

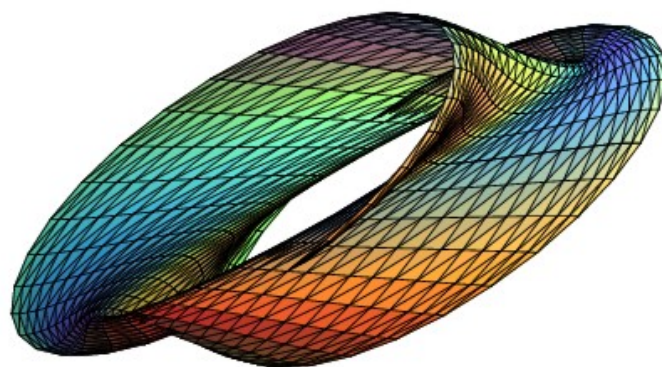
---

---

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM  
MATEMÁTICA · BICMAT

---

---



VOLUME XVIII  
NOVEMBRO DE 2021  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
IGCE · RIO CLARO

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM  
MATEMÁTICA · BICMAT

***Comissão editorial***

Elíris Cristina Rizzioli

Renata Zotin Gomes de Oliveira

Nativi Viana Pereira Bertolo

Thiago de Melo

***Editoração gráfica***

Thiago de Melo

***Realização***

Conselho de Curso de Graduação em Matemática

Departamento de Matemática

IGCE · Unesp Rio Claro

## EDITORIAL

O Boletim de Iniciação Científica em Matemática · BICMat é uma publicação que se destina a difundir prioritariamente trabalhos de Iniciação Científica em Matemática que fazem parte de projetos desenvolvidos por alunos do Curso de Graduação em Matemática do IGCE, Unesp Rio Claro. Eventualmente trabalhos de Iniciação Científica realizados em outras instituições poderão também ser publicados neste Boletim.

O BICMat foi criado em 1998 e nessa época foram publicados dois volumes; o primeiro no ano de criação e o segundo em 2000.

Considerando a importância da Iniciação Científica para o graduando, e o sempre crescente número de projetos desta natureza desenvolvidos em nossa instituição, resolvemos reativar a publicação do BICMat em 2006, com ISSN 1980-024X.

Destacamos que a autoria dos trabalhos apresentados no BICMat é dos alunos. O orientador figura apenas como responsável científico.

Este Boletim também está aberto à divulgação de trabalhos que não sejam frutos de projetos de Iniciação Científica, mas que sejam de interesse dos alunos do curso de graduação em Matemática. Estes trabalhos serão selecionados pelos Editores.

Este volume está disponibilizado eletronicamente na página do Departamento de Matemática no endereço

[www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat/](http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat/)

ou através do código QR



## SUMÁRIO

<i>Geometria Esférica e o Triângulo das Bermudas</i>	
Bruna Imada Takahashi .....	5
<i>Cigarras e Números Primos: Uma Questão de Sobrevivência</i>	
Carolina Kakazu Paula .....	15
<i>Um Estudo Sobre Sistemas Homogêneos e Não-Homogêneos</i>	
Carolina Pereira Neves .....	20
<i>Teoria do grau coincidente de Mawhin e o modelo de Mackey-Glass</i>	
Lucas Ozaki Mizuguti .....	28
<i>Noções da Geometria Hiperbólica</i>	
Maria Júlia Fassis .....	44
<i>Um Estudo Sobre Matrizes Não Quadradas</i>	
Mariana da Costa Müller .....	59
<i>Salada Linear de Rabanetes</i>	
Marina Fuzaro Magossi .....	71
<i>Uma Introdução às Teorias de Álgebra Homológica e de Homologia Simplicial</i>	
Marina Maria de Miguel .....	75
<i>Introdução à Homologia Persistente para Análise de Dados</i>	
Richard Guilherme dos Santos .....	87
<i>Redes Neurais Auto-Regressivas</i>	
Thiago Moraes Rizzieri .....	96

# Geometria Esférica e o Triângulo das Bermudas

Bruna Imada Takahashi

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

**Resumo:** A Geometria Esférica foi essencial no desenvolvimento da navegação e também no estudo da Astronomia. Neste trabalho, apresentamos um pouco do processo de construção das geometrias não euclidianas, em particular a geometria esférica, também como introduzimos alguns elementos e calculamos a área do Triângulo das Bermudas.

**Palavras-chave:** navegação; esfera, triângulo esférico; Lei dos Cossenos

## 1 Introdução histórica

Euclides por volta do ano 300 a.C, definiu retas paralelas como “retas que, estando em um mesmo plano e sendo prolongadas indefinidamente em ambas as direções, não se encontram em nenhuma dessas direções”.

O quinto postulado, num conjunto de cinco postulados, ao qual ele elaborou coletando e arranjando as proposições da geometria plana, afirma: "Se uma reta, cortando duas outras, formam ângulos internos de um mesmo lado menores que dois retos, as duas retas prolongadas ao infinito se encontrarão na parte em que são os dois ângulos menores que dois retos."

Na tentativa de provar este postulado, descobriram-se muitos axiomas equivalentes e, mais importante, prepararam as técnicas a serem utilizadas nas geometrias não euclidianas. Então, para aperfeiçoar os métodos de medir distâncias inacessíveis por meio de ângulos e distâncias desconhecidas, observou-se a necessidade do estudo da figura chamada círculo.

A navegação sem terra à vista só foi possível quando os homens passaram a se orientar pela órbita das estrelas.

Nesta época, já era utilizada a latitude e longitude, mas ainda não havia a representação em mapas por conta da esfericidade da Terra. Aristóteles (384- 322 a.C) e Ptolomeu (87-150 a.C) incorporavam em suas deduções que a Terra era esférica e não plana. De acordo com os estudos de Aristóteles, durante um eclipse, a sombra da lua era sempre redonda e ao observar um navio se afastando, percebeu-se que o casco desaparecia antes das velas. Com isso, Aristóteles conjecturou que a Terra era de fato uma esfera.

Ptolomeu, após a morte de Aristóteles, continuou os estudos do modelo do universo que predizia com mais precisão os movimentos dos astros.

Eratóstenes, matemático e geógrafo grego, nascido em Cirene, na atual Líbia, calculou a circunferência da Terra no século III a.C, utilizando um método bem simples.

Eratóstenes há cerca de dois mil anos, ao tentar medir a circunferência da Terra, imaginou a seguinte situação:

- (i) Dividir a Terra e separar em várias frações;
- (ii) Sabendo-se a quantidade de frações iguais e o comprimento do arco de uma delas, bastaria agora, multiplicar o comprimento desse arco pelo número de frações para obter o comprimento da Terra.

Como uma circunferência possui 360 graus e tomando o ângulo de uma dessas frações, poderia dividir 360 por esse ângulo e, em seguida, encontrar o número de frações que correspondem ao todo.

Então, Eratóstenes observou durante um solstício de verão, a sombra de um poço e a distância entre as cidades de Siena e Alexandria, chegou que o comprimento da Terra era de 40.000 km.

A medição atual do comprimento da Terra é  $C = 40.023$  km, ou seja, a medida feita por Eratóstenes tinha um erro de menos de dois por cento em relação ao comprimento conhecido hoje.

Muitas das ideias da Trigonometria Esférica emergiram com a navegação, principalmente da navegação portuguesa.

Os portugueses conseguiram ser bem sucedidos graças a Dom Henrique, no século XV, que foi o patrono dos descobrimentos ao desenvolver técnicas e tecnologias marítimas na região de Sagres. A “Escola de Sagres” logrou êxito em reunir todo conhecimento adquirido até então: as ideias de Ptolomeu e Sacrobosco, as inovações tecnológicas e instrumentais marítimas, a cartografia Portulano e, posteriormente, Mercator e a prática da matemática de Pedro Nunes. Mesmo sem conhecimento matemático avançado, os portugueses romperam barreiras devido ao conhecimento empírico, pois entre os navegantes, alguns conheciam astronomia, outros sabiam calcular distâncias e outros entendiam de cartografia. Comandados pela infante Dom Henrique, os portugueses adaptaram inicialmente processos de navegação utilizados para navegar pelo Mediterrâneo. Essa técnica era chamada de “Rumo e Estima” e usava a longitude do lugar pela altura do meridiano do sol ou de outros astros.

Diferente das projeções cartográficas que até então representavam as malhas geográficas a partir de uma concepção de superfície bidimensional, as projeções de Mercator baseavam-se no fato da Terra ser esférica e, portanto, as malhas acompanha essa esfericidade, preservando ângulos ou conformidades.

Em 1628, o Jesuíta Cristovão Bruno escreveu a obra “A arte de navegar”. Ao iniciar seus pensamentos para sanar os problemas de longitude, Bruno, primeiramente, apontou os erros mais frequentes cometidos pelos navegantes em seus cálculos.

O problema da determinação de uma localização de forma mais precisa apenas foi solucionado no século XVIII com o modelo número 04 de John Harrison (1693-1776), que numa viagem de nove semanas à Jamaica apenas se atrasou cinco segundos. Através da tecnologia do cronômetro de Harrison (que era relojoeiro), se tornou possível conhecer duas coordenadas de qualquer local. Mesmo após a criação de tantos recursos para a localização, ainda existiam alguns que só podiam ser utilizados sob tempo nublado. Com os avanços das ondas de rádio e a corrida espacial entre a União Soviética e os Estados Unidos, foram lançados os primeiros satélites na órbita do planeta. Logo, estes movimentos possibilitaram as primeiras pesquisas para desenvolvimento de um software de localização para uso militar chamado NAVSTAR/GPS (Navigation Satellite with time Ranging/ Global Position System). Hoje, o GPS trata-se de um conjunto de 24 satélites orbitando a Terra, a uma altura aproximada de 20.200 km acima do nível do mar, permitindo que receptores conheçam sua posição em qualquer lugar da Terra com muita precisão.

## 2 Geometria Esférica

Essa seção é baseada em [2], [3] e [4] e as figuras em [2] e [3].

A seguir enunciaremos algumas definições e resultados importantes para o cálculo da área do Triângulo das Bermudas.

**Definição 2.1.** Seja  $O$  um ponto e  $r$  um número real positivo. Chamamos de **Esfera** (ou superfície esférica) o lugar geométrico dos pontos  $P$  do espaço, cuja distância a  $O$  é igual a  $r$ . Dizemos que o ponto  $O$  é o centro da esfera.

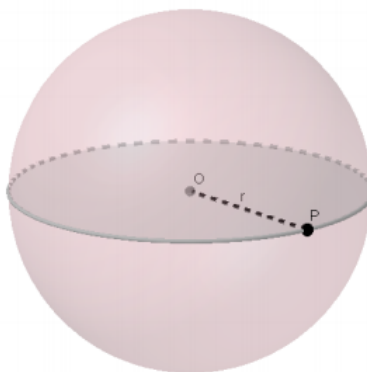


Figura 1.1: Esfera

**Teorema 2.2.** A intersecção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro que a esfera e raio da superfície esférica.

**Prova:** Sejam  $S$  uma superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r > 0$  e  $\gamma$  um plano contendo  $O$ . A intersecção entre o plano  $\gamma$  e a superfície esférica  $S$  é o conjunto de pontos de  $\gamma$  que distam  $r$  de  $O$ . Portanto, é uma circunferência, contida em  $\gamma$ , com centro em  $O$  e raio  $r$ . ■

**Definição 2.3.** As circunferências obtidas no Teorema 2.2 são chamadas de **Círculos Máximos**.

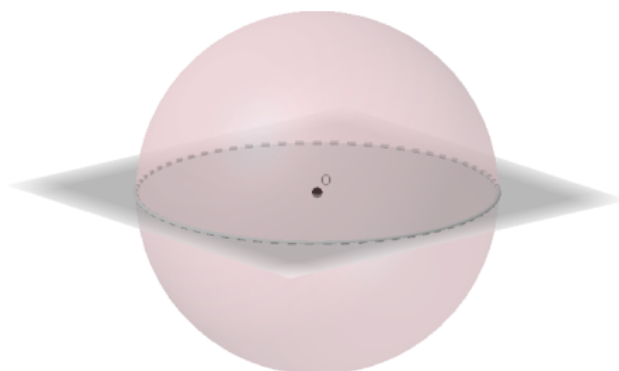


Figura 1.2: Círculo Máximo

**Definição 2.4.** Em uma superfície esférica, três pontos não pertencentes a um mesmo círculo máximo, ligados por arcos de círculos máximos, determinam um **triângulo esférico**. Vale ressaltar que os elementos de um triângulo esférico são os mesmo de um triângulo euclidiano: três vértices, três lados e três ângulos internos.

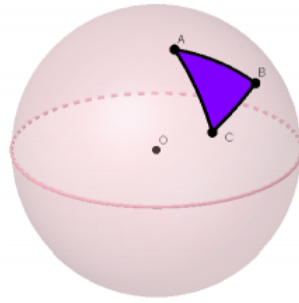


Figura 1.3: Triângulo Esférico

**Definição 2.5.** Chama-se **fuso** a porção da superfície esférica compreendida entre dois semicírculos máximos que têm extremos comuns. Os pontos comuns desses semicírculos máximos são denominados vértices do fuso. O ângulo fuso é o ângulo diedro formado pelos planos dos semicírculos máximos que definem o fuso.

**Teorema 2.6** (Lei dos cossenos). *Seja  $ABC$  um triângulo esférico, com lados  $a, b$  e  $c$ , e ângulos internos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ . Então:*

$$\begin{aligned}\cos(a) &= \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\hat{A}) \\ \cos(b) &= \cos(a) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\hat{B}) \\ \cos(c) &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\hat{C}).\end{aligned}$$

**Prova:** Seja um triângulo esférico sobre uma esfera de centro  $O$  e raios  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ .

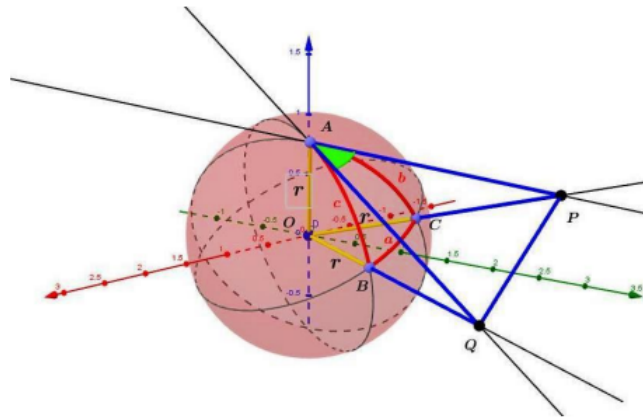


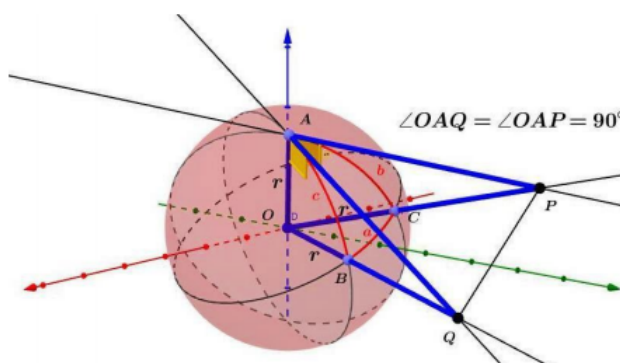
Figura 1.4: Triângulo esférico e triângulos planares

Obtemos, pela Figura 1.4, que

- Os lados  $a, b$  e  $c$  equivalem aos ângulos centrais  $\widehat{BOC}$ ,  $\widehat{AOC}$  e  $\widehat{AOB}$ , respectivamente;
- O ângulo interno  $A$  é o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos  $AB$  e  $AC$  que passam por  $A$ ;
- O ângulo  $\hat{B}$  é o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos  $BA$  e  $BC$  passando por  $B$ ;



- Da geometria plana, podemos estabelecer algumas relações trigonométricas. Vejamos, então, que os triângulos  $OAP$  e  $OAQ$  são retângulos em  $A$ , como triângulos da geometria plana, veja Figura 1.5.


$$\begin{aligned} \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2 \cdot \overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos(a) &= \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos(\hat{A}) \implies \\ 2 \cdot \overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos(a) &= \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - \overline{AP}^2 - \overline{AQ}^2 + 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos(\hat{A}). \end{aligned}$$

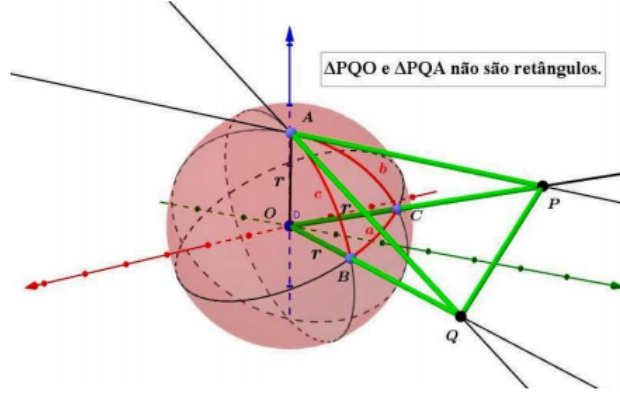


Figura 1.6: Triângulos auxiliares

Daí,

$$2 \cdot \overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos(a) = (\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2) + 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos(\hat{A}).$$

Sabemos, por (2.1), que  $2 \cdot \overline{AO}^2 = (\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2)$ , logo

$$2 \cdot \overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos(a) = 2 \cdot \overline{AO}^2 + 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos(\hat{A}) \implies \\ \overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos(a) = \overline{AO}^2 + \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos(\hat{A}).$$

Dividindo ambos os membros por  $\overline{PO} \cdot \overline{QO}$ , obtemos

$$\cos(a) = \frac{\overline{AO}^2}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} + \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} \cdot \cos(\hat{A}),$$

ou seja,

$$\cos(a) = \frac{\overline{AO} \cdot \overline{AO}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} + \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} \cdot \cos(\hat{A}).$$

Agora, substituindo  $\frac{\overline{AO}}{\overline{PO}} = \cos(b)$ ,  $\frac{\overline{AO}}{\overline{QO}} = \cos(c)$ ,  $\frac{\overline{AP}}{\overline{PO}} = \sin(b)$  e  $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}} = \sin(c)$  chegamos na fórmula fundamental para triângulos esféricos

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\hat{A}).$$

De forma análoga, são obtidas as outras duas expressões. ■

**Definição 2.7** (Distância entre dois pontos da esfera). Sejam  $p_1 = (r \cdot \cos(\theta_1) \cdot \sin(\gamma_1), r \cdot \sin(\theta_1) \cdot \sin(\gamma_1), \cos(\gamma_1))$  e  $p_2 = (r \cdot \cos(\theta_2) \cdot \sin(\gamma_2), r \cdot \sin(\theta_2) \cdot \sin(\gamma_2), \cos(\gamma_2))$  pontos do  $\mathbb{R}^3$  e  $\alpha$  o ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , tal que  $\vec{u} = \vec{op}_1$  e  $\vec{v} = \vec{op}_2$ , sendo  $o$  o centro da esfera.

Definimos a **distância** entre  $p_1$  e  $p_2$  por

$$\alpha = \arccos(\cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \sin(\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_2) + \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2)).$$

Considerando  $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ ,  $\Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$  e  $1 - \cos(\Delta\theta) = 2 \cdot \sin^2(\frac{\Delta\theta}{2})$ , temos que

$$\alpha = \arccos(\cos(\Delta\theta) \cdot \sin(\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_2) + \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) \\ + \cos(\Delta\theta) \cdot \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) - \cos(\Delta\theta) \cdot \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2)) \implies \\ \alpha = \arccos(\cos(\Delta\theta) \cdot \cos(\Delta\gamma) + 2 \cdot \sin^2(\frac{\Delta\theta}{2}) \cdot \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2)).$$

**Definição 2.8.** O meridiano que passa por Greenwich é chamado de Primeiro Meridiano ou Meridiano de Greenwich. Esse meridiano dá origem a coordenada geográfica **Longitude**. A longitude é denominada por  $\lambda$  e é medida em graus, de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  para leste ou para oeste do Meridiano de Greenwich.

**Definição 2.9 (Latitude).** É o arco do meridiano, denotado por  $\theta$ , medido em graus, de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  para norte ou para sul do equador.

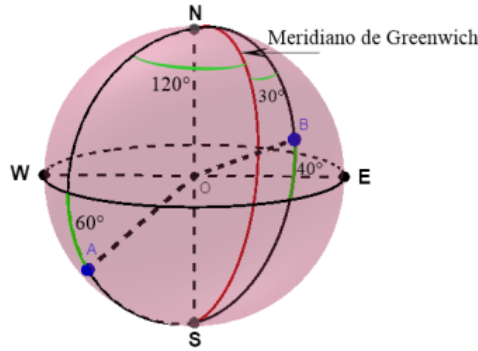


Figura 1.7: Coordenadas Geográficas

**Definição 2.10.** Dado um fuso  $\chi$ , o conjunto formado por todas as antípodas desse fuso também é um fuso, denominado de  $\chi'$ . A reunião  $\chi \cup \chi'$  é chamado de **gomo**.

**Definição 2.11.** Um círculo máximo cujo plano é perpendicular ao eixo da esfera é chamado de **Equador**.

**Teorema 2.12.** A área de um gomo, com ângulo interno  $\alpha$  é igual a  $2 \cdot r^2 \cdot \alpha$ .

**Prova:** Utilizando as coordenadas esféricas, segue que

$$A = \int_0^\alpha \int_0^\pi r^2 \cdot \sin \gamma \cdot d\gamma \cdot d\theta = \int_0^\alpha 2 \cdot r^2 \cdot (-\cos \gamma) \cdot d\theta = 2 \cdot r^2 \cdot \alpha. \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.13.** A área de um triângulo esférico  $\Delta(A, B, C)$ , com ângulos internos medindo  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  é

$$A = r^2[(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) - \pi].$$

**Prova:** Seja um triângulo esférico  $ABC$ , como na Figura 1.1. Seja  $A$  a área do triângulo e  $A_{\hat{A}}$  a área da região complementar ao triângulo no gomo. Temos que a área do gomo  $G_{\hat{A}}$  é

$$A + A_{\hat{A}} = 2 \cdot \hat{A} \cdot r^2 \implies 2 \cdot (\hat{A} - A_{\hat{A}}) \cdot r^2.$$

Note que dois equadores definem dois gomos antípodas e três equadores definem dois triângulos antípodas. Seja  $\Delta'(A, B, C)$  o triângulo antípoda ao triângulo  $\Delta(A, B, C)$  e  $G'_{\hat{B}}$  o gomo antípoda ao gomo  $G_{\hat{B}}$ , podemos definir um equador

$$H = G_{\hat{A}} \cup G_{\hat{C}} \cup G'_{\hat{B}} - \Delta'(A, B, C)$$

e, portanto,

$$A + A_{\hat{A}} + A_{\hat{B}} + A_{\hat{C}} = 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

e conseqüentemente,

$$A + (2 \cdot \hat{A} \cdot r^2 - A) + (2 \cdot \hat{B} \cdot r^2 - A) + (2 \cdot \hat{C} \cdot r^2 - A) = 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

e então

$$A = r^2[(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) - \pi]. \quad \blacksquare$$

### 3 O Triângulo das Bermudas

Certamente você já ouviu falar no Triângulo das Bermudas e suas lendas. O Triângulo das Bermudas é uma região triangular que tem vértices nas Ilhas Virgens Britânicas, Bermudas e no extremo sul da Flórida. Essa região é conhecida pelo desaparecimento de navios e aviões, levantando várias teorias da conspiração, como abduções alienígenas, fendas dimensionais e monstros marinhos.

Mas na verdade, a região do Triângulo das Bermudas é repleta de fenômenos atmosféricos, eletromagnéticos, temporais e gravitacionais, como ondas gigantes que podem chegar a 15 metros de altura.

Mas como a Geometria Esférica se relaciona com o Triângulo das Bermudas?

Como é uma região triangular e esférica, sua área só pode ser calculada a partir de um triângulo esférico. Queremos responder a seguinte pergunta: aproximando a Terra por uma esfera de raio de 6400 km, qual a área do Triângulo das Bermudas, presente na Figura 1.8?

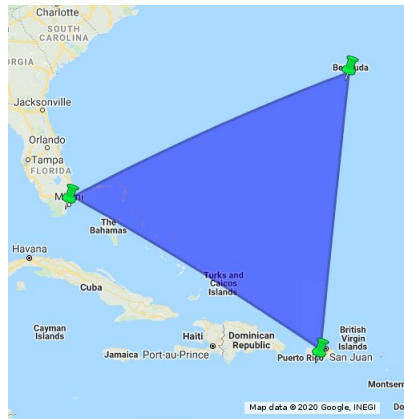


Figura 1.8: Triângulo das Bermudas

Esse exemplo é baseado em [4].

Para fazer isso, temos que usar as seguintes coordenadas dos vértices do triângulo esférico:

	Latitude	Longitude	$\theta$	$\gamma$
Ilhas Virgens Britânicas	18°28'N	66°28'W	-1,16 radianos	1,244 radianos
Bermudas	32°19'N	64°50'W	-1,131 radianos	1,006 radianos
Flórida	24°46'N	80°57'W	-1,413 radianos	1,138 radianos

Então, a distância  $d_1$  entre as Ilhas Virgens e as Bermudas é

$$\begin{aligned}
 d_1 &= 6400 \cdot \arccos(\cos(0,029) \cdot \cos(0,238) \\
 &\quad + 2 \cdot \sin^2(0,0145) \cdot \cos(1,244) \cdot \cos(1,006)) \implies \\
 d_1 &\simeq 6400 \cdot 0,239 \simeq 1532,3 \text{ km}.
 \end{aligned}$$

A distância  $d_2$  entre as Ilhas Virgens Britânicas e o Sul da Flórida é

$$\begin{aligned} d_2 &= 6400 \cdot \arccos(\cos(0, 253) \cdot \cos(0, 106) \\ &\quad + 2 \cdot \sin^2(0, 1265) \cdot \cos(1, 244) \cdot \cos(1, 138)) \implies \\ d_2 &\simeq 6400 \cdot 0, 257 \simeq 1648, 29 \text{ km}. \end{aligned}$$

E a distância  $d_3$  entre Bermudas e o Sul da Flórida é

$$\begin{aligned} d_3 &= 6400 \cdot \arccos(\cos(0, 282) \cdot \cos(0, 132) \\ &\quad + 2 \cdot \sin^2(0, 141) \cdot \cos(1, 006) \cdot \cos(1, 138)) \implies \\ d_3 &\simeq 6400 \cdot 0, 280 \simeq 1792 \text{ km}. \end{aligned}$$

Pela Lei dos Cossenos o ângulo  $\alpha$ , cujo lado oposto liga as Ilhas Virgens Britânicas e as Bermudas, é

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\cos(\frac{1532,3}{6400}) - \cos(\frac{1648,29}{6400}) \cdot \cos(\frac{1792}{6400})}{\sin(\frac{1648,29}{6400}) \cdot \sin(\frac{1792}{6400})}\right) \simeq 0, 9293 \text{ radianos}.$$

Pela Lei dos Cossenos o ângulo  $\beta$ , cujo lado oposto liga as Ilhas Virgens Britânicas e o Sul da Flórida, é

$$\beta = \arccos\left(\frac{\cos(\frac{1648,29}{6400}) - \cos(\frac{1532,3}{6400}) \cdot \cos(\frac{1792}{6400})}{\sin(\frac{1532,3}{6400}) \cdot \sin(\frac{1792}{6400})}\right) \simeq 1, 0363 \text{ radianos}.$$

E também, pela Lei dos Cossenos o ângulo  $\delta$ , cujo lado oposto liga Bermudas e o Sul da Flórida, é

$$\delta = \arccos\left(\frac{\cos(\frac{1792}{6400}) - \cos(\frac{1532,3}{6400}) \cdot \cos(\frac{1648,29}{6400})}{\sin(\frac{1532,3}{6400}) \cdot \sin(\frac{1648,29}{6400})}\right) \simeq 1, 2046 \text{ radianos}.$$

Então, pelo Teorema 2.13, obtemos

$$\begin{aligned} A &\simeq 6400^2[1, 2046 + 1, 0363 + 0, 9293 - 3, 1416] \text{ km}^2 \\ &= 40960000 \cdot 0, 0286 \text{ km}^2 = 1171456 \text{ km}^2. \end{aligned}$$

**Agradecimentos:** Agradeço a minha orientadora, Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti pelo incentivo e apoio acadêmico, nas dificuldades encontradas durante o projeto, e também pelos conselhos para a vida.

*Abstract: Spherical Geometry was essential in the development of navigation and also in the study of Astronomy. In this paper we will present a little of the construction process of non-Euclidean geometries, in particular spherical geometry, as well as how we introduce some elements and calculate the area of the Bermuda Triangle.*

*Keywords: navigation; sphere; spherical triangle; Law of Cosines*

## Referências Bibliográficas

- [1] Salema, R.L., *Das cordas ao GPS: um estudo sobre a geometria esférica*, Dissertação de Mestrado, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2018.

- [2] Silva, E.L., *A contextualização da geometria esférica pelo estudo do globo terrestre e suas representações com o uso do software geogebra*, Dissertação de Mestrado, PROF-MAT/CCT/UFCG, Campina Grande, 2017.
- [3] Santos, C.P.F., *Fundamentos da Geometria e Astronomia Esférica*, Dissertação de Mestrado, IGCE-Unesp, Rio Claro, 2020.
- [4] Adames, M.R., *Geometria Esférica*, Trabalho de Conclusão de Curso , Universidade de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

# Cigarras e Números Primos: Uma Questão de Sobrevivência

Carolina Kakazu Paula<sup>†</sup>  
Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

**Resumo:** Este trabalho faz parte de uma Iniciação Científica no qual estudamos a modelagem e suas aplicações em variadas áreas como, por exemplo, epidemiologia, dinâmica dos fluidos, dinâmica populacional e entre outros. Nesta publicação em específico, ilustraremos uma parte dos estudos relacionado a dinâmica populacional envolvendo cigarras.

**Palavras-chave:** cigarras; modelagem; números primos

## 1 Uma breve introdução sobre cigarras

Estações vêm e vão e ao longo deste tempo várias espécies mostram a sua beleza. Isto vale para os insetos como as borboletas que voam com suas asas magníficas. Elas nascem, crescem, reproduzem e se vão. Porém essa fase mais “bela” de sua vida é extremamente curta, assim como o das cigarras.



Figura 2.1: Ilustração do ciclo das cigarras. Disponível em: [pontobiologia.com.br/cigarras-cantam-ate-explodir](http://pontobiologia.com.br/cigarras-cantam-ate-explodir). Acesso em: 24 maio 2021.

As cigarras que conhecemos se reproduzem, põem seus ovos nas folhas, os ovos caem na terra, nascem as ninfas (fase anterior às cigarras), essas ninfas entram no solo e permanecem lá por anos e então todas elas emergem ao mesmo tempo, assumindo sua forma final. Essa nova geração de cigarras se reproduz e isto cria seu ciclo, como ilustrado na Figura 2.1. Isto

<sup>†</sup>FNDE - PET

segue como padrão para diversas espécies, tendo como diferencial o tempo em que as ninfas da espécie permanecem abaixo do solo.

E entre as cigarras conhecidas no mundo, existem algumas espécies dos EUA que surgem no leste e no sul do país que possuem o ciclo de vida iguais a 13 e 17 anos que, curiosamente, são números primos.

## 2 Que vantagens as cigarras têm com números primos?

Uma pessoa curiosa e fascinada pela natureza especialmente interessada pela dinâmica populacional da cigarra, pode querer realizar um estudo sobre o sistema envolvendo a reprodução, sistema de predação onde as cigarras são as presas e os pássaros são os predadores. Mais ainda, ao envolver a beleza e utilidade da matemática, é possível obter um modelo que consiga descrever o comportamento da população das cigarras e dos pássaros e observar se existe uma vantagem para expectativa de vida das cigarras ser um número primo de anos.

No processo de modelagem, existem algumas etapas a serem seguidas para que o modelo consiga descrever de forma mais precisa possível o fenômeno estudado. De modo resumido, as etapas são:

1. **O problema:** A primeira etapa é a escolha do tema (ou problema) e a obtenção de dados e informações que podem ser de grande utilidade para seu futuro modelo;
2. **Escolha do modelo:** O passo seguinte é, tendo conhecimento do problema, propor um modelo que descreva o fenômeno desejado. O modelo por ser novo ou uma adaptação de algum já existente;
3. **Solução e Validação** Obtendo o modelo, é necessário a verificação de seu funcionamento: se o modelo faz sentido, descreve bem bem o problema para caso “trivial”, para demais casos, etc.
4. **Aplicação/Resultados** O passo final é a aplicação do modelo para suas previsões.

\* A correção dos erros como a escolha do modelo e solução numérica acontece no terceiro passo e o processo pode (e deve) ser repetido para prosseguir.

Seguindo o esquema acima, podemos considerar como “concluído” alguns passos. Considerando que já existem dados anuais mostrando dados sobre a população de cigarras e de pássaros. Veremos aqui um modelo discreto que descreve seu crescimento fazendo uma adaptação do modelo de Hoppensteadt e Keller [1] a fim de comparar espécies diferentes de cigarras e pássaros.

### 2.1 Ingredientes para o modelo

Para acompanharmos a evolução de cada geração de cigarras, a cada ano, precisamos registrar a idade de cada cigarra e pássaro; e para isso faremos a seguinte organização das variáveis:

Para cada espécie de cigarra:

$$\begin{cases} x(i) = \text{Pop. de cigarras de uma espécie com idade } i \\ n_c = \text{Expectativa de vida da cigarra considerada} \end{cases}$$

E para os pássaros:

$$\begin{cases} y(i) = \text{Pop. de pássaros de uma espécie com idade } i \\ n_p = \text{Expectativa de vida do pássaro considerado} \end{cases}$$



A ideia aqui é monitorar as populações das espécies consideradas ao longo dos anos.

Para a atualização da população de cigarra de uma espécie dada com idade  $i$  (dentro do intervalo de expectativa de vida, isto é,  $1 < i \leq n_c$ ), seu número no ano  $n + 1$  será o número de cigarras no ano anterior multiplicado por um coeficiente que mede a taxa de sobrevivência das mesmas. Denotando esse coeficiente por  $c$ , podemos representar por

$$x^{n+1}(i+1) = c \cdot x^n(i).$$

De forma similar, conseguimos expressar matematicamente os pássaros. Mas neste caso, existe um pequeno detalhe que difere, pois os pássaros podem se alimentar das cigarras que saem da terra. Assim, escrevemos

$$y^{n+1}(i+1) = C \cdot y^n(i), \quad C = y_0 + y_1$$

onde  $y_1$  representa a alimentação dos pássaros considerando o número de cigarras que emergiram da terra no ano dado e  $y_0$  a fonte de alimento alternativo como as frutas, sementes e outros insetos. A existência desse  $y_0$  é bem interessante, pois sem ela, isto é, se os pássaros dependessem somente de cigarras, os predadores facilmente iriam à extinção já que as cigarras passam grande parte da sua vida sob a terra possibilitando não aparição destes insetos num determinado período de tempo.

E para a população de recém nascidos? Como representá-la?

Observe que para cigarras com idade 1 não é possível seguir o esquema descrito acima, pois não vai existir o “número de cigarras no ano anterior”. Para representá-los então é necessário uma outra expressão que leve em conta alguns fatores que influenciam no número de cigarras recém nascidas:

- **Fator nº 1:** *Não é garantia de que as todas as cigarras que saem da terra consigam botar seus ovos.*

Para a existência de recém nascidos, sejam elas da 1ª, 2ª ou  $n$ -ésima geração é necessário que as cigarras adultas presentes ( $x^n(n_c)$ ) coloquem seus ovos. Mas como os pássaros podem comê-las antes mesmo de conseguirem botar os ovos, isto pode diminuir a população  $x^{n+1}(1)$ .

Representando isso matematicamente, podemos escrever como  $p$  a probabilidade da cigarra da espécie considerada ser comida e multiplicar pela população de cigarras adultas desta espécie no ano ( $x^n(n_c)$ )

$$x^{n+1}(1) = p \cdot x^n(n_c)$$

Esta probabilidade é diretamente proporcional ao número de predadores (podendo ser ponderada pela idade, que afeta o seu apetite) e inversamente proporcional ao número de todas as espécies de cigarras emergentes no ano.

- **Fator nº2:** *O solo que nutre as ninfas possui uma capacidade limite.*

O subsolo não é uma fonte ilimitada de nutrientes e por isso nem todas as ninfas irão sobreviver. Assim, considerando  $K$  como a capacidade do solo para comportar as ninfas, se a soma de todas as ninfas dos anos anteriores for representado por  $K_t$ , é possível ainda comportar  $K - K_t$  novas ninfas. Se nascem mais do que o solo comporta, estas novas ninfas não sobrevivem.

Estes dois fatores contribuem para diminuição da população de cigarras recém nascidas.

De modo semelhante é possível colocar uma restrição de pássaros nascidos (mas não será o foco aqui).

Para modelagem computacional, uma dificuldade que pode ser encontrada é de determinar os parâmetros adequados para não obtermos um modelo tendencioso privilegiando a espécie de cigarra que seja do interesse no momento da compilação do código montado.

## 2.2 Considerações sobre as compilações

Tendo então o principais ingredientes e a programação utilizando MATLAB, segundo a referência [1], foi aplicado o modelo para várias espécies de cigarras e pássaros (considerando como “espécie” criaturas que possuem mesmas expectativas de vidas em anos) e assim, obter comparações das dinâmicas populacionais.

Na referência principal, [1], foram estudados as cigarras com expectativas de anos de 12, 13 e 15 anos, que chamaremos de  $u, v$  e  $w$  respectivamente. E do mesmo modo, os pássaros com expectativas de vidas de 2, 3 e 5 anos que chamaremos de  $U, V$  e  $W$  respectivamente. Seguem as duas compilações abaixo:

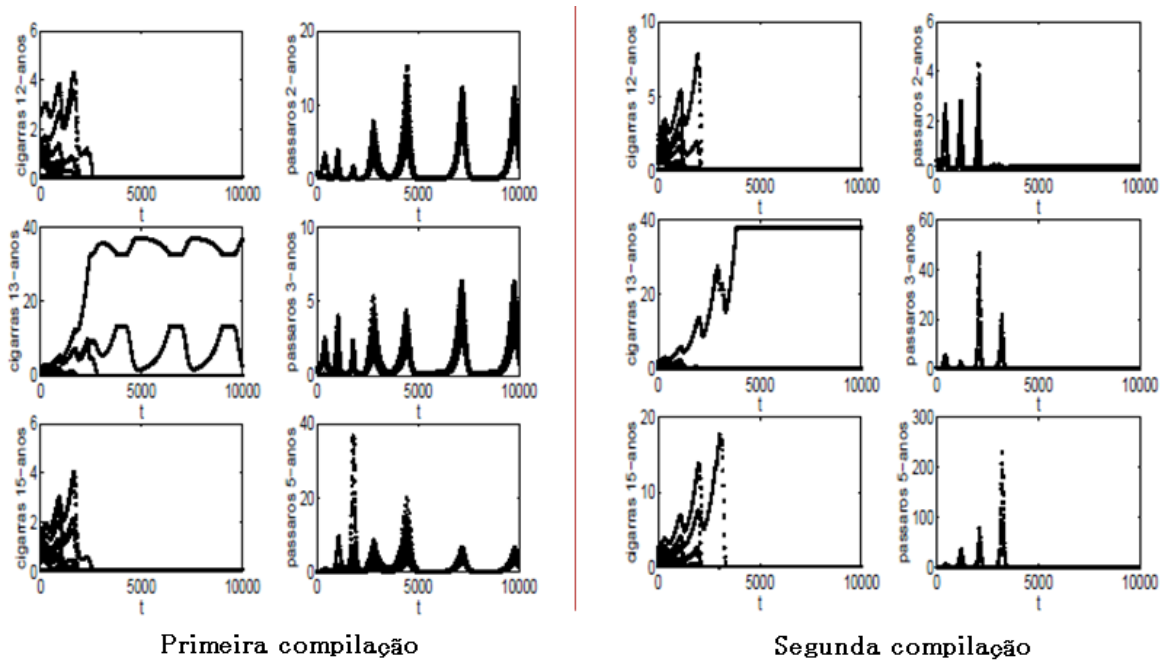


Figura 2.2: Duas compilações obtidas no programa MATLAB, segundo [1].

Nota-se que para todos os gráficos o eixo horizontal mostra o tempo  $t$  em anos e o eixo vertical indica o número de recém nascidos de cada espécie de criaturas.

É possível ver que nos dois experimentos as cigarras de espécie  $v$  se mantiveram por algumas gerações e possibilitando ainda a perpetuação da espécie enquanto que espécies  $u$  e  $w$  vão à extinção muito rápido. Com isso, temos como uma das interpretações possíveis que a chance das cigarras  $u$  e  $w$  saírem da terra e coincidirem com picos de natalidade dos pássaros são maiores comparadas à espécie  $v$ . Quando uma espécie de cigarras vai à extinção, quase sempre este fato está associado a enorme população de pássaros com expectativas de vida igual a um divisor da expectativa de vida das cigarras extintas. Após sua extinção, acontece um decaimento da população de predadores e depois voltando para seu nível normal.

Além disso, no segundo experimento, o número de cigarras recém nascidas  $v$  não ultrapassam um certo valor, se mostrando como a capacidade limite  $K$  (como foi observado pelo fator nº 2) que o solo possui naquele local.

**Agradecimentos:** Agradeço aos meus pais, Milton e Amélia pelo apoio e incentivo a fazer o que sempre quis. Agradeço à minha orientadora Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti pela paciência, realização do projeto e por iluminar meu caminho desde as primeiras iniciações científicas; ao grupo PET Matemática da UNESP de Rio Claro pelos projetos desenvolvidos e o incentivo à pesquisa. Aos meus amigos, dentro e fora da UNESP, que sempre me apoiaram nos momentos difíceis e comemoraram cada passo e conquista.

*Abstract: This work is part of a Scientific Initiation in which we study modeling and its applications in various areas such as epidemiology, fluid dynamics, population dynamics and others. In this specific publication, we will illustrate a part of the studies related to population dynamics involving cicadas.*

*Keywords: cicadas; modeling; prime number*

---

## Referências Bibliográficas

- [1] Nachbin, A., Tabak, E., Introdução à Modelagem Matemática e Computacional, Notas, IMPA, Rio de Janeiro.
- [2] 17-Year Cicadas to Emerge in Parts of Illinois. Here's Where You Might Find Them. [S. l.], 24 maio 2021. Disponível em: <https://www.nbcchicago.com/news/local/17-year-cicadas-to-emerge-in-parts-of-illinois>

# Um Estudo Sobre Sistemas Homogêneos e Não-Homogêneos

Carolina Pereira Neves<sup>†</sup>

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

**Resumo:** Neste trabalho é desenvolvida a teoria introdutória para o que seria um sistema homogêneo e não-homogêneo em especial à obtenção de soluções.

**Palavras-chave:** existência de solução; matriz fundamental de solução, fórmula da variação de constantes.

## 1 Sistemas Homogêneos

Dada as funções

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \text{ e } g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

definidas em  $t \in I$ , um sistema de equações diferenciais ordinárias linear tem a forma:

$$y' = A(t)y + g(t) \quad (1.1)$$

onde  $y(t)$  é um vetor coluna com componentes  $y_1(t), \dots, y_n(t)$ . Consideramos o sistema homogêneo

$$y' = A(t)y \quad (1.2)$$

Assumimos que a matriz  $A(t)_{n \times n}$  é contínua no intervalo  $I$  e pelo Teorema de Existência e Unicidade, veja [1], vemos que em qualquer ponto  $(t_0, \eta), t_0 \in I$ , existe uma e somente uma solução  $\phi$  de (1.2) tal que  $\phi(t_0) = \eta$ . Em particular, dado um ponto  $(t_0, 0)$ , para  $t_0$  qualquer ponto de  $I$ , a solução única é  $\phi = 0$  em  $I$ , satisfazendo a condição inicial  $\phi(t_0) = 0$ , por conta que 0 sempre será solução de (1.2).

Para obter o resultado sobre a construção da solução geral do sistema linear (1.2), observamos primeiro que se  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são soluções de (1.2) no intervalo  $I$ , e  $c_1$  e  $c_2$  são constantes (reais ou complexas), então a linearidade de (1.2) nos dá que

$$\begin{aligned} (c_1\phi_1 + c_2\phi_2)' &= c_1\phi_1' + c_2\phi_2' \\ &= c_1A\phi_1 + c_2A\phi_2 \\ &= A(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) \end{aligned}$$

isto é,  $c_1\phi_1 + c_2\phi_2$  é uma solução de (1.2) em  $I$ . Em álgebra linear, isso demonstra que as soluções de (1.2) forma um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos. Denotamos tal espaço vetorial por  $V$ . Lembramos que um espaço vetorial sobre o corpo dos reais ou complexos é um conjunto de elementos, tal que as operações de adição e multiplicação por escalares satisfazem propriedades bem conhecidas. Um subconjunto  $S$  de um espaço vetorial é chamado de subespaço se for fechado com respeito às operações de soma e multiplicação

<sup>†</sup>Bolsista: PIBIC

por escalares. É fácil provar pela definição de espaço vetorial que qualquer subespaço de um espaço vetorial é um espaço vetorial com as mesmas operações.

Assim, o conjunto de soluções  $V$  de (1.2) é um subespaço do espaço vetorial de funções contínuas sobre o corpo dos reais ou complexos, e portanto é um espaço vetorial. É natural perguntarmos, qual é a dimensão do espaço vetorial  $V$ ? Para discutir essa questão, é preciso definir a dimensão, recordaremos a definição de linearmente dependente ou independente de conjunto de vetores.

**Definição 1.1.** Um conjunto de vetores  $v_1, v_2, \dots, v_k$  é linearmente dependente se existe os escalares  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , não todos nulos, de forma que a combinação linear

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0$$

**Definição 1.2.** Um conjunto de vetores  $v_1, v_2, \dots, v_k$  é linearmente independente se ele não for dependente.

Essas definições contêm as definições de dependência e independência linear de funções como casos especiais.

Um conjunto  $S$  de vetores é uma base de um espaço vetorial  $V$  se for linearmente independente e se todo vetor de  $V$  pode ser expressado como uma combinação linear dos vetores de  $S$ .

Agora podemos definir dimensão de um espaço vetorial  $V$  como o número de elementos na base de  $V$ . Um espaço vetorial é dito ter dimensão finita se a sua base for finita. Portanto, por exemplo,  $\mathbb{R}^n$  tem dimensão  $n$ . Pode ser demonstrado que toda base de um espaço vetorial de dimensão finita tem o mesmo número de elementos. Notamos que o espaço  $C$  de funções contínuas num intervalo finito não tem dimensão finita, devido que o conjunto  $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ , é linearmente independente em qualquer intervalo e esta contido em  $C$ .

Agora, retornamos para o problema de encontrar a dimensão do espaço vetorial  $V$  das soluções de (1.2). A resposta está nos seguintes resultados.

**Teorema 1.3.** Se a matriz complexa  $A(t)_{n \times n}$  é contínua no intervalo  $I$ , então as soluções do sistema

$$y' = A(t)y$$

em  $I$  formam um espaço vetorial de ordem  $n$  sobre o corpo dos números complexos.

**Prova:** Já estabelecemos que as soluções formam um espaço vetorial  $V$  sobre o corpo dos complexos. Para estabelecer que a dimensão de  $V$  é  $n$ , precisamos construir uma base de  $V$  consistindo  $n$  vetores de  $V$  que são linearmente independentes, isto é,  $n$  soluções linearmente independentes de (1.2) em  $I$ . Procedemos da seguinte forma. Seja  $t_0$  qualquer ponto de  $I$  e sejam  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$   $n$  vetores linearmente independentes do espaço  $n$  Euclidiano ( $E_n$ ). Por exemplo

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{linha } j \quad j = (1, \dots, n)$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade, o sistema (1.2) possui  $n$  soluções  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ , no intervalo  $I$  e cada solução  $\phi_j$  satisfaz

$$\phi_j(t_0) = \sigma_j \quad j = (1, \dots, n) \quad (1.3)$$

Primeiro mostramos que as soluções  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  são linearmente independentes em  $I$ . Vamos supor que elas não são. Então existem as constantes complexas  $a_1, \dots, a_n$ , não todas nulas, tais que

$$a_1\phi_1(t) + a_2\phi_2(t) + \dots + a_n\phi_n(t) = 0,$$

para todo  $t$  em  $I$ .

Em particular, tendo  $t = t_0$ , e usando a condição inicial (1.3), temos

$$a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + \dots + a_n\sigma_n = 0,$$

mas isso é impossível(a não ser que  $a_1, \dots, a_n$  sejam iguais a zero), pois contradiz a assumida independência linear de  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ .

Para completar a demonstração, temos que mostrar que essas  $n$  soluções de (1.2) geram  $V$ , isto é, cada solução  $\Psi(t)$  de (1.2) pode ser expressada como combinação linear das soluções  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ . Procedemos da seguinte forma. Computamos os valores da solução  $\Psi$  em  $t_0$  e seja  $\Psi(t_0) = \sigma$ . Uma vez que os vetores constantes  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  são linearmente independentes no espaço vetorial Euclidiano  $E_n$ , elas formam uma base de  $E_n$  e existem as constantes únicas  $c_1, \dots, c_n$  tais que o vetor constante  $\sigma$  pode ser representado como

$$\sigma = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + \dots + c_n\sigma_n$$

Considere então a combinação linear:

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \dots + c_n\phi_n(t)$$

Temos que  $\phi(t)$  é uma solução de (1.2) em  $I$ . Além disso, o valor inicial de  $\phi(t)$ , usando (1.3), é

$$\phi(t_0) = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + \dots + c_n\sigma_n = \sigma$$

Portanto  $\phi(t)$  e  $\Psi(t)$  são soluções de (1.2) em  $I$  com  $\phi(t_0) = \Psi(t_0) = \sigma$ . Portanto, pela unicidade,  $\phi(t) = \Psi(t)$  para todo  $t$  em  $I$  e a solução  $\Psi(t)$  é expressada como uma combinação linear única

$$\Psi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \dots + c_n\phi_n(t) \quad (1.4)$$

para todo  $t$  em  $I$ .

Assim, as soluções  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  de (1.2) geram o espaço vetorial  $V$ . Uma vez que elas também são linearmente independentes, segue que a dimensão de  $V$  é  $n$ . ■

No caso do resultado anterior, dizemos que as soluções linearmente independentes  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  formam um conjunto fundamental de soluções. Há claramente uma infinidade de conjuntos de soluções fundamentais diferentes de (1.2).

Podemos interpretar o Teorema 1.3 de uma forma diferente e útil. A matriz de  $n$  linhas cujas colunas são soluções de (1.2) é chamada de Matriz Solução. Agora se formamos uma matriz  $n \times n$ , usando a acima, de  $n$  linearmente independentes soluções como coluna, teremos uma matriz solução em  $I$ , mas também as colunas vão ser soluções linearmente independentes de (1.2) em  $I$  é chamada de Matriz Fundamental para (1.2) em  $I$ . Denotaremos a matriz fundamental por  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  como colunas de  $\Phi$ . Então a demonstração que  $\Psi$  é uma combinação linear de (1.4) para uma escolha única das constantes  $c_1, \dots, c_n$ , temos que

$$\Psi(t) = \Phi(t)c \quad (1.5)$$

onde  $\phi$  é a matriz fundamental construída acima e  $c$  é o vetor com as componentes  $c_1, \dots, c_n$ . Se  $\tilde{\Phi}(t)$  é qualquer outra matriz fundamental de (1.2) em  $I$ , então a  $\Psi$  acima pode ser expressada por

$$\Psi(t) = \tilde{\Phi}(t)\tilde{c}$$

para todo  $t$  em  $I$ , para uma constante escolhida  $\tilde{c}$  adequada. Toda solução de (1.2) em  $I$  pode ser expressada dessa forma para qualquer matriz fundamental.

Pela discussão acima, para encontrar uma solução de (1.2) precisamos encontrar  $n$  soluções linearmente independentes em  $I$ , em outras palavras, temos que encontrar a matriz fundamental. Uma pergunta que surge naturalmente é a seguinte: Supondo que encontramos a matriz solução de (1.2) em um intervalo  $I$ , podemos testar de uma maneira simples se essa matriz solução é a matriz fundamental? Veremos no próximo teorema que qualquer matriz solução  $\Phi(t)$ , não necessariamente a matriz solução especial usada em (1.5), é uma matriz fundamental de (1.2) se, e somente se,  $\det \Phi(t) \neq 0$  em  $I$ . Contudo, é conveniente estabelecer um importante resultado auxiliar primeiro.

**Teorema 1.4** (Fórmula de Abel). *Se  $\Phi$  é a matriz solução de (1.2) em  $I$  e se  $t_0$  é um ponto qualquer de  $I$ , então*

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n a_{jj}(s) ds\right) \quad (1.6)$$

para todo  $t$  em  $I$ .

Segue do Teorema 1.4 (uma vez que  $t_0$  é arbitrário) que ou  $\det \Phi(t) \neq 0$  para todo  $t$  em  $I$  ou  $\det \Phi(t) = 0$  para todo  $t$  em  $I$ .

**Prova:** Vamos denotar as colunas de  $\Phi$  como  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ . Seja  $\phi_j$  com componentes  $(\phi_{1j}, \phi_{2j}, \dots, \phi_{nj})$ . Então,  $\phi_j$  é uma solução de (1.2) em  $I$  e pode ser escrita em termos de componentes como

$$\phi'_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \phi_{kj} \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (1.7)$$

É necessário recordar que a derivada de  $\det \Phi$  é a soma de  $n$  determinantes

$$\begin{aligned} (\det \Phi)' &= \begin{vmatrix} \phi'_{11} & \phi'_{12} & \cdots & \phi'_{1j} & \cdots & \phi'_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2j} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nj} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1j} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi'_{21} & \phi'_{22} & \cdots & \phi'_{2j} & \cdots & \phi'_{2n} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \cdots & \phi_{3j} & \cdots & \phi_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nj} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \\ &+ \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1j} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2j} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n-1,1} & \phi_{n-1,2} & \cdots & \phi_{n-1,j} & \cdots & \phi_{n-1,n} \\ \phi'_{n1} & \phi'_{n2} & \cdots & \phi'_{nj} & \cdots & \phi'_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Esse fato é facilmente provado por indução. Usando (1.7), obtemos que

$$\begin{aligned}
 (\det \Phi)' &= \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}\phi_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{1k}\phi_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}\phi_{kn} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} \\
 &+ \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}\phi_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{2k}\phi_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{2k}\phi_{kn} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \cdots & \phi_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \\
 &+ \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n-1,1} & \phi_{n-1,2} & \cdots & \phi_{n-1,n} \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}\phi_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{nk}\phi_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk}\phi_{kn} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Usando a operação elementar de linhas, podemos avaliar cada determinante. Por exemplo, o primeiro temos que multiplicar a segunda linha por  $a_{12}$ , a terceira por  $a_{13}$ , ..., a  $n$ -ésima linha por  $a_{1n}$ , adicionamos essas  $(n-1)$  linhas, e então subtraímos o resultado da primeira linha. Isso deixa  $a_{11}$  como um fator resultante da primeira linha. Procedendo de forma semelhante com os outros determinantes, obtemos:

$$(\det \Phi)' = a_{11} \det \Phi + a_{22} \det \Phi + \cdots + a_{nn} \det \Phi$$

para todo  $t$  em  $I$ , ou podemos escrever da seguinte forma:

$$(\det \Phi)' = \left( \sum_{k=1}^n a_{kk}(t) \right) \det \Phi \quad (1.8)$$

que é uma equação escalar de primeira ordem para  $\det \Phi$ . E sua solução é (1.6). ■

Agora usaremos o Teorema 1.4 para estabelecer o resultado principal.

**Teorema 1.5.** *A matriz solução  $\Phi$  de (1.2) no intervalo  $I$  é a matriz fundamental de (1.2) se, e somente se,  $\det \Phi(t) \neq 0$  para todo  $t$  em  $I$ .*

**Prova:** Se  $\det \Phi(t) \neq 0$  para todo  $t$  em  $I$ , as colunas da matriz solução são linearmente independentes em  $I$ , e portanto  $\Phi$  é uma matriz fundamental de (1.2) em  $I$ .

Reciprocamente, se  $\Phi$  é uma matriz fundamental, então toda solução de (1.2) em  $I$  tem a forma  $\phi(t) = \Phi(t)c$  para algum vetor constante  $c$ . Para cada  $t_0$  fixado em  $I$  e qualquer vetor  $\phi(t_0)$ , devido que  $\Phi(t)$  é uma matriz fundamental, o sistema de equações algébricas  $\phi(t_0) = \Phi(t_0)c$  tem uma solução única para um  $c$ . Portanto,  $\det \Phi(t_0) \neq 0$ . Agora pelo Teorema 1.4,  $\det \Phi(t) \neq 0$  para todo  $t$  em  $I$ . ■

Uma matriz pode ter determinante igual a zero em algum intervalo, mesmo que suas colunas sejam linearmente independentes. Por exemplo,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Neste caso,  $\det \Phi = 0$ ,  $-\infty < t < \infty$ , e ainda suas colunas são linearmente independentes. E pelo Teorema 1.5, isso não pode ser solução de (1.2).

Observamos que os Teorema 1.4 e 1.5 implicam que para verificar que uma matriz solução de (1.2) é uma matriz fundamental, basta avaliar o seu determinante em um ponto. O ponto pode ser frequentemente escolhido para tornar o processo mais simples.

Se  $\Phi$  é uma matriz fundamental de (1.2) em  $I$ , e  $C$  é uma matriz constante não singular, então  $\Phi C$  é uma matriz solução e como  $\det \Phi C = \det \Phi \cdot \det C$ , do Teorema 1.5 segue que  $\Phi C$  também é uma matriz fundamental em  $I$ .

Suponhamos que  $\Phi$  e  $\Psi$  são duas matrizes fundamentais de (1.2) em  $I$ . Deixando  $\psi_j$  sendo a  $j$ -ésima coluna de  $\Psi$ , segue de (1.5) que  $\psi_j = \Phi c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , onde  $c_j$  é um vetor constante adequado. Portanto, se definirmos  $C$  como a matriz constante com os vetores colunas  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , temos que  $\Psi(t) = \Phi(t)C$  para todo  $t$  em  $I$ . Como os  $\det \Psi$  e  $\det \Phi$  são diferentes de zero em  $I$ , também temos que  $\det C \neq 0$  de modo que  $C$  é uma matriz constante não singular. Essas observações implicam na seguinte relação entre matrizes fundamentais diferentes.

**Teorema 1.6.** *Se  $\Phi$  é uma matriz fundamental para  $y' = A(t)y$  e  $C$  é uma matriz constante não singular, então  $\Phi C$  também é uma matriz fundamental para  $y' = A(t)y$  em  $I$ . Toda matriz fundamental de (1.2) é dessa forma para alguma matriz não singular  $C$*

## 2 Sistemas não-homogêneos

Agora discutiremos as soluções do sistema não-homogêneo

$$y' = A(t)y + g(t) \quad (2.1)$$

onde  $A(t)$  é uma matriz contínua e  $g(t)$  é um vetor dado num intervalo  $I$  também contínua. Todo o desenvolvimento está na suposição que podemos encontrar uma Matriz Fundamental do sistema homogêneo correspondente  $y' = A(t)y$ . O vetor  $g(t)$  é geralmente referido como um termo de força externa. Pelo Teorema de Existência e Unicidade, sabemos que dado qualquer ponto  $(t_0, \eta)$ ,  $t_0$  em  $I$ , existe uma solução única  $\phi$  de (2.1) em todo intervalo  $I$ , de modo que  $\phi(t_0) = \eta$ . Para construir as soluções de (2.1) tomemos  $\Phi$  como a Matriz Fundamental do sistema homogêneo  $y' = A(t)y$  em  $I$ ,  $\Phi$  existe devido ao Teorema 1.3. Supomos que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são soluções de (2.1) em  $I$ . Então  $\phi_1 - \phi_2$  é uma solução do sistema homogêneo em  $I$ , pois

$$\begin{aligned} (\phi_1 - \phi_2)' &= \phi_1' - \phi_2' \\ &= A(t)y_1 - g(t) - (A(t)y_2 - g(t)) \\ &= A(t)y_1 - A(t)y_2 \\ &= A(t)(y_1 - y_2) \\ &= A(t)y \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.3, existe um vetor constante  $c$ , tal que

$$\phi_1 - \phi_2 = \Phi c \quad (2.2)$$

(2.2) nos diz que para encontrar qualquer solução de (2.1), precisamos apenas de uma solução de (2.1). Existe um método simples, conhecido como Variação de Constantes, para determinar uma solução de (2.1), conhecendo uma Matriz Fundamental para o sistema homogêneo  $y' = A(t)y$ . Seja  $\Phi$  uma Matriz Fundamental em  $I$ . Vamos encontrar um solução  $\psi$  de (2.1) na forma:

$$\psi(t) = \Phi(t)v(t) \quad (2.3)$$

onde  $v$  é um vetor a ser determinado. ( Se  $v$  for um vetor constante, então  $\psi$  satisfaz o sistema homogêneo e assim, por enquanto,  $v(t) \equiv c$  está descartado). Suponhamos que essa solução existe. Então substituindo (2.3) em (2.1), encontramos que para todo  $t$  em  $I$ ,

$$\psi'(t) = \Phi'(t)v(t) + \Phi(t)v'(t) = A(t)\Phi(t)v(t) + g(t).$$

Como  $\Phi$  é a Matriz Fundamental do sistema homogêneo,  $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ , e o termo  $A(t)\Phi(t)v(t)$  é cancelado. Portanto  $\psi(t) = \Phi(t)v(t)$  é a solução de (2.1), devemos determinar  $v(t)$  para a relação:

$$\Phi(t)v'(t) = g(t)$$

Como  $\Phi$  é não singular em  $I$ , primeiro multiplicamos pela inversa  $\Phi^{-1}$  e depois integramos,

$$v(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)g(s)ds \quad (t_0, t \in I)$$

multiplicando ambos os lados por  $\Phi$ , (2.3), se torna

$$\psi(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)g(s)ds \quad (t_0, t \in I) \quad (2.4)$$

Assim, se (2.1) tem a solução  $\psi$  na forma (2.3), então  $\psi$  é dada por (2.4), onde  $\Phi$  é uma Matriz Fundamental do sistema homogêneo em  $I$ . Então, derivando (2.4) e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\psi'(t) = \Phi'(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)g(s)ds + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)g(t) = A(t)\Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)g(s)ds + g(t)$$

e usando (2.4) novamente,

$$\psi'(t) = A(t)\psi(t) + g(t)$$

para todo  $t$  em  $I$ . Obviamente,  $\psi(t_0) = 0$ . Então, provamos a fórmula de variação de constantes.

**Teorema 2.1.** *Se  $\Phi$  é a Matriz Fundamental de  $y' = A(t)y$  em  $I$ , então a função*

$$\psi(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)g(s)ds$$

*é uma solução particular de (2.1) em  $I$ , satisfazendo a condição inicial.*

$$\psi(t_0) = 0$$

*e válida em  $I$*

Combinando o Teorema 2.1 com as observações feitas no começo dessa seção, temos que toda solução  $\phi$  de (2.1) em  $I$  tem a forma:

$$\phi(t) = \phi_h(t) + \psi(t) \quad (2.5)$$

onde  $\psi$  é a solução de (2.1) satisfazendo a condição inicial  $\psi(t_0) = 0$ , e  $\phi_h$  é a solução do sistema homogêneo satisfazendo a mesma condição inicial em  $t_0$ , por exemplo,  $\phi_h(t_0) = \eta$ .

**Agradecimentos:** Agradeço a minha orientadora, Profa. Dra. Marta por me orientar e a minha família por me apoiar durante a graduação.

*Abstract: In this work, the introductory theory for what would be a homogeneous and non-homogeneous system is developed, especially for obtaining solutions.*

*Keywords: existence for solution; fundamental matrix of solution, variation of constants formula*

## Referências Bibliográficas

- [1] Brauer, F., Nohel, J.A., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, 1989.

# Teoria do grau coincidente de Mawhin e o modelo de Mackey-Glass

Lucas Ozaki Mizuguti<sup>†</sup>

Orientador(a): Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

**Resumo:** Neste trabalho mostramos a aplicabilidade da teoria do grau coincidente de Mawhin para garantir a existência de solução periódica positiva para o modelo de hematopoese proposto pelos matemáticos Michael Mackey e Leon Glass.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais Funcionais; teoria do grau coincidente de Mawhin; Análise Funcional; Modelo de Mackey-Glass.

## 1 Introdução

Em 1977, os matemáticos Michael Mackey e Leon Glass propuseram o seguinte modelo para estudar o processo de hematopoese (processo pelo qual são formadas as células do sangue):

$$x'(t) = -\delta x(t) + \frac{px(t-\tau)}{1 + [x(t-\tau)]^n}, n \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

com condição inicial  $x(t) = \gamma(t)$ ,  $\gamma \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^+)$ , onde:

- $x(t)$  representa a densidade de células maduras na corrente sanguínea em um dado instante  $t$ ;
- $\tau$  representa a diferença entre o tempo de produção de células imaturas na medula óssea até sua maturação e circulação na corrente sanguínea;
- $\frac{px(t-\tau)}{1 + [x(t-\tau)]^n}$  modela a reprodução das células sanguíneas;
- $-\delta x(t)$  representa a taxa de mortalidade das hemácias.

A variação do ambiente, em particular a variação periódica do ambiente, desempenha um papel importante em muitos sistemas biológicos e ecológicos. A suposição da periodicidade de alguns parâmetros do sistema incorpora a periodicidade do ambiente. Logo, assumindo que as constantes presentes na equação (1.1) são, na verdade, funções  $T$ -periódicas, reescrevemos a equação (1.1) da seguinte forma

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + p(t)\frac{x(t-\tau(t))}{1 + [x(t-\tau(t))]^n}, t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.2)$$

onde  $\delta, p \in C(\mathbb{R}^+, (0, \infty))$  e  $\tau \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$  são funções  $T$ -periódicas, e  $n$  é uma constante positiva. Cabe mencionar que o símbolo  $\mathbb{R}^+$  denota o conjunto dos números reais não-negativos, ou seja,  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ .

Nosso objetivo é exibir condições que garantem a existência de soluções  $T$ -periódicas positivas para a equação (1.2).

<sup>†</sup>FAPESP - Processo 2020/13754-7

Consideraremos a equação (1.2) sujeita à seguinte condição inicial

$$x(t) = \phi(t), \text{ com } \phi \in C([- \tau_M, 0], \mathbb{R}^+) \text{ e } \phi \neq 0, \quad (1.3)$$

com  $\tau_M = \max_{t \in [0, T]} \tau(t) \geq 0$ . Observe que quando consideramos as funções  $\delta(t)$ ,  $p(t)$  e  $\tau(t)$  como constantes, a equação (1.2) se reduz a equação (1.1).

A ferramenta que utilizaremos para provar a existência de solução periódica positiva para o modelo de Mackey-Glass é a teoria do grau coincidente de Mawhin.

Este artigo está dividido em duas seções. A primeira seção apresenta conceitos e resultados básicos das teorias do grau de Leray-Schauder e Mawhin, que são preliminares para o estudo a ser realizado na Seção 2. A segunda seção é dedicada ao estudo do modelo de Mackey-Glass. Baseados no Teorema de Continuação de Mawhin, que é descrito na Seção 1, provamos a existência de uma solução periódica positiva para tal modelo.

## 2 Preliminares

Esta seção é destinada a apresentação de resultados e conceitos fundamentais das teorias do grau de Leray-Schauder e do grau de Mawhin, que serão importantes para o entendimento do estudo desenvolvido neste artigo. O leitor interessado em se aprofundar nesses pré-requisitos pode consultar as referências [1, 3, 4, 6].

### 2.1 Teoria do grau de Leray-Schauder

Considere  $E$  um espaço vetorial normado,  $C(\Omega, E)$  o espaço vetorial das aplicações contínuas de  $\Omega$  em  $E$ , com  $\Omega$  um subconjunto aberto de  $E$ , e  $\partial\Omega$  a fronteira do conjunto  $\Omega$ .

**Definição 2.1.** Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto e limitado de  $E$ . Diremos que uma aplicação do tipo  $\phi = Id - T: \overline{\Omega} \rightarrow E$  é uma perturbação de dimensão finita da identidade, onde  $Id: E \rightarrow E$  é a aplicação identidade e  $T \in C(\overline{\Omega}, E)$ , quando  $T(\overline{\Omega})$  estiver contido em um subespaço de dimensão finita de  $E$ .

**Definição 2.2.** Seja  $\phi = Id - T$  uma perturbação de dimensão finita da identidade. Se  $b \notin \phi(\partial\Omega)$  e  $F$  é um subespaço de dimensão finita contendo  $b$  e  $T(\overline{\Omega})$ , então definimos o grau de Leray-Schauder de  $\phi$  em  $\Omega$  com relação a  $b$  por

$$d(\phi, \Omega, b) := d(\phi|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b), \quad (2.1)$$

onde  $d(\phi|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b)$  é o grau de Brouwer de  $\phi|_{\overline{\Omega} \cap F}$  em  $\Omega \cap F$  com relação a  $b$ .

**Observação 2.3.** Na Definição 2.2,  $d(\phi|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b)$  denota o grau de Brouwer de  $\phi|_{\overline{\Omega} \cap F}$  em  $\Omega \cap F$  com relação a  $b$ . Com relação ao grau de Brouwer, é importante mencionarmos que ele é invariante por homotopia contínua - esse fato será de grande importância para que consigamos aplicar o Teorema de Continuação de Mawhin ao nosso problema de existência de solução, na próxima seção. Ou seja, se  $H: (\overline{\Omega} \cap F) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma homotopia contínua, com  $b \notin H(\partial(\Omega \cap F) \times [0, 1])$ , então,  $d(H(\cdot, t), \Omega \cap F, b)$  é constante para todo  $t \in [0, 1]$ .

**Observação 2.4.** Se  $T: \overline{\Omega} \rightarrow E$  for um operador compacto, então  $\phi = Id - T$  será uma perturbação compacta da identidade.

**Proposição 2.5.** Se  $\Omega$  é um subconjunto aberto e limitado de  $E$  e  $Id: \Omega \rightarrow E$  é a injeção canônica, então

$$d(Id, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } b \in \Omega, \\ 0, & \text{se } b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Observamos que os conceitos e resultados apresentados acima são apenas uma fração da vasta gama de resultados sobre a teoria do grau de Leray-Schauder, que podem ser encontrados em [1, 6]. Para que essa teoria seja compreendida integralmente, é necessário que o leitor tenha conhecimento de conceitos e resultados da teoria de Análise Funcional (indicamos para tal, a referência básica [2]).

## 2.2 O grau coincidente de Mawhin

A teoria do grau coincidente para perturbações de operadores de Fredholm é uma ferramenta topológica que foi originalmente introduzida pelos matemáticos Robert Gaines e Jean Mawhin em 1970, e desde então vem se mostrando uma ferramenta poderosa para o estudo de existência de soluções periódicas para problemas envolvendo equações diferenciais funcionais (EDFs). Devido às grandes contribuições de Mawhin para o desenvolvimento dessa teoria, a mesma é conhecida hoje como *teoria do grau coincidente de Mawhin*.

Visamos aplicar a teoria do grau de Mawhin à EDF descrita em (1.2) para garantir a existência de uma solução periódica positiva. Reduziremos essa EDF a uma equação de operadores do tipo

$$Lx = Nx \quad (2.2)$$

em um certo subconjunto  $\Omega$  de um espaço de Banach  $X$ , em que  $L$  é um operador linear de Fredholm de índice zero e  $N$  é uma aplicação  $L$ -compacta.

A seguir, apresentaremos os conceitos de operador de Fredholm de índice zero e operador  $L$ -compacto, bem como suas principais propriedades. Observamos que os resultados serão apenas enunciados, mas suas demonstrações podem ser encontradas na referência [4].

**Definição 2.6.** Sejam  $X$  e  $Z$  espaços vetoriais normados. Diremos que uma aplicação linear  $L: \text{dom}(L) \subset X \rightarrow Z$  é um operador de Fredholm de índice zero se as seguintes condições são satisfeitas:

- (i)  $\dim \text{Ker } L < \infty$ ;
- (ii)  $\text{Im } L = \overline{\text{Im } L}$  e  $\text{codim Im } L < \infty$ ;
- (iii)  $\dim \text{Ker } L = \dim \text{Coker } L$ .

**Proposição 2.7.** Se as condições da Definição 2.6 forem satisfeitas, então existirão projeções contínuas  $P: X \rightarrow X$  e  $Q: Z \rightarrow Z$  tais que

$$\text{Ker } L = \text{Im } P \quad \text{e} \quad \text{Im } L = \text{Ker } Q.$$

A restrição  $L|_{\text{dom } L \cap \text{Ker } P}$  é invertível com inversa  $K_P: \text{Im } L \rightarrow \text{dom } L \cap \text{Ker } P$ . Além disso,  $K_{P,Q}: Z \rightarrow \text{dom } L \cap \text{Ker } P$  denotará a inversa generalizada de  $L$ , definida por

$$K_{P,Q} = K_P(Id - Q).$$

**Definição 2.8.** Sejam  $\Omega$  um subconjunto aberto e limitado de  $X$  e  $N: \overline{\Omega} \rightarrow Z$  um operador. Diremos que  $N$  é um operador  $L$ -compacto em  $\overline{\Omega}$ , se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (i) o operador  $QN$  é contínuo e  $QN(\overline{\Omega})$  é limitado;
- (ii)  $K_{P,Q}N$  é um operador compacto em  $\overline{\Omega}$ .

Considerando Coker  $L$  com a topologia quociente, definimos a aplicação contínua e sobrejetora  $\Pi: Z \rightarrow \text{Coker } L$  por  $\Pi z = [z]$ . Também consideramos o operador  $M: \bar{\Omega} \rightarrow X$  definido por

$$M = P + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})N, \quad (2.3)$$

onde  $\Lambda$  é um isomorfismo de Coker  $L$  sobre Ker  $L$ . É possível mostrar que  $M$  é um operador compacto (veja [4]).

Feitas essas considerações iniciais, definimos o grau coincidente para uma perturbação de um operador de Fredholm.

**Definição 2.9.** Se os operadores  $L$ ,  $N$  e o subconjunto  $\Omega$  satisfazem as condições das Definições 2.6 e 2.8, com  $0 \notin (L - N)(\text{dom } L \cap \partial\Omega)$ , então o grau de Leray-Schauder,  $d(Id - M, \Omega, 0)$ , está bem definido e, assim, definimos o grau coincidente  $d((L, N), \Omega)$  de  $L$  e  $N$  em  $\Omega$  como sendo o número inteiro

$$d((L, N), \Omega, 0) = d(Id - M, \Omega, 0),$$

em que  $M: \bar{\Omega} \rightarrow X$  é operador compacto dado em (2.3).

Para encerrar esta seção, apresentaremos o Teorema de Continuação de Mawhin, o qual será crucial para garantir a existência de solução periódica positiva para o modelo de Mackey-Glass.

**Teorema 2.10** (Teorema de Continuação de Mawhin). *Sejam  $X, Z$  espaços de Banach e  $\Omega$  um subconjunto aberto e limitado de  $X$ . Consideremos a equação*

$$Lx = \lambda N'x,$$

em que  $L: \text{dom } L \subset X \rightarrow Z$  é um operador de Fredholm de índice zero,  $\lambda \in [0, 1]$  e  $N': \bar{\Omega} \rightarrow Z$  é um operador  $L$ -compacto em  $\bar{\Omega}$ .

Sejam  $P: X \rightarrow X$  e  $Q: Z \rightarrow Z$  projeções contínuas tais que  $\text{Im } P = \text{Ker } L$  e  $\text{Ker } Q = \text{Im } L$ .

Além disso, suponhamos que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (I) para  $\lambda \in (0, 1)$  e  $x \in \partial\Omega \cap \text{dom } L$ , tem-se  $Lx \neq \lambda N'x$ ;
- (II) para  $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker } L$ , tem-se  $QN'x \neq 0$ ;
- (III)  $d(QN'|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \Omega \cap \text{Ker } L, 0) \neq 0$ .

Sob as condições acima, a equação  $Lx = N'x$  possui pelo menos uma solução em  $\bar{\Omega} \cap \text{dom } L$ .

### 3 Modelo de Mackey-Glass

Como mencionado na seção anterior, utilizaremos o Teorema de Continuação de Mawhin (veja Teorema 2.10) para mostrar a existência do solução periódica positiva para a equação (1.2):

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + p(t) \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n}, t \in \mathbb{R}^+,$$

sujeita à condição inicial (1.3):

$$x(s) = \phi(s), \text{ com } \phi \in C([-\tau_M, 0], \mathbb{R}^+) \text{ e } \phi \neq 0,$$

onde  $\delta, p \in C(\mathbb{R}^+, (0, \infty))$  e  $\tau \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$  são funções  $T$ -periódicas,  $n$  é uma constante positiva e  $\tau_M = \max_{t \in [0, T]} \tau(t) \geq 0$ .

O próximo lema nos garante que toda solução para a EDF (1.2), sujeita à condição inicial (1.3), é estritamente positiva. Sua demonstração é bastante técnica (pode ser realizada pelo método dos passos) e, por isso, será omitida.

**Lema 3.1.** *Suponha que  $\delta, p \in C(\mathbb{R}^+, (0, \infty))$  e  $\tau \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$  são funções  $T$ -periódicas,  $n$  é uma constante positiva e  $\tau_M = \max_{t \in [0, T]} \tau(t) \geq 0$ . Se  $x(t)$  é solução do sistema*

$$\begin{cases} x'(t) = -\delta(t)x(t) + p(t) \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n}, \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau_M, 0], \end{cases}$$

então  $x(t) > 0$  para todo  $t \geq \tau_M$ .

Agora, encontraremos uma equação de operadores, equivalente a EDF (1.2), do tipo

$$Lx = Nx,$$

em que  $L$  é um operador de Fredholm de índice zero e  $N$  é um operador  $L$ -compacto.

No decorrer do artigo, com relação a uma função contínua e  $T$ -periódica  $x(t)$ , consideremos

$$x_m = \min_{t \in [0, T]} x(t), \quad x_M = \max_{t \in [0, T]} x(t),$$

e

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(s) ds. \quad (3.1)$$

Ademais, sejam

$$X = Z = \{x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : x(t + T) = x(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

espaços de Banach, munidos com a norma da convergência uniforme  $\|x\| = \sup_{t \in [0, T]} |x(t)|$ .

Defina  $\text{dom } L = \{x \in X : x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\} \subset X$ , e considere

$$Lx = x', \quad Nx = -\delta(t)x(t) + p(t) \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n}$$

e as projeções contínuas

$$Px = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad Qy = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt, \text{ para } x \in X, y \in Z.$$

**Proposição 3.2.**  *$L$  é um operador de Fredholm de índice zero.*

*Demonstração.* É fácil verificar que  $P$  e  $Q$  são aplicações contínuas. Mostremos, portanto, que  $L$  é um operador de Fredholm de índice zero. Note que

$$\text{Ker } L = \{x \in X : Lx = 0\} = \{x \in X : x'(t) = 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\},$$

ou seja,  $x \in \text{Ker } L$  se, e somente se,  $x'(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Assim,  $x(t) = r \in \mathbb{R}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , isto é,  $x$  é uma função constante. Logo,

$$\dim \text{Ker } L = \dim \mathbb{R} = 1 < \infty. \quad (3.2)$$



Vejamos ainda que  $\text{Im } L = \left\{ y \in Z : \int_0^T y(t)dt = 0 \right\}$ . De fato, se  $\tilde{y} \in \text{Im } L$  então existe  $x \in \text{dom } L$  tal que  $Lx = \tilde{y}$ . Com isso, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^T \tilde{y}(t)dt = \int_0^T Lx dt = \int_0^T x'(t)dt = x(T) - x(0) \stackrel{(*)}{=} 0,$$

onde em  $(*)$  usa-se o fato de  $x$  ser  $T$ -periódica. Assim,  $\tilde{y} \in \left\{ y \in Z : \int_0^T y(t)dt = 0 \right\}$ .

Por outro lado, se  $\tilde{y} \in \left\{ y \in Z : \int_0^T y(t)dt = 0 \right\}$ , então  $\tilde{y} \in Z$  e  $\int_0^T \tilde{y}(t)dt = 0$ . Consideremos  $x(t) = \int_0^t \tilde{y}(s)ds$ . Observe que  $x$  é diferenciável,  $Lx(t) = x'(t) = \tilde{y}(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e

$$\begin{aligned} x(t+T) &= \int_0^{t+T} \tilde{y}(s)ds = \int_0^T \tilde{y}(s)ds + \int_T^{t+T} \tilde{y}(s)ds \\ &= 0 + \int_0^t \tilde{y}(s-T)ds = \int_0^t \tilde{y}(s)ds = x(t), \end{aligned}$$

visto que  $\tilde{y}$  é  $T$ -periódica. Portanto, temos que  $\tilde{y} \in \text{Im } L$  e, consequentemente,

$$\text{Im } L = \left\{ y \in Z : \int_0^T y(t)dt = 0 \right\},$$

permitindo-nos inferir que  $\text{Im } L = \text{Ker } Q$ .

Agora, provemos que  $\text{Im } L$  é um conjunto fechado em  $Z$ . Para isso, tomemos  $y \in \overline{\text{Im } L}$ . Então, existe uma sequência  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Im } L$  tal que

$$y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \quad \text{e} \quad \int_0^T y_n(t)dt = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como a convergência de  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  para  $y$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , é uniforme (uma vez que estamos considerando a norma da convergência uniforme), temos

$$\int_0^T y_n(t)dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^T y(t)dt,$$

donde segue que  $\int_0^T y(t)dt = 0$  e, portanto,  $y \in \text{Im } L$ . Logo,  $\text{Im } L = \overline{\text{Im } L}$ , mostrando que  $\text{Im } L$  é um conjunto fechado. Isso conclui a prova de que  $L$  é um operador de Fredholm.

Para concluir que  $L$  é um operador de Fredholm de índice zero, falta verificar que  $\dim \text{Ker } L = \text{codim } \text{Im } L$ . Pois bem, como  $\text{Im } Q$  é um subespaço não trivial de  $\mathbb{R}$  e  $\dim \mathbb{R} = 1$ , temos que

$$\dim \text{Im } Q = \dim \mathbb{R} = 1.$$

Sabemos, também, que

$$Z = \text{Im } Q \oplus \text{Ker } Q.$$

Pelo fato de que  $\text{Ker } Q = \text{Im } L$ , segue que  $\text{codim } \text{Ker } Q = \text{codim } \text{Im } L$ . Assim, o Teorema do Núcleo e da Imagem nos garante que

$$\text{codim } \text{Im } L = \text{codim } \text{Ker } Q = \dim Z - \dim \text{Ker } Q = \dim \text{Im } Q = 1. \quad (3.3)$$

Por (3.2) e (3.3), concluímos que  $\dim \text{Ker } L = \text{codim } \text{Im } L$ , o que completa a prova.  $\blacksquare$

Fixando  $\lambda \in (0, 1)$ , considere a equação de operadores

$$Lx = \lambda Nx$$

que corresponde a

$$x'(t) = -\lambda\delta(t)x(t) + \lambda p(t) \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n}, \quad t \geq 0. \quad (3.4)$$

**Proposição 3.3.** *Sejam  $p, \delta \in C(\mathbb{R}^+, (0, \infty))$ ,  $\tau \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$  funções  $T$ -periódicas tais que  $p(t) > \delta(t)$ , para  $t \in [0, T]$ . Existem constantes  $A$  e  $B$ , tais que se  $x \in \text{dom } L$  satisfaz (3.4), então*

$$A < x(t) < B, \quad \text{para } t \in [0, T].$$

*Demonstração.* Suponha que  $x(t) \in \text{dom } L$  seja uma solução  $T$ -periódica positiva para a equação (3.4). Como  $x(t)$  é contínua definida em um compacto da reta, existem  $t_m \in [0, T]$  e  $t_M \in [t_m, t_m + T]$  tais que

$$x(t_m) = \min_{t \in [0, T]} x(t) \quad \text{e} \quad x(t_M) = \max_{t \in [0, T]} x(t),$$

pelo Teorema de Weierstrass.

Ademais, note que podemos reescrever a equação (3.4) da seguinte forma

$$x'(t) + \lambda\delta(t)x(t) = \lambda p(t) \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n}, \quad t \geq 0,$$

donde, multiplicando ambos os membros da igualdade acima por  $e^{\lambda \int_0^t \delta(s) ds}$ , obtemos

$$e^{\lambda \int_0^t \delta(s) ds} x'(t) + \lambda e^{\lambda \int_0^t \delta(s) ds} \delta(t)x(t) = \lambda e^{\lambda \int_0^t \delta(s) ds} p(t) \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n},$$

que equivale a

$$\left( x(t) e^{\lambda \int_0^t \delta(s) ds} \right)' = \lambda p(t) e^{\lambda \int_0^t \delta(s) ds} \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n}. \quad (3.5)$$

Integrando a expressão (3.5) com relação a  $t$  de  $t_M - T$  a  $t_M$ , e utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$x(t_M) e^{\lambda \int_0^{t_M} \delta(s) ds} - x(t_M - T) e^{\lambda \int_0^{t_M - T} \delta(s) ds} = \lambda \int_{t_M - T}^{t_M} p(t) e^{\lambda \int_0^t \delta(s) ds} \cdot \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n} dt.$$

Agora, simplificaremos a expressão acima. Note que pelo fato de  $x(t)$  ser  $T$ -periódica e  $t \in [0, T]$  obtemos

$$x(t_M) \left( 1 - e^{-\lambda \int_{t_M - T}^{t_M} \delta(s) ds} \right) = \lambda \int_{t_M - T}^{t_M} p(t) e^{-\lambda \int_t^{t_M} \delta(s) ds} \cdot \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n} dt. \quad (3.6)$$

Ademais, afirmamos que  $\int_{t_M - T}^{t_M} \delta(s) ds = \int_0^T \delta(s) ds$ . De fato, observe que

$$\int_{t_M - T}^{t_M} \delta(s) ds = \int_{t_M - T}^0 \delta(s) ds + \int_0^{t_M} \delta(s) ds.$$

Assim, mostrando que  $\int_{t_M-T}^0 \delta(s)ds = \int_{t_M}^T \delta(s)ds$ , obtemos a validade da afirmação. Com efeito, considere  $g(t) = t - T$ , com  $t \in [0, T]$ . Temos

$$\int_{t_M-T}^0 \delta(s)ds = \int_{g(t_M)}^{g(T)} \delta(s)ds \stackrel{(*)}{=} \int_{t_M}^T \delta(g(s)) \cdot g'(s)ds = \int_{t_M}^T \delta(s-T)ds = \int_{t_M}^T \delta(s)ds,$$

de onde segue que

$$\int_{t_M-T}^{t_M} \delta(s)ds = \int_{t_M}^T \delta(s)ds + \int_0^{t_M} \delta(s)ds = \int_0^T \delta(s)ds,$$

concluindo o desejado. Vale destacar que em  $(*)$  usamos o Teorema de Mudança de Variável.

Portanto, podemos reescrever (3.6) da seguinte forma:

$$x(t_M) \left( 1 - e^{-\lambda \int_0^T \delta(s)ds} \right) = \lambda \int_{t_M-T}^{t_M} p(t) e^{-\lambda \int_t^{t_M} \delta(s)ds} \cdot \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n} dt. \quad (3.7)$$

Como  $n > 0$ , vamos continuar a prova considerando dois casos:  $n > 1$  e  $0 < n \leq 1$ .

Caso 1: Consideremos  $n > 1$ .

Note que para  $u \geq 1$  arbitrário, temos

$$u \leq u^n < 1 + u^n \Rightarrow \frac{u}{1 + u^n} < 1.$$

Agora, se  $0 < u < 1$  então

$$0 < u < 1 < 1 + u^n \Rightarrow \frac{u}{1 + u^n} < 1.$$

Então, para todo  $u > 0$  e  $n > 1$ , deduzimos que

$$\frac{u}{1 + u^n} < 1. \quad (3.8)$$

Voltando na expressão (3.7), utilizando o fato de  $x$  ser uma solução positiva da equação (3.4), a desigualdade verificada em (3.8), o fato de que  $e^{-\lambda \int_t^{t_M} \delta(s)ds} < 1$ , a expressão (3.1), a periodicidade de  $p$ , e a questão de  $t_M \in [0, T]$ , obtemos

$$x(t_M) \left( 1 - e^{-\lambda \int_0^T \delta(s)ds} \right) < \lambda \int_{t_M-T}^{t_M} p(t) e^{-\lambda \int_t^{t_M} \delta(s)ds} dt < \lambda \int_0^T p(t) dt = \lambda \bar{p}T,$$

donde

$$x(t_M) < \frac{\lambda \bar{p}T}{1 - e^{-\lambda \bar{\delta}T}}.$$

Observe que  $f(\lambda) = \frac{\lambda \bar{p}T}{1 - e^{-\lambda \bar{\delta}T}}$  é crescente em  $(0, 1]$ . De fato, se  $\lambda \in (0, 1]$ , então

$$f'(\lambda) = \frac{(1 - e^{-\lambda \bar{\delta}T}) \cdot \bar{p}T + \lambda \bar{p}T \cdot e^{-\lambda \bar{\delta}T} \cdot \bar{\delta}T}{(1 - e^{-\lambda \bar{\delta}T})^2} > 0.$$

Assim, segue que  $f(\lambda) < f(1)$  para todo  $\lambda \in (0, 1)$  e, portanto,

$$x(t_M) < \frac{\bar{p}T}{1 - e^{-\bar{\delta}T}} := B_1.$$

Utilizando argumentos análogos aos anteriores para obter (3.7) - trocando  $t_M$  por  $t_m$ , obtemos

$$x(t_m) \left( 1 - e^{-\lambda \int_0^T \delta(s) ds} \right) = \lambda \int_{t_m-T}^{t_m} p(t) e^{-\lambda \int_t^{t_m} \delta(s) ds} \cdot \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n} dt. \quad (3.9)$$

Seja  $\zeta = \min \left\{ \frac{x(t_m)}{1 + [x(t_m)]^n}, \frac{x(t_M)}{1 + [x(t_M)]^n} \right\}$ . Agora, como  $p(t)$  e  $\delta(t)$  são funções  $T$ -periódicas tais que  $p(t) > \delta(t) > 0$ , então podemos escolher  $\gamma > 1$  tal que

$$p(t) > \gamma \delta(t), \text{ para } t \in [0, T]. \quad (3.10)$$

Note que, para  $n > 1$ ,  $\mu(u) = \frac{u}{1+u^n}$  é uma *single-hump function*<sup>2</sup> (seu ponto de *hump* é  $u_0 = \left( \frac{1}{n-1} \right)^{\frac{1}{n}}$ ). Usando este fato, fazemos a afirmação seguinte.

Afirmção (\*):  $\mu(x(t - \tau(t))) = \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n} \geq \zeta$  para todo  $t \in [t_m - T, t_m]$ .

De fato, pelas definições de  $x(t_m)$  e  $x(t_M)$ , temos que

$$x(t_m) \leq x(t - \tau(t)) \leq x(t_M), \text{ para todo } t \in [t_m - T, t_m]. \quad (3.11)$$

Se  $\zeta = \mu(x(t_m))$ , então  $\mu(x(t_m)) < \mu(x(t_M))$ . Neste caso, temos duas possibilidades: ou  $x(t_m), x(t_M) \in (0, u_0]$ , intervalo no qual  $\mu$  é crescente, ou  $x(t_m) \in (0, u_0]$  e  $x(t_M) \in (u_0, \infty)$ . Analisando a primeira possibilidade, temos, por (3.11), que

$$\zeta = \mu(x(t_m)) \leq \mu(x(t - \tau(t))) \leq \mu(x(t_M)), \text{ para todo } t \in [t_m - T, t_m],$$

provando a afirmação. Agora, analisando a segunda possibilidade, dado  $t_0 \in [t_m - T, t_m]$ , se  $x(t_0 - \tau(t_0)) \in [x(t_m), u_0]$ , então

$$\mu(x(t_0 - \tau(t_0))) \geq \mu(x(t_m)) = \zeta,$$

já que, no intervalo  $[x(t_m), u_0]$ , a função  $\mu$  é crescente. Por outro lado, se  $x(t_0 - \tau(t_0)) \in (u_0, x(t_M)]$ , então

$$\mu(x(t_0 - \tau(t_0))) \geq \mu(x(t_M)) > \mu(x(t_m)) = \zeta,$$

já que, no intervalo  $(u_0, x(t_M)]$ , a função  $\mu$  é decrescente. Em qualquer caso concluímos que  $\mu(x(t_0 - \tau(t_0))) \geq \zeta$ . Logo, podemos inferir que  $\mu(x(t - \tau(t))) \geq \zeta$  para todo  $t \in [t_m - T, t_m]$ .

Supondo, agora, que  $\zeta = \mu(x(t_M))$ , temos  $\mu(x(t_M)) < \mu(x(t_m))$ . Neste caso, também temos duas possibilidades: ou  $x(t_m), x(t_M) \in [u_0, \infty)$ , intervalo no qual  $\mu$  é decrescente, ou  $x(t_m) \in (0, u_0]$  e  $x(t_M) \in (u_0, \infty)$ . Analisando a primeira possibilidade, temos, por (3.11), que

$$\zeta = \mu(x(t_M)) \leq \mu(x(t - \tau(t))) \leq \mu(x(t_m)), \text{ para todo } t \in [t_m - T, t_m],$$

provando a afirmação. Agora, analisando a segunda possibilidade, dado  $t_0 \in [t_m - T, t_m]$ , se  $x(t_0 - \tau(t_0)) \in [x(t_m), u_0]$ , então

$$\mu(x(t_0 - \tau(t_0))) \geq \mu(x(t_m)) > \mu(x(t_M)) = \zeta,$$

já que, no intervalo  $[x(t_m), u_0]$ , a função  $\mu$  é crescente. Por outro lado, se  $x(t_0 - \tau(t_0)) \in (u_0, x(t_M)]$ , então

$$\mu(x(t_0 - \tau(t_0))) \geq \mu(x(t_M)) = \zeta,$$

<sup>2</sup>Uma função  $\mu: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in (0, \infty) \mapsto \mu(u) \in \mathbb{R}$ , é dita **single-hump** se existe  $u_0 \in (0, \infty)$  tal que  $\mu$  é crescente em  $(0, u_0)$ , decrescente em  $(u_0, \infty)$  e tende a zero quando  $u \rightarrow \infty$ . O ponto  $u_0$  é chamado **ponto de hump**.

já que, no intervalo  $(u_0, x(t_M)]$ , a função  $\mu$  é decrescente. Novamente, em qualquer caso concluímos que  $\mu(x(t_0 - \tau(t_0))) \geq \zeta$ . Logo, podemos inferir que  $\mu(x(t - \tau(t))) \geq \zeta$  para todo  $t \in [t_m - T, t_m]$ , encerrando a prova da Afirmação (\*).

Pela Afirmação (\*), por (3.9) e por (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} x(t_m) (1 - e^{-\lambda \bar{\delta} T}) &= \lambda \int_{t_m-T}^{t_m} p(t) e^{-\lambda \int_t^{t_m} \delta(s) ds} \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n} dt \\ &\geq \lambda \zeta \int_{t_m-T}^{t_m} p(t) e^{-\lambda \int_t^{t_m} \delta(s) ds} dt \\ &> \lambda \zeta \int_{t_m-T}^{t_m} \gamma \delta(t) e^{-\lambda \int_t^{t_m} \delta(s) ds} dt = \gamma \zeta (1 - e^{-\lambda \bar{\delta} T}), \end{aligned}$$

de onde segue que

$$x(t_m) > \gamma \zeta. \quad (3.12)$$

Devemos analisar as duas possibilidades para  $\zeta$ . Se  $\zeta = \frac{x(t_m)}{1 + [x(t_m)]^n}$ , então voltando em (3.12) tem-se

$$x(t_m) > \gamma \frac{x(t_m)}{1 + [x(t_m)]^n} \Rightarrow 1 + [x(t_m)]^n > \gamma \Rightarrow x(t_m) > (\gamma - 1)^{\frac{1}{n}} := A_{11}.$$

Por outro lado, supondo que  $\zeta = \frac{x(t_M)}{1 + [x(t_M)]^n}$ , como  $\mu(u) = \frac{u}{1 + u^n}$  é uma *single-hump function* e seu ponto de *hump* é  $u_0 = \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ , uma das possibilidades a seguir deve ocorrer:

$$x(t_m) \leq u_0 < x(t_M) < B_1 \quad \text{ou} \quad u_0 < x(t_m) < x(t_M) < B_1.$$

De fato, supondo  $\zeta = \frac{x(t_M)}{1 + [x(t_M)]^n}$ , temos que  $\mu(x(t_M)) < \mu(x(t_m))$ . Como  $x(t_M) > x(t_m)$ ,  $\mu$  é crescente em  $(0, u_0)$  e decrescente em  $(u_0, \infty)$ , devemos ter uma das alternativas:

$$x(t_m) \in (0, u_0] \text{ e } x(t_M) \in (u_0, \infty) \Rightarrow x(t_m) \leq u_0 < x(t_M) < B_1$$

ou

$$x(t_m), x(t_M) \in (u_0, \infty) \Rightarrow u_0 < x(t_m) < x(t_M) < B_1.$$

Em ambos os casos acima, temos:

$$x(t_m) > \gamma \frac{x(t_M)}{1 + [x(t_M)]^n} > \gamma \frac{B_1}{1 + B_1^n} := A_{12},$$

uma vez que a função  $\mu$  é decrescente em  $(u_0, \infty)$  e  $u_0 < x(t_M) < B_1$ .

Considerando

$$A_1 = \min\{A_{11}, A_{12},\} \quad (3.13)$$

obtemos

$$A_1 < x(t) < B_1,$$

para todo  $t \in [0, T]$ .

**Caso 2:** Consideremos  $0 < n \leq 1$ .

Neste caso, é fácil verificar que a função  $\mu(u) = \frac{u}{1+u^n}$  é crescente em  $(0, \infty)$ . Com efeito,

$$\mu'(u) = \frac{(1 + u^n) \cdot nu^{n-1} - u^n \cdot nu^{n-1}}{(1 + u^n)^2} = \frac{1}{(1 + u^n)^2} > 0,$$

para todo  $u > 0$ .

Assim, pelo modo como definimos  $x(t_M)$  e pelo fato de  $\mu(u) = \frac{u}{1+u^n}$  ser crescente em  $(0, \infty)$ , implicando  $\mu(x(t_M)) \geq \mu(x(t - \tau(t)))$  para todo  $t \in [t_M - T, t_M]$ , segue de (3.7) que

$$\begin{aligned} x(t_M) \left(1 - e^{-\lambda \bar{\delta} T}\right) &= \lambda \int_{t_M-T}^{t_M} p(t) e^{-\lambda \int_t^{t_M} \delta(s) ds} \cdot \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n} dt \\ &\leq \lambda \int_{t_M-T}^{t_M} p(t) e^{-\lambda \int_t^{t_M} \delta(s) ds} \cdot \frac{x(t_M)}{1 + [x(t_M)]^n} dt < \lambda \int_{t_M-T}^{t_M} p(t) \frac{x(t_M)}{1 + [x(t_M)]^n} dt \\ &= \lambda \int_0^T p(t) \frac{x(t_M)}{1 + [x(t_M)]^n} dt = \lambda \bar{p} T \frac{x(t_M)}{1 + [x(t_M)]^n} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$1 + [x(t_M)]^n < \frac{\lambda \bar{p} T}{1 - e^{-\lambda \bar{\delta} T}} < \frac{\bar{p} T}{1 - e^{-\bar{\delta} T}},$$

donde extraímos que

$$x(t_M) < \left( \frac{\bar{p} T}{1 - e^{-\bar{\delta} T}} - 1 \right)^{\frac{1}{n}} := B_2. \quad (3.14)$$

Utilizando argumentos análogos aos anteriores - trocando  $t_M$  por  $t_m$  - e a relação (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} x(t_m) \left(1 - e^{-\lambda \bar{\delta} T}\right) &= \lambda \int_{t_m-T}^{t_m} p(t) e^{-\lambda \int_t^{t_m} \delta(s) ds} \cdot \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n} dt \\ &\geq \lambda \int_{t_m-T}^{t_m} p(t) e^{-\lambda \int_t^{t_m} \delta(s) ds} \cdot \frac{x(t_m)}{1 + [x(t_m)]^n} dt \\ &> \lambda \int_{t_m-T}^{t_m} \gamma \delta(t) e^{-\lambda \int_t^{t_m} \delta(s) ds} \cdot \frac{x(t_m)}{1 + [x(t_m)]^n} dt \\ &= \gamma \int_{t_m-T}^{t_m} \lambda \delta(t) e^{-\lambda \int_t^{t_m} \delta(s) ds} \cdot \frac{x(t_m)}{1 + [x(t_m)]^n} dt \\ &= \gamma \cdot \frac{x(t_m)}{1 + [x(t_m)]^n} \left(1 - e^{-\lambda \bar{\delta} T}\right), \end{aligned}$$

donde segue que

$$x(t_m) > (\gamma - 1)^{\frac{1}{n}} = A_{11}.$$

Com isso, tomando  $A = A_1$ , em que  $A_1$  foi definido em (3.13), e  $B = \max\{B_1, B_2\}$ , concluimos que

$$A < x(t) < B,$$

para  $n > 0$  e  $t \in [0, T]$ . Isso completa a prova. ■

Seja  $\Omega = \{x \in X : A < x(t) < B\}$ . Então,  $\Omega$  é um subconjunto aberto de  $X$  e  $\bar{\Omega} = \{x \in X : A \leq x(t) \leq B\}$ . Na sequência, provaremos que  $N$  é L-compacto em  $\bar{\Omega}$ .

**Proposição 3.4.** *O operador  $N$  é L-compacto em  $\bar{\Omega}$ .*

*Demonstração.* Observe que  $QN(\bar{\Omega})$  é limitado. Tomando  $x \in \bar{\Omega}$  arbitrário, temos

$$\begin{aligned} |QN(x)| &= \left| \frac{1}{T} \int_0^T N(x) dt \right| \leq \frac{1}{T} \int_0^T \delta(t) |x(t)| dt + \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \left| \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n} \right| dt \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{T} \int_0^T p(t) |x(t)| dt + \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \left| \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n} \right| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|x\|\bar{p} + \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \left| \frac{x(t - \tau(t))}{1 + [x(t - \tau(t))]^n} \right| dt \stackrel{(\star\star)}{<} \|x\|\bar{p} + \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \|x\| dt \\ &= \|x\|\bar{p} + \|x\|\bar{p} = 2\|x\|\bar{p}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|QN(x)| < 2\|x\|\bar{p},$$

mostrando que  $QN(\bar{\Omega})$  é limitado. Vale observar que em  $(\star)$  utilizamos o fato de  $p(t) > \delta(t) > 0$ , para  $t \in [0, T]$ . Ainda,  $(\star\star)$  ocorre pois como  $x$  e  $\tau$  são funções  $T$ -periódicas positivas, segue que

$$|x(t - \tau(t))| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| = \sup_{t \in [0, T]} |x(t)| = \|x\|$$

e

$$1 + [x(t - \tau(t))]^n > 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + [x(t - \tau(t))]^n} < 1,$$

para todo  $t \in [0, T]$ .

Afirmção: A inversa do operador  $L$ , restrito a  $\text{dom } L \cap \text{Ker } P$ ,  $K_P: \text{Im } L \rightarrow \text{dom } L \cap \text{Ker } P$ , é dada por

$$K_P x = \int_0^t x(s) ds - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t x(s) ds dt.$$

De fato, observe que como  $L$  é um operador de Fredholm de índice zero (veja Proposição 3.2), então  $\text{Im } L = \text{Ker } Q$ . Mostremos, agora, que  $\text{Im } L = \text{Im}(Id - Q)$ . Com efeito, tome  $y \in \text{Im}(Id - Q)$  arbitrário. Assim, existe  $x \in Z$  tal que  $(Id - Q)x(t) = y(t)$ , com  $t \in [0, T]$ . Ou seja,  $x(t) - Q(x(t)) = y(t)$ . Mas, como  $\text{Ker } Q = \text{Im } L$  e  $Q$  é uma projeção, segue que

$$Q(y(t)) = Q(x(t) - Q(x(t))) = Q(x(t)) - Q^2(x(t)) = 0,$$

donde  $Q(y(t)) = 0$  e, portanto,  $y(t) \in \text{Ker } Q = \text{Im } L$ .

Por outro lado, se  $y \in \text{Im } L$ , então existe  $x \in \text{dom } L$  tal que  $L(x(t)) = y(t)$ , ou seja,  $x'(t) = y(t)$ . Novamente pela igualdade  $\text{Ker } Q = \text{Im } L$ , temos  $Q(x'(t)) = 0$  e, por conseguinte,  $Q(y(t)) = 0$ . Como  $Q$  é projeção, temos que

$$Q(y(t)) = 0 = Q(x(t)) - Q^2(x(t)),$$

ou seja,  $y(t) = x(t) - Q(x(t)) = (Id - Q)x(t)$ . Portanto,  $y \in \text{Im}(Id - Q)$ , e assim  $\text{Im } L = \text{Im}(Id - Q)$ .

Com isso, podemos dizer que  $K_P$  está definida em  $\text{Im } L = \text{Im}(Id - Q)$ . Assim, se  $y \in \text{Im } L$ , então temos que

$$y(t) = L(x(t)) = x'(t) \quad \text{e} \quad y(t) = x(t) - Q(x(t)),$$

para  $x \in \text{dom } L$ .

Como  $x'$  é contínua, uma vez que  $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , então  $x' = y$  é integrável. Sendo assim, integrando de 0 a  $t$  a expressão  $y(s) = x(s) - Q(x(s))$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t y(s) ds &= \int_0^t x(s) ds - \int_0^t Q(x(s)) ds = \int_0^t x(s) ds - \int_0^t \left[ \frac{1}{T} \int_0^T x(s) dt \right] ds \\ &= \int_0^t x(s) ds - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t x(s) ds dt. \end{aligned}$$

Concluimos assim que, para  $z \in \text{Im } L$  arbitrário, tem-se

$$K_P(z(t)) = \int_0^t z(s) ds - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t z(s) ds dt.$$

Note que  $K_P(L(z(t))) = z(t)$ , o que conclui a prova da Afirmação 1.

Agora, devemos verificar a compacidade do operador  $K_{P,Q}N$ . Como  $K_{P,Q}N = K_P(I - Q)N$ , então para  $x \in \overline{\Omega}$  e pela expressão da inversa  $K_P$ , obtemos

$$K_P(I - Q)Nx = K_PNx - K_PQNx. \quad (3.15)$$

Analisemos os termos acima individualmente. Com efeito:

$$K_PNx(t) = \int_0^t Nx(s)ds - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t Nx(s)dsdt \quad (3.16)$$

e

$$\begin{aligned} K_PQNx(t) &= \int_0^t QNx(s)ds - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t QNx(s)dsdt \\ &= \int_0^t \frac{1}{T} \int_0^T Nx(s)dsdw - \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \int_0^t \frac{1}{T} \int_0^T Nx(s)dsdw \right] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T Nx(s)ds \int_0^t dw - \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{T} \int_0^T Nx(s)ds \int_0^t dw \right] dt \\ &= \frac{t}{T} \int_0^T Nx(s)ds - \frac{1}{T^2} \int_0^T Nx(s)ds \int_0^T tdt \\ &= \frac{t}{T} \int_0^T Nx(s)ds - \frac{1}{2} \int_0^T Nx(s)ds \\ &= \left( \frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right) \int_0^T Nx(s)ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$K_{P,Q}Nx(t) = \left( \frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right) \int_0^T Nx(s)ds. \quad (3.17)$$

Substituindo as expressões (3.16) e (3.17) em (3.15), concluímos que

$$K_P(I - Q)Nx(t) = \int_0^t Nx(s)ds - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t Nx(s)dsdt - \left( \frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right) \int_0^T Nx(s)ds,$$

e assim vemos que o operador  $K_{P,Q}N$  é contínuo.

Seja  $\Lambda$  um subconjunto de  $\overline{\Omega}$  e seja  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de funções em  $\Lambda$ . A fim de mostrar que  $K_{P,Q}N$  é um operador compacto, devemos provar que existe uma subsequência  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\{K_{P,Q}Nx_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  é convergente. Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, é suficiente mostrar que a sequência de funções  $\{K_{P,Q}Nx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é equicontínua e uniformemente limitada. Porém, a equicontinuidade e a limitação uniforme de  $\{K_{P,Q}Nx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  seguem da continuidade de  $K_{P,Q}N$  e da definição de  $\overline{\Omega}$ . Portanto,  $K_{P,Q}N$  é um operador compacto e consequentemente  $N$  é um operador  $L$ -compacto em  $\overline{\Omega}$ . ■

**Proposição 3.5.** *Suponha que as hipóteses das Proposições 3.2, 3.3 e 3.4 estejam satisfeitas. Então:*

- (i) para  $\lambda \in (0, 1)$  e  $x \in \partial\Omega \cap \text{dom } L$ , tem-se  $Lx \neq \lambda Nx$ ;
- (ii) para  $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker } L$ , tem-se  $QNx \neq 0$ ;
- (iii)  $d(QN|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \Omega \cap \text{Ker } L, 0) \neq 0$ .



*Demonstração.* (i): Suponha que  $Lx = \lambda Nx$ , para  $\lambda \in (0, 1)$  e  $x \in \partial\Omega \cap \text{dom } L$ . Como  $p(t) > \delta(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , a Proposição 3.3 nos garante que existem constantes  $A$  e  $B$  tal que  $A < x < B$ . Assim, tem-se que  $x \in \Omega$ . Pelo fato de  $\Omega$  ser aberto, temos que  $\Omega = \text{int}\Omega$  e, portanto,  $x \in \text{int}\Omega$ , donde segue  $x \notin \partial\Omega$ . Isso é uma contradição, pois  $x \in \partial\Omega \cap \text{dom } L$  por hipótese. Assim, temos que  $Lx \neq \lambda Nx$  para  $\lambda \in (0, 1)$  e  $x \in \partial\Omega \cap \text{dom } L$ .

(ii): Para esse caso, observe que  $\partial\Omega \cap \text{Ker } L = \{A, B\}$ , uma vez que  $\text{Ker } L$  é constituído por funções constantes. Logo, devemos verificar que  $QN(A) \neq 0$  e  $QN(B) \neq 0$ . Note que

$$\begin{aligned} QN(A) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[ -\delta(t)A + p(t) \frac{A}{1+A^n} \right] dt = \frac{1}{T} \int_0^T -\delta(t)A dt + \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \frac{A}{1+A^n} dt \\ &= -A\bar{\delta} + \frac{A}{1+A^n} \bar{p} = A\bar{\delta} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\delta}} \frac{1}{1+A^n} - 1 \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$QN(A) = A\bar{\delta} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\delta}} \frac{1}{1+A^n} - 1 \right). \quad (3.18)$$

Ainda, como  $p(t) > \gamma\delta(t) > 0$  para todo  $t \in [0, T]$  (veja a prova da Proposição 3.3, relação (3.10)), então

$$\frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt > \gamma \frac{1}{T} \int_0^T \delta(t) dt,$$

ou seja,  $\bar{p} > \gamma\bar{\delta}$  e, portanto,

$$\frac{\bar{p}}{\bar{\delta}} > \gamma.$$

Voltando em (3.18), obtemos

$$QN(A) = A\bar{\delta} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\delta}} \frac{1}{1+A^n} - 1 \right) > QN(A) = A\bar{\delta} \left( \frac{\gamma}{1+A^n} - 1 \right) \geq 0,$$

onde a ultima desigualdade se deve ao seguinte fato:

$$(\gamma - 1)^{\frac{1}{n}} \geq A \Rightarrow \gamma - 1 \geq A^n \Rightarrow \frac{\gamma}{1+A^n} \geq 1.$$

Com isso,  $QN(A) > 0$  e, portanto,  $QN(A) \neq 0$ .

Agora, para  $x = B$ , devemos considerar dois casos, a saber:  $n > 1$  e  $0 < n \leq 1$ . Para  $n > 1$ , temos que

$$QN(B) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ -\delta(t)B + p(t) \frac{B}{1+B^n} \right] dt = -B\bar{\delta} + \frac{B}{1+B^n} \bar{p} < -B\bar{\delta} + \bar{p},$$

uma vez que  $0 < B < 1 + B^n$  e, portanto,  $\frac{B}{1+B^n} \leq 1$ . Além disso, como  $B = \max\{B_1, B_2\}$ ,

onde  $B_1 = \frac{\bar{p}T}{1 - e^{-\bar{\delta}T}}$ , tem-se

$$-B\bar{\delta} + \bar{p} \leq -B_1\bar{\delta} + \bar{p} = \left( -\frac{\bar{p}T}{1 - e^{-\bar{\delta}T}} \bar{\delta} \right) + \bar{p} = \bar{p} \left( 1 - \frac{\bar{\delta}T}{1 - e^{-\bar{\delta}T}} \right) \stackrel{(*)}{<} 0,$$

onde  $(*)$  ocorre pois  $\frac{\bar{\delta}T}{1 - e^{-\bar{\delta}T}} > 1$ . Sendo assim,

$$QN(B) < 0, \text{ para } n > 1.$$

Ademais, para  $0 < n \leq 1$ , temos

$$QN(B) = -B\bar{\delta} + \frac{B}{1+B^n}\bar{p} = B\bar{\delta} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\delta}} \frac{1}{1+B^n} - 1 \right) \leq B\bar{\delta} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\delta}} \frac{1}{1+B_2^n} - 1 \right), \quad (3.19)$$

onde a desigualdade ocorre pelo fato de  $B = \max\{B_1, B_2\}$ . Ainda,

$$\left( \frac{\bar{p}T}{1-e^{-\bar{\delta}T}} - 1 \right)^{\frac{1}{n}} = B_2 \Rightarrow 1+B_2^n = \frac{\bar{p}T}{1-e^{-\bar{\delta}T}}.$$

Voltando em (3.19),

$$QN(B) \leq B\bar{\delta} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\delta}} \frac{1}{1+B_2^n} - 1 \right) = B\bar{\delta} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\delta}} \frac{1-e^{-\bar{\delta}T}}{\bar{p}T} - 1 \right) = B\bar{\delta} \left( \frac{1-e^{-\bar{\delta}T}}{\bar{\delta}T} - 1 \right) < 0,$$

donde segue que  $QN(B) < 0$ , e assim  $QN(B) \neq 0$  para  $0 < n \leq 1$ . Vale observar que a ultima desigualdade segue do fato de  $\frac{1-e^{-\bar{\delta}T}}{\bar{\delta}T} < 1$ .

Sendo assim, concluímos que  $QNx \neq 0$  para  $x \in \partial\Omega \cap \text{dom } L$ .

(iii): Considere  $H: \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação contínua dada por

$$H(x, \beta) = -\beta \left( x - \frac{A+B}{2} \right) + (1-\beta)QNx.$$

Note que  $0 \notin H((\partial\Omega \cap \text{Ker } L) \times [0, 1])$ . Primeiro, observamos que  $\bar{\Omega} \cap \text{Ker } L = [A, B]$ . Com efeito,  $[A, B] = \bar{\Omega} \subset \bar{\Omega} \cap \text{Ker } L \subset \bar{\Omega} = [A, B]$ . Daí,  $\partial\Omega \cap \text{Ker } L = \{A, B\}$ .

Dado  $\beta \in [0, 1]$ , temos

$$H(A, \beta) = -\beta \left( A - \frac{A+B}{2} \right) + (1-\beta)QN(A) \stackrel{(*)}{>} -\beta \left( \frac{A-B}{2} \right) > 0, \quad (3.20)$$

onde em  $(*)$  usamos o fato de  $QN(A) > 0$ , e a ultima desigualdade se deve ao fato de que

$$A < B \Rightarrow -\beta \left( \frac{A-B}{2} \right) > 0.$$

Ainda, utilizando argumentos similares, e atentando para o fato de  $QN(B) < 0$ , temos

$$H(B, \beta) < 0. \quad (3.21)$$

Sendo assim, podemos concluir que, de fato,  $0 \notin H((\partial\Omega \cap \text{Ker } L) \times [0, 1])$ , pois caso contrário teríamos  $H(A, \beta) = 0 = H(B, \beta)$  para todo  $\beta \in [0, 1]$ , o que vimos não ocorrer por (3.20) e (3.21).

Como

$$H(x, 0) = QNx \quad \text{e} \quad H(x, 1) = -I + \frac{A+B}{2},$$

pela Observação 2.3 e pelo Corolário 2.5, obtemos

$$\begin{aligned} d(QN|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \Omega \cap \text{Ker } L, 0) &= d(H(\cdot, 0), \Omega \cap \text{Ker } L, 0) = d(H(\cdot, 1), \Omega \cap \text{Ker } L, 0) \\ &= d\left(-I + \frac{A+B}{2}, \Omega \cap \text{Ker } L, 0\right) = 1 \neq 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$d(QN|_{\Omega \cap \text{Ker } L}, \Omega \cap \text{Ker } L, 0) \neq 0,$$

o que conclui a prova. ■

Encerramos este artigo apresentando o resultado principal, a saber, o resultado que garante a existência de uma solução periódica positiva para o modelo de Mackey-Glass.

**Teorema 3.6.** *Sejam  $\delta, p \in C(\mathbb{R}^+, (0, \infty))$  e  $\tau \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$  funções  $T$ -periódicas, e  $n$  uma constante positiva. Ainda, suponha que*

$$p(t) > \delta(t), \text{ para } t \in [0, T].$$

*Então, a equação (1.2) sujeita à condição inicial (1.3) possui pelo menos uma solução  $T$ -periódica positiva no conjunto  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Pelas Proposições 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5, temos que as condições do Teorema 2.10 estão satisfeitas. Logo, a equação (1.2) possui pelo menos uma solução  $T$ -periódica positiva no conjunto  $\Omega$ . ■

**Agradecimentos:** Primeiramente, agradeço a Deus pela força a cada minuto de apreensão; a Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso pela amizade, incentivo, por sempre acreditar que eu posso ir além e por me ajudar com diversas questões que perpassam o âmbito acadêmico, tornando-se um exemplo de pessoa pra mim. Por isso, sou extremamente grato. Por fim, agradeço a FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo suporte financeiro.

*Abstract: In this work we show the applicability of Mawhin's coincidence degree theory to guarantee the existence of a positive periodic solution for the model of hematopoiesis proposed by mathematicians Michael Mackey and Leon Glass.*

*Keywords: Functional Differential Equations; Mawhin's coincidence degree theory; Functional Analysis; Mackey-Glass model.*

## Referências Bibliográficas

- [1] BERESTYCKI, H. *Méthodes topologiques et problèmes aux limites non linéaires*. Tese (Doctorat en Mathématiques) – Université Paris VI – Université Pierre et Marie Curie, 1975.
- [2] BREZIS, H.; CIARLET, P. G.; LIONS, J. L. *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*. [S.l.]: Dunod Paris, 1999. v. 91.
- [3] FONSECA, I.; GANGBO, W. *Degree theory in analysis and applications*. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [4] GAINES, R. E.; MAWHIN, J. *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations*. 1. ed. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1977.
- [5] HALE, J. K.; LUNEL, S. M. V. *Introduction to functional differential equations*. 1. ed. New York: Springer-Verlag New York, 1991.
- [6] SOUZA, C. S. *Existência de soluções periódicas e permanência de soluções de equações diferenciais funcionais com retardo*. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), São José do Rio Preto, 2018.
- [7] WU, X. M.; LI, J. W.; ZHOU, H. Q. A necessary and sufficient condition for the existence of positive periodic solutions of a model of hematopoiesis. *Computer & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 54, n. 6, p. 840-849, 2007.

# Noções da Geometria Hiperbólica

Maria Júlia Fassis<sup>†</sup>

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

**Resumo:** A Geometria é um importante ramo da Matemática e, assim como outras vertentes, possui algumas ramificações, dentre as quais a mais conhecida é a Geometria Euclidiana. Porém, existem também outros tipos de geometrias como, por exemplo, a Geometria Hiperbólica que será nosso objeto de estudo nesse artigo. Além disso, para mostrar alguns de seus resultados, apresentaremos e utilizaremos o Modelo do Disco de Poincaré.

**Palavras-chave:** geometria hiperbólica; Disco de Poincaré; Quadrilátero de Saccheri; curvatura; áreas hiperbólicas

## 1 Introdução

A geometria euclidiana é construída a partir de cinco postulados elaborados por Euclides de Alexandria (265 a. C.), são eles:

1. Traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
2. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.
3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
4. Que todos os ângulos retos são iguais.
5. Que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos (veja [2]).

O surgimento das geometrias não euclidianas deve muito ao fato de diversos matemáticos não terem tido sucesso em suas diversas tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides após se incomodarem com sua maior complexidade em relação aos demais postulados.

Apesar de vários matemáticos terem contribuído com ideias não euclidianas, o crédito pelo surgimento da geometria não euclidiana pertence a Lobachevsky por ter publicado, em 1829, um artigo intitulado “Sobre os Princípios da Geometria”, que marca a origem oficial da geometria não euclidiana. Alguns anos depois, em 1868, Beltrami conseguiu definitivamente provar que não é possível provar o quinto postulado de Euclides (veja [3]).

Nesse artigo, vamos conhecer o Modelo do Disco de Poincaré utilizado para se trabalhar a geometria hiperbólica e alguns resultados dessa geometria.

## 2 Geometria Hiperbólica e o Modelo do Disco de Poincaré

A geometria hiperbólica é construída a partir dos quatro primeiros postulados de Euclides, dos quatro primeiros grupos de axiomas de Hilbert (veja [5]) e do seguinte axioma que substitui o quinto postulado de Euclides:

<sup>†</sup>Bolsista FAPESP, processo nº 2021/02517-7

**Axioma de Bolyai-Lobatchevsky / Postulado Hiperbólico:**

“Por um ponto exterior a uma reta passa mais do que uma paralela.”

Utilizando [4], para trabalhar com a Geometria Hiperbólica precisamos de modelos para um sistema axiomático que podem ser obtidos associando interpretações aos termos indefinidos e convertendo os axiomas em afirmações verdadeiras. Dessa forma, qualquer exemplo que satisfaça o conjunto de axiomas será denominado de modelo para o sistema axiomático.

Veremos o *Modelo do Disco de Poincaré*, o qual, dados um ponto  $O$  e um valor real e positivo  $r$  no plano euclidiano  $E$ , é definido como o conjunto de todos os pontos pertencentes a  $E$  que são restritamente interiores à circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ . O denotamos por  $D_P = \{X \in E \mid d(X, O) < r\}$ , sendo  $d$  a distância euclidiana.

**Definição 2.1** (Reta Hiperbólica no Disco de Poincaré). Sejam dois pontos  $A$  e  $B$  de  $D_P$ . Se  $A$ ,  $B$  e  $O$  forem colineares (no sentido euclidiano), então a *reta hiperbólica de primeiro tipo* que passa por  $A$  e  $B$  será o diâmetro da circunferência. Caso contrário, a *reta hiperbólica de segundo tipo* que passa por  $A$  e  $B$  será a interseção de  $D_P$  com a circunferência que passa por  $A$  e  $B$  e intersecta a fronteira do Disco de Poincaré ortogonalmente.

A construção dessas duas retas hiperbólicas pode ser feita da seguinte maneira, considere  $\gamma$  a fronteira de  $D_P$ :

1º tipo: Se  $A$ ,  $B$  e  $O$  são colineares, então a reta hiperbólica  $AB$  será a interseção entre a reta euclidiana  $AB$  e  $D_P$ .

2º tipo: Se  $A$ ,  $B$  e  $O$  não são colineares, usaremos a figura abaixo para auxiliar nossa construção. Considere a reta euclidiana  $AB$  e a semirreta euclidiana  $OA$ . Traçamos a perpendicular  $p$  à  $OA$  pelo ponto  $A$  e marcamos  $C$  uma de suas interseções com  $\gamma$ . Ainda, considere a semirreta euclidiana  $OC$ . Traçamos a perpendicular  $t$  à  $OC$  pelo ponto  $C$ . Agora, traçamos a mediatriz  $m$  do segmento euclidiano  $AA'$  e a mediatriz  $n$  do segmento euclidiano  $AB$ . Seja  $O' = m \cap n$ , traçamos a circunferência  $\beta$  de centro  $O'$  e raio  $O'A$ . Então a reta hiperbólica  $AB$  será a interseção entre a  $\beta$  e  $D_P$ .

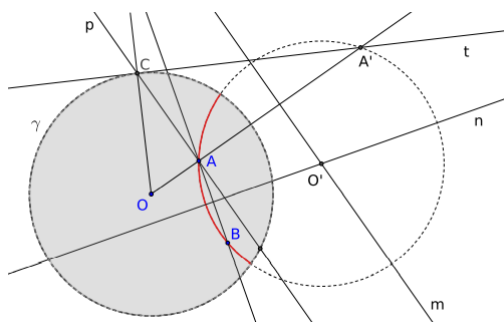


Figura 5.1: Reta Hiperbólica do 2º Tipo no Disco de Poincaré

[Fonte: Referência [4]]

As retas hiperbólicas do Disco de Poincaré são também chamadas de h-retas e seus pontos de interseção com a fronteira de  $D_P$  são denominados de *pontos ideais* da h-reta.

Cada h-reta  $s$  determina dois semiplanos em  $D_P$ . São eles:

- \* H-Retas do 1º tipo: Como a h-reta  $s$  determina uma reta  $r$  no modelo euclidiano que contém o centro do Disco, então  $s$  determina os semiplanos definidos pela interseção entre os semiplanos euclidianos por  $r$  com o interior do Disco.

- \* H-Retas do 2º tipo: A circunferência que originou essa h-reta  $s$  divide o plano euclidiano em duas regiões, a interna e a externa à ela, ambas excluindo a fronteira do Disco de Poincaré. Assim, os semiplanos determinados por  $s$  serão as interseções entre o interior e exterior da circunferência com o interior de  $D_P$ .

**Definição 2.2** (Distâncias no Disco de Poincaré). Considere  $A, B \in D_P$ , a distância  $d$  entre  $A$  e  $B$  é definida por  $d(A, B) = \left| \ln \frac{(AP)(BQ)}{(AQ)(BP)} \right|$ , onde  $P$  e  $Q$  são os pontos ideais da h-reta  $AB$  e  $AP$ ,  $AQ$ ,  $BP$  e  $BQ$  são as medidas de comprimento euclidianas dos segmentos  $AP$ ,  $AQ$ ,  $BP$  e  $BQ$ .

**Teorema 2.3.** Dados  $A, B \in D_P$ , a distância entre  $A$  e  $B$  satisfaz as propriedades:

- (i)  $d(A, B) \geq 0$  e  $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ .
- (ii)  $d(A, B) = d(B, A)$ .

**Prova:** Dados  $A, B \in D_P$ , temos que:

- (i)  $d(A, B) \geq 0$  e  $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$  segue da definição.

- (ii)  $d(A, B) = d(B, A)$  segue de  $d(B, A) = \left| \ln \frac{(BP)(AQ)}{(BQ)(AP)} \right| = \left| \ln \frac{1}{\frac{(AP)(BQ)}{(AQ)(BP)}} \right| = \left| (-1) \ln \frac{(AP)(BQ)}{(AQ)(BP)} \right| = \left| \ln \frac{(AP)(BQ)}{(AQ)(BP)} \right| = d(A, B)$ . ■

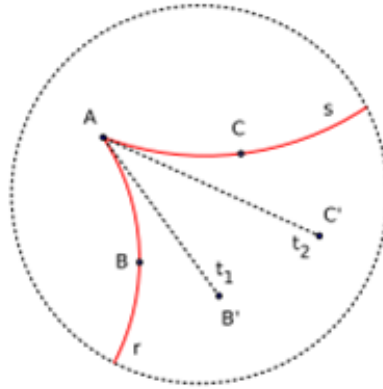


Figura 5.2: Ângulos Hiperbólicos no Disco de Poincaré  
[Fonte: Referência [4]]

**Definição 2.4** (Medidas de Ângulos no Disco de Poincaré). A medida do ângulo entre duas semirretas hiperbólicas é a medida (no sentido euclidiano) do ângulo formado pelas semirretas euclidianas de ponto inicial comum em  $A$ , tangentes às semirretas hiperbólicas.

A medida de ângulo hiperbólico no Disco de Poincaré será feito seguindo o procedimento abaixo, use a Figura 5.2:

- (a) Considere as semirretas hiperbólicas  $r$  e  $s$  com mesmo extremo  $A$ .
- (b) Considere o ângulo  $B\hat{A}C$  determinado por  $r$  e  $s$ .

- (c) Considere as semirretas euclidianas  $t_1$  e  $t_2$  tangentes as h-retas  $r$  e  $s$  no ponto  $A$ . Para construir  $t_1$  e  $t_2$ , devemos traçar para cada uma delas a reta perpendicular ao raio da circunferência que determinou  $r$  e  $s$  pelo ponto  $A$ , determinando assim as retas suportes para as semirretas tangentes à circunferência.
- (d) Definimos a medida de  $\hat{BAC} = \hat{B'AC'}$ , onde  $\hat{B'AC'}$  é encontrado no modelo euclidiano e com auxílio de transferidor. Assim, os pontos  $B'$  e  $C'$  são dois pontos distintos quaisquer de  $A$  em  $t_1$  e  $t_2$ .

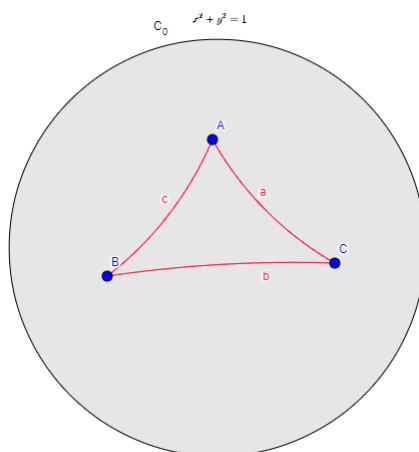


Figura 5.3: Triângulo Hiperbólico no Disco de Poincaré  
[Imagem construída pela autora]

O modelo do Disco de Poincaré preserva as medidas de ângulo entre as tangente às semicircunferências, por isso, ele é caracterizado como *conforme*. Observando um triângulo hiperbólico, como na Figura 5.3, notamos claramente que seus ângulos internos são menores que dos seus correspondentes euclidianos.

Agora, com auxílio das referências [7] e [6], podemos estudar alguns resultados da Geometria Hiperbólica, utilizando o Modelo do Disco de Poincaré para ilustrá-los.

Porém, vale também revisar alguns conceitos da hipérbole, a qual é definida como o lugar geométrico dos pontos de um plano, cuja diferença em módulo das distâncias a dois pontos fixos distintos (chamados focos  $F_1$  e  $F_2$ ) desse plano, é constante e menor que essa distância.

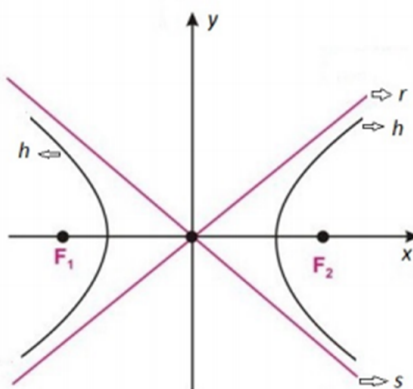


Figura 5.4: Retas assíntotas a Hipérbole  
[Fonte: Referência [7]]

Note que se tomamos duas retas  $r$  e  $s$  assíntotas da hipérbole  $h$ , podemos perceber que, diferentemente das paralelas da geometria euclidiana que mantêm sempre a mesma distância entre si, as assíntotas são paralelas também a hipérbole, pois não se intersectam com ela, porém a distância entre elas diminui conforme  $x$  tende a  $-\infty$  ou  $\infty$ . Assim, essa é uma forma de encontrar duas paralelas na Geometria Euclidiana e que essa abordagem de paralelismo foge à nossa intuição.

**Definição 2.5.** A um quadrilátero  $ABCD$ , como o da Figura abaixo, em que os ângulos adjacentes a base  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são retos e os dois lados  $AC$  e  $BD$  são congruentes damos o nome de *Quadrilátero de Saccheri*.

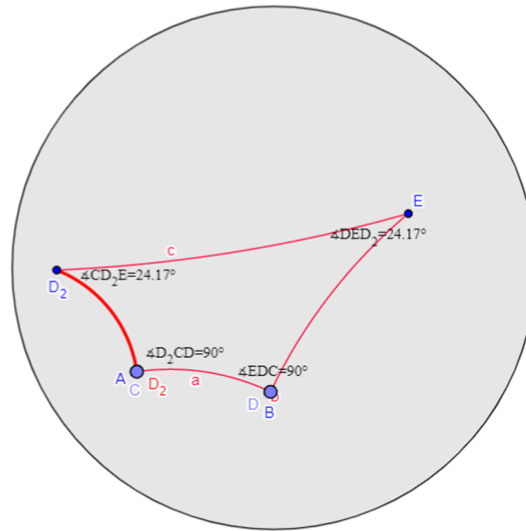


Figura 5.5: Quadrilátero de Saccheri  
[Imagem construída pela autora]

Existem algumas propriedades do quadrilátero de Saccheri que podem ser provadas facilmente por congruência de triângulos, são elas:

- Os ângulos adjacentes ao topo  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  são congruentes.
- A reta que liga os pontos médios da base e do topo é perpendicular a ambos.
- As diagonais  $AD$  e  $BC$  são congruentes.

Se no quadrilátero de Saccheri assumirmos válido o axioma euclidiano das paralelas de Hilbert, então os ângulos adjacentes ao topo,  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$ , devem ser iguais a  $90^\circ$ . Caso contrário, eles podem ser ambos agudos ou ambos obtusos. Saccheri, em busca de uma contradição, optou por negar esse axioma e, então, nomeou as seguintes três hipóteses:

- Hipótese do Ângulo Reto: Nesse caso,  $\hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ , logo,  $AB = CD$ .
- Hipótese do Ângulo Obtuso: Nesse caso,  $\hat{C} = \hat{D} > 90^\circ$ , logo,  $AB > CD$ .
- Hipótese do Ângulo Agudo: Nesse caso,  $\hat{C} = \hat{D} < 90^\circ$ , logo,  $AB < CD$ .

**Teorema 2.6.** Na Geometria Hiperbólica, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que  $180^\circ$ .



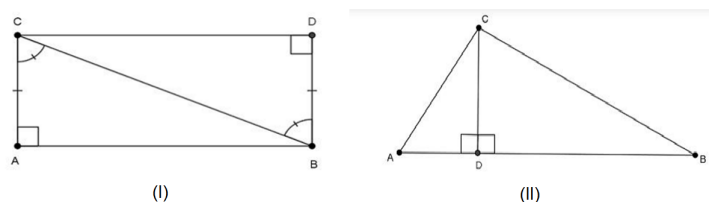


Figura 5.6: Teorema 2.6

[Fonte: Referência [6]]

**Prova:** Com auxílio da Figura 5.6 (I), vamos, primeiramente, considerar um triângulo retângulo  $ABC$ , no qual  $\hat{A} = 90^\circ$ . Além disso, vamos supor, por contradição, que a soma dos ângulos internos do triângulo  $ABC$  deve ser  $180^\circ$ . Assim, a partir de um dos Axiomas de Separação válidos na Geometria Hiperbólica, definimos um ponto  $D$  no lado oposto a  $A$  com relação ao segmento  $BC$  tal que sejam congruentes  $\hat{A}CB \cong \hat{C}BD$  e  $AC \cong BD$ . Logo,  $\hat{A}BD = 90^\circ$  já que ele é formado por dois ângulos complementares. Assim, os triângulos  $ACB$  e  $DBC$  são congruentes pelo caso LAL. Portanto, tendo  $AC = BD$  e  $\hat{C}AB = 90^\circ = \hat{A}BD$ ,  $ABCD$  é um triângulo de Saccheri e estamos assumindo a hipótese do ângulo agudo. Entretanto, isso é impossível já que com  $\hat{D} = 90^\circ$  não tem como a soma dos ângulos internos de  $ABC$  somarem  $180^\circ$ . Portanto, como a hipótese da somatória resultar em um ângulo obtuso foi descartada por Saccheri na Geometria Neutra, resta que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que  $180^\circ$ .

Para generalizar essa prova, basta tomarmos um triângulo qualquer  $ABC$ , como a Figura 5.6 (II). Então, podemos decompô-lo em dois triângulos retângulos tomando a altura correspondente ao maior lado desse triângulo  $ABC$ . Assim, teremos os triângulos retângulos  $ACD$  e  $CBD$  cuja soma dos ângulos internos de cada um deles é menor que  $180^\circ$ . Assim,  $\hat{A} + \hat{A}CD + \hat{C}DA + \hat{D}CB + \hat{B} + \hat{B}DC < 180^\circ + 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{A}CD + 90^\circ + \hat{D}CB + \hat{B} + 90^\circ < 360^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{A}CD + \hat{D}CB + \hat{B} < 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{ACB} + \hat{B} < 180^\circ$ , isto é, a soma dos ângulos internos de um triângulo  $ABC$  qualquer é menor do que  $180^\circ$ . ■

Note que uma consequência desse teorema é que em todos os quadriláteros convexos da Geometria Hiperbólica a soma de seus ângulos internos é menor que  $360^\circ$ . Portanto, nessa geometria *não existem retângulos*.

Voltando, então, ao primeiro resultado que apresentamos dessa geometria, “dada uma reta  $l$  e um ponto  $P$  que não pertence a  $l$ , existem pelo menos duas retas distintas paralelas a  $l$  passando por  $P$ ” (veja [6]). Para isso, temos o seguinte teorema.

**Teorema 2.7.** *Na Geometria Hiperbólica, para toda reta  $l$  e ponto  $P$  que não pertence a  $l$ , existem pelo menos duas retas distintas a  $l$  que passam por  $P$ .*

(espaço em branco intencional)

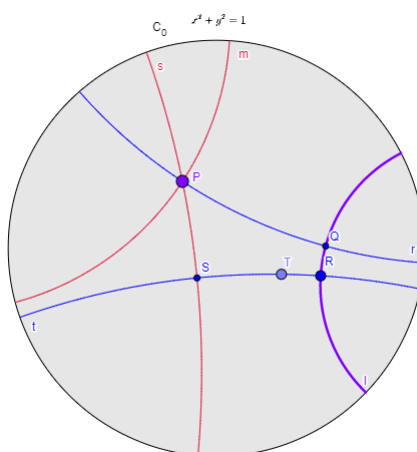


Figura 5.7: Teorema 2.7, retas  $m$  e  $s$  paralelas a  $l$   
[Imagem construída pela autora]

**Prova:** Considere, no Disco de Poincaré, a reta  $l$  e o ponto  $P$  fora dela; provaremos esse resultado com auxílio da Figura 5.7. Primeiro, iremos construir uma reta  $r$  perpendicular a  $l$  que passa por  $P$  e chamaremos de  $Q$  a interseção entre  $r$  e  $l$ . Depois, traçaremos uma reta  $m$  perpendicular a  $r$  no ponto  $P$ . Seja  $R$  qualquer outro ponto em  $l$ , construiremos a reta  $t$  perpendicular a  $l$  por  $R$ . Depois, definimos uma reta  $s$  perpendicular a  $t$  que passa por  $P$  e chamaremos de  $S$  a interseção entre  $s$  e  $t$ .

Dessa forma, temos duas retas,  $s$  e  $m$  paralelas a  $l$  por  $P$ , pois ambas fazem ângulo alternos internos iguais e retos com perpendiculares de  $l$ , a saber as retas  $r$  e  $t$ .

Se assumimos que  $s$  e  $m$  são, na verdade, a mesma reta, isso implicaria que  $PQRS$  é um retângulo, o que é um absurdo devido ao Teorema 2.6.

Portanto, existem duas retas, a saber  $m$  e  $s$ , paralelas a  $l$  passando pelo ponto  $P$ . ■

Tendo provado que existem duas retas passando por um ponto e não intersectando uma terceira, então podemos concluir que existem infinitas retas com essa propriedade (veja [1]).

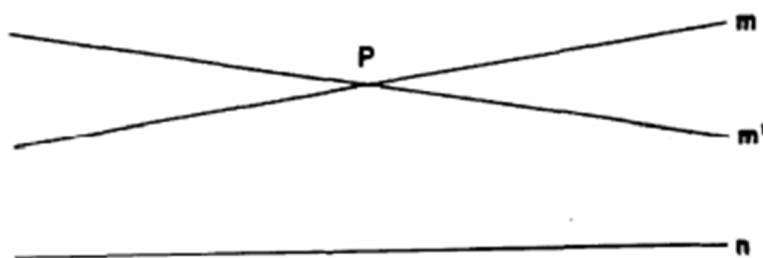


Figura 5.8: Ilustração de duas retas paralelas a uma terceira  
[Fonte: Referência [1]]

De fato, considere que existem duas retas  $m$  e  $m'$  que passam pelo ponto  $P$  e não intersectam uma reta  $n$ . As retas  $m$  e  $m'$  formam quatro ângulos e um deles contém a reta  $n$  completamente. Serão exemplos de retas que também não intersectam  $n$  qualquer reta traçada pelo ponto  $P$  e contida no par de ângulos opostos pelo vértice, nenhum dos quais contém  $n$ . Portanto, existem infinitas retas paralelas a  $n$  passando pelo ponto  $P$ .

**Teorema 2.8.** *Na Geometria Hiperbólica, se dois triângulos são semelhantes, então eles são congruentes.*

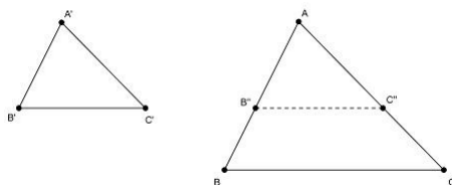


Figura 5.9: Teorema 2.8

[Fonte: Referência [6]]

**Prova:** Sejam os triângulos hiperbólicos semelhantes, mas não congruentes  $ABC$  e  $A'B'C'$  conforme ilustrado na Figura 5.9, temos por hipótese que seus ângulos internos correspondentes são congruentes e seus lados correspondentes são proporcionais. Sem perda de generalidade, vamos supor que  $AB > A'B'$  e  $AC > A'C'$ , assim, podemos marcar um ponto  $B''$  no segmento  $AB$  e um ponto  $C''$  em  $AC$  de modo que  $AB'' \cong A'B'$  e  $AC'' \cong A'C'$ . Dessa forma,  $A'B'C' \cong AB''C''$  pelo caso LAL, logo,  $AB''C'' \cong \hat{B}'$  e  $AC''B'' \cong \hat{C}'$ . Entretanto, pela definição da nossa hipótese,  $\hat{B} \cong \hat{B}'$  e  $\hat{C} \cong \hat{C}'$ , portanto,  $AB''C'' \cong \hat{B}' \cong \hat{B}$  e  $AC''B'' \cong \hat{C}' \cong \hat{C}$ , isto é,  $AB''C'' \cong \hat{B}$  e  $AC''B'' \cong \hat{C}$ . Assim, os segmentos  $BC$  e  $B''C''$  são paralelos, o quadrilátero  $BB''C''C$  é convexo e tem a soma de seus ângulos exatamente igual a  $360^\circ$ , o que contradiz o Teorema 2.6. Portanto, os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes e também necessariamente congruentes. ■

Note que na Geometria Hiperbólica não é possível ampliar ou reduzir um polígono sem que ele sofra distorção.

**Definição 2.9.** Definimos como *Defeito* de um triângulo  $ABC$  e denotamos por  $\delta(ABC)$  o suplemento da somatória de seus ângulos internos, isto é,  $\delta(ABC) = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$ .

**Proposição 2.10.** *Seja  $ABC$  um triângulo hiperbólico qualquer em que existe um ponto  $D$  no segmento  $BC$ , então  $\delta(ABC) = \delta(ABD) + \delta(DCA)$ , isto é, o defeito tem propriedade aditiva.*

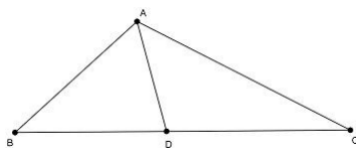


Figura 5.10: Proposição 2.10

[Fonte: Referência [6]]

**Prova:** Com auxílio da Figura 5.10, note que os ângulos  $B\hat{D}A$  e  $A\hat{D}C$  são suplementares, logo, somando os defeitos dos triângulos  $ABD$  e  $DCA$ , segue que  $\delta(ABD) + \delta(DCA) = 180^\circ - (D\hat{A}B + A\hat{B}D + B\hat{D}A) + 180^\circ - (A\hat{D}C + D\hat{C}A + C\hat{A}D) = 180^\circ - D\hat{A}B - A\hat{B}D - B\hat{D}A + 180^\circ - A\hat{D}C - D\hat{C}A - C\hat{A}D = 360^\circ - D\hat{A}B - A\hat{B}D - B\hat{D}A - A\hat{D}C - D\hat{C}A - C\hat{A}D = 360^\circ - D\hat{A}B - A\hat{B}D - 180^\circ - D\hat{C}A - C\hat{A}D = 180^\circ - D\hat{A}B - A\hat{B}D - D\hat{C}A - C\hat{A}D =$

$$180^\circ - \hat{DAB} - \hat{B} - \hat{C} - \hat{CAD} = 180^\circ + (\hat{DAB} + \hat{CAD} + \hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ + (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = \delta(ABC) \Rightarrow \delta(ABD) + \delta(DCA) = \delta(ABC). \quad \blacksquare$$

Note também que o defeito de um triângulo é igual ao defeito de um triângulo congruente a esse, pois ambos possuem as mesmas medidas dos ângulos internos. Essa propriedade do defeito é chamada de invariância sob congruência.

**Proposição 2.11.** *Na Geometria Hiperbólica, sejam  $l$  e  $m$  duas retas paralelas, então qualquer conjunto de pontos de  $l$  equidistantes de  $m$  tem no máximo dois pontos.*

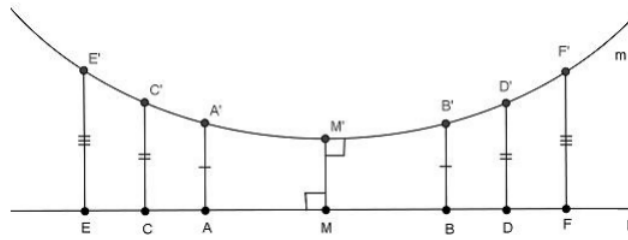


Figura 5.11: Proposição 2.11 e 2.12  
[Fonte: Referência [6]]

**Prova:** Para provar esse resultado, utilizaremos a Figura 5.11. Como na Geometria Hiperbólica não existem retângulos, devido ao Teorema 2.6 (página 48), então só podem ocorrer no máximo dois pontos equidistantes entre duas paralelas.

Por outro lado, existe a possibilidade de que esse conjunto de pontos de  $l$  equidistantes de  $m$  seja vazio, o que significa que todos os pontos das duas retas paralelas têm distâncias diferentes.

Essas duas possibilidades derivam dos dois tipos possíveis de retas nessa geometria, cuja classificação já conhecemos (retas hiperbólicas do primeiro ou segundo tipo). ■

**Proposição 2.12.** *Na Geometria Hiperbólica, considere duas retas paralelas  $m$  e  $l$ . Se existe em  $l$  um par de pontos equidistantes de  $m$ , então  $l$  e  $m$  têm um único segmento perpendicular em comum, situado no ponto médio desses pontos equidistantes. Além disso, essa perpendicular comum é o menor segmento unindo um ponto qualquer de  $l$  a um ponto qualquer de  $m$ .*

**Prova:** Ainda utilizando a Figura 5.11, note que  $ABB'A'$ ,  $CDD'C'$ ,  $EFF'E'$  e assim por diante são quadriláteros de Saccheri e que o segmento  $MM'$  está situado no ponto médio dos segmentos  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  e assim por diante. Além disso, a reta  $m$  diverge da reta  $l$  à direita e à esquerda do segmento  $MM'$ . ■

Essa configuração de retas ilustrada pela Figura 5.11 em que a reta  $m$  diverge da reta  $l$  em ambos os lados é a configuração mais comum entre as infinitas retas hiperbólicas paralelas nesse geometria, porém não é a única. Na configuração da Figura 5.11 em que existe um segmento perpendicular comum as duas retas, elas são chamadas de *Retas Paralelas Divergentes*. Quando não existe esse segmento perpendicular comum e as retas divergem em uma direção, mas convergem na outra, elas são denominadas *Retas Paralelas Assintóticas*.

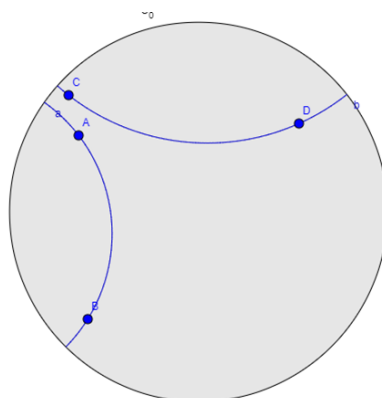


Figura 5.12: Retas Paralelas Assintóticas  
[Imagem construída pela autora]

Além disso, assim como existem as retas hiperbólicas paralelas, também existem as concorrentes, isto é, as que possuem algum ponto em comum. Dessa forma, podemos imaginar que deve existir uma última reta hiperbólica  $d$  concorrente e uma primeira paralela  $b$  a uma terceira reta hiperbólica  $a$ , essa segunda recebe o nome de *Reta Paralela Limite à reta  $a$  passando por  $P$* .

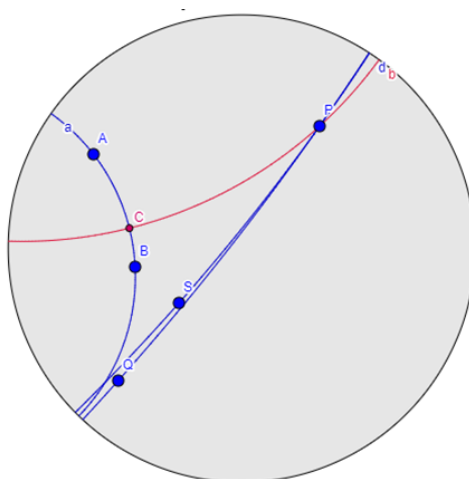


Figura 5.13: Ilustração da reta  $b$  como paralela limite à reta  $a$  passando por  $P$   
[Imagem construída pela autora]

Na verdade, existem duas retas hiperbólicas limites, uma de cada lado da perpendicular comum e o ângulo que cada uma delas faz com a perpendicular comum é o mesmo, por simetria. Esse ângulo recebe o nome de *Ângulo Limite* ou *Ângulo de Paralelismo*.

(espaço em branco intencional)

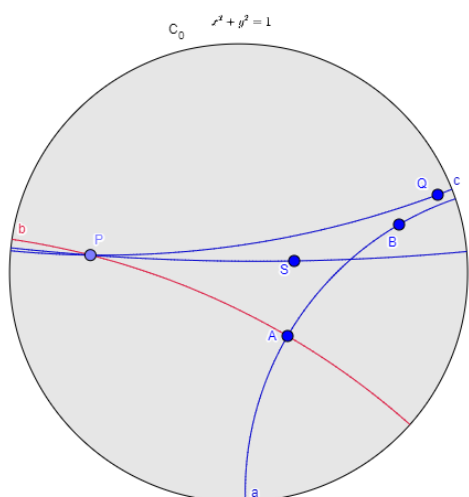


Figura 5.14: Construção de Gauss  
[Imagem construída pela autora]

Em 1831, Gauss propôs uma interessante construção que iremos ilustrar na Figura 5.14 e enunciar aqui. Considere uma reta  $AB$  e um ponto  $P$  fora dela. Tomamos a reta  $b$  que contém  $A$  e  $P$  e é perpendicular a  $AB$ . Uma reta  $PQ$  será dita paralela limite a  $AB$  em  $P$  se para qualquer  $S$  no interior dos ângulo  $\hat{AP}Q$  e  $\hat{P}AB$ , sendo  $0 < \hat{AP}S < \hat{AP}Q$ ,  $PS$  intersecta  $AB$ .

Podemos enxergar a paralela limite  $PQ$  como a primeira reta que emana de  $PA$  em direção a  $B$  e falha em intersectar  $AB$ .

Considere que, nessa construção, o ângulo limite mede  $\alpha$  e o segmento  $AP$  mede  $d$ . Assim, o Teorema de Lovachevsky-Bolyai propõe a relação  $\text{tg}(\frac{\alpha}{2}) = e^{-\frac{d}{k}}$ , onde  $k$  é uma constante característica dessa geometria que, segundo Gauss em uma carta escrita para Franz Adolph Taurinus (1794-1874) em 1824, não pode ser fixada a priori. Note que quando  $d$  tende a um valor muito grande,  $\alpha$  tende a zero, por outro lado, diminuindo o valor de  $d$  ou quando  $k$  tende ao infinito (sendo  $d$  um valor pequeno ou grande),  $\alpha$  tende a  $90^\circ$ , assim como o ângulo de paralelismo da Geometria Euclidiana.

Vamos, agora, discutir o conceito de *curvatura* de uma superfície, que nos será útil para trabalhar com áreas na geometria hiperbólica.

Retas tem curvatura zero, uma vez que podemos as ver como circunferências de raio infinito. A circunferência, por sua vez, tem a mesma curvatura em todos os seus pontos e quanto maior o raio de uma circunferência, menor a curvatura dela, isto é, o raio e a curvatura são grandezas inversamente proporcionais. Por isso, em seus estudos de óptica, Gauss definiu a curvatura de uma circunferência como sendo  $K = \frac{1}{R}$ .

Quando olhamos para curvas que não tem curvaturas constantes, a curvatura deve ser determinada em cada ponto da curva. Assim, tomamos um ponto qualquer da curva e construímos uma circunferência chamada de círculo osculante que intersecta a curva no ponto em que estamos trabalhando, que tem o raio, chamado de raio de curvatura, maior possível e cujo centro, chamado de centro de curvatura, se encontra na linha normal / perpendicular, interior e que melhor se aproxima naquele ponto.

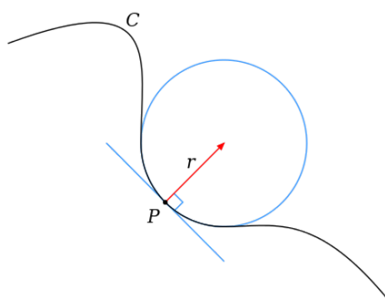


Figura 5.15: Curva sem Curvatura Constante

[Fonte: Google Images]

Em uma superfície, a curvatura também precisa ser calculada em cada ponto e, em cada um deles, ela resulta do produto entre a maior e menor curvatura possível naquele ponto, no sentido de que para cada interseção da superfície com um plano teremos uma curva diferente com uma curvatura diferente.

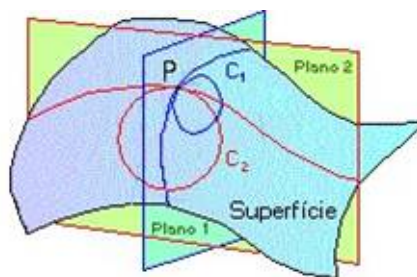


Figura 5.16: Curvatura em Superfície

[Fonte: Google Images]

Se a superfície for plana, sua interseção com qualquer plano originará uma reta e, assim, em qualquer ponto a maior e menor curvatura possível será igual a zero. Logo, a curvatura de uma superfície plana é nula.



Figura 5.17: Curvaturas

[Fonte: Google Images]

Se, em um ponto da superfície, ela for encurvada para o mesmo lado, então todos os possíveis círculos osculantes ficarão para o mesmo lado e, assim, a curvatura será positiva; é o caso de uma superfície esférica, por exemplo, que tem curvatura constante igual a  $K = \frac{1}{R^2}$ .

Se, em um ponto da superfície, ela for encurvada para os lados diferentes, então os círculos osculantes ficarão em lados opostos da superfície e, assim, a curvatura será negativa, pois resultará de um produto entre medidas com sinais opostos. Esse é o caso da Geometria Hiperbólica, por exemplo, cuja superfície tem o formato conhecido como "sela de cavalo".

Outro exemplo de superfície com curvatura negativa é a chamada pseudo-esfera, a qual é gerada a partir da rotação de uma tractriz em torno de sua assíntota e foi assim nomeada por Eugênio Beltrami (1835-1900) por possuir curvatura constante igual a  $K = -\frac{1}{R^2}$ .

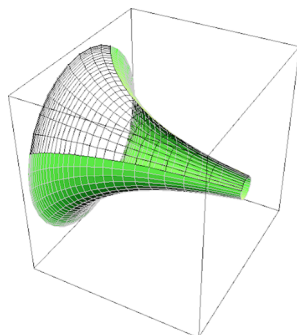


Figura 5.18: Pseudo-esfera  
[Fonte: Google Images]

Além disso, vale ressaltar que uma superfície completa, isto é, sem singularidade, com curvatura negativa é uma abstração, pois não é possível incorporá-la em  $\mathbb{R}^3$ .

Vale ressaltar também que a curvatura de uma superfície que estamos estudando aqui é um conceito local, isto é, a curvatura em um ponto específico. Existem alguns resultados mais avançados sobre esse tema que não serão vistos agora por envolverem Geometria Diferencial. Nesse sentido, temos o Teorema Egrégio de Gauss, no qual Gauss mostrou ser possível determinar a curvatura total de uma superfície por meio do mapeamento dela sobre uma esfera de raio unitário e no qual ele estabelece que a curvatura é uma propriedade intrínseca da superfície.

O conceito de área, isto é, da quantidade de superfície abarcada por certo polígono, na Geometria Euclidiana está intimamente relacionado ao retângulo, que não existe na Geometria Hiperbólica, conforme concluímos do Teorema 2.6 (página 2.6).

Na geometria euclidiana, a área do retângulo é calculada pelo produto de sua base e altura, isto é, pelo cálculo de quantas unidades de área cabem nesse polígono. Se supomos um retângulo com base  $b$  unidades de comprimento (u.c.) e altura  $h$  u.c., sua área será igual a  $bh$  unidades de área (u.a.).

Independente da unidade de comprimento que escolhermos, a unidade de área será proporcional a ela e podemos provar isso escolhendo, por exemplo, uma unidade de medida  $n$ . Se supomos um retângulo com base  $bn$  e altura  $hn$ , sua área será igual a  $bhn^2$ . Agora, se escolhemos aumentar a unidade de comprimento em uma unidade, temos uma unidade de medida  $(n + 1)$ . Assim, se supomos um retângulo com base  $b(n + 1) = bn + b$  e altura  $h(n + 1) = hn + h$ , sua área será igual a  $bh(n + 1)^2 = bh(n^2 + 2n + 1) = bhn^2 + 2bhn + bh$ . Essa nova área foi aumentada em  $bh(2n + 1)$  u.a., o que corresponde ao acréscimo de  $bhn$  u.a. aumentadas na altura,  $bhn$  u.a. aumentadas na base e  $bh$  u.a..

A partir da área do retângulo conseguimos encontrar a área do triângulo, cuja medida é a metade da área do retângulo. A partir da área do triângulo conseguimos encontrar a área de qualquer outro polígono por triangulação.

Porém, na geometria hiperbólica, como já vimos, não existem retângulos. Assim, resolvemos o problema para cálculo de áreas usando o Teorema de Girard proposto em 1626 por Albert Girard (1595-1632). Por esse teorema, determinamos dois triângulos antipodais  $ABC$  e  $A'B'C'$  a partir da interseção de três fusos esféricos sobre uma esfera de raio  $R$ , conforme a Figura 5.19.



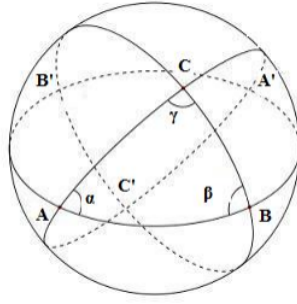


Figura 5.19: Triângulos Esféricos  $ABC$  e  $A'B'C'$   
[Fonte: Referência [6]]

Como a área total da superfície esférica é  $A = 4\pi R^2$ , podemos encontrar a área de um fuso a partir de uma regra de três e, assim,  $A_F = 2\theta R^2$ , onde  $\theta$  é o ângulo diédrico do fuso. Cada ângulo interno do triângulo  $ABC$  determina um fuso e juntando o triângulo  $ABC$  com os três fusos gerados por ele temos metade da superfície esférica, isto é,  $2\pi R^2 = 2\alpha R^2 + 2\beta R^2 + 2\gamma R^2 - 2A_{ABC}$ , portanto,  $2\pi R^2 = 2\hat{A}R^2 + 2\hat{B}R^2 + 2\hat{C}R^2 - 2A_{ABC}$  e com alguma manipulação algébrica, chegamos na fórmula para áreas na geometria esférica,  $A_{ABC} = R^2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)$ . Então, essa área é proporcional a  $(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)$  com fator  $R^2$  de proporcionalidade, portanto, como a curvatura da esfera é  $K = \frac{1}{R^2}$ , segue que  $K \cdot A_{ABC} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$ .

Esse resultado foi estabelecido por Gauss em 1827 e, com ele, Gauss formulou três possibilidades para a curvatura  $K$ :

- Se  $K > 0$ , como  $A_{ABC} > 0$ , então  $(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi) > 0$ , logo, a soma dos ângulos internos do triângulo é maior que  $180^\circ$  e a área é proporcional a esse excesso. Esse é o caso da Geometria Elíptica.
- Se  $K = 0$ , então  $(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi) = 0$ , logo, a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a  $180^\circ$ . Esse é o caso da Geometria Euclidiana.
- Se  $K < 0$ , como  $A_{ABC} > 0$ , então  $(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi) < 0$ , logo, a soma dos ângulos internos do triângulo é menor que  $180^\circ$  e a área é proporcional ao defeito do triângulo. Esse é o caso da Geometria Hiperbólica.

Gauss estabeleceu em 1794 que para determinar a área nessa geometria seria necessário encontrar uma função que relacionasse um número (o valor da área) a todo o triângulo. Essa função precisa respeitar a congruência e a aditividade, pois triângulos congruentes devem ter o mesmo valor de área e a área de um triângulo dividido em dois triângulos menores deve ser igual a soma dessas áreas menores. Com vimos (Proposição 2.10, página 51), Gauss percebeu que essas duas propriedades são respeitadas pelo defeito do triângulo, logo, a área deve ser proporcional a ele.

**Teorema 2.13** (Área na Geometria Hiperbólica). *Nessa geometria, existe uma constante  $k > 0$  tal que dado um triângulo  $ABC$  qualquer vale que  $A_{ABC} = k^2 \cdot \delta(ABC)$ .*

A prova desse teorema não será feita, pois envolve elementos da Geometria Diferencial. Além disso, existe, ainda, um meio de relacionar a constante  $k$  com a curvatura  $K$ . Seja  $R = ik$  o raio imaginário de uma esfera,  $i = \sqrt{-1}$ , segue que  $K = -\frac{1}{k^2}$  é a curvatura do plano hiperbólico.

Note que, com esse resultado, fica estabelecido que a área de um triângulo hiperbólico tem um limite máximo, já que o valor do defeito nunca será maior do que  $180^\circ$ . Logo, nenhum triângulo hiperbólico terá valor maior do que  $k^2 \cdot 180^\circ$ .

**Agradecimentos:** Gostaria de agradecer à FAPESP pelo financiamento de minha iniciação científica e à minha orientadora Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti por toda ajuda e suporte.

*Abstract: Geometry is an important branch of Mathematics and, like other branches, it has some ramifications, among which the best known is Euclidean Geometry. However, there are also other types of geometries such as Hyperbolic Geometry that will be our object of study in this article. Furthermore, to show some of its results, we will introduce and use Poincaré's Disc Model.*

*Keywords: hyperbolic geometry; Poincaré's Disc Model; Quadrilateral of Saccheri; curvature; hyperbolic areas*

## Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, J. L. M., *Geometria Hiperbólica*, 3ª impressão, IMPA, Universidade Estadual de Campinas, Rio de Janeiro, 2007.
- [2] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C., *História da matemática*, 3.ed, Editora Blucher, 2012.
- [3] LIMA, M. A. G.; BERNAL, J. I. O.; SADER, S. A. C.; CUNHA, M. F., *Dos fundamentos da geometria à geometria hiperbólica plana: um estudo a partir de sua história e apoiado em um software*, XII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo, 2016.
- [4] MAGALHÃES, J. M., *Um estudo dos modelos para a geometria hiperbólica*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2015.
- [5] MOREIRA, A. C. S., *Geometrias sob a Axiomática de Hilbert*, Trabalho de Encerramento de Disciplina, Universidade Estadual de Campinas, 2006.
- [6] PEREZ, C. M., *Fundamentos da geometria hiperbólica*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2015.
- [7] VALÉRIO, J. C., *Introdução à geometria hiperbólica*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2017.

# Um Estudo Sobre Matrizes Não Quadradas

Mariana da Costa Müller

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

**Resumo:** A nossa pesquisa na Iniciação Científica tem o objetivo de estudar resultados e aplicações envolvendo matrizes não quadradas. Neste trabalho vamos apresentar uma ferramenta fundamental para resolver problemas envolvendo matrizes, denominada Decomposição em Valores Singulares (DVS), o qual consiste em um método similar ao de diagonalização de matrizes quadradas, no caso, busca-se escrever uma matriz  $A \in M_{m \times n}$  na forma  $U\Sigma V^T$ , em que a matriz  $\Sigma$  envolve os valores singulares de  $A$  que são obtidos a partir dos autovalores de  $A^T A$ . Neste trabalho também vamos introduzir a pseudo-inversa, que generaliza a ideia de uma inversa para uma matriz de qualquer tamanho, sendo possível utilizar tanto a DVS como a fatoração de posto completo para obter um candidato à pseudo-inversa e por fim apresentaremos um exemplo.

**Palavras-chave:** autovalores e autovetores; decomposições em valores singulares; teorema espectral; pseudo-inversa.

## 1 Decomposição em Valores Singulares

Nesta seção desenvolveremos a teoria necessária para a realização da decomposição em valores singulares de uma matriz de tamanho qualquer, essa decomposição é utilizada, por exemplo, no estudo da matriz de covariância, no processamento digital de imagens e em problemas de mínimos quadrados, veja por exemplo [2].

### 1.1 Matriz Simétrica

Um tipo especial de matriz é chamada de matriz simétrica, é uma matriz quadrada  $A$ , de forma que  $A = A^T$ . Matrizes simétricas são matrizes quadradas diagonalizáveis. Muitas das propriedades dessas matrizes são dadas pelo Teorema Espectral, que veremos a seguir, mas antes, precisaremos de algumas definições.

**Definição 1.1.** Um autovalor,  $\lambda$  é um valor constante com um autovetor correspondente  $\mathbf{v}$ , de forma que  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  em que  $A$  é uma matriz. Note que para um autovetor de tamanho  $n \times 1$ , a matriz  $A$  precisa necessariamente ser quadrada de tamanho  $n \times n$ . O **autoespaço** é o espaço vetorial gerado por todos autovetores associados ao autovalor  $\lambda$ . Também dizemos que uma matriz é **diagonalizável** se podemos escrever  $A = PDP^{-1}$ , onde  $P$  é uma matriz quadrada composta dos autovetores de  $A$  e  $D$  é uma matriz diagonal com autovalores correspondentes na diagonal principal. Uma matriz é diagonal, quando ela é quadrada e os elementos que não estão na diagonal principal são todos nulos. Uma matriz  $A$  é **ortogonalmente diagonalizável** se  $A = PDP^{-1}$ , com  $D$  diagonal e  $P^{-1} = P^T$ .

O próximo teorema fornece propriedades úteis que qualquer matriz simétrica possui, veja [1].

**Teorema 1.2 (Teorema Espectral).** *Uma matriz simétrica  $A$ ,  $n \times n$  possui as seguintes propriedades:*

- (a) *A possui  $n$  autovalores reais, contando multiplicidades.*
- (b) *A dimensão do autoespaço para cada autovalor  $\lambda$  é igual a multiplicidade de  $\lambda$  como uma raiz da equação característica.*
- (c) *Os autoespaços são mutuamente ortogonais, no sentido de que os autovetores correspondentes para diferentes autovalores são ortogonais.*
- (d) *A é ortogonalmente diagonalizável.*

**Observação 1.3.** Por (c) sabemos que os autovalores de uma matriz simétrica são ortogonais uns aos outros, portanto se o fizermos vetores unitários, podemos ter uma base ortonormal, sendo possível associar a base original através do Teorema de Mudança de Base. Por (d) sabemos que podemos escrever qualquer matriz simétrica  $A$  como  $PDP^T$  como na definição de matriz ortogonalmente diagonalizável.

O Teorema Espectral leva a uma propriedade conhecida como Decomposição Espectral. A partir de (d) sabemos que uma matriz simétrica,  $A$ , pode ser escrita como  $PDP^T$ . Visto que existem  $n$  autovalores reais e autovetores correspondentes por (a), escrevemos os autovetores de  $A$  como  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  e os autovalores de  $A$  como  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Então:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix}.$$

Observe que o produto frontal é o mesmo que multiplicar cada autovetor em  $P$  pelo seu autovalor correspondente, fazendo isso, temos:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{u}_1 & \dots & \lambda_n \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix}.$$

Então por expansão de linha ou coluna, podemos escrever  $A$  como segue:

$$A = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T.$$

A expressão acima chamada de **decomposição espectral** de uma matriz  $A$ . Sendo útil para escrever uma matriz usando apenas seus autovalores e autovetores. Isso é possível para uma matriz simétrica.

Porém, por muitas vezes usamos matrizes que não são simétricas e nem quadradas. Assim, precisamos generalizar os conceitos de autovalores, autovetores, diagonalização e decomposição espectral para matrizes de qualquer tamanho.

## 1.2 Decomposição em Valores Singulares

**Decomposição em valores singulares** é um processo similar a diagonalização que pode ser usada em qualquer matriz, independente do seu tamanho.

**Definição 1.4.** Dada uma matriz  $A$  qualquer, os valores singulares de  $A$ , denotados por  $\sigma_i$ , são as raízes quadradas dos autovalores de  $A^T A$ , isto é,  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ .

**Teorema 1.5** (Decomposição em valores singulares). *Qualquer matriz  $A$  pode ser decomposta como  $U\Sigma V^T$  onde:*

$$U = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m] \quad V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \quad \Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_m \end{bmatrix}.$$

**Prova:** Seja uma matriz  $A$ ,  $m \times n$ , em que  $m \neq n$ . Note que  $A^T A$  é quadrada e de tamanho  $n \times n$ . Além disso, é simétrica, visto que  $(A^T A)^T = A^T A^{TT} = A^T A$ . Similarmente,  $AA^T$ , é simétrica, de tamanho  $m \times m$ , já que,  $(AA^T)^T = A^{TT} A^T = AA^T$ . A matriz  $A^T A$  é então uma matriz quadrada  $n \times n$  com autovalores  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  e autovetores  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ , garantidos pelo Teorema Espectral e  $AA^T$  possui autovalores  $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  e autovetores  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ . Também por causa do Teorema Espectral, ambas as matrizes podem ser diagonalizáveis.

Note que  $A^T A \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ , já que  $\mathbf{v}_i$  e  $\lambda_i$  são respectivamente, um autovetor e um autovalor de  $A^T A$ . Multiplicando por  $A$  temos  $(A^T A) A \mathbf{v}_i = \lambda_i A \mathbf{v}_i$ . Portanto,  $A \mathbf{v}_i$  é um autovetor de  $AA^T$  com os mesmos autovalores não nulos de  $A^T A$ ,  $\lambda_i$ . Chamemos esses autovetores  $\mathbf{u}_i$ , assim,  $A \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i$ . Assumindo que  $\mathbf{v}_i$  e  $\mathbf{u}_i$  são vetores unitários, então podemos dividir pela magnitude  $\|A \mathbf{v}_i\|$  para manter a propriedade de possuírem norma igual a 1.

Com isso, note que

$$\|A \mathbf{v}_i\|^2 = (A \mathbf{v}_i)^T A \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T A^T A \mathbf{v}_i.$$

A primeira igualdade é como representamos quadrados na forma de matriz e a segunda igualdade é como vários termos transpostos são avaliados. Uma vez que  $\mathbf{v}_i$  é um autovetor de  $A^T A$ , então  $A^T A \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$  por definição de autovetores e autovalores. Então  $\|A \mathbf{v}_i\|^2 = \mathbf{v}_i^T \lambda_i \mathbf{v}_i$ . E com isso podemos ter  $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = \|\mathbf{v}_i\|^2$ . Mas como a norma de  $\mathbf{v}_i$  é 1,  $\|\mathbf{v}_i\|^2 = 1$ , assim, temos  $\|A \mathbf{v}_i\|^2 = \lambda_i$  ou

$$\|A \mathbf{v}_i\| = \sqrt{\lambda_i}.$$

Os valores singulares, denotados por  $\sigma_i$ , são definidos como raízes quadradas dos autovalores de  $A^T A$ ,  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ , também equivalente a  $\|A \mathbf{v}_i\|$ . Isso significa que  $\mathbf{u}_i = \frac{A \mathbf{v}_i}{\sigma_i}$  e  $\mathbf{u}_i$  é um vetor unitário, como desejado. Então construímos a matriz  $U$  utilizando  $\mathbf{u}_i$ 's como as colunas, ou seja,

$$U = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m].$$

$V$  é construída analogamente utilizando  $\mathbf{v}_i$ 's como as colunas:

$$V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n].$$

Note que  $AV = [A \mathbf{v}_1 \dots A \mathbf{v}_m] = [\sigma_1 \mathbf{u}_1 \dots \sigma_m \mathbf{u}_m]$ . Se introduzirmos uma nova matriz,  $\Sigma$ , com os valores singulares na diagonal então temos  $AV = U \Sigma$ . Note que para fazer com que a multiplicação das matrizes funcione, precisamos expandir  $\Sigma$  para o tamanho  $m \times n$  e para isso podemos preenchê-la com zeros. Notando que  $V$  é ortogonal, temos que  $V V^T = I$ . Então  $AV V^T = A = U \Sigma V^T$ . Com isso, chegamos a decomposição em valores singulares. ■

Note que quando não há  $m$  autovalores não nulos,  $D$  terá um tamanho menor. Visto que  $\Sigma$  é construída com zeros em volta de  $D$ , isso não é importante na prática, mas levanta a questão do que queremos incluir como parte da DVS. Vimos o que é conhecida como decomposição em valores singulares completa, onde temos todos os possíveis autovalores e autovetores, no caso  $\Sigma$ , do mesmo tamanho que  $A$ ,  $m \times n$  e  $U$  e  $V$  matrizes quadradas com todos os autovalores incluídos. Quando temos autovalores iguais a zero, eles e seus respectivos autovetores podem dificultar o processo. Uma decomposição em valores singulares reduzida, se existe  $r$  autovalores não negativos, seria  $U \in M_{m \times r}$ ,  $V \in M_{n \times r}$  e  $\Sigma \in M_{r \times r}$ , eliminando assim, o excesso de zeros. Note que em ambos os casos,  $r$  é o número de autovalores não

nulos, e não excederá o mínimo de  $n$  e  $m$ , já que ambos  $U$  e  $V$  possuem o mesmos autovalores não nulos, apesar de possuírem diferentes tamanhos.

Decomposição em valores singulares é uma ferramenta muito útil. Qualquer matriz pode sofrer decomposição em valores singulares, independentemente do tamanho. Mais adiante iremos ver como a pseudo-inversa usa a DVS. Mas antes, vamos a um exemplo de como funciona a DVS.

**Exemplo 1.6.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ , vamos chegar a sua decomposição em valores singulares.

A primeira coisa que devemos fazer é calcular  $A^T A$  e encontrar seus autovalores e autovetores.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{bmatrix}$$

e os autovalores são  $\lambda_1 = 360$ ,  $\lambda_2 = 90$  e  $\lambda_3 = 0$ . Os valores singulares são  $\sigma_1 = 6\sqrt{10}$ ,  $\sigma_2 = 3\sqrt{10}$  e  $\sigma_3 = 0$ . Então os autovetores são

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Note que podemos formar a matriz  $V^T$  ortonormal com os autovetores, ou seja,

$$V^T = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

A partir dessas informações podemos calcular  $D$  trivialmente. Temos dois valores singulares não negativos e esses formam a matriz diagonal  $D$ , isto é,

$$D = \begin{bmatrix} 6\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} \end{bmatrix}.$$

$\Sigma$  é sempre do mesmo tamanho da matriz original no caso da DVS completa, então temos:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente  $U$  é determinado por  $\frac{Av_i}{\sigma_i}$ . Como  $u_1 = \frac{1}{6\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \end{bmatrix}$  e  $u_2 = \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$ , temos:

$$U = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{bmatrix}.$$

Juntando todas as partes, obtemos a igualdade desejada:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Visto que o último valor singular é zero, o deixamos de fora. No geral focamos apenas nos valores singulares não nulos, pois são os compartilhados por  $AA^T$  e  $A^T A$ .

## 2 As Equações de Penrose

Nesta seção vamos introduzir o conceito de pseudo-inversa através das equações de Penrose, segundo [3]. Denotaremos por  $\mathbb{C}^{m \times n}$  o espaço das matrizes cuja as entradas são complexas de ordem  $m \times n$ .

**Definição 2.1** (Inversa de Moore-Penrose). Seja uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Dizemos que  $A$  possui uma pseudo-inversa se existe uma matriz  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$  de modo que

1.  $AXA = A$
2.  $XAX = X$
3.  $(AX)^* = AX$
4.  $(XA)^* = XA$

onde  $A^*$  é a adjunta de  $A$ .

Essas quatro equações são chamadas equações de Moore-Penrose e a ordem em que estão escritas é crucial. Se  $X$  satisfaz as quatro propriedades, então  $X$  é denotada como a **inversa de Moore-Penrose**, ou simplesmente pseudo-inversa, e é denotada por  $A^+$ .

Existem várias maneiras de construir a pseudo-inversa, e iremos abordar duas destas possibilidades, a primeira é usando a DVS da matriz  $A$  e a segunda é por fatoração de posto completo. Deste modo, mostraremos como podemos utilizar tanto a DVS como a fatoração de posto completo para obter um candidato à pseudo-inversa.

### 2.1 Pseudo-inversa na Forma $U\Sigma V^*$

Vamos utilizar a DVS para construir um candidato à pseudo-inversa. Com isso, temos  $A = U\Sigma V^*$  em que  $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$  e  $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$  são matrizes unitárias,  $V^*$  é a matriz adjunta de  $V$  e, para  $\sigma = \sqrt{\lambda_i}$ , temos  $\lambda_i$  os autovalores não nulos de  $A^*A$ ,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n} \text{ e } D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

Note que  $D$  é inversível, pois os valores singulares  $\sigma_i$  são reais positivos.

Com isso, podemos escrever a pseudo-inversa da forma  $A^+ = U\Sigma^+V^*$ , onde

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times m} \text{ e } D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_m} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

Inicialmente precisamos nos certificar se  $\Sigma^+$  é de fato uma pseudo-inversa de  $\Sigma$ , para assim sabermos que  $A^+$  como fora definida satisfaz as quatro equações de Moore-Penrose. Verifiquemos,

- $\Sigma\Sigma^+\Sigma = \Sigma$ ,
- $\Sigma^+\Sigma\Sigma^+ = \Sigma^+$ ,
- $(\Sigma\Sigma^+)^* = \Sigma\Sigma^+$ , e
- $(\Sigma^+\Sigma)^* = \Sigma^+\Sigma$ .

Vejamos, utilizando a definição das matrizes  $\Sigma$  e  $\Sigma^+$ , se uma é pseudo-inversa da outra. Perceba que,

$$\Sigma\Sigma^+ = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

De forma análoga,

$$\Sigma^+\Sigma = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Com isso, temos que

$$\Sigma\Sigma^+\Sigma = \begin{bmatrix} I_m & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{m \times m} \begin{bmatrix} D & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{m \times n} = \Sigma$$

e

$$\Sigma^+\Sigma\Sigma^+ = \begin{bmatrix} I_m & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{n \times m} = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{n \times m} = \Sigma^+.$$

Finalmente, vejamos que

$$(\Sigma\Sigma^+)^* = \begin{bmatrix} I_m & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{m \times m}^* = \begin{bmatrix} I_m & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{m \times m} = \Sigma\Sigma^+.$$

$(\Sigma^+\Sigma)^* = \Sigma^+\Sigma$  pode ser dada pelo mesmo raciocínio. Com isso, temos que  $\Sigma^+$  é uma pseudo-inversa de  $\Sigma$ , pois satisfaz as quatro equações de Moore-Penrose para  $\Sigma$ .

É necessário mostrar que a pseudo-inversa existe sempre e que ela é única, o que mostra o próximo resultado.

**Teorema 2.2.** *Seja  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Então  $A^+ \in \mathbb{C}^{n \times m}$  existe e é única.*

**Prova: (Unicidade)** Suponha  $X$  e  $Y \in \mathbb{C}^{n \times m}$  em que ambas satisfaçam as quatro operações de Moore-Penrose. Então

$$\begin{aligned} X &= X(AX) = X(AX)^* = XX^*A^* = XX^*(AYA)^* = XX^*A^*(AY)^* = X(AX)^*(AY)^* = \\ &XAXAY = XAY = XAYAY = (XA)^*(YA)^*Y = A^*X^*A^*Y^*Y = (AXA)^*Y^*Y = \\ &A^*Y^*Y = (YA)^*Y = YAY = Y. \end{aligned}$$

Portanto,  $X = Y$ .

**(Existência)** Se  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  é uma matriz qualquer, então, pelo teorema da DVS, existem as matrizes  $U$ ,  $V$  e  $\Sigma$  como já definidas, de modo que  $A = U\Sigma V^*$ . Desta forma, podemos definir  $X := V\Sigma^+U^* \in \mathbb{C}^{n \times m}$  como uma candidata a pseudo-inversa, com  $\Sigma^+$  já definida. Para concluir, verifiquemos se  $X := V\Sigma^+U^*$  de fato satisfaz as equações de Moore-Penrose para  $A = U\Sigma V^*$ .

$$1. AXA = U\Sigma V^*V\Sigma^+U^*U\Sigma V^* = U\Sigma\Sigma^+V^* = U\Sigma V^* = A;$$



2.  $XAX = V\Sigma^+U^*U\Sigma V^*V\Sigma^+U^* = V\Sigma^+\Sigma\Sigma^+U^* = X$ ;
3.  $(AX)^* = (U\Sigma V^*V\Sigma^+U^*)^* = (U\Sigma\Sigma^+U^*)^* = U(\Sigma\Sigma^+)^*U^* = U\Sigma\Sigma^+U^* = U\Sigma V^*V^+U^* = AX$ ;
4.  $(XA)^* = (V\Sigma^+U^*U\Sigma V^*)^* = (V\Sigma^+\Sigma V^*)^* = \Sigma(\Sigma^+\Sigma)^*V^* = V\Sigma^+\Sigma V^* = V\Sigma^+U^*U\Sigma V^* = XA$ .

Portanto,  $X$  é pseudo-inversa de  $A$ , ou seja,  $X = A^+$ . Assim, podemos dizer que  $A^+ = V\Sigma^+U^*$ . ■

Existem propriedades de pseudo-inversa que são fáceis de estabelecer usando a definição e o Teorema 2.2. Mostraremos algumas no próximo teorema.

**Teorema 2.3.** *Seja  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Então*

1. *Se  $A$  é inversível, então  $A^+ = A^{-1}$ .*
2.  $(A^+)^T = (A^T)^+$  *(comutatividade com transposição).*
3.  $\overline{A^+} = \overline{A}^+$  *(comutatividade com conjugação).*
4.  $(A^+)^+ = A$ .
5.  $(A^+)^* = (A^*)^+$  *(comutatividade com adjunto).*
6.  $(AA^+)^+ = (A^+)^+A^+$ .
7.  $A^* = A^*AA^+ = A^+AA^*$ .
8.  $A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^+)^+$ .
9.  $(\lambda A)^+ = \lambda^+A^+$ .
10. *Se  $\text{posto}(A) = n$ , então  $A^+A = I_n$  e se o  $\text{posto}(A) = m$ , então  $AA^+ = I_m$ .*
11.  $(I_m - AA^+)A = \mathbb{O}_{m \times n}$ .
12.  $(I_n - A^+A)A^+ = \mathbb{O}_{m \times n}$ .

**Prova:** 1) Como  $A$  é inversível, então  $m = n$  e  $\text{posto}(A) = m$ . Com isso,  $\Sigma \in \mathbb{C}^{m \times m}$  é a matriz diagonal sem zeros na diagonal principal, logo inversível. Assim,

$$AA^+ = U\Sigma V^*V\Sigma^+U^* = U\Sigma\Sigma^+U^* = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda\sigma_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_m} \end{bmatrix} U^* = UU^* = I_m$$

em que  $I_m$  é a matriz identidade  $m \times m$ . Portanto,  $A^+ = A^{-1}$ .

$$2) (A^T)^+ = ((V^*)^T \Sigma^T U^T)^+ = ((V^T)^*) \Sigma^T U^T)^+ = (U^T)^* (\Sigma^T)^+ V^T = (U^*)^T (\Sigma^+)^T V^T = (V\Sigma^+U^*)^T = (A^+)^T.$$

$$3) \overline{A^+} = \overline{(U\Sigma V^*)^+} = \overline{V\Sigma^+U^*} = \overline{V\Sigma^+} \overline{U^*} = \overline{(V\Sigma^+U^*)} = \overline{A^+}.$$

$$4) (A^+)^+ = (V\Sigma^+U^*)^+ = U(\Sigma^+)^+ V^* = A.$$

$$5) (A^*)^+ = \overline{(A)^+}^t = \overline{(A^+)^t} = (A^+)^* \text{ ou } (A^*)^+ = (V\Sigma^+U^*)^* = U(\Sigma^+)^* V^* = U(\Sigma^*)^+ V^* = (V\Sigma^*U^*)^+ = (A^+)^+.$$

6) Sabendo que  $(A^+)^* = (A^*)^+$ , verifiquemos que valem as equações de Moore-Penrose para  $AA^*$

- $AA^*(A^*)^+A^+AA^* = AA^*(A^*)^+(A^+A)^*A^* = AA^*(A^*)^+A^*(A^*)^+A^* = AA^*(A^*)^+A^* = AA^*$
- $(A^*)^+A^+AA^*(A^*)^+A^+ = (A^*)^+A^+A(A^+A)^*A^+ = (A^*)^+A^+AA^+AA^+ = (A^*)^+A^+AA^+ = (A^*)^+A^+$
- $(AA^*(A^*)^+A^+)^* = (A^+)^*((A^*)^+)^*AA^* = (A^+)^*A^+AA^* = (A^+)^*A^*(A^+)^*A^* = (A^+)^*A^* = (AA^+)^* = AA^+ = AA^+AA^+ = A(A^+A)^*A^+ = AA^*(A^*)^+A^+$
- $((A^*)^+A^+AA^*)^* = AA^*(A^+)^*((A^*)^+)^* = AA^*(A^+)^*A^+ = A(A^+A)^*A^+ = AA^+AA^+ = AA^+ = (AA^+)^* = (A^+)^*A^* = (A^*)^+A^* = (A^*)^+A^*(A^*)^+A^* = (A^*)^+(A^+A)^*A^* = (A^*)^+A^+AA^*.$

7) Sabendo que  $(A^+) = (A^*)^+$  e  $(AA^*)^+ = (A^*)^+A^+$ , temos:

- $A^* = A^*(A^*)^+A^* = A^*(A^+)^*A^* = A^*(AA^+)^* = A^*AA^+$
- $A^* = A^*(A^*)^+A^* = A^*(A^+)^*A^* = (A^+A)^*A^* = A^+AA^*.$

8) Sabendo que  $(A^+) = (A^*)^+$  e  $(AA^*)^+ = (A^*)^+A^+$ , temos:

- $A^+ = A^+AA^+ = A^+(AA^+)^* = A^+(A^*)^+A^* = (A^*A)^+A^*$

Por outro lado,

- $A^+ = A^+AA^+ = (A^+A)^*A^+ = A^*(A^*)^+A^+ = A^*(AA^*)^+.$

9) Seja  $\lambda \neq 0$ ,

$$(\lambda A)^+ = (\lambda U \Sigma V^*)^+ = (U(\lambda \Sigma) V^*)^+ = V \begin{bmatrix} \lambda \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda \sigma_m & \\ & & & 0 \end{bmatrix} U^* =$$

$$V \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda \sigma_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\lambda \sigma_m} & \\ & & & 0 \end{bmatrix} U^* = V(\lambda^{-1} \Sigma^+) U^* = \lambda^{-1} V \Sigma^+ U^* = \lambda^{-1} A^+ = \lambda^+ A^+.$$

10) Se  $\text{posto}(A) = n$ , então  $\text{posto}(A^*A) = n$  e, como  $A^*A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , temos que  $A^*A$  é não singular. Sabendo que, se  $A$  é inversível, então  $A^+ = A^{-1}$  e que  $A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+$ , temos

$$A^+A = (A^*A)^+A^*A = (A^*A)^{-1}A^*A = I_n$$

Da mesma maneira, se  $\text{posto}(A) = m$ , então  $\text{posto}(AA^*) = m$  e como  $AA^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , temos que  $AA^*$  é não singular. Sabendo que, se  $A$  é inversível, então  $A^+ = A^{-1}$  e que  $A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+$ , temos

$$AA^+ = AA^*(AA^*)^+ = AA^*(AA^*)^{-1} = I_m.$$

11) Sabendo que  $AA^+ = I_m$ , temos que

$$(I_m - AA^+)A = (AA^+ - AA^+)A = \mathbb{O}A = \mathbb{O}_{m \times n}.$$

12) Sabendo que  $A^+A = I_n$ , temos que

$$(I_n - A^+A)A^+ = (A^+A - A^+A)A^+ = \mathbb{O}A^+ = \mathbb{O}_{m \times n}. \quad \blacksquare$$

## 2.2 Fatoração de Posto Completo

Existem muitas maneiras de escrever uma matriz como produto de outras matrizes. Nessa subseção, consideraremos uma fatoração com o posto como base e a partir disso, iremos abordar a ideia de fatoração de posto completo para a pseudo-inversa.

Denotaremos  $\mathbb{C}_r^{m \times n}$  as matriz com entradas complexas de ordem  $m \times n$  cujo posto vale  $r$ .

**Definição 2.4.** Seja uma matriz  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$  com  $r > 0$ . Se existem  $F \in \mathbb{C}_r^{m \times r}$  e  $G \in \mathbb{C}_r^{r \times n}$  de modo que  $A = FG$  então temos uma **fatoração de posto completo de A**.

Existem as questões usuais de existência e unicidade. A existência pode ser argumentada de várias maneiras. Uma delas é considerar  $F$  como qualquer matriz cuja colunas formam uma base para o espaço de coluna de  $A$ . Elas podem ser escolhidas a partir das colunas de  $A$  ou não. Então, uma vez que cada coluna de  $A$  é exclusivamente expressa como uma combinação linear das colunas de  $F$ , os coeficientes nas combinações lineares determinam um único  $G \in \mathbb{C}^{r \times n}$  com  $A = FG$ . Além disso,  $r = r(A) = r(FG) \leq r(G) \leq r$ . Portanto,  $G \in \mathbb{C}_r^{r \times n}$ .

Outra abordagem é aplicar matrizes elementares à esquerda de  $A$  para produzir a única forma escalonada reduzida por linhas de  $A$ . Ou seja, produzimos uma matriz inversível  $R \in \mathbb{C}_m^{m \times m}$  com

$$RA = \begin{bmatrix} G_{r \times n} \\ \dots \\ \mathbb{O}_{(m-r) \times n} \end{bmatrix}$$

onde  $r = r(A) = r(G)$  e  $\mathbb{O}_{(m-r) \times n}$  é a matriz de ordem  $(m-r) \times n$ . Então,

$$A = R^{-1} \begin{bmatrix} G_{r \times n} \\ \dots \\ \mathbb{O}_{(m-r) \times n} \end{bmatrix}.$$

Podemos dizer que  $R^{-1} = \begin{bmatrix} R_1 & : & R_2 \end{bmatrix}$ , onde  $R_1$  é de ordem  $m \times r$  e  $R_2$  é de ordem  $m \times (m-r)$ ,

$$A = \begin{bmatrix} R_1 & : & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ \dots \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} = R_1 G + R_2 \mathbb{O} = R_1 G.$$

Tomemos  $F$  como  $R_1$ . Como  $R^{-1}$  é inversível, suas colunas são linearmente independentes então  $F$  tem  $r$  colunas independentes, e portanto, possui posto de coluna completo. Resumiremos isso tudo com o próximo teorema.

**Teorema 2.5.** *Toda matriz  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$  com  $r > 0$  possui fatoração de posto completo.*

Agora iremos descrever um procedimento, ou seja, um algoritmo, para determinar uma fatoração de posto completo de uma matriz  $A$  dada que funciona razoavelmente bem para cálculos manuais em matrizes pequenas. Seja  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ .

**Passo 1.** Use operações elementares de linha para reduzir  $A$  a sua forma escalonada por linha, que será denotada por  $RREF(A)$

**Passo 2.** Construa uma matriz  $F$  escolhendo as colunas de  $A$  que correspondem com as colunas principais de  $RREF(A)$ , colocando-as em  $F$  na mesma ordem em que aparecem em  $A$ .

**Passo 3.** Construa uma matriz  $G$  com as linhas não nulas de  $RREF(A)$ , colocando-as em  $G$  na mesma ordem em que aparecem em  $RREF(A)$ .

Então,  $A = FG$  é uma fatoração de posto completo.

Podemos notar que, existem muitas bases para o espaço coluna de  $A$ , e com isso, muitas escolhas para  $F$ . De fato, se  $A = FG$  é uma fatoração de posto completo de  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$  com  $r > 0$ , escolha qualquer matriz inversível  $R \in \mathbb{C}_r^{r \times r}$ . Seja  $F_R = FR$  e  $G_R = R^{-1}G$ . Então claramente  $A = F_R G_R$  também é uma fatoração de posto completo de  $A$ . Mais adiante seremos capazes de selecionar um  $R$  para produzir uma fatoração de posto completo melhor. Novamente resumiremos com um teorema.

**Teorema 2.6.** *Toda matriz  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$  com  $r > 0$  possui infinitas fatorações de posto completo.*

**Exemplo 2.7.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 13 \\ 2 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ . Então  $RREF(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  então tomamos  $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $F = \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ . Com isso, temos a fatoração de posto completo, pois de fato  $A = FG$ .

Então com o que já foi mostrado, a partir daqui podemos desenvolver a pseudo-inversa utilizando fatoração de posto completo, uma das coisas que faz a pseudo-inversa ser tão boa é o fato de que uma matriz, não necessariamente quadrada possui posto. Como a unicidade pode ser provada da mesma forma que na subseção anterior, daremos como feita e começaremos resolvendo a questão da existência.

**Teorema 2.8.** *Suponha  $F \in \mathbb{C}_r^{m \times r}$ , isto é,  $F$  possui uma decomposição de posto coluna completo. Então  $F^+ = (F^* F)^{-1} F^*$ .*

**Prova:** Verificaremos as quatro equações de Moore-Penrose.

- $FF^+F = F((F^*F)^{-1}F^*)F = F(F^*F)^{-1}(F^*F) = FI = F$
- $F^+FF^+ = ((F^*F)^{-1}F^*)F((F^*F)^{-1}F^*) = (F^*F)^{-1}(F^*F)(F^*F)^{-1}F^* = I((F^*F)^{-1}F^*) = F^+$
- $F^+F = ((F^*F)^{-1}F^*)F = (F^*F)^{-1}(F^*F) = I_r$ , então  $(F^+F)^* = F^+F$
- $(FF^+)^* = (F(F^*F)^{-1}F^*)^* = F^{**}(F^*F)^{-1}F^* = F(F^*F)^{-1}F^* = F(F^*F)^{-1}F^* = FF^+$

Isso também vale para uma matriz  $G$  com posto linha completo. ■

Então, notamos que para matrizes de posto linha ou coluna completo, a pseudo-inversa escolhe uma inversa específica à esquerda (direita) da matriz. Com isso,  $F^+F = I_r$ , e  $GG^+ = I_r$ . Agora, para uma matriz arbitrária  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$  com  $r > 0$ , devemos mostrar como construir a pseudo-inversa.

**Definição 2.9.** Seja uma matriz  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ . Tome qualquer fatorização de posto completo de  $A = FG$ . Então  $F^+$  e  $G^+$  existem pelo teorema acima. Defina  $A^+ \in \mathbb{C}^{n \times m}$  por  $A^+ := G^+F^+$ . Em outras palavras,  $A^+ = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*$ .

**Teorema 2.10.** *Para uma matriz arbitrária  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$  com  $r > 0$ ,  $A^+$  definida acima satisfaz as quatro equações de Moore-Penrose, e portanto, é a única pseudo-inversa de  $A$ . Além disso,  $AA^+ = FF^+$  e  $A^+A = G^+G$  onde  $A = FG$  é qualquer fatorização de posto completo de  $A$ .*

**Prova:** Considere a notação da Definição 2.9. Então

- $AA^+A = AG^+F^+FG = AG^+G = FGG^+G = FG = A$
- $A^+AA^+ = G^+F^+AA^+ = G^+F^+FGA = G^+GA^+ = G^+GG^+F^+ = G^+F^+ = A^+$
- $AA^+ = FGG^+F^+ = FF^+$  e agora sabemos que  $(FF^+)^* = FF^+$
- $A^+A = G^+F^+FG = G^+G$  e sabemos que  $(G^+G)^* = G^+G$ . ■

Com isso, estabelecemos a existência de  $A^+$  para qualquer matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ .

**Exemplo 2.11.** Continuando do Exemplo 2.7:  $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 13 \\ 2 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , onde

$F = \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  e  $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  nos dá uma fatoração de posto completo de  $A$ . O cálculo

direto a partir das fórmulas dadas pelo Teorema 2.8, nos fornece  $G^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{130} & 0 \\ \frac{2}{130} & 0 \\ \frac{3}{130} & 1 \end{bmatrix}$  e  $F^+ =$

$\begin{bmatrix} -\frac{3}{130} & -\frac{22}{130} & \frac{79}{130} \\ \frac{130}{130} & -\frac{44}{130} & \frac{158}{130} \\ \frac{130}{130} & \frac{30}{130} & -\frac{90}{130} \end{bmatrix}$ . Note que, recordando da fórmula da inversa de uma matriz em termos da adjunta,  $G^+(GG^*)^{-1} = \frac{1}{\det(GG^*)}G^*adj(GG^*)$  e  $F^+ = (F^*F)^{-1}F^* = \frac{1}{\det(F^*F)}adj(F^*F)F^*$  então,

$$A^+ = \frac{1}{\det(F^*F)\det(GG^*)G^*adj(GG^*)adj(F^*F)F^*}.$$

Em particular, se as entradas de  $A$  consiste apenas por inteiros, as entradas de  $A^+$  serão número racionais com o denominador comum  $\det(F^*F)\det(GG^*)$ . Neste exemplo,  $\det(GG^*) = 26$  e  $\det(F^*F) = 5$ , formando o denominador comum 130.

Nós já notamos que uma matriz  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$  com  $r > 0$  possui uma infinidade de fatorações de posto completo. No próximo teorema, mostraremos que o único jeito de conseguir fatorações de posto completo é usando matrizes inversíveis.

**Teorema 2.12.** *Toda matriz  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$  com  $r > 0$  possui infinitas fatorações de posto completo. No entanto, se  $A = FG = F_1G_1$  são duas fatorações de posto completo de  $A$ , então existe uma matriz inversa  $R$  em  $\mathbb{C}^{r \times r}$  de tal modo que  $F_1 = FR$  e  $G_1 = R^{-1}G$ . Portanto,  $(R^{-1}G)^+ = G^+R$  e  $(FR)^+ = R^{-1}F^+$ .*

**Prova:** Como já provamos a primeira afirmação, suponha  $A = FG = F_1G_1$  são duas fatorações de posto completo de  $A$ . Então  $F_1G_1 = FG$ , com isso  $F_1^+F_1G_1 = F_1^+FG$  e portanto  $G_1 = (F_1^+F)G$  já que  $F_1^+F_1 = I_r$ . Note que  $F_1^+F_1$  é de tamanho  $r \times r$  e  $r = r(G_1) = r((F_1^+F)G) \leq r(F_1^+F_1) \leq r$ , desta forma  $r(F_1^+F_1) = r$  e a partir disso  $F_1^+F_1$  é inversível. Chamemos  $F_1^+F_1 = S$ .

Analogamente,  $F_1G_1 = FG$  implica que  $F_1G_1G_1^+ = FGG_1^+ = F_1$  visto que  $G_1G_1^+ = I_r$ . Novamente, note que  $GG_1^+$  é de tamanho  $r \times r$  de posto  $r$  e portanto  $GG_1^+$  é inversível.

Tomemos  $R = GG_1^+$ . Então  $SR = F_1^+FGG_1^+ = F_1^+AG_1^+ = F_1^+F_1G_1G_1^+ = I_r$ . Portanto  $S = R^{-1}$ . Agora podemos ver que  $G_1 = SG = R^{-1}G$  e  $F_1 = FGG_1^+ = FR$ .

Para terminar a prova,

$$\begin{aligned}
 (FR^+)^+ &= ((FR)^*(FR))^{-1}(FR)^* = (R^*F^*FR)^{-1}R^*F^* = \\
 &= R^{-1}(F^*F)^{-1}R^{*-1}R^*F^* = R^{-1}(F^*F)^{-1}F^* = R^{-1}F^+ \text{ e } (R^{-1}G)^+ = \\
 &= (R^{-1}G)^*((R^{-1}G)(R^{-1}G)^*)^{-1} = G^*(R^{-1})^*(R^{-1}GG^*R^{-1*})^{-1} = \\
 &= G^*(R^{-1})^*(R^{-1})^{*-1}(GG^*)^{-1}R = G^*(GG^*)^{-1} = G^+R.
 \end{aligned}$$

■

**Agradecimentos:** Agradeço à Professora Marta pela oportunidade desta Iniciação Científica e por me guiar nesta trajetória. Agradeço também à minha família - Marlene, Maurício e Letícia - por sempre me apoiarem.

*Abstract: Our Scientific Initiation research aims to study results and applications involving non-square matrices. In this work, we will present a fundamental tool to solve problems involving matrices, called Singular Value Decomposition (DVS), which consists of a method similar to the diagonalization of square matrices, in this case, we seek to write a matrix  $A \in M_{m \times n}$  in the form  $U\Sigma V^T$ , where the matrix  $\Sigma$  involves the singular values of  $A$  that are obtained from the eigenvalues of  $A^T A$ . This decomposition is used, for instance, in the study of the covariance matrix, in digital image processing and in least squares problems. In this work we will also introduce the pseudo-inverse, which generalizes the idea of an inverse to a matrix of any size, and it is possible to use either the DVS or the full rank factorization to obtain a candidate for the pseudo-inverse and finally we will present an example.*

*Keywords: eigenvalues and eigenvectors; singular value decomposition; spectral theorem; pseudo-inverse.*

## Referências Bibliográficas

- [1] Poole, D. *Álgebra Linear, Uma Introdução Moderna*. 2a. ed, Cengage Learning, São Paulo, 2016.
- [2] Schafer, C., *The Neural Network, its Techniques and Applications*, 2016. Disponível em: <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2016/Schafer.pdf>.
- [3] Piziak, R. e Odell, P.L., *Matrix Theory From Generalized Inverses to Jordan Form*. Taylor & Francis Group, New York, 2007.

## Salada Linear de Rabanetes

Marina Fuzaro Magossi

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

**Resumo:** A Genética é o campo da Biologia que estuda hereditariedade. Por meio dela, e com auxílio da Álgebra Linear, podemos determinar as características da enésima geração de uma população a partir das características da geração inicial. Para tal, faremos uso dos conhecimentos acerca de diagonalização de matrizes, autovalores e autovetores, e também de conceitos intuitivos de limite. O exemplo apresentado foi inspirado nas referências [1] e [2].

**Palavras-chave:** Álgebra linear; Genética; matrizes

### 1 *Mise en place*

A Genética é o campo da Biologia que estuda como nossas características - nossas, de outros animais, de plantas - são passadas de geração em geração, mas muitos de nós já não estamos mais tão familiarizados com alguns termos e conceitos, haja vista que as aulas de ciências da escola já fazem parte das lembranças de um passado remoto.

Recordemos, pois, que nossas células possuem estruturas chamadas de cromossomos, que andam em pares, e carregam consigo sequências de informações específicas as quais damos o nome de **genes**. Os genes são responsáveis por determinar o nosso genótipo, isto é, características como curvatura do nariz, capacidade de enrolar a língua, tipo sanguíneo, e até mesmo algumas doenças como a polidactilia e o albinismo.

Neste trabalho, estamos interessados exclusivamente na herança autossômica, ou seja, na transmissão dos genes que se encontram nos nossos cromossomos não-sexuais (autossômicos), que representam 22 dos 23 pares de cromossomos no ser humano.

Feito isso, voltemos a tratar dos genes, que também andam em pares, e a sua combinação é a responsável por nossas características. Esses pares podem ser de três maneiras, que aqui vamos chamar de  $DD$ ,  $Dr$  e  $rr$ .

Quando a característica determinada pelo genótipo  $DD$  é a mesma determinada pelo genótipo  $Dr$ , dizemos que o gene  $D$  é dominante em relação a  $r$ , ou também dizemos que  $r$  é recessivo em relação a  $D$ .

Nesse ponto é importante ressaltarmos duas coisas. A primeira delas é que o caso descrito no parágrafo anterior se trata da chamada “dominância completa”, mas, nesse trabalho, trataremos apenas da chamada “dominância incompleta”. A segunda delas é que os seres vivos possuem milhares de pares de genes, mas aqui vamos nos concentrar no estudo de apenas um par, transmitindo uma única característica específica.

Agora que já sabemos de todas essas informações, vamos analisar o resultado de possíveis acasalamentos. Como já mencionado, os genes podem se apresentar de três maneiras, sendo assim, um casal de progenitores pode ser de uma das seis seguintes maneiras:

1.  $DD - DD$
2.  $DD - Dr$
3.  $DD - rr$

4.  $Dr - Dr$

5.  $Dr - rr$

6.  $rr - rr$

Vamos, pois, montar as tabelas que nos mostrarão os possíveis genótipos dos descendentes, sabendo que cada indivíduo herda um gene de cada par de seus progenitores.

É bastante imediato observar que o genótipo de um descendente de um casal  $DD - DD$  (item 1) será idêntico ao de seus pais, assim como um descendente de um casal  $rr - rr$  (item 6). Analisemos, pois, os demais acasalamentos, de 2 a 5:

2	$D$	$D$	3	$D$	$D$	4	$D$	$r$	5	$D$	$r$
$D$	$DD$	$DD$	$r$	$Dr$	$Dr$	$D$	$DD$	$Dr$	$r$	$Dr$	$rr$
$r$	$Dr$	$Dr$	$r$	$Dr$	$Dr$	$r$	$Dr$	$rr$	$r$	$Dr$	$rr$

Com essas informações, podemos construir uma nova tabela, mostrada abaixo, desta vez com as probabilidades - apresentadas no meio da tabela - dos genótipos dos descendentes (Gd), que serão indicados na primeira coluna, de acordo com o genótipo dos progenitores (GP), que serão indicados na primeira linha.

Gd   GP	$DD - DD$	$DD - Dr$	$DD - rr$	$Dr - Dr$	$Dr - rr$	$rr - rr$
$DD$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
$Dr$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$rr$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

## 2 Preparando a salada

Com todo conhecimento construído, podemos agora apresentar um exemplo: a plantação de rabanetes.

Considere uma plantação em que exista uma população de rabanetes com três formatos: redondo, oval e alongado. Os rabanetes redondos apresentam genótipo  $DD$ ; os rabanetes ovais, genótipo  $Dr$ ; e os rabanetes alongados, genótipo  $rr$ . Nesse caso, como as plantas com genótipo  $DD$  e  $Dr$  não apresentam a mesma característica, dizemos tratar-se de um caso de **dominância incompleta**, pois a característica do genótipo  $Dr$  é uma combinação das características dos outros dois genótipos.

O agrônomo responsável pela plantação deseja fertilizar cada planta com uma de mesmo genótipo, a fim de manter a razão de rabanetes redondos, ovais e alongados.

Agora, vamos começar a escrever o problema matematicamente. Sejam  $a_n$  a fração de plantas com o genótipo  $DD$ ,  $b_n$  a fração de plantas com o genótipo  $Dr$ , e  $c_n$  a fração de plantas com o genótipo  $rr$ , todas na  $n$ -ésima geração. Assim, as frações da população inicial serão denominadas  $a_0$ ,  $b_0$  e  $c_0$  respectivamente.

Também, vamos escrever a tabela de probabilidades que irá representar a nossa matriz  $M$ .

Gd   GP	$DD - DD$	$Dr - Dr$	$rr - rr$
$DD$	1	$\frac{1}{4}$	0
$Dr$	0	$\frac{1}{2}$	0
$rr$	0	$\frac{1}{4}$	1



Agora, faremos o processo de diagonalização da matriz  $M$  e, efetuando-se todos os cálculos, iremos obter o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Feito isso, retornemos ao nosso problema inicial, de encontrar a distribuição de genótipos da  $n$ -ésima geração, a fim de descobrir se o método de manutenção de frações do agrônomo é eficaz.

Como  $M^n = PD^nP^{-1}$ , segue que

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot x^{(0)}$$

A partir disso, quando efetuamos todos os cálculos, obtemos

$$\begin{cases} a_n = a_0 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] b_0 \\ b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \\ c_n = c_0 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] b_0 \end{cases},$$

ou seja, as equações que representam as distribuições de genótipos da  $n$ -ésima geração da população de plantas.

Concluindo o problema, observe o que ocorre quando aplicamos o limite nas equações para  $n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] b_0 = a_0 + \frac{1}{2} b_0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} c_0 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] b_0 = c_0 + \frac{1}{2} b_0 \end{aligned}$$

Ou seja, no limite, não irão mais existir rabanetes ovais, independentemente da distribuição inicial de genótipos, o que prova que o agrônomo não escolheu um bom método de fecundação para manter a quantia de rabanetes redondos, ovais e alongados em sua plantação.

Contudo, retornando na tabela de distribuição de probabilidades,

Gd   GP	$DD - DD$	$DD - Dr$	$DD - rr$	$Dr - Dr$	$Dr - rr$	$rr - rr$
$DD$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
$Dr$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$rr$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

podemos observar que, a fim de manter as frações iniciais, o agrônomo não poderia cruzar os rabanetes ovais de maneira alguma. Os únicos cruzamentos permitidos seriam de rabanetes redondos com rabanetes redondos, rabanetes redondos com rabanetes alongados, e rabanetes alongados com rabanetes alongados, o que nos daria uma matriz identidade e, consequentemente, manteria as frações de rabanetes na plantação.

**Agradecimentos:** Agradeço à minha orientadora, Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti, e a todas as pessoas que tornaram esse artigo possível, colaborando de alguma maneira.

*Abstract: Genetics is the field of Biology that studies heredity. Through it, and with the help of Linear Algebra, we can determine the characteristics of the  $n$ th generation of a population from the characteristics of the initial generation. For this, we will make use of knowledge about diagonalization of matrices, eigenvalues and eigenvectors, as well as intuitive limit concepts. The example presented was inspired by the references [1] and [2].*

*Keywords: Linear Algebra; Genetics; matrices*

---

## Referências Bibliográficas

- [1] Anton, H., Rorres, C., *Álgebra Linear com Aplicações*, Bookman, 2012.
- [2] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1978.

# Uma Introdução às Teorias de Álgebra Homológica e de Homologia Simplicial

Marina Maria de Miguel<sup>†</sup>

Orientador(a): Thais Fernanda Mendes Monis

**Resumo:** Neste trabalho apresentaremos alguns conceitos basilares da Álgebra Homológica, a qual possui aplicações nas mais diversas áreas da Matemática, em particular, na Geometria. A partir disso, ilustraremos tal conexão via o estudo da Homologia Simplicial.

**Palavras-chave:** complexo de cadeia; homologia; módulos; álgebra homológica; homologia simplicial

## 1 Álgebra Homológica

A Álgebra Homológica é um método que desempenha importante papel em muitas áreas da Matemática. Esse método consiste em associar a um objeto matemático, tal como um espaço topológico, uma álgebra, um grupo ou uma nuvem de dados, uma família  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de grupos abelianos e uma família de homomorfismos de grupos  $d_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$  satisfazendo  $d_n \circ d_{n+1} = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Essa condição nos assegura que a imagem do homomorfismo  $d_{n+1}$  é um subgrupo do núcleo do homomorfismo  $d_n$ , isto é,  $\text{im}(d_{n+1}) \subset \ker(d_n)$ , de modo que podemos considerar o grupo quociente  $H_n(X) = \ker(d_n)/\text{im}(d_{n+1})$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Esses grupos quociente são chamados de *homologia* do objeto e acaba que carregam informações relevantes desse tais como, no caso de um espaço topológico, sua quantidade de componentes conexas por caminhos.

A seguir, estudaremos alguns tópicos introdutórios importantes para a Álgebra Homológica:

### 1.1 Módulos

Ao longo de todo o capítulo, tomemos  $R$  um anel comutativo com identidade  $1 \neq 0$ .

**Definição 1.1.** Módulo sobre  $R$ , ou  $R$ -módulo, é um grupo aditivo abeliano  $(X, +)$ , juntamente com a função  $\mu$  sendo:

$$\mu : R \times X \rightarrow X$$

tal qual satisfaz as três condições,  $\forall \alpha, \beta \in R$  e  $\forall x, y \in X$ :

1.  $\mu(\alpha + \beta, x) = \mu(\alpha, x) + \mu(\beta, x)$   
 $\mu(\alpha, x + y) = \mu(\alpha, x) + \mu(\alpha, y)$
2.  $\mu[\alpha, \mu(\beta, x)] = \mu(\alpha\beta, x)$
3.  $\mu(1, x) = x$

<sup>†</sup>A autora teve apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, Processo Fapesp no. 2021/00686-6.

**Observação 1.2.**  $\mu$ : multiplicação escalar do módulo  $X$ ;  $\mu(\alpha, x)$ : produto escalar de  $x$  por  $\alpha$  e denotado por  $\alpha x$ .

**Observação 1.3.** A estrutura de módulo que a terna  $((X, +), \mu)$  forma sobre  $R$  é uma generalização da estrutura de Espaço Vetorial em que  $\mu$  tem a função da multiplicação por escalar, pois para se ter um Espaço Vetorial, além das condições de módulo,  $R$  deve ser um corpo, e não apenas um anel comutativo com identidade  $1 \neq 0$ .

**Exemplo 1.4.** O anel  $(R, +, \cdot)$  é um módulo sobre si mesmo e para visualizar isso basta tomarmos a própria operação multiplicativa de  $R$  como sendo a função  $\mu : R \times R \rightarrow R$ .

**Definição 1.5.**  $A$  é submódulo do módulo  $X$  sobre  $R$  se, e somente se,  $A$  for um subconjunto não vazio de  $X$  que seja um  $R$ -módulo com respeito à adição e multiplicação escalar do módulo  $X$ .

**Proposição 1.6.** Um subconjunto não vazio  $A$  do módulo  $X$  sobre  $R$  é um submódulo de  $X$  se, e somente se, para todos  $\alpha \in R$  e  $u, v \in A$  segue que  $u + v \in A$  e  $\alpha u \in A$ .

**Definição 1.7.** Um elemento  $x$  de um módulo  $X$  é uma combinação linear de elementos de  $S$  se, e só se, existe um número finito de elementos  $x_1, \dots, x_n \in S$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$  tal que

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

**Definição 1.8.** O submódulo de  $X$  gerado por  $S$  é exatamente o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de  $S$ .

## 1.2 Homomorfismo

Define-se homomorfismo de um  $R$ -módulo  $X$  em um  $R$ -módulo  $Y$  por uma função  $f : X \rightarrow Y$  que é um homomorfismo de grupos e que preserva a multiplicação escalar, ou seja,  $\forall \alpha \in R$  e  $\forall u, v \in X$ :

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(u) + f(v) \\ f(\alpha u) &= \alpha f(u) \end{aligned}$$

**Definição 1.9.** Sejam  $X$  e  $Y$   $R$ -módulos, e  $h : X \rightarrow Y$  um homomorfismo de módulos. Denominamos  $h$  por:

- i) **monomorfismo** se, e somente se,  $h$  for injetiva;
- ii) **epimorfismo** se, e somente se,  $h$  for sobrejetiva;
- iii) **isomorfismo** se, e somente se,  $h$  for bijetiva;
- iv) **endomorfismo** se, e somente se,  $X = Y$ ;
- v) **automorfismo** se, e somente se,  $h$  for endomorfismo e isomorfismo.

Além disso, caso exista um isomorfismo  $h$  entre  $X$  e  $Y$ , dizemos que  $X$  e  $Y$  são isomorfos e denotamos por  $X \approx Y$ .

**Proposição 1.10.** Um homomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  do  $R$ -módulo  $X$  no  $R$ -módulo  $Y$  é um monomorfismo se, e somente se,  $\text{Ker}(h) = 0$ .

### 1.3 Soma e produto direto

Seja  $F = \{X_i; i \in M\}$  uma família indexada de  $R$ -módulos  $X_i$  arbitrária. O produto cartesiano da família  $F$  é definido como sendo:

$$P = \prod_{i \in M} X_i = \{f : M \rightarrow \cup_{i \in M} X_i \mid f(i) \in X_i, \forall i \in M\}$$

Chamaremos  $\cup_{i \in M} X_i$  por  $U$ . Definimos uma operação binária em  $P$  da seguinte forma: Para quaisquer  $f, g \in P$  temos:

$$\begin{aligned} f + g : M &\rightarrow U \\ i &\mapsto (f + g)(i) = f(i) + g(i) \in X_i \end{aligned}$$

$f + g$  é uma operação binária pois cada  $X_i$  é grupo,  $f(i) \in X_i$  e  $g(i) \in X_i$ , logo,  $f(i) + g(i) = (f + g)(i) \in X_i$ .

Além disso, podemos definir a multiplicação escalar pela função

$$\begin{aligned} \mu : R \times P &\rightarrow P \\ (\alpha, f) &\mapsto \mu(\alpha, f) = \alpha f : M \rightarrow U \end{aligned}$$

sendo  $(\alpha f)(i) = \alpha[f(i)]$ , para todo  $i \in M$ . Essa multiplicação escalar e a soma definida tornam  $P$  um módulo sobre  $R$ , que é conhecido por produto direto da família  $F$  de  $R$ -módulos  $X_i$ ,  $i \in M$ .

Consideremos o subconjunto  $S$  de  $P$  formado por todas as funções  $f$  tais que  $f(i) \neq 0$  somente para uma quantidade finita de índices.  $S$  é um submódulo de  $P$ , conhecido por soma direta da família  $F$ , e denotado por:

$$S = \sum_{i \in M} X_i.$$

Outra definição importante é a seguinte:

**Definição 1.11.** Seja  $F = \{X_i, i \in M\}$  uma família de submódulos de  $X$ . Dizemos que  $X$  é soma direta de seus submódulos de  $F$  quando a função

$$\begin{aligned} \psi' : \sum_{i \in M} X_i &\rightarrow X \\ f &\mapsto \sum_{i \in M} f(i) \end{aligned}$$

for um isomorfismo.

### 1.4 Módulo livre

Um  $R$ -módulo  $F$  é chamado de  $R$ -módulo livre quando existir um conjunto  $S$  juntamente com uma função  $f : S \rightarrow F$  tal que, para cada função  $g : S \rightarrow X$  do conjunto  $S$  até o  $R$ -módulo  $X$ , existe um único homomorfismo  $h : F \rightarrow X$  do módulo  $F$  no módulo  $X$  tal que ocorre a relação comutativa

$$h \circ f = g.$$

Com isso, temos o seguinte triângulo comutativo:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & F \\ & \searrow g & \downarrow h \\ & & X \end{array}$$

**Exemplo 1.12.** Todo espaço vetorial é um módulo livre. De fato, lembre-se que um espaço vetorial é simplesmente um  $R$ -módulo, com  $R$  sendo um corpo. Assim, seja  $F$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  qualquer, ou seja, um  $\mathbb{K}$ -módulo, onde  $\mathbb{K}$  é um corpo. Da álgebra linear, sabemos que  $F$  possui uma base, isto é, existe um subconjunto de vetores  $S \subset F$  tal que  $S$  é linearmente independente e  $S$  gera  $F$ . Dito de outro modo:

1.  $\forall v \in F$ , existem  $u_1, \dots, u_k \in S$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  tal que  $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$ , e
2. Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ ,  $u_1, \dots, u_k \in S$  e  $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0$ , então  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ .

Agora, basta tomarmos  $f : S \rightarrow F$  como sendo a inclusão que teremos satisfeita a condição:

- Para toda função  $g : S \rightarrow X$ , onde  $X$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, existe uma única função  $h : F \rightarrow X$  tal que  $h$  é uma transformação linear (ou seja,  $h$  é um  $\mathbb{K}$ -homomorfismo) e  $h|_S = g$ , ou seja,  $h \circ f = g$ .

Definimos essa  $h$  da seguinte maneira: Para cada  $u \in S \subset F$  temos  $h(u) = g(u)$ , com isso, segue que

$$\begin{aligned} h : F &\rightarrow X \\ v &\mapsto h(v) = \lambda_1 h(u_1) + \dots + \lambda_k h(u_k) \end{aligned}$$

lembrando que  $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$ , com  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  e  $u_1, \dots, u_k \in V$ . Então  $h(v) = h(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k) = \lambda_1 g(u_1) + \dots + \lambda_k g(u_k)$ .

## 1.5 Sequência exata

**Definição 1.13.** Consideramos por sequência exata de módulos uma sequência finita ou infinita

$$\dots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \dots$$

de homomorfismos de  $R$ -módulos tal que a imagem do homomorfismo de chegada coincida com o núcleo do homomorfismo de saída em todos os módulos, exceto nas extremidades (caso haja) da sequência.

Por exemplo, com relação ao módulo  $Y$  deve-se ocorrer

$$Im(f) = Ker(g).$$

Qualquer sequência exata da forma

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

será chamada de sequência exata curta.

## 1.6 Homologia

**Definição 1.14.** Complexo de cadeia é uma sequência de grupos abelianos  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  e homomorfismos  $(\partial_n : X_n \rightarrow X_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$  tal que  $Im(\partial_{n+1}) \subset Ker(\partial_n)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\dots \rightarrow X_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \rightarrow \dots$$

**Definição 1.15.** Seja  $S$  um conjunto não vazio. Denotamos por  $F(S)$  o grupo livre gerado por  $S$ , ou seja, cada elemento de  $F(S)$  é da forma:

$$\sum_{s \in S, n_s \in \mathbb{Z}} n_s s,$$

onde quase todos os  $n_s$  são nulos, exceto para um número finito deles.

A soma definida no grupo livre gerado por  $S$  se dá por:

$$+ : \sum_{n_s \in \mathbb{Z}} n_s s + \sum_{m_s \in \mathbb{Z}} m_s s = \sum_{s \in S} (n_s + m_s) s$$

Com isso, temos que

1.  $S = \{a\} \Rightarrow F(S) = \{na, n \in \mathbb{Z}\} \approx \mathbb{Z}$
2.  $S = \{a, b\} \Rightarrow F(S) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

**Definição 1.16.** Seja  $C : \cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots$  um complexo de cadeias. Define-se por  $n$ -ésima homologia da cadeia  $C$ :

$$H_n(C) = \frac{\text{Ker}(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}.$$

## 2 Homologia simplicial

Podemos calcular as Homologias relacionadas a inúmeros objetos, porém, neste trabalho nos restringiremos à Homologia Simplicial, a qual trata de objetos que podem ser decompostos em  $n$ -simplexos, como é o caso do tetraedro oco. E, para isso, precisamos ter em mente o que são os  $n$ -simplexos orientados em  $\mathbb{R}^3$ :

- 0-simplexo orientado é um ponto  $P_0$ ;
- 1-simplexo orientado é um segmento de reta orientado  $P_0P_1$ ;
- 2-simplexo orientado é região triangular  $P_0P_1P_2$ . juntamente com a ordem de movimentos de  $P_0$  à  $P_1$ ,  $P_1$  à  $P_2$ ,  $P_2$  à  $P_0$ ;
- 3-simplexo orientado é um tetraedro  $P_0P_1P_2P_3$  orientado.

### 2.1 Exemplo

Nesta parte, estudaremos as homologias relacionadas com o tetraedro oco e a função bordo  $\partial_n$ , a qual será definida em breve. Com relação ao objeto em questão, temos:

- Vértices:  $P_0, P_1, P_2, P_3$   
 $C_0(X) = F(\{P_0, P_1, P_2, P_3\})$
- Arestas:  $\sigma_0 = [P_0P_1]$ ,  $\sigma_1 = [P_0P_3]$ ,  $\sigma_2 = [P_0P_2]$ ,  $\sigma_3 = [P_1P_2]$ ,  $\sigma_4 = [P_1P_3]$ ,  $\sigma_5 = [P_2P_3]$   
 $C_1(X) = F(\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\})$
- Faces:  $f_1 = [P_0P_1P_2]$ ,  $f_2 = [P_0P_1P_3]$ ,  $f_3 = [P_1P_2P_3]$ ,  $f_4 = [P_0P_3P_2]$   
 $C_2(X) = F(\{f_1, f_2, f_3, f_4\})$

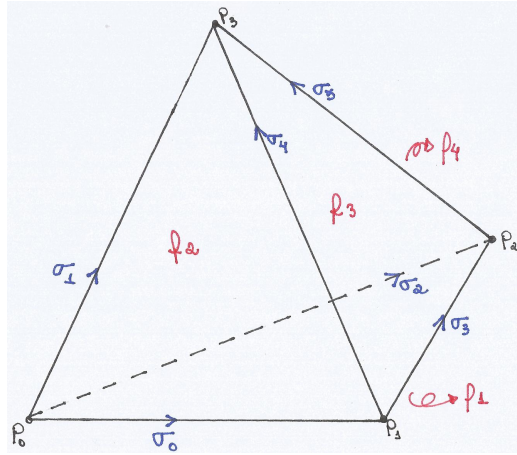


Figura 8.1: Tetraedro oco orientado. Fonte: Elaborado pela autora.

Sendo o complexo de cadeias juntamente com as homologias:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C_2(X) & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(X) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & H_2(X) & & H_1(X) & & H_0(X)
 \end{array}$$

Sejam as funções bordo  $\partial_n$ :

$$\begin{aligned}
 \partial_2 : C_2(X) &\rightarrow C_1(X) \\
 P_i P_j P_k &\mapsto \partial_2(P_i P_j P_k) = P_i P_j - P_i P_k + P_j P_k \\
 \partial_1 : C_1(X) &\rightarrow C_0(X) \\
 P_i P_j &\mapsto \partial_1(P_i P_j) = P_j - P_i \\
 \partial_0 : C_0(X) &\rightarrow 0 \\
 P_i &\mapsto \partial_0(P_i) = 0
 \end{aligned}$$

Estudemos cada um dos casos...

1.  $\partial_2 : C_2(X) \rightarrow C_1(X)$

$$\begin{aligned}
 \partial_2(f_1) &= \partial_2(P_0 P_1 P_2) = P_0 P_1 - P_0 P_2 + P_1 P_2 = \sigma_0 - \sigma_2 + \sigma_3 \\
 \partial_2(f_2) &= \partial_2(P_0 P_1 P_3) = P_0 P_1 - P_0 P_3 + P_1 P_3 = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_4 \\
 \partial_2(f_3) &= \partial_2(P_1 P_2 P_3) = P_1 P_2 - P_1 P_3 + P_2 P_3 = \sigma_3 - \sigma_4 + \sigma_5 \\
 \partial_2(f_4) &= \partial_2(P_0 P_3 P_2) = P_0 P_3 - P_0 P_2 + P_3 P_2 = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_5
 \end{aligned}$$

Assim, utilizando a notação de coordenadas, temos:

$$\begin{aligned}
 \partial_2 : C_2(X) &\rightarrow C_1(X) \\
 (1, 0, 0, 0) &\mapsto (1, 0, -1, 1, 0, 0) \\
 (0, 1, 0, 0) &\mapsto (1, -1, 0, 0, 1, 0) \\
 (0, 0, 1, 0) &\mapsto (0, 0, 0, 1, -1, 1) \\
 (0, 0, 0, 1) &\mapsto (0, 1, -1, 0, 0, -1)
 \end{aligned}$$



Sabemos que  $Ker(\partial_2) = \{n_1f_1 + n_2f_2 + n_3f_3 + n_4f_4, \text{ tal que } \partial_2(n_1f_1 + n_2f_2 + n_3f_3 + n_4f_4) = 0, n_1, \dots, n_4 \in \mathbb{Z}\}$ . Mas note,

$$\begin{aligned} \partial_2(n_1f_1 + n_2f_2 + n_3f_3 + n_4f_4) = 0 &\iff \\ \partial_2(n_1P_0P_1P_2) + \partial_2(n_2P_0P_1P_3) + \partial_2(P_1P_2P_3) + \partial_2(P_0P_3P_2) = 0 &\iff \\ (n_1P_0P_1 - n_1P_0P_2 + n_1P_1P_2) + (n_2P_0P_1 - n_2P_0P_3 + n_2P_1P_3) + \\ (n_3P_1P_2 - n_3P_1P_3 + n_3P_2P_3) + (n_4P_0P_3 - n_4P_0P_2 + n_4P_3P_2) = 0 &\iff \\ (n_1 + n_2)P_0P_1 + (-n_1 - n_4)P_0P_2 + (n_1 + n_3)P_1P_2 + (-n_2 + n_4)P_0P_3 + (n_2 - n_3)P_1P_3 + \\ (n_3 - n_4)P_2P_3 = 0 &\iff \\ \begin{cases} n_1 + n_2 = 0 \\ -n_1 - n_4 = 0 \\ n_1 + n_3 = 0 \\ -n_2 + n_4 = 0 \\ n_2 - n_3 = 0 \\ n_3 - n_4 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} n_1 = -n_2 \\ n_1 = -n_4 \\ n_1 = -n_3 \\ n_2 = n_4 \\ n_2 = n_3 \\ n_3 = n_4 \end{cases} \iff n_1 = -n_2 = -n_3 = -n_4. \end{aligned}$$

Então, o núcleo de  $\partial_2$  é da forma:

$$Ker(\partial_2) = \{m(f_1 - f_2 - f_3 - f_4), m \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

É simples observar esse isomorfismo, basta relacionar cada  $m(f_1 - f_2 - f_3 - f_4)$  com o número  $m \in \mathbb{Z}$ . Considerando  $Im(\partial_3) = 0$  e (2.1), podemos estudar o segundo grupo de homologia da cadeia  $C$ :

$$\begin{aligned} H_2(X) &= \frac{Ker(\partial_2)}{Im(\partial_3)} = \{a + Im(\partial_3), a \in Ker(\partial_2)\} \implies \\ H_2(X) &= \{m(f_1 - f_2 - f_3 - f_4) + 0, m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{m(f_1 - f_2 - f_3 - f_4), m \in \mathbb{Z}\} = Ker(\partial_2) \implies \\ H_2(X) &= Ker(\partial_2) \simeq \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ou seja,  $H_2(X)$  é isomorfo ao grupo dos inteiros.

Ainda, com relação à aplicação  $\partial_2$ , é importante expressar o conjunto  $Im(\partial_2)$ , o qual consiste em:

$$\begin{aligned} Im(\partial_2) &= \{\partial_2(c) = b \in C_1(X), c \in C_2(X)\} = \{\sum m_i \sigma_i = \partial_2(\sum n_i f_i)\} \\ &= \{\sum m_i \sigma_i = \sum n_i \partial_2(f_i)\} \\ Im(\partial_2) &= \{n_1 \partial_2(f_1) + n_2 \partial_2(f_2) + n_3 \partial_2(f_3) + n_4 \partial_2(f_4)\} \implies \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} Im(\partial_2) &= \{n_1(\sigma_0 - \sigma_2 + \sigma_3) + n_2(\sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_4) + n_3(\sigma_3 - \sigma_4 + \sigma_5) + n_4(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_5)\} \implies \\ Im(\partial_2) &= \{(n_1 + n_2)\sigma_0 + (-n_2 + n_4)\sigma_1 + (-n_1 - n_4)\sigma_2 \\ &\quad + (n_1 + n_3)\sigma_3 + (n_2 - n_3)\sigma_4 + (n_3 - n_4)\sigma_5\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

**Observação 2.1.**  $Im(\partial_3) \subset Ker(\partial_2)$ , pois  $Im(\partial_3) = \{0\} \subset C_2(X)$  e  $0 \in Ker(\partial_2)$ .

2.  $\partial_1 : C_1(X) \rightarrow C_0(X)$

$$\partial_1(\sigma_0) = \partial_1(P_0P_1) = P_1 - P_0$$

$$\partial_1(\sigma_1) = \partial_1(P_0P_3) = P_3 - P_0$$

$$\partial_1(\sigma_2) = \partial_1(P_0P_2) = P_2 - P_0$$

$$\partial_1(\sigma_3) = \partial_1(P_1P_2) = P_2 - P_1$$

$$\partial_1(\sigma_4) = \partial_1(P_1P_3) = P_3 - P_1$$

$$\partial_1(\sigma_5) = \partial_1(P_2P_3) = P_3 - P_2$$

Utilizando a notação de coordenadas temos:

$$\begin{aligned} \partial_1 : C_1(X) &\rightarrow C_0(X) \\ (1, 0, 0, 0, 0, 0) &\mapsto (-1, 1, 0, 0) \\ (0, 1, 0, 0, 0, 0) &\mapsto (-1, 0, 0, 1) \\ (0, 0, 1, 0, 0, 0) &\mapsto (-1, 0, 1, 0) \\ (0, 0, 0, 1, 0, 0) &\mapsto (0, -1, 1, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 1, 0) &\mapsto (0, -1, 0, 1) \\ (0, 0, 0, 0, 0, 1) &\mapsto (0, 0, -1, 1) \end{aligned}$$

Calculemos o núcleo de  $\partial_1$ :

$$\begin{aligned} Ker(\partial_1) &= \{b \in C_1(X) : \partial_1(b) = 0\} = \{\sum m_i \sigma_i : \sum m_i \partial_1(\sigma_i) = 0\} \Rightarrow \\ Ker(\partial_1) &= \{\sum m_i \sigma_i : m_0(P_1 - P_0) + m_1(P_3 - P_0) + m_2(P_2 - P_0) + m_3(P_2 - P_1) \\ &\quad + m_4(P_3 - P_1) + m_5(P_3 - P_2) = 0\} \Rightarrow \\ Ker(\partial_1) &= \{\sum m_i \sigma_i : (-m_0 - m_1 - m_2)P_0 + (m_0 - m_3 - m_4)P_1 \\ &\quad + (m_2 + m_3 - m_5)P_2 + (m_1 + m_4 + m_5)P_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Estudando os coeficientes separadamente, temos:

$$\begin{cases} -m_0 - m_1 - m_2 = 0 \\ m_0 - m_3 - m_4 = 0 \\ m_2 + m_3 - m_5 = 0 \\ m_1 + m_4 + m_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_0 + m_1 + m_2 = 0 \\ m_0 = m_3 + m_4 \\ m_5 = m_2 + m_3 \\ m_1 + m_4 + m_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0 \\ m_0 = m_3 + m_4 \\ m_5 = m_2 + m_3 \end{cases}$$

Logo:

$$Ker(\partial_1) = \{\sum m_i \sigma_i : m_0 = m_3 + m_4, m_5 = m_2 + m_3, e, m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0\}. \quad (2.4)$$

**Observação 2.2.** Como esperado, ocorre  $Im(\partial_2) \subset Ker(\partial_1)$ . De fato, de acordo com (2.3), os coeficientes dos elementos em  $Im(\partial_2)$  são da forma:

$$m_0 = n_1 + n_2; \quad m_1 = -n_2 + n_4; \quad m_2 = -n_1 - n_4; \quad m_3 = n_1 + n_3; \quad m_4 = n_2 - n_3; \quad m_5 = n_3 - n_4$$

Assim,

$$\begin{cases} (n_1 + n_2) = (n_1 + n_3) + (n_2 - n_3) \\ (n_3 - n_4) = (-n_1 - n_4) + (n_1 + n_3) \\ (-n_2 + n_4) + (-n_1 - n_4) + (n_1 + n_3) + (n_2 - n_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_0 = m_3 + m_4 \\ m_5 = m_2 + m_3 \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0 \end{cases}$$

Ou seja, todo elemento de  $Im(\partial_2)$  pertence a  $Ker(\partial_1)$ , logo,  $Im(\partial_2) \subset Ker(\partial_1)$ .

**Observação 2.3.** Mostremos agora que também ocorre  $Ker(\partial_1) \subset Im(\partial_2)$ . Seja  $a \in Ker(\partial_1)$  qualquer. De (2.4), segue:

$$a \in Ker(\partial_1) \implies \begin{cases} m_0 = m_3 + m_4 \\ m_5 = m_2 + m_3 \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0 \end{cases} \implies$$

$$\begin{aligned} a &= (m_3 + m_4)\sigma_0 + m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + m_3\sigma_3 + m_4\sigma_4 + (m_2 + m_3)\sigma_5 \\ &= m_1\sigma_1 + m_2(\sigma_2 + \sigma_5) + m_3(\sigma_3 + \sigma_0 + \sigma_5) + m_4(\sigma_0 + \sigma_4) \\ &= m_1P_0P_3 + m_2(P_0P_2 + P_2P_3) + m_3(P_1P_2 + P_0P_1 + P_2P_3) + m_4(P_0P_1 + P_1P_3) \\ &= m_1P_0P_3 - m_2(\partial_2(P_0P_3P_2) - P_0P_3) + m_3(\partial_2(P_0P_1P_2) + P_2P_3 + P_0P_2) \\ &\quad + m_4(\partial_2(P_0P_1P_3) + P_0P_3) \\ &= m_1P_0P_3 + m_2P_0P_3 + m_3P_2P_3 + m_3P_0P_2 + m_4P_0P_3 - m_2\partial_2(P_0P_3P_2) \\ &\quad + m_3\partial_2(P_0P_1P_2) + m_4\partial_2(P_0P_1P_3) \\ &= m_1P_0P_3 + m_2P_0P_3 + m_4P_0P_3 - m_3(P_3P_2 - P_0P_2) - m_2\partial_2(P_0P_3P_2) \\ &\quad + m_3\partial_2(P_0P_1P_2) + m_4\partial_2(P_0P_1P_3) \\ &= m_1P_0P_3 + m_2P_0P_3 + m_4P_0P_3 - m_3(\partial_2(P_0P_3P_2) - P_0P_3) - m_2\partial_2(P_0P_3P_2) \\ &\quad + m_3\partial_2(P_0P_1P_2) + m_4\partial_2(P_0P_1P_3) \\ &= m_1P_0P_3 + m_2P_0P_3 + m_3P_0P_3 + m_4P_0P_3 - m_3\partial_2(f_4) - m_2\partial_2(f_4) \\ &\quad + m_3\partial_2(f_1) + m_4\partial_2(f_2) \\ &= (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)P_0P_3 + m_3\partial_2(f_1) + m_4\partial_2(f_2) + (-m_3 - m_2)\partial_2(f_4) \end{aligned}$$

Como, por hipótese, temos  $a \in Ker(\partial_1)$ , então  $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$ , logo:

$$a = m_3\partial_2(f_1) + m_4\partial_2(f_2) + 0\partial_2(f_3) + (-m_3 - m_2)\partial_2(f_4)$$

E por (2.2) vemos que  $a \in Im(\partial_2)$  para todo  $a \in Ker(\partial_1)$ , logo,  $Ker(\partial_1) \subset Im(\partial_2)$ .

**Observação 2.4.** De (2.2) e (2.3) podemos concluir que  $Ker(\partial_1) = Im(\partial_2)$ .

Tendo isso em mente, estudemos o primeiro grupo de homologia da cadeia  $C$ :

$$H_1(X) = \frac{Ker(\partial_1)}{Im(\partial_2)} = \{a + Im(\partial_2), a \in Ker(\partial_1)\}.$$

Devemos recordar que  $\forall a, b \in Ker(\partial_1)$ :  $a + Im(\partial_2) = b + Im(\partial_2) \iff a - b \in Im(\partial_2)$ . Note que para todo  $a \in Ker(\partial_1)$ ,  $a - 0 \in Ker(\partial_1) = Im(\partial_2)$ , logo  $a + Im(\partial_2) = 0 + Im(\partial_2)$  e, portanto:

$$H_1(X) = \{0 + Im(\partial_2)\} = \{\bar{0}\} = 0 \quad (2.5)$$

Vejamos como se comporta o conjunto  $Im(\partial_1)$ :

$$\begin{aligned} Im(\partial_1) &= \{b \in C_0(X) : b = \partial_1(a), a \in C_1(X)\} = \{\sum r_i P_i = \sum m_i \partial_1(\sigma_i)\} \implies \\ Im(\partial_1) &= \{\sum r_i P_i = m_0(P_1 - P_0) + m_1(P_3 - P_0) + m_2(P_2 - P_0) + m_3(P_2 - P_1) \\ &\quad + m_4(P_3 - P_1) + m_5(P_3 - P_2)\} \\ Im(\partial_1) &= \{(-m_0 - m_1 - m_2)P_0 + (m_0 - m_3 - m_4)P_1 \\ &\quad + (m_2 + m_3 - m_5)P_2 + (m_1 + m_4 + m_5)P_3\} \end{aligned}$$

### 3. $\partial_0 : C_0(X) \rightarrow C_{-1}(X)$

Temos por definição que  $C_{-1}(X) = \{0\}$ , dessa forma  $\partial_0(P_i) = 0$  para todo  $P_i \in C_0(X)$ , logo:

$$\text{Ker}(\partial_0) = C_0(X).$$

Queremos obter o grupo de homologia da cadeia  $C$  relacionado ao bordo 0, e para fazê-lo precisaremos realizar certos ajustes. A Homologia em questão é dada por:

$$H_0 = \frac{\text{Ker}(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \{a + \text{Im}(\partial_1), a \in \text{Ker}(\partial_0)\},$$

sendo que podemos escrever a imagem do bordo 1 como o gerado do bordo das arestas, isto é:

$$\begin{aligned} \text{Im}(\partial_1) &= \left\{ \sum r_i P_i \right\} \\ &= \{m_0(P_1 - P_0) + m_1(P_3 - P_0) + m_2(P_2 - P_0) + m_3(P_2 - P_1) \\ &\quad + m_4(P_3 - P_1) + m_5(P_3 - P_2)\} \\ &= \langle \partial_1(\sigma_0), \partial_1(\sigma_1), \partial_1(\sigma_2), \partial_1(\sigma_3), \partial_1(\sigma_4), \partial_1(\sigma_5) \rangle \\ &= \langle (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1), (0, 0, -1, 1) \rangle \end{aligned}$$

Porém, note que  $\partial_1(\sigma_3)$ ,  $\partial_1(\sigma_4)$  e  $\partial_1(\sigma_5)$  podem ser escritos como combinação linear de  $\partial_1(\sigma_0)$ ,  $\partial_1(\sigma_1)$  e  $\partial_1(\sigma_2)$ :

$$\begin{aligned} \partial_1(\sigma_3) &= -\partial_1(\sigma_0) + \partial_1(\sigma_2) = -(-1, 1, 0, 0) + (-1, 0, 1, 0) = (0, -1, 1, 0) \\ \partial_1(\sigma_4) &= -\partial_1(\sigma_0) + \partial_1(\sigma_1) = -(-1, 1, 0, 0) + (-1, 0, 0, 1) = (0, -1, 0, 1) \\ \partial_1(\sigma_5) &= -\partial_1(\sigma_2) + \partial_1(\sigma_1) = -(-1, 0, 1, 0) + (-1, 0, 0, 1) = (0, 0, -1, 1) \end{aligned}$$

Dessa forma:

$$\text{Im}(\partial_1) = \langle (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0) \rangle \quad (2.6)$$

Além disso,  $\text{Ker}(\partial_0) = C_0(X) = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , porém essa não é a única base para esse espaço, note que  $(-1, 0, 0, 1)$ ,  $(-1, 0, 1, 0)$ ,  $(-1, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 1)$  também forma uma base, pois gera  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  e é um conjunto linearmente independente:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

assim,  $\text{Ker}(\partial_0) = \langle (-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$ , o que juntamente com (2.6) nos permite trabalhar com a Homologia em questão da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{\text{Ker}(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \{a + \text{Im}(\partial_1), a \in \text{Ker}(\partial_0)\} \\ &= \frac{\langle (-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle}{\langle (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0) \rangle}. \end{aligned}$$

Seja  $a \in \text{Ker}(\partial_0)$  qualquer, vimos que  $a \in \langle (-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$ , logo  $a$  é da forma:

$$a = n_1(-1, 0, 0, 1) + n_2(-1, 0, 1, 0) + n_3(-1, 1, 0, 0) + n_4(0, 0, 0, 1), \quad n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}$$

Logo, para a classe de equivalência de  $a$  temos:

$$\begin{aligned} a + Im(\partial_1) &= (n_1(-1, 0, 0, 1) + n_2(-1, 0, 1, 0) + n_3(-1, 1, 0, 0) + n_4(0, 0, 0, 1)) + Im(\partial_1) \\ &= n_1(-1, 0, 0, 1) + Im(\partial_1) + n_2(-1, 0, 1, 0) + Im(\partial_1) \\ &\quad + n_3(-1, 1, 0, 0) + Im(\partial_1) + n_4(0, 0, 0, 1) + Im(\partial_1) \end{aligned}$$

Porém, devemos observar que:

$$\begin{aligned} n_1(-1, 0, 0, 1) \in Im(\partial_1) &\implies n_1(-1, 0, 0, 1) - 0 \in Im(\partial_1) \\ &\implies n_1(-1, 0, 0, 1) + Im(\partial_1) = 0 + Im(\partial_1) \\ n_2(-1, 0, 1, 0) \in Im(\partial_1) &\implies n_2(-1, 0, 1, 0) - 0 \in Im(\partial_1) \\ &\implies n_2(-1, 0, 1, 0) + Im(\partial_1) = 0 + Im(\partial_1) \\ n_3(-1, 1, 0, 0) \in Im(\partial_1) &\implies n_3(-1, 1, 0, 0) - 0 \in Im(\partial_1) \\ &\implies n_3(-1, 1, 0, 0) + Im(\partial_1) = 0 + Im(\partial_1) \end{aligned}$$

Logo, reescrevendo a classe de equivalência de  $a$ , segue que:

$$\begin{aligned} a + Im(\partial_1) &= (0 + Im(\partial_1)) + (0 + Im(\partial_1)) + (0 + Im(\partial_1)) + (n_4(0, 0, 0, 1) + Im(\partial_1)) \\ &= n_4(0, 0, 0, 1) + Im(\partial_1), \end{aligned}$$

é válido para todo  $a \in Ker(\partial_0)$ . Portanto:

$$H_0 = \frac{Ker(\partial_0)}{Im(\partial_1)} = \{n(0, 0, 0, 1) + Im(\partial_1), a \in Ker(\partial_0), n \in \mathbb{Z}\} \approx \mathbb{Z}.$$

### 3 Considerações finais

Como mencionado anteriormente, essas homologias carregam informações relevantes dos objetos em questão e de fato isso acontece. Vimos que  $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$ , esse resultado nos garante que o tetraedro oco é conexo por caminhos, isto é, para quaisquer dois pontos nesse espaço topológico, existe um caminho que os conecte. Além disso,  $H_1(X) = 0$  nos garante que todo laço no tetraedro oco pode ser deformado a fim de se obter o laço trivial. As demais homologias também nos retornam resultados importantes do objeto em questão, mas referentes a dimensões maiores, as quais não convém a esse trabalho. Porém, fica nítida a relação entre a Álgebra e a Topologia que esta Álgebra Homológica nos permite realizar.

**Agradecimentos:** Agradeço primeiramente a Deus pela minha vida, agradeço minha orientadora a Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis por todo apoio, paciência e disposição. Também não poderia deixar de agradecer minha família e amigos por todo apoio, ajuda e incentivos, e a FAPESP pela ajuda financeira em minha pesquisa.

*Abstract: In this paper we study some basic concepts of Homological Algebra, which has applications at the most diverse areas of Mathematics, in particular, in Geometry. We will illustrate this connection by the study of Simplicial Homology.*

*Keywords: chain complex; homology; modules; homological algebra; simplicial homology*

### Referências Bibliográficas

- [1] Fraleigh, John B., *A first course in abstract algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Mass.-London-Don Mills, Ont., 1967.

- [2] Hu, Sze-tsen, *Introduction to homological algebra*. Holden-Day, Inc., San Francisco, Calif.-London-Amsterdam, 1968.
- [3] Rotman, Joseph J., *An introduction to homological algebra*. Second edition. Universitext. Springer, New York, 2009.
- [4] Vick, James W., *Homology theory. An introduction to algebraic topology*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 145. Springer-Verlag, New York, 1994.

# Introdução à Homologia Persistente para Análise de Dados

Richard Guilherme dos Santos<sup>†</sup>  
Orientador(a): Prof. Dr. Thiago de Melo

**Resumo:** A Topologia de Persistência consiste no estudo de propriedades topológicas de dados por meio de filtrações de complexos simpliciais. Associamos a cada conjunto de pontos uma filtração, podendo analisar a persistência de propriedades topológicas na variação de um parâmetro  $r$ , descrevendo o surgimento e desaparecimento de “buracos de dimensão  $k$ ” nos complexos da filtração. Para visualização dessas persistências utilizamos o *diagrama de persistência*, gráfico que mostra o surgimento e desaparecimento dos geradores de certos grupos de homologia.

**Palavras-chave:** Diagrama de Persistência; Homologia Persistente; Análise Topológica de Dados

## 1 Preliminares

**Definição 1.1.** Seja  $S = \{u_0, \dots, u_k\}$  um conjunto de pontos que não está contido em um hiperplano de dimensão  $k - 1$ . Chamamos de  $k$ -simplexo o conjunto

$$\text{Simplexo}(S) = [u_0, u_1, \dots, u_k] = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i u_i : u_i \in S, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \forall i \in \{0, \dots, k\} \right\}.$$

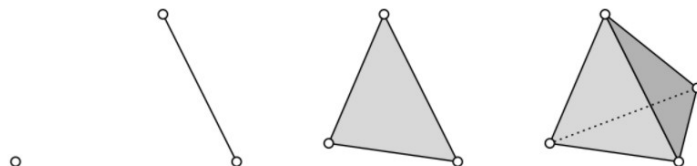


Figura 9.1: Simplexos de dimensões 0, 1, 2 e 3. Imagem retirada de [2]

**Definição 1.2.** Um complexo simplicial  $K$  é uma coleção finita de simplexos obedecendo a certas propriedades:

- $\sigma \in K$  e  $\sigma_0 \leq \sigma \Rightarrow \sigma_0 \in K$ ;
- $\sigma, \sigma_0 \in K \Rightarrow \sigma \cap \sigma_0$  é o conjunto vazio ou face de ambos.

**Definição 1.3** (Complexo de Vietoris-Rips). Definimos como Complexo de Vietoris-Rips de um conjunto de pontos  $S$  e raio  $r > 0$  o conjunto:

$$\text{Rips}(r) = \{\text{Simplexo}(V) : V \subset S \text{ e } \text{diam}(V) \leq 2r\}.$$

**Definição 1.4** (Filtração). Chamamos de filtração de um complexo simplicial uma família encaixante de subcomplexos  $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n$ .

<sup>†</sup>Bolsista FAPESP Processo 2020/08829-8

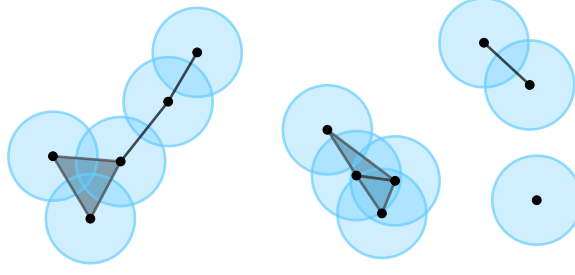


Figura 9.2: Complexo de Vietoris-Rips de um conjunto de pontos. Simplexos são gerados na intersecção de duas, ou mais, bolas de raio  $r$ . Imagem elaborada pelo autor.

## 2 Homologia Persistente

A seguir, todos os grupos de homologia serão com coeficientes no corpo  $\mathbb{Z}_2$ .

**Definição 2.1.** Seja  $K$  um complexo simplicial e  $p$  uma dimensão. Chamamos de  $p$ -cadeia a uma soma de  $p$ -simplexos em  $K$ . Denotamos  $c = \sum a_i \sigma_i$ , onde  $\sigma_i$  são os  $p$ -simplexos e  $a_i$  seus coeficientes.

**Definição 2.2.** Definimos como bordo de um  $p$ -simplexo  $\sigma$  a soma de suas  $(p-1)$ -faces (simplexos de dimensão  $p-1$  contidos em um de dimensão  $p$ ). Se  $\sigma = [u_0, u_1, \dots, u_p]$  então seu bordo é denotado por  $\partial_p \sigma$  e é dado por:

$$\partial_p \sigma = \sum_{j=0}^p [u_0, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_p].$$

Seja  $c = \sum a_i \sigma_i$  uma  $p$ -cadeia, podemos mostrar que  $C_p$  é um grupo abeliano e  $\partial_p c = \sum a_i \partial_p \sigma_i$ . Assim,  $\partial_p: C_p \rightarrow C_{p-1}$  é um homomorfismo de grupos, uma vez que se  $c = \sum a_i \sigma_i$  e  $c' = \sum a'_i \sigma_i$ , então

$$\begin{aligned} \partial_p(c + c') &= \partial_p\left(\sum a_i \sigma_i + \sum a'_i \sigma_i\right) = \partial_p \sum (a_i + a'_i) \sigma_i \\ &= \sum (a_i + a'_i) \partial_p \sigma_i = \sum a_i \partial_p \sigma_i + \sum a'_i \partial_p \sigma_i = \partial_p c + \partial_p c'. \end{aligned}$$

Chamamos  $\partial_p$  de homomorfismo bordo.

**Definição 2.3.** Definimos como complexo de cadeias a sequência dos grupos de cadeias conectados por homomorfismos bordo;

$$\dots \xrightarrow{\partial_{p+2}} C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} \dots$$

**Definição 2.4.** Chamamos uma cadeia  $c \in C_p$  de  $p$ -bordo caso exista  $d \in C_{p+1}$  tal que  $c = \partial_{p+1} d$ . Além disso, uma cadeia  $c \in C_p$  é chamada de  $p$ -ciclo se  $\partial_p c = 0$ . Por fim, denotamos  $\text{Im}(\partial_{p+1}) = B_p$  e  $N(\partial_p) = Z_p$ , onde  $N(\partial_p)$  é o núcleo de  $\partial_p$ .

**Proposição 2.5.**  $\partial_p \partial_{p+1} d = 0, \forall d \in C_{p+1}$ .

*Demonstração.* Provemos inicialmente que  $\partial_p \partial_{p+1} \sigma = 0$  para qualquer  $(p+1)$ -simplexo de um complexo simplicial  $K$ .



De fato, dado  $\sigma = [u_0, \dots, u_{p+1}]$ , temos que

$$\partial_p \partial_{p+1} \sigma = \partial_p \sum_{j=0}^{p+1} [u_0, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_{p+1}] = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{p+1} \sum_{j=0}^{p+1} [u_0, \dots, \widehat{u_i}, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_{p+1}] = 0.$$

Veja que a última igualdade acontece pelo fato dos coeficientes estarem em  $\mathbb{Z}_2$ . Daí, como cada face será somada duas vezes, elas acabarão se cancelando, uma vez que

$$[u_0, \dots, \widehat{u_i}, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_{p+1}] + [u_0, \dots, \widehat{u_j}, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_{p+1}] = 0, \forall i, j.$$

Por fim, temos pela parte anterior que se  $c \in C_{p+1}$ ,  $c = \sum a_i \sigma_i$  então

$$\partial_p \partial_{p+1} c = \partial_p \partial_{p+1} \sum a_i \sigma_i = \sum a_i \partial_p \partial_{p+1} \sigma_i = \sum a_i 0 = 0. \quad \blacksquare$$

Dessa forma, pela Proposição 2.5 temos  $B_p \subset Z_p$ . Além disso, ambos os conjuntos dos  $p$ -ciclos e dos  $p$ -bordos são subgrupos abelianos com a operação usual de  $C_p$ . Dessa forma, podemos definir o grupo quociente  $\frac{Z_p}{B_p}$ .

**Definição 2.6.** Chamamos de  $p$ -ésimo grupo de homologia de um complexo simplicial  $K$  o grupo quociente  $H_p(K) = \frac{Z_p}{B_p}$ . Chamamos de  $p$ -ésimo número de Betti o *rank* desse grupo,  $\beta_p = \text{rank } H_p(K)$ .

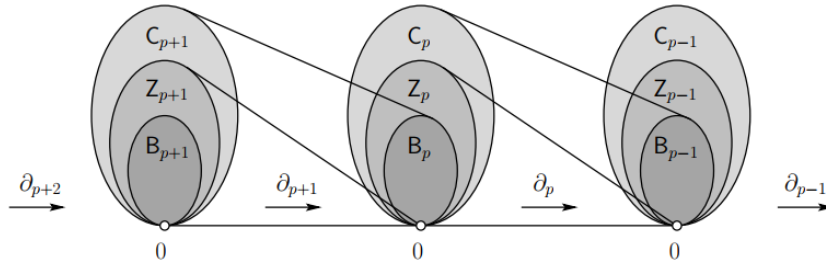


Figura 9.3: Relação entre subgrupos  $Z_p$  e  $B_p$  de  $C_p$ . Imagem retirada de [2].

Sejam  $K$  e  $L$  dois complexos simpliciais e  $f: K \rightarrow L$  uma função simplicial entre eles, isto é,  $f$  leva cada simplexo de  $K$  em um simplexo de  $L$ . Tal função induz uma função das cadeias de  $K$  para as cadeias de  $L$ . Com efeito, definimos

$$f_{\#}: C_p(K) \rightarrow C_p(L) \\ \sum a_i \sigma_i \mapsto \sum a_i \tau_i$$

onde  $\tau_i = f(\sigma_i)$  se  $f(\sigma_i)$  possui dimensão  $p$  e  $\tau_i = 0$  caso contrário.

**Proposição 2.7.** Escrevendo  $\partial_K$  e  $\partial_L$  para os homomorfismos bordo dos dois complexos, temos

$$f_{\#} \circ \partial_K = \partial_L \circ f_{\#},$$

ou seja, as funções induzidas comutam com as funções bordo.

*Demonstração.* Com efeito, seja  $\sigma = [u_0, \dots, u_p]$  um  $p$ -simplexo de  $K$ , temos duas possibilidades:

1.  $f(\sigma)$  possui dimensão  $p$ ;  
Então

$$\begin{aligned}
 f_{\#}\partial_K\sigma &= f_{\#}\left(\sum_{j=0}^p[u_0, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_p]\right) \\
 &= \sum_{j=0}^p f_{\#}([u_0, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_p]) \\
 &= \sum_{j=0}^p [f(u_0), \dots, \widehat{f(u_j)}, \dots, f(u_p)] \\
 &= \partial_L([f(u_0), \dots, f(u_p)]) \\
 &= \partial_L(f_{\#}([u_0, \dots, u_p])) \\
 &= \partial_L f_{\#}(\sigma).
 \end{aligned}$$

2.  $f(\sigma)$  possui dimensão menor do que  $p$ ;

Veja que

$$\partial_L f_{\#}(\sigma) = \partial_L 0 = 0 \quad \text{e} \quad f_{\#}\partial_K\sigma = f_{\#}(0) = 0.$$

Daí,

$$\partial_L f_{\#}(\sigma) = f_{\#}(\partial_K\sigma).$$

Por fim, seja  $c = \sum a_i \sigma_i$ . Temos

$$\begin{aligned}
 f_{\#}\partial_K c &= f_{\#}\partial_K \sum a_i \sigma_i = \sum a_i f_{\#}(\partial_K \sigma_i) = \sum a_i \partial_L f_{\#}(\sigma_i) \\
 &= \partial_L f_{\#} \sum a_i \sigma_i = \partial_L f_{\#} c.
 \end{aligned}$$

Portanto, segue a igualdade. ■

Dessa forma, como as funções induzidas comutam com a função bordo, segue que:

1.  $f_{\#}$  leva ciclos em ciclos, i.e.,  $f_{\#}(Z_p(K)) \subset Z_p(L)$ ;

Se  $\sigma \in Z_p(K)$ , então

$$\partial_L \circ f_{\#}(\sigma) = f_{\#} \circ \partial_K(\sigma) = f_{\#}(0) = 0.$$

2.  $f_{\#}$  leva bordos em bordos, i.e.,  $f_{\#}(B_p(K)) \subset B_p(L)$ ;

Se  $c = \partial_K d, d \in B_p(K)$ , então

$$f_{\#}(c) = f_{\#}(\partial_K d) = \partial_L f_{\#}(d) \in B_p(L).$$

Dessa forma, podemos definir uma função entre os grupos quocientes,  $f_*: H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ , por  $f_*([c]) = [f(c)]$ .

Seja  $K_{r_0} \subset K_{r_1} \subset \dots \subset K_{r_n}$  uma filtração de complexos simpliciais. Para todo  $i, j \in \{r_0, r_1, \dots, r_n\}$ ,  $i \leq j$  existe uma aplicação inclusão,  $f^{i,j}: K_{r_i} \hookrightarrow K_{r_j}$ , do complexo  $K_{r_i}$  para  $K_{r_j}$ . Assim,  $f^{i,j}$  induz um homomorfismo  $f_p^{i,j}: H_p(K_{r_i}) \rightarrow H_p(K_{r_j})$  para toda dimensão  $p$ . Dessa forma, podemos obter uma sequência de grupos de homologia conectada por homomorfismos, para cada dimensão  $p \in \mathbb{N}$ :

$$H_p(K_{r_0}) \xrightarrow{f_p^{0,1}} H_p(K_{r_1}) \longrightarrow \dots \xrightarrow{f_p^{n-1,n}} H_p(K_{r_n}) = H_p(K).$$

Chamamos os grupos  $H_p^{i,j} = \text{Im } f_p^{i,j}$  de  $p$ -ésimos **grupos de Homologia Persistente**.

### 3 Análise Topológica de Dados

Para agrupar e classificar conjuntos de dados precisamos elaborar uma forma de medir a semelhança entre grupos de Homologia Persistente que partiram de conjuntos de pontos distintos. Para isso, definiremos as ferramentas iniciais utilizadas na área computacional para análise de dados.

**Definição 3.1.** Seja  $\gamma \in H_p(K_i)$ :

- Dizemos que  $\gamma$  **nasce** em  $K_i$  (no tempo  $i$ ), se  $\gamma \notin H_p^{i-1,i}$ ;
- Dizemos que  $\gamma$  **morre** em  $K_j$  (no tempo  $j$ ), se  $f_p^{i,j-1}(\gamma) \notin H_p^{i-1,j-1}$  e  $f_p^{i,j}(\gamma) \in H_p^{i-1,j}$ .

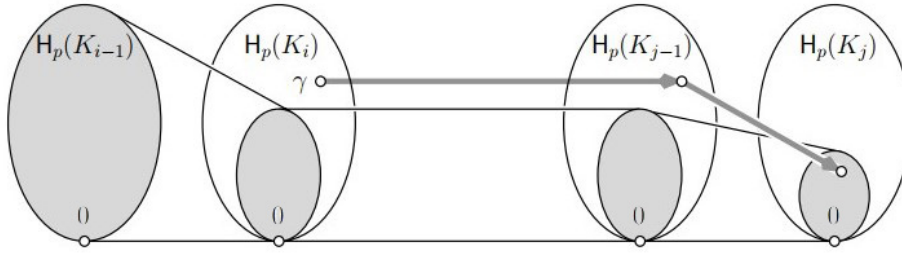


Figura 9.4: A classe  $\gamma$  nasce em  $K_i$ , uma vez que  $\gamma \notin H_p^{i-1,i}$ . Além disso,  $\gamma$  morre em  $K_j$  pois é o primeiro grupo que  $f_p^{i,j}(\gamma) \in H_p^{i-1,j}$ . Imagem retirada de [2]

**Definição 3.2.** Chamamos de Diagrama de Persistência de dimensão  $p$  o conjunto de pares ordenados  $(b_i, d_i)$  de tempos de nascimento e morte das classes de Homologia de dimensão  $p$ .

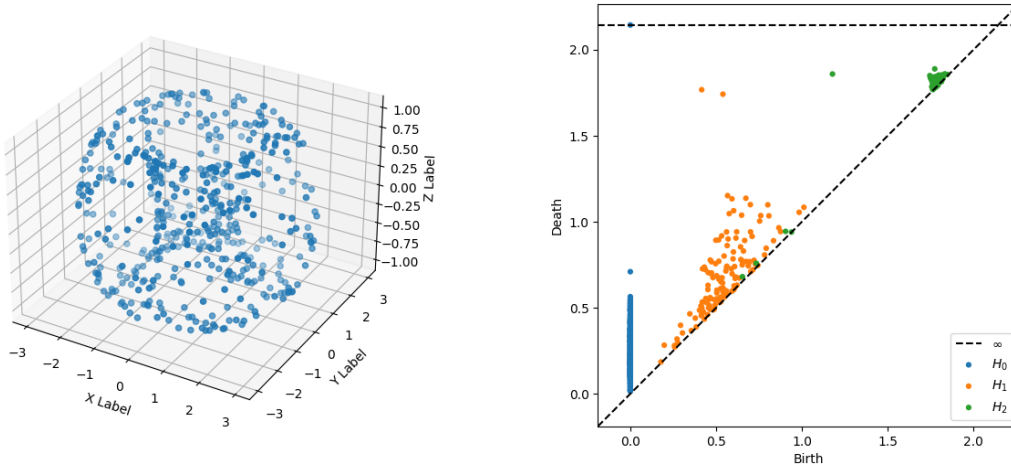


Figura 9.5: 500 pontos retirados de um Toro e os seus respectivos diagramas de persistência de dimensões 0, 1 e 2. Em laranja, podemos ver dois pontos com uma persistência alta no diagrama, representando os dois ciclos do Toro. Imagem elaborada pelo autor.

**Definição 3.3.** Sejam  $P, Q$  dois diagramas de persistência de dimensão  $p$ . Chamamos de pareamento (*matching*) parcial entre  $P$  e  $Q$  um conjunto  $M \subset P \times Q$  tal que:

- Todo ponto  $p \in P$  é pareado com no máximo um ponto em  $Q$ , isto é, existe no máximo um ponto  $q \in Q$  onde  $(p, q) \in M$ ;
- Todo ponto  $q \in Q$  é pareado com no máximo um ponto de  $P$ , isto é, existe no máximo um ponto  $p \in P$  onde  $(p, q) \in M$ .

Denotaremos por  $M: P \leftrightarrow Q$  quando  $M$  for um matching parcial entre  $P$  e  $Q$ .

Dado um matching  $M: P \leftrightarrow Q$ , o custo de parear um par  $(p, q) \in M$  é definido por  $\|p - q\|_\infty$ . O custo de não parear um ponto  $s \in P \sqcup Q$  é  $\frac{|s_y - s_x|}{2}$ , ou seja, a distância de  $s$  até a diagonal pela norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Por fim, definimos o custo de um matching por:

$$c(M) = \max \left\{ \sup_{(p,q) \in M} \|p - q\|_\infty, \sup_{s \in P \sqcup Q \text{ não pareado}} \frac{|s_y - s_x|}{2} \right\}.$$

**Definição 3.4.** Sejam  $P, Q$  dois diagramas de persistência de dimensão  $p$ . Definimos como distância Bottleneck entre  $P$  e  $Q$  o menor dos custos de todos os matchings parciais possíveis:

$$d_b(P, Q) = \inf_{M: P \leftrightarrow Q} c(M).$$

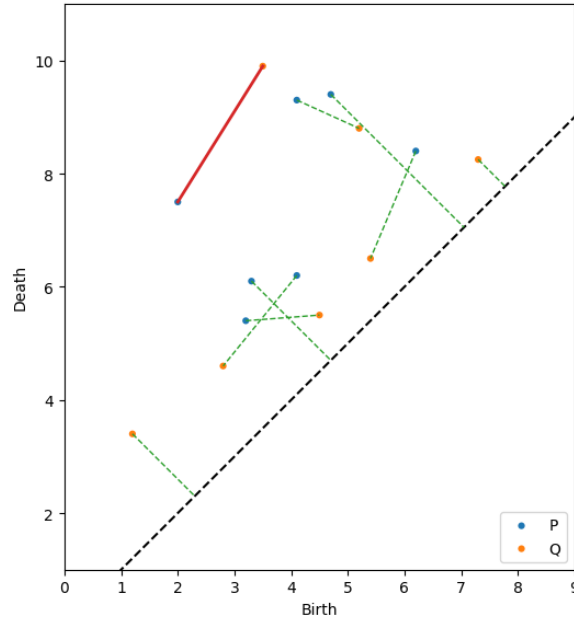


Figura 9.6: Melhor matching entre dois diagramas de persistência  $P$  e  $Q$ , em vermelho temos o pareamento que define o custo do matching. Imagem elaborada pelo autor.

## 4 Aplicações

Nesta seção, utilizaremos as ferramentas vistas para agrupar dois conjuntos de dados retirados de superfícies topologicamente distintas. No que segue, carregamos dois conjuntos de dados formados por 25 conjuntos de 250 pontos retirados da esfera unitária  $S^2$  e do Toro, com os parâmetros  $R = 1$  e  $r = 0.5$ . Os cálculos a seguir serão feitos através da linguagem *Python* utilizando as bibliotecas *persim*<sup>2</sup> e *ripser*<sup>3</sup>.

<sup>2</sup><https://persim.scikit-tda.org>. Acessado em 18 de novembro de 2021.

<sup>3</sup><https://ripser.scikit-tda.org>. Acessado em 18 de novembro de 2021.

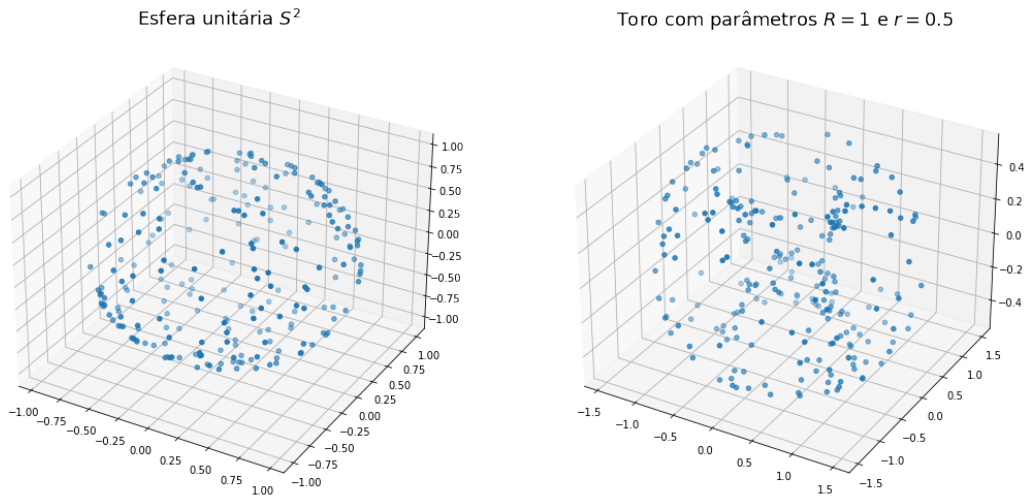


Figura 9.7: Imagem elaborada pelo autor.

Para cada conjunto de pontos realizamos a filtração respectiva ao complexo de Vietoris-Rips e calculamos seus diagramas de persistência de dimensão 1. Além disso, fazemos a matriz de distâncias do conjunto de dados pela distância Bottleneck, a qual pode ser vista na Figura 9.9. Por fim, visualizamos cada conjunto no plano  $\mathbb{R}^2$  utilizando o método de escalonamento multidimensional, isto é, obtendo um conjunto de pontos que melhor represente a configuração de distâncias da matriz:

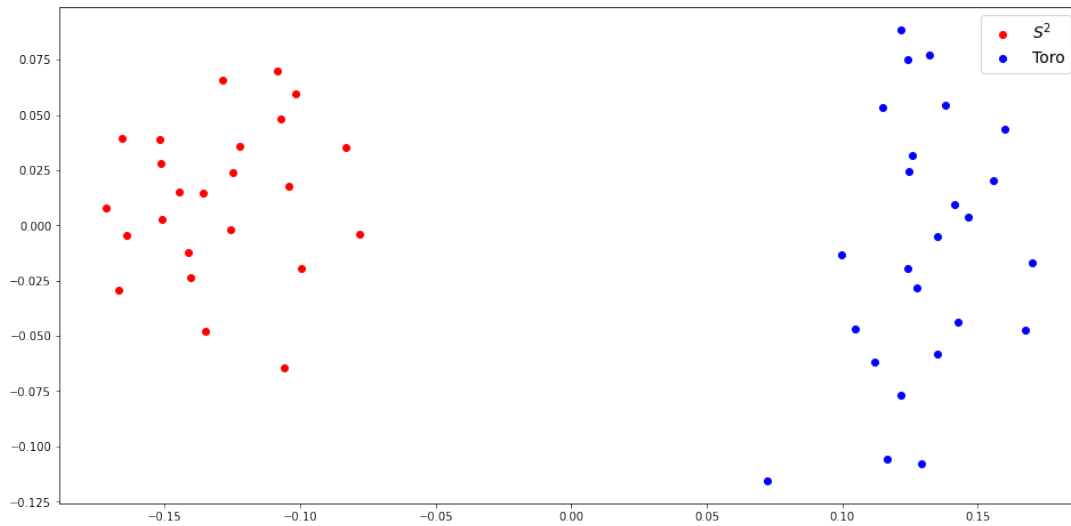


Figura 9.8: Pontos obtidos pelo método de escalonamento multidimensional.

Dessa forma obtemos um grupamento excelente, conseguindo separar dados derivados de uma mesma superfície através de seus diagramas de persistência.

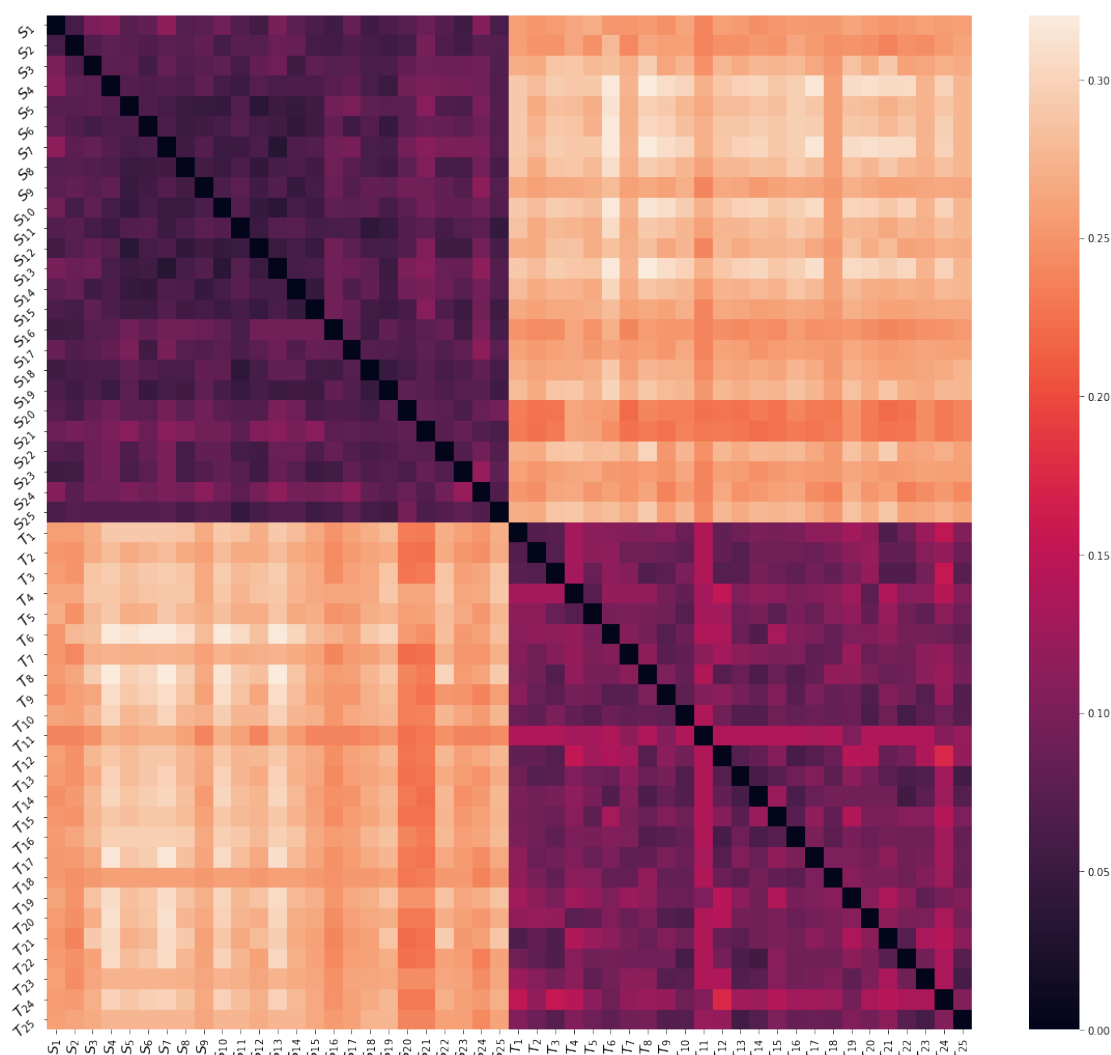


Figura 9.9: Mapa de calor da matriz de distâncias Bottleneck.

**Agradecimentos:** Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Thiago de Melo, pela disposição, paciência e apoio nos caminhos que trilho para o futuro e à FAPESP, processo 2020/08829-8, pelo suporte financeiro.

*Abstract: Persistence Topology consists of studying properties of point clouds and filtrations of simplicial complexes. We associate to each set of points a filtration, being able to analyze the persistence of topological properties in the variation of a parameter  $r$ , describing the appearance and disappearance of “holes of dimension  $k$ ”. To visualize these persistences we use the persistence diagram, a graph consisting of the birth and death of generators from certain homology groups.*

*Keywords: Persistence Diagrams; Persistent Homology; Topological Data Analysis*

## Referências Bibliográficas

- [1] CHAZAL, F.; MICHAEL, B. *An introduction to Topological Data Analysis: fundamental and practical aspects for data scientists*. arXiv:1710.04019, 2021.

- [2] EDELSBRUNNER, H.; Harer, J. *Computational Topology: An Introduction*. Providence: American Mathematical Society, 2010.
- [3] MUNKRES, J.R. *Elements of Algebraic Topology*. California: Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [4] OUDOT, S. Y. *Persistence theory: from quiver representations to data analysis*. American Mathematical Society Providence, 2015. v.209.

# Redes Neurais Auto-Regressivas

Thiago Moraes Rizzieri<sup>†</sup>  
Orientador(a): José Silvio Govone

**Resumo:** Neste artigo faremos um breve estudo sobre as Redes Neurais Auto-Regressivas para análise de séries temporais. Buscaremos entender como funciona esta arquitetura particular da rede neural e seu funcionamento para previsões. No fim, faremos uma comparação do desempenho das previsões estimadas entre o modelo de redes neurais e o modelo ARIMA, que é bem conhecido para esta finalidade, com dados de ações da Google de 2015. Vale ressaltar, que meu conhecimento sobre Redes Neurais ainda é bem pouco, por isso, o foco maior do trabalho residirá em seu uso estatístico.

**Palavras-chave:** Séries temporais; Previsão; Estatística.

---

## 1 Redes Neurais Artificiais: O que são?

A rede neural artificial é um modelo matemático que pode apresentar diversas finalidades para o seu uso. Cada finalidade estará associada à uma arquitetura diferente, ou seja, à um formato no qual os neurônios estarão conectados (Figura 10.1). Aqui, iremos analisar a arquitetura multilayer feed-forward para fins de previsão de séries temporais.

A rede é caracterizada pela variedade de “neurônios” presentes nela, que são entradas que recebem valores. No modelo multilayer feed-forward há sempre a presença de uma única camada de entrada e uma única camada de saída, que podem haver um ou mais neurônios em cada. No nosso caso, estaremos interessados em redes com apenas um neurônio na camada da saída.

(espaço em branco intencional)

---

<sup>†</sup>Bolsista PET/FNDE



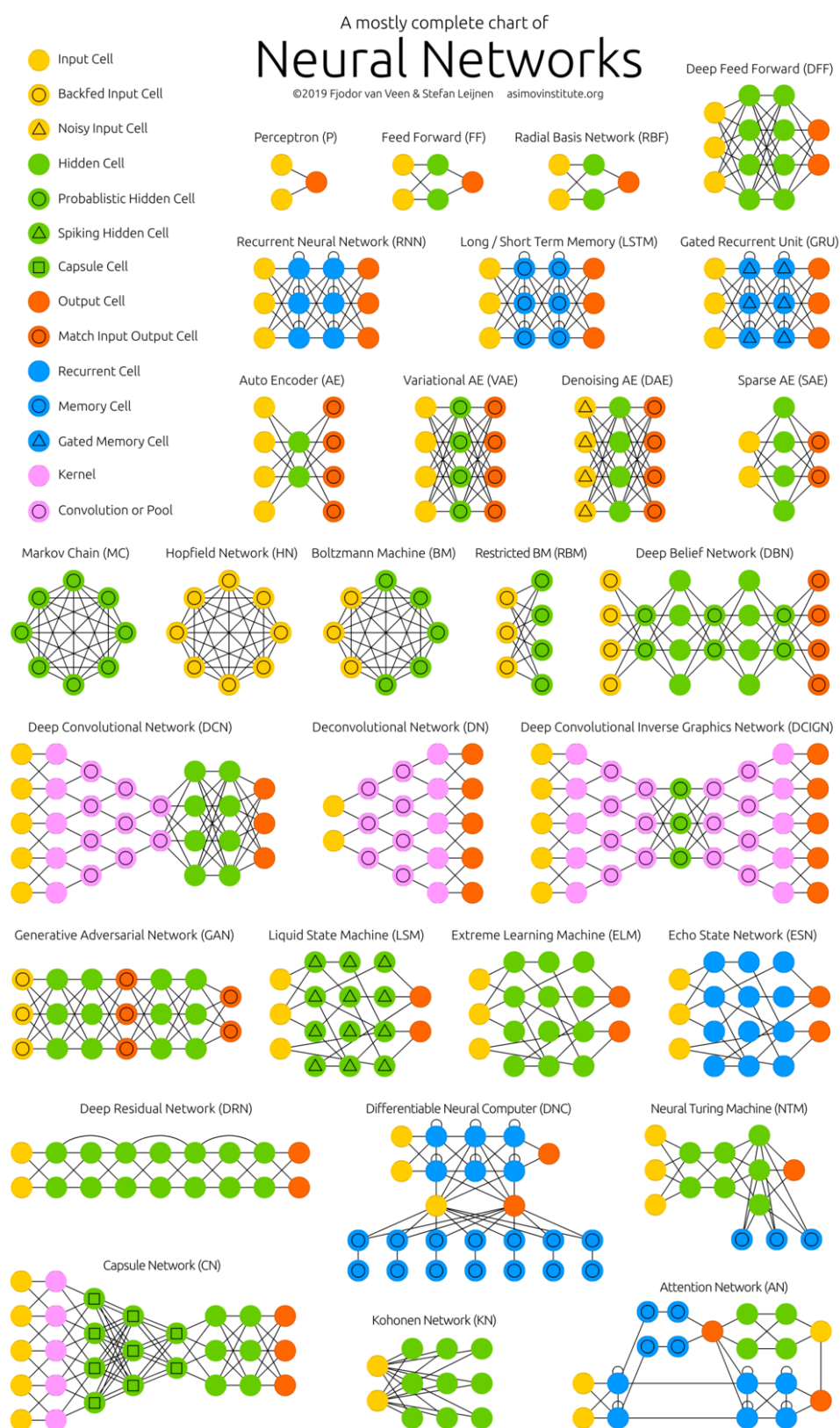


Figura 10.1: Algumas arquiteturas de redes neurais. Fonte: Van Veen, F. & Leijnen, S., The Neural Network Zoo, 2019 [4].

Além dos neurônios, também temos a presença das sinapses, que são as linhas que conectam os neurônios de diferentes camadas. Quando há um certo valor de um neurônio e ele passa para um outro neurônio da próxima camada por uma sinapse, este valor pode ser modificado, seja ele multiplicado por um certo peso (ou parâmetro) ou então sendo transformado por algum tipo de função.

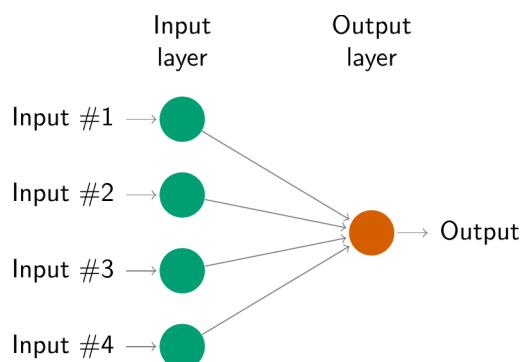


Figura 10.2: Uma arquitetura de rede neural que equivale à um modelo de regressão linear. Fonte: Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G., *Forecasting: principles and practice* [1].

No caso mais simples, havendo apenas uma camada de entrada e uma camada de saída que possui um único neurônio, podemos ter um modelo de regressão linear (Figura 10.2). Temos variáveis na entrada que são multiplicados por certos pesos oferecidos por cada sinapse, no qual é realizado um somatório desses valores todos, juntamente com uma constante adicional. Ou seja, a previsão recebe uma combinação linear das entradas.

Os pesos são selecionados através de uma “função de custo”, como por exemplo, através da média do quadrado dos erros. Assim, os pesos são “aprendidos” (ou estimados) pelos dados. Eles recebem valores aleatórios à princípio, mas são modificados para tornarem a previsão com um menor erro possível.

Quando adicionamos uma camada intermediária com os denominados neurônios ocultos, teremos uma rede neural não linear (Figura 10.3).

Nessa arquitetura, os valores da entrada são multiplicados por alguns pesos e formam uma combinação linear para a camada oculta.

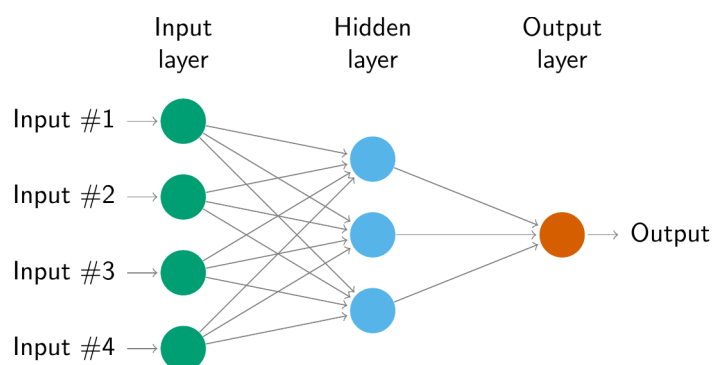


Figura 10.3: Rede Neural com uma camada oculta contendo três neurônios. Fonte: Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G., *Forecasting: principles and practice* [1].

Temos então, no contexto da Figura 10.3, para cada entrada  $i$  e cada neurônio oculto  $j$ :

$$z_j = \sum_{i=1}^4 w_{i,j} x_i + b_j$$

em que  $z_j$  é o valor do neurônio oculto,  $w_{i,j}$  é o peso de cada sinapse,  $x_i$  é o valor de cada entrada e  $b_j$  é a constante de cada neurônio oculto.

Em seguida, da camada oculta para a camada de saída pode ser realizado alguma transformação não linear, como por exemplo, o uso da função logística que é bem comum de ser utilizada.

$$s(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

Essas transformações também são conhecidas como funções de ativação, e são importantes para ajudar se o neurônio deve acolher as informações ou não. Isso pode reduzir o impacto de valores muito diferentes, tornando o modelo mais robusto à valores extremos. Neste artigo, estaremos vendo apenas modelos com uma única camada oculta.

Um estudo mais aprofundado pode ser encontrado na referência [6].

## 2 Redes Neurais Auto-Regressivas

No modelo de Redes Neurais Auto-Regressivas, os valores de entrada são valores defasados da série temporal, por isso o nome “auto-regressivo”, pois é realizado uma regressão utilizando valores anteriores da própria variável.

Costuma-se utilizar a notação  $NNAR(p, k)$  onde  $p$  representa a quantidade de entradas e  $k$  a quantidade de neurônios ocultos.

Pode ser interessante dar um olhar com maior atenção para dados que apresentam sazonalidade, ou seja, quando há a presença de períodos específicos que sofrem naturalmente uma certa mudança esperada. Como por exemplo, a venda de sorvetes que é afetada pelas estações do ano, pois vende-se mais quando está quente, ou seja, no verão. Nestes casos, ainda é interessante adicionar os últimos valores sazonais para realizar previsões, seja qual for o período de sazonalidade. Dessa forma, denotamos por  $NNAR(p, P, k)m$  onde  $P$  representa quantas entradas de valores sazonais estaremos utilizando e  $m$  representa o período sazonal.

Por padrão, a escolha das  $p$  entradas é realizado pelo teste de Akaike igual é feito para os modelos auto-regressivos  $AR(p)$ . Caso tenha sazonalidade, o valor  $P$  por padrão é 1, ou seja, por padrão se utiliza um único valor sazonal. A quantidade de neurônios ocultos  $k$  é determinado por  $k = (p + P + 1)/2$  arredondado para o maior número inteiro mais próximo.

Como o modelo não é bem definido, é difícil estabelecer um intervalo de previsão da forma usual. Por isso, seu intervalo é formado através de uma quantia grande de simulações, que por padrão são feitas 1000 vezes.

## 3 O Modelo ARIMA

O modelo ARIMA é um modelo bem comum e conhecido ao se estudar séries temporais, combinando o modelo auto-regressivo (AR), que compõe valores passados dos dados, o modelo de médias móveis (MA), que compõe os erros passados dos dados, e a diferenciação para tornar a série estacionária.

Diferenciar um dado, equivale a fazer a diferença de seu valor com o valor anterior. Assim, diferenciar  $y_t$  equivale à  $y'_t = y_t - y_{t-1}$ .

Uma série é estacionária quando suas propriedades estatísticas não se alteram com o tempo, ou seja, a sua média e variância são constantes ao longo de todo o tempo. Além disso, sua covariância dependerá apenas do intervalo entre os dois valores utilizados.

Assim, temos o modelo  $ARIMA(p, q, d)$  onde  $p$  representa a quantidade de valores passados utilizados,  $d$  a quantidade de erros passados utilizados e  $q$  a quantidade de vezes que a série precisa ser diferenciada para ser estacionária.

## 4 Metodologia

Comparamos os modelos para o estudo das ações da Google nos dias úteis de 2015, em dólares. Analisamos o desempenho dos modelos fornecendo apenas os dados de 2015 e fazendo-os prever em relação à janeiro de 2016.

Os dados são utilizados através do comando `gafa_stock` que possui dados dos preços de ações da Google, da Amazon, do Facebook e da Apple, no período de 2014 à 2018. Coletamos os dados pelo *Yahoo Finance historical data* [5].

Realizamos o ajuste de modelo pelo programa R, assim como todos os processos e cálculos.

## 5 Comparação entre os modelos

Automaticamente, o programa R nos ajustou um modelo  $ARIMA(0, 1, 1)$  e um modelo  $NNAR(2, 2)$  para os dados. Podemos observar a previsão de cada um dos modelos nas Figuras 10.4 e 10.5. Temos também a comparação dos modelos  $ARIMA$  e  $NNAR$  com o que realmente aconteceu em janeiro de 2016 (Figura 10.6).

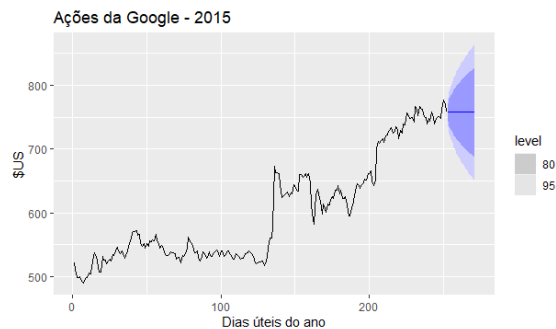


Figura 10.4: Modelo  $ARIMA$  com seu intervalo de previsão. Fonte: elaborado pelo autor.

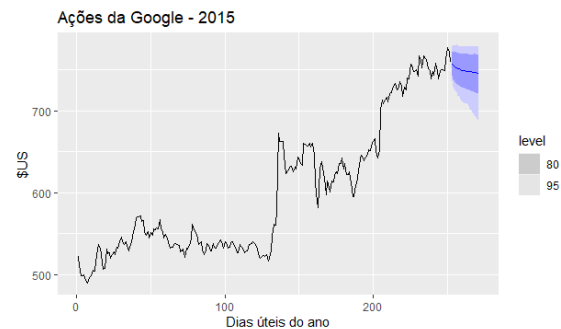


Figura 10.5: Modelo  $NNAR$  com seu intervalo de previsão. Fonte: elaborado pelo autor.

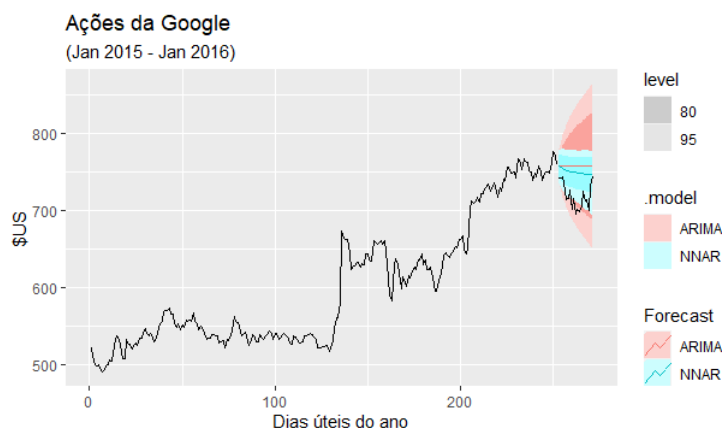


Figura 10.6: Modelos  $ARIMA$  e  $NNAR$  sobrepostos na previsão de Janeiro de 2016 juntamente com os dados originais deste período. Fonte: elaborado pelo autor.

Logo com estes gráficos já podemos observar que as amplitudes do intervalo de confiança do modelo NNAR é menor do que as do modelo ARIMA, indicando um melhor desempenho do modelo NNAR. Porém, apenas esta análise não é suficiente para garantir que o modelo NNAR se ajustou melhor aos dados do que o modelo ARIMA.

Avaliamos o gráfico dos resíduos de cada modelo (Figura 10.7 e Figura 10.8). Em ambos os modelos, observamos uma forte aleatoriedade e baixa autocorrelação entre erros passados. Assim, consideramos que os erros assumem o formato de um ruído branco.

Além disso, notamos que há uma baixa variabilidade até o momento de pico. Isso se deve à mudança brusca da estrutura da série temporal, que se encontrava estável. Depois disso, os resíduos voltaram a se estabilizar, mas não tanto quanto antes.

Vale ressaltar também, que grande parte dos resíduos são próximos ou iguais ao valor zero, indicando que o modelo é bem fiel ao que realmente acontece.

Para avaliar a precisão das previsões pontuais, levamos em conta três métodos comuns que nos fornecem um bom resumo do comportamento dos resíduos. Todos fazem uso do valor de erro  $e_t$  entre as previsões dos modelos com o que realmente ocorreu em janeiro de 2016. Na referência [1] podemos encontrar mais detalhes sobre estes métodos.

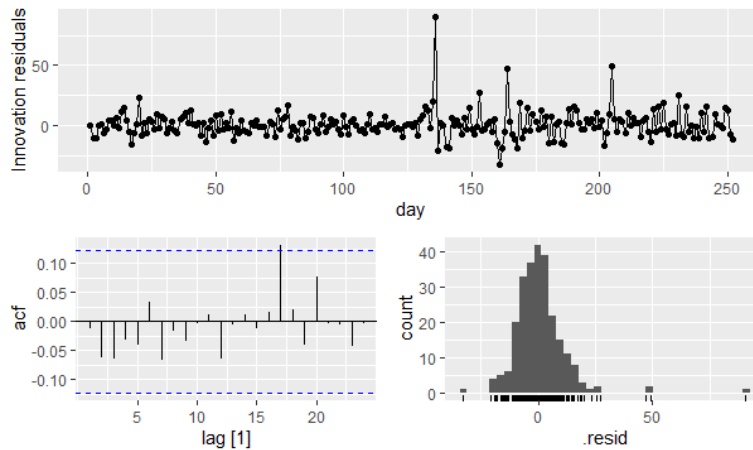


Figura 10.7: Gráfico da série temporal, do correlograma e do histograma dos resíduos do modelo ARIMA. Fonte: elaborado pelo autor.

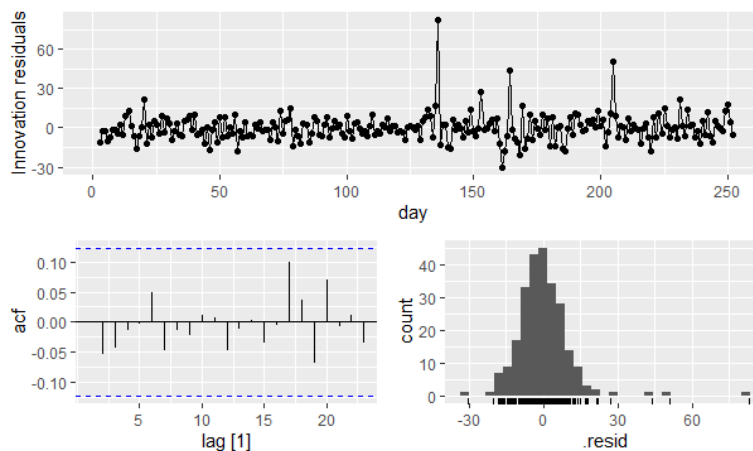


Figura 10.8: Gráfico da série temporal, do correlograma e do histograma dos resíduos do modelo NNAR. Fonte: elaborado pelo autor.

Temos o MAE que representa a média do erro absoluto, o RMSE que representa a raiz do erro quadrático médio e MAPE que representa a média do erro percentual absoluto, dados respectivamente por:

$$\text{MAE} = \text{média}(|e_t|) \quad \text{RMSE} = \sqrt{\text{média}(e_t^2)} \quad \text{MAPE} = \text{média}(|p_t|)$$

em que  $p_t = 100e_t/y_t\%$ .

Os modelos tiveram os seguintes resultados para estes valores.

Método	MAE	RMSE	MAPE
ARIMA	39.0	42.2	5.49
NNAR	31.8	35.1	4.48

Tabela 10.1: Tabela da precisão da previsão pontual dos modelos

Observamos que os valores do MAE, MAPE e RMSE são menores para o modelo NNAR. Concluímos com base nos resultados acima que o modelo NNAR se ajustou melhor para estes dados.

**Agradecimentos:** Primeiramente, gostaria de agradecer ao Programa de Educação Tutorial, PET, pelo apoio financeiro e pela jornada de orientações referentes à iniciação científica. Agradeço também a amigos e família pelo apoio diário, que me mantiveram firme nos estudos.

*Abstract: In this article, we will make a brief study on Autoregressive Neural Networks for time series analysis. We will seek to understand how this particular neural network architecture works and how it works for predictions. In the end, we will make a comparison of the performance of estimated predictions between the neural network model and the ARIMA model, which is well known for this purpose, with Google stock data from 2015. It is noteworthy, that my knowledge of Neural Networks is still very little, so the main focus of the work will reside in its statistical use.*

*Keywords: Time series; Forecasting; Statistics.*

## Referências Bibliográficas

- [1] Hyndman, R.J., Athanasopoulos, G., *Forecasting: principles and practice*, 3ª edição, OTexts: Melbourne, Australia. Disponível em: <https://otexts.com/fpp3>. Acesso em: 26 de outubro de 2021.
- [2] Reza, Aashiq., *An Approach to Make Comparison of ARIMA and NNAR Models For Forecasting Price of Commodities*. Towards Data Science, 2020. Disponível em: <https://towardsdatascience.com/an-approach-to-make-comparison-of-arima-and-nnar-models-for-forecasting-price-of-commodities-f80491aeb400>. Acesso em: 26 de outubro de 2021.
- [3] Data Science Academy, *Deep Learning Book*, 2021. Disponível em: <https://www.deeplearningbook.com.br>. Acesso em: 26 de outubro de 2021.
- [4] Van Veen, F. & Leijnen, S., *The Neural Network Zoo*, The Asimov Institute, 2019. Disponível em: <https://www.asimovinstitute.org/neural-network-zoo>. Acesso em: 26 de outubro de 2021.
- [5] Yahoo! Finance. Disponível em: <https://finance.yahoo.com>. Acesso em: 26 de outubro de 2021.

- [6] Hastie T., Tibshirani R., Friedman J., *The Elements of Statistical Learning Data Mining, Inference and Prediction*, 2<sup>a</sup> edição, Springer, 2009.

## BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM MATEMÁTICA · BICMAT

### *Orientação aos autores*

Ao redigir o material a ser divulgado o autor deve observar que o alvo principal é o aluno de graduação, devendo a redação ser clara e objetiva incentivando-o à leitura.

O trabalho deve ser enviado à Comissão Editorial, via e-mail, na linguagem  $\text{\LaTeX}$ , usando a classe `bicmat`. Mais informações sobre a formatação do trabalho podem ser encontradas em [www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat](http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat), assim como o endereço para o envio do trabalho.

A responsabilidade de cada artigo é exclusiva do autor e respectivo orientador.