & 2yz\\2xz & 2yz & 2z^2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2y^2-2z^2 & 2xy & 2xz\\2xy & 1-2x^2-2z^2 & 2yz\\2xz & 2yz & 1-2x^2-2y^2\end{bmatrix}$$

$$r_{11}-r_{22}-r_{33}=(1-2y^2-2z^2)-(1-2x^2-2z^2)-(1-2x^2-2y^2)=4x^2-1$$

$$4x^2=r_{11}-r_{22}-r_{33}+1$$

$$x=\frac{\pm\sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1}}{2},\ y=\frac{r_{12}}{2x},\ z=\frac{r_{13}}{2x}$$

$$r_{22}-r_{11}-r_{33}=(1-2x^2-2z^2)-(1-2y^2-2z^2)-(1-2x^2-2y^2)=4y^2-1$$

$$4y^2=r_{22}-r_{11}-r_{33}+1$$

$$y=\frac{\pm\sqrt{r_{22}-r_{11}-r_{33}+1}}{2},\ x=\frac{r_{12}}{2y},\ z=\frac{r_{23}}{2y}$$

$$r_{33}-r_{11}-r_{22}=(1-2x^2-2y^2)-(1-2y^2-2z^2)-(1-2x^2-2z^2)=4z^2-1$$

$$4z^2=r_{33}-r_{11}-r_{22}+1$$

$$z=\frac{\pm\sqrt{r_{33}-r_{11}-r_{22}+1}}{2},\ x=\frac{r_{13}}{2z},\ y=\frac{r_{23}}{2z}$$

두 개의 축-각도 회전의 표현을 직접 합성할 수는 없다. 축-각도 회전을 행렬로 변환하여 합성하고 다시 축-각도로 변환하는 방법을 사용해야 한다. 회전축 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$과 회전각 θ가 표현하는 회전을 사용하여 벡터를 회전하는 방법은 로드리게스 공식을 사용하는 것이다. 그러나 $sin(\theta)$와 $cos(\theta)$를 계산해야 하는 단점이 있다.

- 회전 표현의 보간(Interpolation)

오일러 각도 또는 회전 행렬을 사용한 회전의 표현은 보간(Interpolation)을 정확하게 할 수 없다.

두 개의 오일러 각도 $\boldsymbol{e}_0=(z_0,y_0,x_0)$와 $\boldsymbol{e}_1=(z_1,y_1,x_1)$을 매개변수 t로 선형 보간한 결과 $\boldsymbol{e}$는 다음과 같이 표현할 수 있다. 그러나 선형 보간의 결과는 정확하지 않다.

$$\boldsymbol{e}=(z,y,x)=(1-t)(z_0,y_0,x_0)+t(z_1,y_1,x_1)$$

두 개의 회전 행렬 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$을 매개변수 t로 선형 보간한 결과 $\boldsymbol{R}$는 다음과 같이 표현할 수 있다. 그러나 선형 보간의 결과는 정확하지 않다. 행렬 $\boldsymbol{R}$는 회전 행렬(직교 행렬)이 되지 않을 수 있다.

$$\boldsymbol{R}=(1-t)\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{B}$$

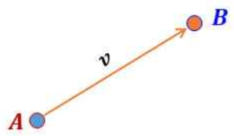
$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}&r_{13}\\r_{21}&r_{22}&r_{23}\\r_{31}&r_{32}&r_{33}\end{bmatrix}=(1-t)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-t)a_{11}+tb_{11} & (1-t)a_{12}+tb_{12} & (1-t)a_{13}+tb_{13} \\ (1-t)a_{21}+tb_{21} & (1-t)a_{22}+tb_{22} & (1-t)a_{23}+tb_{23} \\ (1-t)a_{31}+tb_{31} & (1-t)a_{32}+tb_{32} & (1-t)a_{33}+tb_{33} \end{bmatrix}$$

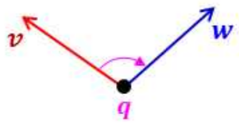
⑩ 사원수(Quaternion)

▪ 사원수에 대한 이해

점 $\boldsymbol{A}$와 벡터 $\boldsymbol{v}$가 주어지면 점 $\boldsymbol{B}$를 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{v}$와 같이 유일하게 결정할 수 있다. 즉, 점 벡터는 위치(이동)를 나타내는 정보이고 벡터의 덧셈은 위치를 바꾸는 연산이라고 할 수 있다.



사원수는 방향 벡터 $\boldsymbol{v}$가 주어질 때 회전을 하여 새로운 방향 벡터 $\boldsymbol{w}$를 유일하게 결정할 수 있는 회전 정보이다. 즉, 방향 벡터 $\boldsymbol{v}$와 회전 정보($\boldsymbol{q}$)를 가지고 연산($*$, 회전)을 하면 ($\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}*\boldsymbol{q}$), 방향 벡터 $\boldsymbol{v}$가 방향 벡터 $\boldsymbol{w}$와 방향이 같아질 수 있도록 회전 정보($\boldsymbol{q}$, 사원수)와 연산($*$, 회전)을 정의하자.



▪ 사원수의 정의

$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$, $\boldsymbol{k}=(0,0,k)$일 때, 사원수 $\boldsymbol{q}$는 다음과 같이 4개의 실수를 가진 4-차원 벡터로 정의한다. 3-차원 벡터 (x,y,z)는 사원수 $(x,y,z,0)$와 동차이다.

$$\boldsymbol{q}=(x,y,z,w)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}+w$$

사원수는 다음과 같이 벡터 부분 $\boldsymbol{u}=(x,y,z)$와 실수 부분 w로 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{q}=(x,y,z,w)=(\boldsymbol{u},w),\ \boldsymbol{u}=(x,y,z)$$

영 사원수(Zero Quaternion)는 모든 요소가 0인 사원수 $\boldsymbol{0}=(0,0,0,0)$이다.

▪ 사원수의 상등(Equality)

사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$가 주어질 때, 사원수의 상등, 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{q}_1=(x_1,y_1,z_1,w_1)=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}+w_1=(\boldsymbol{u},w_1) \qquad \boldsymbol{u}=(x_1,y_1,z_1)$$
$$\boldsymbol{q}_2=(x_2,y_2,z_2,w_2)=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}+w_2=(\boldsymbol{v},w_2) \qquad \boldsymbol{v}=(x_2,y_2,z_2)$$

사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$의 상등은 다음과 같이 정의한다(대응하는 요소들이 같아야 함). 사원수를 4차원 벡터로 보면 벡터의 상등과 같다.

$$(\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_1) \Leftrightarrow (x_1 = x_2), (y_1 = y_2), (z_1 = z_2), (w_1 = w_2)$$

$$(\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_2) \Leftrightarrow (\boldsymbol{u}, w_1) = (\boldsymbol{v}, w_2) \Leftrightarrow (\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}, w_1 = w_2)$$

- 사원수의 덧셈(Addition)과 뺄셈(Subtraction)

사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$의 덧셈과 뺄셈은 다음과 같이 정의한다(벡터의 덧셈, 뺄셈과 같다).

$$\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 = (x_1 + x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 + y_2)\boldsymbol{j} + (z_1 + z_2)\boldsymbol{k} + (w_1 + w_2)$$

$$\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 = (x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2)$$

$$\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2 = (x_1 - x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 - y_2)\boldsymbol{j} + (z_1 - z_2)\boldsymbol{k} + (w_1 - w_2)$$

$$\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2 = (x_1, y_1, z_1, w_1) - (x_2, y_2, z_2, w_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2, w_1 - w_2)$$

- 사원수의 곱셈(Multiplication)

사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$의 곱셈 $\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2$은 다음과 같이 정의한다(다항식의 곱셈과 유사하다).

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 = (x_1, y_1, z_1, w_1)(x_2, y_2, z_2, w_2)$$

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k} + w_1)(x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} + w_2)$$

$$= x_1x_2\boldsymbol{i}^2 + x_1y_2\boldsymbol{ij} + x_1z_2\boldsymbol{ik} + x_1\boldsymbol{i}w_2 + y_1x_2\boldsymbol{ji} + y_1y_2\boldsymbol{j}^2 + y_1z_2\boldsymbol{jk} + y_1w_2\boldsymbol{j}$$

$$+ z_1x_2\boldsymbol{ki} + z_1y_2\boldsymbol{kj} + z_1z_2\boldsymbol{k}^2 + z_1w_2\boldsymbol{k} + w_1x_2\boldsymbol{i} + w_1y_2\boldsymbol{j} + w_1z_2\boldsymbol{k} + w_1w_2$$

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$에 대하여 다음을 정의한다.

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$$

$$\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{ji},\ \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{kj},\ \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{ik}$$

이제 사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$의 곱셈 $\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2$은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k} + w_1)(x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} + w_2)$$

$$= (x_2w_1 - y_2z_1 + z_2y_1 + w_2x_1)\boldsymbol{i} + (x_2z_1 + y_2w_1 - z_2x_1 + w_2y_1)\boldsymbol{j}$$

$$+ (-x_2y_1 + y_2x_1 + z_2w_1 + w_2z_1)\boldsymbol{k} + (-x_2x_1 - y_2y_1 - z_2z_1 + w_2w_1)$$

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 = (x_1, y_1, z_1, w_1)(x_2, y_2, z_2, w_2) = \boldsymbol{q}_3 = (x_3, y_3, z_3, w_3)$$

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k} + w_1)(x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} + w_2) = (x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k} + w_3)$$

$$x_3 = x_2w_1 - y_2z_1 + z_2y_1 + w_2x_1$$

$$y_3 = x_2z_1 + y_2w_1 - z_2x_1 + w_2y_1$$

$$z_3 = -x_2y_1 + y_2x_1 + z_2w_1 + w_2z_1$$

$$w_3 = -x_2x_1 - y_2y_1 - z_2z_1 + w_2w_1$$

3차원 벡터 $\boldsymbol{u} = (x_1, y_1, z_1)$와 $\boldsymbol{v} = (x_2, y_2, z_2)$의 외적 $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$과 내적 $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$는 다음

과 같다.

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1z_1 - y_1x_2)$$

$$\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$의 곱셈 $\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2$은 3차원 벡터의 외적과 내적을 사용하여 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 = (x_1, y_1, z_1, w_1)(x_2, y_2, z_2, w_2) = (\boldsymbol{u}, w_1)(\boldsymbol{v}, w_2) = (x_3, y_3, z_3, w_3)$$

$$w_2\boldsymbol{u} + w_1\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$$

$$= w_2(x_1, y_1, z_1) + w_1(x_2, y_2, z_2) + (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1z_1 - y_1x_2)$$

$$= (x_2w_1 - y_2z_1 + z_2y_1 + w_2x_1, x_2z_1 + y_2w_1 - z_2x_1 + w_2y_1, -x_2y_1 + y_2x_1 + z_2w_1 + w_2z_1)$$

$$= (x_3, y_3, z_3)$$

$$w_3 = -x_2x_1 - y_2y_1 - z_2z_1 + w_2w_1 = w_1w_2 - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = w_1w_2 - (\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v})$$

사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$의 곱셈 $\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2$은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 = (\boldsymbol{u}, w_1)(\boldsymbol{v}, w_2) = (w_2\boldsymbol{u} + w_1\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}), w_1w_2 - (\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}))$$

사원수의 곱셈에 대한 교환 법칙은 성립하지 않지만 결합 법칙은 성립한다.

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 \neq \boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_1$$

$$\boldsymbol{q}_1(\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_3) = (\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)\boldsymbol{q}_3$$

사원수의 곱셈에 대한 항등원 $\boldsymbol{e}$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{e} = (0, 0, 0, 1) = (\boldsymbol{0}, 1)$$

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$$

사원수의 덧셈과 곱셈에 대한 분배 법칙이 다음과 같이 성립한다.

$$\boldsymbol{q}_1(\boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_3) = \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_3$$

$$(\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2)\boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_3 + \boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_3$$

- 실수와 3차원 벡터의 사원수 표현

  실수와 사원수에 대하여 다음을 정의한다. 즉, 실수 s는 벡터부분이 $\boldsymbol{0}$벡터이고 실수부분이 s인 사원수와 같다.

$$s = (0, 0, 0, s)$$

3-차원 벡터는 실수 부분이 0인 사원수와 같다.

$$\boldsymbol{u} = (x, y, z) = (\boldsymbol{u}, 0) = (x, y, z, 0)$$

실수 s를 사원수로 취급할 수 있으므로 실수 s와 사원수 $\boldsymbol{q}$의 곱을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$s\boldsymbol{q} = s(x, y, z, w) = (0, 0, 0, s)(x, y, z, w) = (sx, sy, sz, sw)$$
$$\boldsymbol{q}s = (x, y, z, w)s = (x, y, z, w)(0, 0, 0, s) = (sx, sy, sz, sw) = s\boldsymbol{q}$$

- 사원수의 켤레(Conjugate)

사원수 $\boldsymbol{q}$의 켤레(Conjugate) 사원수 $\boldsymbol{q}^*$를 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{q} = (x, y, z, w) = (\boldsymbol{u}, w),\ \boldsymbol{u} = (x, y, z)$$
$$\boldsymbol{q}^* = (-x, -y, -z, w) = (-\boldsymbol{u}, w)$$

켤레 사원수에 대하여 다음의 성질이 성립한다.

$$(\boldsymbol{q}^*)^* = \boldsymbol{q}$$
$$(s\boldsymbol{q}^*) = s\boldsymbol{q}^*$$
$$(\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)^* = \boldsymbol{q}_2^*\boldsymbol{q}_1^*$$
$$(\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2)^* = \boldsymbol{q}_1^* + \boldsymbol{q}_2^*$$
$$\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^* = (\boldsymbol{u}, w) + (-\boldsymbol{u}, w) = (\boldsymbol{0}, 2w) = 2w$$
$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^* = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + w^2 = \boldsymbol{q}^*\boldsymbol{q}$$

- 사원수의 크기(Norm)

사원수 $\boldsymbol{q}$의 크기(Norm)을 다음과 같이 정의한다.

$$|\boldsymbol{q}| = \sqrt{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^*} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} = \sqrt{|\boldsymbol{u}|^2 + w^2}$$

크기가 1인 사원수를 단위 사원수(Unit Quaternion)라고 한다. 사원수 $\boldsymbol{q}$가 단위 사원수일 때 $\hat{\boldsymbol{q}}$으로 표기한다($|\hat{\boldsymbol{q}}| = 1$).

사원수 $\boldsymbol{q}$의 크기에 대하여 다음 성질이 성립한다.

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^* = |\boldsymbol{q}|^2$$
$$|\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2| = \sqrt{(\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)(\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)^*} = \sqrt{\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^*\boldsymbol{q}_1^*} = \sqrt{\boldsymbol{q}_1|\boldsymbol{q}_2|^2\boldsymbol{q}_1^*} = \sqrt{\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^*|\boldsymbol{q}_2|^2} = \sqrt{|\boldsymbol{q}_1|^2|\boldsymbol{q}_2|^2} = |\boldsymbol{q}_1||\boldsymbol{q}_2|$$
$$|\boldsymbol{q}^*| = |\boldsymbol{q}|$$
$$|\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2|^2 = (\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)(\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)^* = \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^*\boldsymbol{q}_1^* = \boldsymbol{q}_1|\boldsymbol{q}_2|^2\boldsymbol{q}_1^* = \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^*|\boldsymbol{q}_2|^2 = |\boldsymbol{q}_1|^2|\boldsymbol{q}_2|^2$$

단위 사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 단위 사원수 $\boldsymbol{q}_2$의 곱 $\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2$은 단위 사원수이다.

- 사원수 곱셈의 항등원(Identity)

  사원수 곱셈의 항등원은 $\boldsymbol{I}=(\mathbf{0},1)=(0,0,0,1)$이다.

$$\boldsymbol{q}=(x,y,z,w)=(\boldsymbol{u},w),\ \boldsymbol{u}=(x,y,z)$$
$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{u},w)=(x,y,z,w)=\boldsymbol{q}$$

- 사원수의 역(Inverse)

  사원수 $\boldsymbol{q}$가 영 사원수가 아닐 때, $\boldsymbol{q}$의 역(Inverse) 사원수 $\boldsymbol{q}^{-1}$를 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{q}^{-1}=\frac{\boldsymbol{q}^{*}}{|\boldsymbol{q}|^{2}}$$

  사원수 $\boldsymbol{q}$의 역 $\boldsymbol{q}^{-1}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$(\boldsymbol{q}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{q}$$
$$(s\boldsymbol{q})^{-1}=\frac{1}{s}(\boldsymbol{q}^{-1})=s^{-1}(\boldsymbol{q}^{-1})$$
$$(-\boldsymbol{q})^{-1}=-(\boldsymbol{q}^{-1})$$
$$(\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)^{-1}=\boldsymbol{q}_2^{-1}\boldsymbol{q}_1^{-1}$$
$$\boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^{-1}=\boldsymbol{q}\frac{\boldsymbol{q}^{*}}{|\boldsymbol{q}|^{2}}=\frac{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^{*}}{|\boldsymbol{q}|^{2}}=\frac{|\boldsymbol{q}|^{2}}{|\boldsymbol{q}|^{2}}=1=(0,0,0,1)=\boldsymbol{I}$$

  사원수 $\boldsymbol{q}$가 단위 사원수일 때 다음이 성립한다.

$$\boldsymbol{q}^{*}=\boldsymbol{q}^{-1}$$
$$|\boldsymbol{q}^{-1}|=|\boldsymbol{q}^{*}|=|\boldsymbol{q}|=1$$

- 사원수의 내적(Dot Product)

  사원수 $\boldsymbol{q}_1=(x_1,y_1,z_1,w_1)=(\boldsymbol{u}_1,w_1)$과 $\boldsymbol{q}_2=(x_2,y_2,z_2,w_2)=(\boldsymbol{u}_2,w_2)$가 주어질 때 사원수의 내적 $(\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2)$을 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2=(x_1,y_1,z_1,w_1)\cdot(x_2,y_2,z_2,w_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+w_1w_2$$
$$\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2=(\boldsymbol{u}_1,w_1)\cdot(\boldsymbol{u}_2,w_2)=(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2,w_1w_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+w_1w_2$$

  사원수 $\boldsymbol{q}_1=(\boldsymbol{u}_1,w_1)$과 사원수 $\boldsymbol{q}_2=(\boldsymbol{u}_2,w_2)$의 내적은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2+w_1w_2=|\boldsymbol{q}_1||\boldsymbol{q}_2|cos(\theta)$$

  사원수 $\boldsymbol{q}$의 크기와 내적 사이에 다음 성질이 성립한다.

$$\sqrt{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}}=|\boldsymbol{q}|,\ \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}=|\boldsymbol{q}|^{2}$$

- 단위 사원수의 회전 표현

사원수 $\boldsymbol{q}$가 단위 사원수일 때 다음이 성립한다.

$$\boldsymbol{q} = (x, y, z, w) = (\boldsymbol{u}, w),\ \boldsymbol{u} = (x, y, z)$$
$$|\boldsymbol{q}| = 1$$
$$|\boldsymbol{q}| = \sqrt{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^*} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} = \sqrt{|\boldsymbol{u}|^2 + w^2}$$
$$|\boldsymbol{q}|^2 = 1 = |\boldsymbol{u}|^2 + w^2$$

$(|\boldsymbol{u}|^2 + w^2 = 1)$이면 $(-1 \leq w \leq 1)$이다$(|\boldsymbol{u}|^2 \geq 0)$.
$(-1 \leq w \leq 1)$이면 $w = cos(\theta)$인 θ가 존재한다$(0 \leq \theta \leq \pi)$.

$$sin^2(\theta) = 1 - cos^2(\theta) = 1 - w^2 = |\boldsymbol{u}|^2$$
$$|\boldsymbol{u}|^2 = |sin(\theta)| = sin(\theta) \qquad (\because 0 \leq \theta \leq \pi)$$
$$\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|} = \frac{\boldsymbol{u}}{sin(\theta)} = \boldsymbol{n}$$
$$\boldsymbol{u} = sin(\theta)\boldsymbol{n}$$
$$\boldsymbol{q} = (x, y, z, w) = (\boldsymbol{u}, w) = (sin(\theta)\boldsymbol{n}, cos(\theta))$$

$(0 \leq \theta \leq \pi)$일 때, $sin(-\theta) = -sin(\theta)$이고 $cos(-\theta) = cos(\theta)$이므로 $\boldsymbol{q}^*$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{q}^* = (-sin(\theta)\boldsymbol{n}, cos(\theta)) = (sin(-\theta)\boldsymbol{n}, cos(-\theta))$$

앞에서 사원수 $(\boldsymbol{u}, w_1)$과 사원수 $(\boldsymbol{v}, w_2)$의 곱셈을 다음과 같이 표현할 수 있음을 증명하였다.

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 = (\boldsymbol{u}, w_1)(\boldsymbol{v}, w_2) = (w_2\boldsymbol{u} + w_1\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}), w_1 w_2 - (\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}))$$

3차원 벡터 $\boldsymbol{v}$를 다음과 같이 사원수 $\boldsymbol{p}$로 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{v}, 0)$$

$\boldsymbol{q}$가 단위 사원수일 때 다음이 성립한다.

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^* = (\boldsymbol{u}, w)(\boldsymbol{v}, 0)(-\boldsymbol{u}, w) = (\boldsymbol{u}, w)(w\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{u})$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1} &= \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^* = (\boldsymbol{u}, w)(w\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{u}) \\ &= (w(w\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})) + (\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times (w\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})), w(\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u} \bullet (w\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})))\end{aligned}$$

3-차원 벡터의 외적 연산은 다음과 같이 내적 연산으로 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

$\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1}$의 벡터 부분은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
& w(w\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}))+(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\times(w\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})) \\
&\quad = w^2\boldsymbol{v}-(w\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\times(w\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})) \\
&\quad = w^2\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{u}\times(w\boldsymbol{v}))+(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\times(w\boldsymbol{v}))+(\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})) \\
&\quad = w^2\boldsymbol{v}+2(\boldsymbol{u}\times(w\boldsymbol{v}))+(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} \\
&\quad = (w^2-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u}))\boldsymbol{v}+2w(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})+2(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u} \\
&\quad = (w^2-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u}))\boldsymbol{v}+2(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}+2w(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{qpq}^{-1}$의 실수 부분은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
& w(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}\bullet(w\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})) \\
&\quad = w(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}\bullet(w\boldsymbol{v})+\boldsymbol{u}\bullet(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}) \\
&\quad = w(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})-w(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})+\boldsymbol{u}\bullet(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})=0
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{qpq}^{-1}$는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{qpq}^{-1}=((w^2-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u}))\boldsymbol{v}+2(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}+2w(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}),0)$$

삼각함수에 대한 다음의 성질이 성립한다.

$$cos^2(\theta)-sin^2(\theta)=cos(2\theta)=1-2sin^2(\theta)$$
$$2cos(\theta)sin(\theta)=sin(2\theta)$$

사원수 $\boldsymbol{q}$가 단위 사원수일 때 $\boldsymbol{q}$를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{q}=(x,y,z,w)=(\boldsymbol{u},w)=(sin(\theta)\boldsymbol{n},cos(\theta)) \qquad (0\le\theta\le\pi)$$

단위 사원수 $\boldsymbol{q}$와 3차원 벡터 $\boldsymbol{v}$에 대하여 $\boldsymbol{qpq}^{-1}$를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{qpq}^{-1}=\boldsymbol{qpq}^{*}=((w^2-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u}))\boldsymbol{v}+2(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}+2w(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}),0) \\
&\quad \boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u}=(sin(\theta)\boldsymbol{n})\bullet(sin(\theta)\boldsymbol{n})=sin^2(\theta)(\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{n})=sin^2(\theta)|\boldsymbol{n}|^2=sin^2(\theta) \\
&\quad ((w^2-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u}))\boldsymbol{v}+2(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}+2w(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) \\
&\qquad = (cos^2(\theta)-sin^2(\theta))\boldsymbol{v}+2((sin(\theta)\boldsymbol{n})\bullet\boldsymbol{v})(sin(\theta)\boldsymbol{n})+2cos(\theta)((sin(\theta)\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{v}) \\
&\qquad = cos(2\theta)\boldsymbol{v}+2sin^2(\theta)(\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}+2cos(\theta)sin(\theta)(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}) \\
&\qquad = cos(2\theta)\boldsymbol{v}+(1-cos(2\theta))(\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}+sin(2\theta)(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

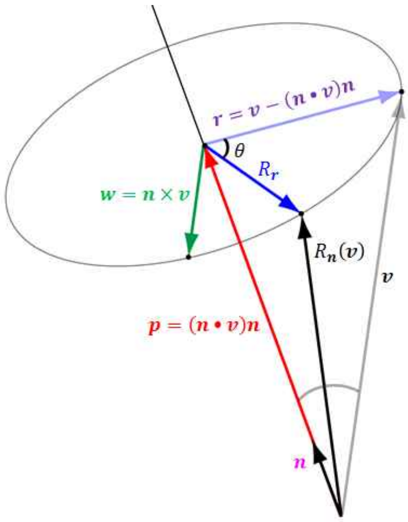
사원수 $\boldsymbol{qpq}^{-1}$의 w-요소가 0이므로 $\boldsymbol{qpq}^{-1}$는 3차원 벡터이고, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{qpq}^{-1}=cos(2\theta)\boldsymbol{v}+(1-cos(2\theta))(\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}+sin(2\theta)(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})$$

행렬의 기초에서 다룬 로드리게스 회전 공식은 다음과 같다. 임의의 회전축 $\boldsymbol{n}$을 중

심으로 벡터 v를 θ만큼 회전(변환)한 결과 벡터 $R_n(\theta)$는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R_n(\theta) = cos(\theta)v + (1 - cos(\theta))(v \bullet n)n + sin(\theta)(n \times v)$$



사원수 qpq^{-1}를 로드리게스 회전 공식 $R_n(\theta)$과 비교하면 아주 유사함을 알 수 있다. $R_n(\theta)$의 θ가 qpq^{-1}에서 2θ로 표현된 것을 제외하면 두 표현이 같음을 알 수 있다. 이제 qpq^{-1}에서 θ를 ½θ로 바꾸면 $qpq^{-1} = R_n(\theta)$이다.

$$q = (x, y, z, w) = (u, w) = \left(sin\left(\frac{\theta}{2}\right)n, cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \qquad (0 \le \theta \le \pi)$$

$$qpq^{-1} = qpq^{*} = cos(\theta)v + (1 - cos(\theta))(n \bullet v)n + sin(\theta)(n \times v) = R_n(\theta)$$

이것은 qpq^{-1}가 벡터 v를 회전축 n을 중심으로 θ만큼 회전한 결과 $R_n(\theta)$와 같음을 나타낸다. 즉, 단위 사원수 q가 벡터 v를 회전축 n을 중심으로 θ만큼의 회전을 표현하고 있다는 의미이다. 벡터 v를 회전축 n을 중심으로 θ만큼의 회전을 사원수로 표현하려면 먼저 회전축 벡터 n을 정규화하고, 다음과 같이 표현하면 된다. θ만큼의 회전을 하려면 ½θ로 사원수를 표현한다는 것에 주의하라.

$$q = (x, y, z, w) = (u, w) = \left(sin\left(\frac{\theta}{2}\right)n, cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

이제 단위 사원수 q로부터 3차원 벡터 v를 회전한 결과를 얻으려면 벡터 v를 사원수 $p = (v, 0)$로 표현하고 연산 qpq^{-1} 또는 qpq^{*}을 하면 된다.

단위 사원수 q로부터 3차원 벡터 v를 회전한 결과를 얻을 수 있다는 의미로 $R_q(v)$로 표기한다.

$$R_q(v) = qpq^{*} = R_n(v)$$

- 단위 사원수의 행렬 표현

사원수 q_1과 q_2를 행벡터로 표현할 때, 사원수 q_1과 q_2의 곱셈 $q_1 q_2$은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$q_1 q_2 = (x_1, y_1, z_1, w_1)(x_2, y_2, z_2, w_2) = q_3 = (x_3, y_3, z_3, w_3)$$

$$x_3 = x_2 w_1 - y_2 z_1 + z_2 y_1 + w_2 x_1 = x_1 w_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2 + w_1 x_2$$

$$y_3 = x_2 z_1 + y_2 w_1 - z_2 x_1 + w_2 y_1 = -x_1 z_2 + y_1 w_2 + z_1 x_2 + w_1 y_2$$

$$z_3 = -x_2 y_1 + y_2 x_1 + z_2 w_1 + w_2 z_1 = x_1 y_2 - y_1 x_2 + z_1 w_2 + w_1 z_2$$

$$w_3 = -x_2 x_1 - y_2 y_1 - z_2 z_1 + w_2 w_1 = -x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 + w_1 w_2$$

$q_2 V_{q_1} = q_1 q_2$가 성립하는 행렬 V_{q_1}를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V_{q_1} = \begin{bmatrix} w_1 & z_1 & -y_1 & -x_1 \\ -z_1 & w_1 & x_1 & -y_1 \\ y_1 & -x_1 & w_1 & -z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \end{bmatrix}$$

$q_1 H_{q_2} = q_1 q_2$가 성립하는 행렬 H_{q_2}를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$H_{q_2} = \begin{bmatrix} w_2 & -z_2 & y_2 & -x_2 \\ z_2 & w_2 & -x_2 & -y_2 \\ -y_2 & x_2 & w_2 & -z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \end{bmatrix}$$

$(qpq^{-1} = pM)$가 성립하는 행렬 M을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M = V_q H_{q^{-1}} = \begin{bmatrix} w & z & -y & -x \\ -z & w & x & -y \\ y & -x & w & -z \\ x & y & z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & z & -y & x \\ -z & w & x & y \\ y & -x & w & z \\ -x & -y & -z & w \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2xy+2zw & 2xz-2yw & 0 \\ 2xy-2zw & 1-2(x^2+z^2) & 2yz+2xw & 0 \\ 2xz+2yw & 2yz-2xw & 1-2(x^2+y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 단위 사원수의 지수(Exponential)와 로그(Logarithm)

단위 사원수 $q = (sin(\theta)n, cos(\theta))$의 로그 함수는 다음과 같이 정의한다.

$$q = (x, y, z, w) = (u, w) = (sin(\theta)n, cos(\theta))$$

$$log(q) = (\theta n, 0)$$

$$log((0,0,0,1)) = (0,0,0,0)$$

3차원 단위 벡터 $n(|n| = 1)$에 대하여, 사원수 $q = (\theta n, 0)$의 지수 함수는 다음과 같이 정의한다.

$$exp(q) = (sin(\theta)n, cos(\theta))$$

단위 사원수 $\boldsymbol{q}$와 실수 t에 대하여 $\boldsymbol{q}^t$는 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{q}^t = exp(t\,log(\boldsymbol{q}))$$

$$log(\boldsymbol{q}^t) = log(exp(t\,log(\boldsymbol{q}))) = t\,log(\boldsymbol{q})$$

단위 사원수 $\boldsymbol{q} = (sin(\theta)\boldsymbol{n}, cos(\theta))$와 실수 a, b에 대하여 다음이 성립한다.

$$\boldsymbol{q}^a \boldsymbol{q}^b = \boldsymbol{q}^{a+b}$$

$$\boldsymbol{q}^a \boldsymbol{q}^b = exp(a\,log(\boldsymbol{q}))\,exp(b\,log(\boldsymbol{q})) = exp(a(\theta\boldsymbol{n}, 0))\,exp(b(\theta\boldsymbol{n}, 0))$$

$$= (sin(a\theta)\boldsymbol{n}, cos(a\theta))(sin(b\theta)\boldsymbol{n}, cos(b\theta))$$

$$= (\boldsymbol{n}cos(a\theta)sin(b\theta) + \boldsymbol{n}cos(b\theta)sin(a\theta) + (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n})sin(a\theta)sin(b\theta), cos(a\theta)cos(b\theta) - sin(a\theta)sin(b\theta)(\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{n}))$$

$$= (\boldsymbol{n}\,(cos(a\theta)sin(b\theta) + cos(b\theta)sin(a\theta)), cos(a\theta)cos(b\theta) - sin(a\theta)sin(b\theta))$$

$$= (\boldsymbol{n}\,sin(a\theta + b\theta), cos(a\theta + b\theta)) = (\boldsymbol{n}\,sin((a+b)\theta), cos((a+b)\theta))$$

$$= exp((a+b)\theta\boldsymbol{n}) = exp((a+b)\,log(\boldsymbol{q})) = \boldsymbol{q}^{a+b}$$

$$(\boldsymbol{q}^a)^b = \boldsymbol{q}^{ab}$$

$$(\boldsymbol{q}^a)^b = (exp(a\,log(\boldsymbol{q})))^b = exp(b\,log(exp(a\,log(\boldsymbol{q})))) = exp(ba\,log(\boldsymbol{q})) = \boldsymbol{q}^{ab}$$

- 단위 사원수를 사용한 회전 표현의 성질

단위 사원수 $\boldsymbol{q}$의 역 $\boldsymbol{q}^{-1}$는 $\boldsymbol{q}$의 켤레와 같다($\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^*$).

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{u}, w) = \left(sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{n}, cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^* = (-\boldsymbol{u}, w) = \left(-sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{n}, cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$= \left(sin\left(\frac{-\theta}{2}\right)\boldsymbol{n}, cos\left(\frac{-\theta}{2}\right)\right)$$

$$= \left(sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(-\boldsymbol{n}), cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

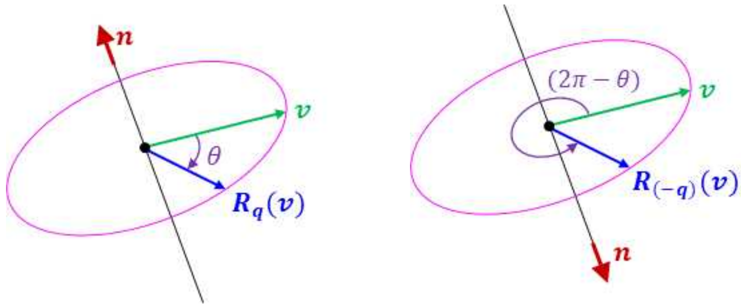
위의 수식은 회전축 $\boldsymbol{n}$을 중심으로 θ만큼의 회전을 나타내는 $\boldsymbol{q}$의 역 회전은 $\boldsymbol{q}^{-1}$임을 보여준다. 사원수 $\boldsymbol{q}$의 역 $\boldsymbol{q}^{-1}$는 회전축 $\boldsymbol{n}$을 중심으로 $-\theta$만큼의 회전을 나타낸다. 또한 사원수 $\boldsymbol{q}$의 역 $\boldsymbol{q}^{-1}$는 회전축 $(-\boldsymbol{n})$을 중심으로 θ만큼의 회전을 나타낸다.

다음은 사원수 $\boldsymbol{q}$를 사용하여 벡터 $\boldsymbol{v}$를 회전한 결과와 사원수 $(-\boldsymbol{q})$를 사용하여 벡터 $\boldsymbol{v}$를 회전한 결과가 같음을 보이고 있다.

$$\boldsymbol{R}_{(-\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{v}) = (-\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{q})^* = (-1)(\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}(-1)(\boldsymbol{q})^* = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^* = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v})$$

벡터 $\boldsymbol{v}$의 회전을 표현하는 사원수 $(-\boldsymbol{q})$의 회전축과 회전의 각도가 사원수 $\boldsymbol{q}$가 표현하는 회전축과 회전의 각도와 같지 않음에 유의하라. 다음은 사원수 $(-\boldsymbol{q})$가 표현하는 회전축은 $(-\boldsymbol{n})$이고 회전 각도는 $(2\pi - \theta)$임을 보이고 있다.

$$-\boldsymbol{q} = (-\boldsymbol{u}, -w) = \left(-sin\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{n}, cos\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)\right)$$
$$= \left(sin\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)(-\boldsymbol{n}), cos\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)\right) = \left(sin\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right)(-\boldsymbol{n}), cos\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right)\right)$$



다음은 단위 사원수가 아닌 경우의 회전의 결과는 단위 사원수를 사용한 회전의 결과와 같음을 보여준다. 단위 사원수가 아닌 사원수 $\boldsymbol{q}_s$는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{q}_s = s\,\hat{\boldsymbol{q}}$$
$$\boldsymbol{q}_s\,\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{q}_s = (s\,\hat{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{p}(s\,\hat{\boldsymbol{q}})^{-1} = (s\,\hat{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{p}(s^{-1}(\hat{\boldsymbol{q}})^{-1}) = (s\,s^{-1})(\hat{\boldsymbol{q}}\,\boldsymbol{p}\,\hat{\boldsymbol{q}}^{-1}) = \hat{\boldsymbol{q}}\,\boldsymbol{p}\,\hat{\boldsymbol{q}}^{-1}$$

사원수를 4-차원 벡터로 취급하면 $(\boldsymbol{q}_1 \bullet \boldsymbol{q}_2)$는 두 사원수 사이의 각도의 코사인 값과 같다. 단위 사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$의 내적 $(\boldsymbol{q}_1 \bullet \boldsymbol{q}_2)$의 값이 1이면 사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$가 같은 회전을 표현한다는 의미이다.

$$\boldsymbol{q}_1 = (\boldsymbol{u}_1, w_1) = \left(sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\boldsymbol{n}_1, cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right)$$
$$\boldsymbol{q}_2 = (\boldsymbol{u}_2, w_2) = \left(sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\boldsymbol{n}_2, cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right)$$

$(\boldsymbol{q}_1 \bullet \boldsymbol{q}_2)$의 값이 -1이면 사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$가 같은 회전을 표현한다는 의미이다(회전축의 방향이 반대).

- 단위 사원수를 사용한 회전 표현을 행렬로 표현하기

단위 사원수 $\boldsymbol{q}$로부터 3차원 벡터 $\boldsymbol{v}$를 회전한 결과 $\boldsymbol{R}_q(\boldsymbol{v})$를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\boldsymbol{R}_q(v) = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{*} = (w^2 - (\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{u}))\boldsymbol{v} + 2(\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v})\boldsymbol{u} + 2w(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$$

단위 사원수 $\boldsymbol{q} = (x, y, z, w) = (\boldsymbol{u}, w)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$$
$$\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{u} = x^2 + y^2 + z^2 = 1 - w^2$$

$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$일 때, $\boldsymbol{R}_q(\boldsymbol{v})$에서 $(w^2 - (\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{u}))\boldsymbol{v}$를 행렬을 사용하여 표현하면 다음과

같다.

$$w^2-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u})=w^2-(x^2+y^2+z^2)=2w^2-1$$

$$(w^2-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u}))\boldsymbol{v}=(2w^2-1)(v_x,v_y,v_z)=((2w^2-1)v_x,(2w^2-1)v_y,(2w^2-1)v_z)$$

$$(w^2-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u}))\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)\begin{bmatrix}2w^2-1&0&0\\0&2w^2-1&0\\0&0&2w^2-1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{R_q}(\boldsymbol{v})$에서 $2(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}$를 행렬을 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$2(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}=2(xv_x+yv_y+zv_z)(x,y,z)$$

$$2(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}=(2x^2v_x+2xyv_y+2xzv_z,2xyv_x+2y^2v_y+2yzv_z,2xzv_x+2yzv_y+2z^2v_z)$$

$$2(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}=(v_x,v_y,v_z)\begin{bmatrix}2x^2&2xy&2xz\\2xy&2y^2&2yz\\2xz&2yz&2z^2\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{R_q}(\boldsymbol{v})$에서 $2w(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$를 행렬을 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$2w(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=(v_x,v_y,v_z)\begin{bmatrix}0&2zw&-2yw\\-2zw&0&2xw\\2yw&-2xw&0\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{R_q}(\boldsymbol{v})$를 행렬을 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R_q}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1}=\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{*}&=(w^2-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u}))\boldsymbol{v}+2(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}+2w(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\\&=(v_x,v_y,v_z)\begin{bmatrix}2w^2-1&0&0\\0&2w^2-1&0\\0&0&2w^2-1\end{bmatrix}\\&\quad+(v_x,v_y,v_z)\begin{bmatrix}2x^2&2xy&2xz\\2xy&2y^2&2yz\\2xz&2yz&2z^2\end{bmatrix}\\&\quad+(v_x,v_y,v_z)\begin{bmatrix}0&2zw&-2yw\\-2zw&0&2xw\\2yw&-2xw&0\end{bmatrix}\\&=(v_x,v_y,v_z)\begin{bmatrix}2x^2+2w^2-1&2xy+2zw&2xz-2yw\\2xy-2zw&2y^2+2w^2-1&2yz+2xw\\2xz+2yw&2yz-2xw&2z^2+2w^2-1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

단위 사원수 $\boldsymbol{q}=(x,y,z,w)=(\boldsymbol{u},w)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$2x^2+2w^2=2-2y^2-2z^2$$

$$2y^2+2w^2=2-2x^2-2z^2$$

$$2z^2+2w^2=2-2x^2-2y^2$$

$\boldsymbol{R_q}(\boldsymbol{v})$를 행렬을 사용하여 표현한 최종 결과는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{R_q}(\boldsymbol{v})=(v_x,v_y,v_z)\begin{bmatrix}1-2y^2-2z^2&2xy+2zw&2xz-2yw\\2xy-2zw&1-2x^2-2z^2&2yz+2xw\\2xz+2yw&2yz-2xw&1-2x^2-2y^2\end{bmatrix}$$

사원수 $\boldsymbol{q}=(x,y,z,w)$를 회전 행렬 $\boldsymbol{R_q}$로 표현하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{R_q} = \begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy+2zw & 2xz-2yw \\ 2xy-2zw & 1-2x^2-2z^2 & 2yz+2xw \\ 2xz+2yw & 2yz-2xw & 1-2x^2-2y^2 \end{bmatrix}$$

임의의 회전 행렬 $\boldsymbol{R}$을 사원수 $\boldsymbol{q}=(x,y,z,w)$로 표현하는 과정은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy+2zw & 2xz-2yw \\ 2xy-2zw & 1-2x^2-2z^2 & 2yz+2xw \\ 2xz+2yw & 2yz-2xw & 1-2x^2-2y^2 \end{bmatrix}$$

대각 원소들의 합은 다음과 같다.

$$r_{11}+r_{22}+r_{33} = (1-2y^2-2z^2)+(1-2x^2-2z^2)+(1-2x^2-2y^2)$$

$$= 3-4x^2-4y^2-4z^2 = 3-4(x^2+y^2+z^2) = 3-4(1-w^2) = 4w^2-1$$

$$w = \frac{\pm\sqrt{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1}}{2}$$

$(w \neq 0)$이면 x, y, z는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$r_{23}-r_{32} = (2yz+2xw)-(2yz-2xw) = 4xw$$

$$x = \frac{r_{23}-r_{32}}{4w}$$

$$r_{31}-r_{13} = (2xz+2yw)-(2xz-2yw) = 4yw$$

$$y = \frac{r_{31}-r_{13}}{4w}$$

$$r_{12}-r_{21} = (2xy+2zw)-(2xy-2zw) = 4zw$$

$$z = \frac{r_{12}-r_{21}}{4w}$$

w의 부호는 + 또는 -가 될 수 있다. w의 부호에 따라 x, y, z의 부호가 바뀐다. 이것은 회전 행렬 $\boldsymbol{R}$을 사원수 $\boldsymbol{q}=(x,y,z,w)$ 또는 $-\boldsymbol{q}=(-x,-y,-z,-w)$로 표현할 수 있음을 나타낸다. 사원수 $\boldsymbol{q}=(x,y,z,w)$와 $-\boldsymbol{q}=(-x,-y,-z,-w)$는 같은 회전을 표현한다.

회전 행렬 $\boldsymbol{R}$의 대각원소들 중 가장 큰 원소를 r_{11}이라고 가정할 때, 회전 행렬 $\boldsymbol{R}$을 사원수 $\boldsymbol{q}=(x,y,z,w)$로 표현하는 또 다른 방법은 다음과 같다.

$$r_{11} = max(r_{11}, r_{22}, r_{33})$$

$$r_{11}-r_{22}-r_{33} = (1-2y^2-2z^2)-(1-2x^2-2z^2)-(1-2x^2-2y^2) = 4x^2-1$$

$$x = \frac{\sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1}}{2}$$

$$y = \frac{r_{12} + r_{21}}{4x} \quad (x \neq 0)$$

$$z = \frac{r_{13} + r_{31}}{4x} \quad (x \neq 0)$$

$$w = \frac{r_{23} - r_{32}}{4x} \quad (x \neq 0)$$

- 단위 사원수의 합성(Composition)

  벡터 v_1을 단위 사원수 p로 회전(변환)한 결과 v_2를 다시 단위 사원수 q로 회전(변환)한 결과 v_3는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R_p(v_1) = v_2 = p v_1 p^{-1}$$

$$R_q(v_2) = v_3 = q v_2 q^{-1}$$

$$v_3 = R_q(v_2) = R_q(R_p(v_1)) = q v_2 q^{-1} = q(p v_1 p^{-1}) q^{-1} = (qp) v_1 (p^{-1} q^{-1}) = (qp) v_1 (qp)^{-1}$$

  단위 사원수 p와 단위 사원수 q의 곱 pq은 단위 사원수임을 보이고 있다.

$$|pq| = |p||q| = 1$$

$$v_3 = (qp) v_1 (qp)^{-1}$$

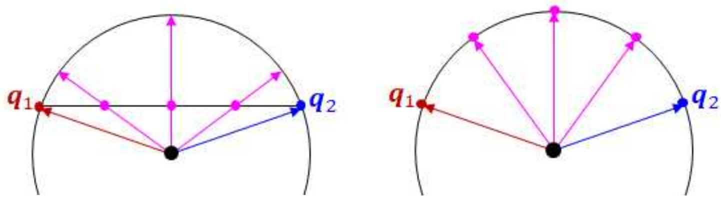
  즉, 벡터 v_3는 v_1을 단위 사원수 (qp)로 회전(변환)하는 것이다.

$$R_{qp}(v_1) = R_q(R_p(v_1))$$

- 사원수의 보간(Interpolation)

  단위 사원수 q_1과 단위 사원수 q_2를 매개변수 t로 선형 보간(Linear Interpolation)하면 다음과 같다. 이것은 단위 사원수 q_1과 단위 사원수 q_2를 연결한 선분 위의 점을 지나는 사원수를 구하는 것이다. 다음 그림은 단위 사원수 q_1과 단위 사원수 q_2를 연결한 선분을 균등하게 분할한 점을 지나는 사원수가 표현하는 회전각이 다름을 보이고 있다. 단위 사원수 q_1과 단위 사원수 q_2 사이의 각도가 θ일 때, 0.25θ, 0.5θ, 0.75θ 만큼의 회전을 표현하는 단위 사원수 q를 선형 보간에 의하여 구하면 실제 회전의 결과는 균등하지 않게 된다.

$$q = (1-t) q_1 + t q_2$$



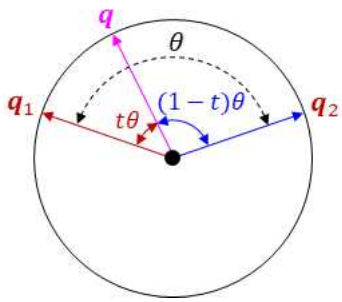
  그러므로 회전을 표현하는 사원수의 경우 선형 보간이 아닌 다른 보간 방법이 필요하다.

사원수 $q_1 = (u_1, w_1)$과 사원수 $q_2 = (u_2, w_2)$가 단위 사원수이면 내적은 다음과 같다.

$$q_1 \bullet q_2 = cos(\theta)$$

다음 그림에서 단위 사원수 q_1가 표현하는 회전과 단위 사원수 q_2가 표현하는 회전 사이의 각도가 θ이다. 단위 사원수 q_1와 단위 사원수 q 사이의 각도가 $t\theta$이고, 단위 사원수 q와 단위 사원수 q_2의 각도가 $(1-t)\theta$이다. 단위 사원수 q_1가 표현하는 회전에서 $t\theta$만큼 더 회전을 한 회전을 표현하는 단위 사원수 q를 단위 사원수 q_1와 단위 사원수 q_2를 사용하여 표현하자. 즉, 다음 수식을 만족하는 실수 t_1과 t_2를 구해보자.

$$q = t_1 q_1 + t_2 q_2$$



$$q_1 \bullet q_1 = 1,\ q_2 \bullet q_2 = 1,\ q_1 \bullet q = cos(t\theta),\ q \bullet q_2 = cos((1-t)\theta),\ q_1 \bullet q_2 = cos(\theta)$$

$$q_1 \bullet q = t_1(q_1 \bullet q_1) + t_2(q_1 \bullet q_2)$$

$$cos(t\theta) = t_1 + t_2 cos(\theta)$$

$$q \bullet q_2 = t_1(q_1 \bullet q_2) + t_2(q_2 \bullet q_2)$$

$$cos((1-t)\theta) = t_1 cos(\theta) + t_2$$

삼각 함수의 차 공식에 따라 다음이 성립한다.

$$cos((1-t)\theta) = cos(\theta - t\theta) = cos(\theta)cos(t\theta) + sin(\theta)sin(t\theta)$$

$$sin((1-t)\theta) = sin(\theta - t\theta) = sin(\theta)cos(t\theta) - cos(\theta)sin(t\theta)$$

다음을 만족하는 실수 t_1과 t_2를 구하자.

$$cos(t\theta) = t_1 + t_2 cos(\theta) \qquad (1)$$

$$cos((1-t)\theta) = t_1 cos(\theta) + t_2 \qquad (2)$$

식 (1)에 $cos(\theta)$를 곱하여 식 (2)에서 빼면 t_2를 구할 수 있다.

$$cos(t\theta)cos(\theta) = t_1 cos(\theta) + t_2 cos^2(\theta)$$

$$t_2(1 - cos^2(\theta)) = cos((1-t)\theta) - cos(\theta)cos(t\theta)$$

$$t_2 sin^2(\theta) = cos(\theta)cos(t\theta) + sin(\theta)sin(t\theta) - cos(\theta)cos(t\theta) = sin(\theta)sin(t\theta)$$

$$t_2 = \frac{sin(\theta)sin(t\theta)}{sin^2(\theta)} = \frac{sin(t\theta)}{sin(\theta)}$$

식 (2)에 $cos(\theta)$를 곱하여 식 (1)에서 빼면 t_2를 구할 수 있다.

$$cos((1-t)\theta)cos(\theta) = t_1 cos^2(\theta) + t_2 cos(\theta)$$

$$t_1(1 - cos^2(\theta)) = cos(t\theta) - cos((1-t)\theta)cos(\theta)$$

$$t_1 sin^2(\theta) = cos(t\theta) - cos(\theta)(cos(\theta)cos(t\theta) + sin(\theta)sin(t\theta))$$

$$t_1 sin^2(\theta) = cos(t\theta) - cos^2(\theta)cos(t\theta) - cos(\theta)sin(\theta)sin(t\theta)$$

$$t_1 sin^2(\theta) = cos(t\theta)(1 - cos^2(\theta)) - cos(\theta)sin(\theta)sin(t\theta)$$

$$t_1 sin^2(\theta) = cos(t\theta)sin^2(\theta) - cos(\theta)sin(\theta)sin(t\theta)$$

$$t_1 = \frac{cos(t\theta)sin^2(\theta) - cos(\theta)sin(\theta)sin(t\theta)}{sin^2(\theta)}$$

$$t_1 = \frac{cos(t\theta)sin(\theta) - cos(\theta)sin(t\theta)}{sin(\theta)}$$

$$t_1 = \frac{sin((1-t)\theta)}{sin(\theta)}$$

$\boldsymbol{q}$를 실수 t_1과 t_2를 사용하여 표현하면 다음과 같다.

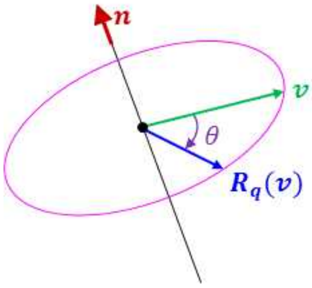
$$\boldsymbol{q} = t_1\boldsymbol{q}_1 + t_2\boldsymbol{q}_2 = \frac{sin((1-t)\theta)}{sin(\theta)}\boldsymbol{q}_1 + \frac{sin(t\theta)}{sin(\theta)}\boldsymbol{q}_2 = \frac{sin((1-t)\theta)\boldsymbol{q}_1 + sin(t\theta)\boldsymbol{q}_2}{sin(\theta)}$$

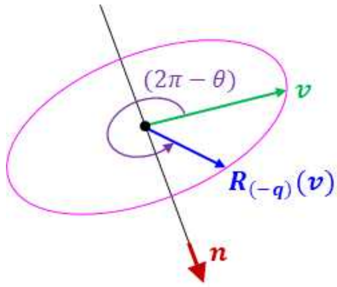
위의 식은 단위 사원수 $\boldsymbol{q}_1$이 표현하는 회전과 단위 사원수 $\boldsymbol{q}_2$가 표현하는 회전을 매개변수 t로 보간(Interpolation)하여 구할 수 있음을 보여준다. 이러한 보간을 구면 보간(Spherical Interpolation)이라고 하며 $\boldsymbol{q} = slerp(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, t)$로 표기한다.

$$\boldsymbol{q} = slerp(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, t) = \frac{sin((1-t)\theta)\boldsymbol{q}_1 + sin(t\theta)\boldsymbol{q}_2}{sin(\theta)}$$

다음의 수식은 사원수 $\boldsymbol{q}$에 의하여 벡터 $\boldsymbol{v}$를 회전한 결과 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v})$를 구하는 방법은 두 가지가 있음을 보이고 있다. 하나의 방법은 사원수 $\boldsymbol{q}$가 나타내는 회전축을 중심으로 θ 만큼 회전하는 것이고, 다른 방법은 사원수 $(-\boldsymbol{q})$가 나타내는 회전축을 중심으로 $(2\pi - \theta)$만큼 회전하는 것이다.

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1} = ((-1)\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}((-1)\boldsymbol{q}^{-1}) = (-\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{q})^{-1} = \boldsymbol{R}_{(-\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{v})$$

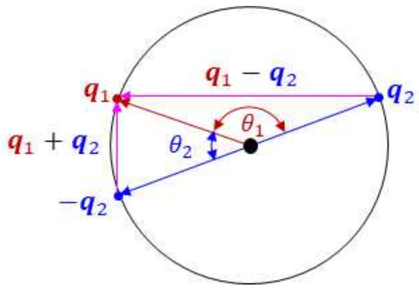




사원수 q가 표현하는 회전과 사원수 $(-q)$가 표현하는 회전이 같으므로 단위 사원수 q_1이 표현하는 회전과 단위 사원수 q_2가 표현하는 회전을 매개변수 t로 구면 보간을 하는 방법은 다음의 두 가지이다.

$$q = slerp(q_1, q_2, t) = \frac{sin((1-t)\theta)q_1 + sin(t\theta)q_2}{sin(\theta)}$$

$$q = slerp(q_1, -q_2, t) = \frac{sin((1-t)\theta)q_1 + sin(t\theta)(-q_2)}{sin(\theta)}$$



위의 그림에서 $slerp(q_1, q_2, t)$로 구한 사원수보다 $slerp(q_1, -q_2, t)$로 구한 사원수가 더 짧은 회전을 나타낸다. 단위 사원수 q_1과 단위 사원수 q_2가 주어질 때, $(|q_1 - q_2|^2 > |q_1 + q_2|^2)$이면 $slerp(q_1, -q_2, t)$를 선택하고 $(|q_1 - q_2|^2 < |q_1 + q_2|^2)$이면 $slerp(q_1, q_2, t)$를 선택한다.

⑪ 오일러 각도, 회전 행렬, 사원수의 비교

- 오일러 각도 표현
  - 오일러 각도 표현은 사람이 쉽게 이해할 수 있고 표현이 단순하다.
  - 오일러 각도 표현의 회전을 회전 행렬로 표현할 수 있다. 그러나 고정된 회전축(x-축, y-축, z-축)에 대한 3개의 회전 행렬로 임의의 회전 행렬을 표현하는 것은 쉽지 않다(여러분이 애니메이션을 만든다고 가정해보라. 가능하지만 행렬의 곱셈이 필요하고 짜증날 만큼 지루한 작업이 될 것이다).
  - 회전축의 순서가 중요하다. (90°, 45°, 0)의 오일러 각도 표현은 x-축, y-축, z-축의 순서로 회전한 결과와 y-축, x-축, z-축의 순서로 회전한 결과는 다르다.

- 짐벌-락(Gibal Lock)이 발생할 수 있다. 짐벌-락은 회전에 대한 자유도가 손실되는 현상이다.
- 두 개의 오일러 각도 표현의 회전을 보간(Interpolation)하기 어렵다.

⑫ DirectXMath의 사원수(Quaternion) 함수

다음 함수 XMQuaternionIdentity()는 단위 사원수 $(0, 0, 0, 1)$를 반환한다.

다음 함수 XMQuaternionConjugate()는 사원수 $\mathbf{q} = (x, y, z, w)$의 켤레 사원수 $(-x, -y, -z, w)$를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionConjugate(XMVECTOR q);
```

다음 함수 XMQuaternionLength()는 사원수 $\mathbf{q} = (x, y, z, w)$의 크기 $|\mathbf{q}|$를 반환한다. 함수 XMQuaternionLengthSq()는 사원수 $\mathbf{q} = (x, y, z, w)$의 크기 $|\mathbf{q}|$의 제곱을 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionLength(XMVECTOR q);
XMVECTOR XMQuaternionLengthSq(XMVECTOR q);
```

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{\mathbf{q}\mathbf{q}^*} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$$

다음 함수 XMQuaternionNormalize()는 사원수 $\mathbf{q} = (x, y, z, w)$의 크기를 1로 만들어(정규화하여) 반환한다. 사원수 $\mathbf{q} = (x, y, z, w)$의 각 요소를 $|\mathbf{q}|$로 나누어 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionNormalize(XMVECTOR q);
XMVECTOR XMQuaternionNormalizeEst(XMVECTOR q);
```

다음 함수 XMQuaternionInverse()는 사원수(q)의 역 사원수 $\mathbf{q}^{-1}$를 반환한다. 사원수(q)의 역은 사원수(q)의 켤레 사원수를 정규화하는 것이다.

```
XMVECTOR XMQuaternionInverse(XMVECTOR q);
```

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{|\mathbf{q}|^2}$$

다음 함수 XMQuaternionIsIdentity()는 사원수(q)가 단위 사원수이면 참을 반환한다.

```
bool XMQuaternionIsIdentity(XMVECTOR q);
```

다음 함수 XMQuaternionIsInfinite()는 사원수(q)의 어떤 요소가 $\pm\infty$이면 참을 반환한다.

```
bool XMQuaternionIsInfinite(XMVECTOR q);
```

다음 함수 XMQuaternionIsNaN()는 사원수(q)의 어떤 요소가 NaN이면 참을 반환한다.

```
bool XMQuaternionIsNaN(XMVECTOR q);
```

다음 함수 XMQuaternionIsNaN()는 두 사원수(q1, q2)가 같으면 참을 반환한다.

```
bool XMQuaternionEqual(XMVECTOR q1, XMVECTOR q2);
```

다음 함수 XMQuaternionIsNaN()는 두 사원수(q1, q2)가 같지 않으면 참을 반환한다.

```
bool XMQuaternionNotEqual(XMVECTOR q1, XMVECTOR q2);
```

다음 함수 XMQuaternionDot()는 두 사원수(q1, q2)의 내적 연산의 결과를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionDot(XMVECTOR q1, XMVECTOR q2);
```

$$\boldsymbol{q}_1 \bullet \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{u}_1 \bullet \boldsymbol{u}_2 + w_1 w_2 = |\boldsymbol{q}_1||\boldsymbol{q}_2| cos(\theta)$$

다음 함수 XMQuaternionMultiply()는 두 사원수(q1, q2)의 곱셈 연산(q2 * q1)의 결과(사원수의 합성)를 반환한다. 곱셈 연산(q2 * q1)의 결과는 사원수 q1으로 회전을 한 다음에 사원수 q2로 회전을 하는 것과 같다.

```
XMVECTOR XMQuaternionMultiply(XMVECTOR q1, XMVECTOR q2);
```

$$\boldsymbol{q}_2 \boldsymbol{q}_1 = (x_2, y_2, z_2, w_2)(x_1, y_1, z_1, w_1) = (x_3, y_3, z_3, w_3)$$

$$x_3 = x_1 w_2 - y_1 z_2 + z_1 y_2 + w_1 x_2$$

$$y_3 = x_1 z_2 + y_1 w_2 - z_1 x_2 + w_1 y_2$$

$$z_3 = -x_1 y_2 + y_1 x_2 + z_1 w_2 + w_1 z_2$$

$$w_3 = -x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 + w_1 w_2$$

다음 함수 XMQuaternionBaryCentric()는 세 개의 사원수(q1, q2, q3)에 대한 매개변수(f, g)의 무게중심 좌표를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionBaryCentric(XMVECTOR q1, XMVECTOR q2, XMVECTOR
q3, float f, float g);
```

다음 함수 XMQuaternionRotationAxis()는 회전 축(axis)을 중심으로 각도(angle) 만큼의 회전을 표현하는 사원수를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionRotationAxis(XMVECTOR axis, float angle);
```

회전 축을 정규화한 벡터 $\boldsymbol{n}$을 중심으로 각도 θ 만큼의 회전을 표현하는 사원수 $\boldsymbol{q}$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{q} = (x, y, z, w) = (\boldsymbol{u}, w) = (sin(\theta)\boldsymbol{n}, cos(\theta))$$

다음 함수 XMQuaternionToAxisAngle()는 사원수(q)가 표현하는 회전 축(axis)과 회전 각도(angle)를 반환한다.

```
void XMQuaternionToAxisAngle(XMVECTOR *axis, float *angle, XMVECTOR
q);
```

다음 함수 XMQuaternionRotationNormal()는 단위 벡터의 회전 축(normal)을 중심으로 각도(angle) 만큼의 회전을 표현하는 사원수를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionRotationNormal(XMVECTOR normal, float angle);
```

다음 함수 XMQuaternionRotationMatrix()는 회전 행렬(m)에 해당하는 회전을 표현하

는 사원수를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionRotationMatrix(XMMATRIX m);
```

다음 함수 XMQuaternionRotationRollPitchYaw()는 오일러 각(pitch, yaw, roll)에 해당하는 회전을 표현하는 사원수를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionRotationRollPitchYaw(float pitch, float yaw,
float roll);
XMVECTOR XMQuaternionRotationRollPitchYawFromVector(XMVECTOR
angles);
```

다음 함수 XMQuaternionSlerp()는 두 개의 단위 사원수(q0, q1)를 매개변수(t)로 구면 보간한 결과를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionSlerp(XMVECTOR q0, XMVECTOR q1, float t);
XMVECTOR XMQuaternionSlerpV(XMVECTOR q0, XMVECTOR q1, XMVECTOR t);
```

단위 사원수 q_0과 단위 사원수 q_1를 매개변수 t로 구면 보간한 결과는 다음과 같다.

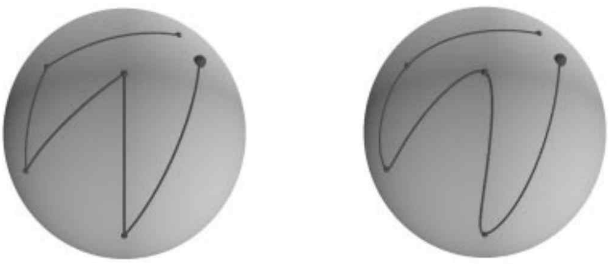
$$q = slerp(q_0, q_1, t) = \frac{sin((1-t)\theta)q_0 + sin(t\theta)q_1}{sin(\theta)}$$

다음 함수 XMQuaternionSquad()는 네 개의 단위 사원수(q0, s0, s1, q1)를 매개변수(t)로 다음과 같은 스플라인 구면 보간(Spherical Quadrangle Interpolation)한 결과를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionSquad(XMVECTOR q0, XMVECTOR s0, XMVECTOR s1,
XMVECTOR q1, float t);
```

$$squad(q_0, s_0, s_1, q_1, t) = slerp(slerp(q_0, q_1, t), slerp(s_0, s_1, t), 2t(t-1))$$

두 개의 단위 사원수 q_0과 q_1를 매개변수 t로 구면 보간할 때 $slerp(q_0, q_1, t)$는 최적의 방법이다. 그러나 $(n+1)$개의 단위 사원수들의 집합 $\{q_0, q_1, \cdots, q_{n-1}, q_n\}$을 연속적으로 보간할 때, $slerp$의 커브는 두 사원수 사이는 커다란 호(아크, Arc)이지만 각 사원수의 위치에서 부드럽지 않다(연속적이지 않고 미분가능하지 않음, 다음 그림의 왼쪽).



- 베지어 곡선(Bezier Curve)

  3차원 공간에서 두 점 p_0와 p_1의 선형 보간은 두 점 p_0와 p_1를 지나는 직선 위의 점을 매개변수 t로 구하는 것이다$(0 \le t \le 1)$.

$$linear(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, t) = (1-t)\boldsymbol{p}_0 + t\boldsymbol{p}_1$$

3차원 공간에서 베지어 곡선은 $(n+1)$개의 점들의 집합 $\{\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_{n-1}, \boldsymbol{p}_n\}$이 주어질 때, 점 $\boldsymbol{p}_0$와 $\boldsymbol{p}_n$을 지나는 n차 곡선 위의 점을 다음과 같이 매개변수 t로 표현한다$(0 \le t \le 1)$. 각 점 $\boldsymbol{p}_i$를 제어점(Control point)이라고 한다.

$$bezier(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_{n-1}, \boldsymbol{p}_n, t) = \sum_{i=0}^{n} B(n,i,t)\boldsymbol{p}_i$$

$$B(n,i,t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

제어점들의 집합 $\{\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1\}$이 주어질 때, 베지어 곡선은 1차 곡선(직선)이 되고 선형 보간과 같다.

$$bezier(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, t) = (1-t)\boldsymbol{p}_0 + t\boldsymbol{p}_1 = linear(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, t)$$

제어점들의 집합 $\{\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$이 주어질 때, 베지어 곡선은 2차 곡선(포물선)이 된다. 이곡선은 $\boldsymbol{p}_0$와 $\boldsymbol{p}_1$을 매개변수 t로 선형 보간한 $linear(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, t)$와 $\boldsymbol{p}_1$와 $\boldsymbol{p}_2$을 매개변수 t로 선형 보간한 $linear(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, t)$를 다시 매개변수 t로 선형 보간하는 것과 같다.

$$bezier(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, t) = \sum_{i=0}^{2} B(n,i,t)\boldsymbol{p}_i$$

$$= (1-t)^2\boldsymbol{p}_0 + 2(1-t)t\boldsymbol{p}_1 + t^2\boldsymbol{p}_2 = (1-t)((1-t)\boldsymbol{p}_0 + t\boldsymbol{p}_1) + t((1-t)\boldsymbol{p}_1 + t\boldsymbol{p}_2)$$

$$= linear(linear(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, t), linear(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, t), t)$$

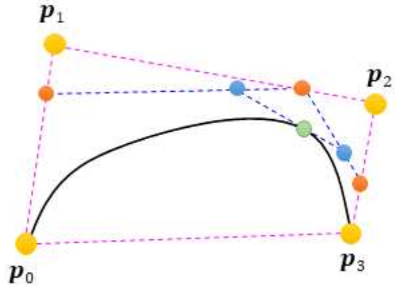
제어점들의 집합 $\{\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$이 주어질 때, 베지어 곡선은 3차 곡선(포물선)이 된다.

$$bezier(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, t) = \sum_{i=0}^{3} B(n,i,t)\boldsymbol{p}_i$$

$$= (1-t)^3\boldsymbol{p}_0 + 3(1-t)^2 t\boldsymbol{p}_1 + 3(1-t)t^2\boldsymbol{p}_2 + t^3\boldsymbol{p}_3$$

$$\boldsymbol{p}_{01}(t) = linear(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, t),\ \ \boldsymbol{p}_{12}(t) = linear(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, t),\ \ \boldsymbol{p}_{23}(t) = linear(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, t)$$

$$bezier(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, t) = bezier(\boldsymbol{p}_{01}(t), \boldsymbol{p}_{12}(t), \boldsymbol{p}_{23}(t), t)$$



- 구면 스플라인 사원수 보간(Spherical Spline Quaternion Interpolation)

  구면 스플라인 사원수 보간은 3차 베지어 보간의 개념을 사원수 보간에 적용하여 스플라인 곡선으로 보간한 것이며 *Squad*(Spherical Quadrangle)라고 한다.

$$squad(q_i, s_i, s_{i+1}, q_{i+1}, t) = slerp(slerp(q_i, q_{i+1}, t), slerp(s_i, s_{i+1}, t), 2t(t-1))$$

$$s_i = q_i exp\left(-\frac{log(q_i^{-1}q_{i+1}) + log(q_i^{-1}q_{i-1})}{4}\right)$$

네 개의 사원수들의 집합 $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$을 구면 스플라인 사원수 보간을 하려면 s_0, s_1, s_2가 필요하다. 다음 함수 XMQuaternionSquadSetup()은 네 개의 단위 사원수(q0, q1, q2, q3)에 대한 s_0, s_1, s_2를 계산하여 반환한다.

```
void XMQuaternionSquadSetup(XMVECTOR *s0, XMVECTOR *s1, XMVECTOR
*s2, XMVECTOR q0, XMVECTOR q1, XMVECTOR q2, XMVECTOR q3);
```

그러므로 네 개의 단위 사원수(q0, q1, q2, q3)를 매개변수(t)로 스플라인 구면 보간을 하려면 다음과 같이 함수를 호출해야 한다.

```
XMVECTOR s0;
XMVECTOR s1;
XMVECTOR s2;
XMQuaternionSquadSetup(&s0, &s1, &s2, q0, q1, q2, q3);
XMVECTOR q01 = XMQuaternionSquad(q0, s0, s1, q1, t);
XMVECTOR q12 = XMQuaternionSquad(q1, s1, s2, q2, t);
XMVECTOR q23 = XMQuaternionSquad(q2, s2, s3, q3, t);
```

Squad(Spherical Quadrangle) 보간은 제어점에서 연속이고 미분가능하다(자세한 증명은 생략).

$$squad(q_i, s_i, s_{i+1}, q_{i+1}, t) = slerp(slerp(q_i, q_{i+1}, t), slerp(s_i, s_{i+1}, t), 2t(t-1))$$

Squad 보간은 각 제어점에서 연속(Continuous)이다.

q_{i-1}, q_i, q_{i+1}의 *Squad* 보간에서 q_{i-1}와 q_i를 매개변수 $(t=1)$로 보간한 결과와 q_i와 q_{i+1}를 매개변수 $(t=0)$로 보간한 결과는 같다.

$$squad(q_{i-1}, s_{i-1}, s_i, q_i, 1) = q_i = squad(q_i, s_i, s_{i+1}, q_{i+1}, 0)$$

$$\begin{aligned} squad(\boldsymbol{q}_{i-1}, \boldsymbol{s}_{i-1}, \boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{q}_i, 1) &= slerp(slerp(\boldsymbol{q}_{i-1}, \boldsymbol{q}_i, 1), slerp(\boldsymbol{s}_{i-1}, \boldsymbol{s}_i, 1), 0) \\ &= slerp(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{s}_i, 0) = \boldsymbol{q}_i \\ squad(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_{i+1}, \boldsymbol{q}_{i+1}, 0) &= slerp(slerp(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_{i+1}, 0), slerp(\boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_{i+1}, 0), 0) \\ &= slerp(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{s}_i, 0) = \boldsymbol{q}_i \end{aligned}$$

$Squad$ 보간은 각 제어점에서 미분가능(Differentiable)이다.

$$\frac{d}{dt} squad(\boldsymbol{q}_{i-1}, \boldsymbol{s}_{i-1}, \boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{q}_i, 1) = \frac{d}{dt} squad(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_{i+1}, \boldsymbol{q}_{i+1}, 0)$$

****

$$\frac{d}{dt} squad(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_{i+1}, \boldsymbol{q}_{i+1}, t)$$

$$= \frac{d}{dt}(slerp(slerp(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_{i+1}, t), slerp(\boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_{i+1}, t), 2t(t-1)))$$

$$\boldsymbol{g}_i(t) = slerp(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_{i+1}, t)\, slerp(\boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_{i+1}, t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(squad(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_{i+1}, \boldsymbol{q}_{i+1}, t)\right)$$

$$= \frac{d}{dt}(slerp(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_{i+1}, t)\, \boldsymbol{g}_i(t)^{2t(t-1)})$$

$$= \frac{d}{dt}\left(slerp(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_{i+1}, t)\right) \boldsymbol{g}_i(t)^{2t(t-1)} + slerp(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_{i+1}, t) \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{g}_i(t)^{2t(t-1)}\right)$$

$$= slerp(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_{i+1}, t)\, log(\boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_{i+1}) \boldsymbol{g}_i(t)^{2t(t-1)} + slerp(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_{i+1}, t) \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{g}_i(t)^{2t(t-1)}\right)$$

$\boldsymbol{g}_i(t)$는 단위 사원수의 곱이므로 $\boldsymbol{g}_i(t)$도 단위 사원수이다.

$$\boldsymbol{g}_i(t) = (sin(\theta_i)\boldsymbol{n}_i, cos(\theta_i))$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{g}_i(t)^{2t(t-1)}\right)$$