6장 MLP(다층 퍼셉트론)

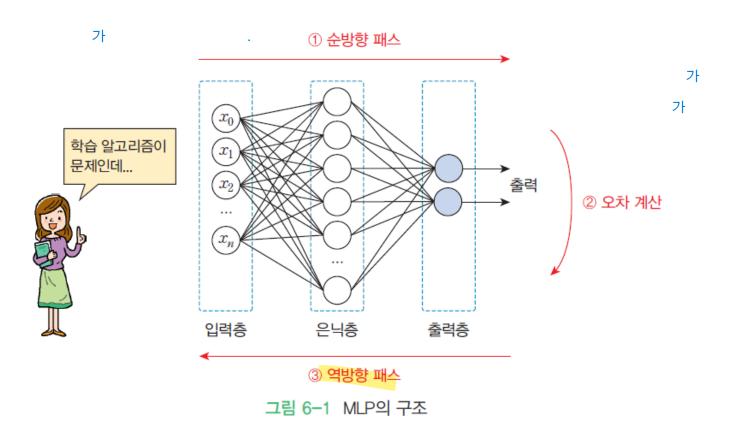


- MLP의 작동 원리를 이해한다.
- 경사하강법을 이해한다.
- 역전파 알고리즘을 이해한다.
- 넘파이만으로 MLP를 구현해본다.





 다층 퍼셉트론(multilayer perceptron: MLP): 입력층과 출력층 사이에 은닉층(hidden layer)을 가지고 있는 퍼셉트론



활성화 함수

- 활성화 함수(activation function)은 입력의 총합을 받아서 출력값을 계산하는 함수이다.
- MLP에서는 다양한 활성화 함수를 사용한다.

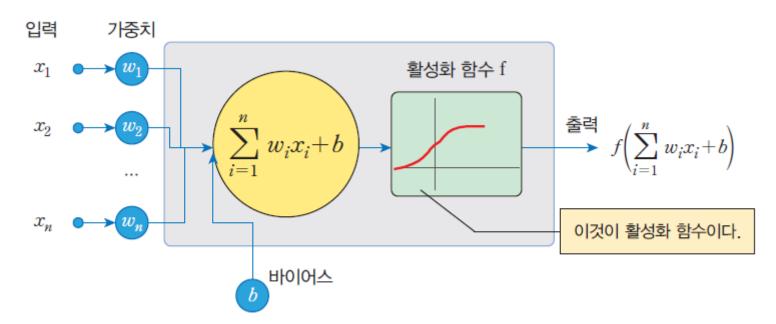


그림 6-2 활성화 함수

일반적으로 많이 사용되는 활성화 함수

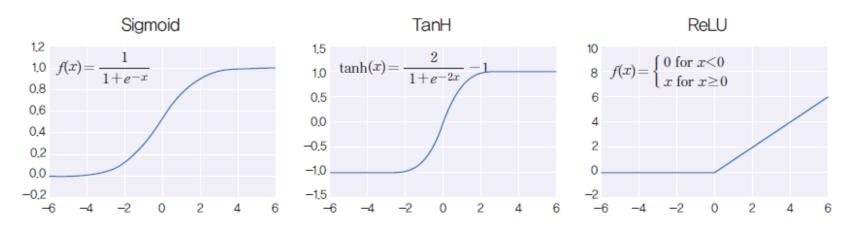


그림 6-3 많이 사용되는 활성화 함수

선형 레이어는 많아도 쓸모가 없다.

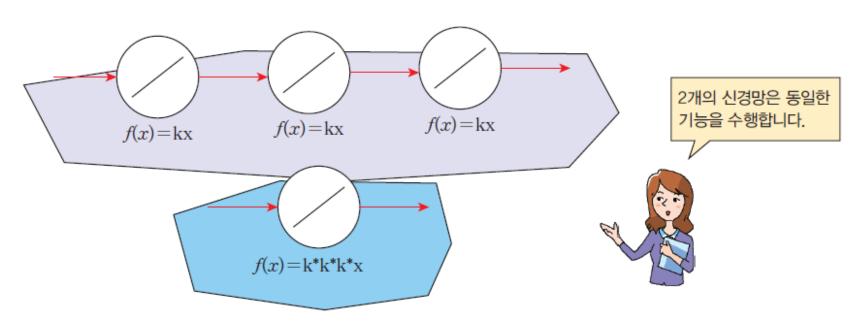
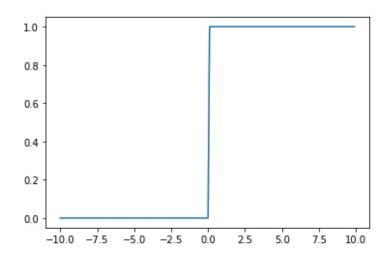


그림 6-4 선형 레이어는 아무리 많아도 하나의 레이어로 대치될 수 있다.



 계단 함수는 입력 신호의 총합이 0을 넘으면 1을 출력하고, 그렇지 않으면 0을 출력하는 함수이다.

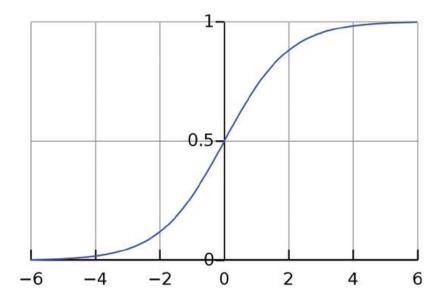
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$



시그모이드 함수

- 1980년대부터 사용되온 전통적인 활성화 함수이다.
- 시그모이드는 다음과 같이 S자와 같은 형태를 가진다.

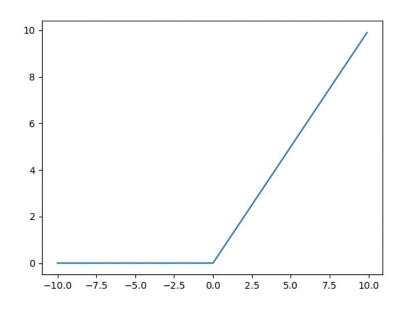
$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



ReLU 함수(Rectifed Linear Unit function)

- ReLU 함수는 최근에 가장 인기 있는 활성화 함수이다.
- ReLU 함수는 입력이 0을 넘으면 그대로 출력하고, 입력이 0보다 적으면 출력은 0이 된다.

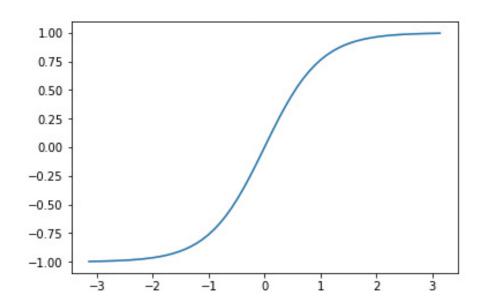
$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$





 tanh() 함수는 넘파이에서 제공하고 있다. 따라서 별도의 함수 작성은 필요하지 않다. tanh() 함수는 시그모이드 함수와 아주 비슷하지만 출력값이 -1에서 1까지이다.

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{1 + e^{-2x}} - 1$$



Lab: 파이썬으로 활성화 함수 구현하기

def step(x):

if x > 0.000001: return 1 # 부동 소수점 오차 방지

else return 0



넘파이 배열을 받기 위하여 변경한다.

def step(x):

result = x > 0.000001 # True 또는 False

return result.astype(np.int) # 정수로 반환

グ그래프 그리기

import numpy as np

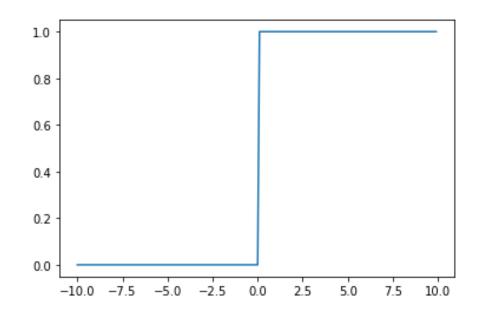
```
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.arange(-10.0, 10.0, 0.1)

y = step(x)

plt.plot(x, y)

plt.show()
```

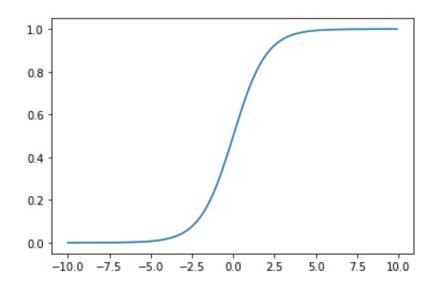


시그모이드 함수

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def sigmoid(x):
    return 1.0 / (1.0 + np.exp(-x))

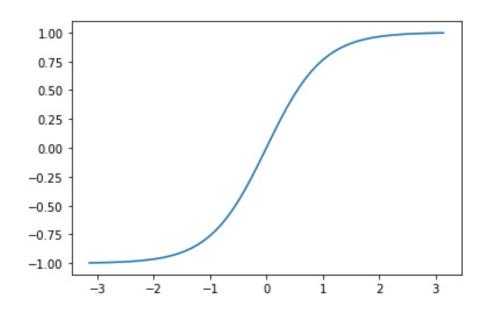
x = np.arange(-10.0, 10.0, 0.1)
y = sigmoid(x)
plt.plot(x, y)
plt.show()
```



tanh 함수

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-np.pi, np.pi, 60)
y = np.tanh(x)
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

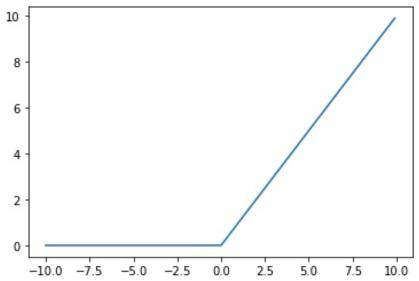




```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

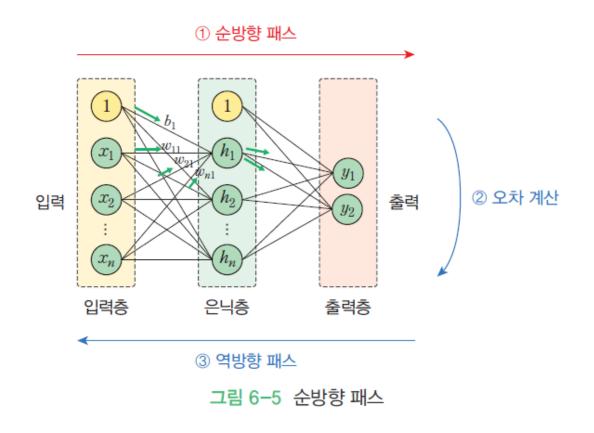
def relu(x):
    return np.maximum(x, 0)

x = np.arange(-10.0, 10.0, 0.1)
y = relu(x)
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

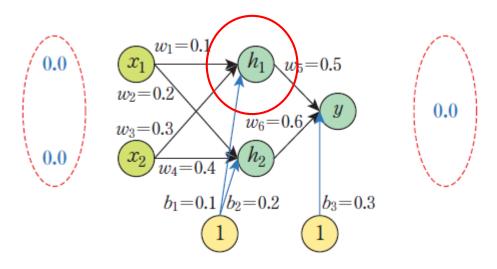


MLP의 순방향 패스

 순방향 패스란 입력 신호가 입력층 유닛에 가해지고 이들 입력 신호가 은닉층을 통하여 출력층으로 전파되는 과정을 의미한다.



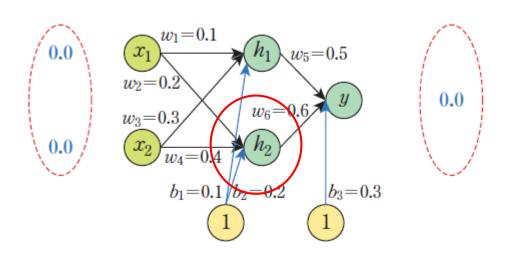
손으로 계산해보자.



$$z_1 = w_1 * x_1 + w_3 * x_2 + b_1 = 0.1 * 0.0 + 0.3 * 0.0 + 0.1 = 0.1$$

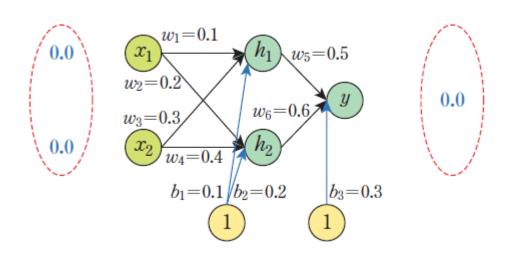
$$a_1 = \frac{1}{1 + e^{-z_1}} = \frac{1}{1 + e^{-0.1}} = 0.524979$$

손으로 계산해보자.



$$a_2 = 0.549834$$

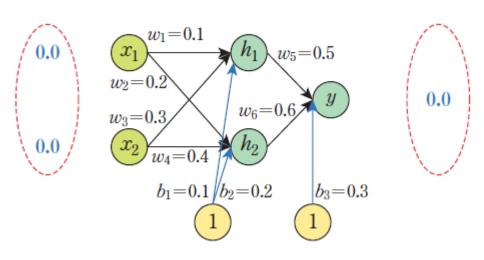
손으로 계산해보자.



$$\begin{aligned} z_y &= w_5 * a_1 + w_6 * a_2 + b_3 \\ &= 0.5 * 0.524979 + 0.6 * 0.549834 + 0.3 = 0.892389 \\ a_y &= \frac{1}{1 + e^{-z_y}} = \frac{1}{1 + e^{-0.892389}} = 0.709383 \end{aligned}$$

정답은 0이지만 신경망의 출력은 0.71 정도이다. 오차가 상당함을 알

행렬로 표시해보자.



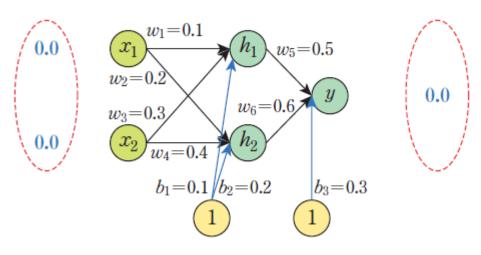
$$\begin{split} z_1 &= w_1 * x_1 + w_3 * x_2 + b_1 & \text{ x1} \\ z_2 &= w_2 * x_1 + w_4 * x_2 + b_2 \end{split}$$



$$Z_1 = XW_1 + B_1$$

행렬로 표시할 수 있다.

행렬로 표시해보자.



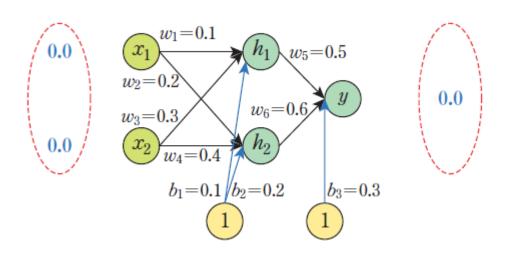
$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}, \quad Z_1 = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{bmatrix}$$



$$Z_1 = [z_1 \ z_2] = XW_1 + B_1 = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} w_1 \ w_2 \\ w_3 \ w_4 \end{bmatrix} + [b_1 \ b_2]$$

행렬로 표시해보자.



$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{bmatrix} w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} \\ Z_2 &= A_1 W_2 + B_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_3 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = f(Z_2) \end{aligned}$$

Lab: MLP 순방향 패스

```
import numpy as np
# 시그모이드 함수
def actf(x):
 return 1/(1+np.exp(-x))
# 시그모이드 함수의 미분치
def actf_deriv(x):
   return x^*(1-x)
# 입력유닛의 개수, 은닉유닛의 개수, 출력유닛의 개수
inputs, hiddens, outputs = 2, 2, 1
learning_rate=0.2
# 훈련 샘플과 정답
X = \text{np.array}([[0, 0], [0, 1], [1, 0], [1, 1]])
T = np.array([[0], [1], [1], [0]])
```

Lab: MLP 순방향 패스

```
W1 = np.array([[0.10, 0.20],
         [0.30, 0.40]]
W2 = np.array([[0.50], [0.60]])
B1 = np.array([0.1, 0.2])
B2 = np.array([0.3])
# 순방향 전파 계산
def predict(x):
    layer0 = x
                                   # 입력을 layer0에 대입한다.
    Z1 = \text{np.dot(layer0, W1)+B1}
                                   # 행렬의 곱을 계산한다.
    layer1 = actf(Z1)
                                   # 활성화 함수를 적용한다.
                                   # 행렬의 곱을 계산한다.
    Z2 = np.dot(layer1, W2)+B2
    layer2 = actf(Z2)
                                   # 활성화 함수를 적용한다.
    return layer0, layer1, layer2
```

Lab: MLP 순방향 패스

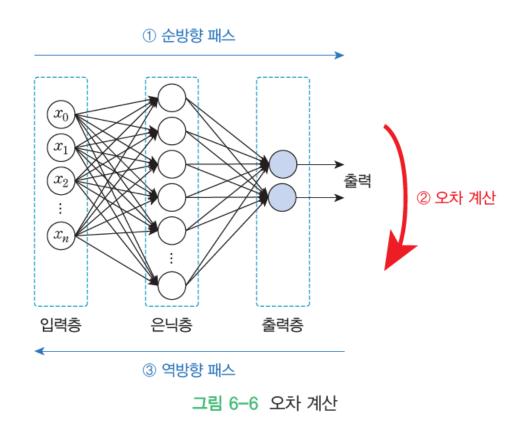
```
def test():
    for x, y in zip(X, T):
        x = np.reshape(x, (1, -1)) # x를 2차원 행렬로 만든다.입력은 2차원이어야한다.
        layer0, layer1, layer2 = predict(x)
        print(x, y, layer2)
test()
```

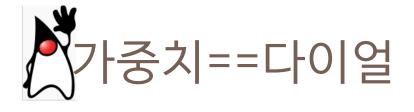
```
[[0 0]] [1] [[0.70938314]]
[[0 1]] [0] [[0.72844306]]
[[1 0]] [0] [[0.71791234]]
[[1 1]] [1] [[0.73598705]]
```

학습이 없으므로 난수 만 출력된다.

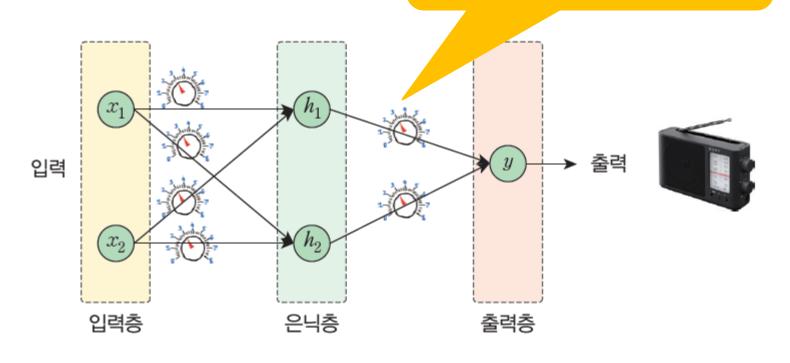
손실 함수 계산

 신경망에서 학습을 시킬 때 는 실제 출력과 원하는 출력 사이의 오차를 이용한다. 오차를 계산하는 함수를 손실함수(loss function)라고 한다.





가중치를 조절한다는 것은 스피커에서 나는 소리를 들으면서 튜너 다이얼을 돌리는 것 과 같다.





 신경망에서도 학습의 성과를 나타내는 지표가 있어야 한다. 이것을 손실함수(loss function)이라고 한다

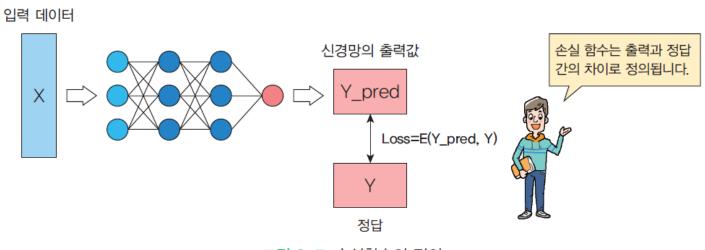


그림 6-7 손실함수의 정의

평균 제곱 오차(MSE)

• 예측값과 정답 간의 평균 제곱 오차

$$E(w) = \frac{1}{2} \sum_{i} (y_i - t_i)^2$$

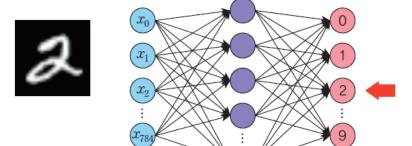


그림 6-8 MNIST 숫자 이미지를 분류하는 신경망

예측값과 정답이 많이 차이나는 경우

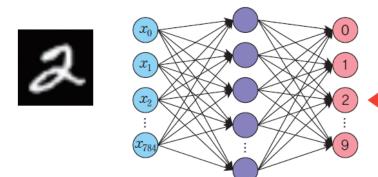
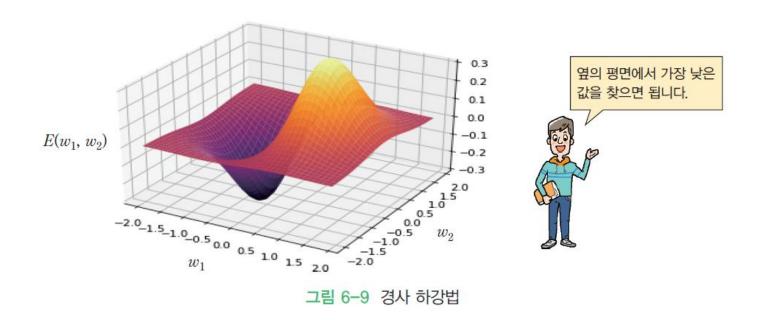


그림 6-8 MNIST 숫자 이미지를 분류하는 신경망

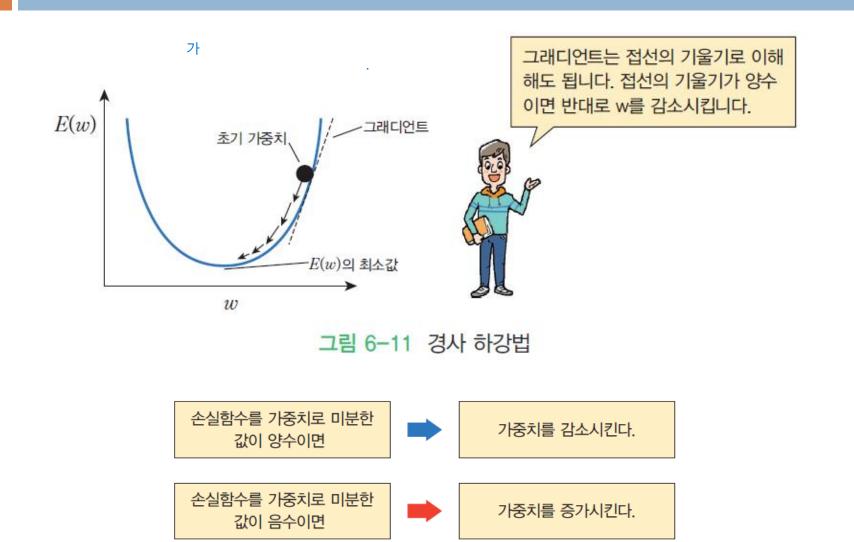


 역전파 알고리즘은 신경망 학습 문제를 최적화 문제(optimization)로 접근한다. 우리는 손실함수 값을 최소로 하는 가중치를 찾으면 된다.

$$W' = \operatorname*{argmin}_{W} E(W)$$







Lab: 경사하강법의 실습

- 손실 함수 $y = (x-3)^2 + 10$
- 그래디언트: y' = 2x-6

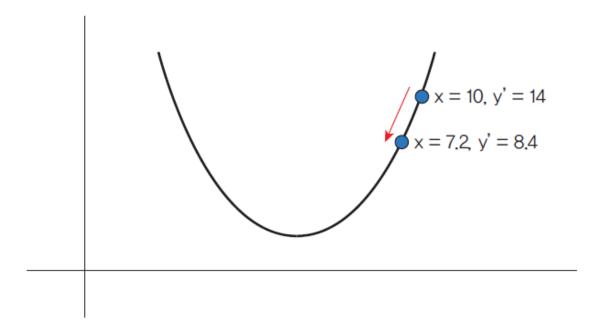


그림 6-12 그래디언트의 계산

경사 하강법 프로그래밍

```
x = 10
learning_rate = 0.2
precision = 0.00001
max_iterations = 100
# 손실함수를 람다식으로 정의한다.
loss_func = lambda x: (x-3)^{**}2 + 10
# 그래디언트를 람다식으로 정의한다. 손실함수의 1차 미분값이다.
gradient = lambda x: 2*x-6
# 그래디언트 강하법
for i in range(max_iterations):
  x = x - learning_rate * gradient(x)
  print("손실함수값(", x, ")=", loss_func(x))
print("최소값 = ", x)
```

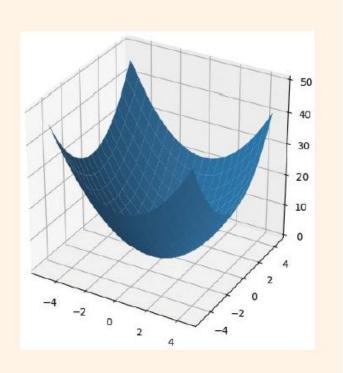
실행 결과

```
손실함수값(5.52)= 16.35039999999997
손실함수값(4.512)= 12.28614399999998
손실함수값( 3.907199999999996 )= 10.82301184
손실함수값(3.54432)= 10.2962842624
```

손실함수값(3.0000000000000000)= 10.0 최소값 = 3.000000000000004

Lab: 2차원 그래디언트 시각화

```
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x = np.arange(-5, 5, 0.5)
y = np.arange(-5, 5, 0.5)
X, Y = np.meshgrid(x, y) # 참고 박스
Z = X**2 +Y**2 # 넘파이 연산
fig = plt.figure(figsize=(6,6))
ax = fig.add subplot(111, projection='3d')
# 3차원 그래프를 그린다.
ax.plot_surface(X, Y, Z)
plt.show()
```



Lab: 2차원 그래디언트 시각화

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x = np.arange(-5,5,0.5)
y = np.arange(-5,5,0.5)
X, Y = np.meshgrid(x,y)
U = -2*X
V = -2*Y

그래디언트의음수
plt.figure()
Q = plt.quiver(X, Y, U, V, units='width')
plt.show()
```

화살표가 최소값을 가 리키고 있음을 알 수 있다.

역전파 학습 알고리즘

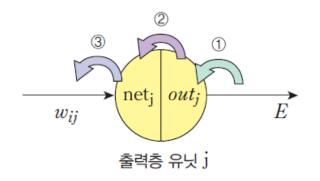
- 역전파 알고리즘은 입력이 주어지면 순방향으로 계산하여 출력을 계산한 후에 실제 출력과 우리가 원하는 출력 간의 오차를 계산한다.
- 이 오차를 역방향으로 전파하면서 오차를 줄이는 방향으로 가중치를 변경한다.

$$w(t+1) = w(t) - \eta \frac{\partial E}{\partial w}$$

- ① 가중치와 바이어스를 0부터 1 사이의 난수로 초기화한다.
- ② 수렴할 때까지 모든 가중치에 대하여 다음을 반복한다.
- ③ 손실함수 E의 그래디언트 $\partial E/\partial w$ 을 계산한다.

출력층 유닛의 경우

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial out_j} \frac{\partial out_j}{\partial net_j} \frac{\partial net_j}{\partial w_{ij}}$$
① ② ③



 $\frac{\partial out_j}{\partial net_j} = \frac{\partial f(net_j)}{\partial net_j} = f'(net_j)$

③
$$\frac{\partial \operatorname{net}_{j}}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \left(\sum_{k=0}^{n} w_{kj} out_{k} \right) = \frac{\partial}{\partial w_{ij}} w_{ij} out_{i} = out_{i}$$
 할수있다.

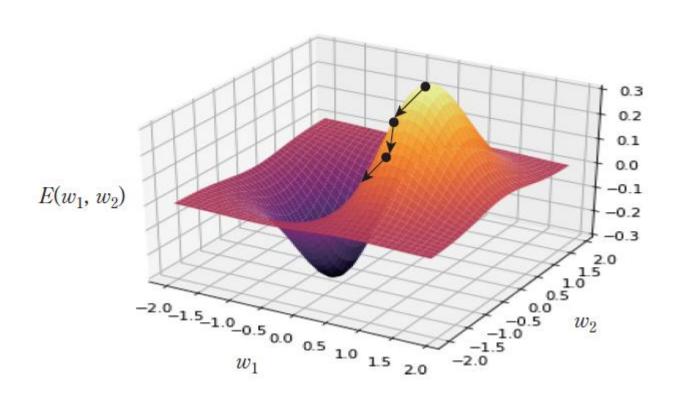
유닛의 출력값 변환에 따른 오차의 변화율이다.

입력합의 변화에 따른 유닛 j의 출력 변화율이다. 활성화 함수의 미분값이다.

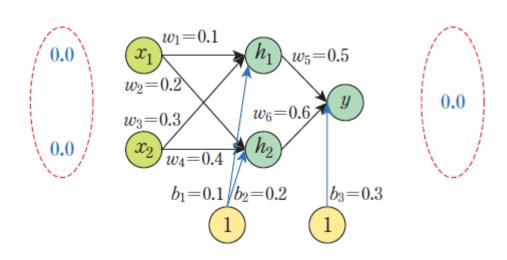
가중치의 변화에 따른 net;의 변화율이라고 할 수 있다.

$$\therefore \frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = 0 \times 2 \times 3 = (out_j - target_j) \times f'(\text{net}_j) \times \text{out}_i$$

역전파 학습 알고리즘



역전파 알고리즘을 손으로 계산해보자.



• 순방향 패스

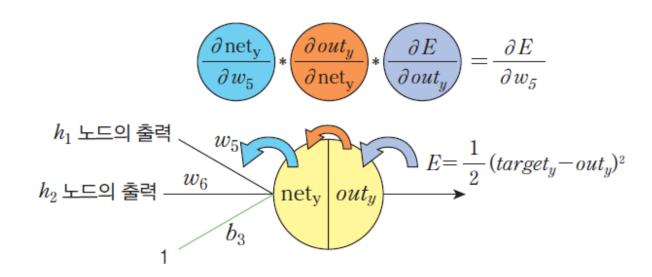
$$net_y = w_5 * out_{h1} + w_6 * out_{h2} + b_3
= 0.5*0.524979 + 0.6*0.549834 + 0.3 = 0.89239
out_y = \frac{1}{1 + e^{-net_y}} = \frac{1}{1 + e^{-0.89239}} = 0.709383$$

역전파 알고리즘을 손으로 계산해보자.

• 총오차 계산

$$E = \frac{1}{2}(t \, arg \, et_y - out_y)^2 = \frac{1}{2}(0.00 - 0.709383)^2 = 0.251612$$

• $\frac{\partial E}{\partial w_5}$ 만 계산해보자.



경사하강법 적용

• ①
$$\frac{\partial E}{\partial out_y} = 2 * \frac{1}{2} (target_y - out_y)^{2-1} * (-1) = (out_y - target_y)$$

= $(0.709383 - 0.00) = 0.709383$

• 2
$$\frac{\partial out_y}{\partial \text{net}_y} = f'(out_y) = out_y * (1 - out_y) = 0.709383 * (1 - 0.709383) = 0.206158$$

• 3
$$net_y = w_5 * out_{h_1} + w_6 * out_{h_2} + b_3 * 1$$

 $\frac{\partial net_y}{\partial w_5} = 1 * out_{h_1} + 0 + 0 = 0.524979$

$$\frac{\partial E}{\partial w_5} = \frac{\partial E}{\partial out_y} \frac{\partial out_y}{\partial net_y} \frac{\partial net_y}{\partial w_5}$$
$$= 0.709383*0.206158*0.524979 = 0.076775$$

$$w_5(t+1) = w_5(t) + \eta * \frac{\partial E}{\partial w_5} = 0.5 - 0.2*0.076775 = 0.484645$$

소실함수 평가

$$E = \frac{1}{2}(t \operatorname{arget} - \operatorname{out}_y)^2 = \frac{1}{2}(0.00 - 0.709383)^2 = 0.251612$$

크로 경사하강법 1번 적용

$$E = \frac{1}{2}(target - out_y)^2 = \frac{1}{2}(0.00 - 0.699553)^2 = 0.244687$$



경사하강법 10000번 적용

$$E = \frac{1}{2}(target - out_y)^2 = \frac{1}{2}(0.00 - 0.005770)^2 = 0.000016$$

오차가 크게 줄었다.

넘파이를 이용하여 MLP 구현

- 넘파이의 기능을 이용하면 모든 것을 행렬과 벡터로 표시할 수 있다.
- 행렬을 이용하면 동시에 여러 개의 예제를 동시에 학습시킬수 있다.
- 역전파할 때는 가중치 행렬를 전치시켜서 사용한다.
- 바이어스는 입력을 1.0으로 고정하고, 이 입력에 붙은 가중치로 생각한다.

넘파이를 이용한 MLP 구현

```
import numpy as np
#시그모이드 함수
def actf(x):
 return 1/(1+np.exp(-x))
# 시그모이드 함수의 미분치
def actf_deriv(x):
   return x^*(1-x)
# 입력유닛의 개수, 은닉유닛의 개수, 출력유닛의 개수
inputs, hiddens, outputs = 2, 2, 1
learning_rate=0.2
# 훈련 샘플과 정답
X = \text{np.array}([[0, 0], [0, 1], [1, 0], [1, 1]])
T = np.array([[1], [0], [0], [1]])
```

순방향 전파 구현

```
W1 = np.array([[0.10,0.20], [0.30,0.40]])
W2 = np.array([[0.50],[0.60]])
B1 = np.array([0.1, 0.2])
B2 = np.array([0.3])
# 순방향 전파 계산
def predict(x):
    layer0 = x
                                    # 입력을 layer0에 대입한다.
                                    # 행렬의 곱을 계산한다.
    Z1 = np.dot(layer0, W1)+B1
                                   # 활성화 함수를 적용한다.
    layer1 = actf(Z1)
                                   # 행렬의 곱을 계산한다.
    Z2 = \text{np.dot(layer1, W2)+B2}
                                    # 활성화 함수를 적용한다.
    layer2 = actf(Z2)
    return layer0, layer1, layer2
```

오차 역전파 구현

```
# 역방향 전파 계산
def fit():
  global W1, W2, B1, B2
                                  # 우리는 외부에 정의된 변수를 변경해야 한다.
                                  # 9만번 반복한다.
  for i in range(90000):
                                  # 학습 샘플을 하나씩 꺼낸다.
    for x, y in zip(X, T):
      x = np.reshape(x, (1, -1)) # 2차원 행렬로 만든다. ①
                                  # 2차원 행렬로 만든다.
      y = np.reshape(y, (1, -1))
      layer0, layer1, layer2 = predict(x)
                                                             # 순방향 계산
      layer2 error = layer2-y
                                                             # 오차 계산
      layer2_delta = layer2_error*actf_deriv(layer2) # 출력층의 델타 계산
      layer1_error = np.dot(layer2_delta, W2.T)# 은닉층의 오차 계산 ②
                                                    #은닉층의 델타 계산 ③
      layer1_delta = layer1_error*actf_deriv(layer1)
      W2 += -learning_rate*np.dot(layer1.T, layer2_delta) # 4
      W1 += -learning_rate*np.dot(layer0.T, layer1_delta) #
      B2 += -learning_rate*np.sum(layer2_delta, axis=0) # 5
      B1 += -learning_rate*np.sum(layer1_delta, axis=0) #
```

오차 역전파 구현

```
def test():
    for x, y in zip(X, T):
        x = np.reshape(x, (1, -1)) # 하나의 샘플을 꺼내서 2차원 행렬로 만든다.
        layer0, layer1, layer2 = predict(x)
        print(x, y, layer2) # 출력층의 값을 출력해본다.

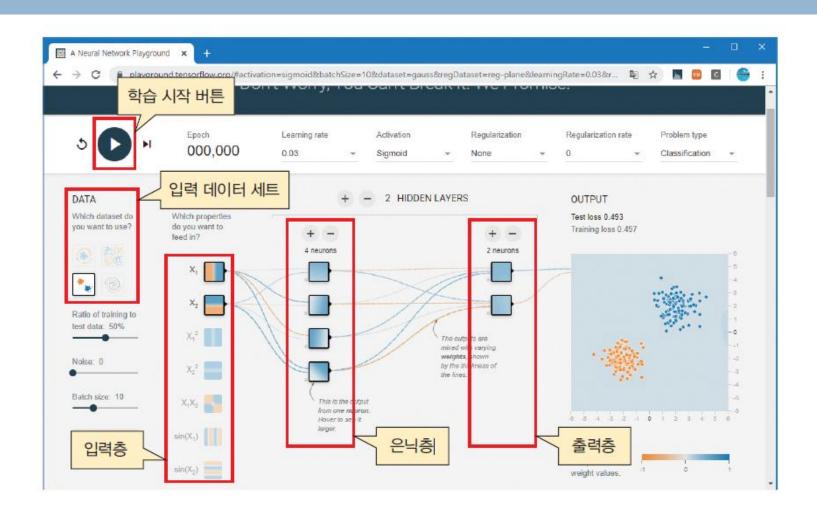
fit()
test()
```

```
[[0 0]] [1] [[0.99196032]]
[[0 1]] [0] [[0.00835708]]
[[1 0]] [0] [[0.00836107]]
[[1 1]] [1] [[0.98974873]]
```

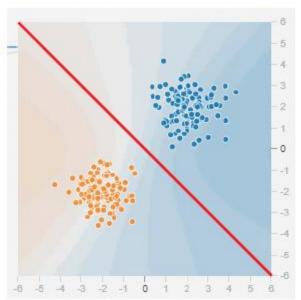
₩ 구글의 플레이그라운드

- 사이트(<u>https://playground.tensorflow.org</u>)
- 텐서 플로우 플레이그라운드는 자바 스크립트로 작성된 웹 애플리케이션으로 웹 브라우저에서 실행
- 이 사이트에서는 사용자가 딥러닝 모델을 구성하고 여러 가지 매개 변수를 조정하면서 실험할 수 있는 기능을 제공한다.

★구글의 플레이그라운드

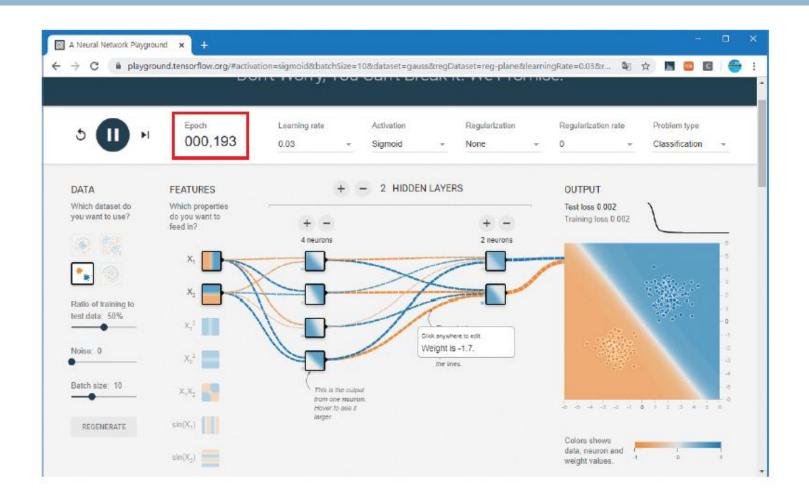


선형 분리 가능한 입력 데이터

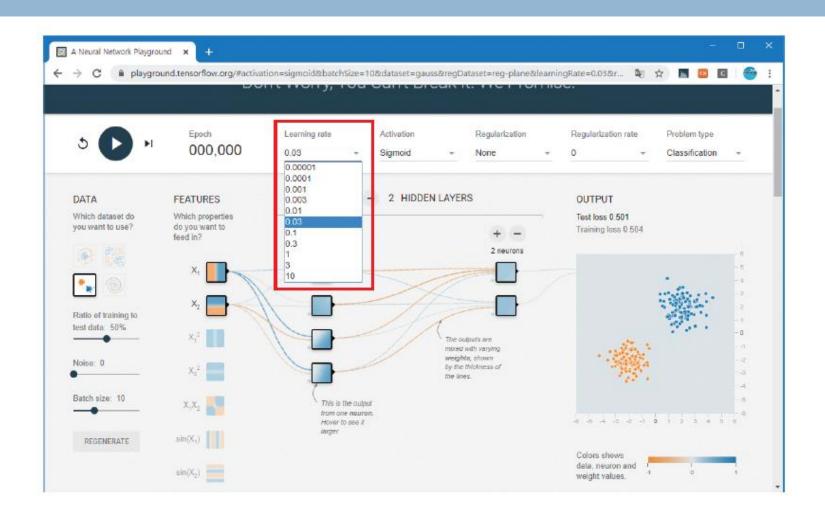


$$w_1x_1 + w_2x_2 + b = 0$$

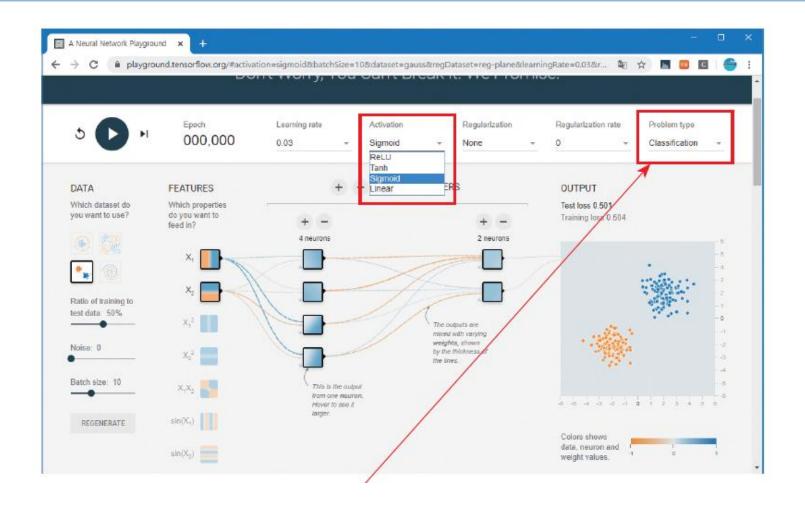






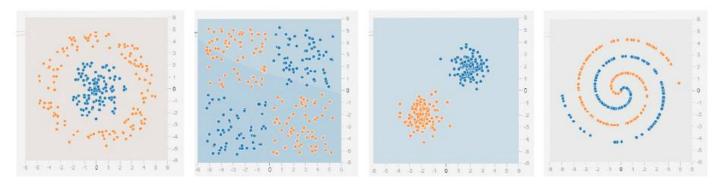


활성화 함수 선택

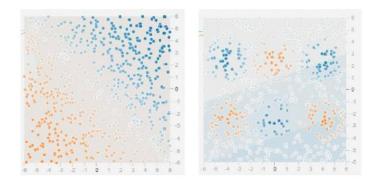


문제 유형

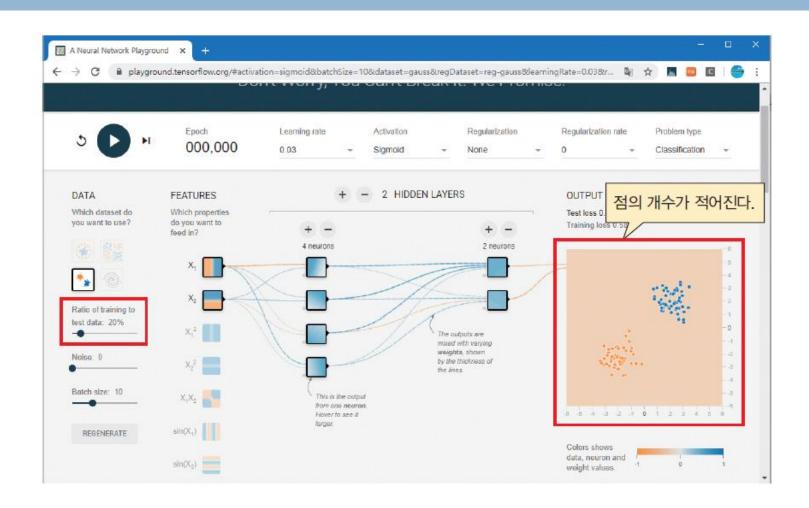
• 분류 문제



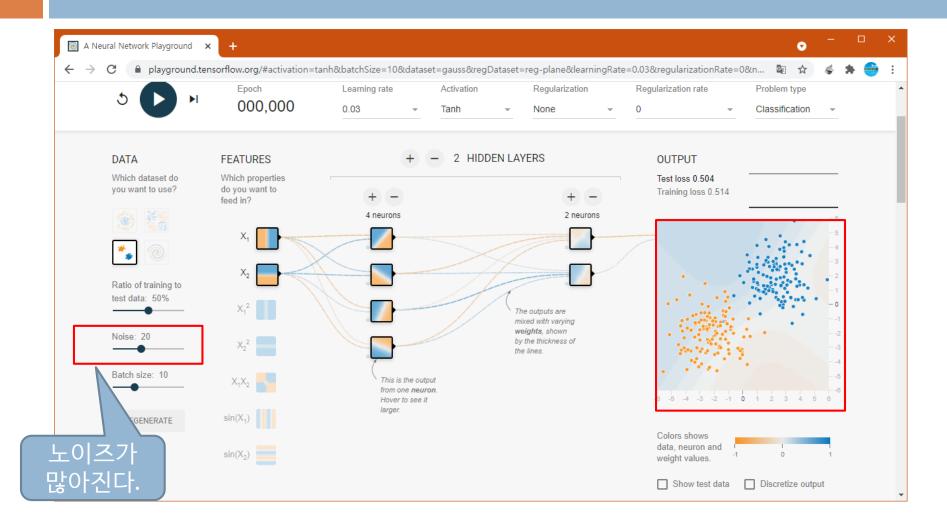
• 회귀 문제



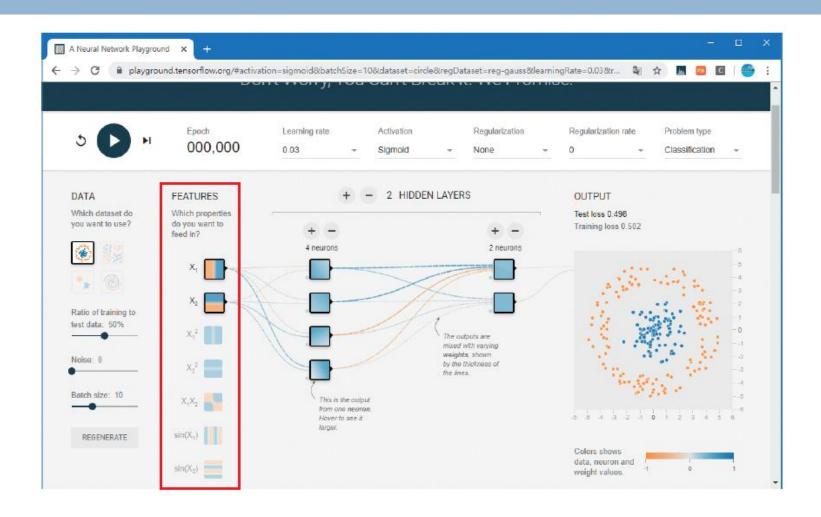
학습 데이터와 테스트 데이터의 비율



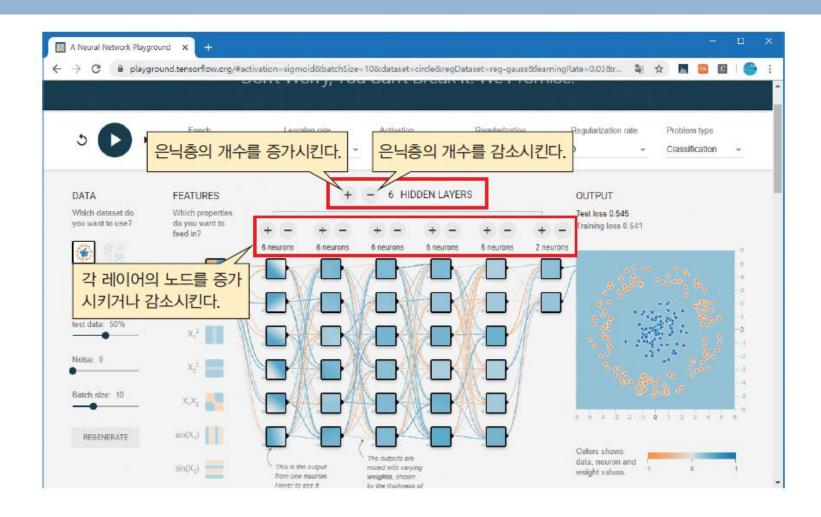




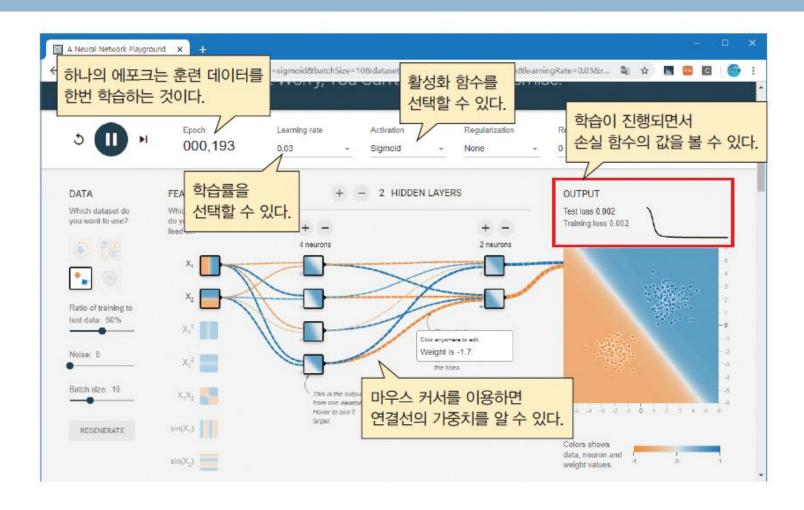
입력 특징 선택



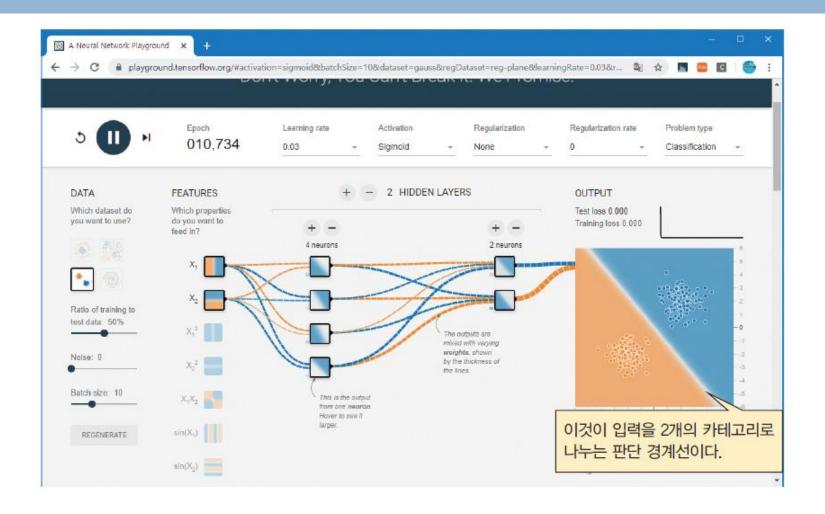
은닉층 추가하기



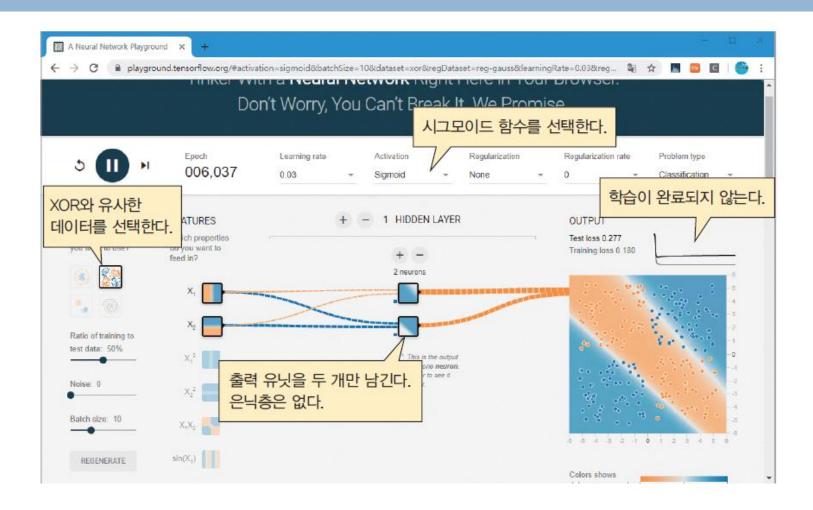
학습 시작



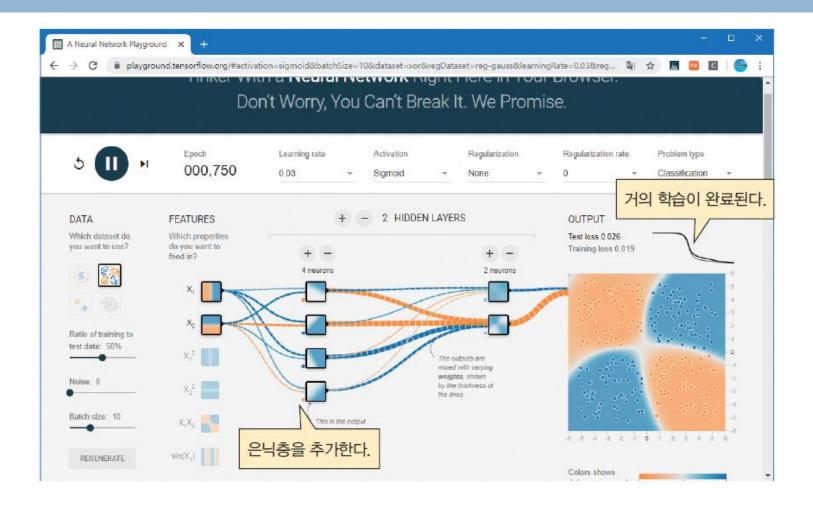
학습 완료



은닉층 없이 분류 실습



은닉층을 추가한 실습





- 입력층과 출력층 사이에 <mark>은닉층(h</mark>idden layer)을 가지고 있는 신경망을 다층 퍼셉트론(multilayer perceptron: MLP)이라고 부른다.
- MLP를 학습시키기 위하여 <mark>역전파 알고리즘(b</mark>ack-propagation)이 재발견되었다. 이 알고리즘이 지금까지도 신경망 학습 알고리즘의 근간이 되고 있다.
- 역전파 알고리즘은 입력이 주어지면 순방향으로 계산하여 출력을 계산한 후에 실제 출력과 우리가 원하는 출력 간의 오차를 계산한다. 이 오차를 역방향으로 전파하면서 오차를 줄이는 방향으로 가중치를 변경한다.