ШАД МТС

ДОМАШНЯЯ РАБОТА №1

по модулю:

«Линейная алгебра»

Обучающийся

Смолянинов Денис Александрович

Санкт-Петербург

2023

СОДЕРЖАНИЕ

1. Домашняя работа

1.1. Задание 1

Для решения задания воспользуемся следующими свойствами:

- $|\vec{A}|^2 = \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle$;
- Линейность скалярного произведения;
- $\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 0$.

Решим задачу.

$$\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = \langle \alpha\vec{a} + 17\vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b} \rangle =$$
$$= \langle \alpha\vec{a}, 3\vec{a} \rangle - \langle 17\vec{b}, \vec{b} \rangle + \langle 17\vec{b}, 3\vec{a} \rangle - \langle \alpha\vec{a}, \vec{b} \rangle =$$
$$= 12\alpha - 425 - \frac{510}{2} + \frac{10\alpha}{2} = 0.$$

Ответ: $\alpha = 40$

1.2. Задание 2

Для решения этого задания, проверим, что для множества **G** выполняются аксиомы линейного пространства

1. Коммутативность сложения. $\forall x, y \in G \quad x + y = y + x$. Это действительно так, потому что компоненты всех векторов из G принадлежат $\mathbb{R}^+$, а операция умножения в $\mathbb{R}^+$ коммутативна.
2. Ассоциативность сложения. $\forall x, y, z \in G \quad (x + y) + z = x + (y + z)$. Эта аксиома выполнятся по тем же соображениям, что и в пункте 1, операция умножения в $\mathbb{R}^+$ ассоциативна.
3. Наличие нейтрального элемента. $\exists 0 \in G : \forall x \in G \quad x + 0 = x$. Этим элементом будет:
$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$
4. Наличие обратного элемента. $\forall x \in G \quad \exists -x : x + (-x) = 0$. Так как компоненты всех векторов из G принадлежат $\mathbb{R}^+$, то очевидно, что обратным элементом для вектора x будет:
$$-x = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

5. $\forall x \in G \quad 1 * x = x.$

Доказательство.

Воспользуемся свойством $\forall a \in \mathbb{R} \quad a^1 = a.$

$$x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad \square \tag{1.3}$$

6. $\forall x \in G \quad 0 * x = 0.$

Доказательство.

Воспользуемся свойством $\forall a \in \mathbb{R} \quad a^0 = 1.$

$$x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad \square \tag{1.4}$$

7. $\forall x \in G \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$

Доказательство.

Воспользуемся свойством $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a^{b+c} = a^b a^c.$

$$x^{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} x_1^{\alpha+\beta} \\ x_2^{\alpha+\beta} \\ \vdots \\ x_n^{\alpha+\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^\alpha x_1^\beta \\ x_2^\alpha x_2^\beta \\ \vdots \\ x_n^\alpha x_n^\beta \end{pmatrix}. \quad \square \tag{1.5}$$

8. $\forall x, y \in G \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b.$

Доказательство.

Воспользуемся свойством $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (ab)^c = a^c b^c$.

$$\alpha(x+y) = \begin{pmatrix} (x_1 y_1)^\alpha \\ (x_2 y_2)^\alpha \\ \vdots \\ (x_n y_n)^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^\alpha y_1^\alpha \\ x_2^\alpha y_2^\alpha \\ \vdots \\ x_n^\alpha y_n^\alpha \end{pmatrix}. \quad \square \tag{1.6}$$

Ответ: Множество **G** с заданной операцией сложения и умножения на число является линейным пространством.

1.3. Задание 3

Вспомним определение линейной зависимости. Вектора $x_1, x_2 \dots x_n \in V$, где V - линейное пространство над полем P, называются линейно-зависимыми, если $\exists \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \in P : \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \neq 0$ и $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$.

Для того, чтобы убедиться в линейной зависимости векторов посчитаем *ранг матрицы*, составленной из коэффициентов линейных комбинаций. Напомним, что *ранг матрицы* - число линейно-независимых строк или столбцов.

Посчитаем ранг матрицы, приведя ее верхней треугольной элементарными преобразованиями.

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & \gamma & -\alpha \\ \gamma & 0 & -\beta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & \gamma & -\alpha \\ 0 & \frac{-\beta\gamma}{\alpha} & -\beta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & \gamma & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Ранг матрицы равен двум, следовательно *система из трех векторов линейно-зависима*.

1.4. Задание 4

Посчитаем *ранг матрицы* составленной коэффициентов векторов e_1, e_2, e_3 при разложении в естественном базисе.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Ранг матрицы равен 3, следовательно вектора линейно-независимы и образуют базис в $\mathbb{R}^3$.

Пусть $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, а e' - множество элементов естественного базиса в R^3. Тогда матрица перехода из e в e\` будет выглядеть следующим образом

$$P_{e\grave{}\to e} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

а матрица перехода из e\` в e будет обратной к $\text{P}_{e\to e\grave{}}$

$$P_{e\grave{}\to e} = P^{-1}_{e\to e\grave{}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Вектор x в базисе e будет равен $P_{e\to e\grave{}} x = \{0, -1, 1\}$.

Вектор y_e в естественном базисе e\` будет равен $P_{e\to e'} y_e = \{-6, 0, 7\}$.

1.5. Задание 5

Так как $p(x) \in P_4$, то

$$p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4, \tag{1.11}$$

где $a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in 1:5$. Так как $p(1) + p(-1) = 0$, следовательно $a_1 + a_3 + a_5 = 0 \to a_1 = -a_3 - a_5$. Поэтому

$$p(x) = (-a_3-a_5)+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+a_5x^4 = a_2x+a_3(x^2-1)+a_4x^3+a_5(x^4-1). \tag{1.12}$$

Докажем, что

$$p_1(x) = x, p_2(x) = x^2 - 1, p_3(x) = x^3, p_4(x) = x^4 - 1 \tag{1.13}$$

образуют базис. Убедимся что ранг матрицы равен 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Ранг матрицы равен 4. Следовательно система полиномов p_1, p_2, p_3, p_4 линейно-независима. $\square$

Ответ: $dimV = 4$.