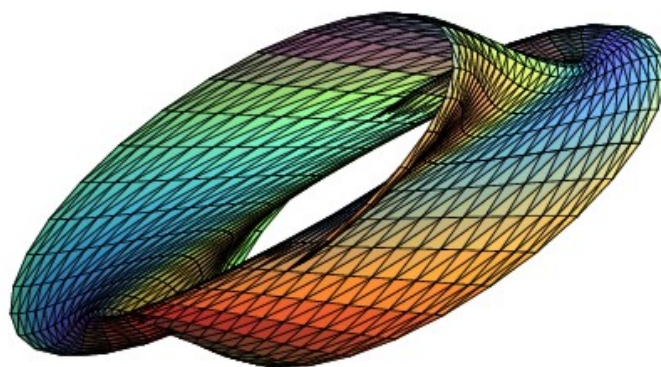

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM
MATEMÁTICA · BICMat



VOLUME XX
OUTUBRO DE 2023
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
IGCE · RIO CLARO

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM
MATEMÁTICA · BICMAT

Comissão editorial

Elíris Cristina Rizziolli

Renata Zotin Gomes de Oliveira

Nativi Viana Pereira Bertolo

Thiago de Melo

Editoração gráfica

Thiago de Melo

Realização

Departamento de Matemática

IGCE · Unesp Rio Claro

EDITORIAL

O Boletim de Iniciação Científica em Matemática · BICMat é uma publicação que se destina a difundir prioritariamente trabalhos de Iniciação Científica em Matemática que fazem parte de projetos desenvolvidos por alunos do Curso de Graduação em Matemática do IGCE, Unesp Rio Claro. Eventualmente trabalhos de Iniciação Científica realizados em outras instituições poderão também ser publicados neste Boletim.

O BICMat foi criado em 1998 e nessa época foram publicados dois volumes; o primeiro no ano de criação e o segundo em 2000.

Considerando a importância da Iniciação Científica para o graduando, e o sempre crescente número de projetos desta natureza desenvolvidos em nossa instituição, resolvemos reativar a publicação do BICMat em 2006, com ISSN 1980-024X.

Destacamos que a autoria dos trabalhos apresentados no BICMat é dos alunos. O orientador figura apenas como responsável científico.

Este Boletim também está aberto à divulgação de trabalhos que não sejam frutos de projetos de Iniciação Científica, mas que sejam de interesse dos alunos do curso de graduação em Matemática. Estes trabalhos serão selecionados pelos Editores.

Este volume está disponibilizado eletronicamente na página do Departamento de Matemática no endereço

www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat/

ou através do código QR



SUMÁRIO

<i>Estudo Comparativo de Alguns Modelos Contínuos de Dinâmica Populacional</i>	
Álvaro Leitão Pellegrino	5
<i>The Practical Study of Differential Equations with Impulses</i>	
Arthur Medeiros Barros	16
<i>O Uso da Transformada de Laplace</i>	
Caroline Barbosa Dias	29
<i>A Construção de Espaços Topológicos Via Topologia Quociente</i>	
Gabriel Cassimiro Pereira	42
<i>Séries de Fourier e Números de Liouville</i>	
Luca Maciel Alexander	54
<i>Equações Diferenciais com Retardamento Aplicadas à Dinâmica de Crescimento Tumoral</i>	
Maitê Borges Fiorini dos Anjos	64

Estudo Comparativo de Alguns Modelos Contínuos de Dinâmica Populacional: Taxa de Crescimento e Pontos de Equilíbrio

Álvaro Leitão Pellegrino[†]

Orientador(a): Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira

Resumo: O estudo de sistemas dinâmicos é de fundamental importância pois descrevem fenômenos que envolvem variações durante o tempo. Assim, o comportamento deles podem ser variados, desde tendencioso para um estado de equilíbrio, cíclico ou mesmo algo mais complexo. Para entendê-los qualitativamente, analisa-se a vizinhança dos pontos de equilíbrio do fenômeno. Neste trabalho foram analisados qualitativamente alguns modelos matemáticos de Dinâmica Populacional, descritos por equações diferenciais ordinárias, com respeito às taxas de crescimento, suas características e comportamentos gerais.

Palavras-chave: equações diferenciais ordinárias; dinâmica populacional; estabilidade; modelos matemáticos

1 Introdução

Embora a *dinâmica* seja um objeto de estudo popular e interdisciplinar nos dias de hoje, ela possui sua origem na Física, com Isaac Newton, durante o século XVII, e suas descobertas das leis de movimento e da gravitação universal. Todavia, uma grande barreira em seus estudos, e de muitos que o seguiram, foi obter uma fórmula explícita para o problema de gravitação de três corpos de massas arbitrárias. Tal barreira só foi transposta, de certa forma, no século XIX por Henri Poincaré, que passou a tratar o problema de um aspecto qualitativo e não mais quantitativo.

Com o passar dos anos, os métodos geométricos de Poincaré foram muito utilizados e passou-se a notar que em muitos casos era necessário produzir um estudo muito mais aprofundado de seu funcionamento, isso por conta da possibilidade dos fenômenos estudados estarem em estado de *caos*. A partir da década de 1940, com a invenção dos computadores, muitos pesquisadores começaram a aprofundar seus estudos sobre dinâmicas de fenômenos presentes no universo e seus resultados foram ampliando o conhecimento sobre o assunto até o que temos hoje.

Atualmente, o estudo de modelos de dinâmica populacional e a interação entre espécies é bastante conhecido na literatura, principalmente os modelos propostos por Lotka e Volterra, que influenciaram o campo da biologia populacional. Utilizados com o intuito de realizar previsões, os modelos de dinâmica populacional são uma das ferramentas fundamentais nos planejamentos de desenvolvimento sustentável. Como os modelos de dinâmica populacional envolvem variações durante o tempo, para entendê-los qualitativamente analisa-se o comportamento do modelo na vizinhança de determinados pontos.

Antes de introduzir os modelos e realizarmos as análises, apresentaremos alguns conceitos envolvendo equações diferenciais ordinárias e análise qualitativa. Caso o leitor tenha domínio dos conhecimentos destes tópicos, poderá ir direto para a Seção 3, mas recomendamos a

[†]FAPESP - 2022/14904-8

leitura da Seção 2, pois os conceitos e notações ali expostos serão necessário para uma boa compreensão do trabalho.

2 Preliminares

Seja A um intervalo aberto contido em \mathbb{R} e $x : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $t \in A$ e $x(t) \in \mathbb{R}$. Iremos denotar por $\dot{x} = dx/dt$, onde t é chamada de variável independente. Uma equação diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ é dita escalar se x possui valor real e autônoma se a função f não depende explicitamente da variável independente t . Assim, uma equação diferencial escalar autônoma tem a forma

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.1)$$

A solução para a equação (2.1) corresponde à uma função x que satisfaz $\dot{x}(t) = f(x(t))$ para todo $t \in A$. Considerando que em algum tempo inicial $t_0 \in A$ específico temos $x(t_0) = x_0$, teremos a solução x satisfazendo

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.2)$$

que é conhecido como Problema de Valor Inicial (PVI). Uma das consequências da característica de ser autônoma é que a equação diferencial não perde generalidade assumindo especificadamente o valor inicial como $t_0 = 0$, o que é de grande auxílio no processo de resolução.

Como o enfoque deste estudo está na análise qualitativa das equações diferenciais, não iremos nos ater tanto aos processos quantitativos (métodos de resolução). É importante destacar também que, mesmo obtendo soluções analíticas, às vezes a solução não está definida para todo t e o intervalo de definição pode depender da condição inicial.

Assim, a seguir apresentamos condições para que o PVI possua solução única. Iremos usar a notação $\varphi(t, x_0) = x(t)$ para indicar uma solução do PVI da equação (2.2), ou seja, $\varphi(t, x_0) = x(t)$ e $\varphi(0, x_0) = x_0$. A função $\varphi(t, x_0) = x(t)$ é chamada fluxo de $\dot{x} = f(x)$.

Teorema 2.1 (Existência e Unicidade das Soluções). *Se f é uma função contínua, então, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, existe um intervalo $I_{x_0} = (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$ contendo $t_0 = 0$ e uma solução $\varphi(t, x_0)$ do problema de valor inicial $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$, definida para todo $t \in I_{x_0}$, satisfazendo $\varphi(0, x_0) = x_0$. Além disso, se f é de classe C^1 , então $\varphi(t, x_0)$ é uma solução única em I_{x_0} e é contínua em (t, x_0) .*

Demonstração. Veja [6]. ■

Em cada ponto do plano (t, x) onde $f(x)$ é definida, o lado direito da equação $\dot{x} = f(x)$ nos fornece a inclinação da reta tangente (segmento de reta) ao gráfico da solução passando por aquele ponto. A coleção desses segmentos de reta é chamada de *campo de direções* da equação diferencial. O gráfico da solução através de x_0 , que é um subconjunto do plano (t, x) é definido por $\{(t, \varphi(t, x_0)); t \in I_{x_0}\}$ é chamado *trajetória* através de x_0 (veja exemplo apresentado na Figura 1.1).

O fluxo de uma equação diferencial é então grafado como a coleção de todas essas órbitas juntas com as setas de direções e a imagem final chama-se *retrato de fase* da equação diferencial. Em outros termos, o retrato de fase é uma projeção do campo de direções sobre o eixo de x .

Definição 2.2. Dizemos que um ponto $x^* \in \mathbb{R}$ é chamado de ponto de equilíbrio da equação de diferencial $\dot{x} = f(x)$ se $f(x^*) = 0$.

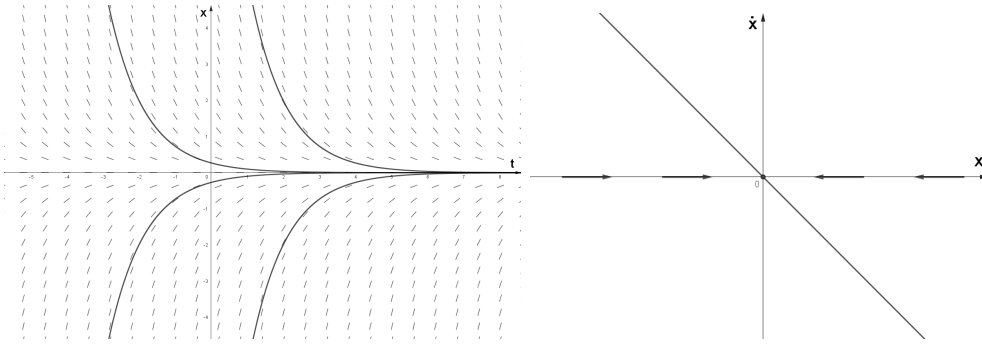


Figura 1.1: Campo de direção com trajetórias e retrato de fase, respectivamente, de $\dot{x} = -x$.

Em outros termos, se x^* é um ponto de equilíbrio, a função constante $x(t) = x^*$ é uma solução de (2.1) para todo t , com $x(t_0) = x^*$.

Definição 2.3. O ponto de equilíbrio x^* de $\dot{x} = f(x)$ é dito *estável* se, dado um $\varepsilon > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $|x_0 - x^*| < \delta$ implica em $|\varphi(t, x_0) - x^*| < \varepsilon$ para todo $t > 0$. Se x^* não é estável, então ele é chamado de *instável*.

Definição 2.4. O ponto x^* é um *ponto de equilíbrio assintoticamente estável* se ele for estável e houver um $r > 0$ tal que $|\varphi(t, x_0) - x^*| \rightarrow 0$, com $t \rightarrow \infty$, para todo x_0 satisfazendo $|x_0 - x^*| < r$.

O Lema a seguir nos permite verificar o tipo de estabilidade de um ponto de equilíbrio através da função $f(x)$.

Lema 2.5. Um ponto de equilíbrio x^* de $\dot{x} = f(x)$ é estável se existe um $\delta > 0$ tal que $(x - x^*)f(x) \leq 0$ para $|x - x^*| < \delta$. Similarmente, x^* é assintoticamente estável se, e somente se, existe um $\delta > 0$ tal que $(x - x^*)f(x) < 0$ para $0 < |x - x^*| < \delta$. Um ponto de equilíbrio x^* de $\dot{x} = f(x)$ é instável se existe um $\delta > 0$ tal que $(x - x^*)f(x) > 0$ para qualquer $0 < x - x^* < \delta$ ou $-\delta < x - x^* < 0$.

No entanto, dependendo da função $f(x)$ o Lema anterior pode não ser o modo mais adequado para o estudo da estabilidade. Das definições apresentadas, a estabilidade de um ponto de equilíbrio x^* é uma propriedade local do fluxo próximo a esse ponto. Assim, o teorema a seguir se torna bastante útil na análise de estabilidade de pontos de equilíbrio.

Teorema 2.6. Suponha que f é uma função de classe C^1 e x^* é um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$. Suponha também que $f'(x^*) \neq 0$. Então o ponto de equilíbrio x^* é assintoticamente estável se $f'(x^*) < 0$ e instável se $f'(x^*) > 0$.

Se $f'(x^*) = 0$, então x^* é chamado de ponto de equilíbrio não-hiperbólico ou degenerado. Diferentemente da vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico que pode ser estudada através da análise da derivada da função naquele ponto, as propriedades de estabilidade de um ponto degenerado depende de uma maior aproximação na linearização pela expansão de Taylor, ou seja, precisa-se de outros critérios mais aprofundados.

3 Modelos de Dinâmica Populacional Unidimensionais

Os modelos de dinâmica populacional unidimensionais geralmente são descritos na forma

$$\dot{P} = f(P) = F(P)P, \quad (3.1)$$

onde $P = P(t)$ representa o total da população no instante t e $F(P)$ a taxa de crescimento populacional. O modelo mais simples na literatura é o de Malthus, descrito pela equação diferencial ordinária $\dot{P} = rP$, onde $r > 0$ é uma taxa de crescimento populacional constante. Seu grande defeito está no fato de que a população terá um crescimento ilimitado ao longo do tempo, o que em geral não ocorre.

Para os modelos mais simples em geral obtemos solução analítica. Entretanto, conforme a complexidade dos modelos aumenta, obter soluções explícitas pode ser uma tarefa extremamente difícil. No entanto, o estudo dos modelos mais simples é de fundamental importância para o entendimento de um processo de modelagem e de proposição de novos modelos.

Como os modelos clássicos não consideram certas características biológicas e do meio em suas hipóteses, foram formulados outros modelos que modificam a taxa de crescimento populacional r , incorporando fatores inibidores. Nesta etapa do estudo daremos atenção para alguns modelos de dinâmica populacional citados em [2], [3] e [5], comparando-os quando possível.

3.1 Modelo de Verhulst

Na tentativa de incorporar fatores inibidores na população, uma modificação do modelo de Malthus considera a existência de uma quantidade de recursos limitados para atender uma população. Assim, a equação logística

$$\dot{P} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \quad (3.2)$$

primeiramente sugerida para descrever o crescimento populacional humano por Verhulst em 1838, onde K é uma constante que representa a capacidade suporte do meio, surge como uma forma mais simplificada de descrever uma dinâmica populacional considerando a existência de uma capacidade suporte para a população.

A solução considerando $P(0) = P_0$ é

$$P(t) = \frac{P_0 K}{(K - P_0)e^{-rt} + P_0}.$$

Pela Figura 1.2a já é possível interpretar que os pontos de equilíbrio do modelo se encontram são $P^* = 0$ e $P^* = K$. O que de fato ocorre, pois $rP(1 - P/K) = 0 \Leftrightarrow P = 0$ ou $P = K$. Segue que $f'(P) = r(1 - 2P/K)$, e então $f'(0) = r$ e $f'(K) = -r$. Como por hipótese $r > 0$, verificamos pelo Teorema 2.6 que $P^* = 0$ é um ponto de equilíbrio instável e $P^* = K$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Fato interessante sobre este modelo é que $K/2$ é um ponto de inflexão das soluções. Assim, se um conjunto de dados se assemelha a um crescimento logístico, ele deve possuir essa característica. Caso contrário, outros modelos devem ser utilizados na modelagem do fenômeno em estudo, como por exemplo, o modelo a seguir.

3.2 Modelo de Montroll

Com características muito semelhantes ao modelo de Verhulst, o modelo de Montroll proposto em 1971 considera, assim como o anterior, a taxa de crescimento populacional

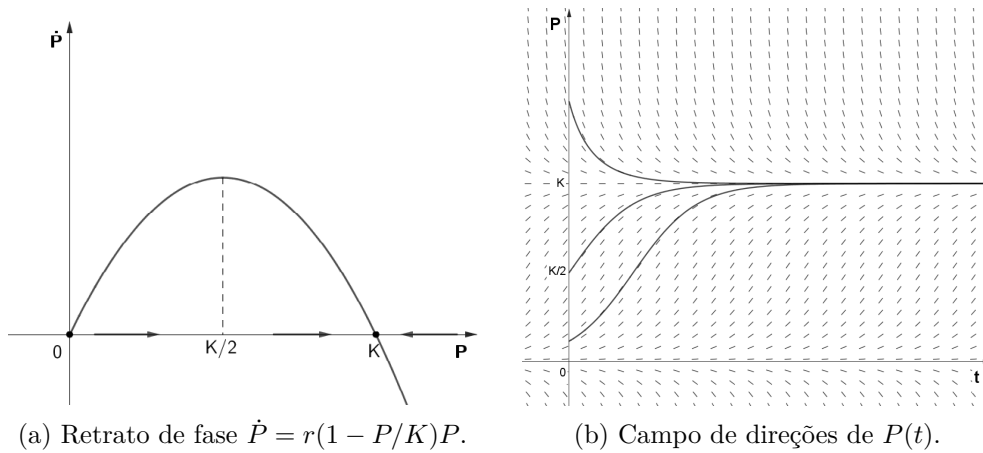


Figura 1.2: Modelo de Verhulst para $r = 0,04$ e $K = 300$.

decrecente em relação ao tamanho da população, porém não necessariamente linear como no modelo logístico. A equação diferencial não linear que o representa é

$$\dot{P} = rP \left(1 - \left(\frac{P}{K}\right)^\alpha\right), \quad (3.3)$$

onde $r > 0$ e $\alpha > 0$ são constantes que compõem restrições na taxa de crescimento e $K > 0$ representa a capacidade suporte do meio. Observe que, para $\alpha = 1$ a equação é idêntica ao modelo de Verhulst. No entanto, com alterações do valor de α o decrescimento da taxa se torna não linear e observa-se comportamentos muito distintos, como podem ser vistos na Figura 1.3. Os pontos de equilíbrio dessa equação também são $P^* = 0$ e $P^* = K$

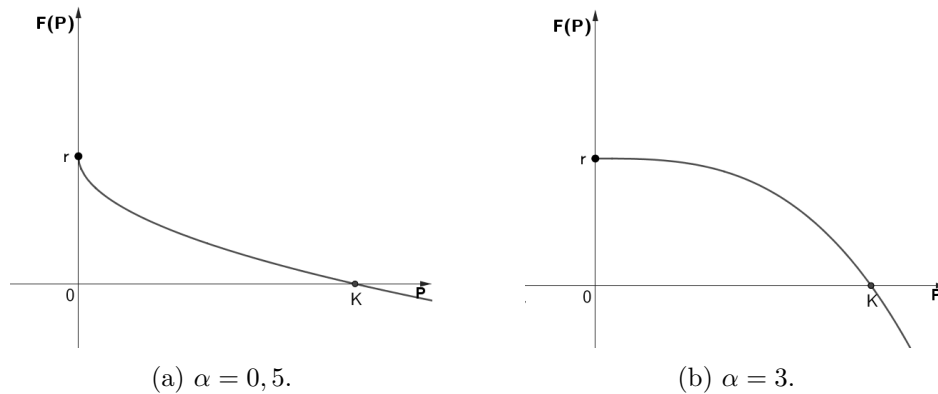


Figura 1.3: Taxa de crescimento $F(P) = r(1 - (P/K)^\alpha)$ do modelo de Montroll.

independente dos valores de α tomados. Utilizando o Teorema 2.6, como neste modelo temos $f(P) = rP(1 - (P/K)^\alpha)$ obtemos $f'(P) = r(1 - ((\alpha + 1)P^\alpha)/K^\alpha)$. Assim, $f'(0) = r > 0$ e $f'(K) = -r\alpha < 0$, mostrando que $P^* = 0$ é um ponto de equilíbrio instável e $P^* = K$ é assintoticamente estável. Analisando o sinal de

$$\frac{d^2P}{dt^2} = r \frac{dP}{dt} \left(1 - (\alpha + 1) \left(\frac{P}{K}\right)^\alpha\right)$$

obtivemos $P_i = \frac{K}{(\alpha + 1)^{1/\alpha}}$ como ponto de inflexão, que depende do parâmetro α . Esta possibilidade em posicionar o ponto de inflexão da curva de solução é o grande diferencial do

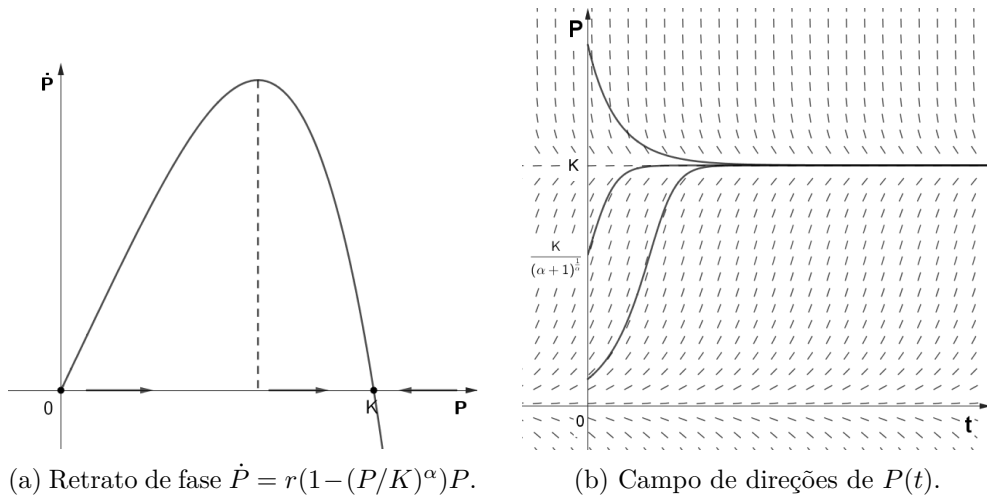


Figura 1.4: Modelo de Montroll para $r = 0,04$, $K = 300$ e $\alpha = 3$.

modelo de Montroll sobre o de Verhulst, já que o torna muito mais flexível para aproximar uma curva em um determinado conjunto de dados.

3.3 Modelo de Smith

Diferenciando-se dos anteriores mas ainda considerando a existência de uma capacidade suporte K do meio, o modelo de Smith é dado pela equação diferencial não linear

$$\dot{P} = \frac{rP(K - P)}{(K + aP)}, \quad (3.4)$$

onde $r > 0$ e $a > 0$ são parâmetros constantes que modelam inibições no crescimento da população. Como pode ser visto na Figura 1.5, a taxa de crescimento populacional deste modelo tem um comportamento um pouco distinto dos outros já apresentados, sempre considerando um maior crescimento no início e que desacelera mais rapidamente. Vale destacar que, se $a = 0$, o modelo de Smith corresponde ao de Verhulst.

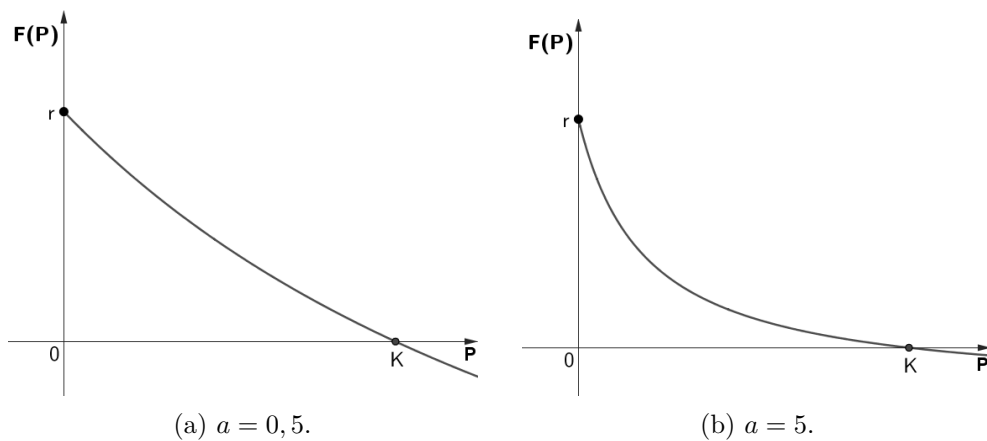


Figura 1.5: Taxa de crescimento $F(P) = \frac{r(K - P)}{(K + aP)}$ do modelo de Smith.

Efetuada a identificação dos pontos de equilíbrio do modelo, encontramos $P^* = 0$ e $P^* = K$, assim como nos anteriores. Analisando os pontos de equilíbrio quanto à estabilidade, temos

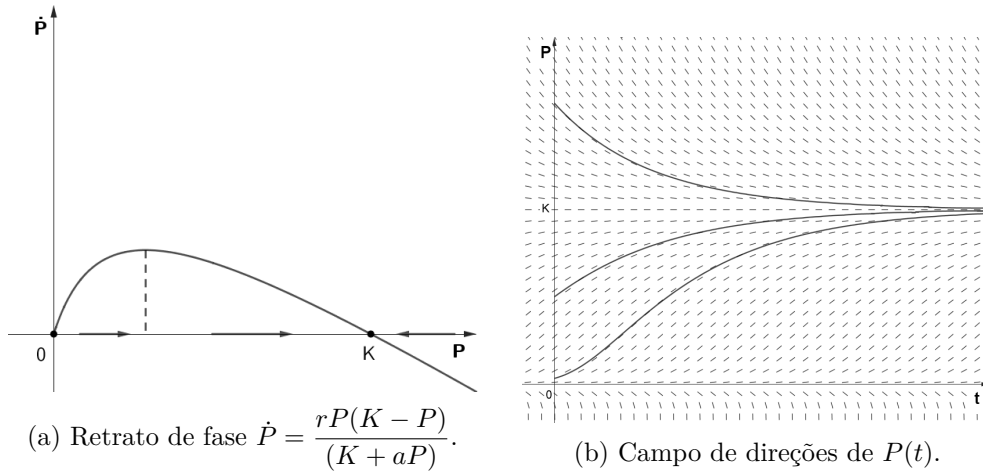


Figura 1.6: Modelo de Smith para $r = 0,04$, $K = 300$ e $a = 5$.

$f(P) = \frac{rP(K-P)}{(K+aP)}$ e portanto, $f'(P) = \frac{r(K^2 - 2KP - aP^2)}{(K+aP)^2}$, implicando que $f'(0) = r > 0$ e $f'(K) = \frac{-r}{a+1} < 0$. Assim, o ponto de equilíbrio $P^* = 0$ é instável e o ponto de equilíbrio $P^* = K$ é assintoticamente estável.

Analisando a equação

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{r \frac{dP}{dt} (-aP^2 - 2KP + K^2)}{(K+aP)^2}$$

obtemos que se $a \neq 0$, o ponto de inflexão da solução $P(t)$ do modelo de Smith é $P_i = \frac{K(-1 + \sqrt{1+a})}{a}$. Se $a = 0$, obtemos $P_i = \frac{K}{2}$, como já era esperado.

3.4 Modelo de Gompertz

Proposto em 1825 pelo inglês Benjamin Gompertz este modelo considera o fator inibidor da taxa de crescimento populacional proporcional ao logaritmo da razão da capacidade suporte pela população. A equação diferencial que o descreve é dada por

$$\dot{P} = rP \ln \left(\frac{K}{P} \right), \quad (3.5)$$

onde $r > 0$ e $K > 0$. Bastante utilizado na modelagem de crescimento de tumores cancerígenos, em algumas referências ele é apresentado na forma $\dot{P} = -aNr \ln bN$, onde $a > 0$ e $b > 0$ e $N(t)$ é proporcional ao número de células tumorais [2].

Observando a Figura 1.7 podemos notar que, similar ao que ocorre no modelo de Smith, a taxa de crescimento decresce muito rapidamente para populações pequenas, porém quando o tamanho da população está próximo da capacidade suporte, a taxa de crescimento desacelera fortemente. Vale destacar que uma grande distinção entre estes dois modelos é a não existência de interseção da função taxa de crescimento com o eixo vertical, uma vez que $F(P) = r \ln(K/P)$ não está definida em $P = 0$.

O ponto de equilíbrio do modelo de Gompertz é $P^* = K$, que é assintoticamente estável, como é ilustrado na Figura 1.8 a seguir. Podemos verificar que $P_i = \frac{K}{e}$ é o ponto de inflexão da solução $P(t)$ do modelo de Gompertz. Em outros termos, para uma capacidade suporte

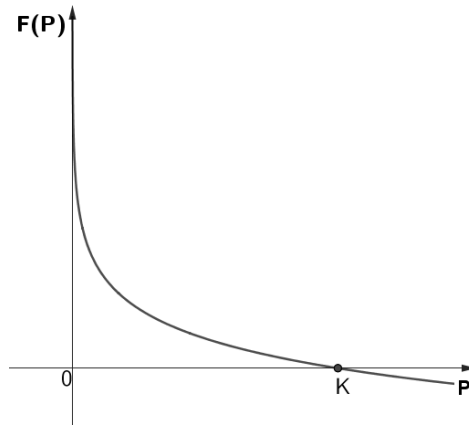
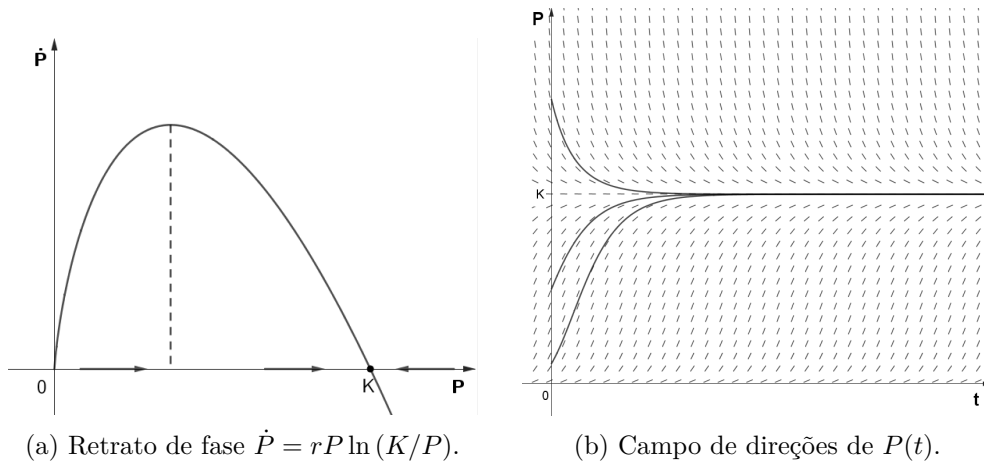


Figura 1.7: Taxa de crescimento $F(P) = r \ln(K/P)$ do modelo de Gompertz.



(a) Retrato de fase $\dot{P} = rP \ln(K/P)$.

(b) Campo de direções de $P(t)$.

Figura 1.8: Modelo de Gompertz para $r = 0,04$ e $K = 300$.

K , o valor do ponto de inflexão é dado por $\frac{K}{e}$, ou seja, é um valor menor do que para o modelo de Verhulst.

3.5 Efeito Allee

Segundo [5], “O efeito Allee é descrito como forte quando há um limiar de densidade, onde a taxa de crescimento per capita torna-se nula e abaixo da qual a população decresce e se extingue. Por outro lado, o efeito Allee é descrito como fraco quando a taxa de crescimento populacional é desacelerada para pequenas densidades, mas não a ponto de se tornar negativa.” Para analisar um pouco sobre este efeito, analisaremos um modelo de crescimento populacional proposto em [2] e descrito pela equação

$$\dot{P} = rP - aP(P - b)^2, \text{ onde } P > 0. \quad (3.6)$$

Os pontos de equilíbrio são obtidos fazendo $dP/dt = 0$, ou seja, $rP - aP(P - b)^2 = 0$. Assim, obtemos $P = 0$ ou $aP^2 - 2abP + ab^2 - r = 0$ e portanto, os pontos de equilíbrio são $P^* = 0$, $P^* = b + \frac{\sqrt{ar}}{a}$ e $P^* = b - \frac{\sqrt{ar}}{a}$, mostrando que há necessidade de os parâmetros r e a serem positivos e não nulos. Se $|b| < \frac{\sqrt{ar}}{a}$ temos que a equação possuirá apenas dois pontos de equilíbrio válidos no contexto de dinâmica populacional, a saber $P^* = 0$ e $P^* = b + \frac{\sqrt{ar}}{a}$,

o mesmo ocorrendo quando $b = \frac{\sqrt{ar}}{a}$. Porém, se $b > \frac{\sqrt{ar}}{a}$ haverá três pontos de equilíbrio válidos, sendo eles $P^* = 0$, $P^* = b + \frac{\sqrt{ar}}{a}$ e $P^* = b - \frac{\sqrt{ar}}{a}$.

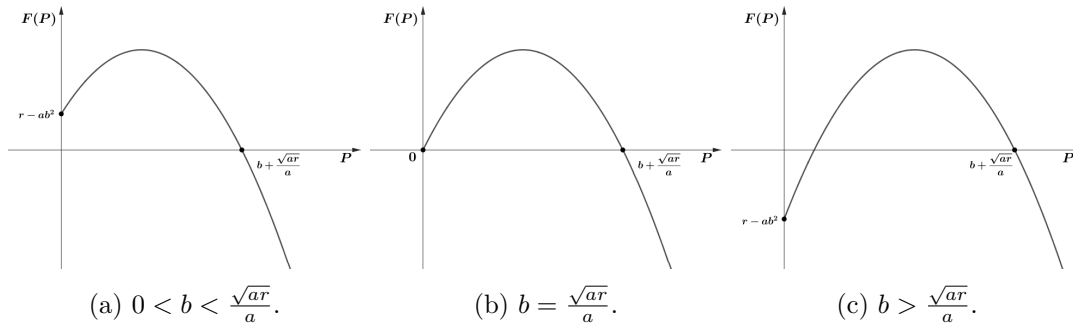


Figura 1.9: Taxa de crescimento $F(P) = r - a(P - b)^2$ do modelo.

Diferentemente dos outros modelos de dinâmica populacional vistos, este possui uma função taxa de crescimento $f(P)$ bem distinta quando $b > 0$, como pode ser visto na Figura 1.9. Em especial podemos notar que a taxa possui o pico de crescimento que não necessariamente em populações pequenas apenas, como eram nos outros. Aqui a taxa tem um aumento até certo tamanho de população e só posteriormente começa a diminuir. Vale ressaltar que quando $b > \frac{\sqrt{ar}}{a}$ a taxa de crescimento para uma população pequena é negativa, o que indica, portanto, que tal população só irá se sustentar se estiver um tamanho razoável.

Como $f(P) = rP - aP(P - b)^2$ temos $f'(P) = r - 3aP^2 + 4abP - ab^2$. Então, pela análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio, considerando $-\frac{\sqrt{ar}}{a} < b \leq \frac{\sqrt{ar}}{a}$, teremos que $f'(0) = r - ab^2 > 0$ e $f'(b + \frac{\sqrt{ar}}{a}) = -2(r + b\sqrt{ar}) < 0$ e, portanto, $P^* = 0$ é instável e $P^* = b + \frac{\sqrt{ar}}{a}$ é assintoticamente estável. Já considerando $b > \frac{\sqrt{ar}}{a}$ vão existir três pontos de equilíbrio e teremos $f'(0) = r - ab^2 < 0$, $f'(b + \frac{\sqrt{ar}}{a}) = -2(r + b\sqrt{ar}) < 0$ e $f'(b - \frac{\sqrt{ar}}{a}) = -2(r - b\sqrt{ar}) > 0$ e assim, $P^* = b + \frac{\sqrt{ar}}{a}$ e $P^* = 0$ serão assintoticamente estáveis e $P^* = b - \frac{\sqrt{ar}}{a}$ será instável (veja Figuras 1.10 e 1.11).

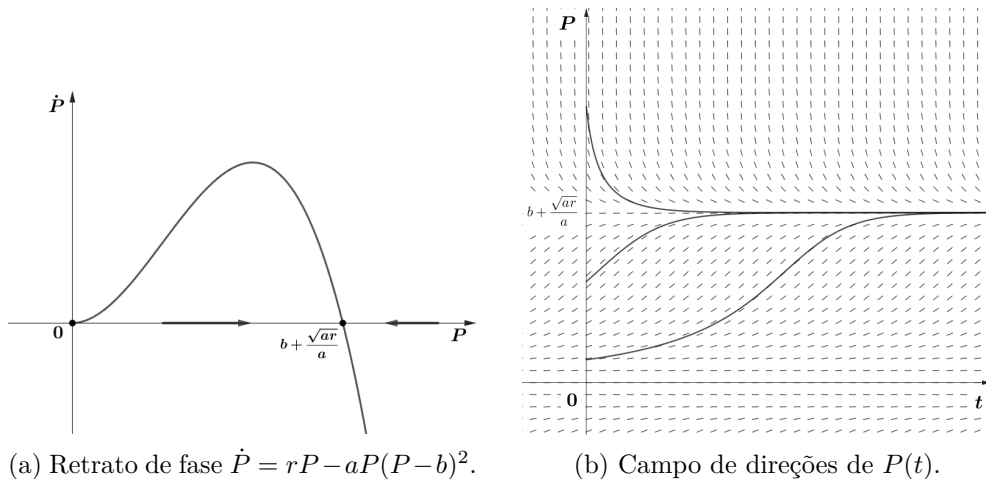


Figura 1.10: Modelo $\dot{P} = rP - aP(P - b)^2$ para $-\frac{\sqrt{ar}}{a} < b \leq \frac{\sqrt{ar}}{a}$.

A respeito dos pontos de inflexão do modelo com Efeito Allee, podemos obtê-los analisando

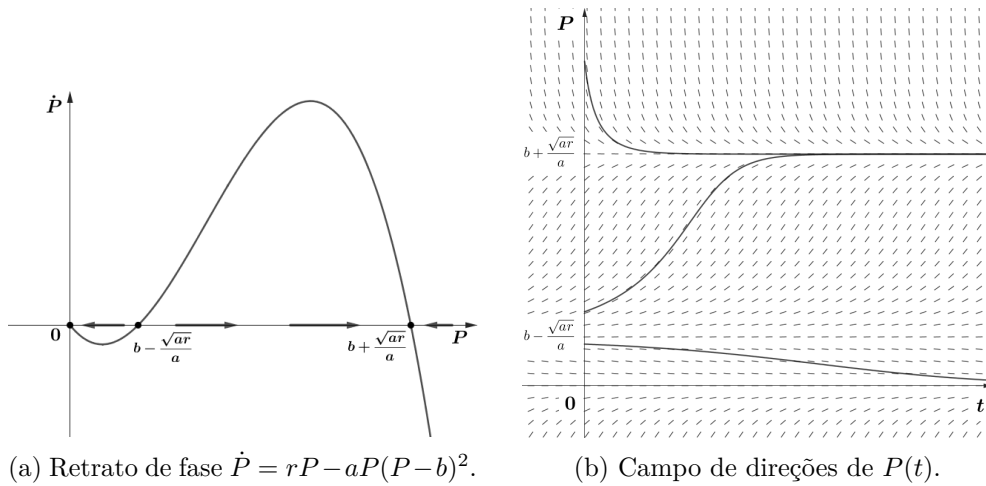


Figura 1.11: Modelo $\dot{P} = rP - aP(P-b)^2$ para $b > \frac{\sqrt{ar}}{a}$.

a equação $\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{dP}{dt}(-3aP^2 + 4abP - ab^2 + r)$, obtendo que os mesmos são dados por

$$P = \frac{2b}{3} \pm \frac{\sqrt{a^2b^2 + 3ar}}{3}.$$

4 Considerações Finais

Podemos observar nos modelos apresentados um pouco sobre a evolução dos modelos de dinâmica populacional unidimensionais. Os pontos de equilíbrio desses modelos são $P^* = 0$ e $P^* = K$ (com exceção do modelo de Gompertz) mas o que os difere são as taxas de crescimento populacional e consequentemente, o ponto de inflexão das soluções. A escolha do modelo a ser utilizado para aproximar um conjunto de dados populacionais depende de uma análise cuidadosa dos dados do fenômeno em estudo, como por exemplo, a taxa de crescimento.

A incorporação de outros fatores que influenciam na dinâmica de uma população, como por exemplo o modelo dado pela equação (3.6), nos leva à existência de pontos de equilíbrio que dependem dos parâmetros envolvidos, ou seja, alguns só existem conforme o valor dos parâmetros. Outros dois modelos de dinâmica populacional, bastante conhecidos como modelos de pesca, são os modelos de Ricker e Beverton-Holt, descritos pelas equações (4.1) e (4.2), respectivamente.

$$\dot{P} = rPe^{-\beta P} \quad (4.1)$$

$$\dot{P} = \frac{rP}{\alpha + P} \quad (4.2)$$

onde os parâmetros r , α e β são positivos. Um pouco mais sobre esses modelos pode ser encontrado em [3].

Agradecimentos: Agradeço à minha orientadora, Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira, pelo sabedoria e paciência durante a realização deste trabalho e à FAPESP pelo apoio financeiro.

Abstract: The study of dynamic systems is of fundamental importance as they describe phenomena that involve variations over time. Thus, their behavior can be varied, from biased towards a state of equilibrium, cyclical or even something more complex. To understand them qualitatively, the neighborhood of the phenomenon

around certain points is analyzed. In this work, some mathematical models of Population Dynamics, described by ordinary differential equations, were qualitatively analyzed regarding their growth rates, characteristics and general behaviors.

Keywords: ordinary differential equations; population dynamics; stability; mathematical models

Referências Bibliográficas

- [1] Hale, J. *Dynamics and Bifurcations*. New York Inc., Springer-Verlag, 1991.
- [2] Strogatz, S.H. *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Books, 1994.
- [3] Edelstein-Keshet, Leah. *Mathematical Models in Biology*. Random House/New York, 1988.
- [4] Murray, J.D. *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, 1993.
- [5] Rocha, J.L. *Stability analysis of Gompertz's logistic growth equation under strong, weak and no Allee effects*. WSEAS Transactions on Mathematics, vol. 15, 2016.
- [6] Boyce, W.E; Diprima, R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, Rio de Janeiro, Brasil, 2010.

The Practical Study of Differential Equations with Impulses

Arthur Medeiros Barros[†]

Orientador(a): Prof. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: O estudo atual demonstra a influência significativa dos impulsos nas Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), usando exemplos práticos como os modelos Kruger-Thiemer e Logístico. Dessa forma, tornou-se evidente a modificação notável no comportamento das soluções das EDOs com Impulsos em comparação com as EDOs clássicas. Apresentamos teoremas e propriedades específicas definidas para servir como base para abordar esse novo conceito. Portanto, este estudo destaca a crescente importância de investigar e aprofundar a teoria das Equações Diferenciais Impulsivas (EDIs), com o potencial de enriquecer a compreensão sobre a dinâmica de sistemas complexos e suas aplicações.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias; Solução Impulsiva; Exemplo Prático

Abstract: The current study shows the significant influence of impulses on Ordinary Differential Equations (ODEs), using practical examples such as the Kruger-Thiemer and the logistic models. In this way, it became evident the noteworthy modification in the behaviour of solutions of Ordinary Differential Equations with Impulses in comparison to classical ODEs. We present defined specific Theorems and Properties to serve as a foundation for addressing this new concept. Therefore, this study highlights the increasing importance of investigating and deepening the theory of Impulsive Differential Equations (IDEs), with potential to enrich understanding about the dynamics of complex systems and their applications.

Keywords: Ordinary Differential Equations; Impulsive Solution; Practical Example.

1 Prior Contextualization

In an initial examination, Ordinary Differential Equations with Impulses can be regarded as an extension of conventional ordinary differential equations. In this regard, they provide a more precise description of specific natural phenomena that cannot be adequately encapsulated by classical differential equations. These equations exhibit particular prowess in elucidating the dynamics of systems undergoing abrupt changes or “impulses” at discrete moments in time. These impulses can occur discretely and may represent events. In this context, the impulse is conceived as an intermittent occurrence over time, akin to periodic medication intake.

Furthermore, Ordinary Differential Equations with Impulses find applications across various domains of knowledge, encompassing physics, biology, engineering, and economics. Indeed, it is of paramount significance to investigate situations wherein sudden and unforeseen events exert a profound influence on the behaviour of these equations.

Considering that this is a relatively nascent concept, it becomes imperative to establish precise definitions and scrutinize properties that ensure the existence and uniqueness of solutions for these equations. To this end, we shall underscore a series of Theorems and Properties that shall serve as a guide for purpose in this work.

[†]FAPESP: 2022/07899-8.

2 Previous Knowledge

Before delving into the mathematical formulations and solution methods, it is crucial to establish a solid foundation of prior concepts. We will explore the fundamental concepts of IDEs, their properties, and characteristics that are distinct compared to classical ODEs. These parts are grounded in the reference sources [5] and [6].

Observação 2.1. The space normed is a vectorial space (\mathbb{R} or \mathbb{C}) equipped with a norm.

Definição 2.2. If X is a normed space, then X is a metric space, where the metric is given by $d(x, y) = \|x - y\|$. Moreover, a metric space is said to be complete if every Cauchy sequence converges in X .

Definição 2.3. A normed space X is called a Banach space if every Cauchy sequence in X converges in X .

Proposição 2.4. *Every closed subspace of a Banach space is Banach. Conversely, every Banach subspace of a normed space is closed.*

3 Differential Equations with Impulses

Consider the following differential equation, with x as the dependent variable and t as the independent variable:

$$x' = f(t, x), \quad (3.1)$$

where $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is an open set.

Consider sets $M(t), N(t) \subset \Omega$ for all $t \in \mathbb{R}_+$, and operators $A(t) : M(t) \rightarrow N(t)$ for all $t \in \mathbb{R}_+$. An impulse problem consists of (3.1) and a condition:

If $x(t) \in M(t)$, then $x(t^+) \in N(t)$, with $x(t^+) = A(t)x(t)$. Consequently, let $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ be any solution of (3.1) starting at $P_{t_0} = (t_0, x_0)$ and evolving its behaviour to the point $P_t = (t, x(t))$ along the curve $\{(t, x) : t \geq t_0, x = x(t)\}$ until time $t_1 > t_0$ when point P_{t_1} intersects the function $M(t)$.

From the moment $t = t_1$, the operator $A(t)$ transfers the point $P_{t_1} = (t_1, x(t_1))$ to the point $P_{t_1^+} = (t_1, x_1^+) \in N(t_1)$, where $x_1^+ = A(t_1)x(t_1)$. Then, point P_t continues to move further along the curve with $x(t) = x(t, t_1, x_1)$, also a solution of (3.1). In this way, this process, as exemplified above, repeats as long as the solution of (3.1) exists. We emphasize that the integral curve is described by the point P_t , and the function that defines this curve is a solution of this system. In this way, we illustrate an arbitrary example of what was described above. Let's consider:

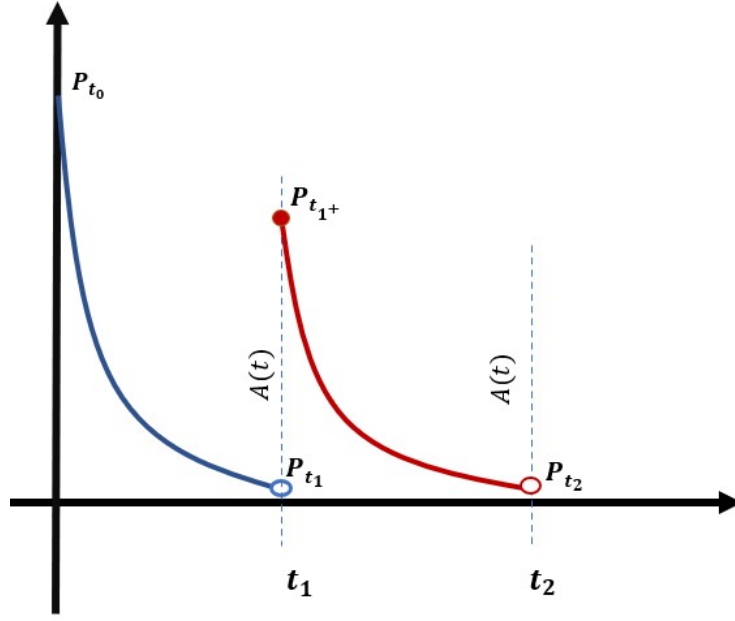


Figura 2.1: Representation of a solution (by the authors)

The solution of an impulsive differential system can satisfy one of the following three forms:

- A continuous function, if the integral curve does not intersect the set $M(t)$ or the fixed point of the operator $A(t)$.
- A continuous function with a finite number of first-kind discontinuities if the integral curve intersects the set $M(t)$ at a finite number of points that are not fixed points of the operator $A(t)$.
- A continuous function with countably many first-kind discontinuities if the integral curve intersects the set $M(t)$ at a countable number of points that are not fixed points of the operator $A(t)$.

A point $x = a$ of discontinuity of a function f is said to be of the first kind if the left-hand limit of $f(x)$ and right-hand limit of $f(x)$ exists.

At this point, we will mention two categories of impulses, but we will focus only on the type: Systems with Impulses at Fixed-Time. If you're interested, please refer to [4] and [7].

3.1 Systems with Impulses at Fixed Time

Consider the set $M(t)$, where $t = t_k$, and $\{t_k\}$ is a sequence of times such that $t_k \rightarrow \infty$ as $k \rightarrow \infty$. Now, we define the operator $A(t)$ for $t = t_k$, only when we have a sequence of operators $\{A(k)\}$, defined as:

$$A(k) : \Omega \rightarrow \Omega, \quad A(k)x = x + I_k(x).$$

Here, $I_k : \Omega \rightarrow \Omega$. The set $N(t)$ is defined for $t = t_k$, given by $N(k) = A(k)M(k)$.

With this choice of $M(t)$, $N(t)$, and $A(t)$, a mathematical model of a simple impulsive differential system with fixed-time impulses can be represented by:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots \\ \Delta x(t) = I_k(x), & t = t_k, \end{cases}$$

where $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k)$, and $x(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} x(t_k)$. x is a left-continuous function. We will see some examples later.

3.2 Systems with Impulses at variable Time

Let $\{S_k\}$ be a sequence of surfaces given by $S_k : t = \tau_k(x)$, where $k = 1, 2, \dots$, such that $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k(x) = \infty$. Following the system below:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \neq \tau_k(x), \\ \Delta x(t) = I_k(x), & t = \tau_k(x), \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.2)$$

This type of system presents more complex challenges compared to the previous scenario. A clear example is the system mentioned above, which is inherently dependent on the solution, i.e., $t_k = \tau_k(x(t))$ for each value of k . As a result, the solution trajectory originates from various initial points, resulting in different discontinuity points over time. Additionally, it's possible for a solution to reach the same surface at different times, defined with $t = \tau_k(x)$ giving rise to what can be called as a “pulse phenomenon”.

3.3 Existence and Uniqueness of Solutions for Impulsive

We commence our inquiry with the fundamental results of existence and uniqueness of solutions for Impulsive Initial Value Problems (PIVIPs). This is a pivotal point to establish a solid foundation for comprehending the dynamic behaviour of these intricate systems while simultaneously capturing the peculiarities of impulsive changes.

Let us consider the following problem:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \neq \tau_k(x), \\ \Delta x(t) = I_k(x), & t = \tau_k(x), \quad k = 1, 2, \dots \\ x(t_0^+) = x_0, t \leq 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

where $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ is piecewise continuous with first-kind discontinuities at $t = \tau_k$, and $I_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Here, $D \subset \mathbb{R}_+$ is an open set, and Ω is a subset of $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.

Definição 3.1. A point (t, x) is referred to as a regular point if $t \neq \tau_k(x)$ for all $k \geq 1$. Otherwise, it is termed an irregular point.

Teorema 3.2. Suppose that:

- i $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ is continuous for $t \neq \tau_k(x)$, and for each $(t, x) \in D$, there exists a function $l \in L_{loc}^1$ such that in a small neighbourhood of (t, x) , $|f(s, y)| \leq l(s)$.
- ii For any k , if $t_1 = \tau_k(x_1)$, there exists a value $\delta > 0$ such that $t \neq \tau_k(x)$ for all $0 < t - t_1 < \delta$ and $|x - x_1| < \delta$.

Then, for each $(t_0, x_0) \in D$, there exists a solution $x : [t_0, t_0 + \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$ for some $\alpha > 0$.

Prova: If t_0 is a regular point, then $x(t)$ is a solution of the ordinary differential equation (without impulses), and the result is guaranteed by the Theorem Existence and Uniqueness local for ODE. Now, if the point is irregular for some $k \geq 1$, let's consider the following scenario:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x), \\ x(t_0^+) = x_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Assuming the hypotheses (i) and (ii), we can assert that for $t_0 = \tau_k$, there exists a $\delta > 0$ such that $t \neq \tau_k(x)$ for each (t, x) satisfying $0 < t - t_0 < \delta$ and $|x - x_0| < \delta$. This ensures that the solution avoids encountering the surface S_k within a sufficiently small interval.

Given that $\tau_i(x) < \tau_j(x)$ for $i < j$, it follows that $t \neq \tau_j(x(t))$ for $j \neq k$ when t is close to t_0 . Consequently, there exists a solution within the interval $[t_0, t_0 + \alpha)$ for some $\alpha > 0$. ■

Teorema 3.3. *Assume that:*

- i. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ is continuous.
- ii. $\tau_k : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ is differentiable, for all $k = 1, 2, \dots$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
- iii. If $t_1 = \tau_k(x_1)$ for some $(t_1, x_1) \in D$ and $k \geq 1$, then there is a $\delta > 0$ such that:

$$\frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} \cdot f(t, x) \neq 1,$$

for $(t, x) \in D$ such that $|x - x_1| < \delta$ and $0 < t - t_1 < \delta$. Therefore, for each $(t_0, x_0) \in D$, there exists a solution of (3.4) $x : [t_0, t_0 + \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$ for some $\alpha > 0$.

Prova: If $t_0 \neq \tau_k(x_0)$, the result follows from the proof of the previous theorem (3.1). Now, if $t_0 = \tau_k(x_0)$ for some $k \geq 1$ and $x(t)$ is a solution of the system:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x), \\ x(t_0^+) = x_0. \end{cases}$$

We define $\gamma(t) = t - \tau_k(x(t))$. Then, $\gamma(t_0) = t_0 - \tau_k(x(t_0)) = t_0 - \tau_k(x_0) = t_0 - t_0 = 0$. Differentiating $\gamma(t)$ using (ii):

$$\gamma'(t) = 1 - \frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} = 1 - \frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}.$$

By condition (iii), in a neighbourhood around t_0 , $\gamma' \neq 0$. Thus, $\gamma(t)$ is strictly increasing or decreasing in this neighbourhood, implying that $t \neq \tau_k(x(t))$ for $0 < t - t_0 < \delta$, for some $\delta > 0$. As shown in the proof of the previous theorem, $t \neq \tau_j(x(t))$ for $j \neq k$ when t is sufficiently close to t_0 . Therefore, $x(t)$ is a local solution of the problem. ■

Teorema 3.4. *Suppose $\Omega = \mathbb{R}^n$ and also:*

- 1. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ is continuous.
- 2. $I_k \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\tau_k \in C(\Omega, (0, \infty))$, for $k \geq 1$.

Then, for any solution $x(t)$ of the system, with a bounded interval $[t_0, b)$ as the maximal interval of existence, we have:

$$\lim_{t \rightarrow b^-} |x(t)| = \infty,$$

provided that one of the following conditions is satisfied:

- 1. For any $k \geq 1$, if $t_1 = \tau_k(x_1)$, there exists a value $\delta > 0$ such that $t \neq \tau_k(x)$ for all (t, x) with $0 < t - t_1 < \delta$ and $|x - x_1| < \delta$.
- 2. For all $k \geq 1$, if $t_1 = \tau_k(x_1)$, then $t_1 \neq \tau_j(x_1 + I_k(x_1))$ for all $j \geq 1$.

3. $\tau_k \in C^1(\Omega, (0, \infty))$ for all $k \geq 1$, and if $t_1 = \tau_k(x_1)$, then $t_1 = \tau_j(x_1 + I_k(x_1))$ for some $j \geq 1$, and:

$$\frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} \cdot f(t, x_1) \neq 1,$$

where $x_1 + I_k(x_1) = x_1^+$.

A proof of this result can be found in [3].

4 Practical Examples

In this section, our aim is to address the solution and provide several examples of Ordinary Differential Equations with fixed-time impulses. In addition, to complement the theoretical analysis, we will employ graphical representations to visualize the dynamics of the solutions. This graphical approach will provide insight into the abrupt changes caused by the impulses, enabling a clearer understanding of the trajectories and trends over time.

As a complement to the above discussion, the trajectories of the solutions are modified with each jump, due to the new initial conditions established at each irregular point. In brief, when examining a graph of a solution to an Ordinary Differential Equation (ODE), it's common to observe smooth curves that represent gradual changes over time or the domain of the independent variable.

On the other hand, in the context of Impulsive Differential Equations (IDEs), graphical solutions can reveal significantly different characteristics. Due to the impulsive nature of these equations, solutions might exhibit finite jumps at impulse points, causing discontinuities in the curve. This implies that the solution can remain continuous over intervals but display discontinuities at points where impulses occur, we will explore this further.

these examples are grounded in the reference sources [4] and [7].

Example 1: Consider the fixed-time impulse system below:

$$\begin{cases} x'(t) = 2 + t - x^2, & t \neq t_k, \\ \Delta x(t) = 1, & t = t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

In this case, the function $f(t, x) = 2 + t - x^2$, and by the Picard's Theorem, it's possible to ensure the existence and uniqueness of the solution to the non-impulsive problem for all $t \in \mathbb{R}$. The general solution of this non-impulsive equation is given by: $x(t) = 2t + ce^{-t^2}$, where $c \in \mathbb{R}$.

With the initial condition $x(0) = 2$, we have:

$$x(t) = 2t + 2e^{-t^2}.$$

Now, let's consider the impulsive system and determine the solution in an interval:

- For $t \in [0, 1]$, the solution matches the solution of the classic ODE, that is:

$$x(t) = 2t + 2e^{-t^2}.$$

- For $t = 1$, we have the first impulse:

$$x(1^+) = x(1) + \Delta x(1) = (2 + 2e^{-1^2}) + 1 \approx 4.20.$$

- For $t \in (1, 2]$, the solution is given considering a new initial condition $x(1^+) = 4.20$, that is:

$$x(t) = 2t + 4.20e^{-t^2}.$$

- For $t = 2$, there's the second impulse: $x(2^+) = x(2) + \Delta x(2) = (2 \cdot 2 + 2e^{-2^2}) + 1 \approx 5.70$.
- For $t \in (2, 3]$, the solution $x(t)$ is determined with the condition $x(2^+) = 5.70$, that is:

$$x(t) = 2t + 5.70e^{-t^2}.$$

One can continue this process to determine the solution curve in the interval $[0, t), t > 0$.

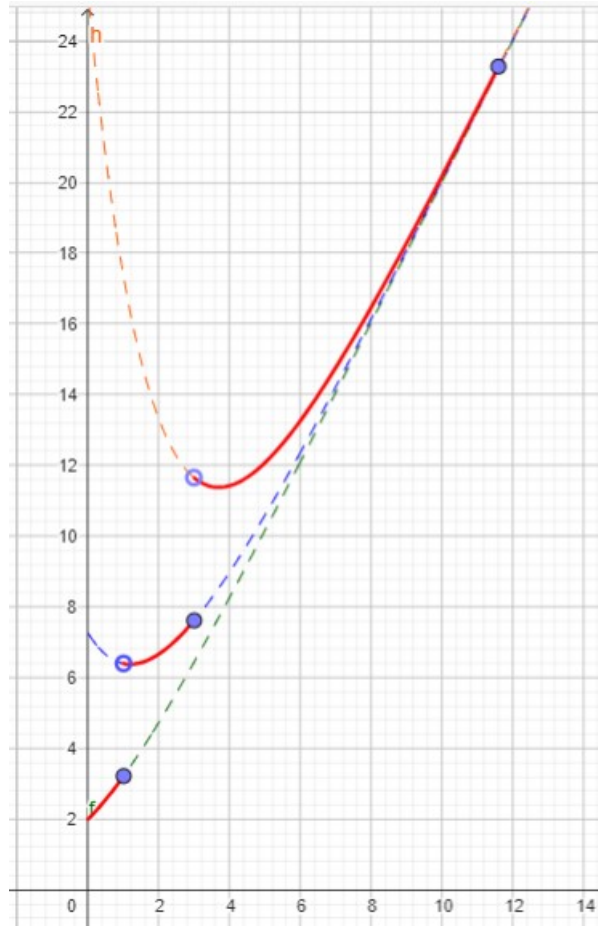


Figura 2.2: Impulsive solution- Geogebra.org

In this way, upon analysing solutions of Ordinary Differential Equations (ODEs) with impulses, we realize that the nature of these solutions goes beyond a simple smooth and continuous curve. Instead, these solutions exhibit behaviour that can be described as piecewise continuous. This means that the trajectory of the solution is smooth most of the time but undergoes abrupt changes at the moments when impulses occur.

4.1 Model Krüger-Thiemer Impulsive

The Krüger-Thiemer Model is based on pharmacokinetics and employs ordinary differential equations to mathematically describe the variation in the concentration of a drug in

the human body over time. These equations capture the rates of change in the substance's concentration in the different biological compartments considered in the model. To illustrate, let's consider the variables $x(t)$ and $y(t)$, which represent the amount of drug in the gastrointestinal tract.

In this manner, the model presents a mathematical approach to comprehending the pharmacokinetics of a drug, addressing its distribution and elimination in the human body. It finds wide application in pharmaceutical research and clinical practice, enabling the prediction of the effects of different doses and administration regimens on drug concentrations over time.

The constants k_a and k_{el} respectively represent the absorption and elimination constants of the drug. From the references [1] and [7], consider the following system:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k_a \cdot x \\ \frac{dy}{dt} = k_a \cdot x - k_{el} \cdot y \\ x(0) = q \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

From this, the first approach involves using impulses at predetermined times, as seen, with the following impulse:

$$\begin{cases} \Delta x = q, & t = 1, 2, \dots \\ \Delta y = 0. \end{cases}$$

The solution is provided in each time interval between the impulse moments. Considering the drug intake at the beginning of the impulsive problem ($t_0 = 0$), this is the first impulse moment with initial conditions $x(0^+) = q$ and $y(0^+) = 0$. If $t_0 < t \leq t_1$, the solution coincides with the ordinary solution, and we obtain:

$$y(t) = k_a \cdot q \cdot e^{-k_{el} \cdot t} \left(\frac{e^{(k_{el}-k_a)t}}{k_{el}-k_a} - \frac{1}{k_{el}-k_a} \right).$$

In this manner, we assume the following constants for a specific drug, cocaine: $k_a = 0.92$ and $k_{el} = 0.46$, and we will use $q = 1$ g. In this manner, we assume the following constants for a specific drug, cocaine: $k_a = 0.92$ and $k_{el} = 0.46$, and we will use $q = 1$ g, according to references [3] and [8].

- If $t_1 = 1$, the solution experiences a new impulse in such a way that:

$$x(1^+) = x(1) + \Delta x = 1 \cdot e^{(0.46+1)}.$$

$$y(1^+) = y(1) + \Delta y = y(t) = 0,92 \cdot e^{-0,46t} \left(\frac{e^{(0,46-0,92)t}}{0,46-0,92} - \frac{1}{0,46-0,92} \right).$$

- In the next segment, $t_1 < t \leq t_2$, the initial conditions to be used are $x(1^+)$, $y(1^+)$, and we obtain the following expression:

$$y(t) = 0,92 \cdot 1 \left(1 + e^{0,92} \right) e^{-0,46t} \left(\frac{e^{(0,46-0,92)t}}{0,46-0,92} - \frac{1 + e^{0,92}}{(0,46-0,92)(1 + e^{0,92})} \right).$$

- If $t_2 = 2$, the solution experiences a new impulse and we have:

$$x(2^+) = x(2) + \Delta x = 1 \cdot \left(e^{-2 \cdot 0,92} + e^{-0,92} + 1 \right).$$

$$y(2^+) = y(2) + \Delta y = 0,92 \cdot 1 \cdot (1 + e^{0,92}) \cdot e^{-2 \cdot 0,46} \cdot \left(\frac{e^{2(0,46-0,92)}}{0,46 - 0,92} \cdot \frac{1}{1 + e^{0,92}} \right)$$

• In the next segment, $t_2 < t \leq t_3$, the expression corresponding to the solution has initial conditions $x(2^+)$, $y(2^+)$, and is equivalent to:

$$y(t) = 0,92 \cdot 1 \cdot (1 + e^{0,92} + e^{2 \cdot 0,92}) \cdot e^{-0,46t} \cdot \left(\frac{e^{(0,46-0,92)t}}{0,46 - 0,92} - \frac{1 + e^{0,92} + e^{2 \cdot 0,92}}{(0,46 - 0,92) \cdot (1 + e^{0,92} + e^{2 \cdot 0,92})} \right).$$

The construction proceeds in the same manner for the impulse moments, see graphically:

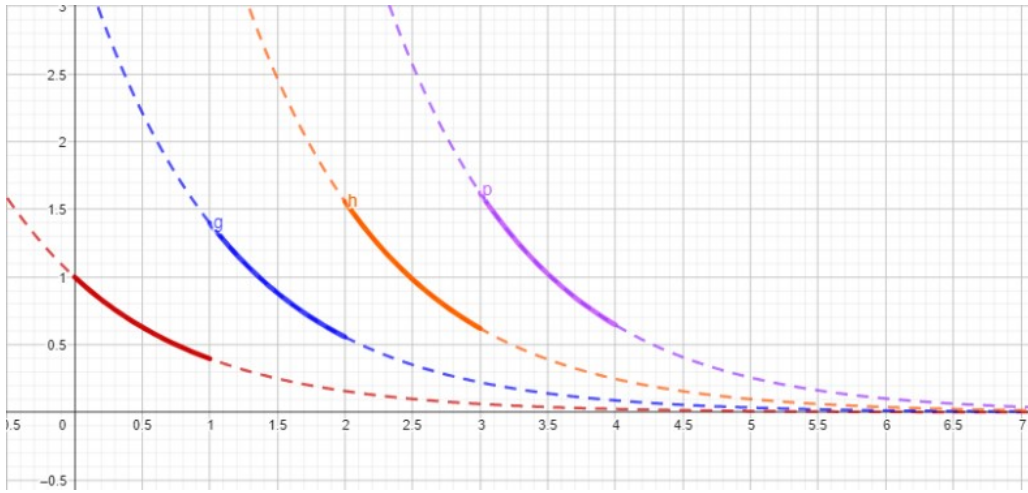


Figure 2.3: $x(t)$ represents the drug quantities at time t in the gastrointestinal environment.

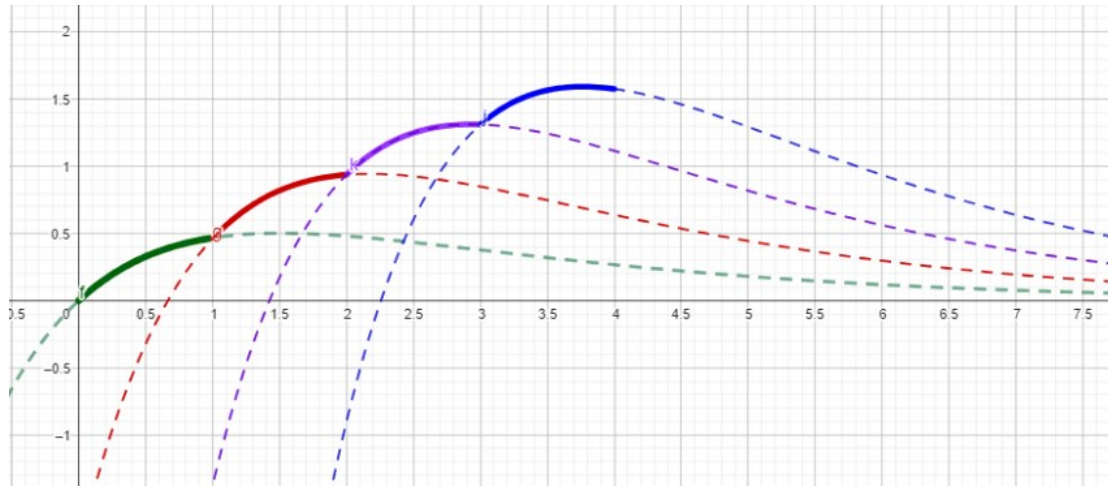


Figure 2.4: $y(t)$ represents the drug quantities at time t in the apparent volume of distribution.

In analysis, the component y changes at each discontinuity of x , due to the impulsive conditions established at each irregular point. Concisely, when we observe a graph representing the solution of an ordinary differential equation (ODE), it is more common to visualize smoothly flowing curves, indicating gradual changes over time or the domain of the independent variable.

On the other hand, in the context of impulsive differential equations (IDE), these discontinuities introduce punctual and sudden characteristics in the trajectories of solutions,

creating a distinct pattern of dynamic behaviour. This highlights the notable difference in nature between classical ODEs and IDEs, revealing the mathematical intricacies and practical implications that arise when considering first-kind discontinuities.

4.2 Verhulst Equation

Consider the Verhulst differential equation:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right)$$

where $r > 0$ is the growth rate (birth rate - death rate) and $K > 0$ is the carrying capacity of the environment.

Furthermore, we highlight an additional case that serves as curiosity, aimed at illustrating the changes induced by impulses in specific models. In this scenario, we focus our attention on the Logistic Model, which, in classical Ordinary Differential Equations (ODEs), exhibits solutions of a non-periodic nature. However, when we introduce impulses at specific moments, we observe a remarkable transformation: the constant presence of periodicity in the solutions. At first, let's see the case of the classical Ordinary Differential Equation:

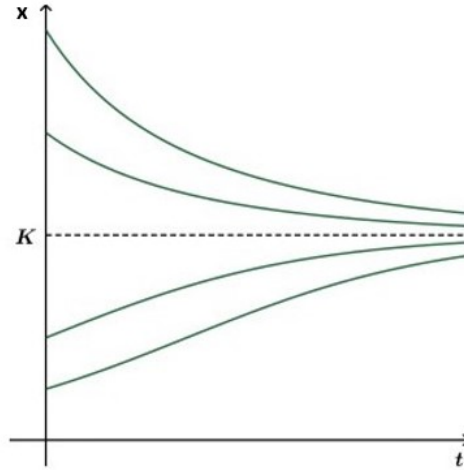


Figura 2.5: Classic ODE solution, by [10]

To illustrate the situation, let's consider $r = 1$, $K = 2$, and a result of the external effect, $x(t)$ receives an increment δ_k , such that:

$$\Delta x(t_k) = x(t_k) - x(t_k^-) = \delta_k$$

at specific instants t_k .

In this context, we can write:

$$\Delta x(t_k) = \delta_k, \quad t = t_k.$$

In this way, consider the system:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left(1 - \frac{x}{2} \right), \\ \Delta x = -\frac{1}{2}, \text{ for } x = \frac{3}{4}, \\ x(0) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

We have a general solution expressed,

$$x(t) = \frac{2 c_1 e^t}{2 + c_1 e^t}.$$

Notice that,

$$x(0) = \frac{1}{3} \implies c_1 = \frac{2}{5}.$$

Initially, the solution intervals are not predefined. However, we know that the jumps will occur when $x(t) = \frac{3}{4}$. This way, the first jump moment occurs when:

$$x(T) = \frac{3}{4} \implies \frac{2 \frac{2}{5} e^T}{2 + \frac{2}{5} e^T} = \frac{3}{4} \implies T = \ln 3.$$

In this case, we verify that the solution will have impulse points at a determined frequency (T).

$$T = a \cdot \ln 3, \quad a \in \mathbb{N}$$

- If $t \in [0, \ln 3]$, the solution with the initial condition $x(0) = \frac{1}{3}$ is given by:

$$x(t) = \frac{2}{1 + 5e^{-t}}$$

- When $t = \ln 3$, we have:

$$x(\ln 3^+) = x(\ln 3) + \Delta x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- In the next interval, the problem will have the initial condition $x(\ln 3^+) = \frac{1}{4}$. Thus, for $t \in (\ln 3, 2 \ln 3)$. And notice that we will proceed to construct solutions by interval:

$$x(t) = \frac{2}{1 + 21e^{-t}} = \frac{2}{1 + 7 \cdot 3 \cdot e^{-t}} = \frac{2}{1 + 7 \cdot e^{\ln 3} \cdot e^{-t}} = \frac{2}{1 + 7 \cdot e^{-(t - \ln 3)}}.$$

- When $t = 2 \ln 3$, we have the same result, because of its periodicity:

$$x(2 \ln 3^+) = \frac{1}{4}$$

- The problem will have the initial condition $x(\ln 3^+) = \frac{1}{4}$. For $t \in (2 \ln 3, 3 \ln 3)$,

$$x(t) = \frac{2}{1 + 63e^{-t}} = \frac{2}{1 + 7 \cdot 9 \cdot e^{-t}} = \frac{2}{1 + 7 \cdot e^{\ln 3^2} \cdot e^{-t}} = \frac{2}{1 + 7 \cdot e^{-(t - 2 \ln 3)}}.$$

We construct the solution $x(t)$ over the entire interval $[0, \infty)$. We can express the solution as follows,

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2}{1 + 5e^{-t}}, & 0 < t \leq \ln 3 \\ \frac{2}{1 + 7e^{-(t - a \ln 3)}}, & a \ln 3 < t \leq (a + 1) \ln 3, \quad a \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Next, we have the graph of the impulsive solution:

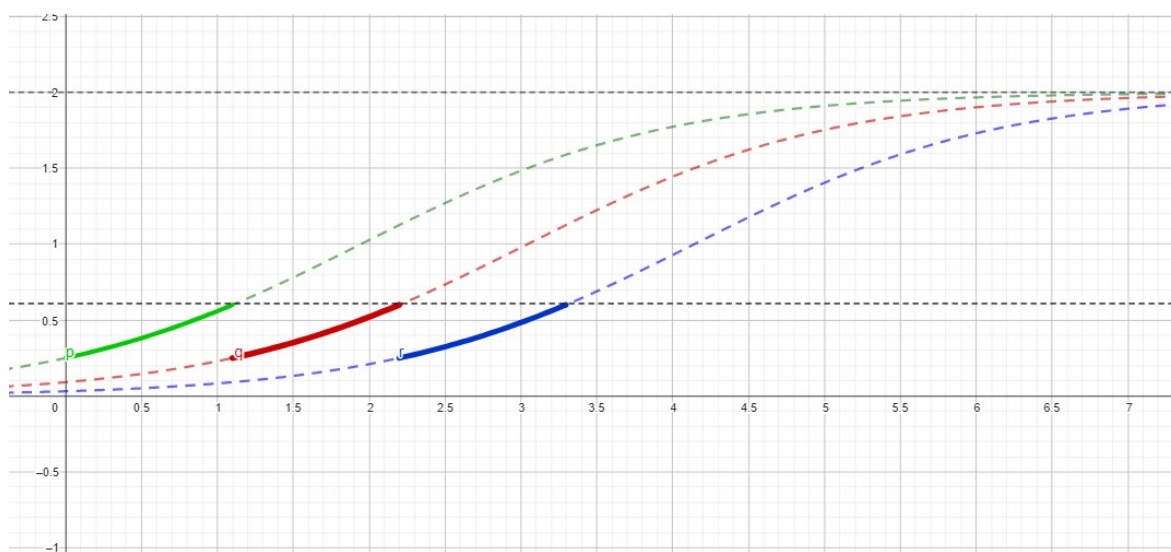


Figura 2.6: Impulsive Solution- Geogebra.org

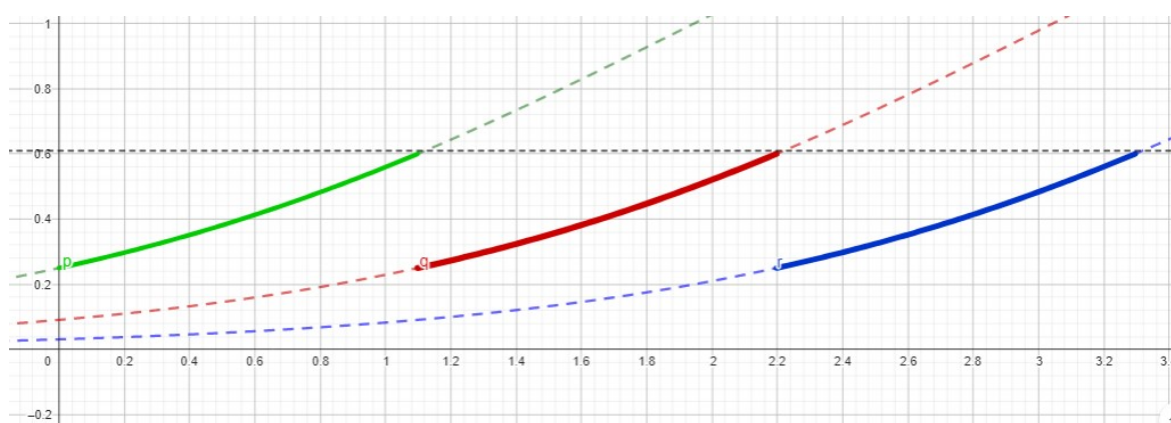


Figura 2.7: Solution, enlarged- Geogebra.org

To obtain a visual understanding of these changes without delving into mathematical calculations, we will direct our attention to the graphical representations produced by both Impulsive Differential Equations and ODE.

This visual scrutiny vividly portrays how impulses exert the ability to induce fundamental changes in the trajectories of solutions within a model that, in ODE, did not manifest any periodic behaviour compared to the model with impulses.

This elucidation, highlighting the impulses in remodelling system trajectories, as exemplified in the context of the logistics model, reveals a multitude of practical applications. For example, in the field of biology, understanding the periodic oscillations generated by impulses is extremely important in modelling populations of species subject to seasonal phenomena such as migrations or reproductive cycles.

5 Conclusion

This study has provided insight into the impact of impulses on Ordinary Differential Equations, exemplifying it through the models of Kruger-Thiemer and the Logistic Model. It is evident that there is a clear alteration in the behaviour of these solutions when compared

to classical ODEs, as seen in the Logistic Model, which exhibits periodic patterns after the introduction of impulses, highlighting this significant impact.

Since this represents an enhancement of ODEs, there is a need to establish theorems and properties that underpin this concept. Furthermore, it underscores the growing importance of delving into the theory of Impulsive Differential Equations (IDEs), as it not only contributes to the advancement of applied mathematics but also has the potential to enrich our understanding of the dynamics of complex systems in areas ranging from biology to engineering.

For that reason, this research emphasizes the ongoing need to investigate and develop the theory of IDEs, recognizing its crucial role in exploring the complexities associated with natural phenomena and its applicability in various fields of knowledge.

Agradecimentos: I would like to express my sincere gratitude to the people who were instrumental in the completion of this article and my academic journey. First and foremost, I thank my parents, whose support and encouragement were essential throughout this academic journey. I would also like to express my gratitude to my advisor, Professor Marta, whose guidance and deep knowledge have guided me throughout my undergraduate studies. Her dedication to my academic growth and valuable suggestions have been invaluable. Finally, I would like to thank FAPESP for their important financial support.

Referências Bibliográficas

- [1] BARROS, A. M; GADOTTI, M. C. Um Estudo Sobre a Concentração da Droga Cocaína no Sangue. Boletim de Iniciação Científica em Matemática - BICMat. Vol.19, ano 2022.
- [2] CICHON, Kinga; CICHON, Mieczyslaw; SATCO, Bianca. On Regulated Functions. Fasciculi Mathematici, v. 60, n. 1, p. 37-57, jun. 2018. DOI: 10.1515/fascmath-2018-0003.
- [3] STORPIRTIS, S; [etal. Farmacocinética básica e aplicada-Rio de Janeiro : Guanabara Koogan, 2011. ISBN 978-85-277-1896-7.
- [4] LAKSHMIKANTHAN, BAINOV, D.D., SIMEONOV, P.S.: Theory of Impulsive Differential Equations, Modern Applied Math., 6, World Scientific, 1989.
- [5] LIMA, E. L. (2000). Espaços Métricos. Rio de Janeiro: IMPA.
- [6] LIMA, E. L. Curso de Análise: Volume 1. 6ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [7] SANTOS, Lenara Ferreira dos. Um estudo sobre equações diferenciais impulsivas: existência de solução, estabilidade e aplicações / Lenara Ferreira dos Santos. – Rio Claro, 2021.
- [8] SIQUEIRA, L. P.; Fabri, A. C. O. C.; Fabri, R. L. Revista Eletrônica de Farmácia Vol. VIII (2), 75 - 87, 2011.

O Uso da Transformada de Laplace para Obtenção de Solução de uma Classe de Equações Diferenciais

Caroline Barbosa Dias[†]

Orientador(a): Prof. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: Esse artigo tem por objetivo realizar um estudo referente a solução de uma equação escalar linear de primeira ordem com retardamento e coeficientes constantes. Assim, será introduzida de maneira breve as Equações Diferenciais com Retardamento (EDR), comparando suas características em relação a uma equação diferencial ordinária. Será também exposto um resultado importante que assegura a existência e unicidade da solução de um problema de valor inicial de uma EDR, além da introdução à transformada de Laplace e alguns resultados, que serão fundamentais para realizar a análise da solução.

Palavras-chave: retardo; equações diferenciais com retardamento; produto de convolução.

1 Introdução

Para uma melhor compreensão do que é uma equação diferencial funcional com retardamento, podemos observar o exemplo a seguir.

Seja

$$u'(t) = f(t, u(t-1)) \quad (1.1)$$

uma equação diferencial com retardamento, onde f é uma função contínua em todo par (t, u) dado, e u uma função real, incógnita de (1.1).

Observe que tal equação não se trata de uma equação diferencial ordinária, pois (1.1) não é do tipo $u'(t) = g(t, u(t))$, em que $u'(t)$ depende de t e da função u no instante t .

Podemos perceber em (1.1) que, diferentemente de uma equação diferencial ordinária, $u'(t)$ depende de t e da função u no instante $t-1$.

Outra importante diferença das equações diferenciais com retardamento para as ordinárias está na forma de suas respectivas condições iniciais. Se por um lado devemos observar o comportamento de uma equação diferencial ordinária em um dado instante t_0 , para uma equação diferencial com retardamento nos interessa conhecer o comportamento da solução num intervalo anterior à t_0 , ou seja, é necessário conhecer o "passado" da solução.

2 Equações Escalares Lineares de Primeira Ordem

Nesta seção apresentamos as equações lineares de primeira ordem segundo a referência [2].

Definição 2.1. A forma geral das equações diferenciais com retardos discretos de ordem n na derivada e ordem m no retardo é

$$F[t, u(t), u(t-\omega_1), \dots, u(t-\omega_m), u'(t), u'(t-\omega_1), \dots, u'(t-\omega_m), \dots,$$

[†]FAPESP: 2023/01258-3

$$u^{(n)}(t), u^{(n)}(t - \omega_1), \dots, u^{(n)}(t - \omega_m)] = 0, \quad (2.1)$$

onde F é uma função dada de $1 + (m + 1)(n + 1)$ variáveis, e os números $\omega_1, \dots, \omega_m$ são chamados de períodos de retardo, que também são dados.

Note que F e u são funções reais de variáveis reais, e os períodos de retardo $\omega_1, \dots, \omega_m$ também o são.

Ocasionalmente, podemos encontrar soluções complexas para as equações diferenciais com retardo, entretanto, neste momento estamos interessados nas soluções reais. Caso a equação com solução complexa seja linear com coeficientes reais, podemos separar tal solução em parte real e imaginária, para assim obtermos uma solução real. Observe que tal possibilidade é dada para equações lineares, não sendo possível prosseguir do mesmo modo para equações não lineares.

Iremos restringir nosso estudo as equações lineares da forma

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij}(t) u^{(j)}(t - \omega_i) = f(t) \quad (2.2)$$

onde m e n são inteiros positivos, $0 = \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_m$, $f(t)$ e $a_{ij}(t)$ são funções definidas em algum intervalo real.

Consideremos, por fim, o caso mais simples de equação diferencial com retardamento linear, onde os coeficientes são constantes, equação dessa da forma

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} u^{(j)}(t - \omega_i) = f(t). \quad (2.3)$$

A teoria de equações do tipo (2.3) é mais completa que a teoria de equações lineares gerais, do tipo (2.2).

Restringindo ainda mais essa análise, iremos estudar uma equação do tipo (2.3), de modo que tanto a ordem em relação à derivada quanto em relação ao retardo seja 1. Escrevemos tal equação de primeira ordem de derivada e retardo da forma

$$a_0 u'(t) + a_1 u'(t - \omega) + b_0 u(t) + b_1 u(t - \omega) = f(t).$$

A teoria deste caso especial se assemelha a teoria do caso mais geral.

Vamos estudar o teorema geral de existência e unicidade da solução de uma equação com retardamento do tipo

$$a_0 u'(t) + b_0 u(t) + b_1 u(t - \omega) = f(t).$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $t_0 = 0$, e tomemos como condição inicial

$$u(t) = \varphi, \quad -\omega < t < 0,$$

φ uma função inicial.

Teorema 2.2 (Teorema Geral de Existência e Unicidade). *Suponha que f é de classe C^1 em $[0, \infty)$ e que φ é de classe C^0 em $[0, \omega]$. Então existe uma e somente uma função, para $t \geq 0$, que satisfaça*

$$a_0 u'(t) + b_0 u(t) + b_1 u(t - \omega) = f(t), \quad \text{para } t > \omega \text{ e}$$

$$u(t) = \varphi, \quad 0 \leq t \leq \omega.$$

Além disso, a função u é de classe C^1 em (ω, ∞) e de classe C^2 em $(2\omega, \infty)$. Se φ é de classe C^1 em $[0, \omega]$, u' é contínua em ω se e somente se

$$a_0\varphi'(\omega^-) + b_0\varphi(\omega) + b_1\varphi(0) = f(\omega). \quad (2.4)$$

Se φ é de classe C^2 em $[0, \omega]$, u'' é contínua em 2ω se e somente se a equação (2.4) é satisfeita ou $b_1 = 0$.

A prova desse teorema será omitida, mas pode ser encontrada em [2].

3 Transformada de Laplace

Esta seção está baseada nas referências [2] e [3].

A transformada de Laplace transforma uma função $f(t)$ definida em $t \geq 0$ em uma função $F(s)$, definida para $\operatorname{Re}(s)$ suficientemente grande, por meio da relação

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \quad (3.1)$$

Ocasionalmente, podemos encontrar a notação $\mathcal{L}(f) = F$ para denotar essa relação.

O interesse na utilização desta relação vem do fato de que podemos transformar uma equação funcional linear em $f(t)$, envolvendo derivadas e retardos, em uma equação linear envolvendo apenas $F(s)$.

3.1 Existência e Convergência

A integral imprópria (3.1) é definida pelo limite de uma integral definida, sendo

$$F(s) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} f(t) dt,$$

onde assumimos que $f(t)$ é integrável sobre qualquer intervalo finito $[0, R]$.

Para este propósito, usaremos a integral de Riemann.

Não é difícil mostrar que a convergência da integral para algum valor $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ implica na convergência para $s = \sigma + i\tau$ para todo $\sigma > \sigma_0$.

As funções $f(t)$ que encontraremos geralmente serão limitadas da forma

$$|f(t)| \leq ce^{at},$$

de modo que a integral (3.1) seja absolutamente convergente para $\operatorname{Re}(s) > a$.

3.2 Convolução em Transformadas de Laplace

Definição 3.1. O produto de convolução entre duas funções f e g é definido como a integral do produto de uma das funções por uma cópia deslocada e invertida da outra; a função resultante h depende do valor do deslocamento. A notação para a convolução de f e g é denotada por $f * g$. Se x for a variável independente e u , o deslocamento, a fórmula pode ser escrita como:

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x - u) du.$$

Teorema 3.2 (Teorema da Convolução em Transformadas de Laplace). *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções reais de variável real não negativa tais que existem suas transformadas de Laplace $F(s)$ e $G(s)$, respectivamente. Então,*

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s) G(s).$$

Também vale que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) G(s)\} = f(t) * g(t).$$

4 Solução na forma de Integral Definida

A transformada de Laplace é extremamente útil para obter a solução de uma equação diferencial com retardamento linear com coeficientes constantes.

Ilustremos esse método considerando a equação

$$u'(t) = u(t-1). \quad (4.1)$$

Multiplicando a equação por e^{-st} e integrando de 1 a ∞ , obtemos

$$\int_1^\infty u'(t)e^{-st} dt = \int_1^\infty u(t-1)e^{-st} dt. \quad (4.2)$$

Fazendo uma mudança de variável na integral do lado direito da equação (4.2),

$$\int_1^\infty u(t-1)e^{-st} dt = e^{-s} \int_0^\infty u(t)e^{-st} dt = e^{-s} \left[\int_1^\infty u(t)e^{-st} dt + \int_0^1 u(t)e^{-st} dt \right].$$

Integrando por partes o lado esquerdo de (4.2) e assumindo que $u(t)e^{-st} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, temos

$$\int_1^\infty u'(t)e^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t)e^{-st} - u(1)e^{-s} + s \int_1^\infty u(t)e^{-st} dt = -u(1)e^{-s} + s \int_1^\infty u(t)e^{-st} dt.$$

Retornando a (4.2),

$$\begin{aligned} -u(1)e^{-s} + s \int_1^\infty u(t)e^{-st} dt &= e^{-s} \left[\int_1^\infty u(t)e^{-st} dt + \int_0^1 u(t)e^{-st} dt \right] \Rightarrow \\ (s - e^{-s}) \int_1^\infty u(t)e^{-st} dt &= u(1)e^{-s} + e^{-s} \int_0^1 u(t)e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Assumindo que $s - e^{-s} \neq 0$,

$$\int_1^\infty u(t)e^{-st} dt = \frac{u(1)e^{-s} + e^{-s} \int_0^1 u(t)e^{-st} dt}{s - e^{-s}},$$

equação que expressa a transformação de u em termos de valores de u no intervalo $0 \leq t \leq 1$. Assumindo que a inversão da fórmula, do modo

$$f(t) = \int_{(b)} F(s)e^{st} ds \quad (4.3)$$

seja válida, $b \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = \int_{s_0}^{s_1} \frac{[u(1)e^{-s} + e^{-s} \int_0^1 u(t)e^{-st} dt]}{s - e^{-s}} e^{st} ds, \quad t > 1.$$

Ao processar a transformada inversa pode ocorrer que, dependendo do intervalo em interesse (que se busca a solução), uma escolha conveniente para o intervalo de integração em (4.3) deva ser feita, esta escolha está denotada por (b) .

Desde que os passos acima possam ser rigorosamente justificados, vemos que a solução de (4.1) pode ser expressa em termos dos valores de u sobre $(0, 1]$ por meio de uma integral de linha.

Embora uma integral de linha não possa ser expressa em termos de funções elementares, ela fornece uma ferramenta importante na dedução de informações úteis sobre a solução.

Para estender as técnicas para a maior generalização possível das equações de primeira ordem, e mostrar que tais procedimentos são rigorosamente justificados, iremos assumir o lema a seguir.

Lema 4.1. *As raízes de*

$$h(s) = a_0s + b_0 + b_1e^{-\omega s} = 0$$

estão todas no plano complexo, s à esquerda de alguma linha vertical. Isto é, existe uma constante real c tal que todas as raízes s satisfazem a condição $\operatorname{Re}(s) < c$.

Teorema 4.2. *Seja $u(t)$ a solução da equação*

$$L(u) = a_0u'(t) + b_0u(t) + b_1u(t - \omega) = f(t) \quad (4.4)$$

de classe C^1 em $[0, \infty)$. Suponha que f é de classe C^0 em $[0, \infty)$ e que

$$|f(t)| \leq c_1e^{c_2t}, \quad t \geq 0,$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas. Seja

$$m = \max_{0 \leq t \leq \omega} |u(t)|.$$

Então existem constantes positivas c_3 e c_4 , dependendo somente de c_2 e dos coeficientes em (4.4), tal que

$$|u(t)| \leq c_3(c_1 + m)e^{c_4t}, \quad t \geq 0.$$

Demonstração. Para a equação (4.4), temos que

$$a_0u'(t) = f(t) - b_0u(t) - b_1u(t - \omega) \Rightarrow \int_{\omega}^t a_0u'(s) \, ds = \int_{\omega}^t [f(s) - b_0u(s) - b_1u(s - \omega)] \, ds \Rightarrow$$

$$a_0u(t) = a_0u(\omega) + \int_{\omega}^t f(s) \, ds - b_0 \int_{\omega}^t u(s) \, ds - b_1 \int_{\omega}^t u(s - \omega) \, ds, \quad t \geq \omega.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |a_0u(t)| &= \left| a_0u(\omega) + \int_{\omega}^t f(s) \, ds - b_0 \int_{\omega}^t u(s) \, ds - b_1 \int_{\omega}^t u(s - \omega) \, ds \right| \leq \\ &|a_0||u(\omega)| + \left| \int_{\omega}^t f(s) \, ds \right| + \left| -b_0 \int_{\omega}^t u(s) \, ds \right| + \left| -b_1 \int_{\omega}^t u(s - \omega) \, ds \right| \leq \\ &|a_0||u(\omega)| + \int_{\omega}^t |f(s)| \, ds + |b_0| \int_{\omega}^t |u(s)| \, ds + |b_1| \int_{\omega}^t |u(s - \omega)| \, ds \Rightarrow \\ |a_0u(t)| &\leq |a_0||u(\omega)| + \int_{\omega}^t |f(s)| \, ds + |b_0| \int_{\omega}^t |u(s)| \, ds + |b_1| \int_{\omega}^t |u(s - \omega)| \, ds, \quad t \geq \omega. \end{aligned}$$

Como $m = \max_{0 \leq t \leq \omega} |u(t)|$ e $|f(t)| \leq c_1 e^{c_2 t}$, $t \geq 0$, por hipótese,

$$\begin{aligned}
|a_0||u(t)| &\leq |a_0||u(\omega)| + \int_{\omega}^t |f(s)| ds + |b_0| \int_{\omega}^t |u(s)| ds + |b_1| \int_{\omega}^t |u(s - \omega)| ds \leq \\
&|a_0|m + c_1 \int_{\omega}^t e^{c_2 s} ds + |b_0| \int_{\omega}^t |u(s)| ds + |b_1| \int_{\omega}^t |u(s - \omega)| ds = \\
&|a_0|m + c_1 \int_{\omega}^t e^{c_2 s} ds + |b_0| \int_0^t |u(s)| ds + |b_1| \int_0^{t-\omega} |u(s)| ds = \\
&|a_0|m + \frac{c_1}{c_2}(e^{c_2 t} - e^{c_2 \omega}) + |b_0| \int_0^t |u(s)| ds + |b_1| \int_0^{t-\omega} |u(s)| ds \leq \\
&|a_0|m + \frac{c_1}{c_2}(e^{c_2 t} - e^{c_2 \omega}) + |b_0| \int_0^t |u(s)| ds + |b_1| \int_0^t |u(s)| ds = \\
&|a_0|m + \frac{c_1}{c_2}(e^{c_2 t} - e^{c_2 \omega}) + (|b_0| + |b_1|) \int_0^t |u(s)| ds \Rightarrow \\
|u(t)| &\leq m + \frac{c_1}{c_2|a_0|}(e^{c_2 t} - e^{c_2 \omega}) + \frac{|b_0| + |b_1|}{|a_0|} \int_0^t |u(s)| ds \leq \\
&m + \frac{c_1}{c_2|a_0|}e^{c_2 t} + \frac{|b_0| + |b_1|}{|a_0|} \int_0^t |u(s)| ds \Rightarrow \\
|u(t)| &\leq m + \frac{c_1}{c_2|a_0|}e^{c_2 t} + \frac{|b_0| + |b_1|}{|a_0|} \int_0^t |u(s)| ds, \quad t \geq \omega.
\end{aligned}$$

Tomemos $c_3 = \max\left(1, \frac{1}{c_2|a_0|}\right)$ e $c_5 = \frac{|b_0| + |b_1|}{|a_0|}$. Então,

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq m + c_3 c_1 e^{c_2 t} + c_5 \int_0^t |u(s)| ds \leq c_3 m e^{c_2 t} + c_3 c_1 e^{c_2 t} + c_5 \int_0^t |u(s)| ds \Rightarrow \\
|u(t)| &\leq c_3(c_1 + m)e^{c_2 t} + c_5 \int_0^t |u(s)| ds, \quad t \geq \omega.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Como $|u(t)| \leq m \leq c_3 m e^{c_2 t}$ para $0 \leq t \leq \omega$, a desigualdade (4.5) está nas condições da desigualdade de Gronwall. Assim,

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq c_3(c_1 + m)e^{c_2 t} \exp\left(\int_0^t c_5 ds\right) = c_3(c_1 + m)e^{c_2 t} e^{c_5 t} = c_3(c_1 + m)e^{(c_2 + c_5)t} \Rightarrow \\
|u(t)| &\leq c_3(c_1 + m)e^{(c_2 + c_5)t}, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

■

Teorema 4.3. *Seja $u(t)$ uma solução contínua de*

$$L(u) = a_0 u'(t) + b_0 u(t) + b_1 u(t - \omega) = f(t), \quad t > \omega, \quad a_0 \neq 0, \tag{4.6}$$

que satisfaz a condição inicial $u(t) = \varphi(t)$ em $0 \leq t \leq \omega$. Suponhamos que $\varphi \in C^0[0, \omega]$, $f \in C^0[0, \infty)$, e que

$$|f(t)| \leq c_1 e^{c_2 t}, \quad t \geq 0, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0. \tag{4.7}$$

Então, para uma constante c suficientemente grande,

$$u(t) = \int_{(c)} e^{ts} [h(s)]^{-1} [p_0(s) + q(s)] ds, \quad t > \omega,$$

onde

$$p_0(s) = a_0 \varphi(\omega) e^{-\omega s} - b_1 e^{-\omega s} \int_0^{\omega} \varphi(t_1) e^{-st_1} dt_1,$$

$$q(s) = \int_{\omega}^{\infty} f(t_1) e^{-st_1} dt_1. \quad (4.8)$$

Temos também que

$$u(t) = \int_{(c)} e^{ts} [h(s)]^{-1} [p(s) + q(s)] ds, \quad t > 0, \quad (4.9)$$

onde

$$p(s) = a_0 \varphi(\omega) e^{-s\omega} + (a_0 s + b_0) \int_0^{\omega} \varphi(t_1) e^{-st_1} dt_1, \quad (4.10)$$

provando que φ é de classe $C^1[0, \omega]$.

Demonstração. Tendo a desigualdade (4.7) como hipótese, estamos nas condições do teorema 4.2. Assim,

$$|u(t)| \leq c_3 e^{c_4 t}, \quad t \geq 0, \quad c_3 > 0, \quad c_4 > 0.$$

Note que as integrais

$$\int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt, \quad \int_{\omega}^{\infty} u(t - \omega) e^{-st} dt, \quad \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

convergem para algum número complexo s do qual $Re(s) > c_4$.

Integrando por partes,

$$\int_{\omega}^{t'} u'(t) e^{-st} dt = u(t') e^{-st'} - \varphi(\omega) e^{-s\omega} + s \int_{\omega}^{t'} u(t) e^{-st} dt.$$

Desde que $u(t') e^{-st'} \rightarrow 0$ quando $t' \rightarrow \infty$ e $Re(s) > c_4$, como $|u(t)| \leq c_3 e^{c_4 t}$, $t \geq 0$, então $\int_{\omega}^{t'} u(t) e^{-st} dt$ converge quando $t' \rightarrow \infty$. Assim, $\int_{\omega}^{\infty} u'(t) e^{-st} dt$ converge e

$$\int_{\omega}^{\infty} u'(t) e^{-st} dt = -\varphi(\omega) e^{-s\omega} + s \int_{\omega}^{\infty} u(t) e^{-st} dt.$$

Note também que

$$\begin{aligned} \int_{\omega}^{\infty} u(t - \omega) e^{-st} dt &= e^{-s\omega} \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \\ e^{-s\omega} \left[\int_{\omega}^{\infty} u(t) e^{-st} dt + \int_0^{\omega} u(t) e^{-st} dt \right] &= e^{-s\omega} \left[\int_{\omega}^{\infty} u(t) e^{-st} dt + \int_0^{\omega} \varphi(t) e^{-st} dt \right]. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação (4.6) por e^{-st} , integrando de ω a ∞ e substituindo as relações obtidas,

$$\begin{aligned} a_0 u'(t) + b_0 u(t) + b_1 u(t - \omega) &= f(t) \Rightarrow a_0 u'(t) e^{-st} + b_0 u(t) e^{-st} + b_1 u(t - \omega) e^{-st} = f(t) e^{-st} \Rightarrow \\ a_0 \int_{\omega}^{\infty} u'(t) e^{-st} dt &= \int_{\omega}^{\infty} f(t) e^{-st} dt - b_0 \int_{\omega}^{\infty} u(t) e^{-st} dt - b_1 \int_{\omega}^{\infty} u(t - \omega) e^{-st} dt \Rightarrow \\ -a_0 \varphi(\omega) e^{-s\omega} + a_0 s \int_{\omega}^{\infty} u(t) e^{-st} dt &= \int_{\omega}^{\infty} f(t) e^{-st} dt - b_0 \int_{\omega}^{\infty} u(t) e^{-st} dt - \\ b_1 e^{-s\omega} \int_{\omega}^{\infty} u(t) e^{-st} dt - b_1 e^{-s\omega} \int_0^{\omega} \varphi(t) e^{-st} dt &\Rightarrow \\ (a_0 s + b_0 + b_1 e^{-s\omega}) \int_{\omega}^{\infty} u(t) e^{-st} dt &= a_0 \varphi(\omega) e^{-s\omega} - b_1 e^{-s\omega} \int_0^{\omega} \varphi(t) e^{-st} dt + \int_{\omega}^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Sabendo que $h(s) = a_0 s + b_0 + b_1 e^{-s\omega}$ e tomando

$$p_0(s) = a_0 \varphi(\omega) e^{-s\omega} - b_1 e^{-s\omega} \int_0^{\omega} \varphi(t) e^{-st} dt \quad \text{e} \quad q(s) = \int_{\omega}^{\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

temos que

$$h(s) \int_{\omega}^{\infty} u(t)e^{-st} dt = p_0(s) + q(s), \quad \operatorname{Re}(s) > c_4.$$

Pelo lema 4.1, $h(s)$ não é zero para $\operatorname{Re}(s) > c$, com c suficientemente grande. Logo,

$$\int_{\omega}^{\infty} u(t)e^{-st} dt = [h(s)]^{-1}[p_0(s) + q(s)], \quad \operatorname{Re}(s) > c. \quad (4.11)$$

Desde que $u(t)$ seja de classe C^1 em $[\omega, \infty)$, pelo teorema de existência e unicidade, ela é contínua e de variação limitada em qualquer intervalo finito.

Assim, podemos aplicar a fórmula de inversão para a transformada de Laplace em (4.11), como segue

$$u(t) = \int_{(c)} e^{ts} [h(s)]^{-1} [p_0(s) + q(s)] ds, \quad t > \omega.$$

Para obtermos a equação (4.9), usaremos as seguintes relações vistas anteriormente:

$$\int_{\omega}^{\infty} u'(t)e^{-st} dt = -\varphi(\omega)e^{-s\omega} + s \int_{\omega}^{\infty} u(t)e^{-st} dt \quad \text{e} \quad (4.12)$$

$$\int_{\omega}^{\infty} u(t-\omega)e^{-st} dt = e^{-\omega s} \left[\int_{\omega}^{\infty} u(t)e^{-st} dt + \int_0^{\omega} \varphi(t)e^{-st} dt \right]. \quad (4.13)$$

Note que

$$\int_{\omega}^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt - \int_0^{\omega} \varphi(t)e^{-st} dt.$$

Substituindo em (4.12),

$$\int_{\omega}^{\infty} u'(t)e^{-st} dt = -\varphi(\omega)e^{-s\omega} + s \left[\int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt - \int_0^{\omega} \varphi(t)e^{-st} dt \right]. \quad (4.14)$$

Note também que

$$\int_{\omega}^{\infty} u(t)e^{-st} dt + \int_0^{\omega} \varphi(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt.$$

Substituindo em (4.13),

$$\int_{\omega}^{\infty} u(t-\omega)e^{-st} dt = e^{-\omega s} \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt. \quad (4.15)$$

Multiplicando a equação (4.6) por e^{-st} , integrando no intervalo $[\omega, \infty)$ e substituindo (4.14) e (4.15),

$$\begin{aligned} a_0 \int_{\omega}^{\infty} u'(t)e^{-st} dt &= \int_{\omega}^{\infty} f(t)e^{-st} dt - b_0 \int_{\omega}^{\infty} u(t)e^{-st} dt - b_1 \int_{\omega}^{\infty} u(t-\omega)e^{-st} dt \Rightarrow \\ &- a_0 \varphi(\omega)e^{-s\omega} + a_0 s \left[\int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt - \int_0^{\omega} \varphi(t)e^{-st} dt \right] = \int_{\omega}^{\infty} f(t)e^{-st} dt - \\ &b_0 \left[\int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt - \int_0^{\omega} \varphi(t)e^{-st} dt \right] - b_1 e^{-\omega s} \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt \Rightarrow \\ (a_0 s + b_0 + b_1 e^{-\omega s}) \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt &= a_0 \varphi(\omega)e^{-s\omega} + (a_0 s + b_0) \int_0^{\omega} \varphi(t)e^{-st} dt + \int_{\omega}^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Tomando

$$h(s) = a_0 s + b_0 + b_1 e^{-\omega s},$$

$$p(s) = a_0\varphi(\omega)e^{-s\omega} + (a_0s + b_0) \int_0^\omega \varphi(t)e^{-st} dt \quad \text{e} \quad q(s) = \int_\omega^\infty f(t)e^{-st} dt,$$

temos que

$$h(s) \int_0^\infty u(t)e^{-st} dt = p(s) + q(s).$$

Sabendo, pelo lema 4.1, que $h(s) \neq 0$ para $Re(s) > c$, para c suficientemente grande, temos que

$$\int_0^\infty u(t)e^{-st} dt = [h(s)]^{-1}[p(s) + q(s)], \quad Re(s) > c. \quad (4.16)$$

Desde que $u(t)$ seja de classe C^1 em $[0, \infty)$, pelo teorema de existência e unicidade, ela é contínua e de variação limitada em qualquer intervalo finito.

Assim, podemos aplicar a fórmula de inversão da transformada de Laplace em (4.16), como segue

$$u(t) = \int_{(c)} e^{ts} [h(s)]^{-1} [p(s) + q(s)] ds, \quad t > \omega. \quad \blacksquare$$

Definiremos uma função cuja transformada é $[h(s)]^{-1}$.

A definição a seguir será importante para a demonstração do próximo resultado.

Definição 4.4. Seja $k(t)$ uma função única com as seguintes propriedades:

- (a) $k(t) = 0$, $t < 0$;
- (b) $k(0) = a_0^{-1}$;
- (c) $k(t)$ é de classe C^0 em $[0, \infty)$;
- (d) $k(t)$ satisfaz a equação

$$a_0k'(t) + b_0k(t) + b_1k(t - \omega) = 0, \quad (4.17)$$

para $t > 0$.

A existência e unicidade de $k(t)$ não segue diretamente do teorema geral de existência e unicidade, uma vez que os valores iniciais não definem uma função contínua sobre $[-\omega, 0]$, mas segue da seguinte definição e proposição.

Definição 4.5. A função f é dita contínua por partes em um intervalo I (aberto ou fechado) se ela é de classe C^0 em I , exceto para um conjunto finito com descontinuidades. Neste caso, escrevemos $f \in PC^0$ em I .

A função f é dita de classe PC^k em I se é de classe C^k em I , exceto possivelmente para um conjunto finito de pontos de descontinuidade de f ou uma de suas primeiras k derivadas.

Proposição 4.6. Se f é de classe PC^1 em $[0, \infty)$ e se φ é de classe C^0 em $[0, \omega]$ então existe uma e somente uma função de classe C^0 em $[\omega, \infty)$, que satisfaz a condição inicial

$$u(t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq \omega,$$

e que satisfaz a equação

$$a_0u'(t) + b_0u(t) + b_1u(t - \omega) = f(t),$$

para $t > \omega$, no sentido de que em um ponto de descontinuidade de $u(t - \omega)$ ou $f(t)$, os valores, tanto à direita quanto à esquerda da descontinuidade, satisfazem a equação.

Note que $k(t)$ é de classe C^1 em $(0, \omega)$ e $[\omega, \infty)$. Podemos, então, reescrever (4.17) na forma

$$\frac{d}{dt} \left[a_0 k(t) \exp \left(\frac{b_0}{a_0} t \right) \right] = v(t) \exp \left(\frac{b_0}{a_0} t \right),$$

onde $v(t) = -b_1 k(t - \omega)$.

Usando o teorema 4.2, podemos deduzir que $k(t)$ é exponencialmente limitada, e consequentemente, que a integral de Laplace nos termos de (4.17) converge.

Se multiplicarmos cada termo da equação (4.17) por e^{-st} e integrarmos com respeito a t de 0 a ∞ , obtemos a relação

$$\int_0^\infty k(t) e^{-st} dt = [h(s)]^{-1}, \quad \operatorname{Re}(s) > c. \quad (4.18)$$

Desde que $k'(t)$ tenha apenas descontinuidades de primeira espécie, a função $k(t)$ é contínua e de variação limitada para $t > 0$. Aplicando a inversão de Laplace,

$$k(t) = \int_{(c)} [h(s)]^{-1} e^{st} ds, \quad t > 0.$$

Teorema 4.7. *Seja $u(t)$ uma solução contínua de*

$$L(u) = a_0 u'(t) + b_0 u(t) + b_1 u(t - \omega) = f(t), \quad t > \omega, \quad a_0 \neq 0,$$

que satisfaz a condição inicial $u(t) = \varphi(t)$, $0 \leq t \leq \omega$. Se $\varphi \in C^0[0, \omega]$ e $f \in C^0[0, \infty)$, então, para $t > \omega$,

$$u(t) = a_0 \varphi(\omega) k(t - \omega) - b_1 \int_0^\omega \varphi(t_1) k(t - t_1 - \omega) dt_1 + \int_\omega^t f(t_1) k(t - t_1) dt_1.$$

Se $\varphi \in C^1[0, \omega]$, então, para $t > 0$,

$$u(t) = a_0 \varphi(0) k(t) + \int_0^\omega [a_0 \varphi'(t_1) + b_0 \varphi(t_1)] k(t - t_1) dt_1 + \int_\omega^t f(t_1) k(t - t_1) dt_1.$$

Demonstração. Seja $g(t)$ uma função unitária definida pelas equações

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

O valor de $g(t)$ para $t = 0$ é irrelevante.

Das equações que definem $g(t)$, temos que, para alguma constante c e alguma função $f(t)$,

$$f(t)g(t - c) = 0, \quad t < c;$$

$$f(t)g(t - c) = f(t), \quad t > c.$$

De (4.8), segue que

$$q(s) = \int_0^\infty f(t_1) g(t_1 - \omega) e^{-st_1} dt_1.$$

Ou seja, $q(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)g(t - \omega)$.

Como $[h(s)]^{-1}$ é a transformada de $k(t)$, deduzimos, para o teorema de convolução, que a convolução

$$\int_0^t f(t_1) g(t_1 - \omega) k(t - t_1) dt_1$$

transformou $q(s)[h(s)]^{-1}$. Desde que a função seja contínua e de variação limitada para $t > \omega$,

$$\int_{(c)} e^{ts}[h(s)]^{-1}q(s) ds = \int_{\omega}^t f(t_1)k(t-t_1) dt_1, \quad t > \omega.$$

De (4.18), segue que

$$[h(s)]^{-1}e^{-\omega s} = \int_0^{\infty} k(t)e^{-s(t+\omega)} dt = \int_0^{\infty} k(t-\omega)e^{-st} dt.$$

Ou seja, $[h(s)]^{-1}e^{-\omega s}$ é a transformada de $k(t-\omega)$.

Como $k(t-\omega)$ é contínua e de variação limitada para $t > \omega$, a fórmula de inversão produz

$$\int_{(c)} e^{ts}[h(s)]^{-1}a_0\varphi(\omega)e^{-\omega s} ds = a_0\varphi(\omega)k(t-\omega), \quad t > \omega.$$

Finalmente, a transformada de $\varphi(t)g(\omega-t)$ é

$$\int_0^{\infty} \varphi(t_1)g(\omega-t_1)e^{-st_1} dt_1 = \int_0^{\omega} \varphi(t_1)e^{-st_1} dt_1.$$

Como $[h(s)]^{-1}e^{-s\omega}$ é a transformada de $k(t-\omega)$, segue do teorema de convolução que a função

$$\int_0^t \varphi(t_1)g(\omega-t_1)k(t-t_1-\omega) dt_1 = \int_0^{\omega} \varphi(t_1)k(t-t_1-\omega) dt_1, \quad t > \omega, \quad (4.19)$$

tem a transformada

$$[h(s)]^{-1}e^{-\omega s} \int_0^{\omega} \varphi(t_1)e^{-st_1} dt_1.$$

Como $k(t)$ é contínua exceto no salto em $t = 0$, a integral em (4.19) é contínua e de variação limitada. Portanto,

$$\int_{(c)} e^{ts} \left[[h(s)]^{-1}e^{-\omega s} \int_0^{\omega} \varphi(t_1)e^{-st_1} dt_1 \right] ds = \int_0^{\omega} \varphi(t_1)k(t-t_1-\omega) dt_1, \quad t > \omega. \quad (4.20)$$

Combinando os resultados (4.19) e (4.20),

$$\begin{aligned} \int_{(c)} e^{ts}[h(s)]^{-1}p_0(s)ds &= \int_{(c)} e^{ts}[h(s)]^{-1} \left[a_0\varphi(\omega)e^{-\omega s} - b_1e^{-\omega s} \int_0^{\omega} \varphi(t_1)e^{-st_1} dt_1 \right] ds = \\ &= a_0\varphi(\omega) \int_{(c)} [h(s)]^{-1}e^{s(t-\omega)} ds - b_1 \int_{(c)} [h(s)]^{-1} \left[\int_0^{\omega} \varphi(t_1)e^{s(t-t_1-\omega)} dt_1 \right] ds = \\ &= a_0\varphi(\omega)k(t-\omega) - b_1 \int_0^{\omega} \varphi(t_1) \left[\int_{(c)} [h(s)]^{-1}e^{s(t-t_1-\omega)} ds \right] dt_1 = \\ &= a_0\varphi(\omega)k(t-\omega) - b_1 \int_0^{\omega} \varphi(t_1)k(t-t_1-\omega) dt_1, \quad t > \omega \Rightarrow \\ \int_{(c)} e^{ts}[h(s)]^{-1}p_0(s)ds &= a_0\varphi(\omega)k(t-\omega) - b_1 \int_0^{\omega} \varphi(t_1)k(t-t_1-\omega) dt_1, \quad t > \omega, \end{aligned}$$

sendo

$$p_0(s) = a_0\varphi(\omega)e^{-\omega s} - b_1e^{-\omega s} \int_0^{\omega} \varphi(t_1)e^{-st_1} dt_1.$$

De (4.10), segue que

$$\begin{aligned}
 p(s) &= a_0\varphi(\omega)e^{-\omega s} + (a_0s + b_0) \int_0^\omega \varphi(t_1)e^{-st_1} dt_1 = \\
 &= a_0\varphi(\omega)e^{-\omega s} + (a_0s + b_0) \left[-\varphi(\omega)\frac{e^{-\omega s}}{s} + \frac{\varphi(0)}{s} + \frac{1}{s} \int_0^\omega \varphi'(t_1)e^{-st_1} dt_1 \right] = \\
 &= a_0\varphi(\omega)e^{-\omega s} - a_0\varphi(\omega)e^{-\omega s} + a_0\varphi(0) \\
 &+ a_0 \int_0^\omega \varphi'(t_1)e^{-st_1} dt_1 - \frac{b_0}{s}\varphi(\omega)e^{-\omega s} + \frac{b_0}{s}\varphi(0) + \frac{b_0}{s} \int_0^\omega \varphi'(t_1)e^{-st_1} dt_1 = \\
 &= a_0\varphi(0) + a_0 \int_0^\omega \varphi'(t_1)e^{-st_1} dt_1 - \frac{b_0}{s}\varphi(\omega)e^{-\omega s} + \frac{b_0}{s}\varphi(0) + \frac{b_0}{s}\varphi(\omega)e^{-\omega s} \\
 &- \frac{b_0}{s}\varphi(0) + b_0 \int_0^\omega \varphi(t_1)e^{-st_1} dt_1 = a_0\varphi(0) + \int_0^\omega [a_0\varphi'(t_1) + b_0\varphi(t_1)]e^{-st_1} dt_1.
 \end{aligned}$$

Aplicando as técnicas acima,

$$\begin{aligned}
 \int_{(c)} e^{ts}[h(s)]^{-1}p(s) ds &= \int_{(c)} e^{ts}[h(s)]^{-1} \left[a_0\varphi(0) + \int_0^\omega [a_0\varphi'(t_1) + b_0\varphi(t_1)]e^{-st_1} dt_1 \right] ds = \\
 &= a_0\varphi(0) \int_{(c)} [h(s)]^{-1}e^{ts} ds + \int_{(c)} [h(s)]^{-1} \left[\int_0^\omega [a_0\varphi'(t_1) + b_0\varphi(t_1)]e^{s(t-t_1)} dt_1 \right] ds = \\
 &= a_0\varphi(0)k(t) + \int_0^\omega [a_0\varphi'(t_1) + b_0\varphi(t_1)] \left[\int_{(c)} [h(s)]^{-1}e^{s(t-t_1)} ds \right] dt_1 = \\
 &= a_0\varphi(0)k(t) + \int_0^\omega [a_0\varphi'(t_1) + b_0\varphi(t_1)]k(t-t_1) dt_1 \Rightarrow \\
 \int_{(c)} e^{ts}[h(s)]^{-1}p(s) ds &= a_0\varphi(0)k(t) + \int_0^\omega [a_0\varphi'(t_1) + b_0\varphi(t_1)]k(t-t_1) dt_1, \quad t > 0. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

5 Considerações Finais

Neste artigo abordamos uma técnica para expressar as soluções de equações diferenciais com retardamento usando o conceito e propriedades da transformada de Laplace.

A existência de solução para um problema de valor inicial com retardamento foi garantida pelo teorema 2.2.

Nos dois primeiros teoremas da seção 4, as hipóteses essenciais para este estudo dizem respeito a uma limitação exponencial na função f , o que resulta também em uma limitação exponencial na solução. Enquanto o teorema 4.7, a solução é expressa na forma de integral definida.

Portanto, os resultados obtidos demonstrados são extremamente importantes no estudo e desenvolvimento da teoria referente à equações diferenciais com retardamento.

Abstract: This article aims to conduct a study regarding the solution of a first-order linear scalar equation with delay and constant coefficients. Thus, we will briefly introduce Delay Differential Equations (DDEs), comparing their characteristics to those of an ordinary differential equation. We will also present an important result that ensures the existence and uniqueness of the solution to an initial value problem of a DDE, in addition to an introduction to the Laplace transform and some results that will be crucial for conducting the solution analysis.

Keywords: delay; delay differential equation; convolution operation.

Agradecimentos: Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todos que contribuíram para o sucesso deste trabalho. Primeiramente, quero agradecer à minha família por todo apoio e amor recebido.

Agradeço à minha orientadora, Marta Cilene Gadotti, pela orientação valiosa, sabedoria, paciência e amizade que me proporcionou durante todo o processo de pesquisa. Suas orientações moldaram este trabalho de forma significativa.

Também quero estender meus agradecimentos aos meus amigos e colegas pelo apoio e auxílio, suas contribuições foram inestimáveis.

Por fim, agradeço à FAPESP (processo 2023/01258-3) por fornecer os recursos necessários para a realização deste estudo.

Referências Bibliográficas

- [1] Onuchic, N. Equações diferenciais com retardamento. Tech. rep., ICMSC-USP, São Carlos, 1971.
- [2] Bellman, R & Cooke, K., Differential- Difference Equations, Academic Press, New York, 1963.
- [3] Linares, J. L. Exercícios com a transformada de Laplace, Pirassununga, 2021.

A Construção de Espaços Topológicos Via Topologia Quociente

Gabriel Cassimiro Pereira[†]

Orientador(a): Thais Fernanda Mendes Monis

Resumo: Em Topologia, a topologia quociente é um conceito fundamental que nos permite construir novos espaços topológicos a partir da identificação de certos pontos em um espaço topológico dado. Por exemplo, as superfícies compactas podem ser construídas a partir de identificações nas arestas de polígonos.

A topologia quociente encontra aplicações em diversas áreas da matemática tais como na topologia algébrica, na geometria diferencial e na topologia geométrica. Em suma, a topologia quociente é uma ferramenta útil que permite compreender a estrutura e as propriedades dos espaços topológicos através da identificação de pontos equivalentes. Ela também pode nos fornecer uma maneira de analisar as relações e comportamentos de objetos topológicos de maneira intuitiva.

Neste artigo, será trazido um breve resumo de um trabalho que é parte do projeto de iniciação científica intitulado “A classificação das superfícies”, financiado pela FAPESP (processo 2022/11324-0). Iniciamos com alguns conceitos elementares de álgebra e topologia, que nos possibilita definir e desenvolver exemplos em topologia quociente.

Palavras-chave: espaços topológicos; funções contínuas; topologia quociente; topologia de identificação; relações de equivalência.

Abstract: In Topology, quotient topology is a fundamental concept that allows us to construct new topological spaces by identifying certain points in a given topological space. For example, compact surfaces can be constructed from identifications on the edges of polygons.

Quotient topology finds applications in several areas of mathematics such as algebraic topology, differential geometry and geometric topology. In short, quotient topology is a useful tool that allows you to understand the structure and properties of topological spaces through the identification of equivalent points. It can also provide us with a way to analyze the relationships and behaviors of topological objects in an intuitive way.

In this article, a brief summary will be provided of a work that is part of the scientific initiation project entitled “The classification of surfaces”, funded by FAPESP (process 2022/11324-0). We start with some elementary concepts of algebra and topology, which allows us to define and develop examples in quotient topology.

Keywords: equivalence relations; topological spaces; continuous functions; quotient topology; identification topology.

[†]Bolsista FAPESP

1 Relações

Definição 1.1 (Produto Cartesiano). Sejam A e B conjuntos não-vazios. O produto cartesiano A por B é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , em que $a \in A$ e $b \in B$, e o denotamos por

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Exemplo 1.2. Considere $A = \{a, b\}$ e $B = \{c, d, e\}$. Assim, o produto cartesiano de A por B é

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}.$$

Definição 1.3 (Relação). Dados A e B conjuntos não-vazios, dizemos que qualquer subconjunto R de $A \times B$ é uma relação. Além disso, dados $a \in A$ e $b \in B$, dizemos que a está relacionado com b pela relação R se $(a, b) \in R$ e denotamos simplesmente por aRb .

Se $A = B$, $R \subseteq A \times A$ é dita uma relação em A .

Exemplo 1.4. Considerando os conjuntos do Exemplo 1.2, note que são relações de A em B os seguintes conjuntos

$$R_1 = \{(a, c), (b, d)\}, R_2 = \{(a, d), (a, e), (b, e)\}, R_3 = A \times B$$

são relações de $A \times B$.

Definição 1.5 (Relação de Equivalência). Uma relação de equivalência \sim é uma relação em um conjunto não-vazio A que satisfaz às seguintes condições:

- i) Reflexiva: para todo $a \in A$, temos que $a \sim a$ (ou seja, temos que $(a, a) \in \sim$);
- ii) Simétrica: dados $a, b \in A$ quaisquer, se $a \sim b$ então $b \sim a$ (isto é, sempre que $(a, b) \in \sim$ também $(b, a) \in \sim$);
- iii) Transitiva: dados $a, b, c \in A$ quaisquer, se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$ (ou seja, $(a, b), (b, c) \in \sim$, vale que $(a, c) \in \sim$).

Exemplo 1.6. Seja o conjunto $A = \{a, b, c\}$. Note que a relação em A

$$\sim = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$$

é uma relação de equivalência, pois satisfaz as condições da Definição 1.5. No entanto, a relação

$$\equiv = \{(a, a), (c, c), (a, b), (b, a)\}$$

não é uma relação de equivalência, posto que $(b, b) \notin \equiv$.

Proposição 1.7. *Em qualquer conjunto, a igualdade é uma relação de equivalência.*

Prova: Seja A um conjunto não-vazio e \sim uma relação em A que satisfaz a seguinte propriedade:

$$a \sim b \Leftrightarrow a = b. \quad (1.1)$$

Repare que \sim satisfaz a propriedade Reflexiva, posto que para todo $a \in A$, $a = a$. Daí, por (1.1), temos que $a \sim a$.

Além disso, \sim satisfaz a propriedade Simétrica, pois dados $a, b \in A$ quaisquer, se $a \sim b$ por (1.1) então $a = b$. Como se trata de uma igualdade, podemos afirmar que $b = a$ e, assim, $b \sim a$.

Por fim, \sim satisfaz a propriedade Transitiva. De fato, tome $a, b, c \in A$ arbitrários, se $a \sim b$ e $b \sim c$, por (1.1) temos que $a = b$ e $b = c$, do que concluímos que $a = c$. Logo, $a \sim c$.

Desta forma, \sim é uma relação de equivalência em A . ■

Definição 1.8 (Classe de Equivalência). Sejam A um conjunto não-vazio, \sim uma relação de equivalência em A e $a \in A$. A classe de equivalência de a é o conjunto de todos os elementos de A que estão relacionados a a por \sim e é denotado por

$$\bar{a} = \{x \in A : x \sim a\}.$$

Exemplo 1.9. Do Exemplo 1.6, as classes de equivalência da relação \sim são

$$\bar{a} = \bar{b} = \{a, b\}, \bar{c} = \{c\}.$$

Proposição 1.10. Sejam A um conjunto não-vazio, \sim uma relação de equivalência em A . Dados $a, b \in A$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- i) $a \sim b$;
- ii) $b \in \bar{a}$;
- iii) $a \in \bar{b}$;
- iv) $\bar{a} = \bar{b}$.

Prova:

- i) \Rightarrow ii) Se $a \sim b$, então pela Definição 1.8 temos que $b \in \bar{a}$.
- ii) \Rightarrow iii) Supondo que $b \in \bar{a}$, então pela Definição 1.8 temos que $a \sim b$. Como \sim é uma relação de equivalência, então ela satisfaz a propriedade Simétrica, do que segue que $b \sim a$, ou seja, $a \in \bar{b}$.
- iii) \Rightarrow iv) Suponha que $a \in \bar{b}$ e tome $x \in \bar{a}$ qualquer. Por definição, temos que $x \sim a$. Mas como \sim satisfaz a propriedade Transitiva e estamos supondo que $a \in \bar{b}$, então $a \sim b$ e daí $x \sim b$, isto é, $x \in \bar{b}$. Dada a arbitrariedade de x , concluímos que $\bar{a} \subset \bar{b}$.

Agora tome qualquer $y \in \bar{b}$. Por definição, $y \sim b$. Como $a \in \bar{b}$, ou seja, $a \sim b$ e pela propriedade Simétrica $b \sim a$. Pela Transitividade concluímos que $y \sim a$, do que segue que $y \in \bar{a}$ e $\bar{b} \subset \bar{a}$.

Portanto, $\bar{a} = \bar{b}$.

- iv) \Rightarrow i) Se $\bar{a} = \bar{b}$ e como $a \in \bar{a}$, então $a \in \bar{b}$, isto é, $a \sim b$. ■

Definição 1.11 (Conjunto Quociente). Seja \sim uma relação de equivalência no conjunto não-vazio A . O conjunto de todas as classes de \sim é chamada de conjunto quociente de A pela relação \sim e denotado por

$$A/\sim = \{\bar{a} : a \in A\}.$$

A função $\rho: A \rightarrow A/\sim$, que associa cada elemento a de A em sua respectiva classe de equivalência \bar{a} é dita aplicação canônica. Além disso, tomando $y \in A/\sim$ qualquer, então $y = \bar{a}$, para algum $a \in A$, o que garante que ρ é sobrejetora.

Exemplo 1.12. O conjunto quociente da relação \sim dada no Exemplo 1.6 é

$$A/\sim = \{\{a, b\}, \{c\}\}.$$

2 Espaços Topológicos

Definição 2.1. Seja A um conjunto e \mathcal{U} um conjunto de subconjuntos de A satisfazendo as seguintes propriedades:

- a) $\emptyset \in \mathcal{U}, A \in \mathcal{U}$,
- b) $A_0, A_1 \in \mathcal{U} \Rightarrow A_0 \cap A_1 \in \mathcal{U}$,
- c) $(A_i)_{i \in I} = \{A_i : i \in I\} \subset \mathcal{U} \Rightarrow A = \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{U}$.

Observação 2.2. O conjunto \mathcal{U} de subconjuntos de A é dito uma topologia de A e o par (A, \mathcal{U}) é chamado de espaço topológico e é denotado simplesmente por A . Os elementos $B \in \mathcal{U}$ são ditos conjuntos abertos de A e os elementos de A ditos pontos de A . Se $\mathcal{P}(A)$ denota o conjunto das partes do conjunto A então uma topologia de A é qualquer conjunto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(A)$ que satisfaça as condições supracitadas. É claro que dois subconjuntos distintos de $\mathcal{P}(A)$ definem diferentes topologias de A .

Corolário 2.3. Dado qualquer conjunto A , o conjunto $\mathcal{U} = \{\emptyset, A\}$ é, evidentemente, uma topologia de A , que é chamada de topologia concreta ou indiscreta de A . Além disso, tomando $\mathcal{U} = \mathcal{P}(A)$, então claramente \mathcal{U} é uma topologia de A , que é denominada de topologia discreta de A .

Ambas topologias citadas são as topologias extremas de um conjunto que satisfaz às propriedades da Definição 2.1. A primeira define a menor topologia que um conjunto pode ter, e a segunda define a maior.

Exemplo 2.4. Se $A = \{a_0, a_1\}$, então existem quatro diferentes topologias que A pode ter, a saber:

$$\mathcal{U}_1 = \{\emptyset, A\}, \mathcal{U}_2 = \{\emptyset, \{a_0\}, A\}, \mathcal{U}_3 = \{\emptyset, \{a_1\}, A\}, \mathcal{U}_4 = \{\emptyset, \{a_0\}, \{a_1\}, A\}.$$

Já vimos que \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_4 são as extremas topologias de A . Note que \mathcal{U}_2 e \mathcal{U}_3 também são topologias de A , pois o conjunto vazio e o próprio conjunto A são elementos de ambos, a intersecção e a união duas a duas pertence a ambos. Assim, as topologias apresentadas são as únicas topologias de A .

Definição 2.5 (Conjuntos Fechados). Um subconjunto B de um espaço topológico A é dito fechado se, e somente se, $A - B$ for aberto.

Observação 2.6. Dizemos que \mathbb{R}^n tem a topologia usual quando sua topologia é gerada pela métrica usual do \mathbb{R}^n , a qual não desenvolveremos deste artigo. Para mais informações, consulte [1, Background: Metric Spaces]

2.1 Topologia Induzida

Definição 2.7. Dado um espaço topológico A e um subconjunto S de A , a topologia em S induzida pela topologia de A é a família de conjuntos da forma $U \cap S$, em que U é um conjunto aberto em A .

Observação 2.8. Se \mathcal{U} é a família de abertos de A , então $\mathcal{U}_S = \{U \cap S : U \in \mathcal{U}\}$ é a família de abertos de S . A fim de provar que \mathcal{U}_S é uma topologia para S precisamos verificar as três condições da Definição 2.1.

Dado que $\emptyset, A \in \mathcal{U}$, $\emptyset = \emptyset \cap S$ e $S = A \cap S$, então $\emptyset, S \in \mathcal{U}_S$.

Tomemos $V_1, V_2 \in \mathcal{U}_S$ quaisquer. Logo, existem $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tais que $V_1 = U_1 \cap S$ e $V_2 = U_2 \cap S$. Como $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, então $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$. Note que

$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap S) \cap (U_2 \cap S) = (U_1 \cap U_2) \cap S \in \mathcal{U}_S.$$

Por fim, considerando o conjunto arbitrário $\{V_i: i \in I\} \subset \mathcal{U}_S$, então por definição para cada $i \in I$ temos que $V_i = U_i \cap S$, em que $\{U_i: i \in I\} \subset \mathcal{U}$ e, deste modo, $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}$.

Portanto,

$$\bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap S) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap S \in \mathcal{U}_S.$$

Desta maneira, \mathcal{U}_S é uma topologia para S .

Observação 2.9. A topologia induzida às vezes é dita ser a topologia relativa. Se um subconjunto S de A possui a topologia induzida então dizemos que S é um subespaço de A .

3 Funções Contínuas

Definição 3.1. Uma função $f: X \rightarrow Y$ entre dois espaços topológicos é dito ser contínua se, para todo conjunto aberto U de Y , a imagem inversa $f^{-1}(U)$ é aberto em X .

Exemplo 3.2. A função identidade $Id: A \rightarrow A$, em que A é um espaço topológico, é contínua.

Com efeito, tomando $U \subseteq A$ um aberto qualquer, temos que $Id(U) = U$ é aberto em A , concluindo que Id é contínua.

Exemplo 3.3. Toda função constante entre espaços topológicos é contínua.

De fato, considere f uma função constante entre X e Y , a saber, $f(x) = y$ para todo $x \in X$, com $y \in Y$ fixado. Tomemos $U \subseteq Y$ um aberto de Y . Se $y \in U$, então $f^{-1}(U) = X$ e se $y \notin U$, então $f^{-1}(U) = \emptyset$, e ambos conjuntos são abertos de X . Logo, toda função constante entre espaços topológicos é contínua.

Exemplo 3.4. Se X é um espaço com a topologia discreta então qualquer função $f: X \rightarrow Y$ é contínua, em que Y é um espaço topológico arbitrário.

Decerto, a imagem inversa de qualquer aberto de Y pela f é aberto em X , do que segue que f é contínua.

Exemplo 3.5. Se Y possui a topologia concreta, então qualquer função $f: X \rightarrow Y$ é contínua também, seja qual for o espaço X .

Note que os únicos abertos de Y são \emptyset e Y . Logo, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(Y) = X$ são abertos em X , do que segue que f é contínua.

Teorema 3.6 (Composição de contínuas). *Sejam A, A' e A'' espaços topológicos. Se $f: A \rightarrow A'$ e $g: A' \rightarrow A''$ são funções contínuas, então a composta $h = g \circ f: A \rightarrow A''$ também é contínua.*

Prova: Se U é um aberto de A'' então $g^{-1}(U)$ é aberto em A' , devido ao fato de que g é contínua. Além disso, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ é aberto em A , também sabendo que f é contínua. Agora note que $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$, ou seja, $h = g \circ f$ é contínua. ■

Definição 3.7. Sejam A e A' espaços topológicos. Dizemos que A e A' são homeomorfos se existem funções contínuas inversas $f: A \rightarrow A', g: A' \rightarrow A$ (isto é, $f \circ g = Id_{A'}, g \circ f = Id_A$ e

f, g são funções contínuas). Escreve-se $A \cong A'$ e se diz que f e g são homeomorfismos entre A e A' .

Uma definição equivalente para homeomorfismo é: se existe uma função $f: A \rightarrow A'$ que é bijetora, contínua e sua inversa f^{-1} também é contínua. Portanto, um homeomorfismo entre A e A' é uma bijeção entre os pontos e os abertos de A e A' .

Proposição 3.8. *Sejam A e A' espaços topológicos e seja S um subespaço de A . Se $f: A \rightarrow A'$ é contínua, então $(f|_S): S \rightarrow f(S)$ também é contínua.*

Prova: Considere que $f(S)$ seja um subespaço de A' . Agora, tome B um aberto de $f(S)$. Logo,

$$B = U \cap f(S),$$

em que U é um aberto de A' . Além disso, sabe-se que

$$(f|_S)^{-1}(B) = f^{-1}(U) \cap S.$$

Mas como f é contínua, então $f^{-1}(U)$ é aberto em A . Logo, $f|_S$ é contínua. ■

4 Espaços Compactos

Definição 4.1. Uma cobertura de um subconjunto S de um conjunto A é uma coleção de subconjuntos $\{U_j: j \in J\}$ de A tal que $S \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$. Além disso, se o conjunto de índices J for finito, então $\{U_j: j \in J\}$ é dito ser uma cobertura finita.

Definição 4.2. Suponha que $\{U_j: j \in J\}$ e $\{V_k: k \in K\}$ sejam coberturas do subconjunto S de A . Se, para todo $j \in J$ existe um $k_0 \in K$ tal que $U_j = V_{k_0}$, então dizemos que $\{U_j: j \in J\}$ é uma subcobertura da cobertura $\{V_k: k \in K\}$.

Definição 4.3. Suponha que A seja um espaço topológico e S um subconjunto. Dizemos que a cobertura $\{U_j: j \in J\}$ é uma cobertura aberta de S se cada $U_j, j \in J$, é um conjunto aberto de A .

Definição 4.4. Um subconjunto S de um espaço topológico A é dito compacto se cada cobertura aberta de S tem uma subcobertura finita. Em particular, o espaço topológico A é compacto se cada cobertura aberta de A tem uma subcobertura finita.

Nota 4.5. Um subconjunto S de um espaço topológico A é compacto se, e somente se, é compacto como um espaço com a topologia induzida pela topologia de A .

Teorema 4.6. *Seja $f: A \rightarrow A'$ uma função contínua entre os espaços A e A' . Se $S \subseteq A$ é um subespaço compacto, então $f(S)$ é compacto.*

Prova: Considere que $f(S)$ seja um subespaço de A' . Se $f: A \rightarrow A'$ é contínua e S é um subespaço de A , então a função $g = (f|_S): S \rightarrow f(S)$ é contínua, conforme a Proposição 3.8. Suponha que $\{U_j: j \in J\}$ seja uma cobertura aberta do subespaço $f(S)$. Logo, $\{g^{-1}(U_j): j \in J\}$ é uma cobertura aberta do subespaço S . Mas, como S é compacto, existe uma subcobertura finita $\{g^{-1}(U_k): k \in K\}$, com K finito, em que

$$\bigcup_{k \in K} g^{-1}(U_k) = S$$

Além disso, para cada $k \in K$, $g(g^{-1}(U_k)) = U_k$, então

$$\bigcup_{k \in K} U_k = g \left(g^{-1} \left(\bigcup_{k \in K} U_k \right) \right) = g \left(\bigcup_{k \in K} g^{-1}(U_k) \right) = g(S) = f(S),$$

ou seja, $\{U_k : k \in K\}$ é uma subcobertura finita de $f(S)$, o que implica que o subespaço $f(S)$ é compacto. Pela Nota 4.5, temos que $f(S)$ é compacto. ■

Teorema 4.7. *Um subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto.*

Prova: Ver [1, Theorem, 7.10, p. 47]. ■

5 Espaços de Hausdorff

Definição 5.1. Um espaço A é de Hausdorff se para todo par de pontos distintos a, a' existem conjuntos abertos $U_a, U_{a'}$ contendo a e a' , respectivamente, tais que $U_a \cap U_{a'} = \emptyset$.

Exemplo 5.2. O \mathbb{R}^n com a topologia habitual e qualquer conjunto discreto são Hausdorff.

Teorema 5.3. *Um subconjunto compacto B de um espaço de Hausdorff A é fechado.*

Prova: Ver [1, Theorem 8.7, p. 52]. ■

Teorema 5.4. *Suponha que $f : A \rightarrow A'$ seja uma função contínua de um espaço compacto A em um espaço de Hausdorff A' . Assim, f é um homeomorfismo se, e somente se, f é uma bijeção.*

Prova:

(\Rightarrow) Se f é homeomorfismo, então é bijetora por definição.

(\Leftarrow) Se f é uma bijeção, então ela admite uma inversa, a saber, $f^{-1} : A' \rightarrow A$. Tome F um fechado arbitrário de A . Como A é compacto, então a Nota 4.7 nos garante que F é compacto. Além disso, como f é contínua por hipótese, então $f(F)$ é compacto em A' , conforme o Teorema 4.6. Daí, pela Nota 5.3, como A' é de Hausdorff, então $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$ é fechado, o que garante que f^{-1} é contínua. Daí, f é um homeomorfismo. ■

Teorema 5.5. *Um subespaço S de um espaço de Hausdorff A é de Hausdorff.*

Prova: Sejam $a, b \in S$ distintos. Logo, ambos os pontos pertencem a A e como este é de Hausdorff, por definição existem abertos U_a, U_b de A contendo a e b , respectivamente, tais que $U_a \cap U_b = \emptyset$. Então, temos que $V_a = U_a \cap S$ e $V_b = U_b \cap S$ são abertos de S com a topologia induzida pela topologia de A e

$$V_a \cap V_b = (U_a \cap S) \cap (U_b \cap S) = U_a \cap U_b \cap S = \emptyset \cap S = \emptyset,$$

com $a \in V_a$ e $b \in V_b$. Daí, S é de Hausdorff. ■

Teorema 5.6. *Um subconjunto do \mathbb{R}^n com a topologia usual é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Prova: Ver [1, Theorem 27.3, p.173]. ■

6 Topologia Quociente

Definição 6.1. Suponha que $f: A \rightarrow A'$ seja uma função sobrejetora de um espaço topológico A em um conjunto A' . A topologia quociente em A' com relação a f é a família

$$\mathcal{U}_f = \{U: f^{-1}(U) \text{ é aberto em } A\}.$$

Observação 6.2. Note que \mathcal{U}_f é uma topologia para A' , pois satisfaz as condições da Definição 2.1.

De fato, é claro que $\emptyset, A' \in \mathcal{U}_f$, posto que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(A') = A$ são abertos em A . Considerando $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_f$, temos que $f^{-1}(U_1)$ e $f^{-1}(U_2)$ são abertos em A . Assim,

$$f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U_1 \cap U_2),$$

ou seja, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_f$. Além disso, para $(U_j)_{j \in J} \subset \mathcal{U}_f$, temos que $(f^{-1}(U_j))_{j \in J}$ são abertos de A . Além disso, note que

$$\bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} U_j\right),$$

isto é, $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{U}_f$. Portanto, \mathcal{U}_f constitui uma topologia em A' .

Observe que uma vez dada à A' a topologia quociente, a função $f: A \rightarrow A'$ é contínua.

Teorema 6.3 (Propriedade Fundamental das Funções Quocientes). *Seja $f: A \rightarrow A'$ uma função e suponha que A' tem a topologia quociente com respeito a f . Então, a função $g: A' \rightarrow A''$ de A' em um espaço topológico A'' é contínua se, e somente se, $g \circ f: A \rightarrow A''$ é contínua.*

Prova:

(\Rightarrow) Conforme a Definição, como A' tem a topologia quociente, então f é contínua. Suponhamos que a função $g: A' \rightarrow A''$ seja contínua. Assim, a função $g \circ f$ é contínua, conforme o Teorema 3.6.

(\Leftarrow) Suponhamos agora que $g \circ f$ é contínua. Se B é aberto em A'' então $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ é aberto em A . Mas, por definição de topologia quociente, $g^{-1}(B)$ é um aberto de A' e, consequentemente, g é contínua. ■

Exemplo 6.4. Considere o conjunto $\mathbb{RP}^n = \{\{x, -x\}: x \in S^n\}$ de certos pares desordenados de pontos de $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| = 1\}$. Note que existe uma sobrejeção $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ dada por $x \rightarrow \{x, -x\}$. O conjunto \mathbb{RP}^n com a topologia quociente em relação à π é chamado de espaço projetivo de dimensão n .

Exemplo 6.5. Seja

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$$

com a topologia induzida (C é um cilindro). Seja M o conjunto de pares de pontos desordenados de C da forma $\{m, -m\}$, isto é,

$$M = \{\{m, -m\}: m \in C\}.$$

Repare que a função de C em M definida por $x \rightarrow \{x, -x\}$ (função essa que é claramente sobrejetora), então podemos dar a M a topologia quociente. O resultado é chamado de Faixa de Möbius.

Considere a função $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\{m, -m\} \rightarrow ((x^2 - y^2)(2 + xz), 2xy(2 + xz), yz),$$

em que $m = (x, y, z) \in C \subseteq \mathbb{R}^3$. O leitor pode verificar que f é injetora, ou seja, $f(m) = f(n)$ se, e somente se, $n = m$ ou $n = -m$.

A imagem $f(M)$ de M sobre f está na figura abaixo. De fato, M é homeomorfo a $f(M) \subseteq \mathbb{R}^3$ com a topologia induzida. A continuidade da função f segue do fato de que a função $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x, y, z) = ((x^2 - y^2)(2 + xz), 2xy(2 + xz), yz)$$

é contínua e pela validade do Teorema 6.3. Já a continuidade de f^{-1} segue do fato de que M com a topologia quociente com relação a C é compacto, posto que C é compacto. Além disso, $f(M)$ com a topologia induzida é Hausdorff, dado que \mathbb{R}^3 é Hausdorff. Ademais, f é bijetora e, com isso, o Teorema 5.5 garante que f é homeomorfismo.

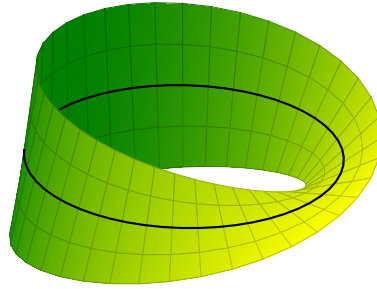


Figura 4.1: Ilustração de uma Faixa de Möbius

6.1 Topologia de Identificação

Definição 6.6. Seja A um espaço topológico e \sim uma relação de equivalência neste conjunto. Conforme a Definição 1.11, a aplicação canônica $\rho: A \rightarrow A/\sim$ dada por $\rho(a) = \bar{a}$ é uma função sobrejetora. Deste modo, podemos atribuir ao conjunto de classes de equivalência a topologia quociente determinada por ρ . Neste caso, dizemos que A/\sim foi obtido por topologia de identificação.

Exemplo 6.7. A relação de equivalência \sim em S^n dada por $x \sim y$ se, e somente se, $x = \pm y$ faz com que S^n/\sim seja \mathbb{RP}^n .

Exemplo 6.8. A relação de equivalência \sim em C (definida no Exemplo 6.5) dada por $x \sim y$ se, e somente se, $x = \pm y$ faz com que C/\sim coincida com a Faixa de Möbius.

Exemplo 6.9. Considere o quadrado unitário

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x, y \leq 1\}$$

com a topologia induzida pela topologia usual do \mathbb{R}^2 e as seguintes relações de equivalência nele (as figuras indicam os pontos e os sentidos em que os identificamos):

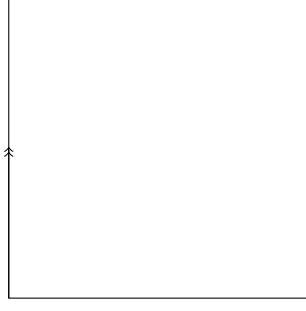


Figura 4.2: Cilindro

- i) $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y')$ ou $\{x, x'\} = \{0, 1\}$ e $y = y'$.

Neste caso, X/\sim é homeomorfa ao cilindro e a identificação dos pontos pode ser observada na Figura 4.2.

Com efeito, definamos

$$\begin{aligned} f: X/\sim &\rightarrow S^1 \times I = C \\ \overline{(x, y)} &\mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y) \end{aligned}$$

Esta função é bem definida, pois como $\overline{(0, y)} = \overline{(1, y)}$, temos que

$$f(\overline{(0, y)}) = (\cos(2\pi \cdot 0), \sin(2\pi \cdot 0), y) = (\cos(0), \sin(0), y) = (1, 0, y)$$

e

$$f(\overline{(1, y)}) = (\cos(2\pi \cdot 1), \sin(2\pi \cdot 1), y) = (\cos(2\pi), \sin(2\pi), y) = (1, 0, y).$$

Além disso, f é injetora, pois:

$$\begin{aligned} f(\overline{(x, y)}) = f(\overline{(x', y')}) &\Rightarrow (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y) = (\cos(2\pi x'), \sin(2\pi x'), y') \Rightarrow \\ \begin{cases} \cos(2\pi x) = \cos(2\pi x') \\ \sin(2\pi x) = \sin(2\pi x') \\ y = y' \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2\pi x = 2\pi x' + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + k \\ y = y' \end{cases} \end{aligned}$$

Como $0 \leq x, x' \leq 1$, então as únicas possibilidades são: $\{x, x'\} = \{0, 1\}$ ou $x = x'$, de onde inferimos que $\overline{(x, y)} = \overline{(x', y')}$, comprovando que f é injetora.

Ademais, f é sobrejetora. Para verificar este fato, tome $(x, y, z) \in C$ arbitrário. Logo, temos que $x^2 + y^2 = 1$ e $0 \leq z \leq 1$. Assim, podemos fazer que

$$\begin{cases} x = \cos(2\pi u), \\ y = \sin(2\pi u), \quad 0 \leq u, v \leq 1 \Rightarrow (x, y, z) = (\cos(2\pi u), \sin(2\pi u), v) = f(\overline{(u, v)}), \\ z = v, \end{cases}$$

ou seja, existe $\overline{(u, v)} \in X/\sim$ tal que $(x, y, z) = f(\overline{(u, v)})$, comprovando que f é sobrejetora.

Por ser injetora e sobrejetora, temos que f é bijetora.

Vejam agora se f é contínua. Para tal, repare que a função $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y)$ é contínua, uma vez que cada função coordenada é contínua. Neste caso, a restrição $F|X: X \rightarrow F(X) = C$ é contínua. Desta maneira, pela Teorema 6.3, f é contínua.

Por fim, f é homeomorfismo.

De fato, X é compacto (pois é limitado e fechado em \mathbb{R}^2). Logo, pelo Teorema 4.6, $\rho(X) = X/\sim$ é compacto. Além disso, como C é subespaço de \mathbb{R}^3 que é Hausdorff, então C é Hausdorff também, conforme o Teorema 5.5. Dado que f é contínua e bijetora, concluímos que f é homeomorfismo, do que segue que X/\sim é homeomorfo ao cilindro C .

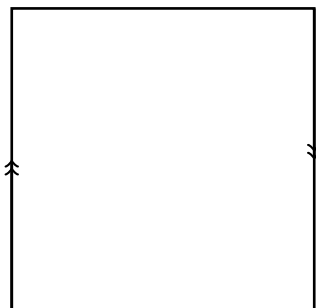


Figura 4.3: Faixa de Möbius

- ii) $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y')$ ou $\{x, x'\} = \{0, 1\}$ e $y = 1 - y'$. Neste caso, X/\sim é homeomorfa à Faixa de Möbius e a identificação dos pontos pode ser observada na Figura 4.3. A prova (que não realizaremos), neste caso, é análoga ao caso i), mas a função que se precisa provar ser homeomorfismo é $f: X/\sim \rightarrow f(X/\sim)$ dada por

$$f(\overline{(x, y)}) = (\cos(2\pi x) (2 + \cos(\pi y) \cos(\pi x)), \sin(2\pi x) (2 + \cos(\pi y) \cos(\pi x)), \cos(\pi y) \sin(\pi x)).$$

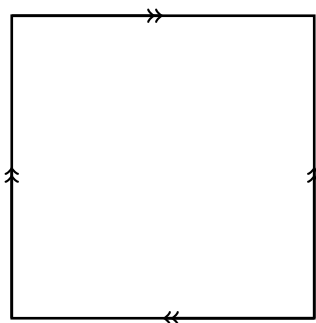


Figura 4.4: Garrafa de Klein

- iii) $(0, y) \sim (1, y), (x, 0) \sim (1 - x, 1)$. Neste caso, X/\sim é homeomorfa à Garrafa de Klein e a identificação dos pontos pode ser observada na Figura 4.4.

Conclusão

A topologia quociente é uma ferramenta útil que nos permite obter novos espaços topológicos a partir de espaços dados. Nos permite trabalhar com a topologia de identificação de pontos através de relações de equivalência e, através da Propriedade Universal, torna possível estudar a continuidade de funções sem se utilizar o método usual.

Agradecimentos: Agradeço à minha orientadora pela oportunidade de ser seu pupilo e, portanto, desenvolver este estudo em sua área, à minha família pelo apoio e incentivo e aos meus professores pelos conselhos e encaminhamentos. Agradeço a FAPESP pelo apoio financeiro.

Referências Bibliográficas

- [1] KOSNIOWSKI, Czes. **A First Course in Algebraic Topology**. New York: Cambridge University Press, 1980. 269 p. ISBN 978-0-521-23195-4.
- [2] LOIBEL, Gilberto Francisco. **Introdução à Topologia**. São Paulo: Editora UNESP, 2007. 129 p. ISBN 978-85-7139-795-8.
- [3] ARMSTRONG, M. A. **Basic Topology**. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1983. ISBN 978-1-4419-2819-1.
- [4] MUNKRES, James R. **Topology**. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, Inc., 2000. 537 p. ISBN 0-13-181629-2.

Séries de Fourier e Números de Liouville

Luca Maciel Alexander[†]

Orientador(a): Adalberto Panobianco Bergamasco

Resumo: O objetivo deste trabalho é determinar quando um operador diferencial linear da forma

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y}, \alpha \in \mathbb{R}$$

atuando no espaço de funções periódicas no plano \mathbb{R}^2 , é globalmente hipoeolítico. Modificamos a definição usual de hipoeoliticidade para evitar o uso de funções generalizadas. Concluimos que L é globalmente hipoeolítico se e somente se α é irracional e não é um número de Liouville.

Palavras-chave: análise funcional; séries de Fourier; números de Liouville; equações diferenciais; regularidade; hipoeoliticidade

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é determinar quando um operador diferencial linear da forma

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y}, \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

atuando no espaço de funções periódicas no plano \mathbb{R}^2 , é globalmente hipoeolítico.

No escopo deste estudo, um operador L é denominado globalmente hipoeolítico se dada uma função periódica u em C^1 , Lu em C^∞ implica u em C^∞ . A definição usual de hipoeoliticidade global, que envolve conceitos da teoria das distribuições de Laurent Schwartz, não será usada.

A dúvida sobre a hipoeoliticidade global do operador L é resolvida relacionando o decaimento dos coeficientes da série de Fourier de $Lu = f$, $u \in C_{per}^1$, $f \in C^\infty$ com a regularidade de u . Concluimos que L é globalmente hipoeolítico quando (e somente quando) α , da definição do operador L , é irracional e não é um número de Liouville. Em outras palavras, α , além de ser irracional, não deve sequer ser aproximado arbitrariamente bem por sequências de racionais.

Dada uma função f em C^∞ , uma análise semelhante à realizada neste trabalho fornece informações sobre a existência de uma função u de classe C^1 que soluciona a equação diferencial

$$f = Lu. \quad (1.2)$$

Deixamos o estudo desse problema de resolubilidade para outra oportunidade.

Operadores hipoeolíticos compõem uma classe útil no estudo de equações diferenciais como a acima, visto que dada uma solução u satisfazendo uma condição de regularidade, se f é suave e o operador L é hipoeolítico, obtemos a suavidade da solução u .

[†]CNPq - PIBIC

2 Análise Funcional

A análise funcional discorre sobre as propriedades de espaços vetoriais e de operadores sobre eles. Em muitos casos, os espaços vetoriais são munidos de uma norma. Os operadores são frequentemente lineares.

Desde seu intenso desenvolvimento no século XX por figuras eminentes como Banach e Riesz, a análise funcional se tornou o principal contexto de estudo das equações diferenciais parciais - tanto por oferecer ferramentas que facilitam trabalhos sobre espaços de funções, quanto por generalizar técnicas já existentes no estudo das EDP's, como a análise de Fourier.

Definimos um espaço vetorial como um conjunto X de vetores, um corpo K (usualmente \mathbb{R} ou \mathbb{C}) de escalares e duas operações - a soma entre vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar - que devem satisfazer algumas regras.

É útil também ter uma noção de “tamanho” dos vetores. Para isto, em muitos casos é possível acoplar uma norma a um espaço vetorial, ou seja, definir uma operação $\|x\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ sobre um vetor que retorna um valor escalar, interpretado como a magnitude desse vetor. Com uma norma da diferença entre vetores, obtemos uma métrica, assim possibilitando a identificação das sequências de Cauchy no espaço. Se todas essas convergirem, o espaço vetorial normado é dito completo. Ademais, se a norma do espaço foi induzida por um produto interno (no sentido de $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$), o espaço completo é um espaço de Hilbert.

Espaços de Hilbert são conducentes à aplicação de técnicas da análise, pois muitas delas são frutíferas no caso de limites (de sequências) existirem. Em espaços completos, limites de sequências de vetores existem na maior quantidade possível de casos.

Um conceito fundamental para o desenvolvimento deste trabalho é o de conjuntos de vetores que geram um espaço. Um conjunto “gerar” um espaço pode significar que todo vetor do espaço é uma combinação linear (única) dos vetores do conjunto (nesse caso, o conjunto é uma base de Hamel do espaço). Estamos, entretanto, mais interessados em bases de Schauder. Uma sequência $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder para um espaço normado X se para todo $x \in X$, existe uma sequência única de escalares $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\|x - (\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n)\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Desse ponto em diante, menções a bases para espaços se referem a bases de Schauder, a menos que o contrário seja dito.

Dada uma base ortonormal M (que contém vetores unitários e dois a dois ortogonais) de um espaço de Hilbert X , é desejável encontrar a forma dos coeficientes α_k das combinações lineares

$$f = \sum_{k=0}^n \alpha_k e_k, \quad e_k \in M, \quad f \in X$$

para os vetores f que têm uma representação desse tipo.

Tomando o produto interno com um $e_j \in M$ de ambos os lados da equação acima, é revelada a série abstrata de Fourier (ainda com finitos termos)

$$f = \sum_{k=0}^n \langle f, e_k \rangle e_k, \quad e_k \in M, \quad f \in X.$$

Para representar todos os vetores $f \in X$ do espaço para o qual M é uma base ortonormal, consideramos o limite quando $n \rightarrow \infty$ das somas acima, e estudamos algumas propriedades de convergência dessas séries, para um f em X :

Teorema 2.1 (Convergência). *Seja (e_k) uma base ortonormal para um espaço de Hilbert X . Então:*

1. *A série $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k$ converge (na norma de X) se e somente se $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2$ converge.*

2. Se $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k = f$, então $\alpha_k = \langle f, e_k \rangle$.
3. Para todo $f \in X$, $\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$ converge.

Observação 2.2. Em outras palavras, é dada uma condição para a convergência de uma série genérica, depois dito que quando esta série genérica converge, ela é a série abstrata de Fourier, depois dito que todo vetor do espaço admite representação como série abstrata de Fourier.

Expomos agora algumas desigualdades e identidades representativas da análise funcional, ligadas à ideia de decompor um vetor em componentes ortogonais.

Proposição 2.3 (Desigualdade de Bessel). *Seja $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência ortonormal do espaço vetorial com produto interno (EVPI) X . Então*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \quad x \in X. \quad (2.1)$$

Prova: Seja $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência ortonormal do EVPI X e $x \in X$. Definimos $y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$, para um n fixo. Definimos $z = x - y$. Mostramos que $z \perp y$:

$$\begin{aligned} \langle z, y \rangle &= \langle x - y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, \sum \langle x, e_k \rangle e_k \rangle - \langle \sum \langle x, e_k \rangle e_k, \sum \langle x, e_i \rangle e_i \rangle \\ &= \sum \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} - \sum |\langle x, e_k \rangle|^2 = 0. \end{aligned}$$

Portanto é possível aplicar a relação de Pitágoras: $\|z\|^2 + \|y\|^2 = \|x\|^2$. De onde segue que $\|z\|^2 + \sum |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2$, e como $\|z\|^2 \geq 0$, temos

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

As sequência das somas parciais (o termo da esquerda) conforme n cresce é monótona crescente e limitada por $\|x\|^2$, logo converge. Dessa forma obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \quad \blacksquare$$

Observação 2.4. Em espaços de Hilbert, se M é uma base ortonormal com $e_k \in M$, a desigualdade de Bessel se torna uma igualdade, a identidade de Parseval. A identidade em questão mostra sua utilidade ao relacionar um vetor a uma soma envolvendo os coeficientes de sua série de Fourier abstrata (além de possuir interessantes interpretações geométricas).

3 Séries de Fourier

Inicialmente desenvolvidas informalmente para resolver um problema físico sobre a propagação de calor, as séries de Fourier inspiraram o desenvolvimento da análise como um todo e foram posteriormente formalizadas e generalizadas.

Voltamos a atenção para o espaço de funções contínuas e 2π -periódicas, com produto interno dado pela integral definida de funções, sobre um período. Tomando uma base ortonormal M de funções trigonométricas, aplicamos os estudos anteriores sobre séries de Fourier abstratas, de forma a interpretar a série

$$\sum_n \langle f, e_n \rangle e_n, \quad e_n \in M \quad (3.1)$$

como

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt e^{inx} \quad (3.2)$$

sendo (3.2) a série de Fourier de f .

Essa construção é empregada na resolução de algumas equações diferenciais parciais (do calor, da onda e de Laplace), em que soluções se apresentam naturalmente como séries de Fourier.

É importante saber para quais escolhas de f obtemos a convergência dessa série. Segue o principal resultado com esse viés.

Teorema 3.1 (Teorema de Fourier). *Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier de f converge em cada ponto x para o valor $[f(x+0) + f(x-0)]/2$ (a média aritmética dos limites laterais de f no ponto x).*

Além disso, fornecemos condições mais restritivas sobre f , em troca da garantia de convergência uniforme de sua série de Fourier.

Teorema 3.2 (Convergência uniforme das séries de Fourier). *Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, seccionalmente contínua (e derivável fora dos pontos de descontinuidade), tal que a derivada primeira (nos pontos em que existir) é integrável e absolutamente integrável. Então a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f .*

Um operador linear rico em propriedades relacionadas aos tópicos desenvolvidos é a transformada de Fourier (\mathcal{F}):

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx. \quad (3.3)$$

Pode-se usar este operador para definir automorfismos nos espaços L^2 e de Schwartz (\mathcal{S}). Além disso, são conhecidas as propriedades dessa transformada de traduzir derivadas para polinômios e convoluções para produtos (e propriedades análogas de sua inversa):

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^p f}{\partial x^p}\right] = (i\xi)^p \mathcal{F}[f] \quad \text{e} \quad \mathcal{F}[(-ix)^p f(x)] = \frac{\partial^p \mathcal{F}[f]}{\partial \xi^p} \quad (3.4)$$

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g] \quad \text{e} \quad \mathcal{F}[fg] = (\sqrt{2\pi})^{-1} \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g] \quad (3.5)$$

Propriedades análogas podem ser verificadas sobre os coeficientes das séries de Fourier.

4 Números de Liouville

Números transcendentos são definidos como os números reais que não são raízes de uma equação polinomial a coeficientes inteiros, ou seja, que não são algébricos. Essa definição é geralmente atribuída a Euler, século XVIII.

Demonstrações construtivas sobre a existência desses números foram expostas no século seguinte, desbravadas pelo Liouville, ao definir uma classe de números transcendentos: os números de Liouville. São essencialmente os números irracionais melhor aproximados por seqüências de racionais. Segue uma definição precisa.

Definição 4.1 (Número de Liouville). Um número $\alpha \in \mathbb{R}$ é de Liouville se existir uma sequência de números racionais $(p_j/q_j)_{j \in \mathbb{N}}$, com todos os elementos distintos, p_j e q_j inteiros e $q_j > 0$, tal que para todo valor do índice j temos

$$\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j}. \quad (4.1)$$

Para fazer uso dos números de Liouville na resolução do problema proposto na seção 6, basta conhecer a definição acima (aliás, um enunciado parecido e equivalente). Apesar disso, estudamos a conexão dos números de Liouville com os números transcendentos, pela relevância histórica. Após o lema, segue o principal teorema que exprime essa conexão.

Lema 4.2. *Todo número de Liouville $\alpha \in \mathbb{R}$ é irracional.*

Prova: Mostraremos a contrapositiva. Representamos $\alpha \in \mathbb{Q}$ como a fração irredutível c/d , $c, d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$. Dada uma sequência de racionais $(p_j/q_j)_{j \in \mathbb{N}}$, como na definição 4.1, obtemos

$$\left| \frac{c}{d} - \frac{p_j}{q_j} \right| = \frac{|c \cdot q_j - p_j \cdot d|}{|d \cdot q_j|}.$$

Como $c, d, p_j, q_j \in \mathbb{Z}$, o numerador do lado direito é um inteiro não negativo. Caso o numerador não se anule dado um índice j , temos $|c \cdot q_j - p_j \cdot d| \geq 1$ e para todo j maior que uma ordem fixa, $|d \cdot q_j| < q_j^j$.

Como também sabemos que $|c \cdot q_j - p_j \cdot d|$ se anula para apenas um valor de j (pois o anulamento ocorrer é o mesmo que $p_j/q_j = c/d$, e os elementos da sequência $(p_j/q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ são distintos), concluímos que, para todo j maior que uma ordem fixa,

$$\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| = \frac{|c \cdot q_j - p_j \cdot d|}{|d \cdot q_j|} > \frac{1}{q_j^j}. \quad (4.2)$$

Mostramos que para um $\alpha \in \mathbb{Q}$, não existe escolha de sequência $(p_j/q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ que o faça um número de Liouville. ■

Teorema 4.3 (Teorema de Liouville sobre Aproximação Diofantina). *Todo número de Liouville $\alpha \in \mathbb{R}$ é transcendente.*

Prova: Mostraremos a contrapositiva. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ algébrico, raiz do polinômio irredutível $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de grau d .

Como f é uma função polinomial, estão satisfeitas as hipóteses necessárias para o uso do teorema do valor médio, o qual garante que existe ξ entre α e p/q tal que

$$f'(\xi)(\alpha - \frac{p}{q}) = f(\alpha) - f(\frac{p}{q}).$$

Por $f(x)$ ser um polinômio a coeficientes inteiros de grau d , $f(p/q)$ é um número racional, com denominador no máximo q^d . Como f é irredutível, $f(p/q) \neq 0$, logo $|f(p/q)| \geq 1/q^d$. Com isso,

$$|f'(\xi)| \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| 0 - f(\frac{p}{q}) \right| \geq \frac{1}{q^d} \implies \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1/|f'(\xi)|}{q^d}.$$

Como $f(x)$ é irredutível, sua raiz α tem multiplicidade um, portanto $f'(\alpha) \neq 0$. Pela continuidade de f' , uma escolha de ξ suficientemente próxima de α garante $f'(\xi) \neq 0$.

Assim, para todo racional p/q , existe um ξ entre α e p/q de forma que definimos $C = |f'(\xi)| > 0$ e afirmamos que α não é número de Liouville, pela seguinte expressão:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^d}. \quad \blacksquare$$

Para finalizar esta seção, apresentamos uma forma visual de interpretar os números de Liouville. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Reescrevemos a definição em (4.1) como

$$0 < |q\alpha - p| < \frac{1}{q^{n-1}} \quad (4.3)$$

onde α é de Liouville se para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um racional p/q , $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{>1}$ que satisfaz (4.3). Note que a quantidade ao lado esquerdo da desigualdade (4.3) é a distância (usual euclidiana sobre \mathbb{R}^2) entre o ponto $(q\alpha, q)$ (pertencente à reta r que passa pela origem e por $(\alpha, 1)$) e o ponto (p, q) . Fixado um $n \in \mathbb{N}$, estas distâncias devem ser limitadas por $\delta = \delta(q, n) = 1/(q^{n-1})$. Representamos essa restrição por uma margem de largura δ em torno da reta r .

Portanto α é de Liouville se e somente se para todo n (que determina a largura da margem), há ao menos um ponto da malha $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{>1}$ que não pertence a r mas está contido na região sombreada.

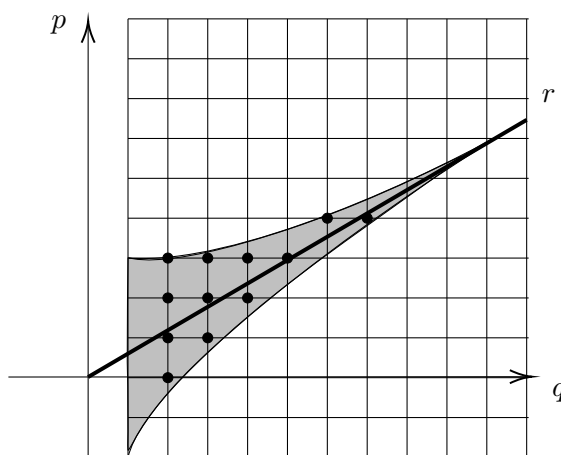


Figura 5.1: Interpretação geométrica de um número de Liouville (fora de escala).

5 EDP's

Motivados pela aplicação do conceito de hipoeleticidade apresentada no último parágrafo da seção 1, mostraremos que no exemplo simples de equação diferencial abaixo (em particular, uma EDO), se f é suave e $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C_{per}^1$, então u também é suave.

$$f = \frac{du}{dx} \quad (5.1)$$

Como f é suave, é também contínua, portanto integrável (em qualquer intervalo limitado):

$$\int f \, dx = \int \frac{du}{dx} \, dx = u + C, \text{ para } C \text{ constante.}$$

Assim, como $\int f \, dx \in C^\infty$, vale que $u \in C^\infty$.

Existe, entretanto, outro método de resolução para esse problema. Seguem alguns pré-requisitos para esta discussão.

Definição 5.1 (Decaimento rápido). Uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decai rapidamente se decai mais rapidamente que o inverso multiplicativo de qualquer polinômio. Isto é,

$$\forall k > 0 \exists N > 0 \exists C > 0 : n > N \implies |a_n| \leq Cn^{-k}, n \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

Dada a definição acima, podemos investigar a conexão entre a regularidade de funções periódicas e o decaimento dos coeficientes de suas séries de Fourier, iniciando pela seguinte estimativa (obtida através de integração por partes sobre a expressão que define os coeficientes $\hat{f}(n)$):

$$\begin{aligned} &\text{Se } f \in C^k \\ &\text{Então } \exists N > 0 \exists C > 0 : n > N \implies |\hat{f}(n)| \leq Cn^{-k}, n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (5.3)$$

em que vale uma espécie de recíproca, restringindo a regularidade de uma função dado o comportamento dos seus coeficientes de Fourier:

$$\begin{aligned} &\text{Se } \exists N > 0 \exists C > 0 : n > N \implies |\hat{f}(n)| \leq Cn^{-k}, n \in \mathbb{N}, k \geq 2 \\ &\text{Então } f \in C^{k-2}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

O leitor pode notar que dada uma f em C^k , (5.3) garante um decaimento de coeficientes na ordem de n^{-k} (ou melhor), porém dado este decaimento, (5.4) não nos traz necessariamente de volta à hipótese inicial (de f em C^k). Por outra, as implicações acima não são capazes de fornecer uma relação suficientemente estreita entre a regularidade e o decaimento estudados, isto é, a menos do notável caso no qual f é suave:

$$f \in C^\infty \iff (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ decai rapidamente.} \quad (5.5)$$

Isso será indispensável nos estudos que seguem, por fortemente relacionar uma ideia central na definição de hipoeiticidade (a classe de funções C^∞) à análise de Fourier.

Voltamos agora ao problema de determinar a regularidade de u , na equação (5.1).

Primeiro escrevemos os coeficientes das séries de Fourier das funções em ambos os lados da igualdade, obtendo:

$$b(n) = a(n) \cdot n \cdot i$$

em que $b(n)$ são os coeficientes da série de Fourier de f , e $a(n)$ os coeficientes da série de Fourier de u .

$f \in C^\infty$ logo $b(n)$ decai rapidamente conforme $|n| \rightarrow \infty$. Assim, $b(n)/ni$ (equivalente a $a(n)$) também decai rapidamente. Portanto u , a função representada pelos coeficientes de Fourier $a(n)$, é suave.

6 Um Problema sobre Regularidade

Objetivamos por fim solucionar o problema dado na seção 1. As ferramentas da análise de Fourier desenvolvidas até o momento serão empregadas para estudar a regularidade das funções envolvidas na equação (1.2). Com isso revelaremos a influência dos valores do fator α sobre a hipoeiticidade do operador L . Veremos que dado α irracional, temos a hipoeiticidade global de L quando α não é um número de Liouville.

Resumindo, gostaríamos de determinar sob quais condições o operador

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y}, \alpha \in \mathbb{R}$$

atuando no espaço de funções periódicas no plano \mathbb{R}^2 , é globalmente hipoeolítico. Com este fim, relacionamos as funções $u \in C_{per}^1$ e $f \in C^\infty$ pela equação

$$f = Lu$$

e estudamos a regularidade de u , a depender de escolhas de α .

Primeiramente escrevemos os coeficientes das séries de Fourier das funções em ambos os lados da igualdade, obtendo:

$$b(n, m) = a(n, m) \cdot (n - \alpha m) \cdot i \quad (6.1)$$

ou, aproveitando o caso em que α é irracional para garantir que $n - \alpha m$ não se anula,

$$a(n, m) = \frac{b(n, m)}{(n - \alpha m) \cdot i} \quad (6.2)$$

em que $b(n, m)$ são os coeficientes da série de Fourier de f , e $a(n, m)$ os coeficientes da série de Fourier de u . Para facilitar os cálculos, mudamos o sinal de α , sem prejudicar o resultado final.

A seguir suporemos que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não seja um número de Liouville e verificaremos se L é globalmente hipoeolítico nesse caso. Após isso, faremos o mesmo, mas assumindo que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ seja um número de Liouville. Por fim, comentaremos sobre o caso em que $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Suponhamos que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não seja um número de Liouville. Por definição, para $|n|$ e $|m|$ suficientemente grandes,

$$\exists M > 0 : \left| \alpha - \frac{n}{m} \right| \geq \frac{1}{m^M}. \quad (6.3)$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por um fator de m , obtemos

$$\exists M > 0 : |n - \alpha m| \geq \frac{1}{m^M}. \quad (6.4)$$

Observação 6.1. Com a multiplicação por m , o lado direito permanece da forma $1/m^M$, em vez de $1/m^{M-1}$, pois $1/m^M < 1/m^{M-1}$.

Expomos agora um resultado análogo ao (5.5), para funções de domínio bidimensional. Sejam $x(n, m)$ os coeficientes da série de Fourier de g . Então:

$$g \in C^\infty \iff \sup_{(n, m) \in \mathbb{Z}^2} \frac{|x(n, m)|}{(n^2 + m^2 + 1)^k} < +\infty, \forall k \in \mathbb{R}. \quad (6.5)$$

Logo, como $f \in C^\infty$, $b(n, m)$ satisfaz a condição de decaimento acima. Pela equação (6.1), $a(n, m) \cdot (n - \alpha m) \cdot i$ satisfaz esta mesma condição.

Como em (6.4) estabelecemos um limitante inferior para os valores de $|n - \alpha m|$ (para $|n|$ e $|m|$ grandes), segue que $a(n, m)$ também satisfaz a condição de decaimento, ou seja, $u \in C^\infty$.

Em suma, se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não é um número de Liouville, L é globalmente hipoeolítico.

Suponhamos agora que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é um número de Liouville.

Por definição, para todo $M > 0$ existe um conjunto infinito de racionais $\{n/m : n, m \in \mathbb{Z}, m > 0\}$ tal que para $|n|$ e $|m|$ suficientemente grandes,

$$\left| \alpha - \frac{n}{m} \right| < \frac{1}{m^M}. \quad (6.6)$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por um fator de m , obtemos

$$|n - \alpha m| < \frac{1}{m^M}. \quad (6.7)$$

Observação 6.2. Com a multiplicação por m , o lado direito permanece da forma $1/m^M$, em vez de $1/m^{M-1}$, pois $1/m^M < 1/m^{M-1}$. Logo, os limitantes superiores em tanto (6.6) quanto (6.7) poderiam ser $1/m^{M-1}$, ou seja, ambos com m à mesma potência.

Atingido este limitante superior para $|n - \alpha m|$, é possível proceder de maneira análoga à acima para concluir que $a(n, m)$ não decai rapidamente, portanto não é suave (i.e. se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é um número de Liouville, L não é globalmente hipoelítico).

Por fim, consideramos o caso em que α é racional. Por simplicidade vamos redigir apenas o caso de $\alpha > 0$. Podemos escolher $\alpha = p/q$, p e q inteiros positivos. Definimos

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} e^{i(kpx - kqy)} \quad (6.8)$$

que converge uniformemente pelo teste de Weierstrass, pois $|(1/k^4)e^{i(kpx - kqy)}| \leq 1/k^4$. Pelo mesmo argumento, $\sum (\partial/\partial x)((1/k^4)e^{i(kpx - kqy)})$ e $\sum (\partial/\partial y)((1/k^4)e^{i(kpx - kqy)})$ convergem uniformemente, logo as derivadas parciais de u existem, e

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum \frac{\partial}{\partial x} ((1/k^4)e^{i(kpx - kqy)}) = \frac{ip}{k^3} e^{i(kpx - kqy)} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \sum \frac{\partial}{\partial y} ((1/k^4)e^{i(kpx - kqy)}) = \frac{-iq}{k^3} e^{i(kpx - kqy)} \end{aligned}$$

portanto $q(\partial u/\partial x) = -p(\partial u/\partial y) \implies (\partial u/\partial x) + \alpha(\partial u/\partial y) = 0$.

Isto é, u é solução de (1.2). Com a implicação (5.3), obtemos $u \in C_{per}^1 \setminus C^\infty$, mas $Lu = 0 \in C^\infty$. Logo L não é globalmente hipoelítico.

Agradecimentos: Agradecemos ao CNPq pelo apoio financeiro.

Abstract: Our objective is to determine when a linear differential operator of the kind

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

acting on the space of periodic functions over \mathbb{R}^2 , is globally hypoelliptic. The usual definition of hypoellipticity is modified to avoid the use of generalized functions. We conclude that L is globally hypoelliptic if (and only if) α is irrational and is not a Liouville number.

Keywords: functional analysis; Fourier series; Liouville numbers; differential equations; regularity; hypoellipticity

Referências Bibliográficas

- [1] Figueiredo, D.G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 1977.
- [2] Garrett, P., *Liouville's theorem on diophantine approximation*, University of Minnesota, 2013.
- [3] Greenfield, S. and Wallach, N., *Global Hypoellipticity and Liouville Numbers*, Proc. A.M.S., Vol. 31, 112–114, 1972.
- [4] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.
- [5] Lima, E.L., *Análise Real, vol.1*, IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 2017.

- [6] Niven, I., *Irrational Numbers*, The Mathematical Association of America, 1985.
- [7] Zani, S., *Hipoeliticidade Global para Operadores de Segunda Ordem*, ICMC - USP, 1988.

Equações Diferenciais com Retardamento Aplicadas à Dinâmica de Crescimento Tumoral

Maitê Borges Fiorini dos Anjos[†]

Orientador(a): Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

Resumo: Os objetivos deste trabalho são apresentar três modelos de equações diferenciais com retardamento aplicados à dinâmica de crescimento tumoral: o logístico, o de Gompertz e o de Greenspan, e analisar a estabilidade e bifurcação de Hopf destes modelos.

Palavras-chave: equações diferenciais com retardamento; modelo logístico; modelo Gompertz; modelo Greenspan; bifurcação de Hopf

1 Introdução

O câncer é um fenômeno complexo resultante da quebra da interação celular normal e do controle da replicação. Existe, mundialmente, uma grande quantidade de esforço direcionado para a luta contra o câncer, com o objetivo de encontrar estratégias para superar este desafio. Lidar com este problema exige cooperação entre cientistas que trabalham em diferentes áreas: biologia, imunologia, medicina, física e matemática. À última cabe o papel de fornecer uma descrição da realidade por meio de modelos matemáticos, que devem contribuir para o entendimento do sistema estudado. De acordo com [9], “um modelo matemático é uma construção matemática abstrata e simplificada relacionada à parte do mundo real e criada para um propósito específico. Ou seja, foi concebido para imitar a realidade utilizando a linguagem da matemática.”

É muito comum, na modelagem de sistemas reais, a utilização de equações diferenciais ordinárias e parciais. Contudo, existe uma grande quantidade de fenômenos, como o crescimento tumoral, em que a taxa de variação do estado em cada instante depende, não somente do estado do processo nesse instante, mas também do histórico de estados do fenômeno. Assim sendo, para tais casos, se faz necessário a utilização das equações diferenciais com retardamento (EDRs), ferramentas capazes de descrever processos que envolvem atrasos de tempo de forma mais realística. O retardo em equações diferenciais possui um papel essencial na modelagem de processos biológicos, em especial no nível celular, sendo assim uma ferramenta importante na modelagem do crescimento de tumores.

Levando em conta que a evolução de sistemas biológicos pode depender também do passado, as EDRs tornam os modelos mais apropriados, pois permitem considerar fatores como a duração do ciclo celular. Em vista disso, neste trabalho apresentaremos três modelos de equações diferenciais com retardamento aplicados à dinâmica de crescimento tumoral, derivadas de modelos sem retardo: o logístico, o de Gompertz e o de Greenspan. Vamos estudar propriedades matemáticas de cada modelo, como estabilidade e bifurcação. Antes de introduzir os modelos, apresentaremos algumas noções básicas sobre EDRs.

[†]Bolsista FAPESP, Processo: 2022/07722-0

2 Preliminares

Nesta seção, temos como objetivo apresentar a definição de uma equação diferencial funcional (EDF) de primeira ordem com retardamento, assim como alguns resultados importantes, como o teorema de existência e unicidade e o teorema da bifurcação de Hopf. Para o desenvolvimento desta parte, utilizamos as referências [1, 5].

Sejam $r \geq 0$ um número real, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, \mathbb{R}^n o espaço vetorial real n -dimensional com norma $|\cdot|$. Denotaremos por $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ o espaço de Banach das aplicações contínuas ϕ de $[a, b]$ em \mathbb{R}^n com a norma da convergência uniforme, dada por

$$\|\phi\| = \sup_{a \leq \theta \leq b} |\phi(\theta)|.$$

Se $t_0 \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$ e $x \in C([t_0 - r, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$, então, para qualquer $t \in [t_0, t_0 + A)$, a notação x_t representa a função de $[-r, 0]$ em \mathbb{R}^n definida por

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad -r \leq \theta \leq 0.$$

No que segue, denotaremos o espaço $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ por C .

Definição 2.1. Seja $f: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação. A equação

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{2.1}$$

é chamada uma equação diferencial funcional de primeira ordem com retardamento.

Observamos que a equação (2.1) inclui equações diferenciais ordinárias, pois para $r = 0$ temos $\theta = 0$ e, portanto, $x_t(\theta) = x_t(0) = x(t)$, obtendo $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

Definição 2.2. Dizemos que uma aplicação x é solução da equação (2.1) em $[t_0 - r, t_0 + A)$ se existem $t_0 \in \mathbb{R}$ e $A > 0$ tais que $x \in C([t_0 - r, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in \mathbb{R} \times C$ e $x(t)$ satisfaz a equação (2.1) para $t \in [t_0, t_0 + A)$.

Definição 2.3. Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\phi \in C$, dizemos que x é solução da equação (2.1) com função inicial ϕ em t_0 se existe $A > 0$ tal que $x(t)$ é solução da equação (2.1) em $[t_0 - r, t_0 + A)$ e $x_{t_0} = \phi$.

Teorema 2.4. (*Teorema de Existência e Unicidade para EDFRs*). *Seja $f(t, \phi)$ contínua e localmente lipschitziana com relação a ϕ em $\mathbb{R} \times C$. Então, para qualquer $t_0 > 0$ e $\varphi \in C$, existem $A > 0$ e uma função $x(t)$ definida em $[t_0 - r, t_0 + A)$ que é solução da equação (2.1) com função inicial φ em t_0 . Além do mais, esta solução é única.*

Definição 2.5. A solução trivial $\bar{x} \equiv 0$ de (2.1) será dita

- (i) *Estável*, se para quaisquer $\sigma \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\varepsilon, \sigma) > 0$ tal que se $x(\sigma, \phi, f)$ for uma solução de (2.1) tal que $x_\sigma(\sigma, \phi, f) = \phi$ e

$$\|\phi\| < \delta,$$

então

$$\|x_t(\sigma, \phi, f)\| < \varepsilon, \quad t \geq \sigma.$$

- (ii) *Uniformemente estável*, se o número δ no item (i) for independente de σ .

- (ii) *Assintoticamente estável*, se existir $\delta_0 = \delta_0(\sigma) > 0$ e para todo $\varepsilon > 0$, existir $T = T(\varepsilon) \geq 0$ tal que se $x(\sigma, \phi, f)$ for uma solução de (2.1) tal que $x_\sigma(\sigma, \phi, f) = \phi$ e

$$\|\phi\| < \delta_0,$$

então

$$\|x_t(\sigma, \phi, f)\| < \varepsilon, \quad t \geq \sigma + T.$$

- (iv) *Uniformemente assintoticamente estável*, se o número δ no item (iii) for independente de σ .

Observação 2.6. Se y for uma solução qualquer da equação (2.1), então y será dita *estável*, se a solução nula da equação

$$z'(t) = f(z_t + y_t, t) - f(y_t, t). \quad (2.2)$$

for estável.

Teorema 2.7. A solução trivial $z = 0$ da equação

$$z' = -az(t-1)$$

é estável para $a < \frac{\pi}{2}$ e instável para $a \geq \frac{\pi}{2}$.

Definição 2.8. Dizemos que uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é ω -periódica se existe $\omega \in \mathbb{R}$ tal que $f(x + \omega) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A seguir, apresentamos uma das maneiras mais simples em que soluções periódicas de EDRs autônomas podem surgir - a chamada bifurcação de Hopf. Esta exposição está fundamentada nas referências [1, 5].

Consideremos uma família de parâmetros de EDRs da forma

$$\dot{x}(t) = F(\alpha, x_t), \quad (2.3)$$

onde $F(\alpha, \phi)$ possui primeira e segunda derivadas contínuas em α, ϕ , para $\alpha \in \mathbb{R}, \phi \in C$ e $F(\alpha, 0) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos $L: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$L(\alpha)\psi = F_\phi(\alpha, 0)\psi,$$

onde $F_\phi(\alpha, 0)$ é a derivada de $F(\alpha, \phi)$ com relação a ϕ em $\phi = 0$ e definimos

$$f(\alpha, \phi) = F(\alpha, \phi) - L(\alpha)\phi.$$

Para o próximo teorema utilizaremos as seguintes hipóteses:

- (H1) A EDR($L(0)$) linear possui uma raiz característica simples puramente imaginária $\lambda_0 = i\nu_0 \neq 0$ e todas as raízes características $\lambda_j \neq \lambda_0, \bar{\lambda}_0$, satisfazem $\lambda_j \neq m\lambda_0$ para qualquer $m \in \mathbb{Z}$.
- (H2) $\operatorname{Re} \lambda'(0) \neq 0$, onde $\lambda(\alpha)$ é a raiz característica simples da EDR($L(\alpha)$) linear que possui uma derivada contínua $\lambda'(\alpha)$ em α para $|\alpha| < \alpha_0$.

Teorema 2.9 (Bifurcação de Hopf). *Suponha que $F(\alpha, \phi)$ possui primeira derivada contínua com relação a α, ϕ , $F(\alpha, 0) = 0$ para todo α , e as hipóteses (H1) e (H2) são satisfeitas. Então, existem constantes $a_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, funções $\alpha(a) \in \mathbb{R}$, $\omega(a) \in \mathbb{R}$, e uma função $x^*(a)$, $\omega(a)$ -periódica, com todas as funções sendo continuamente diferenciáveis em a para $|a| < a_0$, tal que $x^*(a)$ é uma solução da equação (2.3) com*

$$x_0^*(a)^{P_\alpha} = \Phi_{\alpha(a)} y^*(a), \quad x_0^*(a)^{Q_\alpha} = z_0^*(a),$$

onde $y^*(a) = (a, 0)^T + o(|a|)$, $z_0^* = o(|a|)$ quando $|a| \rightarrow 0$. Além disso, para $|\alpha| < \alpha_0$, $|\omega - (2\pi/\nu_0)| < \delta_0$, toda solução ω -periódica da equação (2.3) com $|x_t| < \delta_0$ deve ser do tipo acima exceto por uma translação na fase.

Para encerrar esta seção, com base em [8], apresentaremos alguns resultados acerca da estabilidade e bifurcação de Hopf para uma determinada classe de EDRs, a saber, a que contém equações na forma:

$$\dot{y} = \alpha f(y(s-1)), \quad y(s) = \phi(s) \text{ para } s \in [-1, 0] \quad (2.4)$$

onde $\alpha > 0$, a função inicial ϕ é contínua no intervalo $[-1, 0]$ e $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $f(0) = f(1) = 0$;
- (ii) f é positiva no intervalo $[0, 1]$ e negativa fora desse intervalo, isto é, $f(x) > 0$ para $x \in (0, 1)$ e $f(x) < 0$ para $x \in (1, +\infty)$;
- (iii) f atinge o máximo global dentro do intervalo $[0, 1]$, isto é, existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) > f(x)$ para $x \neq c$ e f é não decrescente em $[c, +\infty)$.

Para o próximo teorema, vamos considerar a seguinte função:

$$g(y, \alpha) = 1 - y + \alpha f(1 + \alpha f(y)). \quad (2.5)$$

O teorema a seguir afirma que a positividade da função no intervalo $[c, 1)$ garante a estabilidade global do estado estacionário positivo da Equação (2.4).

Teorema 2.10. *Seja $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz as condições (i), (ii) e (iii). Se $g(y, \alpha)$ for estritamente positiva para $y \in [c, 1)$, então para qualquer função inicial $0 \leq \varphi(t) \leq 1, t \in [-1, 0]$, existe uma única solução global e não-negativa $y(t)$ para (2.4) e se $\varphi \neq 0$, então $y(t) \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow \infty$. Além disso, a função g é decrescente em α e isso implica que existe um único valor crítico α_c , tal que, para $\alpha < \alpha_c$, temos $g(y, \alpha) > 0$ para $y \in [c, 1)$ e para $\alpha > \alpha_c$ temos $g(y, \alpha) < 0$, para $y \in [c, 1)$.*

Corolário 2.11. *Suponha que $f \in C^1$ e f seja função côncava satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii). Se*

$$f' \left(1 + \frac{f(y)}{|f'(1)|} \right) f'(y) < (f'(1))^2, \quad y \in [c, 1], \quad (2.6)$$

e $\alpha|f'(1)| \leq 1$, então a solução $y(t)$ para a equação (2.4) com condição inicial $0 \leq \phi(t) \leq 1$ para $t \in [-1, 0]$, $\phi \neq 0$, é não negativa e converge para 1 quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Vamos provar que a função g definida em (2.5) é positiva no intervalo $[c, 1)$. Por hipótese, f é decrescente para $y > 1$, portanto, pelo teorema anterior g é decrescente em α . Assim, é suficiente provar que $g\left(y, \frac{1}{|f'(1)|}\right)$ é positiva no intervalo $[c, 1)$.

Note que $g(1, \alpha) = \alpha f(1 + \alpha f(1)) = \alpha f(1) = 0$. Além disso, se

$$f' \left(1 + \frac{f(y)}{|f'(1)|} \right) f'(y) < (f'(1))^2, \quad y \in [c, 1]$$

então

$$\frac{\partial f}{\partial y} \left(y, \frac{1}{|f'(1)|} \right) = -1 + \frac{1}{|f'(1)|} f' \left(1 + \frac{f(y)}{|f'(1)|} \right) \frac{f'(y)}{|f'(1)|} < 0$$

Portanto, $g \left(y, \frac{1}{|f'(1)|} \right)$ deve ser positiva no intervalo $[c, 1)$. ■

Corolário 2.12. *Seja $f \in C^1$ uma função côncava satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii). Se a função*

$$h(y) = \frac{f''(y)}{f'(y)}$$

for decrescente no intervalo $(c, 1)$ e $\alpha|f'(1)| \leq 1$, então a solução $y(t)$ para a equação (2.4) com condição inicial $0 \leq \phi(t) \leq 1$ para $t \in [-1, 0]$, $\phi \neq 0$, é não negativa e converge para 1 quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Seja $p(y)$ a parte esquerda da desigualdade (2.6), isto é,

$$p(y) = f' \left(1 + \frac{f(y)}{|f'(1)|} \right) f'(y).$$

É suficiente provar que $p(y) < (f'(1))^2$ para $y \in [c, 1)$. Note que

$$p(1) = f' \left(1 + \frac{0}{|f'(1)|} \right) f'(1) = (f'(1))^2$$

e

$$p(c) = f' \left(1 + \frac{f(c)}{|f'(1)|} \right) \cdot 0 = 0 < (f'(1))^2.$$

Vamos mostrar que para $y \in (c, 1)$, temos $p'(y) > 0$, ou seja,

$$f'' \left(1 + \frac{f(y)}{|f'(1)|} \right) \frac{(f'(y))^2}{|f'(1)|} + f' \left(1 + \frac{f(y)}{|f'(1)|} \right) f''(y) > 0.$$

Como f é côncava e decrescente para $y > c$, a desigualdade acima é equivalente a

$$\frac{f''(y)}{f'(y)} > \frac{f'' \left(1 + \frac{f(y)}{|f'(1)|} \right) |f'(y)|}{f' \left(1 + \frac{f(y)}{|f'(1)|} \right) |f'(1)|}.$$

Como $\frac{|f'(x)|}{|f'(1)|} < 1$ e $h(y) > h(x)$ para qualquer $c < y < 1$ e $x = 1 + \frac{f(y)}{|f'(1)|}$, o resultado está provado. ■

Teorema 2.13. *Se o estado estacionário $y = 1$ da equação (2.4) perde estabilidade em $\alpha_0 = \frac{\pi}{2|f'(1)|}$ e se*

$$(11\pi - 4)(f''(1))^2 > \pi f'''(1)f'(1),$$

então a Bifurcação de Hopf estável ocorre nesse ponto.

Corolário 2.14. *Se f é de classe C^2 , $f''(1) \neq 0$, $f'''(1) \geq 0$, então a Bifurcação de Hopf em $\alpha_0 = \frac{\pi}{2|f'(1)|}$ é estável.*

Demonstração. Note que para $f'''(1) \geq 0$ temos que $\pi f'''(1)f'(1) \leq 0$, pois $f'(1) < 0$. Portanto,

$$(11\pi - 4)(f''(1))^2 > 0 \geq \pi f'''(1)f'(1)$$

e pelo teorema anterior o resultado está provado. ■

Exemplo 2.15. Considere a classe de funções

$$f(y) = y(1 - y^a), \quad a > 0.$$

Note que para qualquer $a > 0$ a função satisfaz as condições (i), (ii) e (iii). De fato,

$$f(0) = 0(1 - 0^a) = 0$$

e

$$f(1) = 1(1 - 1^a) = 0.$$

Além disso,

$$f'(y) = 1 - y^a(1 + a) = 0 \implies y = \left(\frac{1}{1+a}\right)^{\frac{1}{a}}$$

e

$$f''(y) = -a(a+1)y^{a-1} < 0, \quad \text{para todo } y > 0.$$

Seja

$$h(y) = \frac{a(a+1)y^{a-1}}{y^a(1+a) - 1} = \frac{f''(y)}{f'(y)}$$

Temos que

$$h'(y) = \frac{a(a+1)y(1 - ay^a - y^a - a)}{((a+1)y^a - 1)^2} < 0 \implies y > \left(\frac{1-a}{a+1}\right)^{\frac{1}{a}}$$

Portanto, h é decrescente para $y > c = \left(\frac{1-a}{a+1}\right)^{\frac{1}{a}}$. Pelo Corolário 2.12, podemos concluir que o estado estacionário $y = 1$ é globalmente estável para $0 < \alpha \leq \frac{1}{|f'(1)|} = \frac{1}{a}$.

3 Modelos logístico, Gompertz e Greenspan

Nesta seção, apresentaremos três modelos de equações diferenciais com retardamento: o modelo de Gompertz, o modelo logístico e o modelo de Greenspan. A equação logística foi estabelecida por Pierre François Verhulst em 1838 [10]. Esse modelo descreve o crescimento de uma população que é limitada por uma capacidade de carga de K . A equação logística assume que a taxa de crescimento diminui linearmente com o tamanho até se igualar a zero ao atingir a capacidade de carga.

O Modelo de Gompertz foi criado originalmente por Benjamin Gompertz, em 1825, para explicar as curvas de mortalidade humana [11]. A equação de Gompertz descreve um crescimento que é mais lento no início e no final de um determinado período. Já o modelo Greenspan, foi sugerido por Harvey P. Greenspan como um modelo matemático de crescimento tumoral por difusão [12].

Iremos analisar os modelos introduzindo um atraso de tempo $\tau > 0$, mas antes precisamos conhecer os modelos sem retardo, já que quando utilizamos EDRs precisamos de informação referente ao intervalo $[-\tau, 0]$. Por isso, resolvemos a equação sem atraso no intervalo $[0, \tau]$ e calculamos a solução do modelo com retardo no intervalo $[\tau, T]$, para $T > \tau$. Os modelos de Gompertz, logístico e de Greenspan sem atrasos de tempo são dados, respectivamente, pelas equações

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -rx(t) \ln \frac{x(t)}{K}, \\ \dot{x}(t) &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), \\ \dot{x}(t) &= rx(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\frac{2}{3}}\right),\end{aligned}$$

Para compreender bem os modelos é importante conhecer os significados dos parâmetros envolvidos na equação. No caso da dinâmica de crescimento tumoral, podemos interpretá-los da seguinte maneira:

- $x(t)$ denota o tamanho do tumor no instante t ;
- r representa a taxa de crescimento das células tumorais;
- K indica o tamanho máximo do tumor.

Introduzindo o atraso de tempo $\tau > 0$, que reflete a duração do ciclo celular, obtemos as seguintes EDRs para os modelos de Gompertz, logístico e de Greenspan, respectivamente:

$$\dot{x}(t) = -rx(t-\tau) \ln \frac{x(t-\tau)}{K}, \quad (3.1)$$

$$\dot{x}(t) = rx(t-\tau) \left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right), \quad (3.2)$$

$$\dot{x}(t) = rx(t-\tau) \left(1 - \left(\frac{x(t-\tau)}{K}\right)^{\frac{2}{3}}\right). \quad (3.3)$$

Observação 3.1. Existem duas maneiras naturais de introduzir o atraso. Primeiro, o crescimento per capita nas EDOs no caso geral é descrito por $\frac{\dot{x}}{x} = f(x)$, e na forma clássica o atraso é introduzido neste termo, isto é, $\frac{\dot{x}}{x} = f(x-\tau)$. Isto significa que o crescimento per capita no momento atual depende do tempo anterior $-\tau$. No entanto, existe uma outra possibilidade de introduzir atraso de tempo em conexão com o ciclo celular. Isso significa que consideramos o crescimento líquido $\dot{x} = x(t)f(x(t))$ e introduzimos o atraso de tempo nele, isto é, $\dot{x} = x(t-\tau)f(x(t-\tau))$, é este tipo que estamos utilizando nas equações acima.

Para os resultados apresentados na próxima seção, estudaremos os modelos a partir das equações adimensionalizadas. Para isso, devemos realizar uma mudança de variáveis. Seja $y(s) = \frac{x(t)}{K}$ e $s = \frac{t}{\tau}$, podemos reescrever as equações (3.1), (3.2) e (3.3), respectivamente, como

$$\frac{dy}{ds} = -r\tau y(s-1) \ln y(s-1), \quad (3.4)$$

$$\frac{dy}{ds} = r\tau y(s-1) (1 - y(s-1)), \quad (3.5)$$

$$\frac{dy}{ds} = r\tau y(s-1) \left(1 - (y(s-1))^{\frac{2}{3}}\right). \quad (3.6)$$

Note que todas estas equações podem ser escritas na forma

$$\dot{y} = \alpha f(y(s-1)),$$

onde $\alpha = r\tau$ e f possui as seguintes propriedades: $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ e f é unimodal, isto é, existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(y) < f(c)$ para todo $y \neq c$.

4 Estabilidade e Bifurcação de Hopf

Nesta seção, vamos analisar a estabilidade e a Bifurcação de Hopf das equações (3.4), (3.5) e (3.6), apoiados nas referências [6, 8]. Podemos verificar facilmente que para todas as equações, o estado estacionário $y = 0$ é instável, visto que \dot{y} é positiva para todo $y \in (0, 1)$. Portanto, nosso foco será estudar a estabilidade do estado estacionário $y = 1$.

Lema 4.1. *O estado estacionário positivo $y \equiv 1$ é localmente estável no intervalo $[0, 1]$ para $\tau < \frac{\pi}{2r}$ no caso dos modelos Gompertz e logístico, e para $\tau < \frac{3\pi}{4r}$ no modelo Greenspan.*

Demonstração. Sejam $z(s) = y(s) - 1$ e $z = 0$ o estado estacionário. As equações (3.4), (3.5) e (3.6) podem ser escritas como

$$\dot{z} = -r\tau(z(s-1) + 1)\ln(z(s-1) + 1), \quad (4.1)$$

$$\dot{z} = r\tau(z(s-1) + 1)(-z(s-1)), \quad (4.2)$$

$$\dot{z} = r\tau(z(s-1) + 1)(1 - (1 + z(s-1))^{\frac{2}{3}}). \quad (4.3)$$

Para extrair a parte linear das equações (4.1) e (4.3) vamos usar a expansão em séries de Taylor. Temos

$$\ln(z + 1) = z + o(z)$$

e

$$(1 + z)^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}z + o(z)$$

para $|z| < 1$. Portanto, o lado direito da equação (4.1) pode ser escrito na forma

$$-r\tau(z(s-1) + 1)\ln(z(s-1) + 1) = -r\tau(z(s-1) + 1)(z(s-1) + o(z))$$

e a parte linear dessa equação é $\dot{z} = -r\tau z(s-1)$, enquanto a parte não-linear pode ser expressa na forma

$$r\tau z(s-1) - r\tau(z(s-1) + 1)\ln(z(s-1) + 1).$$

Para a equação (4.3), o lado direito é igual a

$$r\tau(z(s-1) + 1) \left(1 - \left(1 + \frac{2}{3}z(s-1) + o(z) \right) \right) = -r\tau(z(s-1) + 1) \left(\frac{2}{3}z(s-1) + o(z) \right),$$

de modo que a parte linear é $\dot{z} = -\frac{2}{3}r\tau z(s-1)$ e a parte não-linear pode ser expressa por

$$\frac{2}{3}r\tau z(s-1) + r\tau(z(s-1) + 1)(1 - (1 + z(s-1))^{\frac{2}{3}}).$$

Para a equação (4.2) a parte linear é exatamente a mesma da equação (4.1) e a não-linear é da forma

$$-r\tau(z(s-1))^2.$$

Portanto, pelo Teorema 2.7, o estado estacionário $z = 0$ é localmente estável para $r\tau < \frac{\pi}{2}$ nos casos Gompertz e logístico e para $\frac{2}{3}r\tau < \frac{\pi}{2}$, ou seja, $r\tau < \frac{3\pi}{4}$ no caso Greenspan. ■

Lema 4.2. *O estado estacionário positivo $y \equiv 1$ é globalmente estável no intervalo $[0, 1]$ para $\tau < \frac{1}{r}$ no caso dos modelos Gompertz e logístico, e para $\tau < \frac{3}{2r}$ no modelo Greenspan.*

Demonstração. Note que as equações logística e Greenspan estão dentro da classe de funções $f(y) = y(1 - y^a)$. Portanto, a estabilidade de $y = 1$ em $[0, 1]$ acontece sob a condição $\alpha \leq \frac{1}{a}$, ou seja, $r\tau \leq \frac{1}{1} = 1$ no caso logístico e $r\tau \leq \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ no caso Greenspan. Para Gompertz usamos o Corolário 2.12. Note que

$$h(y) = \frac{f''(y)}{f'(y)} = \frac{1}{y(1 + \ln y)}$$

é decrescente em $[c, 1)$, onde $c = \frac{1}{e}$ é o ponto onde f alcança o máximo, pois

$$f'(y) = -\ln y - 1 = 0 \implies \ln y = -1 \implies y = \frac{1}{e}$$

e $f''(y) = -\frac{1}{y}$. Portanto, a estabilidade global ocorre quando $r\tau|f'(1)| = r\tau \leq 1$. ■

Teorema 4.3. *Para o modelo Gompertz e o modelo logístico, a bifurcação de Hopf estável ocorre para $\tau = \frac{\pi}{2r}$, enquanto para o modelo Greenspan ocorre em $\tau = \frac{3\pi}{4r}$.*

Demonstração. No caso do modelo logístico temos que

$$f'(y) = 1 - 2y,$$

logo,

$$f'(1) = -1 \implies |f'(1)| = 1.$$

Assim, $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$. Além disso, $f''(1) = -2 \neq 0$ e $f'''(y) = 0$. No modelo de Gompertz, temos que

$$f'(y) = -\ln y - 1,$$

logo,

$$f'(1) = -1 \implies |f'(1)| = 1.$$

Assim $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$. Além disso, $f''(1) = -1 \neq 0$ e $f'''(y) = y^{-2} \implies f'''(1) = 1$. Portanto, em ambos os casos, as condições do Corolário 2.14 são satisfeitas e a bifurcação de Hopf em $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ é estável. Para o modelo Greenspan,

$$f'(y) = 1 - y^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}},$$

logo,

$$f'(1) = -\frac{2}{3} \implies |f'(1)| = \frac{2}{3}.$$

Assim $\alpha_0 = \frac{3\pi}{4}$. Além disso,

$$f''(y) = -\frac{10}{9}y^{-\frac{1}{3}},$$

logo,

$$f''(1) = -\frac{10}{9} \neq 0.$$

Temos também que

$$f'''(y) = \frac{10}{27}y^{-\frac{4}{3}},$$

de onde segue que

$$f'''(1) = \frac{10}{27}$$

Portanto, as condições do Corolário 2.14 são satisfeitas e a bifurcação de Hopf em $\alpha_0 = \frac{3\pi}{4}$ é estável. ■

Na figura a seguir, temos duas soluções para o modelo de Gompertz. Em azul, está representada a solução $y(s)$ para $\tau r = \frac{\pi}{2}$ e, em vermelho, a solução $y(s)$ para $\tau r = \frac{\pi}{4}$. Note que o gráfico sugere que para $\tau r = \frac{\pi}{4}$ a solução $y(s) \rightarrow 1$ quando $s \rightarrow \infty$ e para $\tau r = \frac{\pi}{2}$ obtemos uma solução periódica.

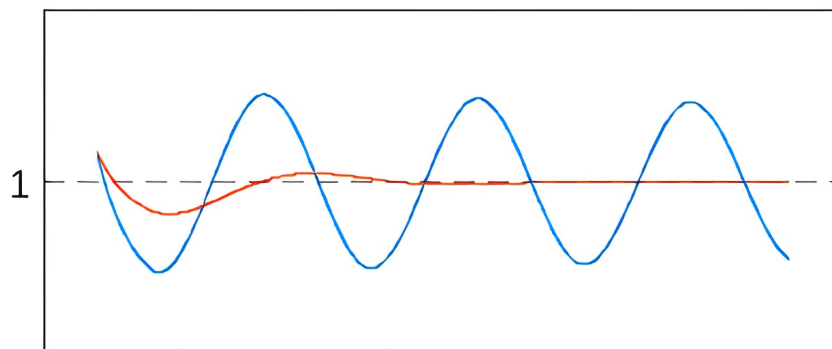


Figura 6.1: Solução $y(s)$ para $\tau r = \frac{\pi}{2}$ (em azul) e para $\tau r = \frac{\pi}{4}$ (em vermelho) no modelo de Gompertz.

5 Considerações Finais

A análise da estabilidade dos modelos estudados é importante para avaliar as diferenças nas previsões dos modelos a longo prazo, pois ela pode ser usada para determinar o limite entre o crescimento e o decaimento do tumor. Um próximo passo para essa análise seria comparar as previsões de cada modelo com um conjunto de dados experimentais sobre o crescimento de determinado tumor e avaliar o quanto cada modelo se adequa aos dados experimentais.

Por fim, cabe ressaltar a existência de diferentes modelos para descrever a dinâmica do crescimento tumoral e outros fatores que podem ser considerados nos modelos, como a interferência de tratamento. O leitor interessado em conhecer outros modelos pode consultar a referência [9].

Agradecimentos: Agradeço à Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso, pela orientação e incentivo durante a realização deste trabalho e à FAPESP pelo apoio financeiro.

Abstract: The purpose of this work is to present three models of delay differential equations applied to the dynamics of tumor growth: the logistic, the Gompertz and the Greenspan, and to analyze the stability and Hopf bifurcation of these models.

Keywords: delay differential equations; logistic model; Gompertz model; Greenspan model; Hopf bifurcation

Referências Bibliográficas

- [1] J. K. Hale; S. M. V. Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*, volume 99 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [2] J. K. Hale. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1997. .
- [3] V. Kolmanovskii; A. Myshkis. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Mathematics and Its Applications. Springer Netherlands, 1999.

- [4] K. Gopalsamy. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Mathematics and Its Applications. Springer Netherlands, 1992.
- [5] Y. Kuang. *Delay Differential Equations: With Applications in Population Dynamics*. Mathematics in Science and Engineering. Elsevier Science, 1993.
- [6] M. Bodnar; U. Forys. *Three types of simple DDE's describing tumor growth*. Journal of Biological Systems, Vol. 15, No. 4 (2007) 453–471.
- [7] U. Forys. *Global stability for a class of delay differential equations*. Applied Mathematics Letters, 2004, vol. 17, 581–584.
- [8] M. Bodnar; U. Forys. *Global stability and the Hopf bifurcation for some class of delay differential equation*. Mathematical Methods in the Applied Science, Vol. 31, No. 10 (2007) 1197–1207.
- [9] J. A. Adam; N. Bellomo. *A survey of models for tumor immune systems dynamics*. Modelling and simulation in science, engineering, and technology. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [10] P. F. Verhulst. *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*. Correspondance mathématique et physique, 10 (1838) 113-121.
- [11] B. Gompertz. *On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new method of determining the value of life contingencies*. Phil Trans Roy Soc, vol. 115, 1825, 513-585
- [12] H. P. Greenspan. *Models for the growth of solid tumour by diffusion*. Studies in Applied Mathematics, vol. 51, 1972, 317-340.
- [13] H. Murphy; H. Jaafari; H. M. Dobrovolny. *Differences in predictions of ODE models of tumor growth: a cautionary example*. BMC Cancer 16, 163 (2016).
- [14] J. D. Murray. *Mathematical Biology 1: An Introduction*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [15] A. K. Laird. *Dynamics of tumour growth*. British Journal of Cancer., vol 18, 1964, 490-502.
- [16] H. M. Byrne. *The effect of time delay on the dynamics of avascular tumour growth*. Mathematical Biosciences, 144. 1997. 83-117.
- [17] O. Diekmann; S. Van Giles; S. M. V. Lunel; H. O. Walter. *Delay Equations* Springer-Verlag, New York, 1995.
- [18] D. V. Giang; Y. Lenbury; T. I. Seidman *Delay effect in models of population growth*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 305(2). 2005. 631-643.

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM MATEMÁTICA · BICMAT

Orientação aos autores

Ao redigir o material a ser divulgado o autor deve observar que o alvo principal é o aluno de graduação, devendo a redação ser clara e objetiva incentivando-o à leitura.

O trabalho deve ser enviado à Comissão Editorial, via e-mail, na linguagem \LaTeX , usando a classe `bicmat`. Mais informações sobre a formatação do trabalho podem ser encontradas em www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat, assim como o endereço para o envio do trabalho.

A responsabilidade de cada artigo é exclusiva do autor e respectivo orientador.