Matematisk härledning av dysonserien

Anders

6 september 2021 (15:34)

Innehåll

0 Bakgrund och motivering

Inom störningsteori betraktar vi en hamiltonian för ett kvanttillstånd. Denna hamiltonian består av en del som är känd och som vi kan finna en analytisk lösning för, sådan att vi kan beskriva tidsutvecklingen av tillståndet. Hamiltonianen består även av en annan del, som vi inte på samma sätt kan finna en lösning till. Genom att gå till diracbilden av kvantmekaniken kan vi dela tidsbeorendet mellan de två delarna av hamiltonianen. Målet är att finna ett uttryck för en tidsutvecklingsoperator med avseende på störningsdelen av hamiltonianen för olika ordningar av störning.

1 Härledning

Låt oss betrakta Schrödingers ekvation, för ett tillstånd i ett hilbertrum, $\Psi \in \mathcal{H}$, med en tidsberoende hamiltonoperator (diracbilden), $H(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -iH(t)\Psi$$

Lösningen kan skrivas $\Psi(t = t_0 + \Delta t) = U(t = t_0 + \Delta t, t_0)\Psi(t_0)$ för en operator, tidspropagatorn, $U(t, t_0) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\Psi(t_0) \mapsto \Psi(t)$. Det är den vi söker ett uttryck för. Naiv lösning på formen (inspirerad av enkel ODE (you should be able to solve this)):

$$e^{\int_{t_0}^{t} H(\tau) d\tau}\Psi$$

fungerar inte eftersom kommutatorn $[H(a), H(b)]$ inte i allmänhet är noll, så en term på formen $e^{H(a)+H(b)}$, för operatorer, $H(a)$ och $H(b)$, är inte väldefinierad. Det är här flera textböcker går en krånglig väg och betraktar "taylorutvecklingen" för "matrisexponentialfunktioner" och inför krångliga operationer (till exempel tidsordningsoperator) och kastar bort termer utan motivering. Vi kan bättre än så! För små Δt: (i synnerhet per definition sant för infinitesimalt)

$$\Psi(t = t_0 + \Delta t) = (id - iH(t_0)\Delta t)\Psi(t_0)$$

Där id är identitetsoperatorn på hilbertrummet, $id : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\Psi \mapsto \Psi$. Låt oss dela in intervallet i två delar:

$$\Psi(t = t_0 + \Delta t) = (id - iH(t_0 + \frac{\Delta t}{2})\frac{\Delta t}{2})\Psi(t_0 + \frac{\Delta t}{2}) =$$

$$= (id - iH(t_0 + \frac{\Delta t}{2})\frac{\Delta t}{2}) \circ (id - iH(t_0)\frac{\Delta t}{2})\Psi(t_0)$$

Notera hur ordningen i vilken operatorerna verkar på tillståndet hela tiden är korrekt. Det är inte meningsfullt att verka med en hamiltonoperator för någon tid som inte är gemensam med tillståndets. Dela nu upp intervallet i n delar på samma sätt och inför ny notation:

$$H_j = -iH(t_0 + j\frac{\Delta t}{n})\frac{\Delta t}{n}$$

Då kan vi skriva om till en sammansättning av operatorer som ovan så att tiden (argumentet) för varje operator minskar "åt höger":

$$\Psi(t = t_0 + \Delta t) = [\bigcirc_{j=n-1}^{0}(id + H_j)]\Psi(t_0)$$

Låt oss distribuera dessa så att vi får tidsordnade operatortermer, på formen $...H_a \circ H_b \circ H_c...$ sådana att $a > b > c$. Vi kan sortera dessa termer efter stigande ordning av H. Först har vi ordning 0, termen som bara består av identitetsoperatorn:

$$id \circ id \circ ... \circ id = id$$

Låt oss fortsätta med första ordningen, dvs sammansättningar som består av n - 1 identitetsoperatorer och en hamiltonoperator:

$$H_0 + H_1 + ... = \sum_{j=n-1}^{0} H_j$$

Sedan har vi andra ordningen. Notera hur de är tidsordnade:

$$H_1 \circ H_0 + H_2 \circ H_0 + H_2 \circ H_1 + ... = \sum_{j=n-1}^{0} H_j \circ \sum_{k<j} H_k$$

För tydlighetens skull kan vi betrakta tredje ordningen med:

$$H_2 \circ H_1 \circ H_0 + H_3 \circ H_2 \circ H_0 + H_3 \circ H_2 \circ H_1 + ... = \sum_{j=n-1}^{0} H_j \circ \sum_{k<j} H_k \circ \sum_{l<k} H_l$$

Låtom oss nu låta n gå mot positiv oändlighet, $n \to \infty$, och sätta in det ursprungliga uttrycken för H_j. Då får vi integraler som motsvarar summorna. Det uttrycket representerar den sökta tidspropagatorn, $U(t, t_0)$:

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^{t} H(t')dt' - \int_{t_0}^{t} H(t')dt' \circ \int_{t_0}^{t'} H(t'')dt'' + ...$$

Alltså en summa av produkter av integraler där en integrals övre gräns går upp till den föregåendes nuvarande tidsvärde och varje term får fler såna faktorer. Den jte termen kommer alltså se ut så här:

$$(-i)^j \int_{t_0}^{t} H(t')dt' \circ \int_{t_0}^{t'} H(t'')dt'' \circ \int_{t_0}^{t''} H(t''')dt''' \circ ...$$

Där det ingår j integraler. I och med det har vi löst problemet med tidsberoende Hamilton-operator. Vi har alltså funnit tidspropagatorn, $U(t, t_0)$, definierad enligt $\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi(t_0)$. Detta, helt utan att införa några tidsordningsoperatorer eller se till någon taylorutveckling av matrisexponentialfunktioner med integraler i exponenter.

En generalisering till rumtiden är på väg, ska bara klura ut hur man gör först haha.