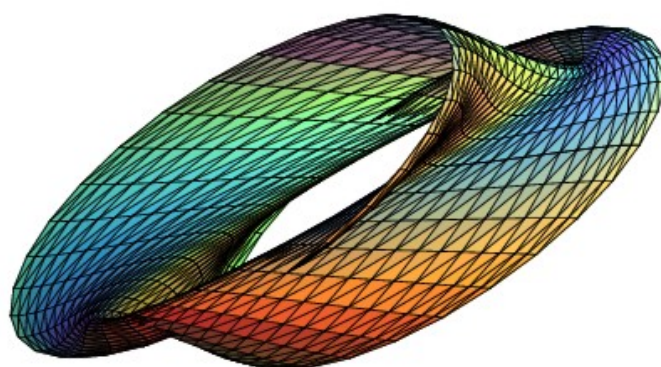

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM
MATEMÁTICA · BICMAT



VOLUME XVI
OUTUBRO DE 2019
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
IGCE · RIO CLARO

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM
MATEMÁTICA · BICMAT

Comissão editorial

Eliris Cristina Rizziolli

Renata Zotin Gomes de Oliveira

Nativi Viana Pereira Bertolo

Thiago de Melo

Editoração gráfica

Thiago de Melo

Realização

Conselho de Curso de Graduação em Matemática

Departamento de Matemática

IGCE · Unesp Rio Claro

EDITORIAL

O Boletim de Iniciação Científica em Matemática · BICMat é uma publicação que se destina a difundir prioritariamente trabalhos de Iniciação Científica em Matemática que fazem parte de projetos desenvolvidos por alunos do Curso de Graduação em Matemática do IGCE, Unesp Rio Claro. Eventualmente trabalhos de Iniciação Científica realizados em outras instituições poderão também ser publicados neste Boletim.

O BICMat foi criado em 1998 e nessa época foram publicados dois volumes; o primeiro no ano de criação e o segundo em 2000.

Considerando a importância da Iniciação Científica para o graduando, e o sempre crescente número de projetos desta natureza desenvolvidos em nossa instituição, resolvemos reativar a publicação do BICMat em 2006, com ISSN 1980–024X.

Destacamos que a autoria dos trabalhos apresentados no BICMat é dos alunos. O orientador figura apenas como responsável científico.

Este Boletim também está aberto à divulgação de trabalhos que não sejam frutos de projetos de Iniciação Científica, mas que sejam de interesse dos alunos do curso de graduação em Matemática. Estes trabalhos serão selecionados pelos Editores.

Este volume está disponibilizado eletronicamente na página do Departamento de Matemática no endereço

<http://igce.rc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/>

ou através do código QR



SUMÁRIO

Teoria dos jogos e sua história

Alex Sartori da Silva 5

Um estudo sobre o problema regular de Sturm-Liouville via teoria espectral

Daniel Borin 10

É possível definir logaritmo de um número negativo?

Daniel de Lima Pazim 19

Estatística Espacial - Moran I e Geary C

Isabella Dafne Oliveira Rodrigues 25

O número de sub-reticulados do reticulado hexagonal

João Gabriel Oliveira de Jesus 31

Modelo geral de vacinação

Laís Zorzo Buzo 40

Introdução aos sistemas dinâmicos caóticos

Lucas Ozaki Mizuguti 47

Teorema do ponto fixo de Banach e uma aplicação às equações diferenciais ordinárias

Marina Fuzaro Magossi 62

Uma introdução à teoria de módulos e homomorfismos

Matheus Eduardo Dametto Silva 66

Teoria dos jogos e sua história

Alex Sartori da Silva[†]

Orientador(a): Thaís Fernanda Mendes Monis

Resumo: O trabalho “Teoria dos jogos e sua história” é parte de um projeto de Iniciação Científica no qual estudamos a Teoria dos Jogos e sua ligação com a Topologia. Nesse trabalho, discutimos a história da Teoria dos Jogos e algumas de suas curiosidades. Apresentamos também o famoso problema conhecido como o Dilema do Prisioneiro. A partir do exemplo, teremos terreno propício para a apresentação formal das definições de jogo e de solução para um jogo não-cooperativo.

Palavras-chave: Teoria dos jogos; história; ponto fixo

1 Introdução

Nós, seres humanos, não seríamos capazes de sobreviver se não interagíssemos uns com os outros e, ironicamente, esse mesmo mecanismo nos leva a grandes conflitos. A história da humanidade é uma história de muitas lutas e guerras, mas também de cooperação bem sucedida do ponto de vista evolucionário.

O estudo de economia, ciência política e, de modo geral, das ciências sociais aparecem como uma tentativa de entender como os seres humanos interagem e tomam decisões, tanto individuais quanto em grupo. O objetivo geralmente é aplicar o conhecimento à análise das questões pertinentes ao funcionamento das sociedades e suas instituições tais como mercados, governos, instituições legais, etc. Cientistas sociais desenvolvem modelos rigorosos abstraindo a realidade que observam não apenas para explicitá-la de modo sistematizado mas também para prever resultados. Nesse sentido, a Teoria dos Jogos se encarrega da construção de modelos rigorosos que descrevem situações de conflito e de cooperação entre tomadores de decisão racionais. Esse axioma de racionalidade significa que cada envolvido toma suas decisões com o objetivo de maximizar algum tipo de ganho pessoal.

Nesse projeto de pesquisa, estudaremos as ideias principais do começo da Teoria dos Jogos, alguns modelos importantes e algumas definições de soluções. Resultados de existência de solução também serão estudados e esses se mostrarão intimamente ligados aos resultados de ponto fixo, em especial ao Teorema de Ponto Fixo de Brouwer.

2 História

Alguns matemáticos de grande relevância acadêmica tiveram interesse pelo estudo sobre teoria dos jogos. James Waldegrave, por exemplo, se interessou pela análise de um certo jogo de cartas e discutia o assunto com o também grande matemático Nicolas Bernoulli, e isso se sucedia através de correspondências entre eles.

Já Augustin Cournot traz um exemplo denominado Duopólio do Cournot que tem grande importância em um contexto social-econômico, pois ele mostrara quais ambientes se tornam propícios para a formação de cartéis a partir de um estudo sobre jogos cooperativos e não-cooperativos.

[†]FNDE-PET



(a) James Waldegrave



(b) Augustin Cournot

Figura 1

Os dois exemplos acima são importantes. No entanto, no seu início, a teoria dos jogos não teve uma grande popularidade já que desenvolvia-se baseada em fatos empíricos e em opiniões formadas a partir de um cenário social. Até que John von Neumann, em 1928, demonstrou que todo jogo finito de soma zero com duas pessoas possui uma solução em estratégias mistas. Mas vamos nos deixar aproveitar esse espaço e explicar brevemente o que é um jogo de soma zero. É simplesmente aquele jogo onde uma pessoa ganha e a outra necessariamente perde. Nos primórdios dessa sua demonstração, von Neumann utilizava de muita análise e topologia, o que acabava deixando tudo muito trabalhoso e dificultava o entendimento, mas não muito tempo depois, trouxe uma demonstração baseada no teorema do ponto fixo de Brouwer. Antes de continuarmos, vamos deixar explicitado o que é o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Teorema 1.1 (Ponto Fixo de Brouwer). *Se Δ é um subconjunto compacto e convexo de um espaço euclidiano de dimensão finita e $\mathbf{F} : \Delta \rightarrow \Delta$ é uma função contínua, então \mathbf{F} possui um ponto fixo em Δ , isto é, existe $\mathbf{p}^* \in \Delta$ tal que*

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*.$$



Figura 2: John von Neumann

Também temos John Forbes Nash Júnior, que acreditamos ser a figura mais popular dentre

todos nessa área, que teve grande importância trazendo quatro artigos para a teoria dos jogos não-cooperativos e para a teoria de barganha e após algum tempo provou a existência de um equilíbrio para estratégias mistas que foi chamado de equilíbrio de Nash. Tal noção de equilíbrio será explicitada mais adiante.



Figura 3: John Forbes Nash

3 O que é um jogo?

Bom, para falarmos de teoria dos jogos devemos primeiramente entender o que é um jogo. Inicialmente quando lemos o nome, associamos diretamente com quaisquer tipos de jogos: cartas, tabuleiro, vídeo games, jogos de dados, etc. Pois bem, você não está enganado sobre isso. Mas quais são os elementos básicos de um jogo? Primeiramente, podemos citar jogadores e depois citar estratégias adotadas por eles. Assim, teremos um conjunto de jogadores e então cada jogador possuirá um conjunto de estratégias. Então, podemos definir a teoria dos jogos como uma teoria de modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas sob condições de conflito.

Vamos escrever matematicamente o que seria um jogo. O conjunto de jogadores é um conjunto finito de jogadores $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ e cada jogador $g_i \in G$ possui um conjunto finito de estratégias $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}\}$. Um vetor $\mathbf{s} = (s_{1j_1}, \dots, s_{nj_n})$, onde s_{ij_i} é uma estratégia pura para o jogador $g_i \in G$, é denominado um perfil de estratégia pura. O conjunto de todos os perfis de estratégias pura formam o seguinte produto cartesiano

$$S = \prod_{i=1}^n S_i = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n.$$

Temos também as funções utilidade, ou funções *payoff*,

$$\begin{aligned} u_i : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{s} &\mapsto u_i(\mathbf{s}), \end{aligned}$$

que associará o ganho $u_i(\mathbf{s})$ do jogador g_i a cada perfil de estratégia pura $\mathbf{s} \in S$.

Abaixo, um exemplo de jogo.

Exemplo 1.2 (Dilema do Prisioneiro). A situação é a seguinte: Dois criminosos, que vamos chamar de A e B , são pegos pela polícia acusados de serem cúmplices em um mesmo crime. Presos em selas separadas e em nenhum momento podendo se comunicar, o delegado faz

a seguinte proposta com eles separados: cada um pode escolher confessar ou negar o tal crime. Mas se nenhum deles confessar, ambos serão submetidos a 1 ano de prisão. Se os dois confessarem, então ambos terão pena de 5 anos. Mas se um confessar e o outro negar, então o que confessou será libertado e o outro será condenado a 10 anos de prisão. Assim temos:

- O conjunto de jogadores $G = \{A, B\}$.
- O conjunto de estratégia de A como

$$S_A = \{\text{confessar}, \text{negar}\},$$

o de B como

$$S_B = \{\text{confessar}, \text{negar}\}$$

e o conjunto de perfis de estratégias pura

$$S = \{(\text{confessar}, \text{confessar}), (\text{confessar}, \text{negar}), (\text{negar}, \text{confessar}), (\text{negar}, \text{negar})\}.$$

(A, B)	confessar	negar
confessar	$(-5, -5)$	$(0, -10)$
negar	$(-10, 0)$	$(-1, -1)$

Nesse modelo, qual seria a tomada de decisão previsível para os jogadores? Para encontrar uma resposta, veremos o que é uma solução de um jogo e como ela se apresenta.

4 Solução de um jogo

Para tentar entender o que é uma solução de um jogo, vamos encontrar a solução para o jogo acima. Primeiramente nos colocamos no lugar do jogador A .

Duas coisas podem acontecer, B pode confessar ou negar. Se ele confessar então a melhor opção para A é confessar, mas se B não confessar, também a melhor opção para A é confessar assim, A sai livre. Então em qualquer um dos casos é melhor para A confessar. Então A confessará.

Analogamente podemos ter esse pensamento para o jogador B .

Então a solução é ambos confessarem e portanto ficarão presos por 5 anos.

Agora uma solução estratégica ou equilíbrio de Nash de um jogo é um ponto onde cada jogador não tem incentivo de mudar a sua estratégia se os outros jogadores não o fizerem.

Um *equilíbrio de Nash* de um jogo é um ponto onde cada jogador não tem incentivo de mudar a estratégia se os outros jogadores não o fizerem.

Definição 1.3 (Equilíbrio de Nash). Dizemos que um perfil de estratégia

$$\mathbf{s}^* = (s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \in S$$

é um equilíbrio de Nash se

$$u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij_i}^*, \mathbf{s}_{-i}^*)$$

para todo $i = 1, \dots, n$ e para todo $j_i = 1, \dots, m_i$, com $m_i \geq 2$.

Agradecimentos: Gostaria de agradecer a minha orientadora Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis por ter me apoiado academicamente com todas as dificuldades encontrada durante o projeto, também gostaria de agradecer o grupo PET-Matemática pelo apoio financeiro e profissional e todos os professores que ajudaram nesse processo.

Abstract: The work “Game theory and its history” is part of a scientific initiation project in which we study the game theory and its connection with topology. In this work, we discuss the history of game theory and some of its curiosities. We also present the famous problem known as The Prisoner’s dilemma. From the example, we will be aware of the formal presentation of game and solution definitions for a non-cooperative game.

Keywords: Game theory, history, fixed point

Referências Bibliográficas

- [1] Sartini, B. A., et al, *Uma introdução a Teoria dos Jogos*. II Bienal da SBM, Universidade Federal da Bahia, 2004. (<http://www.ime.usp.br/rvicente/IntroTeoriaDosjogos.pdf>)
- [2] Tadelis, S., *Game Theory: an introduction*. Princeton University Press, 2013.

Um estudo sobre o problema regular de Sturm-Liouville via teoria espectral

Daniel Borin[†]

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: O problema de Sturm-Liouville, um dos problemas mais clássicos na Física-Matemática consiste de uma equação diferencial de segunda ordem submetida a condições de contorno, tendo inúmeras aplicações, como por exemplo, uma partícula quântica submetida a um poço de potencial infinito é governada por esse problema. Até mesmo, quando aplicamos o método de Separação de Variáveis em problemas de equações diferenciais parciais obtemos em muitos casos um problema de Sturm-Liouville cuja solução depende da construção de uma série envolvendo autofunções. Nos casos mais usuais, as autofunções deste problema podem remeter a séries de Fourier, Polinômios de Legendre e Funções de Bessel, nestes casos a possibilidade de desenvolvimento ortonormal é relativamente simples, entretanto, o caso geral é muito mais complexo. Assim nosso principal objetivo neste artigo é estudar o caso geral do Problema de Sturm-Liouville através da Teoria de Operadores da Análise Funcional. Começamos transformando o Problema Diferencial numa equação integral de Fredholm com núcleo hermitiano através da função de Green do Problema. Esta equação integral corresponde a um operador hermitiano compacto no espaço pré-hilbertiano $C_{L_2(r)}([a, b])$. Por fim, através da Teoria Espectral dos Operadores Hermitianos Compactos, mostraremos o Teorema Fundamental da Teoria de Sturm-Liouville.

Palavras-chave: Problema de Sturm-Liouville, Teorema Espectral, Teoria de Operadores Compactos Hermitianos, Análise Funcional.

1 Definição e Unicidade do Problema Regular

Uma ferramenta bastante útil ao se estudar um Problema de Sturm-Liouville consiste em transformá-lo em uma equação integral utilizando a função de Green. Como veremos, isso só pode ser feito, fazendo a hipótese de que $\lambda = 0$ não é um autovalor do Problema de Sturm-Liouville.

Os resultados nesse artigo foram baseados nas referências [1]–[5] e as demonstrações que foram omitidas também podem ser encontradas nessas referências.

Considere o problema de Sturm-Liouville definido abaixo

Definição 1.1 (Problema de Sturm-Liouville). O **Problema de Sturm-Liouville regular**, ou simplesmente **Problema de Sturm-Liouville** consiste em determinar uma função $y \in C^2([a, b])$, tal que o seguinte *PVC* seja satisfeito

$$L_\lambda[y](t) = 0 \quad \text{ou} \quad L[y] = \lambda r(t)y \quad (1.1)$$

onde,

$$L_\lambda[y] = -(p(t)y')' + [q(t) - \lambda r(t)]y \text{ para } t \in [a, b]$$

[†]Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (2017/03686-1)

com $p \in C^1([a, b])$, $p(t) > 0$, $q \in C([a, b], \mathbb{R})$ e $r \in C([a, b])$, $r(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$. Com as seguintes condições de fronteira lineares e homogêneas,

$$\begin{aligned}\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0.\end{aligned}\tag{1.2}$$

A primeira coisa a pensar quando estudamos uma equação diferencial é a existência e unicidade de solução, abordaremos o segundo fato no próximo resultado.

Teorema 1.2 (Unicidade do Problema de Sturm). *Se $\lambda = 0$ não for um autovalor desse problema, ou seja, se $Ly = 0$ com as condições de contorno (1.2) possuir apenas a solução trivial $u = 0$, então o problema de Sturm $Lu = f$ sob as condições de contorno (1.2) possui uma única solução.*

Prova: Sejam y_1 e y_2 soluções distintas do Problema de Sturm, ou seja, $L[y_1] = f$ e $L[y_2] = f$. Subtraindo as duas equações acima, obtemos $L[y_1] - L[y_2] = 0$. Pelo fato do operador de Liouville ser linear, temos que

$$L[y_1 - y_2] = 0.$$

Como, por hipótese, a equação acima possui apenas solução trivial, logo

$$y_1 - y_2 = 0 \implies y_1 = y_2. \quad \square$$

2 Resultados Auxiliares

Antes de continuarmos a discussão sobre o resultado principal, enunciaremos algumas definições e resultados que nos auxiliarão na prova. O primeiro resultado é bem conhecido e importante denominado Teorema Espectral para Operadores Hermitianos Compactos.

Teorema 1.3 (Teorema Espectral para Operadores Hermitianos Compactos). *Sejam \mathcal{P} um espaço pré-hilbertiano e A um operador hermitiano compacto definido em \mathcal{P} , $A \neq 0$. Existe uma sequência $\lambda_n \in \mathbb{R}$ de autovalores não-nulos de A e uma sequência e_n de autovetores correspondentes que formam um conjunto ortonormal tal que $\forall x \in \mathcal{P}$, temos*

$$Ax = \sum \lambda_n x_n e_n, \text{ onde } x_n = \langle x, e_n \rangle.$$

Enunciemos agora algumas definições, para ficar claro com que tipo de ferramenta iremos trabalhar, a conhecida função de Green.

Definição 1.4 (Solução Fundamental). Diz-se que a função simétrica H é uma **solução fundamental** do problema de Sturm, se ela satisfazer

$$L \left(\int_a^b H(x, y) f(y) dy \right) = f(x)$$

e

$$L_x[H(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial H}{\partial x} \right) + qH = \delta(x - y).$$

Definição 1.5 (Função de Green). Uma função de duas variáveis $G(x, y)$ com $x, y \in [a, b]$ é uma **função de Green** para o problema de Sturm, se G for uma solução fundamental do Problema de Sturm e se a expressão

$$\int_a^b G(x, y) f(y) dy$$

satisfazer as condições de contorno (1.2).

Enfim, podemos enunciar o Teorema de Green para o problema de Sturm.

Teorema 1.6 (Teorema de Green). *Existe uma função contínua*

$$G : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que, dado $f \in C([a, b])$, $y \in C^2([a, b])$ é solução de

$$L[y] = -(py')' + qy = f \text{ em } [a, b]$$

satisfazendo as condições de contorno (1.2), ou seja,

$$F_1[y] \equiv \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad F_2[y] \equiv \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

se, e somente se,

$$y(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds,$$

onde a função G é a função de Green, dada por

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{y_1(t)y_2(s)}{p(s)W[y_1, y_2](s)} := G_1(t, s), & \text{se } a \leq t < s, \\ \frac{y_2(t)y_1(s)}{p(s)W[y_1, y_2](s)} := G_2(t, s), & \text{se } s \leq t < b, \end{cases}$$

onde W representa o wronskiano, y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da equação $L[y] = 0$, com as condições (1.2).

Demonstração. De acordo com a teoria das equações diferenciais ordinárias, a solução geral da equação

$$L[y] = f(t) \tag{2.1}$$

é da forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t),$$

onde c_1 e c_2 são constantes, y_1 e y_2 são soluções da forma $y_p(t) = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t)$, onde $v_1(t)$ e $v_2(t)$ são funções dependentes do tempo. Assim

$$y_p(t) = \int_a^s \frac{y_1(s)y_2(t)f(t)}{p(t)W[y_1, y_2](t)} dt + \int_s^b \frac{y_2(s)y_1(t)f(t)}{p(t)W[y_1, y_2](t)} dt.$$

Logo, definimos a função de Green por

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{y_1(t)y_2(s)}{p(s)W[y_1, y_2](s)} := G_1(t, s), & \text{se } a \leq t < s, \\ \frac{y_2(t)y_1(s)}{p(s)W[y_1, y_2](s)} := G_2(t, s), & \text{se } s \leq t < b. \end{cases}$$

Portanto, podemos escrever

$$y_p(s) = \int_a^b G(s, t) f(t) dt = \int_a^b G(x, t) f(t) dt \quad \square$$

Agora, pelo Teorema de Green, $y(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds$ é solução de $Ly = f$ com as condições (1.2) e, portanto, essa é a única solução. Desta forma, sob a hipótese que $\lambda = 0$ não é um autovalor do problema de Sturm-Liouville, toda função y que satisfaz $Ly = f$ com as condições de contorno (1.2) satisfaz também $y(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds$ para *qualquer* que seja a função contínua f . Assim, para um f específica, temos a seguinte consequência:

Corolário 1.7. *Uma função y é solução do Problema de Sturm-Liouville não homogêneo com as condições (1.2) se, e somente se,*

$$y(t) - \lambda \int_a^b G(t, s)y(s)r(s)ds = g(t),$$

onde

$$g(t) = \int_a^b G(t, s)f(s)ds.$$

Prova: Pelo Teorema de Green para o Problema de Sturm, temos

$$L[y] = \lambda ry + f$$

satisfazendo (1.2) se, e somente se,

$$y(t) = \int_a^b G(t, s)[\lambda r(s)y(s) + f(s)]ds,$$

isto é,

$$y(t) - \lambda \int_a^b G(t, s)y(s)r(s)ds = g(t). \quad \square$$

Uma equação como esta, onde a função $G(t, s)r(s)$ é contínua em um intervalo fechado, é conhecida como *equação integral de Fredholm de segundo tipo*. Definimos então um operador relacionado a este tipo de equação integral.

Definição 1.8 (Operador de Fredholm). Indiquemos por \mathfrak{F} o operador integral definido em $C_{L_2(r)}([a, b])$ por

$$\mathfrak{F}[y](t) = \int_a^b G(t, s)y(s)r(s)ds.$$

Denominamos \mathfrak{F} como **operador de Fredholm**.

Como consequência do corolário anterior, o Problema de Sturm-Liouville homogêneo pode ser escrito como

$$y(t) = \lambda \int_a^b G(t, s)y(s)r(s)ds.$$

Assim, podemos afirmar que a solução do Problema de Sturm-Liouville nada mais é que a aplicação do operador de Fredholm sobre ele mesmo.

Sendo assim, a equação anterior diz que

$$\mathfrak{F}y = \frac{1}{\lambda}y,$$

ou seja, $1/\lambda$ é autovalor do Operador de Fredholm \mathfrak{F} . Provando assim, o seguinte Corolário.

Corolário 1.9. (a) λ é autovalor do problema de Sturm-Liouville se, e somente se, $1/\lambda$ é autovalor de \mathfrak{F} .

(b) y é autofunção do Problema de Sturm-Liouville correspondente ao autovalor λ se, e somente se, y é autofunção do operador \mathfrak{F} correspondente ao autovalor $1/\lambda$.

Como o núcleo G é real e simétrico segue que o operador integral \mathfrak{F} é hermitiano e compacto, podendo aplicar a teoria de operadores e de equações integrais, e desta última os resultados na sequência são válidos.

Proposição 1.10. Sejam $\mathcal{P} = C_{L_2}([a, b], \mathbb{C})$ o espaço pré-hilbertiano e $k : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ o operador definido por $(kf)(t) = \int_a^b K(t, s)f(s)ds$. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \leq \int_a^b |K(t, s)|^2 ds dt,$$

onde λ_n são os autovalores não nulos.

Por conta da Alternativa de Fredholm:

Teorema 1.11. Dado um núcleo hermitiano contínuo K e um autovalor $\lambda \neq 0$ do operador hermitiano compacto k , associado a K . Então a equação integral,

$$\lambda x(t) = y(t) + \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

possui solução se, e somente se,

$$\int_a^b y(t)\overline{z(t)}dt = 0$$

para toda função contínua $z \in C([a, b], \mathbb{C})$ tal que

$$\int_a^b K(t, s)z(s)ds = \lambda z(t). \quad (2.2)$$

As soluções são da forma

$$x(t) = \frac{1}{\lambda}y(t) + \frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda_n \neq \lambda} \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n(t) + z(t), \quad (2.3)$$

onde z é um elemento de $C([a, b], \mathbb{C})$ que satisfaz (2.2) e $y_n = \int_a^b y(s)e_n(s)ds$.

A série em (2.3) é absolutamente convergente e uniformemente convergente.

Observação 1.12. A demonstração do item (c) do teorema a seguir usará o seguinte lema

Lema 1.13. Seja $\mathcal{D}(]a, b[)$ o espaço vetorial do conjunto das funções definidas em $]a, b[$ a valores complexos que são infinitamente deriváveis e nulas fora de um intervalo fechado contido em $]a, b[$. Seja também $C_{L_p(r)}([a, b])$ o espaço $C([a, b])$ munido da norma

$$x \in C([a, b]) \mapsto \|x\|_{p,r} = \left[\int_a^b |x(t)|^p r(t) dt \right]^{1/p},$$

onde r é uma função contínua estritamente positiva definida em $[a, b]$.

A prova do lema acima pode ser encontrada no apêndice das referências [2] e [3].

3 Resultado Principal

Enfim, podemos provar o teorema principal:

Teorema 1.14. *Considere o Problema de Sturm-Liouville dado na Definição 1.1. Então*

- (a) *Os valores $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que existe uma solução $y \neq 0$ de $L_\lambda[y] = 0$ satisfazendo $F_1[y] = F_2[y] = 0$, isto é, os autovalores do problema de Sturm-Liouville formam uma sequência infinita crescente λ_n de números reais tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty.$$

- (b) *A sequência φ_n das autofunções forma uma base ortonormal do espaço pré-hilbertiano $C_{L_p(r)}([a, b])$ e do espaço de Hilbert $L_2([a, b], r)$.*

- (c) *Para toda função $x \in C^2([a, b])$, tal que*

$$F_1[x] = F_2[x] = 0,$$

temos

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n(t)$$

onde

$$x_n = \langle x, \varphi_n \rangle_r = \int_a^b x(t) \varphi_n(t) r(t) dt,$$

sendo a série uniformemente e absolutamente convergente em $[a, b]$.

- (d) *Seja $\lambda \neq \lambda_n$ para todo n e $f \in C([a, b])$ o sistema*

$$L_\lambda[y] = f, \text{ com } F_1[y] = F_2[y] = 0,$$

tem uma e somente uma solução y ,

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(t),$$

sendo essa série uniformemente e absolutamente convergente em $[a, b]$.

- (e) *Se $\lambda = \lambda_m$, dado $f \in C([a, b])$, o sistema*

$$L_\lambda[y] = f, \text{ com } F_1[y] = F_2[y] = 0,$$

tem solução se, e somente se, $\langle f, \varphi_m \rangle = 0$, isto é,

$$\int_a^b f(t) \varphi_m(t) dt = 0.$$

Nesse caso a solução é como em (d), sendo arbitrária, a componente y_m de φ_m .

Prova: (c) Seja $x \in C^2([a, b])$ com $F_1[x] = F_2[x] = 0$. Do Teorema de Green, segue que

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) L[x](s) ds = \int_a^b G(t, s) \frac{L[x](s)}{r(s)} r(s) ds = \mathfrak{F} \left[\frac{L[x]}{r(s)} \right] (t).$$

Sendo \mathfrak{F} um operador hermitiano compacto, pelo Teorema Espectral para Operadores Hermitianos Compactos, página 11, tem-se

$$x(t) = \mathfrak{F} \left[\frac{L[x]}{r(s)} \right] (t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{L[x]}{r} \right)_n \varphi_n(t). \quad (3.1)$$

Considere $\alpha_n = \langle x, \varphi_n \rangle_r$, assim

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \langle x, \varphi_n \rangle_r = \int_a^b x(t) \varphi_n(t) r(t) dt = \int_a^b \left[\int_a^b G(t, s) L[x](s) ds \right] \varphi_n(t) r(t) dt \\ &= \int_a^b \mathfrak{F}[\varphi_n](s) L[x](s) ds = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b \varphi_n(s) L[x] \left(\frac{r(s)}{r(s)} \right) ds = \frac{1}{\lambda_n} \left\langle \frac{L[x]}{r} \middle| \varphi \right\rangle_r = \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{h}{r} \right)_n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{h}{r} \right)_n \varphi_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(t),$$

sendo a série uniformemente e absolutamente convergente.

(b) Para todo $x \in \mathcal{D}([a, b])$ as condições $F_1[x] = F_2[x] = 0$ estão satisfeitas, assim o item (c) se aplica às funções de $\mathcal{D}([a, b], \mathbb{C})$, isto é,

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(t),$$

com convergência uniforme e absolutamente em $]a, b[$.

Como $\mathcal{D}([a, b], \mathbb{C})$ é denso em $C_{L_2(r)}([a, b], \mathbb{C})$, logo, dados $y \in C_{L_2(r)}([a, b], \mathbb{C})$ e $\varepsilon > 0$, existe $x \in \mathcal{D}([a, b], \mathbb{C})$ tal que

$$\|y - x\| = \left\| y - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \right\| < \varepsilon.$$

Logo, se considerar um conjunto de todas as combinações lineares de φ_n , tem-se que este é denso em $C_{L_2(r)}([a, b], \mathbb{C})$ e, portanto, os φ_n são uma família ortogonal completa de $C_{L_2(r)}([a, b], \mathbb{C})$ e existem infinitas autofunções φ_n .

(a) Pelo fato do núcleo ser hermitiano temos que todos os autovalores do Problema de Sturm-Liouville são reais. Do item (c) segue que a sequência desses autovetores, (λ_n) , é infinita e do Teorema Espectral para Operadores Hermitiano Compactos, página 11, e do Corolário 1.9 segue que $\frac{1}{\lambda_n} \rightarrow 0$ e, portanto, $\lambda_n \rightarrow +\infty$. Ainda do Corolário 1.9, λ_n se, e somente se, $\frac{1}{\lambda_n}$ é autovalor de \mathfrak{F} , assim para a sequência $\left(\frac{1}{\lambda_n} \right)$, a Proposição 1.10, página 14, e do Corolário (1.9) segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$.

(d) Do Corolário 1.7, página 13, segue-se que a solução y do problema de Sturm-Liouville, isto é, de

$$L[y] = \lambda r y + f$$

com $F_1[y] = F_2[y] = 0$, satisfaz

$$\begin{aligned} y(t) &= \lambda \int_a^b G(t, s) y(s) r(s) ds + \int_a^b G(t, s) f(s) ds \\ &= \int_a^b G(t, s) [\lambda y(s) r(s) + f(s)] ds \\ &= \int_a^b G(t, s) \left[\lambda y(s) + \frac{f(s)}{r(s)} \right] r(s) ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{\lambda} \mathfrak{F} \left[\frac{f}{r} \right] = \frac{1}{y} y - \mathfrak{F}[y].$$

Como os autovalores são reais, substituindo λ por $1/\lambda$, λ_n por $1/\lambda_n$, x por y e y por $\frac{1}{\lambda} \mathfrak{F} \left[\frac{f}{r} \right]$, tem-se

$$\begin{aligned} y(t) &= \lambda \frac{1}{\lambda} \mathfrak{F} \left[\frac{f}{r} \right] (t) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \frac{\frac{1}{\lambda} \mathfrak{F} \left[\frac{f}{r} \right]_n}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_n}} \varphi_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi \rangle}{\lambda_n} \varphi_n(t) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{\lambda} \langle f, \varphi \rangle}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(t). \end{aligned}$$

onde utilizamos (3.1) e a série converge uniformemente e absolutamente convergente em $[a, b]$.

(f) Segue analogamente do Teorema 1.11, página 14. \square

4 Conclusão

Vimos que o problema de Sturm-Liouville foi convertido na forma compacta de um Operador de Fredholm atuando sobre y . Desta forma foi possível utilizar a Teoria de Operadores, uma linha de pesquisa da Análise Funcional, para obter propriedades do problema. Neste caso obtivemos um operador compacto, o que implica em autovalores discretos, entretanto em Mecânica Quântica, temos operadores ilimitados, como por exemplo, operadores momento e posição, cujo espectro é contínuo e da mesma maneira, podemos estudar esses problemas utilizando esta teoria, mostrando então a devida importância da mesma.

Agradecimentos: Agradeço a Deus primeiramente, por todas as oportunidades que ele me proporcionou até aqui. Agradeço aos meus pais, Antonio Valdeci Borin e Eva Aparecida Ribeiro Borin, pois sem eles, não teria chegado até onde cheguei e muito menos teria escrito este artigo, vocês são os meus alicerces, que me sustentam em todas as dificuldades da vida, não há palavras para descrever o quanto sou grato a vocês. Agradeço a Franciele Horácio de Souza, que sempre me apoiou e acompanhou de perto o meu esforço, estando sempre ao meu lado. Agradeço a Prof. Dra. Marta Cilene Gadotti por suas sábias palavras de incentivo, por sua paciência, apoio durante a realização do projeto; e além de ser apenas uma orientadora, tornou-se uma companheira, e sempre acreditou em mim e no meu potencial apesar de todas as diversidades. Agradeço também a Prof. Dra. Francesca Dalbono da Università degli Studi di Palermo pelo tempo dedicado a mim durante o período que estive sob sua orientação em

Palermo. Agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, por seu apoio financeiro para o desenvolvimento de minha pesquisa.

Abstract: The Sturm-Liouville Problem is a classical problem in the Mathematics Physics and consist of a second order differential equation submitted to boundary conditions. This problem has several examples in physics, like the case where a quantum particle submitted to a infinitely deep well is governed by this problem. One of the steps more useful to study the Sturm-Liouville Problem consist to transform it in a integral equation, for this, we use the Green function. I just can do this, doing the hypothesis that zero not is a possible eigenvalue of this problem. Consequently, this one can be converted into a hermitian compact operator.

Keywords: Differential equations, Wave equation, Mathematical modeling, D'Alembert's formula, Fourier transform

Referências Bibliográficas

- [1] J. C. A. BARATA, Notas para um Curso de Física-Matemática, Notas de Aula, 2018.
- [2] C. S. HÖNIG, Análise Funcional e Aplicações. V. I e II. 1. ed. São Paulo: IME-USP, 1970.
- [3] C. S. HÖNIG, Análise Funcional e o Problema de Sturm-Liouville. 1. ed. São Paulo: IME-USP, 1970. Diferencias Parciais, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [4] E. KREYSZIG, Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley, New York, 10th ed., 1978.
- [5] OLIVEIRA, C. R., Introdução à Análise Funcional, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.

É possível definir logaritmo de um número negativo?

Daniel de Lima Pazim[†]

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: Vamos responder a questão acima e além disso iremos mostrar que podemos definir logaritmo para um número complexo. Porém, algumas dificuldades surgem quando queremos definir uma função logarítmica neste contexto mais geral que seja diferenciável. Aqui ilustraremos essas dificuldades. Um número complexo é definido por $z = x + yi$, sendo i a unidade imaginária. Esta tem a propriedade $i^2 = -1$, sendo que x e y são chamados respectivamente parte real e parte imaginária de z . Além dessa forma, todo complexo também pode ser representado na forma exponencial, trigonométrica ou polar. A partir da relação $e^{xi} = \cos(x) + i \sin(x)$, conhecida como identidade de Euler, foi possível estabelecer os valores para logaritmos de números negativos, em particular $\ln(-1) = i(\pi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, que foi alvo de discussão entre nada menos do que Leibniz, Euler e J. Bernoulli quanto ao seu valor.

Palavras-chave: diferenciabilidade; continuidade; número complexo.

1 Introdução

Constantemente definimos a função logaritmo natural $\ln(x)$ como função inversa da exponencial e^x . Porém esta definição só faz sentido na análise real, onde a função exponencial é biunívoca em seu domínio \mathbb{R} , o que não ocorre na análise complexa. Adotaremos a notação $\log_e x$ para a função logaritmo natural real e $\ln(z)$ para a função logaritmo complexa.

Na função exponencial complexa, dado um valor de z não nulo, a expressão $e^w = z$ possui infinitas soluções uma vez que posto $w = u + vi$ e, sabendo que $|e^w| = |z|$ e $\arg(e^w) = \arg(z)$, temos $e^u = |z| \Rightarrow u = \log_e |z|$ e $v = \arg(z)$. Portanto, concluímos que $w = \log_e |z| + i \cdot \arg(z)$ e, por haver infinitos argumentos de z , esta última equação proporciona infinitas soluções w para a expressão $e^w = z$. Assim, dizemos que $w = \log_e |z| + i \cdot \arg(z)$ é uma função multivalente.

Definição 1.1. O logaritmo de um número complexo z , denotado por $\ln(z)$, é definido por

$$\ln(z) = \log_e |z| + i \cdot \arg(z). \quad (1.1)$$

Usando a representação polar de um complexo $z = re^{i\theta}$ na definição anterior, obtemos:

$$\ln(z) = \log_e r + i(\theta + 2n\pi), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.2)$$

Com essa definição já é possível respondermos a questão do título, por exemplo, calculando $\ln(-1)$ associando o número negativo -1 ao complexo $-1 + 0i$ e, representando ele na sua forma polar: $-1 + 0i = 1e^{i(\pi + 2n\pi)}$, $n \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\ln(-1 + 0i) = \log_e(1) + i(\pi + 2n\pi) = i(\pi + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

É possível mostrar que a propriedade de transformar produto em soma continua válida para o logaritmo complexo. Assim, uma vez obtido o valor de $\ln(-1)$ conseguimos obter o valor de $\ln(-a)$ qualquer que seja o valor de a real positivo diferente de zero. Basta notar que $\ln(-a) = \ln((-1)a) = \ln(-1) + \ln(a)$. O valor do \ln para um número negativo é portanto um conjunto infinito enumerável.

[†]PIBIC

Valor principal de um logaritmo complexo: Um número real positivo x gera infinitos valores para o seu logaritmo complexo dados por: $\ln(x) = \log_e |x| + 2n\pi i$. Note que para $n = 0$, o valor do logaritmo complexo $\ln(x)$ coincide com o do logaritmo real $\log_e x$. Este valor do logaritmo complexo recebe o nome de *valor principal do logaritmo complexo* já que é determinado pelo argumento principal $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$.

Definição 1.2. Chamamos de valor principal do logaritmo complexo a função $\text{Ln}(z)$ definida da seguinte forma:

$$\text{Ln}(z) = \log_e |z| + i \cdot \text{Arg}(z). \quad (1.3)$$

Observação 1.3. A expressão $f(z) = \text{Ln}(z)$ define uma função unívoca, enquanto a expressão $F(z) = \ln(z)$ define uma função multivalente.

Observação 1.4. As propriedades com respeito às operações do logaritmo complexo são idênticas às do caso real e podem ser encontradas na referência [2].

2 $\text{Ln}(z)$ como uma função inversa e Continuidade

Primeiramente, para pensarmos na função logarítmica complexa $\text{Ln}(z)$ como a função inversa da exponencial e^z , é necessário restringirmos o domínio desta última afim de que a função e^z se torne biunívoca. Para solucionarmos esse problema, basta tomarmos como domínio da exponencial a região $\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; -\infty < x < \infty, -\pi < y < \pi\}$. Deste modo, sabendo que um ponto qualquer $z = x + yi \neq 0$ dessa região possui módulo de sua imagem como sendo $|e^z| = e^x$ e argumento $\text{Arg}(e^z) = y$, temos por (1.3) que:

$$\text{Ln}(e^z) = \log_e |e^z| + i \cdot \text{Arg}(e^z) = \log_e e^x + iy = x + yi.$$

Analogamente, mostra-se que $e^{\text{Ln}(z)} = z$, para $z \neq 0$. Ou seja, para a região Ω , conseguimos $\text{Ln}(z)$ como função inversa de e^z .

Para provarmos a continuidade da função logarítmica usaremos o resultado abaixo, cuja prova pode ser encontrada na referência [1].

Teorema 1.5. *Sejam $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ e $L = u_0 + iv_0$. Dizemos que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ se, e somente se,*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$

Definição 1.6. Uma função complexa f é *contínua em um ponto* z_0 se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (2.1)$$

O próximo resultado fornece condições necessárias e suficientes para que uma função complexa seja contínua.

Teorema 1.7. *Para uma função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ser contínua em um ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, é condição necessária e suficiente que as funções reais u e v sejam contínuas no ponto (x_0, y_0) .*

Prova: Se f é contínua em z_0 , da Definição 5.2, temos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0). \quad (2.2)$$

Substituindo $u_0 = u(x_0, y_0)$ e $v_0 = v(x_0, y_0)$ no Teorema 5.1, obtemos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0).$$

Portanto, u e v são contínuas em (x_0, y_0) . Reciprocamente, se u e v são contínuas em (x_0, y_0) , então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0).$$

O Teorema 5.1 garante, então, que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = f(z_0)$. consequentemente, f é contínua segundo a Definição 5.2. \square

Mostremos então que $\text{Ln}(z) = \log_e |z| + i \cdot \text{Arg}(z)$ é contínua em $\Omega - \{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid x < 0 \text{ e } y = 0\}$. Note que $u(x,y) = \log_e \sqrt{x^2 + y^2}$ e $v(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$, que são funções contínuas, portanto Ln é contínua.

A função $\text{Ln}(z)$ não é contínua em $\{z = x + yi \mid x \leq 0 \text{ e } y = 0\}$. Para isto, tome $x_0 < 0$ e $y_0 = 0$ e considere as sequências

$$\begin{cases} z_n = |x_0|e^{i(\pi + \frac{1}{n})} \longrightarrow x_0, & \text{quando } n \text{ tende a } \infty, \\ w_n = |x_0|e^{i(-\pi - \frac{1}{n})} \longrightarrow x_0, & \text{quando } n \text{ tende a } \infty. \end{cases}$$

Mas,

$$\begin{cases} \text{Ln}(z_n) = \log_e |x_0| + i(\pi + \frac{1}{n}) \longrightarrow \log_e |x_0| + \pi i, & \text{quando } n \text{ tende a } \infty, \\ \text{Ln}(w_n) = \log_e |x_0| + i(-\pi - \frac{1}{n}) \longrightarrow \log_e |x_0| - \pi i, & \text{quando } n \text{ tende a } \infty. \end{cases}$$

Portanto, $\text{Ln}(z)$ não é contínua na semirreta $x < 0$ e $y = 0$.

3 Analiticidade:

Dado $z = re^{i\theta}$, o valor principal do logaritmo complexo $\text{Ln}(z)$ é representado pela função

$$f_1(z) = \log_e r + i\theta, \text{ onde } \theta \in (-\pi, \pi) \text{ e } r > 0. \quad (3.1)$$

Desta forma, f_1 é um ramo da função multivalente $F(z) = \ln(z)$ e é chamado de *ramo principal do logaritmo complexo*.

Teorema 1.8. *O ramo principal f_1 do logaritmo complexo definido por (3.1) é uma função analítica e possui a seguinte derivada*

$$f_1'(z) = \frac{1}{z}.$$

Prova: Em coordenadas polares, por f_1 estar definida em Ω , se z for um ponto desse domínio, podemos representar z da forma $z = re^{i\theta}$, com $-\pi < \theta < \pi$. Dado que as partes real e imaginária de f_1 são $u(r, \theta) = \log_e r$ e $v(r, \theta) = \theta$, segue que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$$

Por conseguinte, u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

As funções u e v e suas derivadas de primeira ordem são contínuas em todos os pontos de $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$ e, como f_1 está na forma polar, sua derivada é dada por:

$$f_1' = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

Por fim, como $f_1(z) = \text{Ln}(z)$, temos

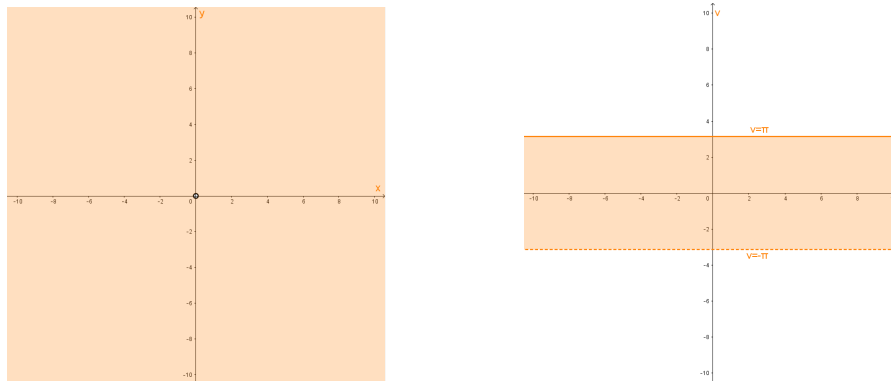
$$\frac{d}{dz} \text{Ln}(z) = \frac{1}{z}. \quad \square$$

4 Transformação logarítmica

Pelo fato da transformação $w = \text{Ln}(z)$ poder ser entendida como função inversa da transformação exponencial $w = e^z$, temos as seguintes propriedades:

- (i) $w = \text{Ln}(z)$ mapeia o conjunto $|z| > 0$ na região $-\infty < u < \infty$, $-\pi < v \leq \pi$.
- (ii) $w = \text{Ln}(z)$ mapeia a circunferência $|z| = r$ no segmento de reta vertical $u = \log_e r$, $-\pi < v \leq \pi$.
- (iii) $w = \text{Ln}(z)$ mapeia o raio $\arg(z) = \theta$ no segmento de reta horizontal $v = \theta$, $-\infty < u < \infty$.

Exemplo 1.9. As figuras abaixo ilustram a propriedade (i), mostrando que se aplicarmos a transformação logarítmica complexa, $\text{Ln}(z)$, a um ponto qualquer do z -plano com exceção da origem, ele é levado na faixa do w -plano compreendida na região $-\infty < u < \infty$, $-\pi < v \leq \pi$.

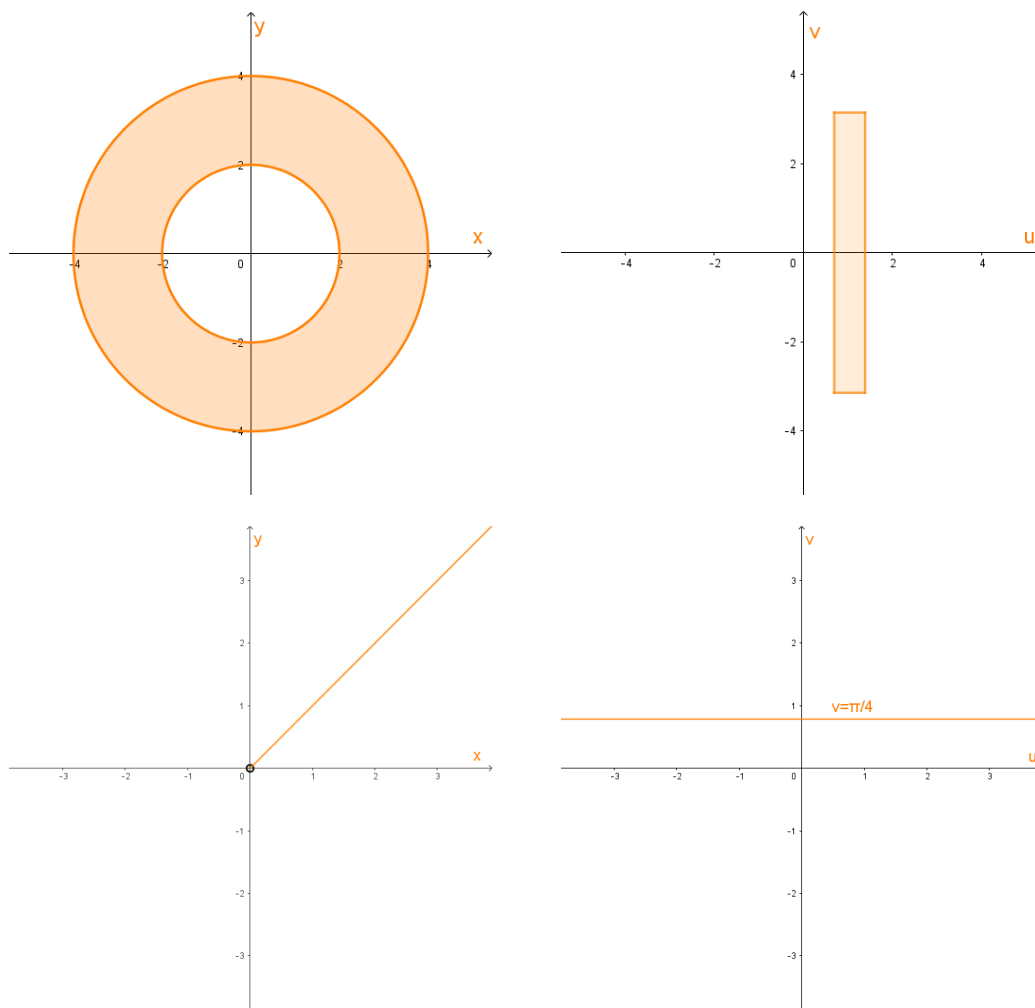


Exemplo 1.10. Vamos determinar a imagem do anel $2 \leq |z| \leq 4$ sob a transformação logarítmica $w = \text{Ln}(z)$.

Com a propriedade (ii), temos que as fronteiras das circunferências $|z| = 2$ e $|z| = 4$ são os segmentos de retas verticais $u = \log_e 2$ e $u = \log_e 4$, respectivamente, com $-\pi < v \leq \pi$. Para as demais circunferências $|z| = r$, $2 \leq r \leq 4$, podemos fazer o mesmo raciocínio. Portanto, a imagem do anel $2 \leq |z| \leq 4$ é a região retangular $\log_e 2 \leq u \leq \log_e 4$, $-\pi < v \leq \pi$.

Exemplo 1.11. Vamos agora determinar a imagem da semirreta $y = x$, $x > 0$, para os pontos da forma $z = x + yi$, sob a transformação logarítmica $w = \text{Ln}(z)$.

Sabemos que os pontos desta semirreta possuem argumento fixo de valor $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$. Usando a propriedade (iii), segue que as imagens desses pontos se encontram sobre a reta $v = \frac{\pi}{4}$ conforme a figura abaixo.



Observação 1.12. Definimos a função $\text{Ln}(z)$, usando e^z , uma pergunta natural que surge é se podemos definir essas funções com uma base diferente de e . A resposta é afirmativa, para qualquer $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, define-se $c^z = e^{z \text{Ln}(c)}$ e obtém-se $\frac{dc^z}{dz} = c^z \text{Ln}(c)$. E assim,

$$\log_c z = w \Leftrightarrow c^w = z.$$

Agradecimentos: Agradeço a Deus por minha vida, família e amigos, à minha orientadora por sempre me motivar e ajudar e ao PIBIC pela ajuda financeira em minha pesquisa.

Abstract: Let's answer the above question and furthermore we will show that we can set logarithm to a complex number. However, some difficulties arise when we want to define a logarithmic function in this more general context that is differentiable. Here we will illustrate these difficulties. A complex number is defined by $z = x + yi$, with i being the imaginary unit. This has the property $i^2 = -1$, where x and y are called the real part and the imaginary part of z respectively. In addition to this, every complex can also be represented in exponential, trigonometric or polar form. From the relation $e^{xi} = \cos(x) + i \sin(x)$, known as the Euler identity, it was possible to establish values for negative number logarithms, in particular $\ln(-1) = i(\pi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, which was the subject of discussion between nothing less than Leibniz, Euler and J. Bernoulli as to its value.

Keywords: differentiability; continuity; complex number.

Referências Bibliográficas

- [1] ZILL, D.G.; SHANAHAN, P.D. et al. *Complex analysis*. [S.I]: Jones & Bartlett Publishers, 2013.
- [2] ABREU, A.H.S. *Funções de variável complexa, teoria e aplicações*, Editora STC, Lisboa-Portugal, 2009.

Estatística Espacial - Moran I e Geary C

Isabella Dafne Oliveira Rodrigues

Orientador(a): José Silvio Govone

Resumo: Neste artigo faremos um breve estudo dos índices de Moran I e Geary C em análise espacial. Iremos analisar o comportamento desses índices em uma área geográfica. Ao final é exibido uma análise de georeferenciamento dos cursos de Matemática e Geologia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Campus Rio Claro. Esse estudo foi realizado sob a metodologia de estatística espacial.

Palavras-chave: Análise Espacial; Georreferenciamento; Área

1 Introdução

Pretendemos motivar o estudo de Estatística Espacial analisando os índices de Moran I e Geary C . Sobre estatística espacial entende-se como a área da estatística que estuda os fenômenos ao longo do espaço. A estatística espacial é definida como uma coleção de técnicas para análise geográfica, no qual o resultado da análise depende do arranjo espacial dos eventos. Evento geográfico é entendido como uma coleção de pontos, linhas ou objetos, localizados no espaço e ligados com uma classe de atributos.

Veremos como podemos inserir e analisar a estatística espacial em mapas temáticos, isto é, facilitar a compreensão de dados através de representações gráficas da superfície terrestre ilustradas de acordo com algum critério.

2 Análise Espacial em Áreas - Moran I e Geary C

Dados por área representam uma agregação de valores que se encontram dispersos dentro de cada área. Para efeitos de análise, associa-se um valor como representativo de toda a área.

Matematicamente, consideremos $\{Y(A_i), A_i \in A_1, \dots, A_n\}$ um conjunto de variáveis aleatórias indexadas por sub-regiões fixas (A_1, \dots, A_n) na região R , em que $A_1 \cup \dots \cup A_n = R$, $\cap_{i=1}^n A_i = \emptyset$. Vamos generalizar as variáveis aleatórias $Y(A_i)$ como Y_i e denotar como valores observados y_i .

Na maioria das vezes, as áreas representam divisões administrativas de caráter político ou administrativo ou divisões com características geomorfológicas. Contagem, proporção, média e mediana são algumas das variáveis aleatórias usadas para esse tipo de dados.

Dados agregados por área são observados, geralmente, em mapas em que o espaço é particionado em áreas e cada área é colorida de acordo com a magnitude do valor quantitativo ou qualitativo. Cada área do mapa é classificada de acordo com o valor da variável, onde é feita uma divisão em classes, em que o número de classes se baseia em diferentes critérios: intervalos iguais, percentis ou desvios padrão. Esses critérios podem levar à diferentes impressões visuais de tendência e de padrão espacial para uma mesma região estudada.

Intervalos iguais não são indicados para variáveis que tem distribuição assimétrica, pois quando se divide em classes de amplitudes iguais as variáveis de valor menor ou maior ficam reduzidas a poucas áreas, sendo assim haverá muitas áreas restritas a uma ou duas cores. Agrupar os dados por quantil significa que são geradas as mesmas quantidades de áreas em

cada classe. Sendo assim, a amplitude das classes não é constante. O que prevalece é o número de áreas constante em cada classe. Essa forma de agrupamento ajuda a visualizar como um dado é percentualmente distribuído. Por fim, o modo de agrupamento por desvio padrão produz classes em função do valor de desvio padrão em torno da média e o número de classes depende dos dados. Essa forma de agrupamento ajuda a analisar o comportamento dos dados em torno da média.

Portanto, para uma análise exploratória é importante experimentar diferentes critérios de agrupamento para a visualização do mapa. Dados de áreas são os mais analisados na área da saúde, embora tenham sua importância frequentemente subestimada por receio da denominada falácia ecológica, que pode ser definida como uma tentativa de estimar associações entre indivíduos a partir de dados agregados.

Por exemplo, ao analisar o problema de atropelamento, observa-se que a taxa de atropelamento em municípios ricos é maior. Porém não pode-se concluir que indivíduos ricos são os mais atropelados, mas pode-se concluir que municípios ricos tem um número maior de carros, e estes atropelam pedestres (Brasil, Ministério da Saúde, 2007).

A adversidade de “unidade de área modificável” consiste em dois tipos de problemas: escala e zona. A dificuldade referente a escala tem-se quando há muitas áreas e deseja-se agregá-las, porém surge a dúvida de como agregá-las. Já problemas de zona também consistem na escolha de como agregar as áreas, contudo, envolve na escolha entre zonas diferentes. As tabelas 1 e 2 ilustram uma escala (modificação do número de áreas) e zonas diferentes (modificação na forma da área).

Tabela 1: Escala: modificação no número de áreas [2].

27	25	24	22		
25	23	22	20	100	88
23	20	18	16	85	72
20	22	20	18		

Tabela 2: Zonas diferentes: modificação na forma das áreas [2].

185	160	127	126	188	148
127	131	148	176	157	105
				131	133
				127	191

2.1 Autocorrelação Espacial para Dados em Área

Para analisar como os valores observados, y_i ; $i = 1, \dots, n$, estão correlacionados no espaço mede-se a dependência espacial. Para isso, utiliza-se os indicadores de autocorrelação: Índice de Moran I e Índice de Geary C . Através desses indicadores é possível medir quanto o valor observado na i -ésima área é dependente dos valores observados da mesma variável nas áreas vizinhas.

O índice de Moran I é indicado para dados que apresentam processos estacionários, pois calculando para dados não estacionários o índice perde a sua validade devido ao índice utilizar em seu cálculo a diferença entre cada valor observado y_i e a média global \bar{y} . Quando há não estacionariedade, ou seja, há tendência, o índice de Geary C é o indicado para calcular a autocorrelação espacial pois tal índice utiliza em seu cálculo a diferença entre os pares y_i e y_j .

Antes de apresentar os indicadores de autocorrelação, Índice de Moran I e Índice de Geary C , define-se uma matriz de proximidade espacial W a qual fornece as medidas de proximidade

entre as áreas A_i e A_j da região de estudo. Dado um conjunto de n áreas $\{A_i, \dots, A_n\}$, seja a matriz de proximidade espacial $W_{(n;n)}$, em que cada elemento w_{ij} representa uma medida de proximidade espacial entre as áreas A_i e A_j . A escolha dos elementos w_{ij} é arbitrário e deve se levar em consideração o problema específico sob análise.

Há casos que padroniza-se as linhas da matriz $W_{(n;n)}$, para que a soma das medidas de proximidade espacial w_{ij} de cada linha seja igual a 1. Isto facilita os cálculos. Pode-se generalizar a matriz de proximidade espacial para vizinhos de maior ordem.

Moran I

O índice de Moran I mede o grau de correlação entre pares de valores observados y_i e y_j ponderado pela medida de proximidade w_{ij} ,

$$I = \frac{n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2) (\sum_{i \neq j} w_{ij})}$$

em que: n é o número de áreas, y_i valor observado da variável Y_i da i -ésima área, \bar{y} é a média dos valores observados na região de estudo e w_{ij} os elementos da matriz de proximidade espacial W . A equação acima, é calculada para matriz de proximidade espacial de primeira ordem. Para matriz de proximidade de maior ordem (k), o índice de Moran I é dado por:

$$I^{(k)} = \frac{n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}^{(k)} (y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2) (\sum_{i \neq j} w_{ij}^{(k)})}$$

em que $w_{ij}^{(k)}$ são os elementos da matriz de proximidade espacial $W^{(k)}$ de ordem k . Se os valores y_i e y_j forem espacialmente independentes, o valor de I é igual a zero. Quando há similaridades entre as áreas próximas, I tende a um valor positivo. No entanto, quando há dissimilaridade entre as áreas próximas, I tende a um valor negativo. Observe que, o índice de Moran I tem a mesma forma do coeficiente de correlação usual. O numerador mostra a média de produtos dos desvios em relação à média e o denominador uma medida de variabilidade dos desvios.

Geary C

O índice de Geary C mede o grau de correlação entre pares de valores observados y_i e y_j ponderado pela medida de proximidade w_{ij} :

$$C = \frac{(n-1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_i - y_j)^2}{2 (\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2) (\sum_{i \neq j} w_{ij})}$$

em que: n é o número de áreas, y_i valor observado em A_i , \bar{y} é a média dos valores observados na região de estudo e w_{ij} os elementos da matriz de proximidade espacial W . Valores pequenos de C indicam autocorrelação positiva, enquanto valores grandes de C indicam autocorrelação negativa. O índice de Geary C é usado com menor frequência que o índice de Moran I .

3 Aplicações em ArcGIS

Em várias situações práticas não dispomos da localização geográfica dos eventos (pontos). Nestes casos, os dados estão disponíveis de maneira aglomerada para uma certa unidade de área, como um bairro, distrito, setor censitário, município, etc. Uma forma de visualizar esses dados é através de mapas coloridos, chamados mapas temáticos. Após um estudo de

como desenvolver mapas que apresentam visualmente os dados no *software ArcGIS* vamos plotar alguns gráficos com base em dados, que foram fornecidos pelo Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

O *software ArcGIS* é um sistema de informação geográfica (Geographic Information System - GIS) utilizado para criar, gerenciar, compartilhar e analisar dados espaciais. O sistema fornece uma infra-estrutura para criar mapas e buscar informações geográficas.



Figura 1: Software ArcGIS

Ele é usado para:

- criação e utilização de mapas;
- compilar dados geográficos;
- análise de informações mapeadas ;
- compartilhar e descobrir informações geográficas;
- usar mapas e informações geográficas em uma gama de aplicações;
- e gestão de informação geográficas numa base de dados.

A partir dos dados fornecidos (que estão apresentados no canto inferior esquerdo[†]) elaboramos os seguintes mapas:

(espaço em branco intencional)

[†]A tabela em cada um dos mapas é correspondente a quantidades de alunos matriculados nos respectivos cursos versus suas cidades de origem. Os números nos mapas correspondem a respectivas cidades. Os dados fornecidos pelo IGCE são referentes ao ano de 2018.

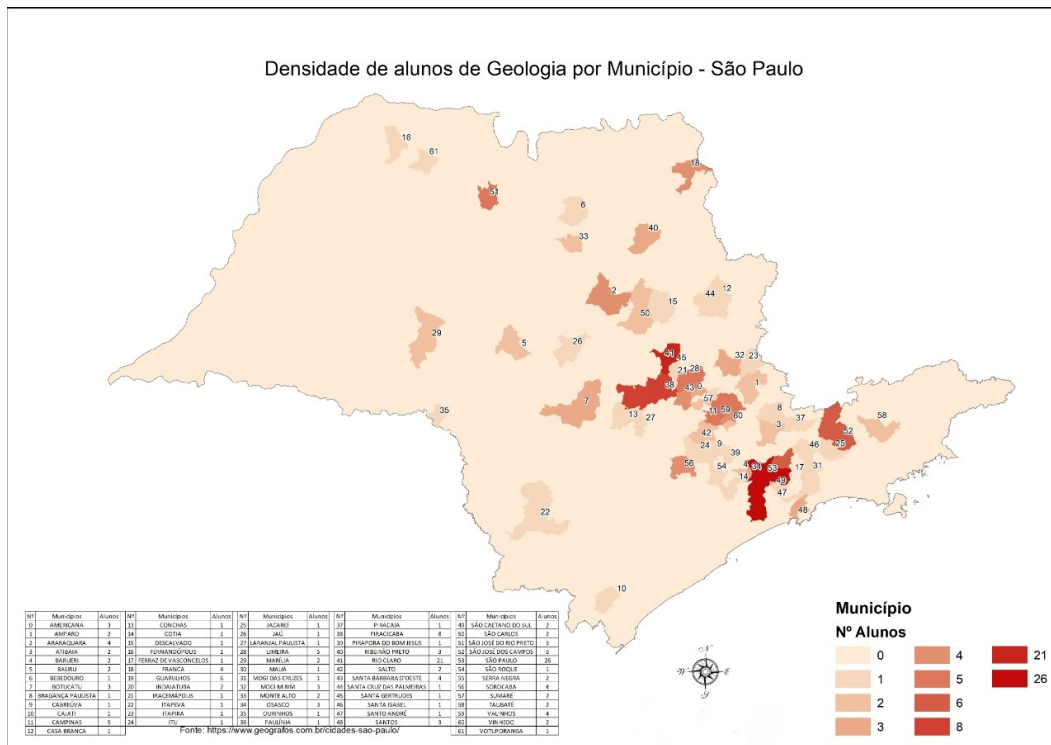


Figura 2: Mapa alunos Geologia

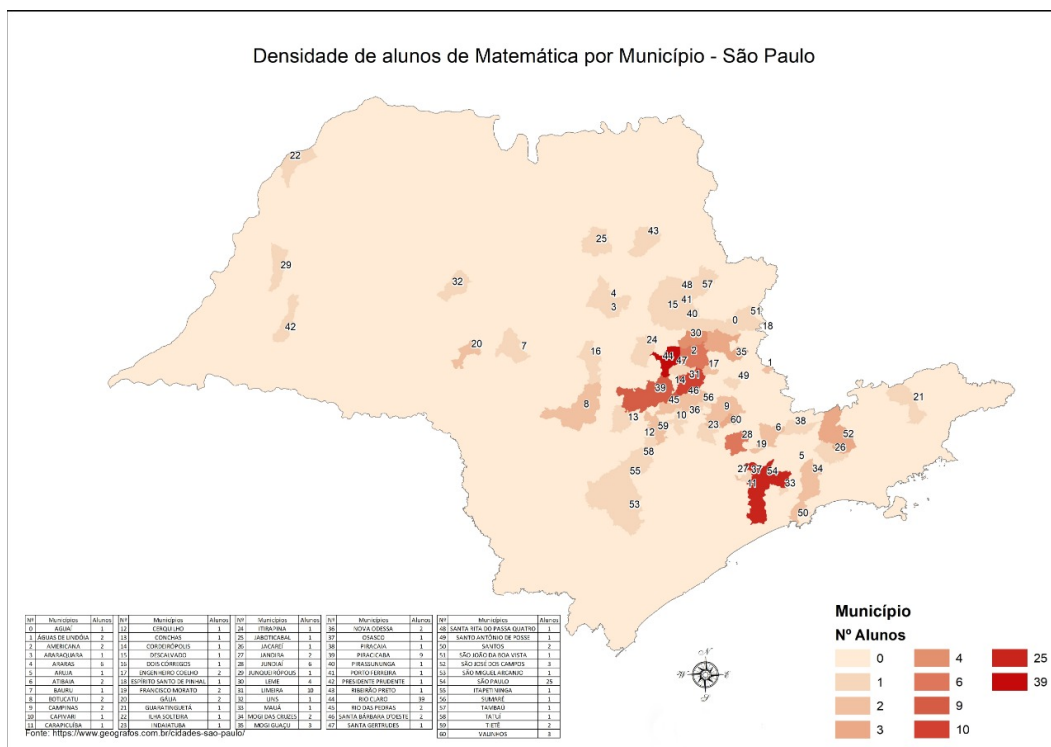


Figura 3: Mapa alunos Matemática

Os nossos objetivos com a realização dos mapas temáticos foram analisar a quantidade de alunos que são oriundos de cidades distintas e estão atualmente matriculados na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Campus Rio Claro. E, com isso fazer uma comparação entre os cursos de Matemática e Geologia, e concluir que a maior parte dos alunos da Matemática são naturais de Rio Claro-SP e região, enquanto que na Geologia esse número é menor, pois a maioria dos alunos são naturais de São Paulo-SP.

4 Considerações Finais

Através desse estudo, podemos entender um pouco melhor os índices de Moran I e Geary C . Além disso, podemos assimilar melhor e motivar os estudos em Estatística Espacial através da análise feita nos mapas.

Agradecimentos: Agradeço primeiramente a Deus, por cada dia nos dar uma nova chance. Aos meus pais, irmãos e ao Matheus por sempre me apoiarem nas decisões a serem tomadas. Ao PET, pelas amizades, pelos projetos desenvolvidos e pelo incentivo à pesquisa. Ao Professor José Silvio Govone pela supervisão na iniciação científica, ao técnico do DEMAC, Jorge Gustavo Falcão, pelas orientações nos softwares e ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas pela colaboração com o fornecimento dos dados.

Abstract: In this article we will make a brief study of Moran I and Geary C indices in spatial analysis. We will analyze the behavior of these indices in a geographical area. At the end, a georeferencing analysis of the Mathematics and Geology courses at Paulista State University “Júlio de Mesquita Filho” - Rio Claro Campus is shown. This study was conducted using the spatial statistics methodology.

Keywords: Spatial analysis; Georeferencing; Area

Referências Bibliográficas

- [1] Bertolla, J. M., *Técnicas de Análise de Dados Distribuídos em Áreas*, 2015, 60. UNESP, Botucatu, 2015.
- [2] Openshaw, O.; Taylor, P. J., “A million or so correlation coefficients: three experiments on the modifiable areal unit problem”. In N. Wrigley, editor, *Statistical Applications in the Spatial Sciences*, Pion, London, 1979.

O número de sub-reticulados do reticulado hexagonal

João Gabriel Oliveira de Jesus
Orientador(a): Profa. Dra. Carina Alves

Resumo: No \mathbb{R}^2 o reticulado com maior densidade de empacotamento é o reticulado hexagonal. Devido a importância de tal reticulado, o objetivo deste trabalho é discutir a seguinte questão: Quantos sub-reticulados de índice N existem no reticulado hexagonal?

Palavras-chave: reticulados; sub-reticulados; congruência

1 Reticulados e suas Propriedades

Nesta seção apresentamos o conceito de reticulados enfocando suas principais propriedades.

Definição 1.1. Seja $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ um conjunto de vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n (tal que $m \leq n$). O conjunto de pontos

$$\Lambda = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i, \lambda_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

é chamado um reticulado de posto m , e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ é chamado uma base do reticulado.

Definição 1.2. O paralelepípedo formado pelos pontos

$$\theta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \theta_m \mathbf{v}_m, \quad 0 \leq \theta_i < 1$$

é chamado um paralelepípedo fundamental ou região fundamental do reticulado.

Definição 1.3. Seja $\{v_1, \dots, v_m\}$ uma base do reticulado Λ . Se $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$, com $i = \{1, \dots, m\}$, a matriz

$$M = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & \dots & v_{mn} \end{pmatrix}$$

é chamada uma matriz geradora para o reticulado. A matriz $G = M^t M$ é chamada de matriz de Gram.

Assim, um reticulado Λ pode ser escrito como

$$\Lambda = \{M\lambda; \lambda \in \mathbb{Z}^m\},$$

onde λ é um vetor de tamanho $m \times 1$.

Definição 1.4. O determinante do reticulado Λ é definido como sendo o determinante da matriz de Gram,

$$\det(\Lambda) = \det(G).$$

Para reticulados de posto máximo, isto é, quando $m = n$, a raiz quadrada do determinante do reticulado é o volume da região fundamental, também chamado de volume do reticulado, denotado por $\text{Vol}(\Lambda)$. Assim, $\text{Vol}(\Lambda) = |\det(M)|$. Dessa forma, quando Λ tem posto máximo, M é uma matriz quadrada, ou seja,

$$|\det(\Lambda)| = (\det(M))^2.$$

Definição 1.5. Seja B uma matriz $n \times n$ com coeficientes em \mathbb{Z} . Um sub-reticulado Λ' de Λ é dado por:

$$\Lambda' = \{\mathbf{x} = MB\lambda; \lambda \in \mathbb{Z}^n\}$$

com M a matriz geradora de Λ . Ou seja, Λ' é um subconjunto de Λ que também é um reticulado.

Definição 1.6. Dado um reticulado Λ , um reticulado escalonado Λ' pode ser obtido multiplicando todos os vetores do reticulado por uma constante, isto é,

$$\Lambda' = c\Lambda, \quad c \in \mathbb{R}.$$

De modo geral, quando $c \in \mathbb{Z}$, Λ' é um sub-reticulado de Λ .

Definição 1.7. Dois reticulados $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{R}^n$ de posto n são ditos equivalentes se existe uma matriz ortogonal A , de ordem n , com entradas em \mathbb{R} , e uma constante α tal que $\Lambda_1 = \alpha A \Lambda_2$. Reticulados equivalentes possuem a mesma configuração, mas não a mesma escala.

De outro modo, se um reticulado pode ser obtido de outro por uma rotação, reflexão ou mudança de escalar, dizemos que eles são equivalentes.

2 Reticulado Hexagonal

O reticulado hexagonal Λ_h em \mathbb{R}^2 é gerado pelos vetores $u_1 = (1, 0)$ e $u_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Escrevemos:

$$\Lambda_h := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2$$

A fim de que possamos fazer as associações $(1, 0) \longleftrightarrow 1$; $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \longleftrightarrow \omega$ e $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \longleftrightarrow \omega^2$, usaremos a seguinte definição:

Definição 1.8. Seja $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$. Denotamos por $\mathbb{Z}[\omega] \subset \mathbb{C}$ o menor subanel de \mathbb{C} contendo \mathbb{Z} e ω e chamamos de anel dos inteiros de Eisenstein. Os elementos de $\mathbb{Z}[\omega]$ são da forma $z = a + b\omega$, e $\mathbb{Z}[\omega]$ é um anel sob as seguintes operações de soma e produto:

$$\begin{aligned} +: \mathbb{Z}[\omega] \times \mathbb{Z}[\omega] &\longrightarrow \mathbb{Z}[\omega] & \cdot: \mathbb{Z}[\omega] \times \mathbb{Z}[\omega] &\longrightarrow \mathbb{Z}[\omega] \\ ((a, b), (c, d)) &\longmapsto (a + c, b + d) & ((a, b), (c, d)) &\longmapsto (ac - bd, ad + cb - cd) \end{aligned}$$

Com essa definição, podemos realizar as associações desejadas tomando $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, e definindo a função:

$$\varphi: \mathbb{Z}[\omega] \longrightarrow \Lambda_h,$$

dada por: $\varphi(1) = (1, 0)$ e $\varphi(\omega) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Essa função é um homomorfismo injetivo de módulos sobre \mathbb{Z} . Desta forma, podemos identificar o reticulado hexagonal Λ_h como o anel dos inteiros de Eisenstein $\mathbb{Z}[\omega]$.

Podemos verificar algumas propriedades sobre o reticulado hexagonal Λ_h , por exemplo, como $M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, então a matriz de Gram do reticulado hexagonal é dada por:

$$G = M^t M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Com esse resultado, calculamos o determinante do reticulado hexagonal Λ_h :

$$\det(\Lambda_h) = \det(G) = \det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}.$$

Usando o fato de que $\mathbb{Z}[\omega]$ é um domínio de ideais principais, podemos escrever seus ideais na forma:

$$\langle \alpha \rangle = \{ \alpha z; z \in \mathbb{Z}[\omega] \}.$$

Assim, verifica-se que para cada ideal I de $\mathbb{Z}[\omega]$ o conjunto $\varphi(I)$ é um reticulado de \mathbb{R}^2 .

3 Algumas Considerações sobre os Sub-reticulados do Reticulado Hexagonal

Neste trabalho estamos interessados em encontrar o número de sub-reticulados não equivalentes de um dado índice. Para lidar com este problema, analisamos qual é a forma de um sub-reticulado do reticulado hexagonal Λ_h . Serão necessários alguns resultados que discutem relações entre reticulados e sub-reticulados, apresentados a seguir:

Observação 1.9. Sejam Λ, Γ reticulados em \mathbb{R}^n . Então Γ é um sub-reticulado de Λ se, e somente se, $N = BM$, onde

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

com $b_{ij} \in \mathbb{Z}$. Chamaremos B de matriz particionadora do sub-reticulado Γ .

De maneira geral, se Λ é um reticulado em \mathbb{R}^n e Γ um sub-reticulado de Λ , então o índice de Γ em Λ é o número das classes laterais de Γ em Λ , denotado por $[\Lambda : \Gamma]$. Consideremos então Γ um sub-reticulado de Λ_h , digamos então que $(\Lambda_h : \Gamma) = N$. Uma vez que Γ é um sub-reticulado de Λ_h existe uma matriz

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

tal que $\det(B) = N$.

Segue então que, se T é a matriz geradora de Γ , então T é da forma:

$$T = BM = \begin{pmatrix} a & b - \frac{1}{2}c \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}c \end{pmatrix},$$

em que M é a matriz geradora de Λ_h definida na Seção 2. Ou seja, o sub-reticulado Γ é gerado pelos vetores $v_1 = (a, 0)$ e $v_2 = (b - \frac{1}{2}c, \frac{\sqrt{3}}{2}c)$.

Observamos que Λ_h/Γ é um grupo abeliano finitamente gerado, e, assim Λ_h/Γ é um grupo cíclico de ordem N ou Λ_h/Γ é isomorfo a um produto direto $\mathbb{Z}_{\frac{N}{m}} \times \mathbb{Z}_m$ de grupos cíclicos, onde m é um fator de $\frac{N}{m}$. Neste caso m^2 divide N .

Para prosseguirmos de modo a responder a questão apresentada no início deste trabalho, são necessários alguns resultados mais gerais da teoria de transformações de grupos de ordem n , e de alguns pré-requisitos sobre teoria dos números, mais especificamente, os resíduos quadráticos, que veremos a seguir.

4 Resíduos Quadráticos

Os tópicos discutidos nessa seção são de suma importância para o desenvolvimento do método para classificar todos os sub-reticulados de um certo índice não-equivalentes do reticulado hexagonal.

O interesse geral é o estudo de soluções para a seguinte congruência:

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

No caso em que p é um número primo ímpar e $\text{mdc}(a, p) = 1$ a congruência acima, caso tenha solução, possui exatamente duas soluções incongruentes. A prova desse resultado pode ser encontrada na referência [3].

Com esse resultado, podemos definir o conceito de resíduos quadráticos.

Definição 1.10. Sejam a e m inteiros com $\text{mdc}(a, m) = 1$. Dizemos que a é um resíduo quadrático módulo m se a congruência $x^2 \equiv a \pmod{m}$ tiver solução. Caso contrário, dizemos que a não é um resíduo quadrático.

Definição 1.11. Para um primo ímpar p e a um número não-divisível por p , definimos o símbolo de Legendre por:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \text{ é um resíduo quadrático de } p, \\ -1, & \text{se } a \text{ não é um resíduo quadrático de } p. \end{cases}$$

A seguir apresentamos dois resultados que podem ser encontrados na referência [3].

Teorema 1.12 (Critério de Euler). Se p for um número primo ímpar e a um inteiro não-divisível por p , então:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Teorema 1.13. Para p um primo ímpar, temos:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \equiv 1, 7 \pmod{p}, \\ -1, & \text{se } p \equiv 3, 5 \pmod{p}. \end{cases}$$

Lema 1.14. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $\text{mdc}(a, p) = 1$. Então a congruência $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ tem no máximo duas raízes.

Prova: Vamos supor, por absurdo, que a congruência $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ tenha três soluções não congruentes módulo p , digamos x_1, x_2 e x_3 . Então,

$$f(x) - f(x_1) = a(x^2 - x_1^2) + b(x - x_1) = (x - x_1)[a(x + x_1) + b].$$

Uma vez que $f(x_j) \equiv f(x_1) \pmod{p}$ para todo $j \in \{2, 3\}$ segue que,

$$f(x_j) - f(x_1) = (x_j - x_1)[a(x_j + x_1) + b] \equiv 0 \pmod{p}.$$

Logo, a congruência linear $[ax + (b + ax_1)] \equiv 0 \pmod{p}$ tem duas soluções não congruentes módulo p , o que é uma contradição, pois a congruência acima tem uma única solução. \square

Agora, vamos desenvolver um resultado quanto à existência de soluções da congruência do Lema 1.14.

Seja $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}$ a congruência do Lema 1.14. Como $\text{mdc}(a, p) = 1$, temos que:

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow x^2 + a^{-1}bx + a^{-1}c \equiv 0 \pmod{p}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} x^2 + a^{-1}bx + a^{-1}c &\equiv x^2 + a^{-1}bx + [(2^{-1}a^{-1}b)^2 - (2^{-1}a^{-1}b)^2] + a^{-1}c \\ &\equiv (x + 2^{-1}a^{-1}b) - 2^{-2}a^{-2}(b^2 - 4ac) \pmod{p}. \end{aligned}$$

Se $\Delta = b^2 - 4ac$, podemos enunciar o seguinte resultado: A congruência $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}$ possui soluções se, e somente se, Δ é um resíduo quadrático módulo p , isto é,

$$\left(\frac{\Delta}{p}\right) \equiv \Delta^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Utilizando os resultados anteriores, mais o Teorema Chinês dos Restos, podemos notar que o número de soluções da congruência:

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

pode ser escrito na forma $\left(1 + \left(\frac{p}{3}\right)\right)$ se $p > 3$, uma vez que $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$. Desta forma, utilizando que a congruência $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ possui soluções se, e somente se, Δ é um resíduo quadrático módulo p , como $\Delta = -3$ segue que:

$$\left(\frac{-3}{p}\right) \equiv -3^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Portanto, se considerarmos $N = \prod_{i=1}^n p_i^{k_i}$ o produto de n fatores $p_i^{k_i}$, onde p_i são primos distintos, então pelo Teorema Chinês dos Restos o número de soluções da congruência $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ é dado por:

$$\nu_1 = \begin{cases} 0, & \text{se } 2 \mid N \text{ ou } 9 \mid N, \\ \prod_{i=1, p_i > 3}^n \left(1 + \frac{p_i}{3}\right), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Agora, se considerarmos a congruência $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ podemos observar que $\Delta = 4$. Assim, segue que o número de soluções da congruência pode ser escrita na forma: $\left(1 + \left(\frac{4}{p}\right)\right)$, se $p > 4$. Logo, se considerarmos $N = \prod_{i=1}^n p_i^{k_i}$, onde p_i são primos distintos, pelo Teorema Chinês dos Restos o número de soluções da congruência $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{N}$ é dado por:

$$\mu = 2^{n-1+\nu_2}$$

onde

$$\nu_2 = \begin{cases} 2, & \text{se } N \equiv 0 \pmod{8}, \\ 1, & \text{se } N \equiv 1, 3, 4, 5, 7 \pmod{8}, \\ 0, & \text{se } N \equiv 2, 6 \pmod{8}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Ressaltamos que (4.1) e (4.2) são de extrema importância para os resultados finais.

5 Grupos de Transformações de Ordem n

O principal objetivo dessa seção é desenvolver um resultado para encontrar o número de classes de transformações equivalentes no grupo de transformações de ordem n , a fim de relacionarmos com o número de sub-reticulados primitivos de índice N em um reticulado qualquer de \mathbb{R}^2 .

Definição 1.15. Seja $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ uma matriz de ordem n com entradas racionais e com determinante $|M| = n \geq 1$. Assumimos que $\text{mdc}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 1$. A transformação linear correspondente a M será denominada por transformação de ordem n . Para n fixo, seja \mathcal{M}_n o conjunto de todas as matrizes M e, equivalentemente, o conjunto de suas transformações correspondentes.

Por grupo de transformação Γ_M de ordem n , entendemos o grupo:

$$\Gamma_M := \Gamma \cap M^{-1}\Gamma M. \quad (5.1)$$

Alternativamente, podemos expressar o grupo Γ_M como:

$$\Gamma_M = \{A \in \Gamma / MAM^{-1} \in \Gamma\}. \quad (5.2)$$

Nosso interesse agora é investigar todas as transformações e grupos de transformações de ordem n . Observamos que, da equação (5.1), obtemos:

$$\Gamma_{SMS_1} = S_1^{-1}\Gamma_M S_1, \quad \forall S, S_1 \in \Gamma$$

Assim, podemos definir a relação de congruência para transformações.

Definição 1.16. Duas transformações $M, M_1 \in \mathcal{M}_n$ são ditas congruentes, ou equivalentes, módulo Γ , isto é: $M_1 \equiv M \pmod{\Gamma}$, se existe $S \in \Gamma$ tal que $M_1 = SM$. Então a congruência módulo Γ define uma relação de equivalência, isto é:

$$M_1 \equiv M \pmod{\Gamma} \Rightarrow \Gamma_{M_1} = \Gamma_M.$$

Na intenção de determinar o mínimo das classes \mathcal{M}_n módulo Γ , temos o seguinte teorema, que pode ser encontrado na referência [2].

Teorema 1.17. (1) Para cada $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n$ existe $M_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix}$ tal que $M \equiv M_1 \pmod{\Gamma}$.

(2) Duas transformações de \mathcal{M}_n , $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix}$, são equivalentes se, e somente se, $\alpha = t\alpha_1, \gamma = t\gamma_1, \beta \equiv t\beta_1 \pmod{\delta}$, onde $t \in \{1, -1\}$.

(3) Um sistema completo de representantes das classes de equivalências de $\mathcal{M}_n \pmod{\Gamma}$ é dado pelo conjunto de matrizes

$$\begin{pmatrix} \alpha_v & \beta_v \\ 0 & \delta_v \end{pmatrix} \text{ com } \alpha_v > 0, \alpha_v \delta_v = n, \text{ em que } \beta_v \pmod{\delta_v}, \text{mdc}(\alpha_v, \beta_v, \delta_v) = 1.$$

O teorema a seguir nos dará o número de classes de transformações equivalentes.

Teorema 1.18. O número $\psi(n)$ de classes de transformações equivalentes de $\mathcal{M}_n \pmod{\Gamma}$ é

$$\psi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Prova: Temos que determinar o número de soluções $\alpha > 0$, $\alpha\delta = n$, $\beta \pmod{\delta}$ com $\text{mdc}(\alpha, \beta, \delta) = 1$. Para $\delta > 0$ fixo, o número de elementos de $\beta \pmod{\delta}$ que são relativamente primos com um divisor t de δ é:

$$\frac{\delta}{t}\varphi(t)$$

onde φ é a função de Euler. Se tomarmos $t = (\alpha, \delta) = (\frac{n}{\delta}, \delta)$ e somarmos todos os divisores positivos δ de n , obtemos:

$$\psi(n) = \sum_{\delta|n} \frac{\delta}{\text{mdc}(\frac{n}{\delta}, \delta)} \varphi\left(\text{mdc}\left(\frac{n}{\delta}, \delta\right)\right).$$

Como φ é uma função multiplicativa, então ψ também o é. Assim, para p número primo e $k \in \mathbb{N}$, podemos calcular $\psi(p^k)$:

$$\psi(p^k) = \sum_{\nu=0}^k \frac{p^\nu}{\text{mdc}(p^{k-\nu}, p^\nu)} \varphi(\text{mdc}(p^{k-\nu}, p^\nu)) = \left[\sum_{\nu=1}^{k-1} p^\nu \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right] + 1 + p^k = p^k \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

□

6 Resultados Finais

Com toda a bagagem teórica carregada até esta seção, podemos enunciar e demonstrar os dois teoremas finais que fornecem a quantidade de sub-reticulados não equivalentes do reticulado hexagonal Λ_h de índice N .

Teorema 1.19. *Seja $N = \prod_{i=1}^n p_i^{k_i}$, onde p_i são números primos distintos. Então, o número de sub-reticulados primitivos não equivalentes de Λ_h de índice N é:*

$$f_1(N) = \frac{1}{6}N \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{p_i}\right) + \frac{\nu_1}{3} + 2^{n-2+\nu_2},$$

em que ν_1 é dado por (4.1) e ν_2 é dado por (4.2).

Prova: Para demonstrarmos esse teorema, devemos encontrar todos os homomorfismos de módulos sobre \mathbb{Z} :

$$\varphi : \Lambda_h \longrightarrow \mathbb{Z}_N$$

pois $\ker \varphi = \Gamma$ é um sub-reticulado de Λ_h . Como vimos anteriormente, Λ_h é gerado por 1 e ω , e portanto, determinado por $\varphi(1)$ e $\varphi(\omega)$. Sendo assim,

$$\ker(r\varphi) = \ker \varphi, \quad \forall r \in U(\mathbb{Z}_N).$$

Pelo Teorema 1.18, podemos relacionar o número de classes de transformações equivalentes no grupo de transformações de ordem n com o número de sub-reticulados primitivos de índice N em um reticulado qualquer de \mathbb{R}^2 . Este número é dado pela função ψ :

$$\psi(n) = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right). \quad (6.1)$$

Uma vez que sub-reticulados equivalentes são invariantes por rotação e reflexão, dividimos a equação (5.2) por 6 (no caso de Λ_h). Também, adicionamos os sub-reticulados de Λ_h que já tenham sido rotacionados ou refletidos, isto é, dividimos por 2 ou por 3, respectivamente. Consideramos os seguintes casos:

1º caso: Vamos supor que Γ admita apenas rotação. Então, podemos supor $\varphi(1) = 1$, $\varphi(\omega) = x$ e $\varphi(\omega^2) = x^2$, em que:

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{N}$$

pois $\varphi(x^2 + x + 1) = \varphi(0) = 0$.

O número de soluções dessa congruência é dado por ν_1 , conforme vimos em (4.1). Deste modo, o termo adicional é dado por:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)\nu_1 = \frac{1}{3}\nu_1.$$

2º caso: Suponhamos agora que Γ admita apenas reflexão. Então, sem perda de generalidade, temos as seguintes possibilidades:

- $\varphi(1) = 1$, $\varphi(\omega) = x$ e $\varphi(\omega^2) = -x - 1$
- $\varphi(1) = -x - 1$, $\varphi(\omega) = 1$ e $\varphi(\omega^2) = x$
- $\varphi(1) = x$, $\varphi(\omega) = -x - 1$ e $\varphi(\omega^2) = 1$

onde $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{N}$.

O número de soluções dessa congruência é dado por ν_2 , conforme vimos em (4.2). Assim, o número de sub-reticulados não equivalentes é dado por $3 \cdot 2^{(n-1)+\nu_2}$. Logo, o termo adicional é dado por:

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)3 \cdot 2^{(n-1)+\nu_2} = 2^{(n-1)+\nu_2}.$$

Portanto,

$$f_1(N) = \frac{1}{6}N \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{p_i}\right) + \frac{\nu_1}{3} + 2^{n-2+\nu_2}$$

é o número de sub-reticulados primitivos não equivalentes de Λ_h de índice N . □

Teorema 1.20. *O número de sub-reticulados não equivalentes de Λ_h com índice N é:*

$$f(N) = \sum_{m^2|N} f_1\left(\frac{N}{m^2}\right).$$

Prova: Considere Γ um sub-reticulado qualquer de Λ_h de índice N . Podemos escrever Γ unicamente como:

$$\Gamma = m\Gamma',$$

onde Γ' é um sub-reticulado primitivo de Λ_h com índice $\frac{N}{m^2}$, já que $[\Lambda_h : \Gamma] = N = m^2 \frac{N}{m^2}$. Se

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é a matriz geradora de Γ , então

$$M' = \begin{pmatrix} \frac{a}{m} & \frac{b}{m} \\ \frac{c}{m} & \frac{d}{m} \end{pmatrix}$$

onde $M = mM'$ é a matriz geradora de Γ' . Portanto,

$$f(N) = \sum_{m^2|N} f_1\left(\frac{N}{m^2}\right)$$

é o número de sub-reticulados não equivalentes de Λ_h com índice N . □

Para ilustrar e concluir esses resultados, temos a seguinte tabela, que relaciona o número de sub-reticulados primitivos $f_1(N)$ e todos os sub-reticulados $f(N)$ de índice N no reticulado hexagonal Λ_h , que pode ser encontrada na referência [4].

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f_1(N)$	1	1	2	2	2	3	3	4	3	4	3	6	4	5	6
$f(N)$	1	1	2	3	2	3	3	5	4	4	3	8	4	5	6

Agradecimentos: Agradeço primeiramente aos meus pais, Marcelo e Viviane, e à minha orientadora Profa. Dra. Carina Alves, pelo apoio e confiança.

Abstract: In \mathbb{R}^2 the lattice with highest packing density is the hexagonal lattice. Due to the importance of such a lattice, the purpose of this paper is to discuss the following question: How many sublattices of index N are there in the hexagonal lattice?

Keywords: lattices; sublattices; congruence

Referências Bibliográficas

- [1] Bernstein, M.; Sloane, N. J. A.; Wright, P. E., *On sublattices of the hexagonal lattice*, Discrete Mathematics, vol 170, 1-3 (10), p. 29-39, 1997.
- [2] Schoeneberg, B., *Elliptic Modular Functions - An Introduction*, Springer-Verlag, 1974.
- [3] Santos, J. P. O., *Introdução à Teoria dos Números*, IMPA, Rio de Janeiro, 1998.
- [4] Tardin, G. L., *Classificação dos sub-reticulados do reticulado hexagonal*, Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2002.

Modelo geral de vacinação

Laís Zorzo Buzo[†]

Orientador(a): Marta Cilene Gadotti

Resumo: O trabalho faz parte de um projeto de Iniciação Científica onde estudamos Equações Diferenciais Ordinárias e Modelos Matemáticos relacionados à epidemiologia. Neste trabalho é desenvolvido um modelo matemático apresentando uma dinâmica de vacinação geral de duas doses. Primeiramente é preciso estudar a dinâmica de transmissão da doença em uma população, nesse caso com seis tipos diferentes de indivíduos. Também é estabelecido que a proteção imune dos indivíduos contra a doença não é permanente. Podemos analisar esse modelo sem a presença da vacina, com apenas uma dose e também o caso em que ocorre a reinfeção da doença, um programa com duas doses da vacina (reforço), buscando assim entender como a doença continua ocorrendo em uma dada população mesmo com o programa de vacinação. O trabalho tem como objetivo analisar como a doença é mantida na população mesmo com o programa de vacinação, além disso, veremos se é possível investigar estratégias de controle ou erradicação da doença em uma dada comunidade.

Palavras-chave: Modelagem matemática; epidemiologia; vacinação

1 Bases da Epidemiologia Matemática

A epidemiologia matemática utiliza de hipóteses matemáticas e conhecimentos biológicos que quantificam aspectos da interação parasita-hospedeiro. Fundamenta-se de conhecimentos sobre transmissão, replicação e gravidade da infecção causada por um vírus; além disso, pode ser estudado se essa infecção induz ou não um processo imunológico no indivíduo contaminado.

Dessa forma é desenvolvido um modelo matemático fazendo-se hipóteses de quantificação, baseando-se nos conhecimentos biológicos sobre o agente infeccioso e da interação com seu hospedeiro. É possível notar que não existe um modelo exato retratando definitivamente tal interação, pelo contrário, existe uma constante interação entre os avanços matemáticos e os conhecimentos biológicos acerca do problema a ser modelado.

Por fim, utilizamos dos conhecimentos em epidemiologia matemática na transmissão de infecções para descrever o fenômeno observado e estudar os efeitos de um procedimento de intervenção na dinâmica hospedeiro-parasita.

Sabendo disso, deve-se escolher a melhor abordagem para descrever tal interação na forma de modelo. Podemos fazer isso utilizando de dois métodos de observação: pode-se observar a evolução natural da doença nos indivíduos expostos e infectantes, o que permite identificar o valor de incidência da doença ao longo do tempo; ou determinar os níveis de concentração de vírus e anticorpos correspondentes em cada indivíduo, porém este último envolve mais recursos financeiros e laboratoriais. Sendo assim, a primeira abordagem é muito útil para executar um estudo dinâmico da transmissão da doença, enquanto a segunda estuda a condição da doença em regime estacionário, onde os valores epidemiológicos se mantêm constantes ao longo do tempo.

Finalmente, vê-se que a epidemiologia matemática possibilita o estudo de situações de equilíbrio e também de condições epidêmicas que variam ao longo do tempo. No estudo está-

[†]FNDE - PET

tico é possível obter a prevalência e incidência da doença e no estudo dinâmico são analisados a variação da incidência e a parcela de indivíduos infectados.

2 Modelo de vacinação

Sabemos que, em uma primeira exposição com um antígeno, o corpo produz uma resposta imune primária produzindo anticorpos e combatendo o antígeno. Após se recuperar a concentração de anticorpos cai, porém o indivíduo ainda possui uma proteção temporária contra uma segunda exposição àquele tipo de ameaça. Caso esse segundo encontro ocorra, o corpo produz a resposta imune secundária, produzindo um número muito maior de anticorpos específicos para combater aquele antígeno. Esse tipo de mecanismo é possível pois a resposta primária produz células de memória, especializadas em lutar contra esse antígeno especificamente.

Uma campanha de vacinação tem como objetivo reduzir o domínio de uma doença em uma população, ou mesmo erradicá-la. Ou seja, a vacinação é um mecanismo que pretende diminuir o grau de suscetibilidade de indivíduos saudáveis contra um patógeno específico. Uma campanha eficiente age para reduzir o número de pessoas infectadas abaixo do nível crítico, logo é importante direcionar o nível requerido de intervenção para erradicar a doença, ou seja, o limite onde a doença se extingue.

Modelos matemáticos dessa natureza são utilizados para estudar o impacto de programas de vacinação em uma população e determinar a capacidade das vacinas de controlar doenças infecciosas. A dinâmica do modelo é dirigida por equações diferenciais ordinárias.

Para a realização da análise do modelo proposto, foram utilizadas as referências [2] e [3].

3 Modelo geral de vacinação com reforço

Nesse trabalho analisamos uma dinâmica de reinfecção sob a hipótese de que a proteção imune de cada indivíduo não é permanente, ou seja, ela tende a dissipar com o passar do tempo, e ambos os indivíduos recuperados e vacinados nunca estarão completamente imunes à doença. Neste caso é feita uma distinção entre a infecção em indivíduos que nunca tiveram contato com a doença anteriormente e a infecção entre indivíduos previamente contaminados (seja por meio da infecção ou vacinação), mas recuperados. No caso dos indivíduos recuperados a reinfecção acontece com uma taxa menor de infecciosidade do que nos indivíduos suscetíveis que nunca tiveram contato com o patógeno.

Iremos agora desenvolver um modelo geral de vacinação de doenças, baseado em um programa de duas doses, ou seja, com reforço. Note que nada impede esse tipo de modelo ser alterado para que represente um programa de apenas uma dose, já que o objetivo neste caso é construir um modelo geral para diversos casos.

Primeiramente vamos dividir a população total (N) em seis tipos diferentes de indivíduos, sendo eles:

- S'_1 , indivíduos suscetíveis (nunca tiveram contato com a doença);
- V' , indivíduos vacinados;
- I'_1 , indivíduos primeiramente infectados;
- S'_2 , indivíduos suscetíveis (que têm alguma resposta imune por vacina ou infecção);
- I'_2 , indivíduos novamente infectados;
- R' , indivíduos recuperados.

O modelo inclui as dinâmicas vitais, sendo elas a taxa natural de mortalidade (μ) e a taxa positiva constante para equilibrar as mortes (bN), com $b = \mu$, para que a população total seja constante (N). A interação entre os diferentes tipos de indivíduos é descrita a seguir.

Os indivíduos suscetíveis (S'_1) se tornam indivíduos vacinados (V') pelo programa de vacinação a uma taxa ν_1 . Estes também podem se tornar infectados (I'_1) pelo encontro com outros infectados, seguindo a incidência pela lei de ação das massas, dada por

$$\frac{\beta_1 S'_1 (I'_1 + I'_2)}{N},$$

onde β_1 é o coeficiente de transmissão da doença na infecção primária.

O número de novos infectados, a partir dos suscetíveis (S'_2) é dado por

$$\frac{\beta_2 S'_2 (I'_1 + I'_2)}{N},$$

onde β_2 é o coeficiente de transmissão da doença na infecção secundária. Além disso, é natural que a taxa de reinfeção destes indivíduos seja menor que dos indivíduos suscetíveis (S'_1), tal que $\beta_2 = \sigma\beta_1$, onde $0 \leq \sigma \leq 1$. O parâmetro σ explicita o efeito da memória imunológica, então é o fator que reduz o risco de reinfeção e mede sua suscetibilidade. No caso de $\sigma = 0$, a resposta imunológica da vacina e da infecção são totalmente eficientes e a memória imunológica desenvolvida não é dissipada ao longo do tempo. Se $\sigma = 1$ ambas as respostas imunológicas da vacina e da infecção são inúteis na produção de memória imunológica.

Dessa forma, iremos assumir que tanto a vacinação quanto a infecção produzem memória imunológica, mas falham em oferecer uma proteção permanente, restringindo o parâmetro σ para $0 < \sigma < 1$.

Assumimos que imunidade contra a infecção contraída pela vacina e pela infecção primária são perdidas de acordo com as taxas per capita ρ_1 e ρ_2 , respectivamente, com $\rho_1 > \rho_2$.

Esse modelo assume que ambos indivíduos atingidos pelas infecções primária e secundária se recuperam seguindo as taxas constantes $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$, respectivamente. O período de recuperação dos indivíduos atingidos pela infecção secundária é menor que dos atingidos pela primária, já que sua memória imunológica é ativada mais rápida e fortemente, logo $\gamma_1 < \gamma_2$.

Os indivíduos recuperados (R') eventualmente retornam a classe S'_2 , porém os indivíduos S'_2 não retornarão a classe S'_1 por terem a memória imunológica induzida pelo contato com o patógeno e podem identificá-lo mais facilmente. Por fim, os indivíduos S'_2 podem ser revacinados a uma taxa ν_2 ou contrair a doença novamente e se tornar da classe I'_2 .

O modelo é regido pelo sistema de equações diferenciais a seguir, com condições iniciais não negativas e $N(0) > 0$.

$$\begin{cases} \frac{dS'_1}{dt} = \sigma N - (\nu_1 + \mu)S'_1 - \frac{\beta_1 S'_1 (I'_1 + I'_2)}{N}, \\ \frac{dV'}{dt} = \nu_1 S'_1 - (\rho_1 + \mu)V' + \nu_2 S'_2, \\ \frac{dI'_1}{dt} = \frac{\beta_1 S'_1 (I'_1 + I'_2)}{N} - (\gamma_1 + \mu)I'_1, \\ \frac{dS'_2}{dt} = \rho_1 V' + \rho_2 R' - (\nu_2 + \mu)S'_2 - \frac{\beta_2 S'_2 (I'_1 + I'_2)}{N}, \\ \frac{dI'_2}{dt} = \frac{\beta_2 S'_2 (I'_1 + I'_2)}{N} - (\gamma_2 + \mu)I'_2, \\ \frac{dR'}{dt} = \gamma_1 I'_1 + \gamma_2 I'_2 - (\rho_2 + \mu)R'. \end{cases}$$

Segue o diagrama de fluxo do modelo, veja Figura 1 de acordo com as classificações dadas aos indivíduos. A equação demográfica para a dinâmica do tamanho da população é dada por $\frac{dN}{dt} = bN - \mu N$, de tal forma que $b = \mu$ para que a população continue constante (N). Como o modelo é um sistema homogêneo e de ordem um, as variáveis podem ser normalizadas colocando $S_1 = \frac{S'_1}{N}$; $V = \frac{V'}{N}$; $I_1 = \frac{I'_1}{N}$; $S_2 = \frac{S'_2}{N}$; $I_2 = \frac{I'_2}{N}$; $R = \frac{R'}{N}$.

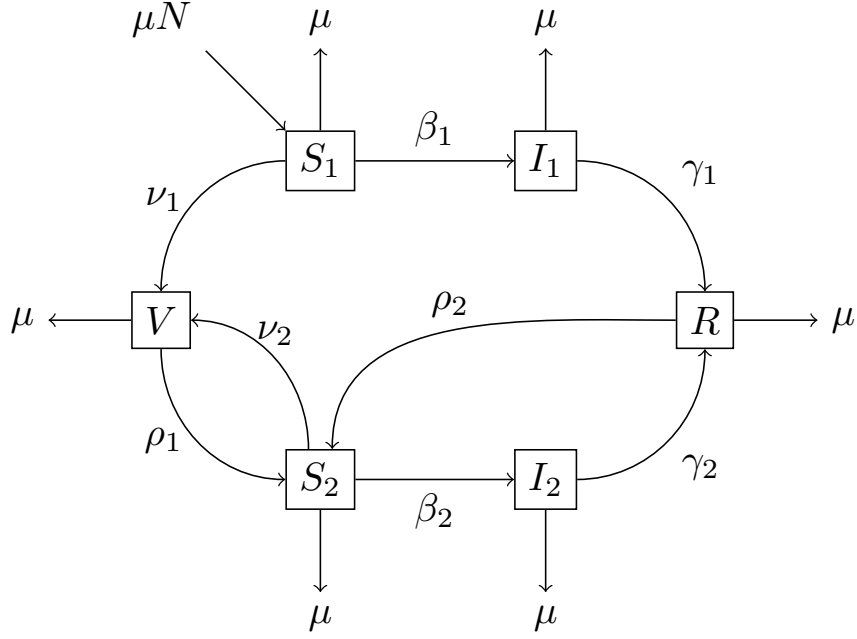


Figura 1: Diagrama da dinâmica entre os indivíduos da população.

Assim, temos o sistema normalizado onde cada variável representa uma fração da população total, tal que $S_1 + S_2 + I_1 + I_2 + V + R = N$.

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = \sigma N - (\nu_1 + \mu)S_1 - \frac{\beta_1 S_1 (I_1 + I_2)}{N}, \\ \frac{dV}{dt} = \nu_1 S_1 - (\rho_1 + \mu)V + \nu_2 S_2, \\ \frac{dI_1}{dt} = \frac{\beta_1 S_1 (I_1 + I_2)}{N} - (\gamma_1 + \mu)I_1, \\ \frac{dS_2}{dt} = \rho_1 V + \rho_2 R - (\nu_2 + \mu)S_2 - \frac{\beta_2 S_2 (I_1 + I_2)}{N}, \\ \frac{dI_2}{dt} = \frac{\beta_2 S_2 (I_1 + I_2)}{N} - (\gamma_2 + \mu)I_2, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 - (\rho_2 + \mu)R. \end{cases} \quad (3.1)$$

4 Análise do modelo

O sistema (3.1) prediz estratégias de vacinação e mudanças de comportamentos qualitativas para tal controle. Para desenvolver a estrutura a fim de prever condições para erradicar uma doença baseada em um programa de vacinação vamos considerar os seguintes casos:

- programa de imunização de duas doses ($\nu_1 \neq 0$ e $\nu_2 \neq 0$);
- programa de imunização de uma dose ($\nu_1 \neq 0$ e $\nu_2 = 0$).

Primeiramente o sistema (3.1) será analisado qualitativamente em conjunto com esses programas de imunização para encontrar as condições de existência e estabilidade de pontos de equilíbrio livre da doença. Essa análise nos permite determinar o melhor nível de cobertura de vacinação para a erradicação da doença e para encontrar a **razão de reprodutibilidade basal** (\mathfrak{R}_0), o qual representa o número médio de infectados produzidos por um único indivíduo infectado introduzido em uma população completamente suscetível.

Dessa forma, se $\mathfrak{R}_0 < 1$ a doença é erradicada e se $\mathfrak{R}_0 > 1$ a doença se espalha na população. Sob certos parâmetros existe uma dependência da razão de reprodutibilidade e a taxa de vacinação, nesse caso a razão de reprodutibilidade \mathfrak{R}_{vac} (razão de reprodutibilidade

\mathfrak{R}_0 modificada pela vacinação) deve ser reduzida abaixo de 1 a fim de reforçar que a doença seja erradicada. Caso não haja vacinação teremos $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_{vac}$. Logo, o objetivo da campanha de vacinação é reduzir \mathfrak{R}_{vac} abaixo de 1 e promover proteção prolongada.

5 Pontos de equilíbrio

Para o sistema (3.1) sempre existe ponto de equilíbrio trivial ou livre de doença (ELD), ou seja, $I_1 = I_2 = R = 0$, e temos $P^* = (S_1^*, V^*, 0, S_2^*, 0, 0)$ tal que

$$\begin{cases} S_1^* = \frac{\mu}{(\nu_1 + \mu)}, \\ V^* = \frac{1}{(\rho_1 + \mu)} \left[\frac{\nu_1 \mu}{(\nu_1 + \mu)} + \frac{\rho_1 \nu_1 \nu_2}{(\nu_1 + \mu)(\nu_2 + \rho_1 + \mu)} \right], \\ S_2^* = \frac{\nu_1 \rho_1}{(\nu_1 + \mu)(\nu_2 + \rho_1 + \mu)}. \end{cases}$$

Abaixo mostremos a matriz Jacobiana do sistema (3.1) calculada no ELD.

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_1 & a_{22} & 0 & \nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \beta_1 S_1^* & 0 \\ 0 & \rho_1 & -\sigma \beta_1 S_2^* & a_{44} & -\sigma \beta_1 S_2^* & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \beta_1 S_2^* & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & a_{66} \end{bmatrix},$$

onde os coeficientes da diagonal principal são dados por

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(\mu + \nu_1), & a_{22} &= -(\mu + \rho_1), \\ a_{33} &= \beta_1 S_1 - (\mu + \gamma_1), & a_{44} &= -(\mu + \nu_2), \\ a_{55} &= \sigma \beta_1 S_2 - (\gamma_2 + \mu), & a_{66} &= -(\mu + \rho_2). \end{aligned}$$

Dois dos autovalores da matriz A_0 podem ser determinados: $\tau_1 = -(\mu + \nu_1)$ e $\tau_2 = -(\mu + \rho_2)$. Já os outros quatro autovalores restantes podem ser expressados pelas raízes da equação

$$A_{22} \left((\sigma \beta_1 S_2^* - (\gamma_2 + \mu) - \tau)(\beta_1 S_1^* - (\gamma_1 + \mu) - \tau) - \sigma(\beta_1)^2 S_1^* S_2^* \right) = 0 \quad (5.1)$$

onde

$$A_{22} = \begin{vmatrix} -(\rho_1 + \mu) - \tau & \mu_2 \\ \rho_1 & -(\nu_2 + \mu) - \tau \end{vmatrix}.$$

Já que $\text{tr } A_{22} < 0$ e $\det A_{22} > 0$, a matriz A_{22} possui dois autovalores negativos. Os dois autovalores restantes estão associados com a equação (5.1) e são negativos quando

$$\mathfrak{R}_{vac} = \mathfrak{R}_0 \times f < 1, \quad (5.2)$$

onde \mathfrak{R}_0 é definido por

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta_1}{\gamma_1 + \mu}. \quad (5.3)$$

Além disso, temos

$$f = \frac{p\nu_1 + \mu}{\nu_1 + \mu}, \quad (5.4)$$

com

$$p = \frac{\sigma \rho_1 (\gamma_1 + \mu)}{(\gamma_2 + \mu)(\nu_2 + \rho_1 + \mu)}. \quad (5.5)$$

Como $\gamma_1 < \gamma_2$, $\rho_1 < \rho_2$ e $0 < \sigma < 1$ temos que $p < 1$ e, conseqüentemente, $f < 1$. Logo, o ELD é localmente assintoticamente estável quando a condição (5.2) se mantém. Fixando $\mathfrak{R}_{vac} = 1$ e resolvendo a equação (5.2) para ν_1 por meio das expressões (5.3), (5.4) e (5.5), obtemos a taxa de vacinação limite é dado por

$$\nu_1^C(\nu_2) = \frac{\mu(\mathfrak{R}_0 - 1)}{1 - p\mathfrak{R}_0}.$$

Onde ν_1^C é o **esforço vacinal mínimo necessário** para reduzir \mathfrak{R}_{ν_1} para 1, tornando possível o controle e a erradicação da doença.

Portanto, para $\mathfrak{R}_0 < 1$ o ELD é estável. Para $\mathfrak{R}_0 > 1$, $\nu_1^C(\nu_2)$ é positivo se, e somente se, $p < \frac{1}{\mathfrak{R}_0}$. Nesse tipo de situação a doença é erradicada quando $\nu_1 > \nu_1^C(\nu_2)$. Caso isso não aconteça, ou seja, $\nu_1 < \nu_1^C(\nu_2)$, a doença permanece na comunidade.

Para o programa de imunização de uma dose, $\nu_1 \neq 0$ e $\nu_2 = 0$ temos um novo equilíbrio trivial biologicamente viável:

$$P_1 = (S_{1\nu_1}, V_{\nu_1}, 0, S_{2\nu_1}, 0, 0) \quad (5.6)$$

$$\begin{cases} S_{1\nu_1} = \frac{\mu}{(\nu_1 + \mu)}, \\ V_{\nu_1} = \frac{\nu_1 \mu}{(\rho_1 + \mu)(\nu_1 + \mu)}, \\ S_{2\nu_1} = \frac{\nu_1 \rho_1}{(\nu_1 + \mu)(\rho_1 + \mu)}. \end{cases}$$

O ponto (5.6) é estável se, e somente se,

$$\frac{\beta_1 \mu}{(\gamma + \mu)(\nu_1 + \mu)} + \frac{\beta_2 \nu_1 \rho_1}{\mu(\rho_1 + \mu)} < 1. \quad (5.7)$$

Podemos rearranjar a equação (5.7) para obter ν_1^C :

$$\nu_1^C = \frac{\mu(\mathfrak{R}_0 - 1)}{1 - \frac{\beta_2 \rho_1}{(\gamma + \mu)(\rho_1 + \mu)}}.$$

6 Considerações finais

Através do estudo do modelo concluímos que a erradicação da doença está altamente relacionada à Razão de Reprodutibilidade Basal. No caso do programa de dose única para que a doença possa ser erradicada é preciso que o alcance do programa seja alto e que a taxa reinfeção seja baixa. Se for adotado o programa de duas doses da vacina a erradicação é possível mesmo se o esforço vacinal da primeira dose for baixo, basta aumentar o alcance da segunda dose.

Agradecimentos: Agradeço ao grupo PET Matemática da UNESP de Rio Claro e a professora orientadora do projeto Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti pelo apoio e incentivo à pesquisa.

Abstract: This work is part of a scientific initiation project where we studied common differential equations and mathematical models. In this work, a mathematical model presenting a general vaccination dynamics of two doses is developed. Firstly, it is necessary to study the transmission dynamics of the disease in the population, in this case with six different types of individuals. It is also established that the immune protection of individuals against the disease is not permanent. We can analyze this model without the presence of the vaccine, with only one dose and also the case where the disease reinfection occurs, a program with two doses of the vaccine (reinforcement), thus seeking to understand how the disease continues to occur in a given population even with the vaccination program. The objective of this study is to analyze how the disease is maintained in the population even with the vaccination program, and we will also see whether it is possible to investigate strategies to control or eradicate the disease in a given community.

Keywords: Mathematical modelling; epidemiology; vaccination

Referências Bibliográficas

- [1] YANG, H.; *Epidemiologia Matemática: Estudo dos efeitos da vacinação em doenças de transmissão direta*. Editora da Unicamp, Campinas, 2001.
- [2] RAIMUNDO, S.; YANG, H., ENGEL, A.; *Modelling the effects of temporary immune protection and vaccination against infectious diseases..* Applied Mathematics and Computational, 189, 1723-1736, 2007.
- [3] RAIMUNDO, S.; YANG, H.; *Um Modelo Matemático da Reinfecção da Rubéola*. Sociedade Brasileira da Matemática Aplicada a Computacional, 4, 367-376, 2003.

Introdução aos sistemas dinâmicos caóticos

Lucas Ozaki Mizuguti

Orientador(a): Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

Resumo: Este trabalho tem como objetivo fornecer um estudo introdutório à teoria dos sistemas dinâmicos caóticos. Serão apresentadas as propriedades que caracterizam um sistema dinâmico como caótico e dois sistemas dinâmicos caóticos serão analisados, a saber, a aplicação *shift* e a família quadrática para determinados valores de parâmetros reais.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos Caóticos; Dinâmica Simbólica; Shift; Família Quadrática

1 Conceitos preliminares

Esta seção, de caráter preliminar, tem como objetivo apresentar definições que serão necessárias ao longo do artigo. Observamos que, para uma boa compreensão do texto, o leitor deve ter familiaridade com conceitos e resultados básicos de Espaços Métricos, Análise Real e Topologia Geral. O leitor pode consultar as referências [5], [6] e [7] para recordar conceitos e resultados que serão mencionados no texto.

Definição 1.1. Seja (X, d) um espaço métrico. Um *sistema dinâmico* é uma aplicação (lei de evolução) $f : X \rightarrow X$.

O espaço métrico (X, d) é dito o *espaço de estados* do sistema.

Definição 1.2. Se $f : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo, então, para $x \in X$, definimos a *órbita* de x por f como sendo a *sequência* de pontos

$$x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

em que $f(x) = x_1, f^2(x) = f(f(x)) = x_2, \dots, f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ vezes}}} = x_n$ e x é a origem da órbita.

A órbita de x é usualmente denotada por $O(x)$. A notação $f^n(x)$ é usada para denotar a *iterada de ordem n* de f no ponto x .

Definição 1.3. Um ponto $x \in X$ é dito um *ponto periódico* de $f : X \rightarrow X$ de período n se $f^n(x) = x$.

O conjunto dos pontos periódicos de período n de uma aplicação f é denotado por $\text{Per}_n(f)$.

Definição 1.4. Um ponto $x \in X$ é dito um *ponto fixo* de $f : X \rightarrow X$ se $f(x) = x$.

O conjunto dos pontos fixos de uma aplicação f é denotado por $\text{Fix}(f)$.

Cabe observar que se $x \in X$ é um ponto fixo de $f : X \rightarrow X$, então x é um ponto periódico de f , conforme formalizamos a seguir.

Observação 1.5. Os pontos fixos de uma aplicação $f : X \rightarrow X$ são pontos periódicos de período 1 (um), ou seja, $\text{Fix}(f) \subset \text{Per}_1(f)$.

Definição 1.6. Seja $x \in X$ um ponto fixo de $f : X \rightarrow X$. Dizemos que x é um *ponto fixo atrator* de f se

$$|f'(x)| < 1.$$

Dizemos que x é um *ponto fixo repulsor* de f se

$$|f'(x)| > 1.$$

Definição 1.7. Um subconjunto Y de um espaço topológico X é dito *denso* em X se o fecho de Y (usualmente denotado por \bar{Y}) é igual a X . Equivalentemente, dizemos que Y é denso em X se qualquer vizinhança de qualquer ponto de X contém algum elemento de Y .

2 A família quadrática

Esta seção será dedicada a uma breve análise da família quadrática. Chamaremos de *família quadrática* a família de funções quadráticas da forma $Q_c(x) = x^2 + c$, onde $c \in \mathbb{R}$. Destacamos que a dinâmica da função Q_c muda de acordo com a variação do parâmetro c . Para cada c escolhido, tem-se um determinado sistema dinâmico. Observamos que, uma vez escolhido o valor do parâmetro, este se mantém fixo durante as iterações.

Pretendemos analisar o comportamento da órbita de Q_c conforme c varia. Para isso, procuremos os pontos fixos de Q_c , os quais são obtidos da seguinte forma:

$$Q_c(x) = x \iff x^2 + c = x \iff x^2 - x + c = 0.$$

Resolvendo a equação acima, obtemos

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2} \implies \begin{cases} x_+ = \frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4c}), \\ x_- = \frac{1 - \sqrt{1-4c}}{2} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4c}). \end{cases} \quad (2.1)$$

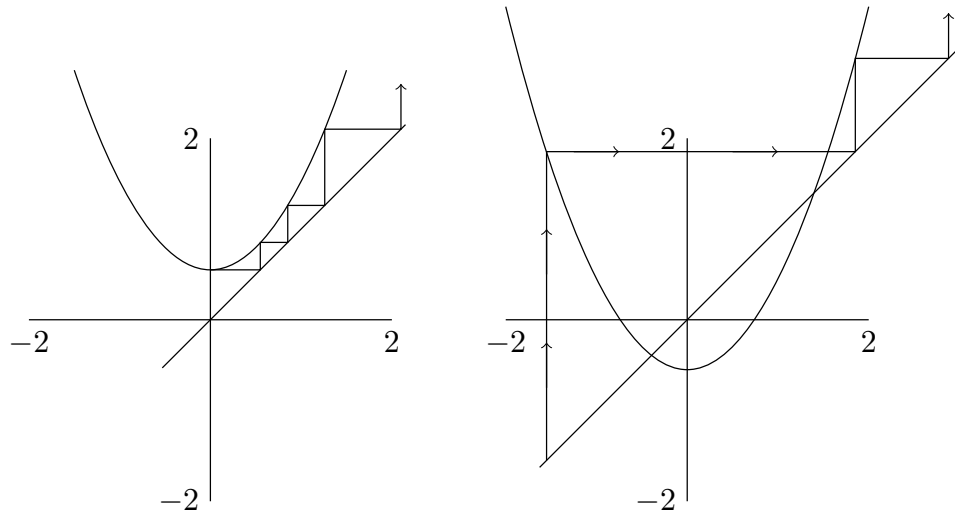
Chamemos os pontos fixos de Q_c de p_+ e p_- , em que $p_+ = x_+$ e $p_- = x_-$. Observe que só podemos falar da existência de pontos fixos (em \mathbb{R}) para Q_c quando $1 - 4c \geq 0$, ou seja, quando $c \leq 1/4$.

Porém, observamos que o parâmetro c pode assumir outros valores.

Proposição 1.8. Para a família $Q_c(x) = x^2 + c$, as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (1) Se $c > 1/4$, então todas as órbitas de Q_c tendem ao infinito.
- (2) Quando $c = 1/4$, Q_c tem somente um ponto fixo, $p_+ = p_- = 1/2$, e ele é neutro.
- (3) Para $c < 1/4$, Q_c tem dois pontos fixos, p_+ e p_- , sendo p_+ sempre repulsor. No entanto,
 - (3.1) se $-3/4 < c < 1/4$, então p_- é atrator;
 - (3.2) se $c = -3/4$, então p_- é neutro;
 - (3.3) se $c < -3/4$, então p_- é repulsor.

Prova: De (2.1) segue que a equação $x^2 - x + c = 0$ não tem raízes reais se $c > 1/4$ e, portanto, a aplicação Q_c não possui pontos fixos. Isso implica que, neste caso, o gráfico de $Q_c(x) = x^2 + c$ não intersecciona a diagonal ($\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$). Podemos então concluir que a órbita de qualquer $x \in \mathbb{R}$ tenderá ao infinito, pois $Q_c^n(x) > Q_c^{n-1}(x) > \dots > Q_c^2(x) > Q_c(x) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.



(a) Todas as órbitas de $Q_c(x) = x^2 + c$ tendem ao infinito quando $c > 1/4$.
 (b) Se $c \leq 1/4$, então qualquer x com $x > p_+$ ou $x < -p_+$ tem uma órbita que tende ao infinito.

Figura 1

Agora, consideremos o caso em que $c = 1/4$. Neste caso,

$$p_+ = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{2} = p_-,$$

ou seja, o gráfico de Q_c tangenciará Δ em $p_+ = p_- = 1/2$.

Além disso, temos

$$Q'_c(x) = 2x \implies Q'_c\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Como $p_+ = p_- = 1/2$ e $Q'_c(1/2) = 1$, então Q_c tem somente um ponto fixo, o qual é neutro.

Para $c < 1/4$, temos, por (2.1), que existem dois pontos fixos de Q_c , p_+ e p_- , com $p_+ \neq p_-$. Note que

$$(i) \quad Q'_c(p_+) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 4c}) \right) \implies Q'_c(p_+) = 1 + \sqrt{1 - 4c}.$$

$$(ii) \quad Q'_c(p_-) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 4c}) \right) \implies Q'_c(p_-) = 1 - \sqrt{1 - 4c}.$$

Observe que se $c < 1/4$, então $Q'_c(p_+) > 1$, visto que $\sqrt{1 - 4c} > 0$. Portanto, p_+ é um ponto fixo repulsor de Q_c .

Agora, veja que

$$\begin{aligned} |Q'_c(p_-)| < 1 &\iff -1 < Q'_c(p_-) < 1 \\ &\iff -1 < 1 - \sqrt{1 - 4c} < 1 \\ &\iff 0 < 1 - 4c < 4 \\ &\iff -3 < 4c < 1 \\ &\iff -\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que p_- é um ponto fixo atrator para Q_c quando $c \in (-3/4, 1/4)$.

Quando $c = -3/4$, temos que p_- é um ponto fixo neutro. Com efeito,

$$Q'_{-3/4}(p_-) = 1 - \left(\sqrt{1 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} \right) = -1.$$

Finalmente, para $c < -3/4$, temos

$$Q'_c(p_-) = 1 - \sqrt{1 - 4 \cdot (c)} < -1,$$

já que $\sqrt{1 - 4 \cdot (c)} > 0$ para $c < -3/4$. Daí, p_- é um ponto fixo repulsor se $c < -3/4$. \square

Proposição 1.9. Para a família $Q_c(x) = x^2 + c$, as propriedades a seguir são válidas.

- (1) Se $-3/4 < c < 1/4$, então Q_c tem um ponto fixo atrator em p_- e não possui pontos periódicos de período 2.
- (2) Se $c = -3/4$, então Q_c tem somente um ponto fixo, $p_- = q_+ = q_- = -1/2$, e ele é neutro. Ademais, Q_c não possui pontos periódicos de período 2.
- (3) Se $-5/4 < c < -3/4$, então Q_c tem dois pontos fixos repulsores, p_+ e p_- , e dois pontos fixos atratores de período 2, q_+ e q_- .

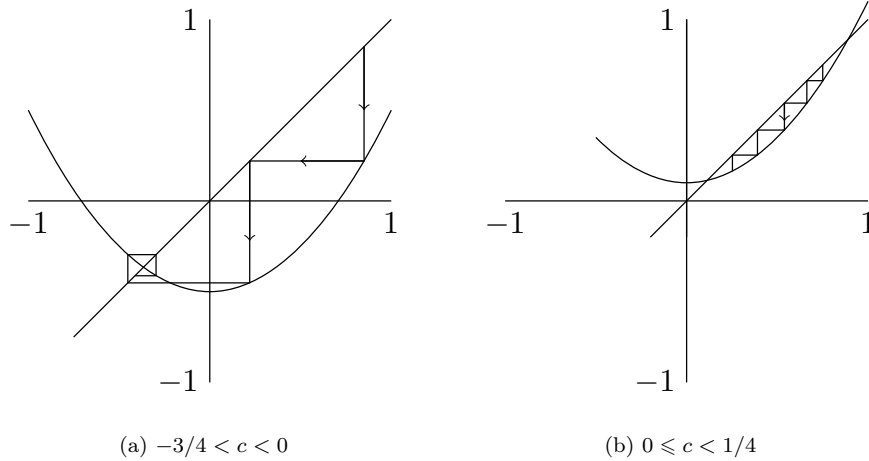


Figura 2: A análise gráfica mostra que todas as órbitas de Q_c quando $-p_+ < x < p_+$ tendem a p_- quando $-3/4 < c < 1/4$.

Prova: Para encontrarmos os pontos periódicos de período 2 de Q_c , vamos resolver a equação seguinte:

$$Q_c^2(x) = x \iff (x^2 + c)^2 + c = x \iff x^4 + 2x^2c - x + c^2 + c = 0. \quad (2.2)$$

Inicialmente, observamos que p_+ e p_- são soluções de (2.2), visto que são raízes da equação $Q_c(x) = x$. Com isso,

$$(x - p_+) \text{ e } (x - p_-),$$

são fatores da equação (2.2).

Temos que

$$(x - p_+) \cdot (x - p_-) = x^2 - x + c.$$

Fazendo a divisão de polinômios

$$\frac{x^4 + 2x^2c - x + c^2 + c}{x^2 - x + c} = x^2 + x + c + 1,$$

vemos que as soluções da equação $x^2 + x + c + 1 = 0$ serão os pontos periódicos de período 2 de Q_c . Encontrá-lo-emos:

$$x^2 + x + c + 1 = 0 \implies x = \frac{-1 \pm \sqrt{-4c - 3}}{2} \implies \begin{cases} x_+ = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-4c - 3}), \\ x_- = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-4c - 3}). \end{cases} \quad (2.3)$$

Chamemos os pontos fixos de Q_c^2 de q_+ e q_- , em que $q_+ = x_+$ e $q_- = x_-$, e observemos que ambos dependem de c . Notemos, ainda, que só podemos falar da existência (em \mathbb{R}) de q_+ e q_- para Q_c^2 quando $-4c - 3 \geq 0$, ou seja, quando $c \leq -3/4$.

Agora, para $c = -3/4$, temos

$$q_+ = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{-4 \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) - 3} \right) = -\frac{1}{2} = q_- = p_-.$$

Pelo Teorema 1.8, o ponto fixo (de período 1) $q_+ = q_- = p_- = -1/2$ é neutro.

Para $-5/4 < c < -3/4$, podemos afirmar que:

- (i) como $c < -3/4$, então Q_c possui dois pontos periódicos de período 2, q_+ e q_- , dados em (2.3).
- (ii) se $-5/4 < c < -3/4$, temos que $q_+ < 0$ e $q_- < 0$. Além disso, temos

$$Q'_c(q_{\pm}) = 2q_{\pm} < 1,$$

de onde podemos concluir que q_+ e q_- são pontos atratores.

Sabendo que $p_+ = (1 + \sqrt{1 - 4c})/2$ e $p_- = (1 - \sqrt{1 - 4c})/2$, vemos que

$$Q'_c(p_{\pm}) = 2p_{\pm} > 1,$$

de onde podemos inferir que p_+ e p_- são pontos fixos repulsores. □

No que segue, consideraremos $c < -2$.

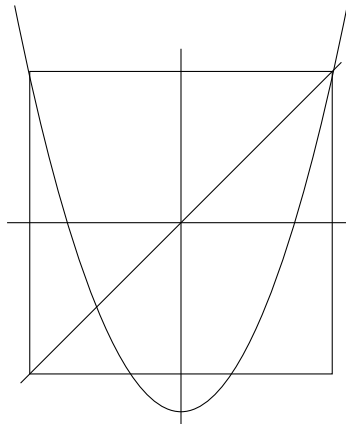


Figura 3: Gráfico de Q_c para $c < -2$.

Na Figura 3 ilustramos o gráfico de Q_c para um valor de c menor que -2 . Nessa figura também exibimos uma caixa cujos vértices incluem os pontos $(-p_+, -p_+)$ e (p_+, p_+) . Vamos denotar o intervalo $(-p_+, p_+)$ por I . Por meio de uma análise gráfica, vemos que a órbita de alguns pontos não permanecem no intervalo I e tendem ao infinito. Entretanto, existem órbitas que nunca deixam o intervalo I , por exemplo, as órbitas dos pontos fixos. Temos interesse em estudar o comportamento das órbitas que permanecem em I . Vamos denotar o conjunto de pontos cujas órbitas nunca deixam o intervalo I por Λ . Simbolicamente, temos

$$\Lambda = \{x \in I : Q_c^n(x) \in I, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Chamaremos de A_1 o subconjunto de I formado pelos pontos que deixam I após a primeira iterada. As órbitas desses pontos tendem ao infinito.

Chamaremos de A_2 o conjunto formado pelos pontos que deixam I após a segunda iterada. O conjunto A_2 consiste de dois (2^1) intervalos e as órbitas dos pontos pertencentes a A_2 também tendem ao infinito.

Prosseguindo dessa forma, chamaremos de A_n o conjunto formado pelos pontos que deixam I após a n -ésima iterada. O conjunto A_n consiste de 2^{n-1} intervalos e as órbitas dos pontos pertencentes a A_n também tendem ao infinito.

Removendo os conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ do intervalo I , obtemos o conjunto Λ .

Teorema 1.10. *Se $c < -(5+2\sqrt{5})/4$ ($\approx -2,368$), então o conjunto dos pontos Λ cujas órbitas por Q_c não tendem ao infinito é um conjunto não vazio e fechado em I que não contém intervalos.*

Prova: O conjunto Λ é não vazio porque as órbitas dos pontos fixos de Q_c nunca deixam o intervalo I . Portanto, os pontos fixos de Q_c pertencem a Λ .

Observamos que se $c < -(5+2\sqrt{5})/4$ então $|Q'_c(x)| > 1$ para todo $x \in I - A_1$ (veja [2, páginas 72 e 80]). A partir disso, pode-se afirmar que existe uma constante $\mu > 1$ tal que $|Q'_c(x)| > \mu$ para todo $x \in I - A_1$ (veja [2, página 72]). Suponhamos, por absurdo, que Λ contenha um intervalo J . Admitamos que J tenha comprimento $l > 0$. Como $|Q'_c(x)| > \mu$ para todo $x \in J$, segue do Teorema do Valor Médio que o comprimento de $Q_c(J)$ excede $\mu.l$. Com efeito, dados $w, y \in J$, existe $z \in J$ entre w e y tal que

$$|Q_c(w) - Q_c(y)| = |Q'_c(z)||w - y| > \mu|w - y|.$$

Além disso, como $J \subset \Lambda$, temos $Q_c(J) \subset \Lambda$. Aplicando o mesmo argumento ao intervalo $Q_c(J)$, concluímos que o comprimento de $Q_c^2(J)$ excede $\mu \cdot (\text{comprimento de } Q_c(J))$. Denotando o comprimento de um intervalo \mathcal{I} por $|\mathcal{I}|$, temos que $|Q_c^2(J)| > \mu \cdot |Q_c(J)| > \mu^2.l$. Prosseguindo dessa forma, inferimos que $|Q_c^n(J)| > \mu \cdot |Q_c^{n-1}(J)| > \mu^n.l$. Como $\mu > 1$ temos que $\mu^n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, o comprimento do intervalo $Q_c^n(J)$ tende ao infinito quando n tende ao infinito. Porém, $Q_c^n(J) \subset I$ e I tem comprimento finito. Essa contradição garante que Λ não contém intervalos.

Finalmente, afirmamos que Λ é um subconjunto fechado de I . De fato, o complementar de Λ consiste dos intervalos $(-\infty, -p_+)$, (p_+, ∞) , e de todos os conjuntos A_n , que são abertos. Como a união de uma coleção arbitrária de abertos é um conjunto aberto, segue que o complementar de Λ é aberto e, por conseguinte, Λ é fechado. \square

3 Dinâmica Simbólica

Nesta seção apresentaremos conceitos e resultados da dinâmica simbólica, tais como o *itinerário* de um ponto $x \in \Lambda$, o espaço das sequências em dois símbolos, a aplicação *shift* e o Teorema da Proximidade.

Vamos considerar $c < -(5 + 2\sqrt{5})/4$. Lembramos que A_1 denota o subconjunto de I formado pelos pontos que deixam I após a primeira iteração por Q_c . Sendo assim, $\Lambda \subset I - A_1$ e o conjunto $I - A_1$ consiste de dois intervalos fechados que serão denotados por I_0 e I_1 , com I_0 à esquerda de I_1 e $I_0 \cap I_1 = \emptyset$.

Qualquer ponto pertencente a Λ tem uma órbita que nunca deixa I e, portanto, permanece em $I_0 \cup I_1$ após todas as iterações por Q_c . Consequentemente, se $x \in \Lambda$, então $Q_c^n(x) \in I_0 \cup I_1$ para cada n . Isso permite que seja estabelecida a seguinte definição.

Definição 1.11. Seja $x \in \Lambda$. O *itinerário* de x é a sequência infinita de 0's e 1's dada por

$$S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots),$$

onde $s_j = 0$ se $Q_c^j(x) \in I_0$ e $s_j = 1$ se $Q_c^j(x) \in I_1$.

Para estudarmos a dinâmica de Q_c em Λ , introduziremos o espaço das sequências em dois símbolos.

Definição 1.12. O *espaço das sequências em dois símbolos* é conjunto

$$\Sigma = \{(s_0 s_1 s_2 \dots) \mid s_j = 0 \text{ ou } s_j = 1\}.$$

Apresentaremos a seguir o conceito de distância entre duas sequências em Σ .

Definição 1.13. Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ e $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$ duas sequências em Σ . A distância entre s e t é dada por

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}. \quad (3.1)$$

É fácil verificar que a função $d : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada em (3.1) define uma métrica em Σ . O leitor pode consultar a prova desse fato em [2, página 102].

Observação 1.14. Se $s, t \in \Sigma$, então os termos das sequências s e t são 0's e/ou 1's. Portanto, $|s_i - t_i| \leq 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Daí, para todo $i \in \mathbb{N}$, vale a desigualdade

$$\frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \frac{1}{2^i}.$$

O próximo teorema permitir-nos-á estimar o quão próximas estão duas sequências em Σ .

Teorema 1.15 (Teorema da Proximidade). Sejam $s, t \in \Sigma$ e suponha que $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Então, $d(s, t) \leq 1/2^n$. Reciprocamente, se $d(s, t) < 1/2^n$, então $s_i = t_i$ para $i \leq n$.

Prova: Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots s_n s_{n+1} \dots)$ e $t = (t_0 t_1 t_2 \dots t_n t_{n+1} \dots)$ sequências em Σ tais que $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Da fórmula da distância (3.1), temos

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Como $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$, segue que

$$d(s, t) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Pela Observação 1.14, obtemos

$$\begin{aligned}
 d(s, t) &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^i} \right) \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \cdots \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 2^n} + \frac{1}{2^2 \cdot 2^n} + \frac{1}{2^3 \cdot 2^n} + \cdots \\
 &= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \right) \\
 &= \frac{1}{2^n} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2^n}.
 \end{aligned}$$

Em (*) usamos o fato de que a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n$ converge para 1. Por outro lado, se $s_j \neq t_j$ para algum $j \leq n$, então $|s_j - t_j| = 1$ e

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \geq \frac{|s_j - t_j|}{2^j} = \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}.$$

Consequentemente, se $d(s, t) < 1/2^n$, então $s_i = t_i$ para $i \leq n$. □

Vejamos agora a definição da aplicação *shift* em Σ .

Definição 1.16. A aplicação *shift* $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é definida por

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots).$$

Note que a aplicação *shift* simplesmente elimina o primeiro termo da sequência. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
 \sigma(0101010101\dots) &= (1010101010\dots), \\
 \sigma(1010101010\dots) &= (0101010101\dots), \\
 \sigma(0111111111\dots) &= (1111111111\dots).
 \end{aligned}$$

Os únicos pontos fixos de σ são as sequências:

$$(0000000000\dots) \text{ e } (1111111111\dots).$$

Definição 1.17. Seja $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma$. Dizemos que s é *periódica* de período n , com $n \in \mathbb{N}$, se

$$s = (s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots) = (\overline{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}),$$

ou seja, se $\sigma^n(s) = s$.

O conjunto das sequências periódicas de σ de período n será denotado por $\text{Per}_n(\sigma)$. Note que há 2^n pontos periódicos de σ de período n - alguns deles certamente terão período primo[†] menor que n (para maiores detalhes, veja [1, página 42]).

Teorema 1.18. A aplicação $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é contínua em Σ .

[†]O menor inteiro \tilde{n} positivo para o qual se tem $\sigma^{\tilde{n}}(s) = s$ é chamado de *período primo* de s .

Prova: Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Queremos mostrar que σ é contínua em s . Ou seja, queremos provar que existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in \Sigma, d(s, t) < \delta \implies d(\sigma(s), \sigma(t)) < \varepsilon,$$

em que d é a distância definida em (3.1).

Como $\varepsilon > 0$, podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ de forma que $1/2^n < \varepsilon$, uma vez que $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/2^n = 0$.

Seja $\delta = 1/2^{n+1}$. Se $t \in \Sigma$ é tal que $d(s, t) < \delta = 1/2^{n+1}$, então, pelo Teorema da Proximidade (Teorema 1.15), temos que $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n+1$. Portanto, $t = (s_0 s_1 s_2 \dots s_{n+1} t_{n+2} t_{n+3} \dots)$,

$$\sigma(s) = (s_1 s_2 \dots s_{n+1} s_{n+2} s_{n+3} \dots), \quad \sigma(t) = (s_1 s_2 \dots s_{n+1} t_{n+2} t_{n+3} \dots)$$

e

$$\begin{aligned} d(\sigma(s), \sigma(t)) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|(\sigma(s))_i - (\sigma(t))_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^n \frac{|(\sigma(s))_i - (\sigma(t))_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|(\sigma(s))_i - (\sigma(t))_i|}{2^i} \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|(\sigma(s))_i - (\sigma(t))_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^i}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} < \varepsilon, \end{aligned}$$

de onde segue que σ é contínua em s . Como a sequência s foi tomada arbitrariamente em Σ , concluímos que σ é contínua em Σ . \square

Para finalizarmos esta seção, provaremos uma propriedade da dinâmica da aplicação *shift* σ no espaço de sequências Σ que permitirá caracterizar σ como um sistema dinâmico caótico.

Teorema 1.19. *O conjunto dos pontos periódicos de σ foram um subconjunto denso de Σ .*

Prova: Seja $s \in \Sigma$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^n < \varepsilon$. Se construirmos uma nova sequência $y = (y_0 y_1 y_2 \dots)$ tal que $y_k = s_k$ para $k = 0, 1, \dots, n$, então, pelo Teorema da Proximidade (Teorema 1.15), teremos $d(s, y) \leq 1/2^n$.

Portanto, para mostrarmos que o conjunto $\text{Per}_n(\sigma)$ é denso em Σ , precisamos construir uma sequência periódica de período n que diste de s menos que ε - consequentemente, precisamos de uma sequência periódica, y , cujos primeiros $n+1$ termos coincidem com os $n+1$ termos de s . Sendo assim, tome

$$y = (\overline{s_0 s_1 \dots s_n}).$$

Claramente, y é periódica e $d(y, s) < \varepsilon$, pelo Teorema da Proximidade (Teorema 1.15), pois

$$d(y, s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|y_i - s_i|}{2^i} \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon. \quad \square$$

4 Conjugação Topológica

Nesta seção, o conceito de conjugação será introduzido. Veremos que as aplicações σ e Q_c são conjugadas para determinados valores de c .

Inicialmente, lembramos que há uma aplicação que relaciona os conjuntos Λ e Σ , a saber, a aplicação *itinerário* S (veja Definição 1.11). Dado um ponto $x \in \Lambda$, o itinerário de x é uma sequência $S(x) \in \Sigma$. Portanto, temos uma aplicação $S : \Lambda \rightarrow \Sigma$.

A seguir provaremos uma importante propriedade de S .

Proposição 1.20. *Se $c < -(5 + 2\sqrt{5})/4$, então $S \circ Q_c(x) = \sigma \circ S(x)$ para todo $x \in \Lambda$.*

Prova: Se $x \in \Lambda$, então o itinerário de x , $S(x)$, pode ser representado pela sequência $(s_0 s_1 \dots s_n \dots)$. Por definição, temos

$$x \in I_{s_0}, \quad Q_c(x) \in I_{s_1}, \quad Q_c^2(x) \in I_{s_2}$$

e assim por diante. Aqui, I_{s_j} é I_0 ou I_1 , dependendo do dígito s_j . Então,

$$Q_c(x) \in I_{s_1}, \quad Q_c^2(x) \in I_{s_2}, \quad Q_c^3(x) \in I_{s_3}$$

e assim por diante, de onde segue que

$$S \circ Q_c(x) = S(Q_c(x)) = (s_1 s_2 \dots s_n \dots). \quad (4.1)$$

Além disso, temos

$$\sigma \circ S(x) = \sigma(S(x)) = (s_1 s_2 \dots s_n \dots). \quad (4.2)$$

De (4.1) e (4.2), concluímos que $S \circ Q_c(x) = \sigma \circ S(x)$. \square

A Proposição 1.20 pode ser descrita pictoricamente pelo diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{Q_c} & \Lambda \\ S \downarrow & & \downarrow S \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array}$$

O resultado a seguir estabelece que os conjuntos Λ e Σ são homeomorfos. Como sua prova é extensa, ela será omitida aqui. Sugerimos ao leitor que consulte [2, páginas 109–111] para compreendê-la.

Teorema 1.21. *Se $c < -(5 + 2\sqrt{5})/4$, então $S : \Lambda \rightarrow \Sigma$ é um homeomorfismo.*

Proposição 1.22. *Se $c < -(5 + 2\sqrt{5})/4$, vale $Q_c \circ S^{-1} = S^{-1} \circ \sigma$.*

Prova: Pelo Teorema 1.21 temos que S é um homeomorfismo e pela Proposição 1.20 temos que $S \circ Q_c = \sigma \circ S$. Portanto,

$$Q_c \circ S^{-1} = S^{-1} \circ S \circ Q_c \circ S^{-1} = S^{-1} \circ \sigma \circ S \circ S^{-1} = S^{-1} \circ \sigma.$$

Temos, pois, o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{Q_c} & \Lambda \\ S^{-1} \uparrow & & \uparrow S^{-1} \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array}$$

\square

Proposição 1.23. *Se $c < -(5 + 2\sqrt{5})/4$, vale $S \circ Q_c^n = \sigma^n \circ S$ e $Q_c^n \circ S^{-1} = S^{-1} \circ \sigma^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Prova: Inicialmente, provaremos a igualdade $S \circ Q_c^n = \sigma^n \circ S$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para tal, usaremos indução sobre n . Para $n = 1$, a igualdade é válida pela Proposição 1.20.

Suponha que a igualdade acima seja válida para $n - 1$, ou seja, $S \circ Q_c^{n-1} = \sigma^{n-1} \circ S$. Então, pela hipótese de indução e pela Proposição 1.22, obtemos

$$\begin{aligned} S \circ Q_c^n &= S \circ Q_c^{n-1} \circ Q_c = S \circ Q_c^{n-1} \circ Q_c \circ S^{-1} \circ S \\ &= \sigma^{n-1} \circ S \circ Q_c \circ S^{-1} \circ S = \sigma^{n-1} \circ S \circ S^{-1} \circ \sigma \circ S \\ &= \sigma^{n-1} \circ \sigma \circ S = \sigma^n \circ S. \end{aligned}$$

Pelo Princípio de Indução Finita, temos que a igualdade $S \circ Q_c^n = \sigma^n \circ S$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Essa igualdade pode ser descrita pictoricamente pelo diagrama a seguir.

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda & \xrightarrow{Q_c} & \Lambda & \xrightarrow{Q_c} & \cdots & \xrightarrow{Q_c} & \Lambda \\ \downarrow S & & \downarrow S & & & & \downarrow S \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \cdots & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array}$$

Agora, verificaremos a validade da igualdade $Q_c^n \circ S^{-1} = S^{-1} \circ \sigma^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ usando também indução sobre n . Para $n = 1$, a igualdade é válida pela Proposição 1.22.

Suponha que seja válida a igualdade $Q_c^{n-1} \circ S^{-1} = S^{-1} \circ \sigma^{n-1}$. Então, a hipótese de indução fornece

$$\begin{aligned} Q_c^n \circ S^{-1} &= Q_c^{n-1} \circ Q_c \circ S^{-1} = Q_c^{n-1} \circ S^{-1} \circ \sigma^{n-1} \\ &= S^{-1} \circ \sigma^{n-1} \circ \sigma = S^{-1} \circ \sigma^n. \end{aligned}$$

Pelo Princípio de Indução Finita, a igualdade $Q_c^n \circ S^{-1} = S^{-1} \circ \sigma^n$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Observação 1.24. A Proposição 1.23 garante que S converte órbitas de Q_c em órbitas de σ , assim como S^{-1} converte órbitas de σ em órbitas de Q_c . Em particular, se s é um ponto periódico de σ , então $S^{-1}(s)$ é um ponto periódico de Q_c com mesmo período.

Homeomorfismos como S desempenham um importante papel no estudo de sistemas dinâmicos, pois, através deles, dois sistemas aparentemente diferentes podem ter dinâmicas equivalentes. Neste caso, as aplicações são denominadas *conjugadas*. O conceito de conjugação será exibido na sequência.

Definição 1.25. Sejam $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ aplicações. Dizemos que f e g são conjugadas se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que

$$h \circ f = g \circ h.$$

A aplicação h é chamada de *conjugação*.

Teorema 1.26. A aplicação shift σ em Σ é conjugada à Q_c em Λ , quando $c < -(5 + 2\sqrt{5})/4$.

Prova: Com efeito, o Teorema 1.20 garante que

$$S \circ Q_c = \sigma \circ S$$

e, pelo Teorema 1.21, segue que S é um homeomorfismo. \square

5 Caos

Nesta seção discutiremos sobre a noção de *caos*. Num primeiro momento, abordaremos definições importantes para que seja possível compreender as propriedades que caracterizam um sistema dinâmico como caótico. Na sequência provaremos dois resultados. O primeiro estabelece que a aplicação *shift* é um sistema caótico e o segundo determina que a família quadrática é um sistema caótico para determinados valores de c . Porém, para provarmos tais resultados, precisaremos de outros auxiliares que também serão apresentados aqui.

Definição 1.27. Um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$ é *transitivo* se, para um par de pontos quaisquer x e y e qualquer $\varepsilon > 0$, existe um terceiro ponto z a uma distância menor que ε de x ($d(z, x) < \varepsilon$) tal que sua órbita está a uma distância menor que ε de y ($d(f^n(z), y) < \varepsilon$ para algum n).

Em outras palavras, um sistema dinâmico transitivo tem a propriedade que, dados dois pontos quaisquer, podemos encontrar uma órbita que está arbitrariamente próxima de ambos.

Observação 1.28. Um sistema dinâmico que tem uma órbita densa é transitivo, pois a órbita densa situa-se arbitrariamente próxima de todos os pontos.

Definição 1.29. Um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$ *depende sensivelmente das condições iniciais* se existe $\beta > 0$ tal que, para quaisquer $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ a uma distância menor que ε de x ($d(x, y) < \varepsilon$) e existe um número natural k tal que a distância entre $f^k(x)$ e $f^k(y)$ é pelo menos β ($d(f^k(x), f^k(y)) \geq \beta$).

Teorema 1.30. A aplicação *shift* $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é um sistema dinâmico transitivo.

Prova: Tomemos $x, y \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$ arbitrariamente. Construiremos uma sequência z cuja órbita distará menos que ε de x e y . Escolha $n \in \mathbb{N}$ de modo que $1/2^n < \varepsilon$. Isso significa que se uma nova sequência tiver seus primeiros $n+1$ termos iguais aos de x , então, pelo Teorema da Proximidade (Teorema 1.15), ela distará menos que ε de x (analogamente para y).

Construamos a seguinte sequência

$$z = \left(\underbrace{01}_{1 \text{ bloco}} \underbrace{00 \ 01 \ 10 \ 11}_{2 \text{ blocos}} \underbrace{000 \ 001 \ 010 \ 011 \ 100 \ 101 \ 110 \ 111}_{3 \text{ blocos}} \underbrace{\dots}_{4 \text{ blocos}} \dots \right). \quad (5.1)$$

Em palavras, z é a sequência que consiste de todos os blocos possíveis de 0's e 1's de comprimento 1, seguidos de todos os blocos possíveis de 0's e 1's de comprimento 2, depois de todos os blocos possíveis de 0's e 1's de comprimento 3, e assim por diante. Portanto, qualquer sequência de comprimento n aparecerá em z em algum momento.

Agora, consideremos os primeiros $n+1$ termos de x . Esta é uma sequência de comprimento $n+1$. Pela construção de z , estes termos devem aparecer em algum lugar da sequência z . Por conseguinte, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que os primeiros $n+1$ termos de $\sigma^{k_1}(z)$ são os mesmos de x . Logo, a órbita de z dista menos que ε de x . De forma similar, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que os primeiros $n+1$ termos de $\sigma^{k_2}(z)$ são os mesmos de y , de onde segue que a órbita de z dista menos que ε de y . \square

Observação 1.31. Note que a órbita da sequência z dada em (5.1) é densa em Σ . A Observação 1.28 também justifica a tese do Teorema 1.30.

Teorema 1.32. A aplicação *shift* $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ depende sensivelmente das condições iniciais.

Prova: Tomemos $\beta = 1$ e escolhamos $x \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$ de forma arbitrária. Podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ de modo que $1/2^n < \varepsilon$.

Seja $y \neq x$ tal que $d(x, y) < 1/2^n$. Pelo Teorema da Proximidade (Teorema 1.15), temos que os $n + 1$ primeiros termos de x e y são os mesmos. Como $x \neq y$, existe $k > n$ tal que $x_k \neq y_k$. Consideremos as sequências $\sigma^k(x)$ e $\sigma^k(y)$. O primeiro termo de $\sigma^k(x)$ é x_k e o primeiro termo de $\sigma^k(y)$ é $y_k \neq x_k$. Portanto, a distância entre $\sigma^k(x)$ e $\sigma^k(y)$ é tal que

$$d(\sigma^k(x), \sigma^k(y)) \geq \frac{|x_k - y_k|}{2^0} = 1 = \beta,$$

o que completa a prova. \square

Veremos abaixo que três propriedades caracterizam um sistema dinâmico como caótico. O conceito de sistema dinâmico caótico apresentado neste trabalho deve-se a Robert Luke Devaney (veja [1, 2]).

Definição 1.33. Um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$ é *caótico* se:

- (i) f for transitivo;
- (ii) f depender sensivelmente das condições iniciais;
- (iii) o conjunto dos pontos periódicos de f for denso em X .

Combinando os Teoremas 1.19, 1.30 e 1.32, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 1.34. A aplicação *shift* $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é um sistema dinâmico caótico.

Proposição 1.35 (Proposição da Densidade). Sejam (X, d_X) , (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Se $D \subset X$ é denso em X , então $f(D)$ é denso em Y .

Prova: Tomemos $y_0 \in Y$ e $\varepsilon > 0$ arbitrariamente. Se mostrarmos que existe $z \in f(D)$ tal que $d_Y(z, y_0) < \varepsilon$, provaremos que $f(D)$ é denso em Y , posto que y_0 foi tomado arbitrariamente em Y .

Com efeito, como f é sobrejetora, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = y_0$. Como f é contínua em X e, portanto, em $x_0 \in X$, temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \quad (5.2)$$

Como $D \subset X$ é denso em X , existe $\bar{x} \in D$ tal que

$$d_X(\bar{x}, x_0) < \delta.$$

Temos que $f(\bar{x}) \in f(D) \subset Y$, pois $D \subset X$. Portanto, de (5.2) segue que

$$d_Y(f(\bar{x}), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Tomando, pois, $z = f(\bar{x})$, concluímos o desejado. \square

Teorema 1.36. Se $c < -(5 + 2\sqrt{5})/4$, então a família quadrática $Q_c(x) = x^2 + c$ é um sistema caótico em Λ .

Prova: Pelo Teorema 1.26 temos que a aplicação itinerário $S : \Lambda \rightarrow \Sigma$ é uma conjugação e, portanto, $S^{-1} : \Sigma \rightarrow \Lambda$ é um homeomorfismo.² A Proposição da Densidade (Proposição 1.35) garante que o conjunto dos pontos periódicos de Q_c é denso em Λ , uma vez que S^{-1} leva pontos periódicos de σ em pontos periódicos de Q_c (veja Observação 1.24) e o conjunto dos pontos periódicos de σ é denso em Σ (veja Teorema 1.19).

Na prova do Teorema 1.30 vemos que a órbita da sequência z dada em (5.1) por σ é densa em Σ . Pela Proposição da Densidade (Proposição 1.35) temos que a órbita de $S^{-1}(z)$ por Q_c é densa em Λ . Pela Observação 1.28 deduzimos que a aplicação Q_c é transitiva.

Portanto, para concluirmos que Q_c é caótico, precisamos provar que Q_c depende sensivelmente das condições iniciais. Para isso, precisamos encontrar um $\beta > 0$ de forma que as condições da Definição 1.29 sejam verificadas. Pois bem, lembremos que

$$\Lambda = \{x \in I \mid Q_c^n(x) \in I, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

está contido na união de dois intervalos fechados e disjuntos, I_0 e I_1 . Escolhamos β menor que a distância mínima entre esses intervalos. Dados $x, y \in \Lambda$, temos que $S(x) \neq S(y)$, visto que S é um homeomorfismo. Consequentemente, as sequências $S(x)$ e $S(y)$ possuem alguma entrada diferente, digamos a k -ésima entrada. Isso significa que $Q_c^k(x) \in I_j$ e $Q_c^k(y) \in I_j$, com $i \neq j$, $i, j \in \{0, 1\}$. Portanto, a distância entre $Q_c^k(x)$ e $Q_c^k(y)$ é pelo menos β e a prova está completa. \square

Agradecimentos: Agradeço primeiramente a Deus, pela força a cada minuto de apreensão; a Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso que aceitou me orientar e, desde então, tem me ajudado com diversas questões que perpassam o âmbito acadêmico, tornando-se um exemplo de pessoa para mim... Por isso, sou extremamente grato. Agradeço à minha família por sempre me apoiar. Ademais, agradeço aos amigos do grupo PET Matemática, que sempre me auxiliam em momentos de dúvidas sobre determinados assuntos, e ao Prof. Dr. Thiago de Melo por ajudar-me com a elaboração dos gráficos presentes neste trabalho.

Abstract: This work aims to provide an introductory study to the theory of chaotic dynamic systems. The properties that characterize a dynamic system as chaotic will be presented and two chaotic dynamic systems will be analyzed, namely, the shift map and the quadratic family for certain values of real parameters.

Keywords: Chaotic Dynamical Systems; Symbolic Dynamics; Shift; Quadratic Family

Referências Bibliográficas

- [1] R. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley advanced book program. Addison-Wesley, 1989.
- [2] R. Devaney. *A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory And Experiment*. Studies in Nonlinearity. Avalon Publishing, 1992.
- [3] B. Hasselblatt and A. Katok. *A First Course in Dynamics: with a Panorama of Recent Developments*. Cambridge University Press, 2003.
- [4] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1995.

²Como $S : \Lambda \rightarrow \Sigma$ é um homeomorfismo, $S^{-1} : \Sigma \rightarrow \Lambda$ também é um homeomorfismo.

- [5] E. Lima. *Espaços métricos*. Projeto Euclides. IMPA, 1977.
- [6] E. Lima. *Análise real*. IMPA, 1989.
- [7] J. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 2000.

Teorema do ponto fixo de Banach e uma aplicação às equações diferenciais ordinárias

Marina Fuzaro Magossi

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: A Análise Funcional é uma área com resultados que podem ser aplicados aos mais diversos campos, como a Física, por exemplo. Neste trabalho utilizaremos do espaço das funções contínuas definidas em um intervalo $[a, b]$, que é um espaço de dimensão infinita. Para problemas que são modelados por equações diferenciais, o primeiro questionamento que se faz é com respeito à existência e unicidade de solução. Como resposta, e de uma forma ampla, se apresenta o Teorema de Picard cuja prova é embasada no Teorema do Ponto Fixo de Banach, estes dois resultados serão apresentados e demonstrados neste trabalho.

Palavras-chave: ponto fixo, Banach, equações diferenciais ordinárias.

1 Introdução

Lembremos que um espaço de Banach é um espaço vetorial normado, portanto métrico, que é completo, isto é, toda sequência de Cauchy deste espaço é convergente para um ponto deste espaço.

O objetivo deste trabalho é mostrar a existência de solução única de um problema de valor inicial, constituído de uma equação diferencial ordinária e uma condição inicial. Para isto, precisaremos de algumas definições e de alguns resultados.

Definição 1.1. Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico qualquer. A transformação $T : X \rightarrow X$ é chamada contração em X se existe um real positivo $\alpha < 1$ tal que

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

Geometricamente, isso significa que as imagens de x e y são mais próximas que os pontos x e y . Ou ainda,

$$\frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)} \leq \alpha < 1.$$

Essa definição motiva o Teorema do Ponto Fixo de Banach, enunciado e demonstrado a seguir:

Teorema 1.2. Considere um espaço métrico $X = (X, d)$, $X \neq \emptyset$. Suponha que X seja completo e seja $T : X \rightarrow X$ uma contração em X . Então, T tem precisamente um ponto fixo.

Demonstração. Vamos tomar um x_0 em X e definir uma sequência iterativa (x_m) da seguinte maneira:

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_n = T^n x_0, \dots \quad (1.1)$$

Mostremos que essa sequência das imagens de T , após repetidas aplicações de T , é de Cauchy.

Pela definição de contração e por (1.1), temos que:

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) = \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \leq \cdots \leq \alpha^m d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade triangular e pela fórmula da soma de uma progressão geométrica, obtemos, para $n > m$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $1 - \alpha^{n-m} < 1$, pois $0 < \alpha < 1$,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1), \quad (n > m). \quad (1.2)$$

Podemos tomar o lado direito tão pequeno quanto quisermos ao tomar m suficientemente grande, já que $0 < \alpha < 1$ e $d(x_1, x_0)$ é fixa. Assim, a sequência (x_m) é de Cauchy.

Como X é um espaço completo, digamos que (x_m) converge para um ponto x . Agora mostremos que x é um ponto fixo.

Pela desigualdade triangular e pela definição de contração, temos que

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \leq d(x, x_m) + d(Tx_{m-1}, Tx) \leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x)$$

e como x_m converge para x , concluímos que $d(x, Tx) = 0$, logo $x = Tx$, donde x é ponto fixo de T .

Além disso, sabemos que x é único, Caso contrário, teríamos

$$Tx = x, \quad Tx' = x' \Rightarrow d(x, x') = d(Tx, Tx') \leq \alpha d(x, x') \Rightarrow d(x, x') = 0,$$

pois $\alpha < 1$, provando a unicidade. □

O espaço que utilizaremos na próxima seção será importante para estabelecermos o Teorema de Picard. Mostraremos a seguir que o espaço $C([a, b])$ das funções contínuas em $J = [a, b]$ é de Banach, munido com a norma do máximo.

De fato, seja (x_m) uma sequência de Cauchy em $C(J)$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe um N tal que, para todo $m, n > N$, temos que

$$d(x_m, x_n) = \max_{t \in J} |x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon. \quad (1.3)$$

Consequentemente, para qualquer $t = t_0 \in J$ fixo,

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \epsilon.$$

Isso mostra que $(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots)$ é uma sequência de Cauchy em \mathbb{R} . Como \mathbb{R} é completo, a sequência converge, digamos

$$x_m(t_0) \longrightarrow x(t_0), \quad m \longrightarrow \infty.$$

Nesse sentido, podemos associar cada $t \in J$ a um único $x(t)$. Isso define pontualmente a função x em J e mostramos que $x \in C(J)$ e $x_m \rightarrow x$. De (1.3), mantendo m fixo, com $n \rightarrow \infty$, temos que

$$\max_{t \in J} |x_m(t) - x(t)| \leq \epsilon,$$

desde que $m > N$. Logo, para todo t em J ,

$$|x_m(t) - x_n(t)| \leq \epsilon, \quad \forall m > N.$$

Isso mostra que $(x_m(t))$ converge para $x(t)$ uniformemente em J . Como x_m são contínuas em J para todo $m \in \mathbb{N}$ e a convergência é uniforme, segue que o limite x é contínuo em J .

Portanto, $x \in C(J)$.

2 Teorema da Existência e Unicidade de Picard

Considere o problema de valor inicial, o qual é constituído por uma equação diferencial ordinária e uma condição inicial, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde x_0 e t_0 são reais e f é uma função contínua em algum subconjunto \mathbb{R}^2 . Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, podemos mostrar que encontrar solução do problema acima é equivalente a encontrar a solução do problema integral correspondente:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

para t em algum intervalo $J \subset \mathbb{R}$.

Agora, vamos usar essas informações e aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para demonstrar o teorema seguinte, que nos garante que um problema de valor inicial ordinário terá apenas uma solução, quando assumidas determinadas condições.

Teorema 1.3. *Seja f uma função contínua em um retângulo $R = \{(t, x); |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$ e limitada, digamos, $|f(t, x)| \leq c$. Suponha que f satisfaça a condição de Lipschitz em R com respeito ao seu segundo argumento, isto é, existe uma constante k tal que, para $(t, x), (t, v) \in R$,*

$$|f(t, x) - f(t, v)| \leq k|x - v|.$$

Então, o PVI (2.1) tem uma única solução, que existe em um intervalo $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, onde

$$\beta < \min \left\{ a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k} \right\}.$$

Demonstração. Seja $C(J)$ o espaço métrico das funções contínuas reais definidas no intervalo J , $t_0 \in J$, com a métrica d

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|.$$

Pelo exemplo anterior, sabemos que $C(J)$ é completo.

Seja \tilde{C} o subespaço de $C(J)$ que consiste de todas as funções $x \in C(J)$ que satisfazem

$$|x(t) - x_0| \leq c\beta, \quad t \in J.$$

Note que \tilde{C} é fechado em $C(J)$. Basta mostrar que se (x_n) é uma sequência em \tilde{C} tal que $x_n \rightarrow \tilde{x}$, então $\tilde{x} \in \tilde{C}$.

De fato, se $(x_n) \subset \tilde{C}$ e $x_n \rightarrow \tilde{x}$, então $\tilde{x} \in C(J)$ e como $x_n \in \tilde{C}$, tem-se

$$|x_n(t) - x_0| \leq c\beta, \quad t \in J.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ e usando que a norma é contínua, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n(t) - x_0| \leq c\beta, \quad \left| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) - \lim_{n \rightarrow \infty} x_0 \right| \leq c\beta, \quad |\tilde{x}(t) - x_0| \leq c\beta, \quad t \in J.$$

Logo, $\tilde{x} \in \tilde{C}$. Portanto, \tilde{C} é fechado.

Vimos que resolver o (2.1) é equivalente a resolver a equação integral, portanto defina o operador $T : \tilde{C} \rightarrow C(J)$ por

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Note que T está definida para todo $x \in \tilde{C}$, por causa de $c\beta < b$, então para $x \in \tilde{C}$, usando o fato de que $f(t, x)$ é limitada por c , obtemos

$$\begin{aligned} |Tx(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t c ds \right| = |c(t - t_0)| = c|t - t_0| \leq c\beta. \end{aligned}$$

Agora, se $x, v \in \tilde{C}$, pela condição de Lipschitz,

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Tv(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, v(s))] ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, v(s))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t k|x(s) - v(s)| ds \right| = k \left| \int_{t_0}^t |x(s) - v(s)| ds \right| \leq k \max_{s \in J} \{|x(s) - v(s)|\} \left| \int_{t_0}^t ds \right| \\ &\leq k \max_{s \in J} \{|x(s) - v(s)|\} \underbrace{|t - t_0|}_{\leq \beta} \leq k\beta d(x, v). \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe x único tal que $Tx = x$, isto é,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

como $(s, x(s)) \in R$ e f contínua, segue do Teorema Fundamental do Cálculo que $x'(t) = f(t, x(t))$ e $x(t_0) = x_0$, portanto, x é a única solução do PVI (2.1). \square

Agradecimentos: Agradeço à minha orientadora, Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti, por todo suporte que me deu desde o início, e àqueles com quem compartilho a convivência, por não me deixarem desistir.

Abstract: Functional Analysis is an area with results that can be applied to various fields, such as physics. In this paper we will use the space of continuous functions defined in a range $[a, b]$, which is a space of infinite dimension. For problems that are modeled by differential equations, the first question is about the existence and uniqueness of the solution. In response, and broadly speaking, we present the Picard Theorem whose proof is based on the Banach Fixed Point Theorem, these two results will be presented and demonstrated in this paper.

Keywords: fixed point, Banach, ordinary differential equations

Referências Bibliográficas

- [1] Barreto, A. C. *Tópicos de Análise*, IMPA, Rio de Janeiro, 1971.
- [2] Kreyszig, E. *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

Uma introdução à teoria de módulos e homomorfismos

Matheus Eduardo Dametto Silva[†]

Orientador(a): João Peres Vieira

Resumo: No presente trabalho faremos uma introdução à Álgebra Homológica através de um breve estudo da teoria de Módulos e Homomorfismos.

Palavras-chave: Módulos; Submódulos, Homomorfismos.

1 Módulos e Submódulos

Neste trabalho consideraremos $(R, +, \cdot)$ um anel comutativo com unidade $1 \neq 0$.

Definição 1.1. Um módulo à esquerda sobre R , ou R -módulo à esquerda, é um grupo aditivo X , junto com uma aplicação $\mu : R \times X \rightarrow X$ tal que, para quaisquer $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \in R$, têm-se:

$$\begin{aligned} \text{M1)} \quad & \mu(\alpha + \beta, x) = \mu(\alpha, x) + \mu(\beta, x) \\ & \mu(\alpha, x + y) = \mu(\alpha, x) + \mu(\alpha, y) \end{aligned}$$

$$\text{M2)} \quad \mu(\alpha, \mu(\beta, x)) = \mu(\alpha \cdot \beta, x)$$

$$\text{M3)} \quad \mu(1, x) = x$$

De modo análogo, definimos R -módulo à direita, para isto consideramos uma aplicação $\mu_1 : X \times R \rightarrow X$ que satisfaça as propriedades

$$\begin{aligned} \text{M1)} \quad & \mu_1(x, \alpha + \beta) = \mu_1(x, \alpha) + \mu_1(x, \beta) \\ & \mu_1(x + y, \alpha) = \mu_1(x, \alpha) + \mu_1(y, \alpha) \end{aligned}$$

$$\text{M2)} \quad \mu_1(\mu(x, \alpha), \beta) = \mu_1(x, \alpha \cdot \beta)$$

$$\text{M3)} \quad \mu_1(x, 1) = x$$

Neste trabalho, iremos considerar que X é um grupo abeliano aditivo, sendo assim, não há a necessidade de dizer se X é R -módulo à esquerda ou à direita.

A aplicação μ é chamada multiplicação escalar do R -módulo X e o elemento $\mu(\alpha, x) \in X$ será chamado de produto escalar de α por x e será denotado por αx . Com esta notação simplificada, as condições M1)–M3), se expressam nas seguintes igualdades:

$$1) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$2) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$3) \quad \alpha(\beta x) = (\alpha \cdot \beta)x$$

$$4) \quad 1x = x$$

[†]FAPESP - Processo 2017/07047-3

Lema 1.2. *Se X é um R -módulo, temos:*

- i) *Para todo $x \in X$, $0x = 0$.*
- ii) *Para todo $\alpha \in R$, $\alpha 0 = 0$.*
- iii) *Para quaisquer $\alpha \in R$ e $x \in X$, $\alpha(-x) = (-\alpha)x = -\alpha x$.*

Prova: i) $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$. Portanto $0x - 0x = (0x + 0x) - 0x = 0x + (0x - 0x)$, pois a associativa é válida em X . Assim, $0 = 0x + 0$ e, conseqüentemente, $0 = 0x$.

ii) $\alpha 0 = \alpha(0 + 0) = \alpha 0 + \alpha 0$. Sendo assim, $\alpha 0 - \alpha 0 = (\alpha 0 + \alpha 0) - \alpha 0 = \alpha 0 + (\alpha 0 - \alpha 0)$, pois a associativa é válida em X . Assim, $0 = \alpha 0 + 0$ e, portanto, $0 = \alpha 0$.

iii) De ii) temos que $0 = \alpha 0 = \alpha(x + (-x)) = \alpha x + \alpha(-x)$. Logo, $-\alpha x + 0 = -\alpha x + (\alpha x + \alpha(-x)) = (-\alpha x + \alpha x) + \alpha(-x)$, pois a associativa é válida em X . Deste modo, $-\alpha x = 0 + \alpha(-x) = \alpha(-x)$.

Por outro lado, de i) temos que $0 = 0x = (\alpha + (-\alpha))x = \alpha x + (-\alpha)x$. Logo, $-\alpha x + 0 = -\alpha x + (\alpha x + (-\alpha)x) = (-\alpha x + \alpha x) + (-\alpha)x$, pois a associativa é válida em X . Deste modo, $-\alpha x = 0 + (-\alpha)x = (-\alpha)x$. \square

Definição 1.3. *Seja X um R -módulo. Um submódulo M de X é um subconjunto não vazio de X tal que:*

- 1) *M é um subgrupo de X .*
- 2) *Para quaisquer $\alpha \in R$ e $m \in M$, $\alpha m \in M$.*

Lema 1.4. *Seja M um subconjunto não vazio de um R -módulo X . M é um submódulo de X se, e somente se, para quaisquer $\alpha \in R$ e $u, v \in M$ valem as seguintes condições:*

- 1) *$u + v \in M$;*
- 2) *$\alpha u \in M$;*

Prova: (\Rightarrow) Como M é um submódulo de X , então pela propriedade 1) da Definição 1.3, temos que M é um subgrupo de X e, portanto, é fechado para a operação $+$. Assim a condição 1) é válida. Pela propriedade 2) da Definição 1.3, segue a condição 2).

(\Leftarrow) Da condição 2) temos que para quaisquer $\alpha \in R$ e $m \in M$, $\alpha m \in M$. Assim, basta provar que M é um subgrupo de X . Para isto, note que para qualquer $u \in M$, $-u = (-1)u \in M$, isso decorre da condição 2). Ainda, para $u \in X$ qualquer, temos $0 = u + (-u)$. Logo, segue da condição 1) que $0 \in M$ e, portanto, M é não vazio.

Agora, para quaisquer $u, v \in M$, temos que $u - v = u + (-v) \in M$, uma vez que por 2), $-v \in M$.

Portanto, M é um submódulo de X . \square

Consideremos um submódulo A do R -módulo X . Desde que A é um subgrupo de X , o grupo quociente $Q = \frac{X}{A} = \{x + A; x \in X\}$, onde $x + A = \{x + a; a \in A\}$ é um grupo abeliano com a operação $+$ definida da seguinte forma:

Para todo $(x + A), (y + A) \in Q$, $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$.

Lema 1.5. *Seja A um submódulo de um R -módulo X . Para quaisquer $u, v \in X$, $u + A = v + A$ se, e somente se, $u - v \in A$.*

Prova: (\Rightarrow) Por hipótese, temos $u + A = v + A$, isto é, para $a \in A$ qualquer, $u + a \in v + A$. Logo, existe $a_1 \in A$ tal que $u + a = v + a_1 \Rightarrow u - v = a_1 - a \in A$. Portanto, $u - v \in A$.

(\Leftarrow) Por hipótese, $u - v \in A$, ou seja, existe $a_1 \in A$ tal que $a_1 = u - v$. Seja $w \in u + A$. Então, $w = u + a_2$, $a_2 \in A$. Logo,

$$w = v + a_1 + a_2 = v + a$$

onde $a = a_1 + a_2 \in A$. Assim, temos que $w \in v + A$ e, conseqüentemente, $u + A \subset v + A$.

De modo análogo, mostramos que $v + A \subset u + A$. Portanto, $u + A = v + A$. \square

Como decorrência do Lema 1.5, temos uma função bem definida $\mu : R \times Q \rightarrow Q$ definida por $\mu(\alpha, u + A) = \alpha u + A$.

De fato, para qualquer $\alpha \in R$, se $u + A = v + A$, devemos mostrar que $\mu(\alpha, u + A) = \mu(\alpha, v + A)$, isto é, $\alpha u + A = \alpha v + A$. Pelo Lema 1.5, basta mostrar que $\alpha u - \alpha v \in A$. Com efeito, $\alpha u - \alpha v = \alpha(u - v) \in A$, pois $\alpha \in R$, $u - v \in A$ e A é um submódulo. Mostremos agora que Q é um R -módulo, ou seja, as propriedades M1)–M3) são satisfeitas.

Se $\alpha, \beta \in R$ e $u + A, v + A \in Q$, temos

$$\begin{aligned} \mu(\alpha + \beta, u + A) &= (\alpha + \beta)(u + A) = (\alpha + \beta)u + A = \alpha u + \beta u + A = \\ &= (\alpha u + A) + (\beta u + A) = \mu(\alpha, u + A) + \mu(\beta, u + A). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \mu(\alpha, (u + A) + (v + A)) &= \alpha((u + A) + (v + A)) = \alpha((u + v) + A) = \alpha(u + v) + A = \\ &= \alpha u + \alpha v + A = (\alpha u + A) + (\alpha v + A) = \mu(\alpha, u + A) + \mu(\alpha, v + A). \end{aligned}$$

Logo, a propriedade M1) é válida. Para M2),

$$\mu(\alpha, \mu(\beta, u + A)) = \mu(\alpha, \beta u + A) = \alpha(\beta u) + A = (\alpha\beta)u + A = \mu(\alpha\beta, u + A)$$

e para M3),

$$\mu(1, u + A) = 1(u + A) = 1u + A = u + A.$$

Portanto, Q é um R -módulo.

Lema 1.6. *A intersecção de qualquer família de submódulos de um R -módulo X é um submódulo de X .*

Prova: Seja $\psi = \{A_i; i \in I\}$ uma família de submódulos de um R -módulo X e denotemos por $A = \bigcap_{i \in I} A_i$. Para provar que A é um submódulo de X , basta mostrar as condições do Lema 1.4.

Como $A = \bigcap_{i \in I} A_i$, temos $A \subset A_i$, para qualquer $i \in I$. Logo, como para quaisquer $\alpha \in R$ e $u, v \in A_i$, temos $u + v \in A_i$ e $\alpha u \in A_i$, para qualquer $i \in I$, segue que $u + v \in A$ e $\alpha u \in A$.

Portanto, A é um submódulo de X . \square

Denotemos por S um subconjunto qualquer de um R -módulo X , então S está contido em pelo menos um submódulo de X , a saber, o próprio X . Pelo Lema 1.6, a intersecção de todos os submódulos de X que contêm S é um submódulo de X . Ainda, este é o menor submódulo de X contendo o conjunto S . Chamamos este submódulo de submódulo gerado por S . No caso de X ser esse submódulo, dizemos que S é um conjunto de geradores de X e que X é gerado por S .

Definição 1.7. Seja $x \in X$ qualquer. Dizemos que x é uma combinação linear de elementos de um subconjunto S de X se, e somente se, existem finitos elementos $s_1, \dots, s_n \in S$ tal que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i$, com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$.

Proposição 1.8. O submódulo A de um R -módulo X , gerado por um subconjunto S de X , consiste de todas as combinações lineares de elementos de S .

Prova: Seja C o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S . Note que C é um submódulo de X , pois para $u, v \in C$, temos $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ e $v = \sum_{j=1}^m \beta_j y_j$, com $\alpha_i, \beta_j \in R$ e $x_i, y_j \in S, i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Logo,

$$u + v = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j y_j = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta_1 y_1 + \dots + \beta_m y_m \in C.$$

Ainda, para qualquer $r \in R$, $ru = r \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n (r\alpha_i) x_i \in C$.

Agora, para todo $s \in S$, $s = 1s \in C$. Deste modo, $A \subset C$. Logo, $A \subset S$. Mas, $S \subset A$, pois A é o menor submódulo de X que contém S . Mas, $S \subset A$ e assim $C \subset A$ pois A é um submódulo de X . Portanto, $A = C$. \square

Para quaisquer dois subconjuntos S e T do R -módulo X , definimos

$$S + T = \{u + v; u \in S \text{ e } v \in T\}$$

e para todo subconjunto $E \subset R$, definimos

$$ES = \{\alpha u, \alpha \in E \text{ e } u \in S\}.$$

Note que, se S e T são submódulos de X , então $S + T$ é um submódulo de X . De fato, sejam $u_1 + v_1, u_2 + v_2 \in S + T$ e $\alpha \in R$, temos:

- 1) $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \in S + T$
- 2) $\alpha(u_1 + v_1) = \alpha u_1 + \alpha v_1 \in S + T$

Exemplo 1.9. Seja X um anel com unidade 1 e R um subanel comutativo de X contendo 1. Dada a aplicação $\mu : R \times X \rightarrow X$ definida por $\mu(\alpha, x) = \alpha x$, temos que X é um R -módulo.

Prova: Note que por X ser um anel, em particular, X é um grupo abeliano aditivo. Ainda, do modo que μ está definida, as propriedades M1) – M3) são satisfeitas. Portanto, X é um R -módulo. \square

Em particular, todo anel comutativo com unidade é um módulo sobre si mesmo.

Exemplo 1.10. Sejam R um anel comutativo com unidade $1 \neq 0$, X um R -módulo e S um conjunto. O conjunto $X^S = \{f : S \rightarrow X; f \text{ é uma função}\}$ é um R -módulo.

Prova: De início, note que X^S é um grupo abeliano aditivo segundo a operação $+$ definida por: para quaisquer $f, g \in X^S$ e $s \in S$, $(f + g)(s) = f(s) + g(s)$.

Além disso, defina $\mu : R \times X^S \rightarrow X^S$ por $\mu(\alpha, f) = \alpha f$, onde $\alpha f : S \rightarrow X$ é dada por $(\alpha f)(s) = \alpha[f(s)]$. Assim, as propriedades M1) – M3) são satisfeitas. De fato, sejam $\alpha, \beta \in R$ e $f, g \in X^S$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned} \text{M1)} \quad & \mu(\alpha + \beta, f) = (\alpha + \beta)f \\ & \mu(\alpha, f) + \mu(\beta, f) = \alpha f + \beta f \end{aligned}$$

Agora, para todo $s \in S$, temos

$$[(\alpha + \beta)f](s) = (\alpha + \beta)[f(s)] = \alpha[f(s)] + \beta[f(s)] = (\alpha f)(s) + (\beta f)(s) = (\alpha f + \beta f)(s).$$

Portanto, $\mu(\alpha + \beta, f) = \mu(\alpha, f) + \mu(\beta, f)$. Também,

$$\begin{aligned} \mu(\alpha, f + g) &= \alpha(f + g) \\ \mu(\alpha, f) + \mu(\alpha, g) &= \alpha f + \alpha g \end{aligned}$$

Agora, para todo $s \in S$, temos

$$\begin{aligned} [\alpha(f + g)](s) &= \alpha[(f + g)(s)] = \alpha[f(s) + g(s)] = \alpha[f(s)] + \alpha[g(s)] = \\ &= (\alpha f)(s) + (\alpha g)(s) = [\alpha f + \alpha g](s). \end{aligned}$$

Portanto, $\mu(\alpha, f + g) = \mu(\alpha, f) + \mu(\alpha, g)$.

$$\begin{aligned} \text{M2)} \quad & \mu(\alpha, \mu(\beta, f)) = \alpha\mu(\beta, f) = \alpha(\beta f) \\ & \mu(\alpha.\beta, f) = (\alpha.\beta)f \end{aligned}$$

Agora, para todo $s \in S$, temos

$$[\alpha(\beta f)](s) = \alpha[(\beta f)(s)] = \alpha[\beta f(s)] = (\alpha.\beta)[f(s)] = ((\alpha.\beta)f)(s).$$

Logo, $\mu(\alpha, \mu(\beta, f)) = \mu(\alpha.\beta, f)$.

M3) $\mu(1, f) = 1f = f$, pois para todo $s \in S$,

$$(1f)(s) = 1[f(s)] = f(s).$$

Portanto, X^S é um R -módulo. □

Como caso particular, R^S é um R -módulo.

Exemplo 1.11. Considere $X = R^S = \{f : S \rightarrow R; f \text{ é uma função}\}$. Pelo Exemplo 1.10, temos que X é um R -módulo. Seja $F = \{f : S \rightarrow R; f \text{ é uma função quase nula}\}$. Então F é um submódulo de X .

Prova: Note que, desde que a soma de funções quase nulas é uma função quase nula, a operação aditiva de X é fechada em F . Além disso, como X é um grupo abeliano aditivo, F definido com a operação aditiva de X também será um grupo abeliano. Logo, F é um subgrupo não vazio de X .

Agora, para quaisquer $\alpha \in R$ e $f \in F$, temos que $\alpha f \in F$, pois, como $(\alpha f)(s) = \alpha f(s)$ [cf. Exemplo 1.10] e f é uma função quase nula, segue que αf é uma função quase nula.

Portanto, F é um submódulo de X . □

Exemplo 1.12. Todo ideal I de R é um R -módulo. Ainda, quando R é visto como um R -módulo sobre si mesmo, temos que I é um submódulo de R .

Prova: De fato, seja $\mu : R \times I \rightarrow I$ definida por $\mu(\alpha, x) = \alpha x$, para todo par $(\alpha, x) \in R \times I$. Então, para $\alpha, \beta \in R$ e $x, y \in I$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned} \text{M1)} \quad & \mu(\alpha + \beta, x) = (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x = \mu(\alpha, x) + \mu(\beta, x) \\ & \mu(\alpha, x + y) = \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y = \mu(\alpha, x) + \mu(\alpha, y) \end{aligned}$$

$$\text{M2)} \quad \mu(\alpha, \mu(\beta, x)) = \alpha\mu(\beta, x) = \alpha(\beta x) = (\alpha.\beta)x = \mu(\alpha.\beta, x)$$

$$\text{M3)} \quad \mu(1, x) = 1x = x$$

Portanto, o ideal I de R é um R -módulo.

Ainda, como I é ideal de R , segue que I é não vazio, pois para qualquer $x \in I$, temos que $-x = (-1)x \in I$, consequentemente, $x - x = 0 \in I$.

Além disso, para todo $a, b \in I$, $a - b \in I$. Logo, I é um subgrupo de R . Ainda, para quaisquer $\alpha \in R$ e $x \in I$, $\alpha x \in I$, pois I é ideal de R .

Portanto, I é submódulo de R . \square

Observação 1.13. Uma função $f : A \rightarrow B$ se diz quase nula quando $f(a) = 0$ exceto, no máximo, um número finito de elementos $a \in A$.

2 Homomorfismos

Definição 1.14. Sejam X e Y dois R -módulos. Um homomorfismo do R -módulo X no R -módulo Y é uma função $f : X \rightarrow Y$ tal que f é um homomorfismo de grupos abelianos e preserva a multiplicação escalar, isto é, para todo $\alpha \in R$ e $u, v \in X$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(u) + f(v), \\ f(\alpha u) &= \alpha f(u). \end{aligned}$$

Proposição 1.15. Sejam X, Y e Z R -módulos quaisquer. A composição $g \circ f : X \rightarrow Z$ de dois homomorfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ é um homomorfismo.

Prova: Sejam $u, v \in X$ e $\alpha \in R$ quaisquer. Então:

$$\begin{aligned} g \circ f(u + v) &= g(f(u + v)) = g(f(u) + f(v)) = g(f(u)) + g(f(v)) = g \circ f(u) + g \circ f(v), \\ g \circ f(\alpha u) &= g(f(\alpha u)) = g(\alpha f(u)) = \alpha[g(f(u))] = \alpha[g \circ f(u)]. \end{aligned}$$

Portanto, $g \circ f$ é um homomorfismo. \square

Proposição 1.16. Para todo homomorfismo $h : X \rightarrow Y$, onde X e Y são R -módulos, a imagem $h(A) = \{h(x); x \in A\}$ de qualquer submódulo A de X é um submódulo de Y . Ainda, a imagem inversa $h^{-1}(B) = \{x \in X; h(x) \in B\}$, de qualquer submódulo B de Y é um submódulo de X .

Prova: Mostremos que $h(A)$ é um submódulo de Y . Para isto, tomemos $\alpha \in R$ e $u, v \in h(A)$ quaisquer, isto é, existem $x, y \in A$ tais que $h(x) = u$ e $h(y) = v$. Desde que A é um submódulo de X , segue que $x + y \in A$ e $\alpha x \in A$, e como h é um homomorfismo, então

$$u + v = h(x) + h(y) = h(x + y) \in h(A), \quad \alpha u = \alpha h(x) = h(\alpha x) \in h(A).$$

Portanto, $h(A)$ é um submódulo de Y .

Agora, mostremos que $h^{-1}(B)$ é um submódulo de X . Para isto, tomemos $\beta \in R$ e $x_1, y_1 \in h^{-1}(B)$ quaisquer. Desde que B é um submódulo de Y e h um homomorfismo, temos:

$$\begin{aligned} h(x_1 + y_1) &= h(x_1) + h(y_1) \in B \text{ donde segue que } x_1 + y_1 \in h^{-1}(B), \\ h(\beta x_1) &= \beta h(x_1) \in B \text{ donde segue que } \beta x_1 \in h^{-1}(B). \end{aligned}$$

Portanto, $h^{-1}(B)$ é um submódulo de X . \square

Se o submódulo A do R -módulo X é o próprio X , a imagem $\text{Im}(h) = h(X)$ é um submódulo de Y e será chamada a imagem do homomorfismo $h : X \rightarrow Y$. Por outro lado, se o submódulo B do R -módulo Y for o submódulo trivial, isto é, $B = \{0\}$, então a imagem inversa $h^{-1}(B) = h^{-1}(\{0\}) = \text{Ker}(h)$ é um submódulo de X e será chamado de Kernel (ou núcleo) do homomorfismo $h : X \rightarrow Y$.

Finalmente, por co-imagem $\text{CoIm}(h)$ e co-núcleo $\text{CoKer}(h)$ de um homomorfismo $h : X \rightarrow Y$, entendemos os módulos quocientes $\text{CoIm}(h) = \frac{X}{\text{Ker}(h)}$ e $\text{CoKer}(h) = \frac{Y}{\text{Im}(h)}$ dos R -módulos X e Y , respectivamente.

Definição 1.17. Seja $h : X \rightarrow Y$ um homomorfismo de R -módulos.

- i) h é um monomorfismo, se e somente se, h é injetora.
- ii) h é um epimorfismo, se e somente se, h é sobrejetora.
- iii) h é um isomorfismo, se e somente se, h é bijetora.

Assim, X e Y são ditos isomorfos ($X \approx Y$) se, e somente se, h for um isomorfismo.

Proposição 1.18. Um homomorfismo $h : X \rightarrow Y$ de R -módulos é um monomorfismo se, e somente se, $\text{Ker}(h) = \{0\}$.

Prova: (\Rightarrow) Como h é um monomorfismo, h leva o elemento neutro de X no elemento neutro de Y , isto é, $h(0) = \mathbf{0}$. Agora, seja $u \in \text{Ker}(h)$, assim $h(u) = \mathbf{0} = h(0)$. Logo, $u = 0$, pois h é injetora. Portanto, $\text{Ker}(h) = \{0\}$.

(\Leftarrow) Sejam $u, v \in X$ tais que $h(u) = h(v)$, isto é, $h(u - v) = h(u) - h(v) = \mathbf{0}$. Assim, $u - v \in \text{Ker}(h) = \{0\}$. Logo, $u - v = 0$, isto é, $u = v$. Portanto, h é um monomorfismo. \square

Proposição 1.19. Um homomorfismo de R -módulos $h : X \rightarrow Y$ é um epimorfismo se, e somente se, $\text{CoKer}(h) = \{0\}$.

Prova: (\Rightarrow) Por hipótese, temos que h é sobrejetor, assim $\text{Im}(h) = h(X) = Y$. Logo, $\text{CoKer}(h) = \frac{Y}{Y} = \{0\}$.

(\Leftarrow) De $\text{CoKer}(h) = \frac{Y}{\text{Im}(h)} = \{0\}$, segue que para todo $y \in Y$, temos $y \in \text{Im}(h)$. Logo, $\text{Im}(h) = Y$ e, conseqüentemente, h é um epimorfismo. \square

Como visto na Proposição 1.15, a composição de homomorfismos é um homomorfismo. Segue que a composição de dois monomorfismos será um monomorfismo e composição de dois epimorfismos será um epimorfismo.

Em particular, segue que se f e g são isomorfismos, então a composição $g \circ f$ é um isomorfismo.

Sejam X e Y , R -módulos arbitrários. Por homomorfismo trivial entendemos o homomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $h(x) = \mathbf{0}$, para todo $x \in X$. Para denotar o homomorfismo trivial, utilizaremos o símbolo θ .

Proposição 1.20. A composição $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ de dois homomorfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, onde X , Y e Z são R -módulos, é o homomorfismo trivial se, e somente se, $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

Prova: (\Rightarrow) Por hipótese, temos que h é o homomorfismo trivial, isto é, $g \circ f(u) = \theta$, para todo $u \in X$. Logo, para qualquer $y \in \text{Im}(f)$, temos algum $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Assim, $g(y) = g(f(x)) = \theta$ e, conseqüentemente, $y \in \text{Ker}(g)$. Portanto, $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

(\Leftarrow) Para qualquer $x \in X$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Como, para todo $x \in X$, $f(x) \in \text{Im}(f)$ e $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$, temos que $(g \circ f)(x) = 0$. Logo, $h = g \circ f$ é o homomorfismo trivial. \square

Consideremos um submódulo A qualquer de um R -módulo X junto com o módulo quociente $Q = \frac{X}{A} = \{u + A; u \in X\}$. A função $p : X \rightarrow Q$ definida por $p(x) = x + A$, para todo $x \in X$, é chamada projeção natural do R -módulo X sobre o módulo quociente Q . Então p é um epimorfismo do grupo abeliano aditivo X sobre o grupo abeliano aditivo Q .

Com efeito, para todo $\alpha \in R$ e $x, y \in X$, temos

$$p(x + y) = (x + y) + A.$$

Por outro lado,

$$p(x) + p(y) = (x + A) + (y + A) = (x + y) + A.$$

Logo, $p(x + y) = p(x) + p(y)$. Ainda,

$$p(\alpha x) = \alpha x + A.$$

Por outro lado,

$$\alpha p(x) = \alpha(x + A) = \alpha x + A.$$

Assim, $p(\alpha x) = \alpha p(x)$.

Agora, dado $u + A \in Q$, temos $p(u) = u + A$, com $u \in X$. Logo, $\text{Im}(p) = Q$ e, portanto, p é um epimorfismo.

Além disso,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(p) &= \{x \in X; p(x) = 0 + A\} \\ &= \{x \in X; x + A = 0 + A\} \\ &= \{x \in X; x \in A\} \\ &= A. \end{aligned}$$

Assim, todo submódulo A de X é o núcleo de algum homomorfismo.

Teorema 1.21 (Teorema do Isomorfismo de Anéis [2, p. 267]). *Seja $f : A \rightarrow B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis e $I = \text{Ker}(f)$. O anel quociente $\frac{A}{I}$ é isomorfo a B .*

Proposição 1.22. *Para um homomorfismo $h : X \rightarrow Y$ de R -módulos, temos $\text{CoIm}(h) = \frac{X}{\text{Ker}(h)} \approx \text{Im}(h)$.*

Prova: Ao considerarmos $h : X \rightarrow \text{Im}(h)$, temos que h é um epimorfismo. Assim, o resultado segue imediatamente do Teorema 1.21. \square

Teorema 1.23. *Para quaisquer submódulos A e B de um R -módulo X , o homomorfismo inclusão $i : A \rightarrow A + B$ satisfaz: $i(A \cap B) \subset B$ e i induz um isomorfismo $i^* : \frac{A}{A \cap B} \rightarrow \frac{A+B}{B}$.*

Prova: $i(A \cap B) = A \cap B \subset B$.

Agora, defina $i^* : \frac{A}{A \cap B} \rightarrow \frac{A+B}{B}$ por $i^*(a + A \cap B) = i(a) + B$. Como $i(A \cap B) = A \cap B \subset B$, i^* é um homomorfismo bem definido. Além disso, sejam $a + A \cap B, b + A \cap B \in \frac{A}{A \cap B}$, tais que $i^*(a + A \cap B) = i^*(b + A \cap B)$. Então

$$i(a) + B = i(b) + B \Rightarrow i(a) - i(b) \in B \Rightarrow a - b \in B.$$

Como $a, b \in A$ e A é um submódulo de X , então $a - b \in A$. Logo, $a - b \in A \cap B$ e, portanto, $a + A \cap B = b + A \cap B$ e, conseqüentemente, i^* é injetor.

Ainda, dado $(x + y) + B \in \frac{A+B}{B}$, tomemos $x + A \cap B \in \frac{A}{A \cap B}$, assim

$$i^*(x + A \cap B) = i(x) + B = x + B = (x + y) + B,$$

pois $y \in B$. Logo, i^* é sobrejetor.

Portanto, i^* é um isomorfismo. \square

Exemplo 1.24. Seja A um submódulo de um R -módulo X . A função inclusão $i : A \rightarrow X$ dada por $i(x) = x$, para todo $x \in X$, é um monomorfismo.

Prova: De fato, para todo $\alpha \in R$ e $u, v \in A$, temos

$$\begin{aligned} i(u + v) &= u + v = i(u) + i(v), \\ i(\alpha u) &= \alpha u = \alpha i(u). \end{aligned}$$

Agora, sejam $u_1, v_1 \in A$ tais que $i(u_1) = i(v_1)$. Então $i(u_1) = i(v_1) \Rightarrow u_1 = v_1$. Logo, i é injetora e, por consequência, um monomorfismo. \square

Este homomorfismo é chamado de homomorfismo inclusão. Em particular, para $A = X$, temos a função identidade $id : X \rightarrow X$, onde X é um R -módulo qualquer, este homomorfismo é chamado de homomorfismo identidade.

Agradecimentos: Agradeço meus familiares e amigos, à FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo financiamento e a todos meus professores da graduação, em especial Prof. Dr. João Peres Vieira pela orientação e apoio dado durante o desenvolvimento deste projeto.

Abstract: In the present work we will make an introduction to Homological Algebra through a brief study of Module theory and Homomorphisms.

Keywords: Modules; Submodules; Homomorphisms.

Referências Bibliográficas

- [1] HU, Sze-Tsen, *Introduction to Homological Algebra*, Holden-day, Inc., 1968.
- [2] DOMINGUES, Hygino H.; Iezzi, G., *Álgebra Moderna*, 4ª ed., Atual, 2003.

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM MATEMÁTICA · BICMAT

Orientação aos autores

Ao redigir o material a ser divulgado o autor deve observar que o alvo principal é o aluno de graduação, devendo a redação ser clara e objetiva incentivando-o à leitura.

O trabalho deve ser enviado à Comissão Editorial, via e-mail, na linguagem \LaTeX , usando a classe `bicmat`. Mais informações sobre a formatação do trabalho podem ser encontradas em www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat, assim como o endereço para o envio do trabalho.

A responsabilidade de cada artigo é exclusiva do autor e respectivo orientador.