

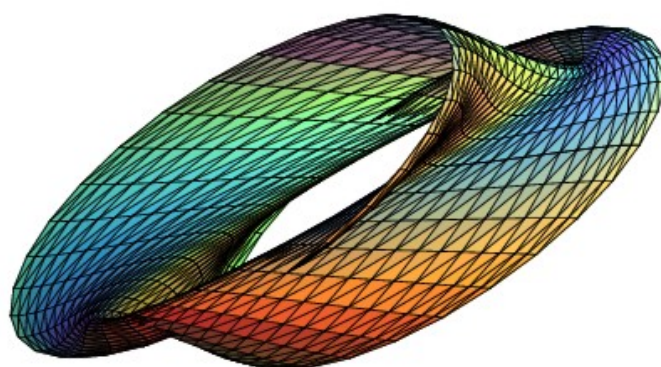
---

---

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM  
MATEMÁTICA · BICMAT

---

---



VOLUME XIII  
OUTUBRO DE 2016  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
IGCE · RIO CLARO

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM  
MATEMÁTICA · BICMAT

***Comissão editorial***

Carina Alves

Marta Cilene Gadotti

Nativi Viana Pereira Bertolo

Thiago de Melo

***Editoração gráfica***

Thiago de Melo

***Realização***

Conselho de Curso de Graduação em Matemática

Departamento de Matemática

IGCE · Unesp Rio Claro

## EDITORIAL

O Boletim de Iniciação Científica em Matemática · BICMat é uma publicação que se destina a difundir prioritariamente trabalhos de Iniciação Científica em Matemática que fazem parte de projetos desenvolvidos por alunos do Curso de Graduação em Matemática do IGCE, Unesp Rio Claro. Eventualmente trabalhos de Iniciação Científica realizados em outras instituições poderão também ser publicados neste Boletim.

O BICMat foi criado em 1998 e nessa época foram publicados dois volumes; o primeiro no ano de criação e o segundo em 2000.

Considerando a importância da Iniciação Científica para o graduando, e o sempre crescente número de projetos desta natureza desenvolvidos em nossa instituição, resolvemos reativar a publicação do BICMat em 2006, com ISSN 1980–024X.

Destacamos que a autoria dos trabalhos apresentados no BICMat é dos alunos. O orientador figura apenas como responsável científico.

Este Boletim também está aberto à divulgação de trabalhos que não sejam frutos de projetos de Iniciação Científica, mas que sejam de interesse dos alunos do curso de graduação em Matemática. Estes trabalhos serão selecionados pelos Editores.

Este volume está disponibilizado eletronicamente na página do Departamento de Matemática no endereço

<http://igce.rc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/>

ou através do código QR



# SUMÁRIO

## *A Resultante*

Brendol Alves Oliveira Gomes .....	5
------------------------------------	---

## *Transformada de Fourier e Propriedades*

Felipe Felix Souto .....	15
--------------------------	----

## *Pêndulo Simples Amortecido – Estudo Qualitativo*

Felipe Longo .....	25
--------------------	----

## *Introdução à Modelagem em Epidemiologia*

Gabriela Lopes Theodoro .....	31
-------------------------------	----

## *Modelo de Equações Diferenciais com Delay para o Estudo do HLB em Citros*

Maria Letícia Salvador .....	40
------------------------------	----

## *Modificações no Modelo de Verhulst Discreto*

Pedro Henrique Giraldo de Souza .....	46
---------------------------------------	----

## *Modelo de Competição Larval para uma População de Mosquitos Aedes Aegypti*

Quédima Carlevaro de Souza .....	52
----------------------------------	----

## *Os espaços $L_p$ e o Teorema de Fischer–Riesz*

Raul Felipe de Oliveira Francisco .....	60
---	----

## A Resultante

Brendol Alves Oliveira Gomes<sup>†</sup>  
Orientador(a): Elíris Cristina Rizzioli

**Resumo:** Este trabalho consiste em explorar um método com o qual podemos identificar os pontos de interseção entre duas curvas planas, sendo essas dadas na sua forma polinomial no anel  $\mathbb{K}[X, Y]$ . Ainda faremos um estudo sobre a multiplicidade da Resultante a qual irá indicar o número máximo de pontos de interseção.

**Palavras-chave:** Curvas planas, geometria algébrica, pontos de interseção

*Abstract:* This work is to explore a method with which we can identify the points of the intersection between two plane curves given in polynomial form on the ring  $\mathbb{K}[X, Y]$ . We also study the multiplicity of the resulting which will indicate the maximum number of points of intersection.

*Keywords:* Plane curves, algebraic geometry, intersection points

### 1 A Resultante

Para encontrar os pontos de interseção a estratégia é fixar uma variável e procurar quais seriam os pontos de interseção dos polinômios vistos em uma variável. Isto é, sendo  $f$  e  $g$  polinômios em  $\mathbb{K}[X, Y]$  e fixando  $X$  como constante (admitindo-a como constante indicando-a por  $x$ ) temos que  $f(x, Y)$  e  $g(x, Y)$  são polinômios em  $\mathbb{K}[Y]$  e procuramos valores para os quais  $f(x, Y) = 0$  e  $g(x, Y) = 0$ . Geometricamente queremos as projeções, sobre eixo das abscissas, dos pontos da interseção entre  $f$  e  $g$ . Resultante é nome dado ao método para encontrar os pontos de interseção de duas curvas de maneira analítica, como veremos a seguir.

**Definição 1.** Sejam  $f$  e  $g \in A[Y]$ , em que  $A = \mathbb{K}[X]$ , tais que:  $f = a_d Y^d + \dots + a_0$  ( $d \geq 1$ ) e  $g = b_e Y^e + \dots + b_0$  ( $e \geq 1$ ). Definimos a *Resultante de  $f$  e  $g$*  como sendo o seguinte determinante

$$R_{f,g}(X) = \begin{vmatrix} a_d & a_{d-1} & \dots & a_0 & & & \\ & a_d & \dots & a_1 & a_0 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & & a_d & \dots & a_0 \\ b_e & b_{e-1} & \dots & b_0 & & & \\ & b_e & \dots & b_1 & b_0 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & & b_e & \dots & b_0 \end{vmatrix}.$$

A ordem desta matriz é  $(d+e) \times (d+e)$ , possui  $e$  linhas de coeficientes do polinômio  $f$  e  $d$  linhas de coeficientes de  $g$  e os espaços em branco é composto por zeros. Observe que o grau de  $f$  e  $g$  são respectivamente  $d$  e  $e$ , mas pode ocorrer casos em que  $a_d$  e  $b_e$  sejam nulos. Para contornar esse problema, escolheremos o grau *efetivo*, isto é, o maior grau em que ocorre em  $Y$ . Observe também que esse determinante nos fornece um polinômio em  $x$ .

<sup>†</sup>Bolsista PET

Vejamos um exemplo:

**Exemplo 2.** Calculemos a Resultante dos polinômios  $f = X^2 + Y^2 - 4$  e  $g = XY - 1$ .

Podemos considerar  $f$  e  $g$  como polinômios em  $Y$ , assim

$$f = Y^2 + (x^2 - 4) \text{ e } g = xY - 1.$$

Desta forma o grau de  $f$  é  $d = 2$ , e seus coeficientes  $a_2 = 1$ ,  $a_1 = 0$  e  $a_0 = x^2 - 4$ , já para  $g$ , grau  $e = 1$  coeficientes:  $b_1 = x$  e  $b_0 = -1$ .

Assim a Resultante é o determinante

$$R(X) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x^2 - 4 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} = x^4 - 4x^2 + 1.$$

Observe que as raízes para  $R_{f,g} = 0$  são  $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ ,  $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ,  $-\sqrt{2 + \sqrt{3}}$  e  $-\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ .

Os próximos resultados mostram que o método da Resultante é consistente.

**Proposição 3.** Sejam  $f = \sum_{j=0}^d a_j Y^j$  e  $g = \sum_{l=0}^e b_l Y^l \in A[Y]$ , em que  $A$  é um domínio de fatoração única, então

$$R_{f,g} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_d = 0 = b_e \\ \text{ou} \\ f, g \text{ admitem um fator comum não constante.} \end{cases}$$

**Prova:** Primeiramente veja  $R_{f,g} = 0$  ocorre é quando o determinante que o define é nulo. E sabemos que um determinante é nulo se, e somente se,

- A matriz tem uma linha ou uma coluna nula. Ou
- A matriz possui uma linha ou coluna múltipla de outra.

Logo se  $R_{f,g} = 0$  então ou  $a_d = 0 = b_e$ , ou,  $f$  e  $g$  admitem um fator em comum.

Reciprocamente, se  $a_d = 0 = b_e$  temos que a matriz que define  $R_{f,g}$  tem uma coluna nula e portanto,  $R_{f,g} = 0$ .

Agora suponha que os polinômios  $f$  e  $g$  possuem  $h$  como um fator comum não constante. Logo,  $f = ph$  e  $g = qh$ , para  $p$  e  $q \in A[Y]$ . Assim  $phq = qhp \Rightarrow fq = gp$ . Escrevendo

$$\begin{cases} p = u_0 Y^{d-1} + \dots + u_{d-1} \\ q = v_0 Y^{e-1} + \dots + v_{e-1} \end{cases}$$

temos que pela equação acima,

$$(a_d Y^d + \dots + a_0)(v_0 Y^{e-1} + \dots + v_{e-1}) = (b_e Y^e + \dots + b_0)(u_0 Y^{d-1} + \dots + u_{d-1}).$$

Distribuindo  $u$ 's e os  $v$ 's.

$$\begin{aligned} (a_d Y^{d+e-1} + \dots + a_0 Y^{e-1})v_0 + \dots + (a_d Y^d + \dots + a_0)(v_{e-1}) = \\ (b_e Y^{d+e-1} + \dots + b_0 Y^{d-1})u_0 + \dots + (b_e Y^e + \dots + b_0)(u_{d-1}). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$(a_d Y^{d+e-1} + \dots + a_0 Y^{e-1})v_0 + \dots + (a_d Y^d + \dots + a_0)(v_{e-1})$$

$$-(b_e Y^{d+e-1} + \dots + b_0 Y^{d-1})u_0 - \dots - (b_e Y^e - \dots - b_0)(u_{d-1}) = 0.$$

Podemos escrever esse sistema na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_d & & & -b_e \\ \vdots & & & \vdots \\ a_0 & & & -b_0 \\ & \vdots & & \vdots \\ & & a_d & -b_e \\ & & \vdots & \vdots \\ & & a_0 & -b_0 \\ & & & \vdots \\ & & & a_d & -b_e \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & a_0 & -b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_{e-1} \\ u_0 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_{d-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema tem solução nula se o determinante da seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_d & & & -b_e \\ \vdots & & & \vdots \\ a_0 & & & -b_0 \\ & \vdots & & \vdots \\ & & a_d & -b_e \\ & & \vdots & \vdots \\ & & a_0 & -b_0 \\ & & & \vdots \\ & & & a_d & -b_e \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & a_0 & -b_0 \end{pmatrix}$$

é nulo, isto é,  $\det(A) = 0$ , pois  $u_i$  e  $v_j$  não são identicamente nulo.

Mas observe que esta matriz é semelhante a matriz que define a Resultante de  $f$  e  $g$ , assim,  $R_{f,g} = (-1)^e(\det(A^t))$ , na qual  $e$  é as colunas  $b'$ s que são negativas.

Logo,

$$R_{f,g} = (-1)^e(\det(A^t)) = 0. \quad \square$$

**Lema 4.** Se  $\varphi : A \rightarrow B$  é um homomorfismo de anéis e  $\varphi^*$  é o homomorfismo induzido  $A[Y] \rightarrow B[Y]$  definido por  $\varphi^*(\sum a_i Y^i) = \sum \varphi(a_i) Y^i$ , então  $\varphi(R_{f,g}) = R_{\varphi^*(f), \varphi^*(g)}$ , para todo  $f$  e  $g$  em  $A[Y]$ , em que os graus atribuídos a  $\varphi^*(f)$  e  $\varphi^*(g)$  são os mesmos de  $f$ ,  $g$ .

**Prova:** Suponha que  $\varphi : A \rightarrow B$  seja um homomorfismo de anéis e consideremos o homomorfismo induzido:

$$\begin{aligned} \varphi^* : A[Y] &\longrightarrow B[Y] \\ \sum_i a_i Y^i &\longmapsto \varphi^*\left(\sum_i a_i Y^i\right) = \sum_i \varphi(a_i) Y^i. \end{aligned}$$

$$\text{Sejam } f(Y) = \sum_{j=0}^d a_j Y^j \text{ e } g(Y) = \sum_{l=0}^e b_l Y^l \in A[Y].$$

Mostremos que  $\varphi(R_{f,g}) = R_{\varphi(f),\varphi(g)}$ .

De fato, sabemos que

$$R_{f,g} = \begin{vmatrix} a_d & a_{d-1} & \cdots & a_0 & & & \\ & a_d & \cdots & a_1 & a_0 & & \\ & & & & & a_d & \cdots & a_0 \\ b_e & b_{e-1} & \cdots & b_0 & & & & \\ & b_e & \cdots & b_1 & b_0 & & & \\ & & & & & & b_e & \cdots & b_0 \end{vmatrix} = D(a_0, \dots, a_d, b_0, \dots, b_e),$$

em que  $D$  é a expressão do determinante  $R_{f,g}$  em termos de  $a_d, \dots, a_0, b_e, \dots, b_0$ .

Assim, como  $\varphi$  é um homomorfismo temos que

$$\varphi(R_{f,g}) = \varphi(D(a_0, \dots, a_d, b_0, \dots, b_e)) = D(\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_d), \varphi(b_0), \dots, \varphi(b_e)).$$

Por outro lado, sendo

$$\varphi^*(f) = \varphi^* \left( \sum_{j=0}^d a_j Y^j \right) = \sum_{j=0}^d \varphi(a_j) Y^j$$

e

$$\varphi^*(g) = \varphi^* \left( \sum_{l=0}^e b_l Y^l \right) = \sum_{l=0}^e \varphi(b_l) Y^l$$

Segue que

$$\begin{aligned} R_{\varphi(f),\varphi(g)} &= \begin{vmatrix} \varphi(a_d) & \varphi(a_{d-1}) & \cdots & \varphi(a_0) & & & \\ & \varphi(a_d) & \cdots & \varphi(a_1) & \varphi(a_0) & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & & & \varphi(a_d) & \cdots & \varphi(a_0) \\ \varphi(b_e) & \varphi(b_{e-1}) & \cdots & \varphi(b_0) & & & & \\ & \varphi(b_e) & \cdots & \varphi(b_1) & \varphi(b_0) & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & & \varphi(b_e) & \cdots & \varphi(b_0) \end{vmatrix} \\ &= D(\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_d), \varphi(b_0), \dots, \varphi(b_e)) = \varphi(R_{f,g}). \end{aligned} \quad \square$$

**Observação 5.** Como  $R_{f,g}$  é um polinômio na variável  $x$ , indicamos por  $R_{f,g}(x)$  a Resultante valorada em  $x \in \mathbb{K}$ .

**Corolário 6.** Se

$$\begin{cases} f = a_d(X_1, X_2, \dots)Y^d + \cdots + a_0(X_1, X_2, \dots) \\ g = b_e(X_1, X_2, \dots)Y^e + \cdots + b_0(X_1, X_2, \dots) \end{cases}$$

$a_i, b_i \in \mathbb{K}[X_1, X_2, \dots]$ , então para cada  $x = (x_1, x_2, \dots)$ , temos

$$R(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_d(x) = 0 = b_e(x) \\ \text{ou} \\ f(x, Y), g(x, Y) \text{ admitem um fator comum não constante.} \end{cases}$$



**Prova:** Faremos a demonstração considerando que  $a_i$  e  $b_j$  são polinômios na variável  $X$  (e o caso geral segue pelo Princípio da Indução Finita). Para cada  $x \in \mathbb{K}$  considere a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi_x : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ h(X) = \sum_{i=0}^n c_i X^i &\longmapsto \varphi_x \left( \sum_{i=0}^n c_i X^i \right) := \sum_{i=0}^n c_i x^i = h(x). \end{aligned}$$

Pode-se notar que  $\varphi_x$  é um homomorfismo conforme Teorema 22.4, p. 201, [2] e este induz o homomorfismo  $\varphi_x^*$ , dado por:

$$\begin{aligned} \varphi_x^* : \mathbb{K}[X, Y] &\longrightarrow \mathbb{K}[Y] \\ f(X, Y) &\longmapsto f(x, Y). \end{aligned}$$

Pelo Lema 4, segue que:

$$R_{f,g} = \varphi_x(R_{f,g}) = R_{\varphi_x^*(f), \varphi_x^*(g)} = R_{f(x,Y), g(x,Y)}.$$

Agora pela Proposição 3, temos

$$R_{f(x,Y), g(x,Y)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_d(x) = 0 = b_e(x) \\ \text{ou} \\ f(x, Y), g(x, Y) \text{ admitem um fator não constante.} \end{cases}$$

Mas  $R_{f(x,Y), g(x,Y)} = R_{f,g}(x)$ , ou seja,

$$R_{f,g}(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_d(x) = 0 = b_e(x) \\ \text{ou} \\ f(x, Y), g(x, Y) \text{ admitem um fator não constante.} \end{cases} \quad \square$$

**Observação 7.** O Corolário 6 nos mostra que  $R_{f,g} \equiv 0$  se, e somente se,  $f$  e  $g$  admitem componente não constante em comum, ou seja, a interseção entre  $f$  e  $g$  é não finita.

**Exemplo 8.** Calculemos a Resultante de  $f = X^2 + Y^2 - 2X$  e  $g = Y^2 - X$ .

Fixando  $X$  como constante,  $f = Y^2 + (x^2 - 2x)$  e  $g = Y^2 + (-x)$ . Temos

$$R_{f,g}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x^2 - 2x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^2 - 2x \\ 1 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = x^2(x-1)^2.$$

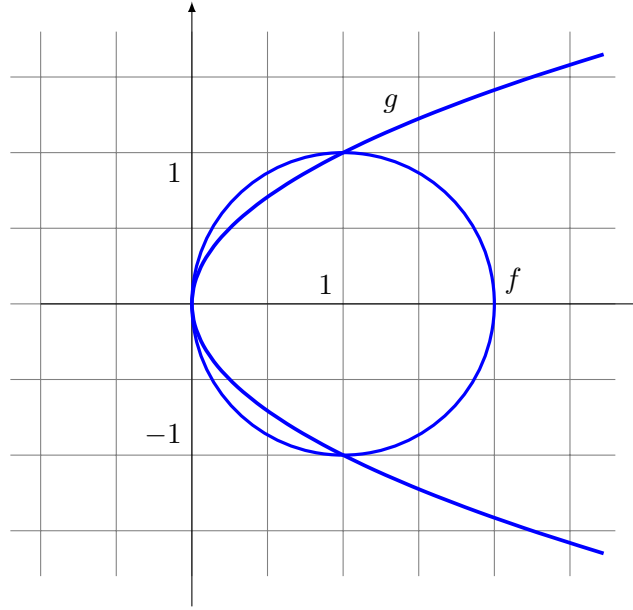
Veja que não conseguimos estimar diretamente a quantidade de interseções, pois como  $X = 0$  e  $X = 1$  são raízes múltiplas, podem ser ambos pontos de tangência.

Mas no traço destas curvas observamos que somente em  $(0, f(0))$  temos a tangência.

Por outro lado, quando calculamos a Resultante fazendo  $Y$  constante, temos;

$$R_{f,g}(y) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & y^2 \\ -1 & y^2 & 0 \\ 0 & -1 & y^2 \end{vmatrix} = y^2(y-1)(y+1).$$

Agora é possível ver que existem *três* pontos de interseção. Mas a multiplicidade do ponto  $(0, 0)$  ocorre tanto em  $R_{f,g}(x)$  como em  $R_{f,g}(y)$  pois este é o ponto de tangência na interseção das curvas.



## 2 O Grau da Resultante

Nesta seção vamos introduzir o grau da Resultante, a saber, o número máximo de pontos de interseção entre duas curvas.

Inicialmente vamos definir *direção assintótica* de uma curva, cuja a interpretação geométrica pode ser vista como o limite das retas  $OP$  no qual  $O$  é a origem e  $P$  é um ponto da curva que se afasta da origem.

**Definição 9.** Seja  $f$  um polinômio em  $\mathbb{K}[X, Y]$ , podemos decompor em soma de polinômios homogêneos, isto é,

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_n,$$

em que cada  $f_i$  é homogêneo de grau  $i$ , (um polinômio é homogêneo de grau  $d$  se  $p(\lambda X) = \lambda^d p(X)$ ), e tendo  $f_d \neq 0$ .

Cada componente  $aX + bY$  de  $f_d$  é chamada *direção assintótica* de  $f$ .

**Observação 10.** Sendo  $f_m = \sum_{i=0}^m a_i X^i Y^{m-i}$  um polinômio homogêneo não nulo, conseguimos

o decompor como o seguinte produto fatores irredutíveis  $\prod_{i=1}^m (b_i X + c_i Y)$  em que as frações  $b_i/c_i$  estão bem determinadas.

De fato, considere o polinômio

$$f(X, Y) = a_0 Y^n + a_1 X Y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} Y + a_n X^n,$$

como tendo coeficientes consecutivos nulos da seguinte forma:  $a_0 = a_1 = \cdots = 0$  e/ou  $a_n = a_{n-1} = \cdots = 0$ .

Podemos escreve-lo da seguinte forma

$$X^r Y^{n-s} (d_0 Y^u + d_1 Y^{u-1} X + \cdots + d_{u-1} Y X^{u-1} + d_u X^u) \quad (2.1)$$

em que  $d_0$  e  $d_u$  são não nulos.

Definimos  $h(X, Y) = d_0 Y^u + d_1 Y^{u-1} X + \dots + d_{u-1} Y X^{u-1} + d_u X^u$  assim considerando  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u$  raízes complexas do polinômio  $h(X, 1)$ , obtemos

$$h\left(\frac{X}{Y}, 1\right) = d_0 \prod_{i=1}^u \left(\frac{X}{Y} - \alpha_i\right).$$

Agora multiplicando a igualdade acima por  $Y^u$ , temos que

$$h(X, Y) = d_0 \prod_{i=1}^u (X - Y\alpha_i),$$

e assim por (2.1), segue que

$$f(X, Y) = X^r Y^{n-s} d_0 \prod_{i=1}^u (X - Y\alpha_i).$$

Observe que  $X^r = (1X - 0Y)(1X - 0Y) \dots (1X - 0Y)$ ,  $r$ -vezes e também,  $Y^{n-s} = (0X - 1Y)(0X - 1Y) \dots (0X - 1Y)$ ,  $(n-s)$ -vezes.

Desta forma, obtemos a decomposição do polinômio  $f(X, Y)$ .

Caso  $a_0$  e  $a_d$  são não nulos, tome  $h(X, Y)$  como  $f(X, Y)$  e resultado segue de forma análoga.

**Exemplo 11.** A curva  $f = 1 - XY$  tem como direção assintótica  $X$  e  $Y$ , pois sendo  $f_d = XY$ , este pode ser decomposto como  $(0X + 1Y)(1X + 0Y)$ .

Veja também que  $g = Y^2 - X$ , tem  $Y$  como direção assintótica, pois  $Y^2 = (0X + 1Y)(0X + 1Y)$ .

**Exemplo 12.** Calculemos a Resultante das curvas  $f, g$  como no exemplo anterior, com a reta  $r : Y - (aX + b) = 0$ .

(i)

$$R_{f,r}(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -(ax + b) \end{vmatrix},$$

assim,  $R_{f,r}(x) = ax^2 + bx - 1$ . Veja que se reta tem a mesma direção assintótica de  $f$  teríamos  $R_{f,r}(x) = 1$ .

(ii)

$$R_{g,r}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 1 & -(ax + b) & 0 \\ 0 & 1 & -(ax + b) \end{vmatrix},$$

ou seja,  $R_{g,r}(x) = ax^2 + (2ab - 1)x + b^2$ .

Caso a reta possua a mesma direção assintótica de  $g$ ,  $R_{g,r}(x)$  é dada por  $x$ .

Veja que quando temos a reta não possuindo a mesma direção assintótica das curvas segue que o grau de  $R_{f,r}$  e  $R_{g,r}$  é igual a 2 e coincide com o produto do grau do polinômio  $f$  e  $g$  com o grau 1 da reta, reciprocamente.

A seguir mostraremos este resultado, para tanto consideramos primeiramente o seguinte Lema:

**Lema 13.** *Um polinômio  $p \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  é dito homogêneo de grau  $m$  se, e somente se, a seguinte identidade ocorre:*

$$p(TX_1, \dots, TX_n) = T^m p(X_1, \dots, X_n) \text{ em } \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, T], \quad (2.2)$$

em que  $T$  é uma nova variável independente.

**Prova:** Veja que se  $p$  é homogêneo de grau  $m$ , temos que o resultado segue direto da definição.

Agora, suponha que (2.2) seja verdadeira.

Podemos escrever  $p$  como  $p = p_0 + p_1 + \dots + p_r$ , em que cada  $p_i$  é homogêneo de grau  $i$  e  $p_r \neq 0$ . Logo,  $p_i(TX) = T^i p_i(X)$ ,  $\forall i$ .

Assim abreviando para  $X$  a  $n$ -upla  $(X_1, \dots, X_n)$ , podemos escrever

$$p(TX) = p_0(TX) + p_1(TX) + \dots + p_r(TX) = p_0(X) + Tp_1(X) + \dots + T^r p_r(X).$$

Por hipótese temos que  $p(TX) = T^m p(X)$ , assim

$$T^m p(X) = p(TX) = p_0(X) + Tp_1(X) + \dots + T^r p_r(X).$$

Por outro lado,

$$T^m(p(X)) = T^m(p_0 + p_1(X) + \dots + p_r(X)) = T^m p_0 + T^m p_1(X) + \dots + T^m p_r(X).$$

Então,

$$T^m p_0 + T^m p_1(X) + \dots + T^m p_r(X) = p_0(X) + Tp_1(X) + \dots + T^r p_r(X).$$

Mas esta igualdade somente é válida se  $p_i(X) \equiv 0$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$  e  $m = r$ .

Ou seja,

$$p = p_m.$$

E portanto  $p$  é polinômio homogêneo de grau  $m$ . □

**Proposição 14.** *O grau da Resultante entre duas curvas sem direção assintótica em comum é igual ao produto dos graus dessas curvas, isto é,*

$$\partial(R_{f,g}) = (\partial f)(\partial g).$$

**Prova:** Sejam  $f = \sum_i^d f_i$  e  $g = \sum_i^e g_i$  em  $\mathbb{K}[X, Y]$ , em que  $f_i, g_i$  são homogêneos de grau  $i$  e  $f_d, g_e$  polinômios não nulos. No que se segue  $Z$  uma nova variável que não depende de  $X$  e  $Y$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} f^*(X, Y, Z) &= Z^d f_0 + Z^{d-1} f_1 + \dots + Z f_{d-1} + f_d, \\ g^*(X, Y, Z) &= Z^e g_0 + Z^{e-1} g_1 + \dots + Z g_{e-1} + g_e. \end{aligned}$$

Veja que  $f^*$  é homogêneo de grau  $d$ , pois cada  $f_i$  homogêneo de grau  $i$

$$\begin{aligned} f^*(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) &= \\ (\lambda Z)^d f_0(\lambda X, \lambda Y) + (\lambda Z)^{d-1} f_1(\lambda X, \lambda Y) + \dots + (\lambda Z) f_{d-1}(\lambda X, \lambda Y) + f_d(\lambda X, \lambda Y) &= \\ (\lambda)^d Z^d f_0(X, Y) + (\lambda)^{d-1} Z^{d-1} f_1(X, Y) + \dots + (\lambda) Z f_{d-1}(X, Y) + f_d(X, Y) &= \\ (\lambda)^d Z^d f_0(X, Y) + (\lambda)^d Z^{d-1} f_1(X, Y) + \dots + (\lambda^d) Z f_{d-1}(X, Y) + (\lambda^d) f_d(X, Y) &= \\ (\lambda^d) [Z^d f_0(X, Y) + Z^{d-1} f_1(X, Y) + \dots + Z f_{d-1}(X, Y) + f_d(X, Y)] &= (\lambda^d) f^*(X, Y, Z). \end{aligned}$$

E ainda  $f^*(X, Y, 1) = f(X, Y)$ .

O mesmo ocorre para  $g^*$

Podemos escrever os polinômios  $f^*$  e  $g^*$  como:

$$f^* = A_0 Y^d + \cdots + A_d \text{ e } g^* = B_0 Y^e + \cdots + B_e$$

em que,  $A_i$  e  $B_j \in \mathbb{K}[X, Z]$  são homogêneos de grau  $d$  e  $e$  respectivamente.

Calculando a Resultante de  $f^*$  e  $g^*$ :

$$R_{f^*, g^*}(X, Z) = \begin{vmatrix} A_0 & \cdots & A_d & & & \\ & & & \cdots & \cdots & \\ & & & & A_0 & \cdots & A_d \\ B_0 & \cdots & B_e & & & \\ & & & \cdots & \cdots & \\ & & & & B_0 & \cdots & B_e \end{vmatrix}.$$

Mostremos que  $R_{f^*, g^*}$  é homogêneo se o seu grau for  $d \cdot e$  e ainda não for identicamente nulo. Como consequência teremos  $\partial(R_{f, g}) = (\partial f)(\partial g)$ .

Pelo Lema 13 basta mostrar que

$$R_{f^*, g^*}(TX, TZ) = T^{d \cdot e} R_{f^*, g^*}(X, Z) \text{ em } \mathbb{K}[X, Z, T].$$

Calculando  $R_{f^*, g^*}(TX, TZ)$ :

$$R_{f^*, g^*}(TX, TZ) = \begin{vmatrix} A_0 & TA_1 & \cdots & \cdots & T^d A_d & & \\ & A_0 & \cdots & \cdots & T^{d-1} A_{d-1} & T^d A_d & \\ & & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & A_0 & \cdots & T^d A_d \\ B_0 & TB_1 & \cdots & \cdots & T^e B_e & & \\ & B_0 & \cdots & \cdots & T^{e-1} B_{e-1} & T^e B_e & \\ & & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & B_0 & \cdots & T^e B_e \end{vmatrix}.$$

Se multiplicamos a segunda linha por  $T$ , a terceira  $T^2$ , até a  $e$ -ésima por  $T^{e-1}$  e fazendo o mesmo para as linhas de  $B$ 's, a segunda linha de  $B$ 's por  $T$ , até a última, sendo multiplicada por  $T^{d-1}$ , obtemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_0 & TA_1 & \cdots & \cdots & T^d A_d & & \\ & TA_0 & \cdots & \cdots & T^d A_{d-1} & T^{d+1} A_d & \\ & & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & T^{e-1} A_0 & \cdots & T^{d+e-1} A_d \\ B_0 & TB_1 & \cdots & \cdots & T^e B_e & & \\ & TB_0 & \cdots & \cdots & T^e B_{e-1} & T^{e+1} B_e & \\ & & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & T^{d-1} B_0 & \cdots & T^{e+d-1} B_e \end{vmatrix} = T^N R(XT, ZT)$$

no qual  $N = (1 + 2 + \cdots + d - 1) + (1 + 2 + \cdots + e - 1)$  que é o número de vezes que  $T$  foi multiplicado nas linhas da matriz.

Agora veja que, podemos colocar em evidência as variável  $T$  no determinante  $\Delta$ , de tal modo que resta apenas termos em  $X$  e  $Z$  e obtemos  $T^M R_{f^*, g^*}(X, Z)$ , em que  $M = 1 + 2 + \cdots + e + d - 1$ .

Fazendo  $M - N$ , temos o seguinte:

$$\begin{aligned} M - N &= \frac{(d+e)(d+e-1)}{2} - \frac{e(e-1)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} \\ &= \frac{d^2 + de - d + de + e^2 - e - e^2 + e - d^2 + d}{2} \\ &= de. \end{aligned}$$

□

Para ilustrar o teorema observe os exemplos abaixo

**Exemplo 15.** Sejam  $f(X, Y) = X^2 + Y^2 - 4$  e  $g(X, Y) = XY - 1$ , que não possuem direção assintótica em comum. Como visto no Exemplo 2 a Resultante entre esses polinômios é  $R_{f,g}(x) = x^4 - 4x^2 + 1$  que possui grau 4 e coincide com o grau de  $(fg)(X, Y) = X^3Y + XY^3 - X^2 - Y^2 - 4XY + 4$ .

**Exemplo 16.** Sendo os polinômios  $s(X, Y) = X^2 + Y - 4$  e  $t(X, Y) = 3X^2 - 4Y$ . A Resultante é dada do seguinte modo

$$R_{s,t} = \begin{vmatrix} 1 & x^2 - 4 \\ -4 & 3x^2 \end{vmatrix} = 7x^2 - 16$$

e ainda  $(st)(X, Y) = 3X^4 + 3X^2Y - 4XY^2 - 12X^2 + 4Y^2 - 4$ , e como essas possuem direção assintótica em comum ( $X^2$ ), segue que  $\partial(R_{s,t}) \neq \partial(s)\partial(t)$ .

**Agradecimentos:** Agradeço à professora Elíris Cristina Rizziolli que me instruiu durante os seminários, ao grupo PET-Matemática pelas experiências e amizades e aos meus amigos que auxiliaram nesses dolorosos e proveitosos anos.

## Referências Bibliográficas

- [1] Vainsencher, I., *Introdução às Curvas Algébricas Planas*. Coleção matemática universitária, Rio de Janeiro: IMPA (2005).
- [2] Fraleigh, J. B., *A First Course in Abstract Algebra*. Boston: Addison Wesley (2003).

# Transformada de Fourier e Propriedades

Felipe Felix Souto<sup>†</sup>

Orientador(a): Marta Cilene Gadotti

**Resumo:** A Transformada de Fourier tem grande importância em resolver alguns problemas físicos clássicos que tratam, de certa forma, do “infinito”, como a vibração das cordas (semi) infinitas, a condução de calor na barra (semi) infinita e uma das mais conhecidas, o problema de Dirichlet pra a equação de Laplace no semiplano. Neste trabalho, buscamos desenvolver o conceito da Transformada e mostrar algumas aplicações dela: o cálculo de integrais impróprias e a resolução de EDP's.

**Palavras-chave:** Transformada de Fourier, funções de decaimento rápido, relações de Parseval, problema de Dirichlet

---

*Abstract: The Fourier transform has its importance in solving some classic physical problems dealing with the “infinite”, as the vibration of the strings (semi) infinite, the heat conduction in the bar (semi) infinite and one of most known, the Dirichlet problem for the Laplace equation in the half-plane. In this work, we develop the concept of Transform and show some applications of it: the calculation of improper integrals and the resolution of PDE's.*

*Keywords: Fourier transform, rapid decay functions, Parseval relations, Dirichlet problem*

---

## 1 Definição da Transformada de Fourier

Primeiramente, daremos a definição formal da Transformada de Fourier, para depois justificar os espaços considerados na definição e ainda começar a trabalhar com algumas de suas propriedades.

**Definição 1.** Dizemos que uma função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  é  $\mathfrak{L}^1$ , quando for integrável e absolutamente integrável. Além disso, tal função será  $\mathfrak{L}^2$ , quando além de integrável, for quadrado integrável.

**Definição 2.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função função  $\mathfrak{L}^1$ , sua transformada de Fourier é definida por:

$$\mathfrak{F}[f](\xi) = F(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx. \quad (1.1)$$

Vamos justificar as hipóteses para a função e mostrar a necessidade de fazê-las.

(a) Como nosso objetivo era definir a transformada pela expressão (1.1) com:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N e^{-ix\xi} f(x) dx, \quad (1.2)$$

---

<sup>†</sup>FAPESP (processo 2015/00534-0)

onde  $M$  e  $N$  tendem a infinito independentemente, devemos buscar uma classe de funções para as quais a integral (1.2) converge. A primeira classe a considerar é a de funções tais que:

- (i)  $f$  é seccionalmente contínua em cada intervalo  $[-M, N]$ ;
- (ii)  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ .

Obviamente, a propriedade (i) garante a integrabilidade e a limitação do integrando  $e^{-ix\xi}f(x)$  em cada intervalo  $[-M, N]$  e, da propriedade (ii), dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $K > 0$  tal que:

$$\int_{|x|>K} |f(x)| dx < \varepsilon \Rightarrow \left| \int_{|x|>K} e^{-ix\xi} f(x) dx \right| \leq \int_{|x|>K} |f(x)| dx < \varepsilon.$$

- (b) No item (a), conseguimos uma classe de funções cuja transformada de Fourier está bem definida, entretanto ela não é tão geral. Então, vamos buscar uma que seja um pouco melhor. Note que as funções do espaço  $\mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$  tem a integral em (1.2) sendo convergente, isto requer que  $f$  e  $|f|$  sejam integráveis, em cada intervalo  $[-M, N]$ , e além disto existam

$$\lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_{-N}^M f(x) dx \quad \text{e} \quad \lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_{-N}^M |f(x)| dx. \quad (1.3)$$

É fácil notar que se  $f$  for seccionalmente contínua em cada intervalo  $[-M, N]$  e existir (1.3), então  $f$  será  $\mathfrak{L}^1$ .

- (c) O trabalho com funções  $\mathfrak{L}^1$  terá mais importância a frente, pois este tipo de função terá propriedades bastante interessantes na Transformada de Fourier. Entretanto, não são apenas nestes tipos de funções que poderemos aplicar a Transformada de Fourier, por exemplo:

$$f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

não é uma função  $\mathfrak{L}^1$ , mas é possível aplicar a Transformada.

- (d) Como em muitas aplicações valores complexos aparecem com bastante frequência, vamos dizer que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função  $\mathfrak{L}^1$ , quando suas partes real e imaginária o forem.

**Proposição 3.** A Transformada de Fourier,  $F(\xi)$ , de uma função  $\mathfrak{L}^1$ ,  $f(x)$ , é uma transformação linear contínua e se anula no infinito.

Veja a prova na referência [2].

**Definição 4.** Dizemos que uma transformação linear  $T : X \rightarrow Y$ , onde  $X$  e  $Y$  são espaços vetoriais normados, é limitado quando existe  $M > 0$  tal que:

$$\|T(v)\|_Y \leq M\|v\|_X, \quad \forall v \in X.$$

**Observação 5.** Não é sempre que  $F(\xi)$  é  $\mathfrak{L}^1$ . Considere a função pulso unitário:

$$u_1(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$



Sua Transformada é dada por:

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-1}^1 \cos(\xi x) dx - i \int_{-1}^1 \sin(\xi x) dx \right] = \frac{2 \operatorname{sen}(\xi)}{\sqrt{2\pi} \xi},$$

que não é uma função  $\mathfrak{L}^1$ .

Note que, com o exemplo acima, podemos considerar a teoria um tanto quanto assimétrica. De agora em diante, estudaremos a Transformada de Fourier em um subconjunto de  $\mathfrak{L}^1$ , em que  $\mathfrak{F}$  seja rico de propriedades. Um bom espaço seria  $C_0^\infty$ , das funções infinitamente diferenciáveis de suporte compacto. Uma desvantagem é que a transformada de uma função dessa classe, em geral também não tem suporte compacto.

**Exemplo 6.** A função

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$$

pertence a  $C_0^\infty$ , mas sua Transformada

$$F(\xi) = \frac{2(1 - \cos(a\xi))}{a\xi^2\sqrt{2\pi}},$$

não.

Deste fato, devemos escolher um outro conjunto, o conjunto  $\mathcal{S}$  das funções de decaimento rápido, que contem  $C_0^\infty$  e veremos na próxima seção que terá propriedades um pouco melhores.

## 2 O espaço $\mathcal{S}$ e a transformada de Fourier em $\mathcal{S}$

Buscamos um bom espaço para “usar” a Transformada de Fourier, pretendemos então, definir tal espaço e ver quais propriedades a transformada possui nesse espaço que o torna tão interessante para o estudo.

**Definição 7.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é de decaimento rápido se ela for infinitamente diferenciável e

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m D^n f(x) = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}_+,$$

onde  $D^n$  indica derivação de ordem  $n$  da função. Denominamos o conjunto das funções de decaimento rápido por  $\mathcal{S}$ .

**Observação 8.** O espaço das funções definido acima recebe o nome de Espaço de Schwartz, em homenagem ao matemático Laurent Schwartz, que criou a Teoria das Distribuições.

**Exemplo 9.** A função  $f(x) = e^{-x^2}$  é uma função de decaimento rápido.

Nosso próximo resultado dará uma caracterização para as funções de decaimento rápido.

**Proposição 10.** Uma função infinitamente derivável  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é de decaimento rápido se, e somente se, dados  $m, n \in \mathbb{Z}_+$ , existe  $M(m, n) \in \mathbb{R}_+$  tal que:

$$|x^m D^n f(x)| \leq M(m, n), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Prova:** Suponha que  $f$  seja de decaimento rápido, isto é,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m D^n f(x) = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Então, existe  $N > 0$  tal que

$$|x| > N \Rightarrow |x^m D^n f(x)| \leq 1. \quad (2.1)$$

Por outro lado, a continuidade da  $f$  garante que ela é limitada no intervalo limitado  $[-N, N]$ , isto é, existe  $K_{m,n} > 0$  tal que

$$|x^m D^n f(x)| \leq K_{m,n}, \quad \forall x \in [-N, N]. \quad (2.2)$$

Portanto, tomando  $M(m, n) = \max\{1, K_{m,n}\}$ , segue de (2.1) e (2.2) o resultado. Reciprocamente, suponha que para cada  $m, n \in \mathbb{Z}_+$ , exista  $M(m, n) \in \mathbb{R}_+$  tal que

$$|x^m D^n f(x)| \leq M(m, n), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Usando a equação acima para  $m + 1$  e  $n$ , obtemos:

$$|x^{m+1} D^n f(x)| \leq M(m + 1, n) \Rightarrow |x^m D^n f(x)| \leq |x|^{-1} M(m + 1, n).$$

Logo, como  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{-1} M(m + 1, n) = 0$ , segue o resultado.  $\square$

**Corolário 11.** *Uma função infinitamente diferenciável  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é de decaimento rápido se, e somente se, dados polinômios  $P(X)$  e  $Q(x)$ , existe uma constante  $M(P, Q) > 0$  tal que:*

$$|Q(x)P(D)f(x)| \leq M(P, Q), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Prova:** Da Álgebra Linear, a cada polinômio  $P(X) = \sum_{j=0}^n a_j X^j$  podemos associar um operador diferencial linear com coeficientes constantes  $P(D) = \sum_{j=0}^n a_j D^j$ .

Basta tomar  $Q(x) = x^m$  e  $P(X) = X^n$ , que o resultado segue diretamente da Proposição 10.

Reciprocamente, da Proposição 10, basta observar que:

$$|Q(x)P(D)f(x)| \leq \sum_{j=0}^b \sum_{i=0}^m |a_j b_i| |x^j D^i f(x)| \leq \sum_{j=0}^b \sum_{i=0}^m |a_j b_i| M(m, n) = M(P, Q). \quad \square$$

O próximo resultado é uma decorrência direta dos dois últimos.

**Corolário 12.** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  estiver em  $\mathcal{S}$ , então  $D^n f$  e  $x^m f$  também estarão, quaisquer que sejam  $m, n \in \mathbb{Z}_+$ , assim como  $x^m D^n f$ . Além disso, para quaisquer polinômios  $P(X)$  e  $Q(x)$ , temos que  $Q(x)P(D)f$  estará em  $\mathcal{S}$ .*

**Proposição 13.** *Toda função de decaimento rápido  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função  $\mathcal{L}^1$ .*

**Prova:** Obviamente, em cada intervalo  $[-M, N]$ , a função  $f$  é contínua e logo, limitada e integrável, o que implica na integrabilidade de  $|f|$ . Agora, basta provar a convergência da

integral imprópria. Para tanto, tomando a desigualdade da Proposição 10 para  $n = 0$  e  $m = 2$ , temos

$$\begin{aligned} |x^2 f(x)| \leq M(2, 0) &\Rightarrow \int_{|x| \geq 1} |f(x)| dx \leq M(2, 0) \int_{|x| \geq 1} |x|^{-2} dx = \\ M(2, 0) \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^\infty &= M(2, 0) \Rightarrow \int_{-\infty}^\infty |f(x)| dx \leq \int_{-1}^1 |f(x)| dx + M(2, 0) < \infty. \quad \square \end{aligned}$$

Agora que sabemos que toda função de decaimento rápido é uma função  $\mathcal{L}^1$ , todas propriedades da Transformada de Fourier vistas para funções  $\mathcal{L}^1$  também são válidas, assim podemos deduzir dois resultados pelo que já vimos até agora.

**Corolário 14.** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  está em  $\mathcal{S}$ , então  $Q(x)P(D)f$  é uma função  $\mathcal{L}^1$ , para quaisquer polinômios  $P$  e  $Q$ .*

**Corolário 15.** *Se  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  estão em  $\mathcal{S}$ , então:*

$$\mathfrak{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathfrak{F}[f] + \beta \mathfrak{F}[g], \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

**Proposição 16.** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  for uma função de  $\mathcal{S}$ , então  $\mathfrak{F}[f]$  será infinitamente derivável e*

$$D_\xi^n \mathfrak{F}[f] = \mathfrak{F}[(-ix)^n f(x)].$$

*Mais geralmente, se  $P(X)$  for um polinômio, então:*

$$P(D_\xi) \mathfrak{F}[f] = \mathfrak{F}[P(-ix)f(x)].$$

**Prova:** Como a transformada é uma função representada por integral, sabemos que ela é derivável e podemos derivar sob o sinal de integração (veja referência [3])

$$F(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-ix\xi} f(x) dx \Rightarrow F'(\xi) = (-ix)F(\xi) \Rightarrow F^n(\xi) = (-ix)^n F(\xi).$$

Para a parte do polinômio, basta observar que a transformada é uma transformação linear.  $\square$

**Proposição 17.** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  for uma função de  $\mathcal{S}$ , então*

$$\mathfrak{F}[D^n f] = (i\xi)^n \mathfrak{F}[f], \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

*Mais geralmente, se  $P(X)$  for um polinômio, então:*

$$\mathfrak{F}[P(D)f] = P(i\xi) \mathfrak{F}[f].$$

**Prova:** Faremos por indução sobre  $n$ . Mostraremos primeiro para  $n = 1$ :

Usando integração por partes:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ix\xi} f'(x) dx = \left[ e^{-ix\xi} f(x) \right]_{-\infty}^\infty + i\xi \int_{-\infty}^\infty e^{-ix\xi} f(x) dx = i\xi \mathfrak{F}[f].$$

Agora, suponha que é válido para  $n - 1$  e provemos para  $n$ , basta observar que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty e^{-ix\xi} f^{(n)}(x) dx &= \left[ e^{-ix\xi} f^{(n-1)}(x) \right]_{-\infty}^\infty + i\xi \int_{-\infty}^\infty e^{-ix\xi} f^{(n-1)}(x) dx = \\ &= i\xi \mathfrak{F}[f^{(n-1)}] = (i\xi)^n \mathfrak{F}[f]. \end{aligned}$$

Para a parte do polinômio, basta observar que a transformada é uma transformação linear.  $\square$

**Proposição 18.** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  for uma função de  $\mathcal{S}$ , então sua Transformada de Fourier também será.*

**Prova:** Usando as proposições anteriores, para quaisquer  $m$  e  $n$  inteiros:

$$\xi^m D_\xi^n \mathfrak{F}[f] = \xi^m \mathfrak{F}[(-ix)^n f] = \mathfrak{F}[(-iD)^m \{(-ix)^n f\}].$$

Segue do Corolário 12 que  $(-iD)^m \{(-ix)^n f\}$  está em  $\mathcal{S}$ , logo em  $\mathfrak{L}^1$  e, portanto, o primeiro membro da expressão acima é limitado, pois o último membro é uma integral convergente. Portanto, da Proposição 2.1, segue que  $\mathfrak{F}$  é de decaimento rápido.  $\square$

Até agora, sabemos que a Transformada é um operador linear no espaço  $\mathcal{S}$ , o que veremos agora é que é também uma bijeção e encontraremos sua função inversa. Mas para isso, definiremos uma função auxiliar por:

$$\overline{\mathfrak{F}}[g](s) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} g(t) dt.$$

O próximo resultado requer algumas teorias que não são exploradas nesse trabalho (como os núcleos de Dirac) e por isso, omitimos sua demonstração (que pode ser encontrada na referência [2]).

**Teorema 19** (a fórmula da inversa de Fourier). *Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função de  $\mathcal{S}$  e  $F(\xi)$  sua Transformada de Fourier, então:*

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} F(\xi) d\xi. \quad (2.3)$$

**Teorema 20.**  $\mathfrak{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  é um operador linear injetor, sobrejetor e tal que  $\mathfrak{F}^{-1} = \overline{\mathfrak{F}}$ .

**Prova:** Usando a função auxiliar:

$$\overline{\mathfrak{F}}[g](s) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} g(t) dt,$$

segue do teorema anterior que:

$$\overline{\mathfrak{F}}[\mathfrak{F}[f]] = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} F(t) dt = f(x). \quad (2.4)$$

Logo,  $\mathfrak{F}[f] = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ , em outras palavras,  $f$  é injetora.

Agora, para sobrejetividade, seja  $G(\xi)$  uma função de  $\mathcal{S}$ . Então, defina  $g(x) = \overline{\mathfrak{F}}[G(\xi)]$  e observe que, usando o teorema anterior:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[g(x)] &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\eta} G(\eta) d\eta dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \mathfrak{F}[G](-x) dx = G(\xi), \end{aligned} \quad (2.5)$$

ou seja, é sobrejetora.

Quanto a questão da inversa, segue diretamente de (2.4) e (2.5).  $\square$

### 3 Produto de Convolução

**Definição 21.** Dadas duas funções,  $f$  e  $g$  em  $\mathcal{S}$ , definimos o produto de convolução de  $f$  por  $g$  como sendo:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy. \quad (3.1)$$

**Observação 22.** (i) Note que, denotando  $M = \max\{|f(x)|\}$ :

$$|(f * g)(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \right| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy,$$

ou seja, a integral definida em (3.1) converge uniformemente, pelo Teste M de Weierstrass.

(ii) Fazendo a mudança de variável  $u = x - y \Rightarrow du = -dy$ , teremos:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u) du = (f * g)(u),$$

isto é,  $(f * g) = (g * f)$ .

**Proposição 23.** Se  $f$  e  $g$  forem funções de  $\mathcal{S}$ , então

(a)  $(f * g) \in C^\infty$  e  $D^n(f * g) = (D^n f) * g = f * (D^n g)$ .

(b) (**Fórmula de Leibniz**) Para  $m \geq 0$ :

$$x^m(f * g) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (x^k f) * (x^{m-k} g).$$

(c)  $(f * g) \in \mathcal{S}$ .

**Prova:** (a) Seja  $M_1 = \max |f^{(n)}(x)|$  e note que:

$$|f^{(n)}(x-y)g(y)| \leq M_1 |g(y)| \Rightarrow \left| \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x-y)g(y) dy \right| \leq M_1 \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy < \infty,$$

ou seja, a integral converge uniformemente, o que nos permite derivar sob o sinal de integração e obter

$$D^n(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x-y)g(y) dy.$$

A segunda igualdade, segue da mesma maneira.

(b) Basta observar que:

$$x^m(f * g) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x-y)g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (x-y)^k f(x-y) (y^{m-k} g(y)) dy.$$

(c) Devemos provar que  $x^m D^n(f * g)(x)$  é limitado.

Segue dos itens anteriores que:

$$x^m D^n(f * g)(x) = x^m [(D^n f) * g](x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} [(x^k D^n f) * (x^{m-k} g)](x),$$

como cada função na expressão é  $\mathcal{S}$ , segue o resultado.  $\square$

**Teorema 24.** Se  $f$  e  $g$  estão em  $\mathcal{S}$ , então  $\mathfrak{F}[f * g] = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{F}[f] \mathfrak{F}[g]$ .

**Prova:** Por Fubinizinho (veja referência [3]), temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-y)\xi} f(x-y) dx dy,$$

pois, sendo  $h(x, y) = e^{-ix\xi} f(x-y)g(y)$ , temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x, y)| dy dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(x, y)| dx dy < \infty. \quad \square$$

**Observação 25.** Com um raciocínio análogo ao da demonstração do teorema anterior, podemos mostrar que:

$$\overline{\mathfrak{F}}[f * g] = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \overline{\mathfrak{F}}[f] \overline{\mathfrak{F}}[g].$$

**Teorema 26.** Se  $f$  e  $g$  estão em  $\mathcal{S}$ , então  $fg$  também estará e :

$$\mathfrak{F}[fg] = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} (\mathfrak{F}[f] * \mathfrak{F}[g]).$$

**Prova:** Basta definir  $F = \mathfrak{F}[f]$  e  $G = \mathfrak{F}[g]$ . que teremos  $f = \overline{\mathfrak{F}}[F]$  e  $g = \overline{\mathfrak{F}}[G]$ . De onde seguirá, usando a observação anterior:

$$fg = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \overline{\mathfrak{F}}[F * G] \Rightarrow \mathfrak{F}[fg] = \mathfrak{F}[(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \overline{\mathfrak{F}}[F * G]] = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} [F * G]. \quad \square$$

#### 4 Problema de Dirichlet para a equação de Laplace num semiplano

A resolução de EDP's pela Transformada de Fourier é um processo intuitivamente simples, calculamos a transformada da solução, usamos as condições da equação (e caso tenha, as condições iniciais), determinamos a cara da transformada e aplicamos a transformada inversa para determinar a solução desejada.

O problema de Dirichlet no semiplano consiste em, dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , determinar uma função  $u(x, y)$  no semiplano  $y > 0$  satisfazendo:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{em } y > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Supondo que  $f$  e  $u$  sejam funções de decaimento rápido no semiplano, definimos a transformada de  $u$ , para cada  $y$  fixado por:

$$\begin{aligned} U(\xi, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-i\xi x} dx \Rightarrow U_{yy}(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_{yy}(x, y) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-i\xi x} u_x \right]_{-\infty}^{\infty} + \left[ i\xi e^{-i\xi x} \right]_{-\infty}^{\infty} + \xi^2 U(\xi, y) = \xi^2 U(\xi, y), \end{aligned}$$

pois  $u(x, y) \rightarrow 0$  e  $u_x(x, y) \rightarrow 0$ , quando  $|x| \rightarrow \infty$ .

Assim temos a seguinte solução:

$$U(\xi, y) = c_1 e^{|\xi|y} + c_2 e^{-|\xi|y}.$$

Como  $U(\xi, y) \rightarrow 0$  quando  $|\xi| \rightarrow \infty$ , segue que

$$U(\xi, y) = C_2 e^{-|\xi|y},$$

que usando as condições de (4.1), obtemos:

$$U(\xi, 0) = \mathfrak{F}[f](\xi),$$

ou seja,

$$U(\xi, y) = \mathfrak{F}[f](\xi)e^{-|\xi|y}.$$

Por fim, basta utilizar a Observação 25 para obter:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{y^2 + (x - t)^2} dt.$$

## 5 O Teorema de Plancherel–Parseval

**Proposição 27.** *Toda função de  $\mathcal{S}$  é uma função  $\mathfrak{L}^2$ .*

*Demonstração.* Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função de  $\mathcal{S}$ , então ela é  $\mathfrak{L}^1$ , ou seja, suas partes reais e imaginárias são integráveis. Além disso, para  $m = 1$  e  $n = 0$ , temos

$$0 < |x f(x)| \leq M(1, 0) \Rightarrow |x f(x)|^2 \leq M(1, 0)^2 \Rightarrow x^2 f(x)^2 \leq M(1, 0)^2 \Rightarrow \int_{|x| \geq 1} |f(x)|^2 dx \leq M(1, 0)^2 \int_{|x| \geq 1} |x|^{-2} = 2M(1, 0)^2,$$

assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{|x| \leq 1} |f(x)|^2 dx + \int_{|x| \geq 1} |f(x)|^2 dx \leq \int_{|x| \leq 1} |f(x)|^2 dx + 2M(1, 0)^2 < \infty. \quad \square$$

**Teorema 28.** *Dadas  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  em  $\mathcal{S}$ , tem-se:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \overline{G(\xi)} d\xi \quad (5.1)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)^2 d\xi. \quad (5.2)$$

**Prova:** Sejam  $F = \mathfrak{F}[f]$  e  $G = \mathfrak{F}[g]$ , assim (usando “Fubinizinho” (veja referência [3])):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \overline{G(\xi)} d\xi &= (2\pi)^{-1/2} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \overline{g(x)} dx d\xi = \\ &= (2\pi)^{-1/2} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} F(\xi) d\xi dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} f(x) dx. \end{aligned}$$

Fica assim provado (5.1). Para provar (5.2), basta observar que para um número complexo qualquer,  $w \overline{w} = |w|^2$ .  $\square$

### 5.1 Aplicação: Cálculo de integral imprópria

Com a relação de acabamos de mostrar, é possível calcular algumas integrais impróprias de uma maneira mais “fácil”, por exemplo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(at)}{t^2} dt.$$

Para tanto, considere novamente a função pulso unitário

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Vimos que sua Transformada é dada por:

$$F(\xi) = \frac{2 \operatorname{sen}(\xi)}{\sqrt{2\pi}\xi}.$$

Por fim, basta se usar a relação (5.1), obtemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(\xi)}{\xi^2} d\xi = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 dx = \pi.$$

Note que para o cálculo de uma integral difícil, conseguimos resolvê-la por uma simples integral definida, ou seja, a Transformada de Fourier, além de ser útil para resolver algumas EDP's, também ajuda em alguns problemas do cálculo.

**Agradecimentos:** Agradeço aos meus familiares e amigos por todo suporte durante minha graduação, minha orientadora Marta pela orientação nesse trabalho e à FAPESP pelo apoio financeiro.

## Referências Bibliográficas

- [1] Arfken, G. B., Webber, H. J. and Harris, F. E., *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier, 7th edition, 2013.
- [2] de Figueiredo, D. G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2003.
- [3] Souto, F. F. and Gadotti, M. C., *Funções representadas por integrais*, C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, v. 6IC, p. 04–14, 2016.



## Pêndulo Simples Amortecido – Estudo Qualitativo

Felipe Longo<sup>†</sup>

Orientador(a): Marta Cilene Gadotti

**Resumo:** O objetivo principal do projeto de iniciação científica é a teoria de estabilidade para sistemas de equações diferenciais ordinárias. Neste trabalho, traremos algumas definições e resultados e os aplicaremos na equação do pêndulo simples amortecido, encontrando maneiras de estudar seu comportamento sob certas condições.

**Palavras-chave:** Equação do pêndulo, pêndulo simples amortecido, teoria de estabilidade

---

*Abstract: The main objective of the research project is the theory of stability for ordinary differential equations. In this work, we will bring some definitions and results and will apply the equation of simple pendulum damped by finding ways to study their behavior under certain conditions.*

*Keywords: Pendulum equation, simple pendulum damped, stability theory*

---

### 1 Introdução

O pêndulo, como objeto de estudo, em geral, é dado por uma esfera de massa  $m$  presa por um cabo ou corda de comprimento fixo  $L$ . Assim, a equação do pêndulo simples é dada por

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0,$$

onde  $\theta$  é o deslocamento angular (ângulo entre a corda que segue o pêndulo e o eixo vertical) e  $g$  é a constante gravitacional. Porém, se considerarmos a resistência do ar, obtemos a equação

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0,$$

onde  $k > 0$  é a constante de proporcionalidade entre a velocidade linear e a resistência do ar. Assim, para obter a equação do pêndulo, devemos considerar alguns pontos importantes.

A relação entre o deslocamento linear e o deslocamento angular é dada por  $s = L\theta$ . Assim, temos que  $\dot{s} = L\dot{\theta}$ . Além disso, temos que a resistência do ar é inversamente proporcional ao deslocamento linear. Logo, da relação anterior, temos que  $R = \|\vec{R}\| = -k\dot{s} = -kL\dot{\theta}$ .

A força de tração  $T$  da corda e a componente da força peso  $\vec{P} = m\vec{g}$  paralela a  $T$  tem mesmo módulo mas sentidos opostos, anulando-se. Ou seja,  $T = \|\vec{T}\| = \|m\vec{g} \cos \theta\| = mg \cos \theta$ .

Consideramos, neste estudo, que a intensidade da força de resistência do ar é pequena o suficiente de forma que  $mg \sin \theta = \|m\vec{g} \sin \theta\| > \|\vec{R}\| = R$ . É importante ressaltar também que as constantes  $g$ ,  $L$ ,  $k$  e  $m$  são positivas.

Agora, para chegarmos à equação do pêndulo, devemos fazer um estudo das forças conforme suas componentes nos sentidos dos eixos  $x$  e  $y$ , conforme a figura 1.

---

<sup>†</sup>PIBIC/Reitoria

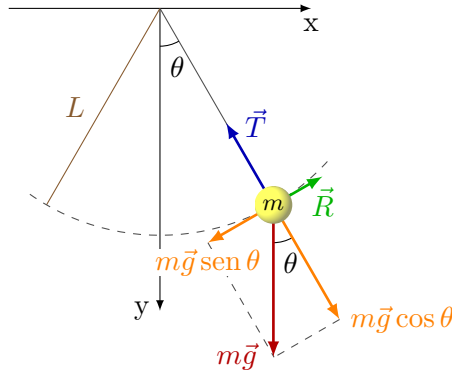


FIGURA 1: Forças que atuam sobre o pêndulo

Consideramos, primeiramente, no sentido do eixo  $x$ . Temos, pela 2ª Lei de Newton que  $F_x = m\ddot{x}$ , onde  $F_x$  é a componente da força resultante na direção do eixo  $x$  e  $x$  é a componente do deslocamento linear na direção de  $x$ .

Além disso, temos que as componentes de  $\vec{R}$  e  $\vec{T}$  na direção de  $x$  são dadas por  $R_x = R \cos \theta$  e  $T_x = -T \sin \theta$ , respectivamente.

Agora, na direção de  $y$ , assim como em  $x$ , temos que  $F_y = m\ddot{y}$ . Assim como as componentes de  $\vec{R}$ ,  $\vec{T}$  e  $\vec{P}$  na direção de  $y$  são dadas por  $R_y = -R \sin \theta$ ,  $T_y = -T \cos \theta$  e  $P = mg$ , respectivamente.

Portanto, obtemos

$$m\ddot{x} = R \cos \theta - T \sin \theta \quad \text{e} \quad m\ddot{y} = mg - R \sin \theta - T \cos \theta.$$

Isolando  $-T$  em ambas as equações, obtemos

$$-T = \frac{m\ddot{x} - R \cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{e} \quad -T = \frac{m\ddot{y} - mg + R \sin \theta}{\cos \theta}.$$

O que nos dá

$$m\ddot{x} \cos \theta - R \cos^2 \theta = m\ddot{y} \sin \theta - mg \sin \theta + R \sin^2 \theta.$$

Ou então,

$$\ddot{x} \cos \theta - \ddot{y} \sin \theta = \frac{R}{m} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - g \sin \theta.$$

Logo,

$$\ddot{x} \cos \theta - \ddot{y} \sin \theta = \frac{R}{m} - g \sin \theta. \quad (1.1)$$

Para continuarmos com os cálculos, temos que

$$\begin{cases} x = L \sin \theta \\ y = L \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = L \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{y} = -L \sin \theta \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -L \sin \theta \dot{\theta}^2 + L \cos \theta \ddot{\theta} \\ \ddot{y} = -L \cos \theta \dot{\theta}^2 - L \sin \theta \ddot{\theta} \end{cases}$$

Substituindo estes resultados em (1.1), obtemos

$$\begin{aligned} -L \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + L \cos^2 \theta \ddot{\theta} + L \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + L \sin^2 \theta \ddot{\theta} &= \frac{R}{m} - g \sin \theta \\ \Rightarrow L (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \ddot{\theta} &= L \ddot{\theta} = \frac{R}{m} - g \sin \theta. \end{aligned}$$

Como  $R = -kL\dot{\theta}$ , então

$$L\ddot{\theta} = \frac{-kL}{m} \dot{\theta} - g \sin \theta.$$

Chegando, então, à equação desejada

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0. \quad (1.2)$$

## 2 Estudo Qualitativo

Para facilitar na aplicação dos resultados da teoria de estabilidade, escreveremos a equação (1.2) sob a forma matricial. Para tanto, chamemos  $z_1 = \theta$  e  $z_2 = \dot{\theta}$ . Então, da equação (1.2), temos

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{k}{m}z_2 - \frac{g}{L}\sin z_1 \end{bmatrix}.$$

Ou então,

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g}{L}(\sin z_1) \end{bmatrix}.$$

Chamando, então,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g}{L}(\sin z_1) \end{bmatrix},$$

podemos reescrever a equação sob a forma

$$\dot{z} = Az + f(z). \quad (2.1)$$

Antes das definições e dos resultados, introduziremos uma notação. Seja  $z(t)$  uma solução de um sistema  $\dot{z} = h(t, z)$  satisfazendo a condição inicial  $z(t_0) = z_0$ , então denotaremos  $z(t) = z(t; t_0, z_0)$ .

Para as definições, considere o sistema autônomo

$$\dot{z} = g(z). \quad (2.2)$$

**Definição 1.** Uma solução constante  $\phi_0 \in \mathbb{R}^n$  de (2.2) é chamada *Solução de Equilíbrio* se  $g(\phi_0) = 0$ .

**Definição 2.** Uma solução de equilíbrio  $\phi(t) = \phi_0$  de (2.2) é dita *Estável* se, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar  $\delta > 0$  (dependendo de  $\varepsilon$ ) tal que se  $z(t; t_0, z_0)$  é uma solução qualquer de (2.2) tendo  $\|z_0 - \phi_0\| < \delta$ , então a solução  $z(t; t_0, z_0)$  existe e satisfaz  $\|z(t; t_0, \phi_0) - \phi_0\| < \varepsilon$  para todo  $t \geq t_0$ .

**Definição 3.** Uma solução de equilíbrio  $\phi(t) = \phi_0$  de (2.2) é dita *Assintoticamente Estável* se é estável e se existe  $\delta_0 > 0$  tal que se  $z(t; t_0, z_0)$  é uma solução qualquer de (2.2) com  $\|z_0 - \phi_0\| < \delta_0$ , então  $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t; t_0, z_0) = \phi_0$ .

**Definição 4.** Uma solução de equilíbrio  $\phi(t) = \phi_0$  de (2.2) é dita *Globalmente Assintoticamente Estável* quando, para todo  $t_0 > 0$  e todo  $z_0 \in \mathbb{R}^n$ , a solução correspondente  $z(t; t_0, z_0)$  de (2.2) aproxima-se de  $\phi_0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

**Observação 5.** Uma solução de equilíbrio que não é estável é chamada instável.

Já introduzidos os principais conceitos sobre estabilidade, vejamos o seguinte resultado, o qual será utilizado para o estudo qualitativo da equação (2.1). A demonstração do respectivo resultado pode ser encontrada em [2, Teorema 4.3, p. 161].

**Teorema 6.** *Considere o sistema com perturbação*

$$\dot{z} = Az + h(t, z),$$

onde  $A$  é uma matriz  $n \times n$  constante. Suponha que todos os autovalores de  $A$  tenham parte real negativa,  $h(t, z)$  e  $\frac{\partial h}{\partial z_j}(t, z)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) são contínuas em  $D_h = \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid t \geq 0, \|z\| < k\}$ , para alguma constante  $k > 0$ ,  $h(t, 0) \equiv 0$  e  $f$  é pequena no sentido de que

$$\lim_{\|z\| \rightarrow 0} \frac{\|h(t, z)\|}{\|z\|} = 0 \quad (2.3)$$

com respeito a  $t \geq 0$ . Então a solução  $z \equiv 0$  é assintoticamente estável.

**Observação 7.** Algumas observações sobre o teorema:

- i) A hipótese de que  $h(t, z)$  e  $\frac{\partial h}{\partial z_j}(t, z)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) sejam contínuas em  $D_h$  garante a existência e a unicidade da solução de um P.V.I. associado à equação;
- ii)  $h(t, 0) \equiv 0$  significa que  $z(t) \equiv 0$  é solução de equilíbrio do sistema;
- iii) As hipóteses de que todos os autovalores de  $A$  tenham parte real negativa e de que  $h$  satisfaça (2.3) garantem a estabilidade assintótica da solução nula.

A partir deste teorema, temos que a solução nula de (2.1) é assintoticamente estável.

De fato, podemos ver facilmente que  $z \equiv 0$  é solução de (2.1). Agora, para a estabilidade assintótica, vejamos que  $A$  tem autovalores negativos e que  $f$  satisfaz (2.3).

Com efeito, temos que o polinômio característico de  $A$  é dado por  $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{g}{L}$ . Logo, os autovalores de  $A$  são dados por

$$\lambda = \frac{-\frac{k}{m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - 4\frac{g}{L}}}{2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{g}{L}}. \quad (2.4)$$

Portanto, devido ao fato das constantes  $k$ ,  $m$ ,  $L$  e  $g$  serem todas positivas, temos  $\lambda < 0$  se  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\text{Re}(\lambda) < 0$  se  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Veja também que

$$\lim_{\|z\| \rightarrow 0} \frac{\|f(z)\|}{\|z\|} = \lim_{|z_1| \rightarrow 0} \frac{\left| \frac{g}{L}(z_1 - \sin z_1) \right|}{|z_1|} = \frac{g}{L} \left| \lim_{z_1 \rightarrow 0} \frac{z_1 - \sin z_1}{z_1} \right| = 0.$$

Ou seja,  $f$  satisfaz (2.3). Chegando, então, na estabilidade assintótica da solução de equilíbrio  $z \equiv 0$ .

Agora, se considerarmos o sistema

$$\dot{w} = Aw, \quad (2.5)$$

onde  $A$  é a mesma matriz do sistema (2.1), então temos que a solução de equilíbrio  $w \equiv 0$  de (2.5) é globalmente assintoticamente estável.

Da estabilidade assintótica da solução nula de (2.1) e da estabilidade assintótica global da solução nula de (2.5), temos que

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} \|w(t, t_0, w_0)\| = 0, & \forall t \geq 0, \forall w_0 \in \mathbb{R}^n, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \|z(t, t_0^*, z_0)\| = 0, & \forall t \geq 0, \forall z_0 \in \mathbb{R}^n, \|z_0\| < k, \end{cases}$$

de onde obtemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|w(t, t_0, w_0) - z(t, t_0^*, z_0)\| = 0$$

para  $z_0$  e  $w_0$  suficientemente pequenos. Quando isso ocorre, dizemos que os sistemas (2.1) e (2.5) são assintoticamente equivalentes.

Se tomarmos  $w_1 = \theta$  e  $w_2 = \dot{\theta}$ , obtemos a equação de 2ª ordem

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L} = 0, \quad (2.6)$$

a qual é chamada de *equação do pêndulo simples amortecido*.

Logo, do nosso estudo qualitativo, vemos que, para um valor inicial de  $\theta$  suficientemente pequeno, temos que as soluções de (1.2) e (2.6) se comportam de forma similar. Assim, como não é possível obter as soluções de (1.2), podemos trabalhar, para valores iniciais de  $\theta$  suficientemente pequenos, com as soluções de (2.6).

Para tanto, temos que as soluções de (2.6) são da forma  $\theta = ce^{\lambda t}$ , onde  $\lambda$ , como visto anteriormente, é da forma

$$\lambda = -\frac{k}{m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{g}{L}} = -\frac{k}{m} \pm \sqrt{\beta}.$$

Então, temos as seguintes possibilidades:

i) Se  $\beta > 0$ , então

$$\lambda_1 = -\frac{k}{m} + \sqrt{\beta} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{k}{m} - \sqrt{\beta}$$

são dois autovalores reais negativos e, portanto,

$$\theta(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

ii) Se  $\beta = 0$ , então  $\lambda = -\frac{k}{m}$  é um autovalor único negativo e, assim,

$$\theta(t) = e^{-\frac{k}{m}t} (c_1 + tc_2).$$

iii) Se  $\beta < 0$  então

$$\lambda_1 = -\frac{k}{m} + i\sqrt{-\beta} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{k}{m} - i\sqrt{-\beta}$$

são dois autovalores complexos e, então,

$$\theta(t) = e^{-\frac{k}{m}t} (c_1 \cos(\beta t + \omega) + c_2 \sin(\beta t + \omega)).$$

### 3 Conclusões

Diante de uma equação diferencial à qual não podíamos obter suas soluções explicitamente, introduzimos e aplicamos resultados muito importantes da teoria de estabilidade. Resultados estes que permitem que, na equação (1.2), trocássemos  $\sin \theta$  por  $\theta$ , obtendo (2.6), e estudássemos as soluções deste novo sistema.

A teoria de estabilidade tem um papel muito grande no estudo das equações diferenciais quando não se tem interesse em um estudo numérico (quantitativo), mas sim num estudo analítico (qualitativo).

**Agradecimentos:** Agradeço à minha orientadora Marta pelas conversas, ensinamentos, conselhos e por toda a paciência ao decorrer do projeto. Agradeço também ao IGCE e ao Departamento de Matemática pelo espaço cedido para a realização dos seminários.

## Referências Bibliográficas

- [1] de Figueiredo, D. G. e Neves, A. F., *Equações Diferenciais Aplicadas*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq (1997).
- [2] Brauer, F. and Nohel, J. A., *Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*. Nova Iorque, Editora W. A. Benjamin (1969).

# Introdução à Modelagem em Epidemiologia

Gabriela Lopes Theodoro<sup>†</sup>  
Orientador(a): Marta Cilene Gadotti

**Resumo:** Neste trabalho apresentamos conceitos para modelagem em epidemiologia, com equações diferenciais ordinárias; e o estudo de alguns modelos compartimentais para doença.

**Palavras-chave:** Epidemiologia, modelagem, equações diferenciais ordinárias

---

*Abstract: This work presents concepts modeling in epidemiology with ordinary differential equations and the study of some compartmental models disease.*

*Keywords: Epidemiology, modeling, ordinary differential equations*

---

## 1 Preliminares

Epidemiologia é uma ciência que estuda quantitativamente a distribuição dos fenômenos de saúde-doença e seus fatores condicionantes nas populações humanas. Essa ciência permite ainda a avaliação da eficácia das intervenções realizadas no âmbito da saúde pública.

A pesquisa epidemiológica é responsável pela produção do conhecimento sobre o processo saúde-doença por meio de estudos de frequência e distribuição das doenças na população humana com a identificação de seus fatores determinantes. Do ponto de vista individual, o percurso de uma doença é descrito pelo que se passa entre o momento em que o indivíduo começa a ter sintomas da doença e o momento em que estes acabam. Do ponto de vista epidemiológico, porém, é muito mais importante a distribuição no tempo e no espaço dos contatos infecciosos tidos pelo indivíduo infectado com outros indivíduos e a forma como isso se repercute na propagação da infecção pela população.

Embora ao nível individual a sintomatologia, patologia e os mecanismos de transmissão da maioria das doenças infecciosas estejam razoavelmente compreendidos, existem um número muito grande de fatores supra-indivíduo que complicam a investigação. Entre estes fatores incluem-se a biologia do agente infeccioso (ciclo de vida, taxas de reprodução e de mortalidade), as características populacionais do hospedeiro (natalidade e mortalidade, taxas de contato entre indivíduos, grau de imunidade dos indivíduos, aspectos comportamentais etc.) e as características da doença em si (forma de transmissão, dependência relativamente a factores climáticos, etc.).

Devido a relevância deste assunto, vários pesquisadores vêm desenvolvendo modelos matemáticos que possam contribuir para a compreensão e erradicação de doenças infecciosas. Esta área denominada epidemiologia matemática vem se fortalecendo nos últimos tempos e o interesse em modelar doenças infecciosas tem sido objeto de estudos de inúmeros trabalhos em todo o mundo.

Os primeiros desenvolvimentos em Epidemiologia Matemática parecem ter sido realizados por Daniel Bernoulli na última metade do século XVIII. No entanto, somente a partir da segunda metade do século XIX, com o avanço do conhecimento médico sobre as causas das

---

<sup>†</sup>Bolsista PET - Programa de Educação Tutorial

doenças infecciosas, ocorreu o desenvolvimento de teorias matemáticas para fenômenos em larga escala, em oposição às descrições empíricas.

## 2 Modelos Compartimentais

Em Epidemiologia são estudados os chamados modelos compartimentais que recebem esse nome devido ao fato da população ser dividida em compartimentos (ou classes), que indicam em qual estado se encontra o indivíduo. Como exemplo, podem ser citadas as classes:

- Imunidade Passiva ( $M$ ): indivíduos que nascem imunes, pois receberam anticorpos pela mãe;
- Transmissão Vertical ( $T$ ): indivíduos que já nasceram com a doença, adquirindo-a através da mãe infectada;
- Suscetíveis ( $S$ ): indivíduos sadios que estão suscetíveis a contrair a doença;
- Infectados ( $I$ ): indivíduos que contraíram a doença e podem transmiti-la aos indivíduos suscetíveis por transmissão direta;
- Expostos ( $E$ ): indivíduos portadores da doença que estão em período latente, isto é, foram infectados mas ainda não transmitem a doença;
- Removidos ( $R$ ): indivíduos que foram infectados, mas não são mais portadores da doença, por motivo de isolamento, cura (adquirindo ou não imunidade) ou morte.

Assim, pode-se escrever a população total  $N$  como a soma dos indivíduos das classes acima citadas, ou seja,  $N = M + T + S + I + E + R$ . Em geral, o estudo de modelos matemáticos tem como objetivo principal analisar a taxa da força de infecção e a taxa de reprodutibilidade basal. A força de infecção é a taxa de propagação da doença e determina a dimensão da transmissão dependendo apenas do número de indivíduos infectados. Já a taxa de reprodutibilidade basal é o número de infecções causadas em indivíduos suscetíveis a partir de uma primeira infecção e está relacionado ao crescimento ou decréscimo da epidemia.

As doenças infecciosas podem ocorrer por transmissão indireta ou transmissão direta. A primeira é aquela que depende de um vetor transmissor infectado, como por exemplo, um mosquito. Já a transmissão direta se dá por meio do contato físico ou proximidade entre indivíduos sadios e indivíduos infectados.

Nos modelos matemáticos epidemiológicos, em que a população é dividida em compartimentos, as características da doença determinam o modo em que cada classe se relaciona, e portanto o tipo de modelo a ser escolhido.

As taxas de transferência entre os compartimentos são expressas, matematicamente, como derivadas das variáveis de estado do sistema (no caso, os compartimentos), em relação ao tempo, o que resulta em equações diferenciais ordinárias da forma:

$$\frac{dX}{dt} = aX,$$

onde  $X$  é uma das variáveis de estado do sistema e  $a$  é uma taxa, que pode ser constante ou depender das variáveis de estado.

Aqui, serão consideradas as doenças de transmissão direta, com nascimento de indivíduos sadios e suscetíveis ( $T = 0$  e  $M = 0$ ) e um período latente muito curto, podendo ser desprezado ( $P = 0$ ). Do mesmo modo que, em alguns modelos não ocorrerá nenhuma forma de isolamento ( $R = 0$ ).



### 3 Modelo *SIS*

o modelo *SIS* é utilizado para descrever doenças nas quais os indivíduos suscetíveis a adquirem, tornando-se infectados e, após a recuperação, não adquirem imunidade, tornando-se suscetíveis novamente. Neste caso não há período latente nem isolamentos. As condições iniciais são:

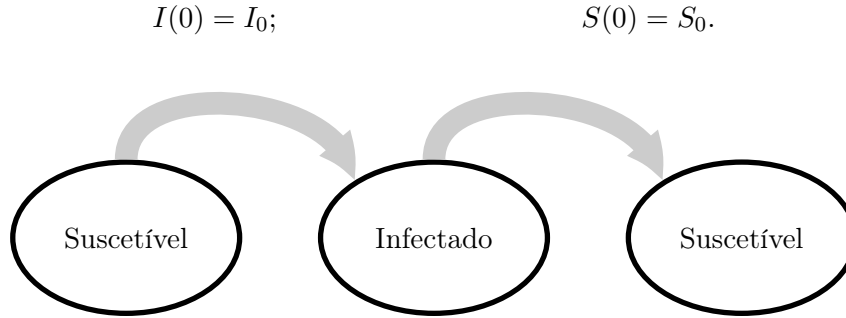


FIGURA 1: Diagrama de fluxo, modelo *SIS*

Serão analisados dois casos:

- 1) A população total  $N$  constante;
- 2) A população total  $N$  variável.

#### 3.1 Caso 1: *SIS* Com $N$ Constante (Sem Dinâmica Vital)

Neste caso, a população total  $N$  é constante e não há dinâmica vital, isto é, na população estudada não são considerados nascimentos nem mortes. Seja  $\alpha$  a taxa de transmissão da doença. Como essa transmissão se dá com o encontro entre indivíduos suscetíveis e infectados, então a variação de indivíduos suscetíveis em relação ao tempo pode ser modelada por  $\alpha SI$ . Seja  $\beta$  a taxa de recuperação da doença. Considere a variação dos indivíduos infectados com relação ao tempo proporcional ao próprio número de indivíduos infectados, então o retorno à classe de suscetíveis será modelado por  $\beta I$ . Com isso, neste caso o modelo *SIS* pode ser representado pelo diagrama a seguir:

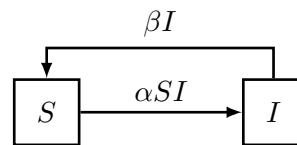


FIGURA 2: Diagrama compartimental para Caso 1 do modelo *SIS*

Note que, uma fração dos indivíduos suscetíveis, por meio do contato com os indivíduos infectados, adquirem a doença e passam para a classe de infectados. Do mesmo modo, os indivíduos infectados, ao se recuperarem, não adquirem imunidade e retornam à classe de suscetíveis.

Com isso, a dinâmica de uma doença com essas características pode ser descrita pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\alpha, \beta > 0$  e

$$S(t) + I(t) = N \text{ constante.} \quad (3.2)$$

Utilizando (3.2) no sistema (3.1), obtemos

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(N - I)I - \beta I = \alpha I \left[ \left( N - \frac{\beta}{\alpha} \right) - I \right].$$

Com  $I(0) = I_0 > 0$ , usando o método da separação de variáveis resolvemos, daí

$$I(t) = \frac{\alpha N - \beta}{\alpha + \left[ (\alpha N - \beta) \frac{1}{I_0} - \alpha \right] e^{-(\alpha N + \beta)t}}$$

para  $I \neq 0$  e  $I \neq N - \frac{\beta}{\alpha}$ . Como  $\alpha N$  deve ser maior que  $\beta$  (pois se as pessoas se recuperassem rapidamente, não teríamos uma epidemia), segue que  $I(t)$  tende a  $N - \frac{\beta}{\alpha}$  quando  $t$  cresce, e consequentemente  $S(t) \rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$ . A enfermidade mantém-se em um nível constante na população  $S(t) = \frac{\beta}{\alpha}$  e  $I = N - \frac{\beta}{\alpha}$ . Logo, o ponto  $\left( \frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha} \right)$  é ponto de equilíbrio do sistema (3.1).

Do sistema (3.1) temos

$$\frac{dS}{dt} - \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I = \alpha I \left( S - \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 0 \Rightarrow -\alpha SI + \beta I = 0, \\ \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \alpha I \left[ \left( N - \frac{\beta}{\alpha} \right) - I \right] = 0. \end{cases}$$

Então,

$$S = \frac{\beta}{\alpha} \text{ e } I = N - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Logo, se  $I = 0$  ou  $S = \frac{\beta}{\alpha}$ ,  $\frac{dS}{dt} = 0$  e  $\frac{dI}{dt} = 0$ , e portanto não há epidemia. Se  $I = 0$ , como  $N = S + I$  temos  $N = S$  e todas as pessoas são sadias. Se  $S = \frac{\beta}{\alpha}$  então  $N = \frac{\beta}{\alpha} + I$ . Neste caso,  $\frac{dI}{dt} = -\frac{dS}{dt} = 0$ .

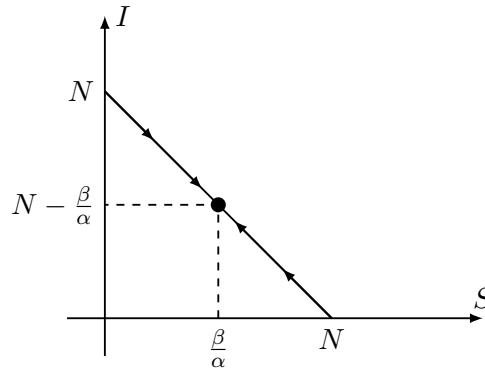


FIGURA 3: Modelo *SIS* com população  $N$  constante

Se  $S > \frac{\beta}{\alpha}$  e  $I \neq 0$  então  $\frac{dI}{dt} > 0$  e  $\frac{dS}{dt} < 0$ . Então o ponto  $(S, I)$  se aproxima de  $\left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$  sobre a reta  $S + I = N$ . Análogo para  $S < \frac{\beta}{\alpha}$  e  $I \neq 0$ . Neste caso, dizemos que o ponto é  $\left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$  assintoticamente estável.

A maior velocidade da epidemia é obtida quando  $\frac{dI}{dt}$  atinge seu ponto máximo, isto é, quando  $\frac{d^2I}{dt^2} = 0$ .

$$\begin{aligned}\frac{d^2I}{dt^2} &= -2\alpha I + \alpha \left(N - \frac{\beta}{\alpha}\right) \\ \Rightarrow -2\alpha I + \alpha \left(N - \frac{\beta}{\alpha}\right) &= 0 \\ \Rightarrow -2I + \left(N - \frac{\beta}{\alpha}\right) &= 0 \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \left(N - \frac{\beta}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

quando  $I$  é o ponto médio entre os dois pontos de equilíbrio  $I = 0$  e  $I = N - \frac{\beta}{\alpha}$ , como ilustra a próxima figura.

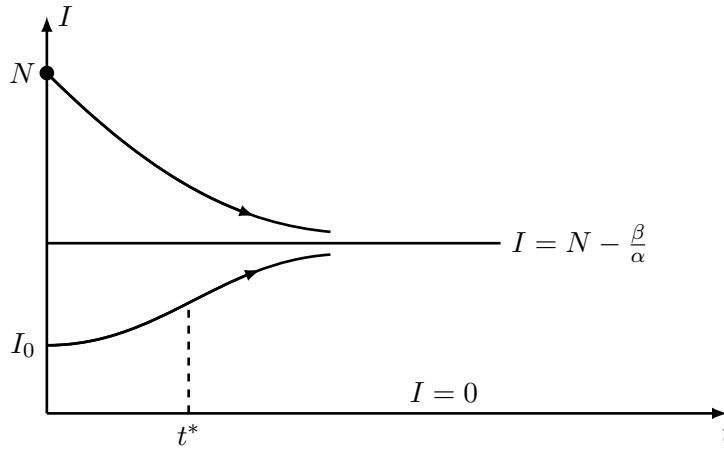


FIGURA 4: Propagação da doença

A análise para a população de pessoas saudas é análoga. Como  $N = S + I$ , segue  $I = N - S$ , logo

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I = -\alpha S(N - S) + \beta(N - S).$$

Assim,

$$\frac{d^2S}{dt^2} = 2\alpha S - \left(\alpha N + \frac{\beta}{\alpha}\right),$$

então  $\frac{d^2S}{dt^2} = 0$  se  $S = \frac{1}{2} \left(\alpha N + \frac{\beta}{\alpha}\right)$

Para  $\frac{dS}{dt} > 0$  temos  $S$  crescente, com  $\frac{d^2S}{dt^2} < 0$  logo concavidade é para baixo.

### 3.2 Caso 2: *SIS* Com $N$ Constante (Com Dinâmica Vital)

Neste caso há dinâmica vital, isto é, na população considerada há nascimentos e mortes, contudo, como a população total  $N$  é constante, considera-se que o número de nascimentos é igual ao número de mortes, e ainda, que os nascimentos são de indivíduos sadios.

Seja  $\gamma$  a taxa de natalidade, que é igual à taxa de mortalidade. Então, o modelo *SIS* neste caso pode ser representado pelo diagrama da imagem a seguir:

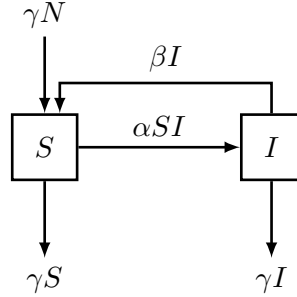


FIGURA 5: Diagrama compartimental para Caso 2 do modelo *SIS*

Note que a saída de indivíduos da classe de suscetíveis ocorre por morte ou por aquisição da doença, passando para a classe de infectados. Ainda na classe de suscetíveis, a entrada de indivíduos ocorre com os nascimentos (que são proporcionais à população total), assim como os indivíduos que eram infectados e se recuperaram, não adquirindo imunidade. O sistema de equações diferenciais que descreve esse modelo é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I + \gamma N - \gamma S \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I - \gamma I \end{cases} \quad (3.3)$$

onde  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  ainda temos

$$S(t) + I(t) = N \text{ constante.} \quad (3.4)$$

A população total  $N$  ainda é constante apesar de ter elementos renovados. O sistema (3.3) se reduz à equação:

$$\frac{dS}{dt} = \alpha SI \left( N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha} - I \right), \quad (3.5)$$

ou então à

$$\frac{dI}{dt} = -\alpha(N - S) \left( S - \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \right). \quad (3.6)$$

Observemos que  $-\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt}$ .

Os pontos de equilíbrio do sistema são  $I = 0$ ,  $I = N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$ ,  $S = N$  e  $S = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$  se estabilizando em

$$(S, I) = \left( \frac{\beta + \gamma}{\alpha}, N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \right).$$

Se a taxa de natalidade  $\gamma$  for diferente da taxa de mortalidade  $m$ , teremos  $N$  variando e o sistema (3.3) se modifica.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I + \gamma N - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I - \mu I \end{cases} \quad (3.7)$$

Note que

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt}(S + I) = (\gamma - m)(S + I) = (\gamma - m)N.$$

Portanto,  $N(t) = N_0 e^{(\gamma-m)t}$ , com  $N_0 = I_0 + S_0$ . Considerando o plano de fase (plano- $SI$ ), obtemos as curvas onde uma das derivadas se anula,

$$\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow I = 0 \text{ ou } S = \frac{\beta + m}{\alpha},$$

$$\frac{dS}{dt} = 0 \Rightarrow I = \frac{S(\gamma - m)}{\alpha S - (\beta + \gamma)}.$$

Neste caso não há ponto de equilíbrio, pois as curvas onde uma das derivadas se anulam não se intersectam. Para qualquer valor inicial  $I_0 > 0$  trajetória atinge o valor máximo para  $S$  quando  $I = \frac{S(\gamma - m)}{\alpha S - (\beta + \gamma)}$ , enquanto  $I \rightarrow \infty$  quanto  $t \rightarrow \infty$ .

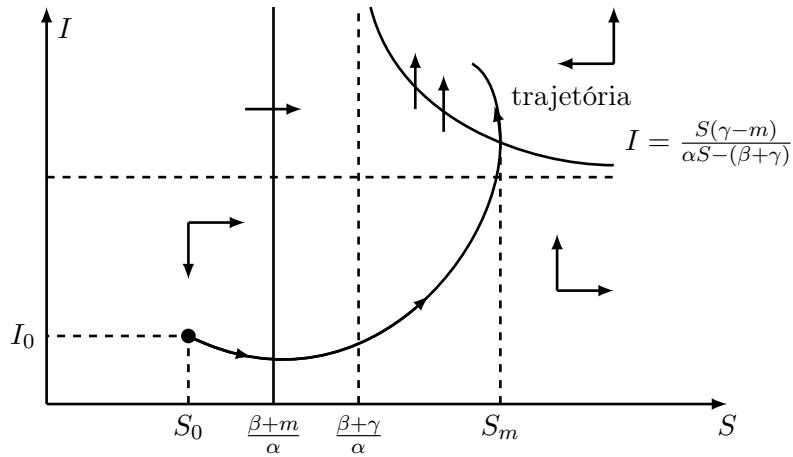


FIGURA 6: Plano- $SI$

#### 4 Modelo $SIR$

Neste modelo há indivíduos suscetíveis que adquirem a doença, tornando-se infectados e, após a recuperação, adquirem imunidade. Neste caso não são considerados período latente nem isolamentos. Considere a população total  $N$  constante, sem dinâmica vital e que a variação da população removida é proporcional à população infectada. O diagrama compartimental que representa este modelo é o que segue:

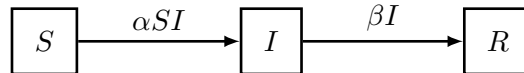


FIGURA 7: Diagrama compartimental para o modelo  $SIR$

(espaço em branco intencional)

E o sistema de equações diferenciais pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \\ \frac{dR}{dt} = \beta I \end{cases} \quad (4.1)$$

com condições iniciais  $I(0) = I_0$ ,  $R(0) = 0$  e  $S_0 = N - I_0$ . Observe que o sistema acima é não linear, e as duas primeiras equações só dependem de  $S$  e  $I$ , podemos então reduzi-las a uma única equação

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\alpha SI - \beta I}{-\alpha SI} = -1 + \frac{\beta}{\alpha} S \quad (4.2)$$

e assim obtemos sua solução

$$I = -S + \frac{\beta}{\alpha} \ln S + K,$$

onde  $K$  é a constante de integração. Usando as condições iniciais obtemos o valor de  $K$

$$\begin{aligned} K &= I + S - \frac{\beta}{\alpha} \ln S \Rightarrow \\ K &= I_0 + S_0 - \frac{\beta}{\alpha} = I_0 + N - I_0 - \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \\ K &= N - \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I &= -S + \frac{\beta}{\alpha} \ln S + N - \frac{\beta}{\alpha} \\ I &= N - S + \frac{\beta}{\alpha} \ln \left( \frac{S}{S_0} \right) \end{aligned}$$

Da equação (4.2), temos que  $\frac{dI}{dS} > 0$  se  $\frac{\beta}{\alpha S} > 1$ , ou seja,  $S < \frac{\beta}{\alpha S}$ . Portanto,  $I$  é uma função crescente se  $S < \frac{\beta}{\alpha S}$ . Analogamente, é decrescente se  $S > \frac{\beta}{\alpha S}$ .

Supondo que a doença não tenha cura e que uma pessoa contaminada possa vir a morrer, então é importante saber o valor de  $R$  em cada instante  $t$ .

Do sistema (4.1), tomando a primeira e a terceira equação, podemos escrevê-las de maneira reduzida com uma só equação

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{\alpha SI}{\beta SI} = -\frac{\alpha}{\beta} S,$$

encontrando

$$S = S_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta} R}.$$

Agora, sabendo que  $N = S + I + R$  fazendo  $I = N - S - R$  e substituído no sistema obtemos

$$\frac{dR}{dt} = \beta(N - S - R),$$

ou

$$\frac{dR}{dt} = \beta(N - R - S_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta} R}),$$

que não pode ser resolvida explicitamente.

Utilizando a expansão por Taylor, supondo que  $R$  seja suficientemente pequeno, temos

$$e^{\frac{-\alpha}{\beta}R} \cong 1 - \frac{\alpha}{\beta}R + \frac{(\frac{-\alpha}{\beta}R)^2}{2} + \dots$$

Assim,

$$\frac{dR}{dt} = \beta \left[ N - R - S_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta}R + \frac{(\frac{-\alpha}{\beta}R)^2}{2} \right) \right],$$

que podemos, com um pouco de trabalho, resolver fazendo a integração por frações parciais, como mostrado na referência [3].

**Agradecimentos:** À professora Marta Cilene Gadotti, por ter me acolhido neste e em vários projetos, dado apoio e por ter sido uma mentora tão boa e dedicada.

### Referências Bibliográficas

- [1] Yang, H. M., *Epidemiologia Matemática - Estudo dos Efeitos da Vacinação em Doenças de Transmissão Direta*. Campinas: EDUNICAMP e FAPESP (2001).
- [2] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*. Editora Springer, New York (1991).
- [3] Bassanezi, R. C., *Equações Diferenciais com Aplicações*. Editora Harbra, São Paulo (1998).

# Modelo de Equações Diferenciais com *Delay* para o Estudo do HLB em Citros

Maria Letícia Salvador<sup>†</sup>

Orientador(a): Profa. Dra. Suzete Maria da Silva Afonso

**Resumo:** Neste trabalho apresentaremos um modelo matemático que descreve a dinâmica da doença HLB em plantações de citros considerando a existência do período de retardo na fase de incubação da doença na planta.

**Palavras-chave:** HLB, citros, equações diferenciais funcionais com retardamento

---

*Abstract:* In this work we present a mathematical model which describes the dynamics of the disease HLB in citrus plantations considering the existence of the delay period in the incubation phase of the disease in the plant.

*Keywords:* HLB, citrus, functional differential equations with delay

---

## 1 Introdução

O HLB (*huanglongbing* ou *greening*) tem sido motivo de grande preocupação dos produtores de citros. A doença é causada pela bactéria *Candidatus Liberibacter ssp.*, a qual existe em três formas: *americanus*, *asiaticus* e *africanus*, sendo a primeira a mais comum no Brasil, e é transmitida principalmente pelo psíldeo *Diaphorina Citri*, que pode adquirir a bactéria ao se alimentar da seiva das folhas de citros. Os sintomas característicos do HLB são ramos amarelados, folhas mosqueadas, sementes abortadas e frutos pequenos e assimétricos.

O *greening* reduz a produtividade das plantas gerando frutos de baixa qualidade, podendo até levar a planta à morte. O HLB não possui cura, pode afetar todos os tipos de citros. Além disso, existe um período de incubação quando a planta não apresenta sintomas mas pode transmitir a doença. Segundo pesquisas realizadas, a principal recomendação para o controle da doença é a retirada das plantas sintomáticas e o controle do psíldeo vetor.

Este trabalho apresenta um modelo matemático compartimental determinístico que descreve a dinâmica da doença HLB em plantações de citros, considerando a existência do período de *delay* (retardo) na fase de incubação da doença na planta. Porém, inicialmente, será apresentado um modelo matemático sem considerar a existência de *delay* na fase citada. Nossa intenção ao apresentar os dois modelos é destacar que as equações com retardo são mais realistas do que as equações sem retardo, pois a partir da chegada dos psíldeos no pomar, somente após o tempo de incubação é que as primeiras plantas começarão a apresentar os sintomas do HLB.

É importante mencionar que este texto não apresenta resultados inéditos; está baseado nos trabalhos de Braga *et al.*, [2] e [3].

## 2 Modelos Matemáticos com e sem *delay*

A figura abaixo apresenta os compartimentos considerados no modelo de Braga *et al.* (2011) (veja [3]), em que  $S_h$  é o compartimento dos hospedeiros (citros) suscetíveis à doença,

---

<sup>†</sup>Bolsista PET



$E_h$  é o compartimento dos hospedeiros que apresentam a doença em período de incubação e  $I_h$  é o compartimento dos hospedeiros sintomáticos, tal que  $N_h = S_h + E_h + I_h$ . Ademais,  $S_v$  é o compartimento dos vetores (psilídeos) não infectivos e  $I_v$  é o compartimento dos vetores infectivos, de tal forma que  $N_v = S_v + I_v$ . Isto posto,  $N_h$  representa a população total de plantas e  $N_v$  representa a população total de insetos.

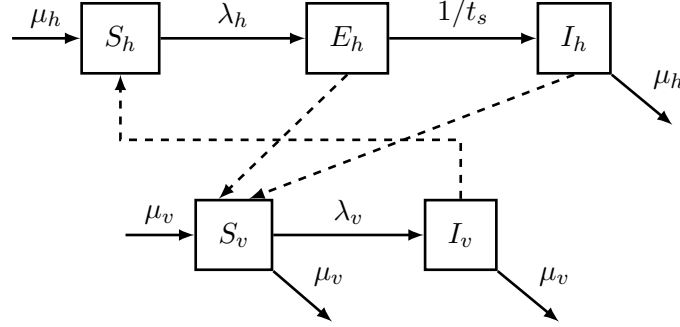


FIGURA 1: Modelo Compartimental do patossistema *Diaphorina Citri-Planta*. Setas contínuas mostram o fluxo entre compartimentos e setas tracejadas representam a influência dos compartimentos no processo de transmissão da bactéria.

Segundo Braga *et al* (2011), os compartimentos da Figura 1 são descritos pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{dS_h}{dt} = \mu_h I_h - \lambda_h S_h, \\ \frac{dE_h}{dt} = \lambda_h S_h - \frac{1}{t_s} E_h, \\ \frac{dI_h}{dt} = \frac{1}{t_s} E_h - \mu_h I_h, \\ \frac{dS_v}{dt} = \mu_v N_v - (\lambda_v + \mu_v) S_v, \\ \frac{dI_v}{dt} = \lambda_v S_v - \mu_v I_v. \end{cases} \quad (2.1)$$

A tabela abaixo exhibe o significado dos parâmetros utilizados em (2.1) e os valores numéricos a serem utilizados nas simulações.

Neste modelo considera-se que cada planta retirada é substituída automaticamente por uma muda nova e saudável. Além disso, considera-se somente a fase adulta do inseto vetor (*Diaphorina Citri*) e que todos eles só se tornam portadores do HLB nesta fase. Sendo assim, é possível assumir que  $N_h$  e  $N_v$  são constantes. Fazendo as seguintes substituições:

$$\frac{S_h}{N_h} = s_h, \quad \frac{E_h}{N_h} = e_h, \quad \frac{I_h}{N_h} = i_h, \quad \frac{S_v}{N_v} = s_v, \quad \frac{I_v}{N_v} = i_v \quad (2.2)$$

e derivando cada um dos termos das equações do sistema descrito em (2.1), obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{ds_h}{dt} = \mu_h i_h - \lambda_h s_h, \\ \frac{di_h}{dt} = \frac{1}{t_s} (1 - s_h - i_h) - \mu_h i_h, \\ \frac{di_v}{dt} = \lambda_v (1 - i_v) - \mu_v i_v. \end{cases} \quad (2.3)$$

Parâmetro	Significado	Valor
$N_h$	População total de plantas	2000
$N_v$	População total de insetos	1000
$\lambda_h$	Força de infecção nas plantas	—
$\lambda_v$	Força de infecção nos insetos	—
$p_h$	Probabilidade da planta adquirir HLB do psilídeo	0.6833
$p_v$	Probabilidade de aquisição do HLB pelo psilídeo	0.3650
$t_s$	Tempo de incubação da doença nas plantas	12
$\mu_v$	Taxa de mortalidade natural do psilídeo	7/24
b	Taxa de troca de hospedeiro	1.216
$\mu_h$	Taxa de retirada e replantio de plantas	—

TABELA 1: Parâmetros do Modelo

Tomando  $b' = b \frac{N_v}{N_h}$ , as forças de infecção são expressas por:

$$\lambda_h = b' p_h \frac{I_v}{N_v} = \varepsilon_h i_v \quad \text{e} \quad \lambda_v = b p_v \frac{(E_h + I_h)}{N_h} = \varepsilon_h (1 - s_h).$$

Considerando  $\varepsilon_h = b \frac{N_v}{N_h} p_h$  e  $\varepsilon_v = b p_v$  tais que  $\varepsilon_v, \varepsilon_h \geq 0$ , tem-se, portanto, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{ds_h}{dt} = \mu_h i_h - \varepsilon_h i_v s_h, \\ \frac{di_h}{dt} = \frac{1}{t_s} (1 - s_h - i_h) - \mu_h i_h, \\ \frac{di_v}{dt} = \varepsilon_v (1 - s_h) (1 - i_v) - \mu_v i_v. \end{cases} \quad (2.4)$$

O modelo com *delay* considera os mesmos compartimentos e introduz o tempo de incubação da doença como um processo de *delay*  $t_s$ , conforme descrito no sistema abaixo.

$$\begin{cases} \frac{dS_h(t)}{dt} = \mu_h I_h(t) - \lambda_h S_h(t), \\ \frac{dE_h(t)}{dt} = \lambda_h(t) S_h(t) - \lambda_h(t - t_s) S_h(t - t_s), \\ \frac{dI_h(t)}{dt} = \lambda_h(t - t_s) S_h(t - t_s) - \mu_h I_h(t), \\ \frac{dS_v(t)}{dt} = \mu_v N_v - (\lambda_v(t) + \mu_v) S_v(t), \\ \frac{dI_v(t)}{dt} = \lambda_v(t) S_v(t) - \mu_v I_v(t). \end{cases} \quad (2.5)$$

Assumindo que  $N_h$  e  $N_v$  são constantes e fazendo as mesmas substituições que foram feitas em (2.2), o sistema (2.5) passa a ser representado por:

$$\begin{cases} \frac{ds_h(t)}{dt} = \mu_h i_h(t) - \lambda_h(t) s_h(t), \\ \frac{di_h(t)}{dt} = \lambda_h(t - t_s) s_h(t - t_s) - \mu_h i_h(t), \\ \frac{di_v(t)}{dt} = \lambda_v(t)(1 - i_v(t)) - \mu_v i_v(t). \end{cases} \quad (2.6)$$

Considerando  $b' = b \frac{N_v}{N_h}$ ,  $\varepsilon_h = b \frac{N_v}{N_h} p_h$  e  $\varepsilon_v = b p_v$  tais que  $\varepsilon_h, \varepsilon_v \geq 0$ , as forças de infecção são expressas por:

$$\lambda_h = b' p_h \frac{I_v(t)}{N_v} = \varepsilon_h i_v(t) \quad \text{e} \quad \lambda_v = b p_v \frac{(E_h(t) + I_h(t))}{N_v} = \varepsilon_v (1 - s_h(t)).$$

Substituindo as expressões acima em (2.6), o modelo matemático com *delay* é descrito por:

$$\begin{cases} \frac{ds_h}{dt} = \mu_h i_h(t) - \varepsilon_h i_v(t) s_h(t), \\ \frac{di_h}{dt} = \varepsilon_h i_v(t - t_s) s_h(t - t_s) - \mu_h i_h(t), \\ \frac{di_v}{dt} = \varepsilon_v (1 - s_h(t))(1 - i_v(t)) - \mu_v i_v(t). \end{cases} \quad (2.7)$$

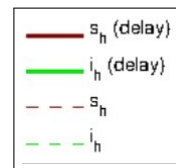
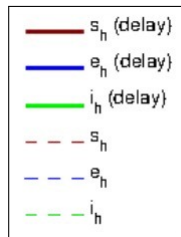
A dinâmica do sistema (2.7) é explorada por meio de simulações numéricas.

### 3 Sobre as simulações numéricas

As simulações numéricas foram realizadas com o uso do software MATLAB (R2014a), a partir do sistema das equações (2.4) (sem *delay*) e (2.7) (com *delay*), considerando que o patossistema inicia-se com todas as plantas saudáveis e com 10% da população de insetos portadores do HLB. Para o parâmetro  $b$ , que representa a quantidade de troca de hospedeiro que o psilídeo realiza durante a sua vida, foi utilizado o valor  $b = 1.216$ , estimado pelo número de psilídeo por armadilhas multiplicado pelo número de armadilhas e pela proporção de insetos em relação ao total de plantas num pomar.

As simulações foram efetuadas utilizando os valores apresentados na Tabela 1 e com os valores:  $\mu_h = 0.0$ , sem remoção nem replantio de novas mudas;  $\mu_h = 0.4761$  correspondente à taxa de detecção das plantas sintomáticas no campo, e  $\mu_h = 1.0$ , que representa a remoção de todas as plantas infectadas, considerando cenários com população total de 400 insetos e com 1500 insetos.

Para as figuras apresentadas na sequência, será utilizada a seguinte legenda:



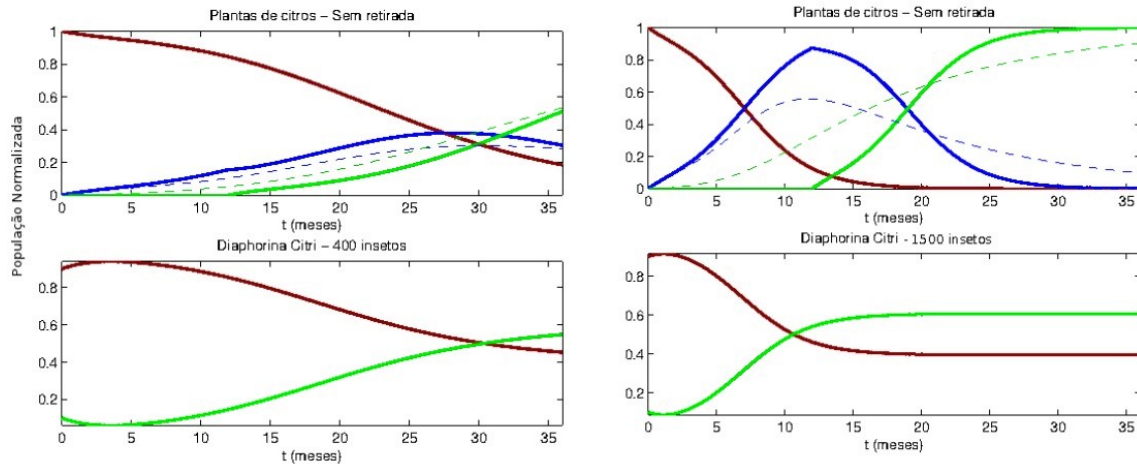


FIGURA 2: Simulações com valores de  $N_v = 400$  (esquerda) e  $N_v = 1500$  (direita) para o valor de  $\mu_h = 0.0$  (sem remoção de plantas).

Na Figura 2 nota-se uma grande diferença na dinâmica do sistema apenas com a variação do número de insetos. É possível observar, também, a diferença entre os modelos com retardo (linhas contínuas) e o modelo sem retardo (linhas tracejadas).

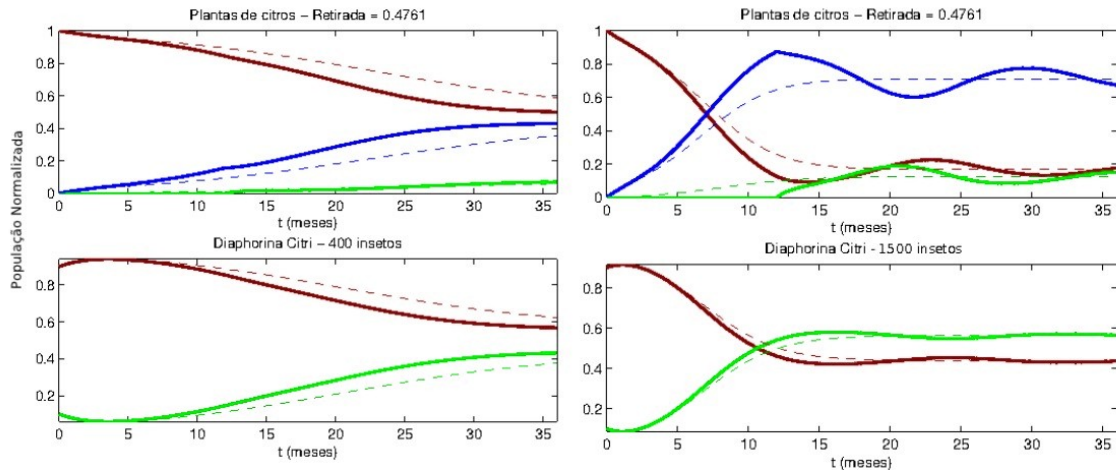


FIGURA 3: Simulações com valores de  $N_v = 400$  (esquerda) e  $N_v = 1500$  (direita) para o valor de  $\mu_h = 0.4761$ .

Na Figura 3, considera-se  $\mu_h = 0.4761$ . A mesma variação entre os modelos com e sem retardo é observada. Além disso, é possível notar a diminuição da proporção de plantas sintomáticas ( $i_h$ ) nas duas simulações devido à retirada das plantas.

Na Figura 4, considerando a retirada de todas as plantas infectadas, observa-se o mesmo padrão de variação para os modelos com e sem retardo.

## 4 Conclusão

Após uma análise dos dois modelos apresentados ((2.4) e (2.7)), observa-se diferenças na dinâmica do patossistema, conforme fora apresentado nas figuras 2, 3 e 4.

As equações com *delay* descrevem com mais realidade a dinâmica da doença HLB em plantações de citros. A explicação para este fato é que a partir da chegada dos psilídeos no

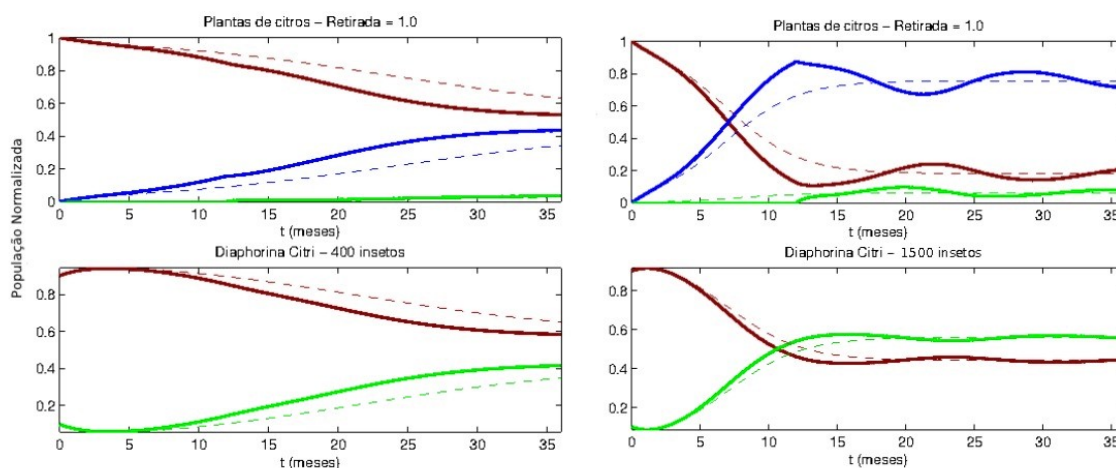


FIGURA 4: Simulações com valores de  $N_v = 400$  (esquerda) e  $N_v = 1500$  (direita) para o valor de  $\mu_h = 1.0$ .

pomar, somente após o tempo de incubação é que as primeiras plantas começarão a apresentar os sintomas da doença. Além disso, a dinâmica nos primeiros meses é o que realmente irá influenciar as tomadas de decisões dos agricultores em relação à doença.

Analisando as Figuras 2, 3 e 4, nota-se que a remoção de plantas, juntamente com o controle do psíldeo vetor, são fundamentais para o controle da doença no campo, uma vez que a proporção de plantas infectadas, ao final do período observado, diminui com a retirada precoce de plantas sintomáticas (dada por  $\mu_h$ ) e com a existência de baixo níveis populacionais do inseto vetor (dado por  $N_v$ ).

**Agradecimentos:** Agradeço ao PET pelo apoio financeiro, aos meus pais, por me apoiarem, a Profa. Dra. Suzete Maria da Silva Afonso por me orientar e me aconselhar sempre e a Deus por me abençoar.

## Referências Bibliográficas

- [1] Belasque Jr., J.; Filho, A.B.; Bassanezi, R.B.; Barbosa, J.C.; Fernandes, N.G.; Yamamoto, P.T.; Lopes, S.A.; Machado, M.A.; Junior, R.P.L.; Ayres, A.J.; Massari, C.A., Base científica para a erradicação de plantas sintomáticas e assintomáticas de Huanglongbing (HLB, Greening) visando o controle efetivo da doença. *Tropical Plant Pathology*, Vol. 34, 3, 137-145, 2009.
- [2] Braga, G.A.; Ternes, S.; Vilamiu, R.G.; Laranjeira, F.F. Avaliação comparativa de modelos de equações diferenciais com e sem delay para estudo do HLB em citros. *6º Congresso Interinstitucional de Iniciação Científica-CIIC 2012, Jaguariúna, SP*.
- [3] Braga, G.A.; Ternes, S.; Vilamiu, R.G.; Catro, A.; Silva, M.V.; Laranjeira, F.F., Modelagem Matemática da Dinâmica Temporal do HLB em Citros. In: VIII Congresso Brasileiro de Agroinformática, 2011, Bento Gonçalves. *Anais do VIII Congresso Brasileiro de Agroinformática*.
- [4] Edelstein, K.L., *Mathematical models in biology*. Birkhäuser Mathematics Series. 1988.

# Modificações no Modelo de Verhulst Discreto

Pedro Henrique Giraldo de Souza

Orientador(a): Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira

**Resumo:** Apresentamos dois modelos discretos de dinâmica populacional, que são variações do modelo clássico de Verhulst, nos quais são considerados dois tipos de estratégia de retiradas de indivíduos de uma população: retirada constante e retirada proporcional à população no instante  $n$ . Os pontos de equilíbrio dos modelos são analisados quanto à estabilidade.

**Palavras-chave:** Sistema dinâmico, modelagem matemática, modelo de Verhulst

---

*Abstract:* We present two discrete models Population Dynamics, which are variations of the classic model of Verhulst, in which are considered two types of harvest strategies: constant harvest and harvest proportional to the population at time  $n$ . The equilibrium points of the models are analyzed for stability.

*Keywords:* Dynamical system, mathematical model, Verhulst model

---

## 1 Introdução

A capacidade de modelar fenômenos naturais torna os sistemas dinâmicos discretos importantes nos ramos das Ciências. Como exemplo de sistemas dinâmicos temos os modelos de crescimento populacional. Os modelos discretos de Dinâmica Populacional são utilizados com o intuito de se fazer previsões, que são fundamentais no planejamento de um desenvolvimento sustentável. Os modelos matemáticos formulados com equações discretas aparecem com frequência em Biologia, pois em geral, as populações se reproduzem em intervalos de tempos bem determinados [1]. A análise de estabilidade de pontos de equilíbrio desses sistemas é de fundamental importância, pois em geral não possuem solução analítica. O objetivo principal foi o estudo de modelos discretos de Dinâmica Populacional, em especial, algumas modificações do modelo de Verhulst (logístico). Para isso se fez necessário o estudo de sistemas dinâmicos discretos de primeira ordem, com relação à existência de pontos de equilíbrio e conceitos de estabilidade [1, 2]. Consideramos uma população que tem um crescimento logístico e está sujeita a dois tipos distintos de estratégia de retirada de elementos dessa população.

## 2 Conceitos Preliminares

Nas áreas de Matemática, Física e Economia, dentre outras, encontramos problemas que apresentam situações envolvendo variáveis que mudam em intervalos de tempo discretos. As equações que expressam relações entre as mudanças das variáveis no caso discreto são chamadas de equações discretas (sistemas dinâmicos discretos). Vejamos algumas definições e resultados necessários para o desenvolvimento do trabalho, que estão baseados em [2, 4].

**Definição 1.** Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos sistema dinâmico discreto de primeira ordem como sendo uma sequência de números reais denotados por  $x(n)$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$  tal que, cada número após o primeiro é relacionado ao anterior através da equação

$$x(n+1) = f(x(n)). \quad (2.1)$$

A sequência de números dada pela relação  $x(n+1) - x(n) = h(x(n))$  é chamada de equação de diferenças de primeira ordem. Se  $f(x) = h(x) + x$ , estes dois conceitos são equivalentes.

**Definição 2.** Uma equação de diferenças de primeira ordem é linear se pode ser escrita como  $x(n+1) = a(n)x(n) + b(n)$ , com  $a(n)$  e  $b(n)$  funções a valores reais. Se  $b(n) = 0$ , para todo  $n$ , a equação é denominada homogênea. Se  $b(n) \neq 0$ , para algum  $n$ , a equação é denominada não homogênea.

**Exemplo 3.**  $x(n+1) = 7x(n)$  é linear e homogênea;  $x(n+1) = 2nx(n) + 12n$  é linear e não homogênea;  $x(n+1) = x(n)^3 + 1$  é não linear. Como na maioria das vezes não é possível obtermos soluções analíticas para equações de diferenças, uma maneira de analisar o comportamento das soluções é através de seus pontos de equilíbrio, que são soluções constantes. O estudo dessas questões é chamado de teoria da estabilidade.

**Definição 4.** Um ponto  $x^*$  no domínio de  $f$  é denominado um ponto de equilíbrio ou ponto fixo da equação (2.1) quando a partir dele não ocorrem variações do estágio  $n$  para o estágio  $n+1$ , isto é, quando  $x(n+1) = x(n) = x^*$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ , ou seja,  $x(n) = x^*$  é uma solução constante de  $x(n+1) = f(x(n))$ .

**Exemplo 5.** Os pontos de equilíbrio de  $x(n+1) = 5 - 6/(x(n))$  são  $x_1^* = 3$  e  $x_2^* = 2$ , que são soluções da equação  $x^* = 5 - 6/x^*$ .

**Definição 6.** O ponto de equilíbrio  $x^*$  de (2.1) é estável se dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|x(0) - x^*| < \delta$  implica  $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ , para todo  $n > 0$ , com  $n \in \mathbb{Z}^+$  e  $x(0) = x_0$ . Se  $x^*$  não é estável, então é chamado de instável.

**Definição 7.** O ponto de equilíbrio  $x^*$  é dito ser de atração se existe um  $\eta > 0$  tal que  $|x(0) - x^*| < \eta$  implica  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*$ . Se ' $\eta = \infty$ ', então  $x^*$  é chamado de atrator global.

**Definição 8.** O ponto de equilíbrio  $x^*$  é assintoticamente estável se é estável e de atração. Neste caso, conforme o tempo passa, a órbita  $x(n)$  que parte de  $x(0)$  se aproxima cada vez mais do ponto de equilíbrio  $x^*$ . Se ' $\eta = \infty$ ', então  $x^*$  é chamado de globalmente assintoticamente estável.

A seguir, apresentamos alguns resultados que nos permitem concluir sobre a estabilidade de pontos de equilíbrio para equações de primeira ordem. As demonstrações podem ser encontradas em [2].

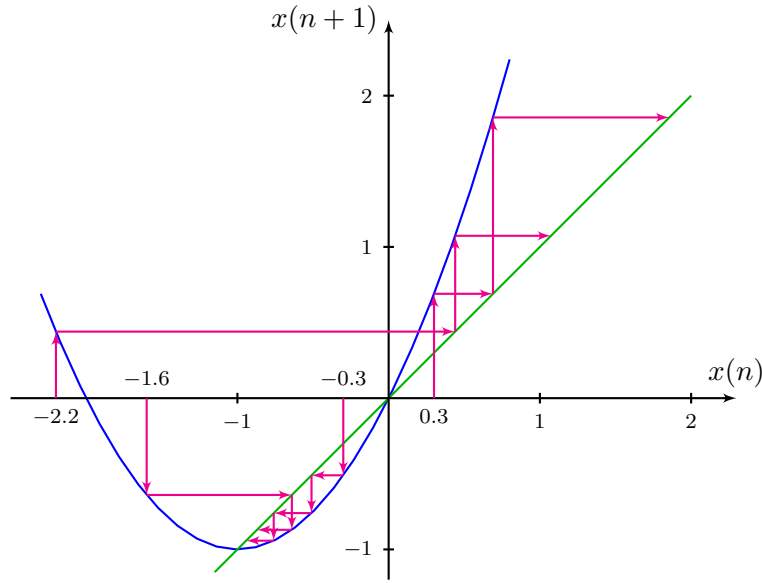
**Teorema 9.** Seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio de (2.1) onde  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$ . Segue que: (i) Se  $|f'(x^*)| < 1$ , então  $x^*$  é assintoticamente estável. (ii) Se  $|f'(x^*)| > 1$ , então  $x^*$  é instável.

**Exemplo 10.** Dado o sistema dinâmico  $x(n+1) = x(n)^2 + 2x(n)$ , temos que seus pontos de equilíbrio são tais que  $x^* = x^{*2} + 2x^*$ , ou seja,  $x^*(x^* + 1) = 0$ . Obtemos  $x^* = 0$  ou  $x^* = -1$ . Analisando a estabilidade, temos:

$$f'(x) = 2x + 2 \longrightarrow \begin{cases} |f'(0)| = 2 > 1, \\ |f'(-1)| = 0 < 1. \end{cases}$$

Portanto, o ponto de equilíbrio  $x^* = -1$  é assintoticamente estável e o ponto de equilíbrio  $x^* = 0$  é instável. Na Figura 1 ilustramos a instabilidade de  $x^* = 0$  e a estabilidade de  $x^* = -1$ .

(espaço em branco intencional)

FIGURA 1: Cobweb para o sistema  $x(n+1) = x(n)^2 + 2x(n)$ 

O Teorema 9 não se aplica para os casos  $f'(x^*) = \pm 1$ . Nestes casos, são necessários critérios que envolvem derivadas de ordem superior. A seguir apresentamos o Teorema 11, que é utilizado para o caso  $f'(x^*) = 1$  e o Teorema 12 para o caso  $f'(x^*) = -1$ .

**Teorema 11.** *Suponha  $x^*$  um ponto de equilíbrio de (2.1),  $f$  de classe  $C^2$  e  $f'(x^*) = 1$ . Então:*

- (i) *Se  $f''(x^*) \neq 0$ , então  $x^*$  é instável.*
- (ii) *Se  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) > 0$ , então  $x^*$  é instável.*
- (iii) *Se  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) < 0$ , então  $x^*$  é assintoticamente estável.*

**Teorema 12.** *Suponha  $x^*$  um ponto de equilíbrio de (2.1),  $f$  de classe  $C^3$ ,  $f'(x^*) = -1$  e  $S = -2f'''(x^*) - 3(f''(x^*))^2$ . Então:*

- (i) *Se  $S < 0$ , então  $x^*$  é assintoticamente estável.*
- (ii) *Se  $S > 0$ , então  $x^*$  é instável.*

### 3 Modelo de Verhulst e variações

O modelo de crescimento populacional mais simples é dado por  $A(n+1) - A(n) = rA(n)$  onde  $A(n)$  é o tamanho da população no instante  $n$  e  $r$  é a taxa de crescimento da população. Para uma condição inicial  $A(0) = A_0$ , temos que a solução dessa equação é  $A(n) = A_0(1+r)^n$ , cujo comportamento é exponencial. Uma modificação desse modelo é substituir a taxa de crescimento  $r$  pela função  $f(A(n)) = r(1 - A(n)/L)$ , onde  $L$  é a capacidade suporte do meio. Assim temos o modelo:

$$A(n+1) - A(n) = r(1 - A(n)/L)A(n), \quad (3.1)$$

que é conhecido como modelo de Verhulst discreto. Observe que se  $A(n) > L$ ,  $f(A(n)) < 0$  e portanto  $A(n)$  decresce.

A equação (3.1) pode ser escrita como  $A(n+1) = (1+r)A(n) - \alpha(A(n))^2$  onde  $\alpha = r/L$  e possui como pontos de equilíbrio  $a^* = 0$  e  $a^* = L$ , cujo comportamento é analisado em [3].



Vamos considerar que uma unidade corresponde à capacidade suporte do meio ( $L = 1$ ). Por exemplo, podemos entender que  $L = 1$  unidade corresponde a 10.000 indivíduos. A equação (3.1) pode ser escrita como

$$A(n+1) - A(n) = r(1 - A(n))A(n). \quad (3.2)$$

Neste trabalho, analisamos dois modelos que são modificações do modelo de Verhulst, dado por (3.2). São modelos sobre estratégias de retirada de indivíduos de uma população, sendo que no primeiro é retirada uma fração fixa de indivíduos e no segundo se retira uma quantia proporcional à população total. São eles respectivamente:

$$\begin{aligned} A(n+1) &= (1+r)A(n) - r(A(n))^2 - b, \\ A(n+1) &= (1+r)A(n) - r(A(n))^2 - BA(n). \end{aligned}$$

Vejamos os dois tipos de estratégias considerando  $r = 0,5$ .

### 3.1 Modelo 1 - retirada constante

Consideremos o sistema dinâmico  $A(n+1) - A(n) = 0,5(1 - A(n))A(n) - b$ . Reescrevendo-o, temos  $A(n+1) = 1,5A(n) - 0,5(A(n))^2 - b$ . Os pontos de equilíbrio são obtidos através da equação  $a = 1,5a - 0,5a^2 - b$  e portanto,  $a = 0,5 \pm 0,5\sqrt{1 - 8b}$ . Consideremos os seguintes casos:

Se  $1 - 8b > 0$  ( $b < 1/8$ ), temos dois pontos de equilíbrio:

$$a_1 = 0,5 + 0,5\sqrt{1 - 8b} \quad \text{e} \quad a_2 = 0,5 - 0,5\sqrt{1 - 8b}.$$

Analisando a estabilidade desses pontos:

$$f(x) = 1,5x - 0,5x^2 - b \Rightarrow f'(x) = 1,5 - x, \quad f'(a_1) = 1 - 0,5\sqrt{1 - 8b}$$

e portanto,

$$|1 - 0,5\sqrt{1 - 8b}| < 1 \Rightarrow -15/8 < b < 1/8.$$

Assim,  $a_1$  é assintoticamente estável quando  $0 < b < 1/8$ , ou seja, sempre que ele existe. Para o ponto de equilíbrio  $a_2$  temos  $f'(a_2) = 1 + 0,5\sqrt{1 - 8b} > 1$  e portanto,  $a_2$  é sempre instável.

Se  $1 - 8b = 0$  ( $b = 1/8$ ) temos que  $a = 0,5$  é o único ponto de equilíbrio. Como  $f'(0,5) = 1$ , usando o Teorema 11, temos  $f''(0,5) = -1$  e portanto  $a = 0,5$  é instável quando  $b = 1/8$ . Se  $1 - 8b < 0$ , ou seja,  $b > 1/8$ , não há pontos de equilíbrio. Pode-se mostrar que  $A(n)$  tende ao infinito negativo quando  $b > 1/8$ , o que corresponde, do ponto de vista biológico, dizer que a população vai à extinção. Assim, podemos concluir que, se  $b \geq 1/8$ , o que corresponde à uma retirada que é inferior a 1.250 indivíduos por período considerado, a população se estabilizaria. Caso contrário, a população tenderá a extinção.

### 3.2 Modelo 2 - retirada proporcional

Consideremos o sistema dinâmico

$$A(n+1) - A(n) = 0,5(1 - A(n))A(n) - BA(n). \quad (3.3)$$

Reescrevendo o sistema dinâmico (3.3), temos

$$A(n+1) = 1,5A(n) - 0,5A(n)^2 - BA(n), \quad (3.4)$$

cujos pontos de equilíbrio são soluções da equação  $a = 1,5a - 0,5a^2 - Ba$ , ou seja,  $a = 0$  ou  $a = 1 - 2B$ . Como  $a > 0$ , então  $a = 1 - 2B$  e só existe do ponto de vista biológico se  $B < 0,5$ .

$$f(x) = 1,5x - 0,5x^2 - Bx \Rightarrow f'(x) = 1,5 - x - B.$$

Para  $a = 0$

$$|f'(0)| = |1,5 - B| < 1 \Rightarrow 0,5 < B < 2,5,$$

ou seja,  $a = 0$  é assintoticamente estável quando  $0,5 < B < 2,5$  e instável quando  $0 < B < 0,5$  ou  $B > 2,5$ . Analisando os extremos da primeira desigualdade, isto é, quando  $B = 0,5$  ou  $B = 2,5$ , temos:

- (i) Para  $B = 0,5$  o único ponto de equilíbrio é  $a = 0$ . Como  $f(x) = x - 0,5x^2$  temos  $f'(x) = 1 - x$  e portanto  $f'(0) = 1$ . Usando o Teorema 11, como  $f''(x) = -1 \neq 0$  temos que  $a = 0$  é instável.
- (ii) Para  $B = 2,5$ , temos  $0,25a^2 + 2a = 0$  e portanto  $a = 0$  é o único ponto de equilíbrio, pois  $a$  não pode ser negativo. Assim, temos  $f(x) = -x - 0,5x^2 \Rightarrow f'(x) = -1 - x$ . Como  $f'(0) = -1$ , usando o Teorema 12 temos  $S = -3 < 0$ , o que nos permite concluir que  $a = 0$  é assintoticamente estável.

Para  $a = 1 - 2B$  temos que  $|f'(1 - 2B)| < 1 \Rightarrow -1,5 < B < 0,5$ . Como  $B > 0$ , sempre que o ponto  $1 - 2B$  existir, ele será assintoticamente estável.

Através dos exemplos, é possível perceber que o segundo tipo de estratégia parece melhor pois a retirada é proporcional ao tamanho da população. Mas, na prática, é difícil de ser implementada pois não conseguimos contar  $A(n)$  a fim de que a retirada  $BA(n)$  seja realizada.

## 4 Modelos Gerais

Na seção anterior apresentamos dois modelos de dinâmica populacional, com diferentes estratégias de retirada de indivíduos de um população, considerando  $r = 0,5$ . A seguir apresentamos algumas considerações sobre esses modelos para valores quaisquer dos parâmetros envolvidos.

### 4.1 Modelo com retirada constante

Consideremos

$$A(n+1) = (1+r)A(n) - rA(n)^2 - b, \quad (4.1)$$

para  $r, b > 0$ . Temos que os pontos de equilíbrio são:  $a_1^* = (r + \sqrt{r^2 - 4rb})/2r$  ou  $a_2^* = (r - \sqrt{r^2 - 4rb})/2r$ . Para analisar a estabilidade desses pontos devemos considerar:

$$f(x) = (1+r)x - rx^2 - b, \quad f'(x) = 1+r-2rx, \quad f''(x) = -2r.$$

- (i) Se  $r^2 - 4rb < 0$ , não há pontos de equilíbrio.
- (ii) Se  $r^2 - 4rb = 0$ , então  $a^* = 0,5$  é o único ponto de equilíbrio. Analisando sua estabilidade, temos que  $f'(0,5) = 1$  e então, usando o Teorema 11,  $f''(0,5) = -2r \neq 0$ . Portanto  $a^* = 0,5$  é instável.
- (iii) Se  $r^2 - 4rb > 0$ , analisando a estabilidade de  $a_1^*$  e  $a_2^*$ , temos:  $f'(a_2^*) = 1 + \sqrt{r^2 - 4rb} > 1$  e portanto,  $a_2^*$  é instável. Como  $f'(a_1^*) = 1 - \sqrt{r^2 - 4rb}$  temos  $|f'(a_1^*)| < 1 \Leftrightarrow 0 < r^2 - 4rb < 4$ .

## 4.2 Modelo com retirada proporcional

Consideremos

$$A(n+1) = (1+r)A(n) - rA(n)^2 - BA(n), \quad (4.2)$$

com  $r, B > 0$ . Temos que os pontos de equilíbrio são:  $a_1^* = 0$  ou  $a_2^* = \frac{r-B}{r}$ , com  $r > B$ , pois  $a > 0$ . Para analisar a estabilidade desses pontos devemos considerar:

$$f(x) = (1+r)x - rx^2 - Bx, \quad f'(x) = 1+r-2rx-B, \quad f''(x) = -2r.$$

Analisando a estabilidade de  $a_1^*$  e  $a_2^*$ , temos:

- (i) Como  $f'(a_1^*) = 1+r-B$ , então  $|f'(a_1^*)| < 1 \Leftrightarrow -2 < r-B < 0$ , ou seja, se  $r < B$ ,  $a_1^* = 0$  é o único ponto de equilíbrio e é assintoticamente estável. Se  $r = B$ ,  $f'(a_1^*) = 1$  e utilizando o Teorema 11,  $f''(a_1^*) = -2r \neq 0$ , e portanto  $a_1^*$  é instável.
- (ii) Como  $f'(a_2^*) = 1-r+B$ , então  $|f'(a_2^*)| < 1 \Leftrightarrow 0 < r-B < 2$ . Se  $r-B = 2$ , temos  $f'(a_2^*) = -1$  e, portanto, devemos utilizar o Teorema 12. Obtemos  $S = -12r^2 < 0$  e portanto  $a_2^*$  é assintoticamente estável.

É possível observar, nos dois modelos, que nas duas estratégias apresentadas, a população poderá ir à extinção. Isso dependerá fortemente da relação entre os parâmetros taxa de crescimento e o de retirada de elementos da população ( $b$  ou  $B$ ).

## Referências Bibliográficas

- [1] Cipolli, V. G., *Sistemas Dinâmicos Discretos - Análise de estabilidade*. Dissertação de Mestrado, IGCE - UNESP - Rio Claro, 2012.
- [2] Elaydi, S., *An introduction to difference equations*, Springer, 3a. ed., 2005.
- [3] Keshet, L. E., *Mathematical Models in Biology*, Random House, 1988.
- [4] Sandefur, J. T., *Discrete Dynamical Systems - Theory and Applications*, Clarendon Press, 1990.

# Modelo de Competição Larval para uma População de Mosquitos *Aedes Aegypti*

Quédima Carlevaro de Souza<sup>†</sup>

Orientador(a): Profa. Dra. Suzete Maria da Silva Afonso

**Resumo:** Neste trabalho mostramos que utilizando equações diferenciais funcionais com retardo é possível desenvolver um modelo matemático eficiente para analisar o comportamento de uma população de mosquitos *Aedes aegypti*, desde a fase larval até se tornar um mosquito adulto, quando já pode transmitir o vírus da dengue.

**Palavras-chave:** Equação diferencial funcional com retardo, mosquito *Aedes Aegypti*, estabilidade.

---

*Abstract: In this work we will show that by using functional differential equations with delay is possible to develop an efficient mathematical model to analyze the behavior of a population of Aedes Aegypti mosquitoes, from the larval stage until becoming an adult mosquito, when he already can transmit the dengue virus.*

*Keywords: Retarded functional differential equation, Aedes aegypti mosquito; stability*

---

## 1 Introdução

A propagação de uma doença infecciosa envolve não só fatores relacionados à doença, tais como agente infeccioso, o modo de transmissão, o período latente, o período infeccioso, suscetibilidade e resistência, mas também fatores geográficos, econômicos, demográficos, culturais e sociais. O entendimento das características de transmissão dessas doenças infecciosas em comunidades, regiões e países, pode conduzir a melhores abordagens que diminuam a sua transmissão.

Como experimentos repetitivos não são aceitáveis na epidemiologia, além de, geralmente, não existirem dados precisos disponíveis, a modelagem matemática é útil para construir e testar teorias usadas para compreender melhor os mecanismos que influenciam a disseminação de uma doença, possibilitando melhores estratégias de controle. Como são baseados em suposições, os modelos apresentam limitações e são aproximações da realidade. No entanto, é importante que se aproxime o máximo possível da história de vida da espécie estudada.

Os efeitos da distribuição etária são considerados de fundamental importância para determinar as propriedades de estabilidade de muitas populações, todavia acabam sendo negligenciados nos estudos teóricos. As razões dessa negligência parecem estar nas deficiências técnicas dos métodos usados para formular estes modelos, que não são fiéis à realidade. Tais deficiências levaram a várias tentativas de descrever tais modelos através de um conjunto de equações diferenciais funcionais com retardo.

Este trabalho apresenta um modelo populacional com distribuição etária, com competição larval uniforme para uma população de mosquitos *Aedes aegypti*, proposto por Gurney, Nisbet e Lauwton (veja [2]), que envolve equações diferenciais funcionais com retardo. A

---

<sup>†</sup>Bolsista PET

taxa de mortalidade das larvas foi inserida no modelo como diretamente proporcional a uma potência  $L^{k+1}$ , onde  $L$  denota o número de larvas e  $k \in \mathbb{N}$ . Com a implementação do modelo, foram feitas simulações em que o grau de instabilidade da população de mosquitos quando há variação destes parâmetros foi observado.

## 2 Conceitos preliminares

O ciclo de vida do mosquito *Aedes aegypti*, compreende quatro fases: ovo, larva, pupa e adulto. Sabe-se que a fase larval, reprodutivamente inativa, é um período de alimentação e crescimento, sendo que sua duração depende da temperatura, disponibilidade de alimento e densidade das larvas no criadouro e que, na fase pupal, este não se alimenta. Segundo estas características, é possível descrever sua história de vida, de maneira aceitável, por um modelo de competição larval por alimento.

Considerando, como hipótese, que a espécie tem dois estágios de vida mais significativos, larval e adulto, tem-se duas classes etárias aglutinadas com duração fixa:

- Fase larval com duração  $\tau_L$  e população  $L(t)$ ;
- Fase adulta com duração  $\tau_A$  e população  $A(t)$ .

$P(t)$  denotará a proporção de larvas que eclodiram no instante  $t - \tau_L$ , que sobreviveram para passar para a fase adulta no instante  $t$ .

Além disso, quanto às formas funcionais para as taxas vitais, considera-se:

- **Mortalidade das larvas:** A maior limitação de recursos ocorre no estágio larval e, assumindo que uma dada larva compete igualmente com outra por alimento, é admissível escolher a taxa de mortalidade das larvas como diretamente proporcional a uma potência  $L^{k+1}$ , com a finalidade de observar possíveis alterações na implementação do modelo. Então, a taxa de mortalidade das larvas será representada por  $\delta_L = \alpha L^{k+1}$ , com  $k \in \mathbb{N}$ ;
- **Mortalidade dos adultos:** Assumindo que não há limitações de recursos na fase adulta, a escolha da taxa de mortalidade dos adultos independe da densidade e será denotada pela constante  $\delta_A$ ;
- **Natalidade das Larvas:** Como as larvas são inférteis, sua taxa de natalidade é zero, ou seja,  $\beta_L = 0$ .
- **Natalidade dos Adultos:** Conjecturando que os adultos têm amplo suprimento de comida, a taxa de natalidade independe da densidade e será representada pela constante  $\beta_A$ .

## 3 Modelo de competição larval uniforme para uma população de *Aedes aegypti*

Uma vez determinadas as formas funcionais para as taxas vitais das larvas e adultos, o modelo de competição larval uniforme para uma população de insetos, no caso a espécie *Aedes aegypti*, é descrito pelo sistema de equações diferenciais com retardo:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = R_L(t) - R_L(t - \tau_L)P(t) - \alpha L^{k+2}(t) \\ \frac{dP}{dt} = P(t)\alpha L^{k+1}(t - \tau_L) - P(t)\alpha L^{k+1}(t) \\ \frac{dA}{dt} = R_A(t) - \delta_A A(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

em que  $R_L(t)$  representa a taxa de recrutamento de larvas no tempo  $t$ ,  $R_L(t - \tau_L)$  representa a taxa de recrutamento de larvas no tempo  $t - \tau_L$  e  $R_A(t)$  representa a taxa de recrutamento de adultos no tempo  $t$ . Cabe lembrar que recrutamento em Biomatemática refere-se a entrada de novos indivíduos numa determinada classe.

Fazendo

$$R_L(t) = \beta_A A(t) + IL(t) \quad \text{e} \quad R_A(t) = R_L(t - \tau_L)P(t) + IA(t),$$

em que  $IL(t)$  e  $IA(t)$  denotam, respectivamente, o número de larvas e o número de adultos inoculados ao sistema durante um curto período de tempo, obtém-se o modelo descrito pelo sistema de equações diferenciais não-lineares com retardo:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = \beta_A A(t) + IL(t) - \beta_A A(t - \tau_L)P(t) - IL(t - \tau_L)P(t) - \alpha L^{k+2} \\ \frac{dP}{dt} = P(t)\alpha L^{k+1}(t - \tau_L) - P(t)\alpha L^{k+1}(t) \\ \frac{dA}{dt} = \beta_A A(t - \tau_L)P(t) + IL(t - \tau_L)P(t) + IA(t) - \delta_A A(t), \end{cases} \quad (3.2)$$

em que

$$P(t) = \exp \left[ - \int_{t-\tau_L}^t \delta_L(x) dx \right] = \exp \left[ - \int_{t-\tau_L}^t \alpha L^{k+1}(x) dx \right]. \quad (3.3)$$

As inoculações  $IL(t)$  e  $IA(t)$  são constantes num intervalo  $[0, T]$  de dias e, fora deste,  $IL(t) = IA(t) = 0$ .

#### 4 Análise do Modelo

Assumindo que  $L^*$ ,  $P^*$  e  $A^*$  são soluções do estado estacionário de (3.2), a partir de (3.2) e (3.3), obtém-se as seguintes equações:

$$\beta_A A^* - \beta_A A^* P^* - \alpha L^{*k+2} = 0, \quad (4.1)$$

$$P^* - \exp \left[ -\alpha \tau_L L^{*k+1} \right] = 0, \quad (4.2)$$

$$\beta_A A^* P^* - \delta_A A^* = 0. \quad (4.3)$$

Pela equação (4.2), tem-se:

$$P^* = \exp \left[ -\alpha \tau_L L^{*k+1} \right] \quad (4.4)$$

e, da equação (4.3), obtém-se outra expressão para  $P^*$ , a saber:

$$P^* = \frac{\delta_A}{\beta_A}. \quad (4.5)$$

Igualando as expressões (4.4) e (4.5), vem que:

$$L^* = \left[ \frac{\ln \left( \frac{\beta_A}{\delta_A} \right)}{\alpha \tau_L} \right]^{\frac{1}{k+1}}. \quad (4.6)$$

Agora, substituindo  $P^*$  em (4.1), tem-se:

$$A^* = \frac{\alpha L^{*k+2}}{\beta_A - \delta_A}. \quad (4.7)$$

Finalmente, substituindo  $L^*$  na expressão (4.7), obtém-se:

$$A^* = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{k+1}} \tau_L^{\frac{k+2}{k+1}} (\beta_A - \delta_A)} \left[ \ln \left( \frac{\beta_A}{\delta_A} \right) \right]^{\frac{k+2}{k+1}}. \quad (4.8)$$

Analisando cada uma das equações que representam o ponto de equilíbrio ((4.5), (4.6) e (4.8)), observa-se que:

- (I) O equilíbrio da probabilidade de sobrevivência das larvas ( $P^*$ ), depende de  $\beta_A$  e  $\delta_A$ , sendo que ela diminui à medida que cresce a taxa de natalidade dos mosquitos adultos ( $\beta_A$ ), e aumenta à medida que cresce a taxa de mortalidade dos mosquitos adultos ( $\delta_A$ ), o que se justifica pela limitação de alimentos neste estágio;
- (II) O equilíbrio, tanto para o número de larvas ( $L^*$ ), quanto para o número de mosquitos adultos ( $A^*$ ), depende de  $\beta_A$ ,  $\delta_A$ ,  $\tau_L$ ,  $\alpha$  e  $k$ .

Como os parâmetros  $\beta_A$ ,  $\delta_A$  e  $\tau_L$  devem ser positivos, assim como o fator de proporcionalidade  $\alpha$ , para termos  $L^* > 0$ ,  $A^* > 0$  e  $P^* < 1$ , é necessário que  $\beta_A > \delta_A$ , ou seja, os nascimentos devem superar as mortes na população de mosquitos adultos.

## 5 Análise da Estabilidade e Implementação do Modelo

Para saber quais são os parâmetros que influenciam na estabilidade do ponto de equilíbrio, o sistema (3.2) é linearizado, considerando soluções próximas do estado estacionário, da forma:

$$\begin{aligned} L(t) &= L^* + l(t), \\ P(t) &= P^* + p(t), \\ A(t) &= A^* + a(t), \end{aligned}$$

em que  $l(t)$ ,  $p(t)$  e  $a(t)$  são pequenas perturbações.

Tem-se, pois, o seguinte sistema linearizado:

$$\begin{cases} \frac{dl}{dt} = \beta_A a(t) - \beta_A A^* p(t) - \delta_A a(t - \tau_L) - (k+2)\alpha L^{*k+1} l(t) \\ \frac{dp}{dt} = (k+1)P^* \alpha L^{*k} l(t - \tau_L) - (k+1)P^* \alpha L^{*k} l(t) \\ \frac{da}{dt} = \beta_A A^* p(t) + \delta_A a(t - \tau_L) - \delta_A a(t). \end{cases} \quad (5.1)$$

Para o sistema (5.1), busca-se soluções da forma:

$$X = \begin{bmatrix} l(t) \\ p(t) \\ a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} e^{\lambda t} = C e^{\lambda t}, \quad (5.2)$$

em que  $c_1, c_2$  e  $c_3$  são constantes. Se  $X$  dado em (5.2) é um vetor solução do sistema (5.1), então:

$$\frac{dX}{dt} = C \lambda e^{\lambda t}. \quad (5.3)$$

Substituindo (5.2) e (5.3) no sistema (5.1), obtém-se:

$$C \lambda e^{\lambda t} = M C e^{\lambda t}, \quad (5.4)$$

em que  $M$  é a matriz das constantes do sistema (5.1). Dividindo (5.4) por  $e^{\lambda t}$  e escrevendo o sistema na forma matricial, segue que:

$$\begin{bmatrix} -(k+2)\alpha L^{*k+1} & -\beta_A A^* & \beta_A - \delta_A e^{-\lambda \tau_L} \\ (k+1)P^* \alpha L^{*k} e^{-\lambda \tau_L} - (k+1)P^* \alpha L^{*k} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_A A^* & \delta_A e^{-\lambda \tau_L} - \delta_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix},$$

ou equivalentemente

$$(M - \lambda I)C = 0, \quad (5.5)$$

em que  $\lambda$  denota os autovalores da matriz  $M$  e  $C$  os autovetores associados a eles.

Para que  $X$  seja uma solução não-trivial de (5.1), é necessário que:

$$\det(M - \lambda I) = 0, \quad (5.6)$$

de onde se obtém a seguinte equação característica:

$$\begin{aligned} -\lambda^3 + [\delta_A(e^{-\lambda \tau_L} - 1) - (k+2)\alpha L^{*k+1}] \lambda^2 \\ + (e^{-\lambda \tau_L} - 1)[(k+2)\alpha L^{*k+1} \delta_A - (k+1)\beta_A P^* \alpha L^{*k} A^*] \lambda \\ + (e^{-\lambda \tau_L} - 1)(k+1)\beta_A P^* \alpha L^{*k} A^* (\beta_A - \delta_A) = 0. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões (4.5), (4.6) e (4.7), que representam  $P^*$ ,  $L^*$  e  $A^*$ , respectivamente, na equação característica acima, tem-se:

$$\begin{aligned} -\lambda^3 + \left[ \delta_A(e^{-\lambda \tau_L} - 1) - \frac{(k+2)}{\tau_L} \ln \left( \frac{\beta_A}{\delta_A} \right) \right] \lambda^2 \\ + (e^{-\lambda \tau_L} - 1) \left[ \frac{(k+2)\delta_A}{\tau_L} \ln \left( \frac{\beta_A}{\delta_A} \right) - \frac{(k+1)\delta_A}{\tau_L^2(\beta_A - \delta_A)} \ln^2 \left( \frac{\beta_A}{\delta_A} \right) \right] \lambda \\ + (e^{-\lambda \tau_L} - 1) \frac{(k+1)\delta_A}{\tau_L^2} \ln^2 \left( \frac{\beta_A}{\delta_A} \right) = 0. \end{aligned}$$

Através da equação acima pode-se concluir que a estabilidade do ponto de equilíbrio do modelo com competição larval uniforme depende de  $\beta_A$ ,  $\delta_A$ ,  $\tau_L$  e  $k$ , e não depende do fator de proporcionalidade  $\alpha$  que influencia apenas na magnitude do equilíbrio.

A implementação do modelo foi feita com o objetivo de observar o comportamento das populações das larvas e dos mosquitos adultos quando há variação destes parâmetros.

O fator de proporcionalidade  $\alpha$  foi calculado através da expressão (4.8), assumindo  $A^* = 20.000$  mosquitos adultos e utilizando os valores-base dos parâmetros da tabela abaixo.

Símbolo	Valor-Base
$\tau_L$	18,5 dias
$\beta_A$	1,31 ovos por dia
$\delta_A$	0,125 adultos por dia
$k$	0
$\alpha$	$6,805 \times 10^{-7}$

TABELA 1: Valores adotados para os parâmetros do modelo de competição larval uniforme.

Considera-se que a expectativa de vida do mosquito adulto, a qual denotaremos por  $M_v$ , seja igual a 8 dias. Dessa forma, a taxa de mortalidade dos mosquitos adultos, que é dada por  $\delta_A = \frac{1}{M_v}$ , é igual a 0,125.

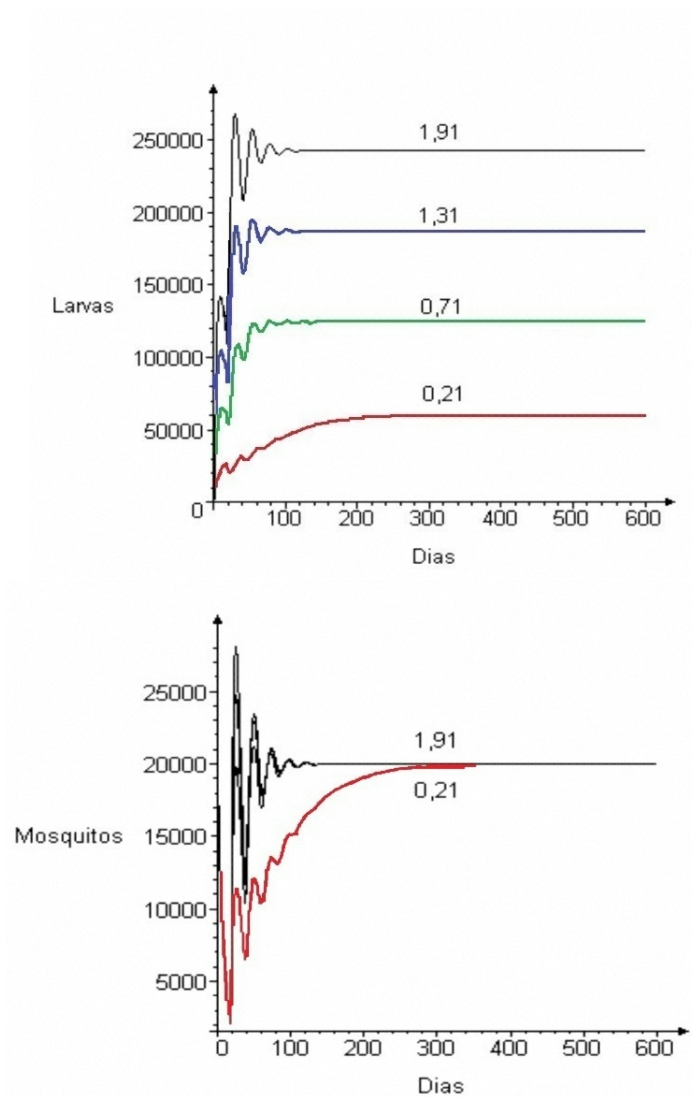


Para realizar as simulações foram adotados os valores citados na Tabela 1, considerados os valores-base, que também foram utilizados como referência para a escolha de suas variações, e as seguintes condições iniciais:

- ▷  $L(t) = P(t) = A(t) = 0$ , para  $-18,5 \leq t < 0$  ;
- ▷  $L(0) = 0, P(0) = 1$  e  $A(0) = 20.000$ ;
- ▷  $IL(t) = 50$  larvas e  $IA(t) = 5$  adultos, para  $0 \leq t \leq 2$  dias;
- ▷  $IL(t) = IA(t) = 0$ , para  $t > 2$ .

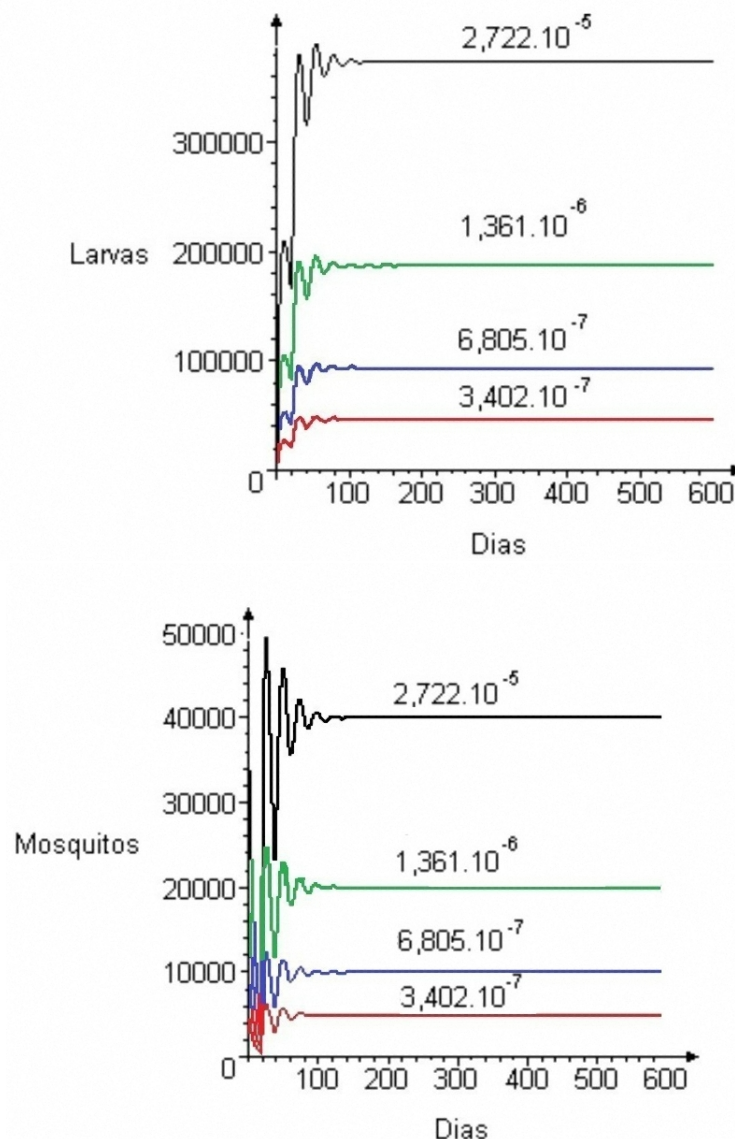
Através das simulações feitas no Matlab (R2014a), as seguintes observações foram feitas:

- Diminuir a taxa de natalidade dos mosquitos adultos ( $\beta_A$ ), diminui a população de larvas e, somente para valores muito pequenos de  $\beta_A$ , ocorre o retardo na estabilização das populações - lembrando que devemos ter  $\beta_A > \delta_A$ . Veja os gráficos abaixo.



- Com o aumento da taxa de mortalidade dos mosquitos adultos,  $\delta_A$ , há um aumento da população de larvas, o que é justificado pela maior probabilidade de sobrevivência destas, devido a competição alimentar neste estágio. Porém, o fato mais importante observado é que, além de provocar maiores oscilações nas populações, retarda muito o dia de suas estabilizações.

- Aumentando o período larval,  $\tau_L$ , o número de larvas aumenta e são provocadas bruscas oscilações nas duas populações, retardando o dia de suas estabilizações;
- O aumento do expoente  $k$  não altera o número de larvas e, mesmo provocando oscilações na população de mosquitos adultos, que a eleva significativamente num curto período de tempo, interfere muito pouco no dia de sua estabilização;
- O aumento da taxa de mortalidade dos mosquitos adultos,  $\delta_A$ , e o aumento do período larval,  $\tau_L$ , provoca bruscas oscilações que retardam a estabilização das populações nos dois estágios de desenvolvimento, larval e adulto. Além disso, pode-se ressaltar que taxas de natalidade,  $\beta_A$ , muito pequenas, também retardam a estabilização das populações.
- A variação do fator de proporcionalidade  $\alpha$  não altera de maneira significativa o período de oscilações das populações, alterando somente a magnitude do ponto de equilíbrio para as populações de larvas e mosquitos adultos, conforme se pode observar nos gráficos a seguir.



## 6 Considerações Finais

O mosquito *Aedes aegypti*, vetor transmissor da dengue, passa por diferentes estágios de desenvolvimento, no qual o larval e o adulto são considerados os mais expressivos. A fase larval

é um período de alimentação e o crescimento depende da densidade de larvas no criadouro. Na fase adulta o mosquito é reprodutivamente ativo e é onde ocorre a transmissão do vírus. Sendo assim, a distribuição etária, que tem fundamental importância para a determinação das propriedades de estabilidade de populações que têm diferentes fases de desenvolvimento com características distintas, leva a uma descrição mais próxima da história de vida da espécie e, conseqüentemente, do comportamento da epidemia.

O modelo populacional com distribuição etária, com competição larval uniforme para uma população de mosquitos *Aedes aegypti*, foi descrito por um conjunto de equações diferenciais funcionais com retardo. Sua análise foi realizada a partir de simulações computacionais. Esta análise é importante, pois através dela torna-se possível indicar meios de combate e prevenção mais eficazes para diminuir a transmissão do vírus da dengue por meio do mosquito.

**Agradecimentos:** Agradeço ao PET pelo apoio financeiro; aos meus pais, Paulino e Maria, por me apoiarem e incentivarem a continuar sempre apesar das dificuldades, a Profa. Dra. Suzete Maria da Silva Afonso por me orientar e me aconselhar sempre, fazendo dos estudos algo prazeroso e gratificante, e a Deus por me abençoar e me permitir ter a oportunidade que hoje tenho.

## Referências Bibliográficas

- [1] Gurney, W. S. C.; Nisbet, R. M., Ecological Dynamics. Oxford University Press, New York, 1998.
- [2] Gurney, W. S. C.; Nisbet, R. M.; Lawton, J. H., The systematic formulation of tractable single species models incorporating age structure. Journal of Animal Ecology, 52, 2 (1983), 479–495.
- [3] Gerhardt, M. P., Modelo de Transmissão da Dengue com Competição Larval. Dissertação de Mestrado, UFRGS, Porto Alegre, 2004.
- [4] Miorelli, A., Modelos epidemiológicos do dengue e o controle do vetor transmissor. Dissertação de Mestrado, UFRGS, Porto Alegre, 1999.

## Os espaços $L_p$ e o Teorema de Fischer–Riesz

Raul Felipe de Oliveira Francisco<sup>†</sup>

Orientador(a): Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

**Resumo:** Neste trabalho apresentaremos um estudo detalhado sobre os espaços  $L_p$  das funções mensuráveis  $f$  tais que  $|f|^p$  é Lebesgue integrável. Exibiremos algumas de suas interessantes propriedades e provaremos o importante Teorema de Fischer–Riesz que afirma que o espaço  $L_p$ , para  $p \in [1, +\infty]$ , munido de uma certa norma, é um espaço de Banach.

**Palavras-chave:** Espaços  $L_p$ , teorema de Fischer–Riesz, teoria da medida

---

*Abstract:* In this work we present a detailed study of the  $L_p$  spaces of measurable functions  $f$  such that  $|f|^p$  is Lebesgue integrable. We will show some of their interesting properties and prove the important Fischer–Riesz Theorem which states that the  $L_p$  spaces, for  $p \in [1, +\infty]$ , endowed with a certain norm, is a Banach space.

*Keywords:*  $L_p$  spaces, Fischer–Riesz theorem, measure theory

---

### 1 Os espaços $\mathcal{L}_p$ e $L_p$ ( $1 \leq p < \infty$ )

Nesta seção definiremos os espaços  $\mathcal{L}_p(E)$  e  $L_p(E)$  das funções e classes de equivalência de funções, respectivamente,  $p$ -integráveis  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $1 \leq p < \infty$ . O principal resultado desta seção é o Teorema de Fischer–Riesz que afirma que os espaços  $L_p$  são espaços de Banach, ou seja, são completos com a métrica induzida pela norma neles definida.

**Definição 1.** Sejam  $E$  um conjunto mensurável e  $1 \leq p < \infty$ . Denotamos por  $\mathcal{L}_p(E)$  o conjunto das funções mensuráveis  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $|f|^p$  é Lebesgue integrável e  $\|f\|_p < \infty$ , em que

$$\|f\|_p = \left( \int_E |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Veremos abaixo que, para todo  $p \in [1, +\infty)$ , o espaço  $\mathcal{L}_p(E)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

**Proposição 2.** Seja  $p \in [1, +\infty)$ . O espaço  $\mathcal{L}_p(E)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , isto é, se  $f$  e  $g$  pertencem ao espaço  $\mathcal{L}_p(E)$  e  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais, então  $\alpha f + \beta g$  também pertence à  $\mathcal{L}_p(E)$ .

**Prova:** É claro que se  $f \in \mathcal{L}_p(E)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  então  $\alpha f \in \mathcal{L}_p(E)$ . Portanto, é suficiente mostrar que  $f + g \in \mathcal{L}_p(E)$  sempre que  $f, g \in \mathcal{L}_p(E)$ . Dadas, pois,  $f, g \in \mathcal{L}_p(E)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} |f + g|^p &\leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p \\ &\leq 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p), \end{aligned}$$

de onde segue que  $f + g \in \mathcal{L}_p(E)$ . □

---

<sup>†</sup>Bolsista PET

Dizemos que duas funções  $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_p(E)$  são *equivalentes* quando elas só diferem em um conjunto de medida nula. Isto equivale a dizer que  $\|f_1 - f_2\|_p = 0$ , o que implica que  $\|f_1\|_p = \|f_2\|_p$ . Indicamos por  $L_p(E)$  o espaço dessas classes de equivalência, isto é, o espaço vetorial quociente de  $\mathcal{L}_p(E)$  pelo espaço vetorial

$$N_p = \{f \in \mathcal{L}_p(E), \|f\|_p = 0\}.$$

**Observação 3.** Seja  $\overline{\mathbb{R}}$  a reta real estendida, ou seja, o conjunto  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ . Se  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é uma função mensurável tal que  $\|f\|_p < \infty$  então  $m(\{t \in E, |f(t)| = \infty\}) = 0$  e definindo

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } |f(t)| < \infty, \\ 0, & \text{se } |f(t)| = \infty, \end{cases}$$

temos  $\bar{f} \in \mathcal{L}_p(E)$  e  $\|f - \bar{f}\|_p = 0$ . Para definir  $L_p(E)$  nada perderemos portanto ao considerar apenas as funções finitas, caso contrário perderíamos a estrutura de espaço vetorial.

Por abuso de notação, dada a classe de equivalência  $\dot{f} \in L_p(E)$  de  $f \in \mathcal{L}_p(E)$ , escreveremos  $f$  em vez de  $\dot{f}$  e  $\|f\|_p$  em vez de  $\|\dot{f}\|_p$ .

Vamos verificar que a aplicação

$$f \in \mathcal{L}_p(E) \rightarrow \|f\|_p \in \mathbb{R}_+$$

é uma norma em  $\mathcal{L}_p(E)$ , ou seja, que goza das três propriedades:

- i)  $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ , para quaisquer  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $f \in \mathcal{L}_p(E)$ ;
- ii)  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$  para quaisquer  $f, g \in \mathcal{L}_p(E)$ ;
- iii)  $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ .

Perceba que, das definições de  $\|\cdot\|_p$  e do espaço  $\mathcal{L}_p$ , as propriedades i) e iii) seguem naturalmente. Além disso, a propriedade ii) é facilmente verificada quando  $p = 1$ . Agora, para demonstrarmos a propriedade ii) para qualquer  $p$ , será necessário introduzir algumas desigualdades.

A desigualdade que será apresentada na sequência foi considerada pelo matemático inglês W. H. Young em seu trabalho “*On classes of summable functions and their Fourier series*” publicado em 1912, [6]. Para uma prova analítica deste resultado, sugerimos ao leitor a leitura do trabalho [2] “*On Young’s inequality*”, dos autores F. Cunningham Jr. e N. Grosman, publicado em 1971.

**Teorema 4** (Desigualdade de Young). *Seja  $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que:*

- i)  $\alpha(0) = 0$ ;
- ii)  $\alpha$  é contínua em  $[0, +\infty)$ ;
- iii)  $\alpha$  é estritamente crescente e ilimitada em  $[0, +\infty)$ .

*Sob tais condições,  $\alpha$  tem uma inversa  $\beta$  que está definida em  $[0, +\infty)$  e goza das mesmas propriedades que  $\alpha$ . Então, para quaisquer  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$ , tem-se:*

$$ab \leq \int_0^a \alpha(x) dx + \int_0^b \beta(y) dy.$$

*Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $\alpha(a) = b$ .*

Dado  $1 \leq p < \infty$ , seja  $q \in [1, \infty)$  tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

O número  $q$  é dito o *expoente conjugado* de  $p$ , bem como o número  $p$  é dito o expoente conjugado de  $q$ .

**Corolário 5.** *Seja  $p \in [1, \infty)$  e seja  $q$  o expoente conjugado de  $p$ . Se  $a > 0$  e  $b > 0$  então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Prova:** Sejam  $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\beta : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  as funções definidas por

$$\alpha(x) = x^{p-1} \quad \text{e} \quad \beta(y) = y^{\frac{1}{p-1}}, \quad \text{para } x, y \in [0, +\infty).$$

Não é difícil verificar que  $\alpha$  e  $\beta$  satisfazem as condições da Desigualdade de Young, Teorema 4. Como  $(p-1)q = p$ , segue que

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{\frac{1}{p-1}} dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad \square$$

**Teorema 6** (Desigualdade de Hölder–Riesz). *Seja  $p \in [1, \infty)$  e seja  $q$  o expoente conjugado de  $p$ . Se  $f \in L_p(E)$  e  $g \in L_q(E)$  então:*

$$\int_E |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

**Prova:** Vamos supor que  $\|f\|_p > 0$  e  $\|g\|_q > 0$ , pois senão teríamos  $fg = 0$  a menos de um conjunto de medida nula e o resultado seguiria imediatamente.

Pelo Corolário 5, temos:

$$\frac{|f(x)g(x)|}{AB} \leq \frac{A^{-p}|f(x)|^p}{p} + \frac{B^{-q}|g(x)|^q}{q},$$

em que  $A = \left[ \int_E |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p$  e  $B = \left[ \int_E |g(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} = \|g\|_q$ . Por conseguinte,  $fg \in L_1$  e

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \int_E |f(x)g(x)| dx &\leq \frac{1}{pA^p} \int_E |f(x)|^p dx + \frac{1}{qB^q} \int_E |g(x)|^q dx \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_E |f(x)g(x)| dx \leq AB = \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \quad \square$$

**Corolário 7.** *Se  $m(E) < \infty$  e  $1 \leq p < q \leq \infty$ , então:*

$$L_q(E) \subset L_p(E).$$

**Prova:** De  $p < q$  tem-se que  $\frac{q}{p} > 1$  e  $\frac{q}{q-p}$  é o expoente conjugado de  $\frac{q}{p}$ .

Tome  $f \in L_q(E)$ . Aplicando a Desigualdade de Hölder (Teorema 6) relativamente ao par  $(\frac{q}{p}, \frac{q}{q-p})$ , obtemos:

$$(\|f\|_p)^p = \int_E |f(t)|^p dt \leq \left( \int_E |f(t)|^{p \frac{q}{p}} dt \right)^{\frac{p}{q}} \left( \int_E 1^{\frac{q}{q-p}} dt \right)^{\frac{q-p}{q}} = (\|f\|_q)^p m(E)^{\frac{q-p}{q}},$$

de onde segue que  $\|f\|_p \leq m(E)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$ .  $\square$

O próximo resultado nos permitirá, finalmente, concluir que a aplicação  $f \in L_p(E) \rightarrow \|f\|_p \in \mathbb{R}_+$  é uma norma em  $L_p(E)$ .

**Teorema 8** (Desigualdade de Minkowski–Riesz). *Seja  $p \geq 1$ . Se  $f, g \in L_p(E)$ , então:*

$$\left( \int_E |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_E |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**Prova:** Para  $p = 1$ , a desigualdade é obtida pela desigualdade triangular satisfeita pelos números reais. Suponha que  $p > 1$ . Então:

$$\begin{aligned} \int_E |f(x) + g(x)|^p dx &= \int_E |f(x) + g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \\ &\leq \int_E |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \int_E |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx. \end{aligned}$$

Seja  $q > 1$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Note que  $(p-1)q = p$  e  $|f + g|^{p-1} \in L_q(E)$ . Pela Desigualdade de Hölder–Riesz (Teorema 6), temos que:

$$\int_E |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx \leq \left( \int_E |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$\int_E |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx \leq \left( \int_E |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_E |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Combinando as três desigualdades acima, obtemos o resultado.  $\square$

O matemático alemão Hermann Minkowski (1864–1909) provou a desigualdade precedente para soma finita de números em sua obra *Geometrie der Zahlen* (1896); enquanto Frigyes Riesz (1880–1956) generalizou este resultado para integrais de funções, em 1910. As principais ferramentas de Riesz foram as desigualdades tratadas anteriormente. A Desigualdade de Hölder e a Desigualdade de Minkowski não valem para  $0 < p < 1$  quando  $E$  for um conjunto de medida não-nula. Sugerimos ao leitor a leitura do livro [1] para constatar a veracidade desta afirmação.

Finalizaremos esta seção com o Teorema de Fischer–Riesz, um dos grandes trunfos da teoria de integração desenvolvida por Lebesgue, que afirma que os espaços  $L_p(E)$  são completos. Historicamente, não foi esta a formulação original do teorema. Fischer e Riesz demonstraram

independentemente, em 1906, que uma condição necessária e suficiente para que uma sequência  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de números complexos seja a sequência dos coeficientes de Fourier de uma série convergindo em média quadrática é que se tenha

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty.$$

O ponto chave da demonstração era a prova de que o espaço  $L_2([0, 1])$  é completo.

**Teorema 9** (Teorema de Fischer–Riesz). *Seja  $p \in (1, +\infty)$ . O espaço  $L_p(E)$  munido da norma  $\|\cdot\|_p$  é um espaço de Banach.*

**Prova:** Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de Cauchy em  $L_p(E)$ . Dado  $\frac{1}{2^r} > 0$ , existe  $n(r)$  tal que, para  $m, n > n(r)$ , tem-se:

$$\|f_n - f_m\|_p < \frac{1}{2^r}.$$

Por recorrência podemos encontrar uma subsequência crescente  $(n_r)_{r \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\|f_{n_{r+1}} - f_{n_r}\|_p < \frac{1}{2^r}.$$

Vamos definir

$$g_k = \sum_{r=1}^k |f_{n_{r+1}} - f_{n_r}| \quad \text{e} \quad g = \sum_{r=1}^{\infty} |f_{n_{r+1}} - f_{n_r}|,$$

em que  $g$  pode tomar valores iguais a  $\infty$ . Pela Desigualdade de Minkowski–Riesz (Teorema 8), temos que  $\|g_k\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$  e, aplicando o Lema de Fatou (veja [3, Teorema 3.2]) à sequência de funções  $(g_k^p)_{k \in \mathbb{N}}$ , obtemos:

$$(\|g\|_p)^p = \int_E \lim (g_k)^p \leq \lim \int_E (g_k)^p \leq 1,$$

de onde segue que  $g$  é finita quase sempre e a série

$$f_{n_1} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$$

é absolutamente convergente quase sempre. Indicando por  $f$  a sua soma, temos, portanto, que  $f$  está definida quase sempre. De

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) = f_{n_k}$$

segue que  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n_k}$  quase sempre, de onde se conclui que  $f$  é mensurável.

Afirmamos que  $\|f - f_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . De fato, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_\epsilon$  tal que, para  $n, m > n_\epsilon$ , tem-se  $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ . E, pelo Lema de Fatou, para  $n > n_\epsilon$  segue que

$$\int |f - f_n|^p \leq \frac{1}{k} \lim \int |f_{n_k} - f_n|^p \leq \epsilon^p. \quad (1.1)$$

Consequentemente  $f - f_n \in L_p(E)$ . Como  $f_n \in L_p(E)$ , concluímos que  $f \in L_p(E)$  e, por (1.1),  $\|f - f_n\|_p \leq \epsilon$ , para  $n > n_\epsilon$ .  $\square$



O fato de que os espaços  $L_p(E)$  são espaços de Banach é muito importante na Análise Funcional, pois então se aplicam a eles os teoremas fundamentais que valem para espaços de Banach e não valem para espaços normados, tais como o Teorema da Aplicação Aberta, o Teorema do Gráfico Fechado, o Princípio da Limitação Uniforme, o Teorema de Banach–Steinhaus. Ao leitor interessado, indicamos a referência [1] para um estudo aprofundado sobre os teoremas mencionados.

## 2 Aproximações por funções contínuas

Seja  $E$  um conjunto mensurável em  $\mathbb{R}$ . O principal objetivo desta seção é mostrar que, para  $1 \leq p < \infty$ , o espaço  $L_p(E)$  é separável.

**Proposição 10.** *Para  $1 \leq p < \infty$ , o conjunto de todas as funções escada é denso em  $L^p(\mathbb{R})$ . Em outras palavras: se  $f \in L^p(\mathbb{R})$  e  $\epsilon > 0$ , então existe uma função escada  $\psi$  em  $\mathbb{R}$  tal que*

$$\|f - \psi\|_p < \epsilon.$$

**Prova:** Vamos dividir a prova em dois casos. Primeiro vamos considerar o caso em que  $f \geq 0$ . Seja  $\epsilon > 0$ . É sabido que existe uma função escada  $\psi \geq 0$  tal que

$$\|f^p - \psi^p\|_1 < \epsilon^p.$$

Utilizando a desigualdade

$$|a - b|^p \leq |a^p - b^p|$$

que é válida para  $a \geq 0, b \geq 0$  e  $p \geq 1$ , obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - \psi(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f^p(x) - \psi^p(x)| dx < \epsilon^p,$$

de onde segue que

$$\|f - \psi\|_p < \epsilon.$$

Para o caso geral, o resultado segue ao considerar a decomposição  $f = f^+ - f^-$  e o que foi provado anteriormente.  $\square$

Agora vamos introduzir uma nova classe de funções reais.

**Definição 11.** Uma função contínua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ter suporte compacto se existe um subconjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}$  tal que  $x \notin K$  implica  $f(x) = 0$ .

O conjunto de todas as funções que tem suporte compacto em  $\mathbb{R}$  será denotada por  $C_c(\mathbb{R})$ .

Como um conjunto compacto em  $\mathbb{R}$  é limitado, se  $f \in C_c(\mathbb{R})$  então  $f$  é igual a zero fora de um intervalo fechado, de onde se conclui que  $C_c(\mathbb{R}) \subset L_p(\mathbb{R})$ .

**Proposição 12.** *Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $C_c(E)$  é denso em  $L_p(E)$ .*

**Prova:** Seja  $f \in L_p(E)$ . Defina a função  $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in E, \\ 0, & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

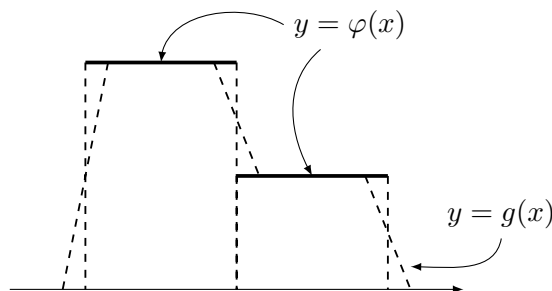
Dessa forma  $\bar{f} \in L_p(\mathbb{R})$ . Portanto, para qualquer  $\epsilon > 0$  existe uma função escada  $\varphi$  em  $\mathbb{R}$  tal que

$$\int_E |f(x) - \varphi_E(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\bar{f}(x) - \varphi(x)|^p dx < \frac{\epsilon^p}{2^p}, \quad (2.1)$$

em que  $\varphi_E$  é a restrição de  $\varphi$  a  $E$ . Por outro lado, existe uma função  $g \in C_c(\mathbb{R})$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x) - \varphi(x)|^p dx < \frac{\epsilon^p}{2^p}, \quad (2.2)$$

veja a figura abaixo.



Considerando  $g_E$  a restrição de  $g$  a  $E$  e combinando (2.1) e (2.2), obtemos:

$$\begin{aligned} \left( \int_E |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |\bar{f}(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |\bar{f}(x) - \varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

o que nos leva a concluir que  $C_c(E)$  é denso em  $L_p(E)$ . □

Como consequência da Proposição 12, temos o seguinte resultado.

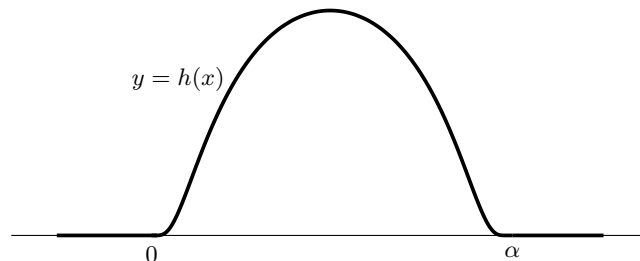
**Corolário 13.** *Considere  $1 \leq p < \infty$ . Então  $C(E) \cap L_p(E)$  é denso em  $L_p(E)$ .*

Seja  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  o espaço das funções infinitamente diferenciáveis em  $\mathbb{R}$  com suporte compacto. Para aproximar funções  $L_p$  por funções  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ , precisamos construir algumas funções básicas em  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ .

Seja  $\alpha$  um número real positivo. A função

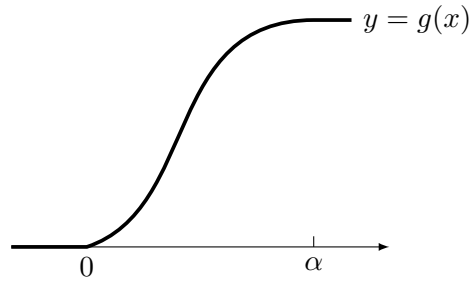
$$h(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x(\alpha-x)}\right), & \text{se } 0 < x < \alpha, \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq \alpha \end{cases}$$

é infinitamente diferenciável e tem suporte compacto. Veja seu gráfico abaixo.



Defina a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(x) = \int_{-\infty}^x h(t) dt,$$

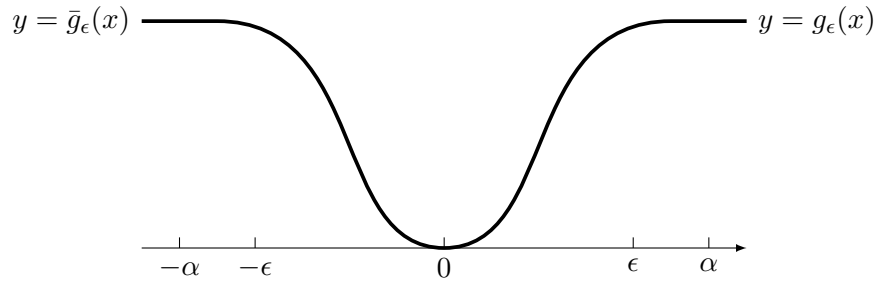


cujo gráfico está descrito a seguir.

Seja  $\epsilon > 0$ . Considere a função  $g_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g_\epsilon(x) = g\left(\frac{\alpha x}{\epsilon}\right).$$

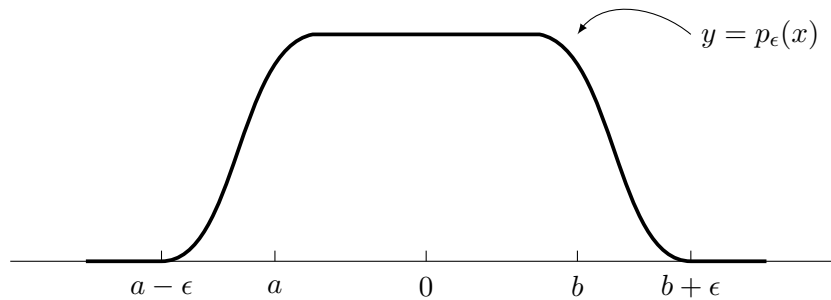
Portanto,  $g_\epsilon(x) = g(\alpha)$  se  $x \geq \epsilon$ , conforme se pode observar abaixo:



Considere agora  $\bar{g}_\epsilon(x) = g_\epsilon(-x)$ . Definamos agora uma função em  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Para o intervalo fechado  $[a, b]$  e  $\epsilon > 0$ , seja

$$p_\epsilon(x) = \begin{cases} g_\epsilon(x - a + \epsilon), & \text{se } x \leq \frac{(a+b)}{2}, \\ \bar{g}_\epsilon(x - b - \epsilon), & \text{se } x \geq \frac{(a+b)}{2}. \end{cases}$$

Portanto,  $p_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Veja a figura abaixo.



É natural que a função característica  $\chi_{[a,b]}$  de  $[a, b]$  possa ser aproximada por  $rp_\epsilon$  para alguns  $\epsilon > 0$  e  $r > 0$  no sentido de que

$$\|rp_{\frac{\epsilon}{2}} - \chi_{[a,b]}\|_p < \epsilon.$$

Seja  $C_c^\infty(E) = \{f_E; f \in C_c^\infty(\mathbb{R})\}$ . Então, temos o seguinte resultado.

**Proposição 14.** Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $C_c^\infty(E)$  é denso em  $L_p(E)$ .

**Prova:** Nós podemos nos restringir ao caso em que  $E = \mathbb{R}$ . Sabemos que as funções escada sobre  $\mathbb{R}$  são densas em  $L_p(\mathbb{R})$ . Por outro lado, a função característica de um intervalo pode ser aproximada por funções  $C_c^\infty$ , como vimos acima, o que completa a prova.  $\square$

Também temos a seguinte proposição:

**Proposição 15.** *Seja  $f \in L_1(E)$ . Se*

$$\int_E f(x)g(x)dx = 0$$

*para qualquer  $g \in C_c^\infty(E)$ , então  $f$  é nula quase sempre.*

**Prova:** Podemos assumir que  $f \in L_1(\mathbb{R})$  sem perda de generalidade. Por resultados de Teoria da Medida (veja [3]), é suficiente mostrar que

$$\int_A f(x)dx = 0$$

para qualquer subconjunto mensurável  $A \subset \mathbb{R}$ . Como  $\chi_A \in L_1(\mathbb{R})$ , podemos encontrar uma sequência  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  que tende quase sempre para  $\chi_A$  e é limitada por uma constante  $M$ . Então  $(g_n f)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $f_A = \chi_A f$  quase sempre e cada  $g_n f$  pertence a  $L_1(\mathbb{R})$ . Pelo Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue (veja [3], Teorema 3.5), concluímos que  $(g_n f)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $f_A$  com respeito a norma de  $L_1$ , de onde segue

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)f(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_A(x)dx,$$

o que prova que

$$\int_A f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_A(x)dx = 0. \quad \square$$

Agora vamos definir o conceito de separabilidade de um espaço métrico e provar que  $L^p(E)$  é separável se  $1 \leq p < \infty$ :

**Definição 16.** Um espaço métrico  $(M, d)$  é dito separável se possui um subconjunto denso  $\mathfrak{D}$  que consiste em um número enumerável de elementos.

Embora já tenha sido mencionado o conceito de conjunto denso em resultados anteriores, lembramos agora que um conjunto  $\mathfrak{D}$  é denso em  $M$  se para quaisquer  $x \in M$  e  $\epsilon > 0$  existe  $y \in \mathfrak{D}$  tal que  $d(x, y) < \epsilon$ . O conjunto de números reais  $\mathbb{R}$ , desde que com a métrica usual, é separável, pois contém  $\mathbb{Q}$  que é enumerável e denso. De forma similar temos também que o espaço  $\mathbb{R}^n$  é separável. Na sequência vamos provar que o espaço  $L_p(E)$  é separável para  $1 \leq p < \infty$ .

**Proposição 17.** *Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $L_p(E)$  é separável.*

**Prova:** Provamos que a família de todas as funções escada é um conjunto denso em  $L_p(E)$ . É fácil verificar que a coleção  $\mathfrak{R}$  de todas as funções escada que possuem descontinuidades apenas em pontos racionais em  $E$  e assumem apenas valores racionais é um conjunto enumerável. Também sabemos que cada função escada pode ser aproximada por uma função em  $\mathfrak{R}$  com respeito à norma de  $L_1$ . Por conseguinte, a conjunto  $\mathfrak{R}$  é denso em  $L_p(E)$ .  $\square$

### 3 O espaço $L_\infty$

Nas seções anteriores estudamos os espaços  $L_p$  para  $1 \leq p < \infty$ . É natural, portanto, que queiramos dar uma interpretação para o caso  $p \rightarrow \infty$ . Vamos, então, introduzir uma nova classe de funções:

**Definição 18.** Seja  $E$  um conjunto mensurável. Denotamos por  $L_\infty(E)$  o espaço das funções mensuráveis definidas em  $E$  que são limitadas quase sempre em  $E$ , ou seja,

$$m(\{x \in E, |f(x)| > \alpha\}) = 0$$

para algum número real  $\alpha > 0$ .

É fácil ver que  $L_\infty(E)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Além disso, é fácil verificar que a aplicação definida por

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha > 0; m(\{x \in E, |f(x)| > \alpha\}) = 0\},$$

para  $f \in L_\infty(E)$ , define uma norma em  $L_\infty(E)$ . Tal norma é, por vezes, denominada *supremo essencial* de  $f$ .

Agora, apresentaremos algumas propriedades pertinentes do espaço  $L_\infty(E)$ .

**Proposição 19.** *Seja  $E$  um conjunto mensurável de medida finita. Então*

$$L_\infty(E) \subset L_p(E)$$

para qualquer  $p, 1 \leq p < \infty$ . Mais ainda, se  $f \in L_\infty(E)$ , então

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p.$$

**Prova:** Sejam  $f \in L_\infty(E)$  e  $A = \|f\|_\infty$ . Então temos  $|f(x)|^p \leq A^p$  para quase todo  $x \in E$ . Portanto,  $f \in L_p(E)$  e

$$\int_E |f(x)|^p dx \leq A^p m(E),$$

ou equivalentemente

$$\|f\|_p \leq A[m(E)]^{\frac{1}{p}}.$$

E como  $[m(E)]^{\frac{1}{p}} \rightarrow 1$  quando  $p \rightarrow \infty$  temos

$$\limsup \|f\|_p \leq A. \quad (3.1)$$

Por outro lado, suponha que  $|f(x)| \geq B$  em um conjunto  $F$  de medida positiva. Então

$$B[m(F)]^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p,$$

de onde segue que

$$B \leq \liminf \|f\|_p$$

e, portanto,

$$\sup\{B > 0; m(\{x \in E, |f(x)| \geq B\}) \neq 0\} \leq \liminf \|f\|_p.$$

Mas, não é difícil verificar que  $\sup\{B > 0; m(\{x \in E, |f(x)| \geq B\}) \neq 0\} = A$ . Portanto, segue de (3.1) que:

$$A \leq \liminf \|f\|_p \leq \limsup \|f\|_p \leq A,$$

o que nos leva a concluir que  $A = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$ . □

A seguir provaremos que o espaço  $L_\infty(E)$  é um espaço de Banach.

**Proposição 20.** *O espaço  $L_\infty(E)$  é um espaço de Banach.*

**Prova:** Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de Cauchy em  $L_\infty(E)$  e sejam

$$A_k = \{x \in E; |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\},$$

$$B_{m,n} = \{x \in E; |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\},$$

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cup \bigcup_{m,n=1}^{\infty} B_{m,n}.$$

Portanto  $m(F) = 0$ , pois  $F$  é uma reunião enumerável de conjuntos de medida nula. Para cada  $x \in E - F$  a sequência  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy em  $\mathbb{R}$ , uma vez que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty$$

e, portanto, converge para um número real. Seja  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \lim f_n(x), & \text{se } x \in E - F, \\ 0, & \text{se } x \in F. \end{cases}$$

Pela definição da  $f$ , a mesma é mensurável e limitada, de onde segue que  $f \in L_\infty(E)$ . Mostremos agora que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $f$  no sentido que  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Para isso, notemos que  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$  uniformemente em  $E - F$  e  $f_n - f$  é limitada em  $E - F$ . Portanto,

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in E - F\} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim concluímos que  $L_\infty(E)$  é completo com a métrica induzida pela norma do supremo essencial. Ou seja,  $(L_\infty(E), \|f\|_\infty)$  é um espaço de Banach.  $\square$

Finalizaremos este trabalho provando que  $L_\infty((a, b))$  não é separável.

**Proposição 21.**  *$L_\infty((a, b))$  não é separável.*

**Prova:** Para cada número real  $c$  tal que  $a < c < b$ , definimos  $f_c$  como sendo a função característica do intervalo  $(a, c)$ . Então, se  $c \neq d$ , temos  $\|f_c - f_d\|_\infty = 1$ . Suponhamos que exista um conjunto  $\mathfrak{F}$  que é denso em  $L_\infty((a, b))$ . Portanto, para cada  $c \in (a, b)$ , existe uma função  $g_c \in \mathfrak{F}$  tal que

$$\|f_c - g_c\|_\infty < \frac{1}{2}.$$

Consequentemente  $\mathfrak{F}$  é necessariamente não-enumerável. Isso mostra que  $L_\infty((a, b))$  não é separável.  $\square$

**Agradecimentos:** Eu gostaria de agradecer a Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso, pelos anos que dedicou seu tempo e paciência para me orientar, o que fez com que ela se tornasse uma grande e querida amiga. Gostaria de agradecer também ao grupo PET, pois se eu não fosse membro de tal grupo, não teria chegado onde cheguei.

## Referências Bibliográficas

- [1] Brézis, H., *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, 1984.
- [2] Cunningham Jr., F. and Grosman, N., On Young's inequality, *American Mathematical Monthly*, 78, 781–783.
- [3] Hönig, C. S., *A integral de Lebesgue e suas aplicações*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977.
- [4] Minkowski, H., *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig; reprinted by Chelsea, New York, 1953.
- [5] Chae, S. B., *Lebesgue Integration*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [6] Young, W. H., On classes of summable functions and their Fourier series, *Proceedings of the Royal Society* (London) (A), 87, 225–229.

## BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM MATEMÁTICA · BICMAT

### *Orientação aos autores*

Ao redigir o material a ser divulgado o autor deve observar que o alvo principal é o aluno de graduação, devendo a redação ser clara e objetiva incentivando-o à leitura.

O trabalho deve ser enviado à Comissão Editorial, via e-mail, na linguagem  $\text{\LaTeX}$ , usando a classe `bicmat`. Mais informações sobre a formatação do trabalho podem ser encontradas em [www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat](http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat), assim como o endereço para o envio do trabalho.

A responsabilidade de cada artigo é exclusiva do autor e respectivo orientador.