Formelsammlung HSR

Thomas Küng	Urs Winiger	Adrian Freihofer
tkueng@hsr.ch	uwiniger@hsr.ch	afreihof@hsr.ch

Version 1.01
16. November 2024

Vorwort

Die vorliegende Formelsammlung wurde während dem Studium für Elektrotechnik an der Fachhochschule in Rapperswil geschrieben. Ziel war es, den Inhalt an den Prüffungsstoff anzupassen, aber auch ein Werk zu schreiben, das wir später im Berufsleben verwenden können. Obwohl wir den Inhalt sorgfälltig zusammengestellt haben, sind Fehler nicht ausschliessbar. Für jegliche Korrektur- oder Verbesserungsvorschläge haben wir immer ein offenes Ohr!

In der Formelsammlung sind die folgenden Fächer enthalten:

- Physik
- Elektrizitätslehre
- Energie und Antriebstechnik
- Elektronik
- Digitale Signalverarbeitung
- Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

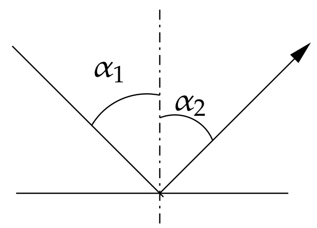
Physik

1. Geometrische Optik

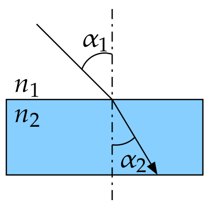
1.1. Sichtbares Licht

Wellenbereich λ/nm	Farbe
380 - 435	violett
435 - 465	blau
465 - 485	blaugrün
485 - 565	grün
565 - 590	gelb
590 - 630	orange
630 - 780	rot

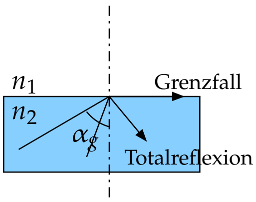
1.2. Reflexionsgesetz

 	$\alpha_1 = \alpha_2$	α_1 Einfallswinkel $[rad]$ α_2 Ausfallswinkel $[rad]$

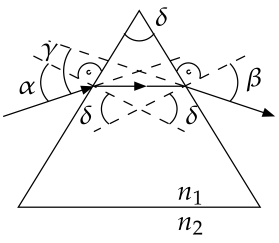
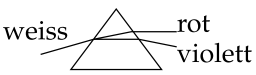
1.3. Brechung

 	falls $n_2 > n_1$: $n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$ $n = \frac{c}{u}$ $n_2 > n_1 \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$	α_1 Einfallswinkel $[rad]$ α_2 Brechungswinkel $[rad]$ $n_{1,2}$ Brechungsindex $[1]$

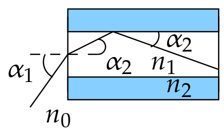
1.4. Totalreflexion

	falls $n_2 > n_1$: $\alpha_g = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$	α_g Grenzwinkel $[rad]$ $n_{1,2}$ Brechungsindex $[1]$

1.4.1. Prisma

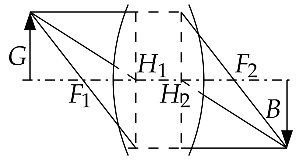
 	falls $n_2 = 1$: $n_1 = \frac{\sin\frac{\delta+\gamma}{2}}{\frac{\delta}{2}}$ $n_2 = n_1 \frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\frac{\gamma_{min}+\delta}{2}}$ $\gamma = \alpha - \delta + \arcsin\left\{\sin(\delta) z\right\}$ $z = \sqrt{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - \sin^2\alpha\right] - \cos\delta\sin\alpha}$ $\gamma_{min} = 2\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\frac{\delta}{2}\right) - \delta$	α Einfallswinkel $[rad]$ β Ausfallswinkel $[rad]$ δ Scheitelwinkel $[rad]$ γ Ablenkwinkel $[rad]$ γ_{min} min Ablenkwinkel $[rad]$ n_1 n-Prisma $[1]$ n_2 n-Medium $[1]$

1.4.2. Lichtwellenleiter

 	falls $n_1 > n_2$: $\alpha_{1max} = \arcsin \frac{n_1 \cos\left[\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right]}{n_0}$ $n_0 \sin\alpha_1 = n_1\sqrt{1-\cos^2\alpha_2}$ $n_0 \sin\alpha_1 = n_1\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$ $n_0 \sin\alpha_1 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$	α_1 Einfallswinkel $[rad]$ α_{1max} max Einfallswinkel $[rad]$ n_0 n-Medium $[1]$ n_1 n-Kern $[1]$ n_2 n-Mantel $[1]$

1.5. Abbildungen

1.5.1. Allgemein

 Vorzeichen: • Für sammelde optische Bauelemente ist $f > 0$. • Für zerstreuende optische Bauelemente $f < 0$. • Für virtuelle Bilder ist $b < 0$ und $B < 0$. • Für vortuelle Gegenstände ist $g < 0$ und $G < 0$.	$g = \overline{H_1G}$ $b = \overline{H_2B}$ $f = \overline{H_1F_1}$ $f = \overline{H_2F_2}$ $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ $\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$ $\beta = \frac{B}{G}$	g Gegenstandsweite $[m]$ b Bildweite $[m]$ f Brennweite $[m]$ H_1 vorderer Hauptpunkt H_2 hinterer Hauptpunkt F_1 vorderer Brennpunkt F_2 hinterer Brennpunkt G Gegenstandsgrösse $[m]$ B Bildgrösse $[m]$ β Abbildungsverhältnis $[1]$

1.5.2. Spiegel

Parabolspiegel

Bei Parabolspiegeln treffen sich alle paralell einfallenden Strahlen in einem Punkt (Brennpunkt) auf der optische Achse.

Elliptische Spiegel

Alle Strahlen die vom einen Brennpunkt ausgesendet werden, treffen auf den zweiten Brennpunkt. (Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant ist.)

Hyperbolische Spiegel

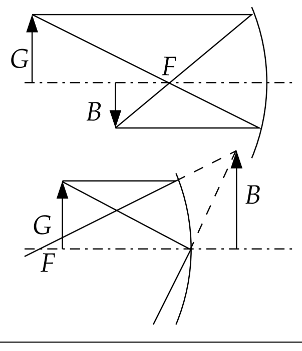
Alle Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgesendet werden, verlaufen nach der Reflexion so, als wären sie vom anderen der beiden Brennpunkte ausgesendet worden.(Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die die Differenz ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant ist.)

Sphärische Spiegel

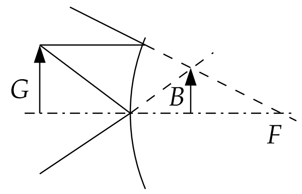
Die Spiegelnde Fläche ist ein Teil einer Kugel. Wenn nur ein kleiner Ausschnit der Kugelfläche verwendet wird, gehen parallel einfallende Strahlen näherungsweise durch einen Brennpunkt: $f = r/2$.

1.5.3. Abbildungen durch Spiegel

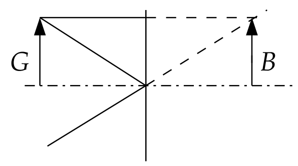
Konkavspiegel

	Befindet sich der Gegnstand ausserhalb der Brennweite, so entsteht ein reelles Bild, anderseits ist das Bild virtuell.	G Gegenstand $[m]$ B Bild $[m]$ F Brennpunkt

Konvexspiegel

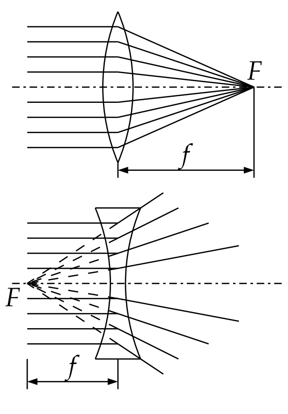
	Konvexspiegel haben stets virtuelle Bilder bei reellen Gegenständen.	G Gegenstand $[m]$ B Bild $[m]$ F Brennpunkt

Planspiegel

	Das Virtuelle Bild ist gleich gross wie der Gegenstand. Der Brennpunkt F liegt im Unendlichen. Der Planspiegel ist ein Spezialfall des Konvexspiegels.	G Gegenstand $[m]$ B Bild $[m]$ F Brennpunkt

1.5.4. Linsen

Linsentypen

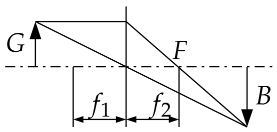
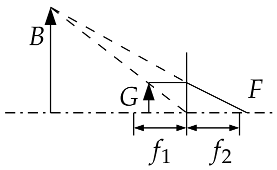
	$q = \frac{d}{f}$ $D = \frac{1}{f}$ Linsenschleifergleichung: $D = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$ Falls das Linsenmaterial optisch dichter ist als das umgebende Medium, zeigt die obere Abbildung eine Sammel- und die untere eine Streulinse.	q Öffnungsverhältnis $[m]$ d effektiver Durchm. $[m]$ f Brennweite $[m]$ D Brechkraft $[dpt]$ n_1 n-Umgebung $[1]$ n_2 n-Linse $[1]$ $r_{1,2}$ Linsenradien $[m]$

Linsensysteme

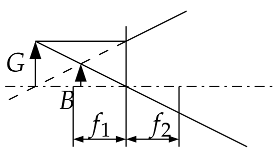
Zwei Linsen mit Brennweiten f_1 , f_2 auf einer Achse ergeben eine Linse mit Brennweite f, falls ihr Abstand d kleiner f_1 ist.	$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$ $D = D_1 + D_2 - dD_1D_2$	$f_{1,2}$ Brennweiten $[m]$ D Brechkraft $[dpt]$ d Linsenabstand $[m]$

1.5.5. Abbildungen durch Linsen

Sammellinse

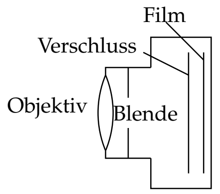
	Der Gegenstand ist innerhalb der Brennweite ⇒ reelles Bild.	G Gegenstand $[m]$ B Bild $[m]$ F Brennpunkt $f_{1,2}$ Brennweiten $[m]$
	Der Gegenstand ist ausserhalb der Brennweite ⇒ virtuelles Bild.	

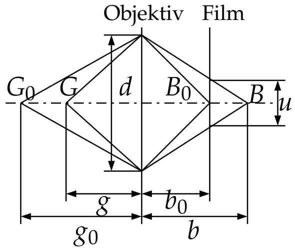
Zerstreuungslinse

	Bei Zerstreuungslinsen haben reelle Gegenstände stets virtuelle Bilder, unabhängig von ihrer Position.	G Gegenstand $[m]$ B Bild $[m]$ F Brennpunkt $f_{1,2}$ Brennweiten $[m]$

1.5.6. Optische Geräte

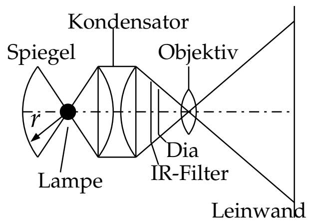
Fotoapparat

<table>
<tr>
<td>




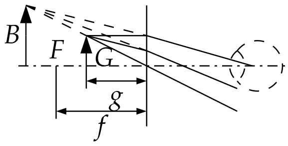
</td>
<td>
$B = \frac{f}{g-f} G$
$I \approx d^2$
$H \approx \frac{1}{B^2} \approx \frac{d^2}{f^2}$
$E = Ht$
$q = \frac{d}{f} \qquad Z = \frac{1}{q}$
$E \approx q^2 t$
$\frac{u}{d} = \frac{b - b_0}{b}$
$\frac{1}{g} = \frac{1}{g_0} \pm \frac{u}{qf^2}$
$g > g_0 \Rightarrow - \qquad g < g_0 \Rightarrow +$
</td>
<td>
G Gegenstand $[m]$
g Gegenstandsweite $[m]$
g_0 Schärfentiefenbereich $[m]$
B Bildweite $[m]$
b Bild $[m]$
f Brennweite $[m]$
I Lichtstrom $[W]$
d Durchm. Eintrittspupille $[m]$
H Helligkeit $[\frac{W}{m^2}]$
q Öffnungsverhältnis $[1]$
Z Brendeneinstellung $[1]$
E Belichtung $[1]$
t Belichtungszeit $[s]$
u Durchm. Unschärfenkreis $[m]$
</td>
</tr>
</table>

Projektor

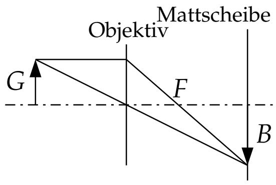
<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>
Das Dia wird im Objektiv abgebidet $\Rightarrow g_2 = b_1$
Das Bild der Lampe muss im Objektiv sein.
</td>
<td>
g_2 g-Objektiv $[m]$
b_1 b-Kondensator $[m]$
</td>
</tr>
</table>

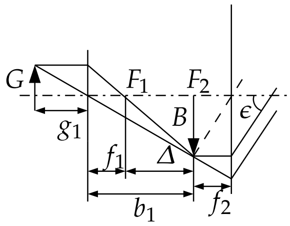
Lupe

 Sammellinse zur Vergrösserung des Sehwinkels (Bild im Unendlichen)	Gegenstand in Brennweite ⇒ Sehwinkel ϵ ist unabhängig von der Augenposition $V = \frac{\tan\epsilon}{\tan\epsilon_0}$ $V = \frac{s}{g} > V_{normal}$ $\tan\epsilon' = \frac{G}{f}$ $\tan\epsilon_0 = \frac{G}{s}$ $V = \frac{s}{f}$	G Gegenstand $[m]$ g Gegenstandsweite $[m]$ B Bildweite $[m]$ b Bild $[m]$ f Brennweite $[m]$ ϵ Sehwinkel durch Lupe $[rad]$ ϵ_0 Sehwinkel ohne Lupe $[rad]$ s deutliche Sehweite $[m]$ V Vergrösserung (max. ca. 25) $[1]$

Mikroprojektor

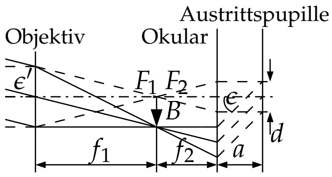
 Das reelle Bild einer Sammellinse wird verwendet und auf einer Mattscheibe abgebildet	Bild aus deutlicher Sehweite betrachtet: $V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$ Stahlengang siehe Projektor	G Gegenstand $[m]$ g Gegenstandsweite $[m]$ B Bildweite $[m]$ b Bild $[m]$ V Vergrösserung $[1]$

Mikroskop

<table>
<tr>
<td>


Das Objektiv verhält sich wie ein Mikroprojektor. Sein Bild wird durch das Okular, welches sich wie eine Lupe verhält, betrachtet.
</td>
<td>
$V = V_1 V_2$
$V = \frac{\tan\epsilon}{\tan\epsilon_0}$
$V = \frac{B}{G}\frac{f}{f_2}$
$V = \frac{\Delta}{f_1}\frac{s}{f_2}$
$V_1 = \frac{\Delta}{f_1}$
$V_2 = \frac{s}{f_2}$
$\Delta = b_1 - f_1$
</td>
<td>
G Gegenstand $[m]$
g_1 Gegenstandsweite $[m]$
B Bild $[m]$
b_1 Bildweite $[m]$
F_1 Brennpunkt Objektiv
F_2 Brennpunkt Okular
f_1 Brennweite Objektiv $[m]$
f_2 Brennweite Okular $[m]$
Δ Tubuslänge $[m]$
ϵ Sehwinkel $[rad]$
s deutliche Sehweite $[m]$
V Vergrösserung total $[1]$
V_1 V-Objektiv $[1]$
V_2 V-Okular $[1]$
</td>
</tr>
</table>

Fernrohre



Ein Fernglas mit den Daten 10×50 hat eine Vergrösserung von 10 und einen Objektivdurchmesser von 50 mm.

$$V = \frac{\tan \epsilon}{\tan \epsilon_0}$$

$$\epsilon = V\epsilon'$$

$$V = \frac{f_1}{f_2}$$

$$\frac{1}{f_1 + f_2} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{D}{d} = \frac{f_1 + f_2}{a} = V$$

$$a = \frac{l}{V} \qquad d = \frac{D}{V}$$

$$L = d^2$$

$$L = \left(\frac{D}{V}\right)^2$$

$$l = f_1 + f_2$$

B	Bildweite	$[m]$
f_1	Brennweite Objektiv	$[m]$
f_2	Brennweite Okular	$[m]$
l	Fernrohrlänge	$[m]$
ϵ	Ausfallswinkel	$[rad]$
ϵ'	Einfallswinkel	$[rad]$
s	deutliche Sehweite	$[m]$
V	Vergrösserung total	$[1]$
L	Lichtstärke	$[1]$
D	Durchm. Objektiv	$[m]$
d	Durchm. Austrittspupille	$[mm]$
a	Abstand Okular Astrittspupille	$[m]$

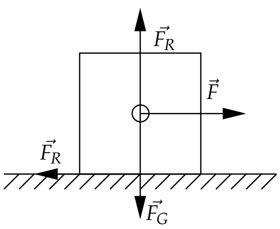
2. Statik

2.1. Starre Körper im Gleichgewicht

2.1.1. Gleichgewichtsbedingung starrer Körper

Ein Körper ist dann im Gleichgewicht, wenn keine resultierende Kraft auf ihn wirkt, d.h. die Summe der ihn angreifenden Kräfte ist null.	Allgemein: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{M_i} = 0$ In Komponenten: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_{ix}} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{M_{ix}} = 0$ $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_{iy}} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{M_{iy}} = 0$ $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_{iz}} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{M_{iz}} = 0$	F Kraft $[N]$ M Drahmoment $[Nm]$

2.1.2. Haftreibung

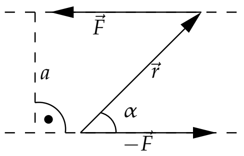
	$\vec{F_N} = \vec{F_G} \qquad \vec{F_R} = \vec{F}$ $\vec{F_R} \leq \vec{F_{Rmax}} \leq \mu_H F_N$	F Kraft $[N]$ F_G Gewichtskraft $[N]$ F_N Normalkraft $[N]$ F_R Reibkraft $[N]$ μ_H Haftreibungskoeffizient $[1]$

2.1.3. Reaktionsprinzip

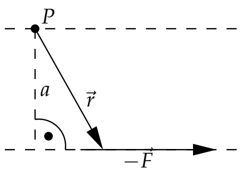
Das Reaktionsprinzip gilt, wenn zwei Körper Kräfte auf einander ausüben.	$\vec{F_{BA}} = -\vec{F_{AB}}$	F_{AB} Kraft von Körper A $[N]$ F_{BA} Kraft von Körper B $[N]$

2.1.4. Drehmoment

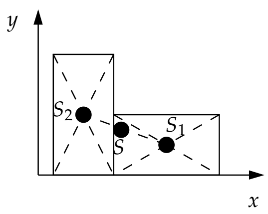
Drehmoment eines Kräftepaars

	$M = aF$ $\vec{M} \perp$ auf Ebene $\vec{r}$, $\vec{F}$: $M = Fr\sin(\alpha)$ Drehmomente nicht in einer Ebene: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ Drehsinn im Gegenuhrzeigersinn: +	M Drehmoment $[Nm]$ a Abstand $[m]$ F Kraft $[N]$ r Radius $[m]$

Drehmoment einer Einzelkraft

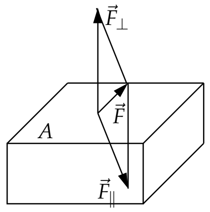
	$M = aF$ $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	M Drehmoment $[Nm]$ a Abstand $[m]$ F Kraft $[N]$ r Radius $[m]$

2.2. Schwerpunkt

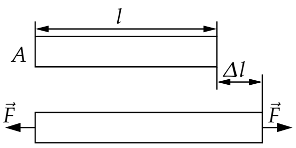
	$x_s = \frac{\sum_i x_i m_i}{\sum_i m_i}$ $y_s = \frac{\sum_i y_i m_i}{\sum_i m_i}$ $z_s = \frac{\sum_i z_i m_i}{\sum_i m_i}$ Schwerpunkt eines Halbkreises: $x = 0 \qquad y = \frac{4r}{3\pi}$	x_s, y_s, z_s Koordinaten des Gesamtschwerpunktes $[m]$ x_i, y_i, z_i Schwerpunktskoordinaten Teilkörper i $[m]$ r Radius $[m]$

2.3. Deformierung

2.3.1. Spannung

	$\sigma = \frac{F_\perp}{A}$ $\tau = \frac{F_\parallel}{A}$ $p = -\sigma$	σ Zugspannung $[\frac{N}{m^2}]$ τ Schubspannung $[\frac{N}{m^2}]$ p Druck $[\frac{N}{m^2}]$ A Fläche $[m^2]$ F Kraft $[N]$

2.3.2. Dehnung

	$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ $\Delta l \sim \frac{lF}{A}$ $\epsilon = \frac{1}{E}\sigma = \frac{1}{E}\frac{F}{A}$	ϵ Dehnung $[1]$ A Querschnittsfläche $[m^2]$ l Balkenlänge $[m]$ F Kraft $[N]$ E Elastizitätsmodul $[\frac{N}{m^2}]$ σ Zugspannung $[\frac{N}{m^2}]$

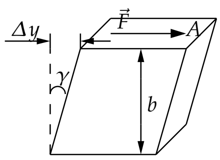
2.3.3. Querkontraktion

Die Querkontraktion entspricht dem Dünnenrwerden eines Materials bei Dehnung	$\epsilon_q = \frac{\Delta d}{d} = \frac{-\mu \Delta l}{l}$ $\epsilon_q = -\mu\epsilon$	ϵ_q Querkontraktion $[1]$ μ Poissonzahl $[1]$ d Dicke Material $[m]$ l Länge $[m]$

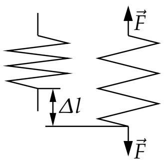
2.3.4. Kompression

Wird ein Körper einem Druck ausgesetzt, spricht man von Kompression	$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \Delta p$ $\kappa = \frac{3(1-2\mu)}{E}$	V p κ μ E	Volumen Druck Kompressibilität Poissonzahl E-Modul	$[m^3]$ $[\frac{N}{m^2}]$ $[\frac{m^2}{N}]$ $[1]$ $[\frac{N}{m^2}]$

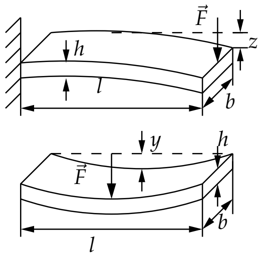
2.3.5. Schubbeanspruchung

	$\frac{\Delta y}{b} = \frac{1}{G}\frac{F}{A} = \frac{1}{G}\tau$ $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$	F A y γ b G τ μ E	Kraft Fläche Spaltbreite Winkel Körperbreite Schubmodul Schubspan. Poissonzahl E-Modul	$[N]$ $[m^2]$ $[m]$ $[rad]$ $[m]$ $[\frac{N}{m^2}]$ $[\frac{m}{m^2}]$ $[1]$ $[\frac{N}{m^2}]$

2.3.6. Schraubenfeder

	$F = c\Delta l$ $c = \frac{Gr^4}{4nR^3}$ parallel: $c = c_1 + c_2 + ... + c_n$ seriel: $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + ... + \frac{1}{c_n}$	F c l G r R n	Kraft Federkonst. Länge Schubmodul Radius Draht Radius Feder Windungen	$[N]$ $[\frac{N}{m}]$ $[N]$ $[\frac{N}{m^2}]$ $[m]$ $[m]$ $[1]$

2.3.7. Biegung eines Balkens

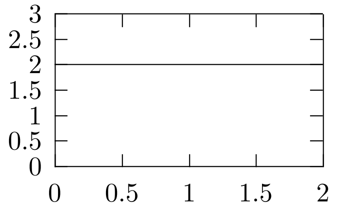
	$z = \frac{4l^3}{Ebh^3}F$ $y = \frac{5\rho g l^4}{32Eh^2}$	z Durchbiegung $[m]$ y Durchbiegung $[m]$ l Länge $[m]$ b Balkenbreite $[m]$ h Balkenhöhe $[m]$ F Kraft $[N]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ g Erdanziehung $= 9,81$ $[\frac{m}{s^2}]$ E Elastizitätsmodul $[\frac{N}{m^2}]$

2.4. Vorgehen beim Lösen von Statikaufgaben

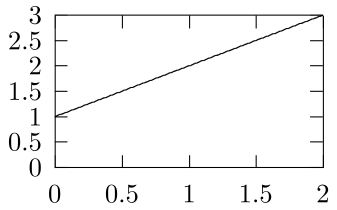
1. Skizze mit allen Kräften aufzeichnen
2. Koordinatensystem einführen
3. Falls notwendig einen Drehpunkt einführen
4. Gleichgewichtsbedingungs - Gleichungssystem aufstellen
5. Gleichungssystem auflösen

3. Kinematik

3.1. Gleichförmige Bewegung

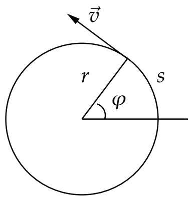
	$a = 0$	a	Beschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$
	$v = konstant$	s	Strecke	$[m]$
	$s = vt + s_0$	v	Geschw.	$[\frac{m}{s}]$
		t	Zeit	$[s]$
		s_0	Anfangs Strecke	$[m]$

3.2. Gleichförmig beschleunigte Bewegung

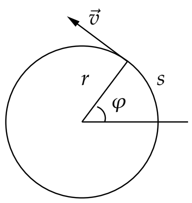
	$a = konstant$	a	Beschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$
	$v = at + v_0$	s	Strecke	$[m]$
	$v = \dot{s}$	v	Geschw.	$[\frac{m}{s}]$
	$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + s_0$	v_0	Start-Geschw.	$[\frac{m}{s}]$
	$s = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a}$	v_1	End-Geschw.	$[\frac{m}{s}]$
	$a = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2s} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	t	Zeit	$[s]$
	$a = \dot{v} = \ddot{s}$	s_0	Anfangs Strecke	$[m]$
	$v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2as}$			

3.3. Drehbewegung

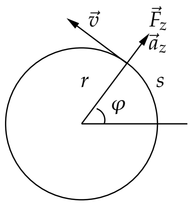
3.3.1. Gleichförmige Kreisbewegung

 Analogie: $s \rightarrow \varphi$ $v \rightarrow \omega$ $a \rightarrow \alpha$	$\alpha = 0$ $s = r\varphi$ $v = r\omega$ $\omega = \dot{\varphi} = \frac{v}{r}$ $\varphi = \omega t$ $f = \frac{1}{T}$ $\omega = 2\pi f$ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	α Winkel-Beschleunigung $[\frac{rad}{s^2}]$ ω Winkel-Geschw. $[\frac{rad}{s}]$ φ Winkel $[rad]$ r Radius $[m]$ T Periode $[s]$ f Frequenz $[\frac{1}{s}]$ s Strecke $[m]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$ t Zeit $[s]$ s_0 Anfangs Strecke $[m]$ v Geschw. tang. $[\frac{m}{s}]$

3.3.2. Gleichförmig beschleunigte Kreisbewegung

	$\alpha = konstant$ $\alpha = \dot{\omega}$ $\alpha = \ddot{\varphi}$ $a = r\alpha$ $\omega = \alpha t + \omega_0$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha(\varphi - \varphi_0)}$ $\varphi = \frac{\alpha}{2}t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$ $\varphi = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$	α Winkel-Beschleunigung $[\frac{rad}{s^2}]$ ω Winkel-Geschw. $[\frac{rad}{s}]$ ω_0 Sart-Winkel-Geschw. $[\frac{rad}{s}]$ ω_1 End-Winkel-Geschw. $[\frac{rad}{s}]$ φ Winkel $[rad]$ φ_0 Start-Winkel $[rad]$ r Radius $[m]$ t Zeit $[s]$ a Beschleunigung $[\frac{m}{s^2}]$

3.3.3. Zentripetalbeschleunigung



$$a_z = \frac{v^2}{r}$$

$$a_z = r\omega^2$$

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

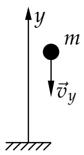
$$F_z = ma_z = \frac{mv^2}{r}$$

$$F_z = m\omega^2 r$$

α_z	Zentr.-Beschleunigung	$[\frac{rad}{s^2}]$
ω	Winkel-Geschw.	$[\frac{rad}{s}]$
φ	Winkel	$[rad]$
r	Radius	$[m]$
T	Periode	$[s]$
v	Geschw.	$[\frac{m}{s}]$
m	Masse	$[kg]$

3.4. Wurfbahnen

3.4.1. Freier Fall



$$a_y = -g$$

$$v_y = -gt$$

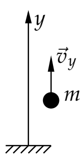
$$v_e = \sqrt{2gh}$$

$$y = -\frac{g}{2}t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

v_0	Abschuss-Geschw.	$[\frac{m}{s}]$
t	Zeit	$[s]$
t_s	Steigzeit	$[s]$
t_f	Flugzeit	$[s]$
h	Höhe	$[m]$
g	Erdbeschl. = 9.81	$[\frac{m}{s^2}]$

3.4.2. Senkrechter Wurf



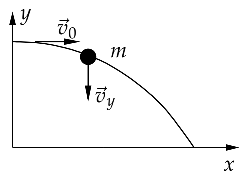
$$t_s = \left|\frac{v_0}{g}\right|$$

$$h = \frac{v_0 t}{2} = \left|\frac{v_0^2}{2g}\right|$$

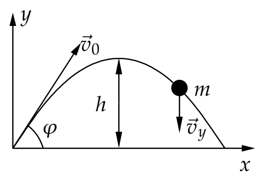
$$t_f = 2t_s$$

v_0	Abschuss-Geschw.	$[\frac{m}{s}]$
t_s	Steigzeit	$[s]$
t_f	Flugzeit	$[s]$
h	Höhe	$[m]$
g	Erdbeschl. = 9.81	$[\frac{m}{s^2}]$

3.4.3. Horizontaler Wurf

	$a_x = 0 \rightarrow v_x = v_0$ $s_x = v_0 t$ $s_x = \sqrt{\frac{2v_0^2 y}{g}}$ $a_y = -g \rightarrow v_y = -gt$ $s_y = -\frac{g}{2}t^2$ $s_y = -\frac{g}{2v_0^2}s_x^2$	a Beschl. $[\frac{m}{s^2}]$ s Strecke $[m]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$ v_0 Start-Geschw. $[\frac{m}{s}]$ t Zeit $[s]$ g Erdbeschl. $=$ 9.81 $[\frac{m}{s^2}]$

3.4.4. Schiefer Wurf

	$a_y = -g \qquad a_x = 0$ $d = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\varphi)$ $h = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2(\varphi)$ $t = \frac{2v_0\sin(\varphi)}{g}$ $\Delta y = v_0\sin(\varphi)t - \frac{gt^2}{2}$ $\Delta x = v_0\cos(\varphi)t$ Parabelgleichung: $y = \tan(\varphi)s_x - \frac{gs_x^2}{2v_0^2\cos^2(\varphi)}$	a Beschl. $[\frac{m}{s^2}]$ d Wurfdistanz $[m]$ s Strecke $[m]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$ v_0 Start-Geschw. $[\frac{m}{s}]$ t Zeit $[s]$ φ Abschuss-winkel $[rad]$ g Erdbeschl. $=$ 9.81 $[\frac{m}{s^2}]$

4. Dynamik

4.1. Newtonsche Gesetze

4.1.1. Erstes Newtonsches Gesetz (Trägheitsgesetz)

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern. Die Gesamtsumme der Kräfte in einem abgeschlossenen System ist unveränderlich:

$$F = \sum_i F_i = 0$$

4.1.2. Zweites Newtonsches Gesetz (Aktionsgesetz)

Die Beschleunigung eines Körpers ist umgekehrt proportional zu seiner Masse und direkt proportional zur Kraft, die auf ihn wirkt.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

4.1.3. Drittes Newtonsches Gesetz (Actio = Reactio)

Wirkt ein Körper A auf einen Körper B mit der Kraft $\vec{F_{AB}}$, so wirkt der Körper B mit der entgegengesetzt gerichteten, gleich grossen Kraft $\vec{F_{BA}}$.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = ma_x\vec{a} \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = ma_y\vec{a} \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = ma_z\vec{a}$$

4.1.4. Allgemeines Vorgehen beim lösen von Bewegungsproblemen

1. Zeichnung anfertigen

2. Für jeden Körper, der untersucht werden soll, wird ein Kräftediagramm eingezeichnet

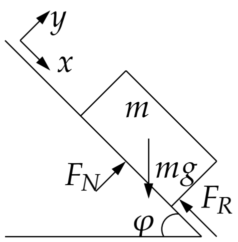
3. Ein geeignetes Koordinatensystem einführen

4. Das entstandene Gleichungssystem auflösen

5. Ergebnisse mit gesundem Menschenverstand auflösen

4.2. Masse und Gewicht

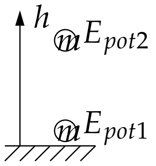
4.2.1. Spezielle Kräfte, Masse, Dichte und Reibung

	$F_G = mg$ $F_R = \mu_G F_N$ $\rho = \frac{m}{V}$ $\mu = -\frac{a}{g}$ $\mu_H = \tan(\varphi_{krit})$ $F_{Hmax} = \mu_H F_N$	F_G Gewichtskraft $[N]$ F_R Reibungskraft $[N]$ F_N Normalkraft $[N]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ μ Reibung $[1]$ μ_G Gleitreibung $[1]$ μ_H Haftreibung $[1]$ φ_{krit} kritiesscher Winkel $[rad]$ F_{Hmax} Max. Haftreibungskraft $[N]$ a Beschleunigung $[\frac{m}{s^2}]$ g Fallbeschleunigung $[\frac{m}{s^2}]$ m Masse $[kg]$ V Volumen $[m^3]$

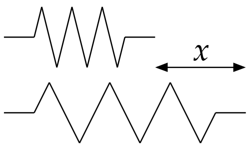
4.3. Arbeit und Energie, Energieerhaltung

Energie ist die Fähigkeit Arbeit zu leisten. Arbeit = überwinden eines Widerstandes	$dW = \vec{F} \cdot \vec{ds}$ $W = Pt$ Energieerhaltung im abgeschlossenen System: $\sum_i E_i = const.$	W Arbeit $[J]$ E Energie $[J]$ F Kraft $[N]$ s Weg $[m]$ t Zeit $[s]$

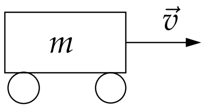
4.3.1. Hubarbeit, Potentielle Energie

	$E_{pot} = mgh$ $W_H \vec{F} \cdot \vec{h}$ $E_{pot} = W_H$	E_{pot} potentielle Energie $[J]$ W_H Hubarbeit $[J]$ m Masse $[kg]$ g Fallbeschleunigung $[\frac{m}{s^2}]$ h Höhe $[m]$

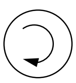
4.3.2. Spannarbeit, Spannenergie

	$E_s = \frac{cx^2}{2}$ $W_s = \vec{F} \cdot \vec{x}$ $E_s = W_s$	E_s Spannenergie $[J]$ W_s Spannarbeit $[J]$ c Federkonst. $[\frac{N}{m}]$ x Spann-Weg $[m]$ F Spannkraft $[N]$

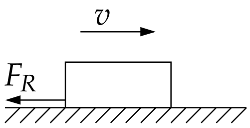
4.3.3. Beschleunigungsarbeit, Kinetische Energie

	$E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$ $W_B = \frac{m(\Delta v)^2}{2}$	E_{trans} Translationsenergie $[J]$ W_B Beschleunigungsarbeit $[J]$ m Masse $[kg]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$

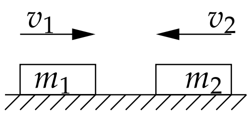
4.3.4. Rotationsenergie

	$E_{rot} = \frac{1}{2} J\omega^2$	E_{rot} Rotationsenergie $[J]$ J Masseträgheit $[kgm^2]$ ω Winkelgeschw. $[\frac{rad}{s}]$

4.3.5. Reibungsarbeit

	$W_R = F_R s$	W_R Reibarbeit $[J]$ F_R Reibkraft $[N]$ s Strecke $[m]$

4.3.6. Verformungsarbeit

	Inelastisch: $W_D = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$ Elastisch: $W_D = \frac{F_1 + F_2}{2} \Delta s$	W_D Deformationsarbeit $[J]$ m_1, m_2 Massen $[kg]$ v_1, v_2 Geschw. $[\frac{m}{s}]$ F_1, F_2 Kräfte $[N]$

4.3.7. Einstein, Kernbindungsenergie

	$E = mc^2$	E Energie $[J]$ m Masse $[kg]$ c v $_{Licht}$ $= 299'792'458$ (Vakuum) $[\frac{m}{s}]$

4.4. Leistung

	$P = \frac{dW}{dt}$ $P = \frac{Fds}{dt} = \vec{F}\vec{s}$ $P = M\omega$	P Leistung $[W]$ W Energie $[J]$ t Zeit $[s]$ F Kraft $[N]$ s Strecke $[m]$ M Drehmoment $[Nm]$ ω Winkelgeschwindigkeit $[\frac{rad}{s}]$

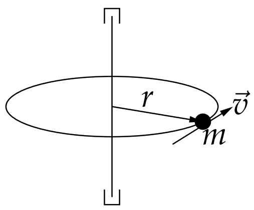
4.5. Wirkungsgrad

	$\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} = \frac{p_{ab}}{P_{zu}}$ $\eta_{tot} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots$	η Wirkungsgrad $[1]$ P_{ab} P-Abgeg. $[W]$ P_{zu} P-Aufge. $[W]$ W_{ab} W-Abgeg. $[J]$ W_{zu} W-Aufge. $[J]$

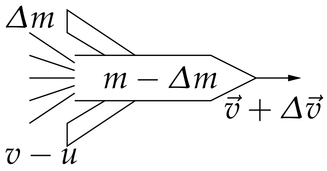
4.6. Impuls, Impulserhaltung

Impulserhaltungssatz: Im abgeschlossenen System bleibt der Impuls konstant	$\vec{p} = m\vec{v}$ $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ $p_{ges} = \sum_{i=1}^{n} m_i v_s$ Kraftstoss: $\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$	p Impuls $[\frac{kgm}{s}]$ m Masse $[kg]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$ F Kraft $[N]$ Δt Wirkungs-dauer $[s]$

4.6.1. Drehimpuls

	$L = mvr\sin(\varphi)$ $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $L = J\omega$ $\vec{M} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	L Drehimpuls $[\frac{kgm}{s}]$ m Masse $[kg]$ r Radius $[m]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$ ω Winkelgeschw. $[\frac{rad}{s}]$ M Drehmoment $[Nm]$

4.6.2. Raketenantrieb

	$v = u \ln \frac{m_0}{m} + v_0$ $F_s = \frac{dm}{dt} u$ Spezifischer Impuls: $T = \frac{u}{g}$	v Geschw. $[\frac{m}{s}]$ u v-Strahl relativ zu Rakete $[\frac{m}{s}]$ m_0 Startmasse $[kg]$ m Masse $[kg]$ F_s Schubkraft $[N]$ T Zeit $[s]$ g Erdbeschl. $[\frac{m}{s^2}]$

4.6.3. Inelastischer Stoss

	$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$	v' Geschw. nach Stoss $[\frac{m}{s}]$ $v_{1,2}$ v vor Stoss $[\frac{m}{s}]$ $m_{1,2}$ Massen $[kg]$

4.6.4. Elastischer Stoss

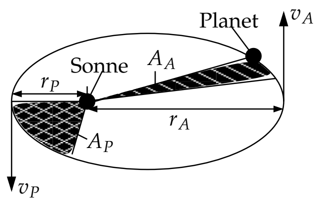
	$v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2')$ $v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ $v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_2}{m_1 + m_2}$ $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$	$v_{1,2}'$ Geschw. nach Stoss $[\frac{m}{s}]$ $v_{1,2}$ v vor Stoss $[\frac{m}{s}]$ $m_{1,2}$ Massen $[kg]$

4.7. Analogie Translation und Rotation

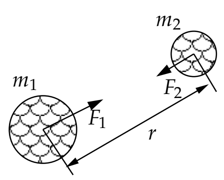
Translation			Rotation		
Symb	Grösse	Beziehung	Symb	Grösse	Beziehung
s	Weg		φ	Winkel	
v	Geschwindigkeit	$v = \frac{ds}{dt}$	ω	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
a	Beschleunigung	$a = \frac{dv}{dt}$	α	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
m	Masse		J	Trägheitsmoment	$J = \int r^2 dm$
p	Impuls	$p = mv$	L	Drehimpuls	$L = J\omega$
F	Kraft	$F = \frac{dp}{dt}$	M	Drehmoment	$M = \frac{dL}{dt}$
dW	Arbeit	$dW = \vec{F}\vec{ds}$	dW	Arbeit	$dW = Md\varphi$
P	Leistung	$P = \vec{F}\vec{v}$	P	Leistung	$P = M\omega$
E_{trans}	Translationsenergie	$E_{trans} = \frac{mv^2}{2}$	E_{rot}	Rotationsenergie	$E_{rot} = J\omega^2 2$

4.8. Gravitation und Masse

4.8.1. Keplersche Gesetze (→ Bewegung der Planeten)

1. Keplergesetz	Die Planeten bewegen sich auf Elypsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. (Bahn ist eben)	$v_{P,A}$ Bahngeschw. $[\frac{m}{s}]$ $r_{P,A}$ Elypsen-Radien $[m]$ T Umlaufdauer Planet $[s]$ C Konstante $[1]$ r mitlerer Abstand $[m]$ v_K Kreisbahngeschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$ G Gravitationskonstante $= 6.673 \cdot 10^{-11}$ $[\frac{m^3}{kgs^2}]$
2. Keplergesetz 	Der Fahrstrahl des Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. $v_P r_P = v_A r_A$ $A_P = A_A$	
3. Keplergesetz	Das Quadrat der Umlaufdauer eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz seiner mittleren Entfernung zur Sonne. $T^2 = Cr^3$ $t = \frac{4\pi}{GM_{Sonne}} r^3$ Planetengeschwindigkeit: $v_K = \frac{2\pi r}{T}$ $v_K = \sqrt{\frac{gM_{Sonne}}{r}}$	

4.8.2. Newtonsches Gravitationsgesetz

	$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ $g = G\frac{m_E}{r^2} = \frac{F}{m}$	F Anziehungskraft $[N]$ $m_{1,2}$ Körpermasse $[kg]$ r Abstand $[m]$ G Gravitationskonstante $= 6.673 \cdot 10^{-11}$ $[\frac{m^3}{kgs^2}]$ g Erdbeschl. $[\frac{m}{s^2}]$

4.8.3. Potentielle Energie im Gravitationsfeld einer Zentralmasse

	$E_{pot} = -G\frac{m_Z m}{r}$ $\varphi = -\frac{Gm_Z}{r}$	m_Z m-Zentralmasse $[kg]$ m Körpermasse $[kg]$ φ Gravitations-potential $[\frac{m^2}{s^2}]$ G Gravitations-konstante $= 6.673 \cdot 10^{-11}$ $[\frac{m^3}{kgs^2}]$

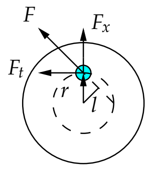
4.8.4. Fluchtgeschwindigkeit

Die Bahn ist eine Parabel	$v_F = \sqrt{2\frac{Gm_Z}{r_0}}$ $v_F = \sqrt{2}v_K$	v_F Fluchtgeschw. $[\frac{m}{s^2}]$ v_K Kreisbahngeschwindigkeit $[\frac{m}{s^2}]$ m_Z m-Zentralmasse $[kg]$ r_0 Abstand $[m]$ G Gravitations-konstante $= 6.673 \cdot 10^{-11}$ $[\frac{m^3}{kgs^2}]$

4.8.5. Geostationäre Bahn

Ein geostationärer Satellit scheint von der Erde aus gesehen still zu stehen.	$r = \sqrt[3]{\frac{Gm_P t^2}{4\pi^2}}$	r Bahnradius $[m]$ m_P m-Planet $[kg]$ t Umlaufzeit $[s]$ G Gravitations-konstante $= 6.673 \cdot 10^{-11}$ $[\frac{m^3}{kgs^2}]$

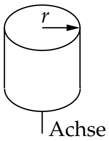
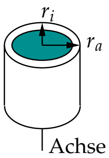
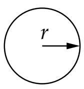
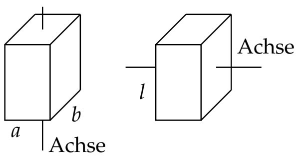
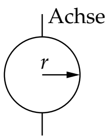
4.9. Rotation und Massenträgheitsmoment

	$M = F_t l = Fr\sin(\varphi)$ $M = J\frac{d\omega}{dt} = J\alpha$ $J = \sum_i m_i r_i^2$ Satz von Steiner: $J_A = J_S + md^2$	M Drehmoment $[Nm]$ F Kraft $[N]$ F_t F-tangential $[N]$ l Hebelarm $[m]$ J Massenträg-heitsmoment $[kgm^2]$ J_A J bez. Achse A $[kgm^2]$ J_S J bez. Schwp $[kgm^2]$ ω Winkelgeschw. $[\frac{rad}{s}]$ t Zeit $[s]$ d Abst. Drehp. $[m]$

4.9.1. Massenträgheitsmoment bei Getriebe

	$J_1 = \frac{J_2}{\eta_G}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \frac{J_2}{\eta_G}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$ $J_1 = \frac{J_2}{\eta_G i^2}$	J Massenträgheit $[kgm^2]$ ω Winkelgeschw. $[\frac{rad}{s}]$ n Drehzahl $[1]$ i Übersetzung $[1]$

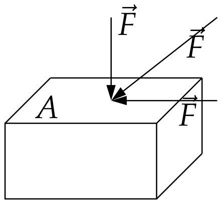
4.9.2. Massenträgheitsmomente oft verwendeter Körper

	Allgemein: $J = \int r^2 dm$
	Vollzylinder: $J = \frac{mr^2}{2}$
	Hohlzylinder: $J = \frac{m(r_a^2 + r_i^2)}{2}$
	Kugel: $J = \frac{2}{5}mr^2$
	Quader: $J = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$ Stange: $J = \frac{ml^2}{12}$
	Kreisscheibe: $J = \frac{mr^2}{4} = \frac{md^2}{16}$

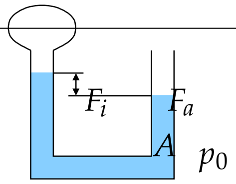
J	Massenträgheitsmoment	$[kgm^2]$
m	Masse	$[kg]$
r	Radius	$[m]$
a, b	Seite	$[m]$
l	Länge	$[m]$

5. Mechanik deformierbarer Körper

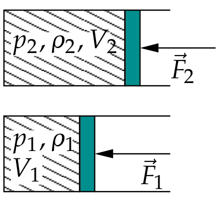
5.1. Druck

	$p = \frac{F}{A}$ $\tau = \frac{F}{A}$	p Druck $[Pa]$ F Kraft $[N]$ A Fläche $[m^2]$ τ Schubspannung $[Pa]$

5.1.1. Absoluter Druck Überdruck

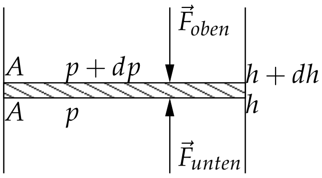
	$\Delta p = p - p_0$ $F = F_i - F_a$ $F = pA - p_0 A$	p Druck $[Pa]$ p_0 Aussendruck $= 1,013 \cdot 10^5$ $[Pa]$ F_i, F_a Kraft innen, aussen $[N]$ A Fläche $[m^2]$

5.2. Kompression

 Ideale Fluide sind inkompressibel und reibungsfrei, Gase können zusammengedrückt werden.	$\kappa = \frac{-1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p}$ $K = \frac{1}{\kappa}$ ideales Gas: $pV = konst.$ $p_1 V_1 = p_2 V_2$	κ Kompressibilität $[\frac{1}{Pa}]$ K Kompressionsmodul $[Pa]$ p Druck $[Pa]$ V Volumen $[m^3]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$

5.3. Hydrostatik

5.3.1. Schweredruck

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$dp = -\rho \cdot g \cdot dh$ (h positiv nach oben)

Bei Flüssigkeiten:

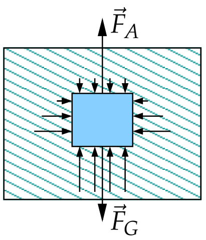
$p = \rho g h + p_0$ (h positiv nach unten)

$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p(h)}{\rho(h)}$

Bei Gasen:

$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g h}$</td>
<td>p Druck $[Pa]$
p_0 Druck bei $h = 0$ $[Pa]$
ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$
ρ_0 Dichte bei $h = 0$ $[\frac{kg}{m^3}]$
h Höhe $[m]$
g Erdbeschleunigung $= 9.81$ $[\frac{m}{s^2}]$</td>
</tr>
</table>

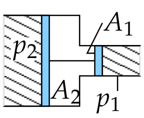
5.3.2. Statischer Auftrieb

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$F_A = \rho_{Fl} V_K g - \rho_K V_K g$

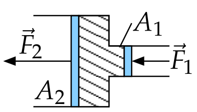
$F_A = m_{Fl} g - m_K g$

$F_A = A \rho_{Fl} g \Delta h$</td>
<td>F_A Auftriebskraft $[N]$
ρ_{Fl} Dichte Fluid $[\frac{kg}{m^3}]$
ρ_K Dichte Körper $[\frac{kg}{m^3}]$
m_{Fl} Masse Fluid $[kg]$
m_K Masse Körper $[kg]$
A Fläche Körper $[m^2]$
g Erdbeschleunigung $= 9.81$ $[\frac{m}{s^2}]$</td>
</tr>
</table>

5.3.3. Druckwandler

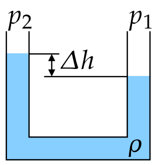
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$\frac{p_1}{p_2} = \frac{A_2}{A_1}$</td>
<td>p Druck $[Pa]$
A Fläche $[m^2]$</td>
</tr>
</table>

5.3.4. Kraftwandler

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$</td>
<td>F Kraft $[N]$
A Fläche $[m^2]$</td>
</tr>
</table>

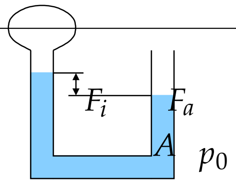
5.3.5. Druckmessung

Manometer



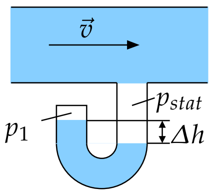
$\Delta p = p_1 - p_2$ $\Delta p = \rho g \Delta h$	p Druck $[Pa]$ h Höhe $[m]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$

Absoluter Druck



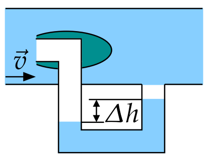
$p_a = \rho g \Delta h$	p Druck $[Pa]$ h Höhe $[m]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ g Erdbeschl. $=$ 9.81 $[\frac{m}{s^2}]$

Statischer Druck (Druck auf Rohrwand)



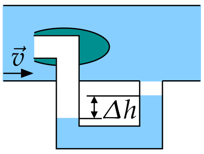
$p_{stat} = p_1 + \rho g \Delta h$ Falls oben offen: $p_1 = p_0$	p Druck $[Pa]$ p_0 Aussendruck $= 1.013 \cdot 10^5$ $[Pa]$ h Höhe $[m]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ g Erdbeschl. $=$ 9.81 $[\frac{m}{s^2}]$

Dynamischer Druck

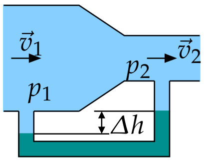


$p_{ges} = \rho g \Delta h$	p Druck $[Pa]$ h Höhe $[m]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ g Erdbeschl. $=$ 9.81 $[\frac{m}{s^2}]$

Gesamtdruck

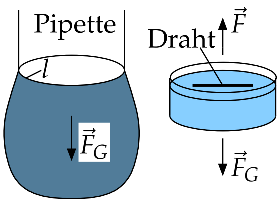
	$p_{dyn} = \rho g \Delta h$ Strömgeschwindigkeit: $v = \sqrt{\dfrac{2p_{dyn}}{\rho}}$	p Druck $[Pa]$ h Höhe $[m]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ g Erdbeschl. 9.81 $= [\frac{m}{s^2}]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$

Druckdifferenzen

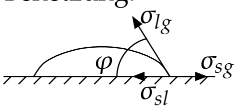
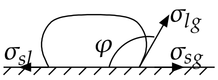
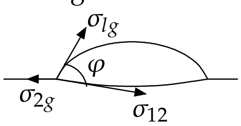
 Venturirohr	$\Delta p = p_1 - p_2$ $\Delta p = \rho g \Delta h$ Strömgeschwindigkeit: $v_1 = \sqrt{\dfrac{2\Delta p}{\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]\rho}}$	p Druck $[Pa]$ h Höhe $[m]$ A Fläche $[m^2]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ g Erdbeschl. 9.81 $= [\frac{m}{s^2}]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$

5.3.6. Grenzflächeneffekte

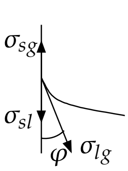
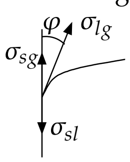
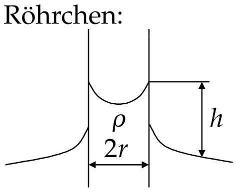
Oberflächenspannung

	$\sigma = \dfrac{F}{l}$ $\sigma = \dfrac{\Delta W}{\Delta A}$ Kraft um Draht zu heben: $F = 2\sigma l + m_{Drath} g$	σ Oberflächen-spannung $[\frac{N}{m}]$ F Kraft $[N]$ l Länge $[m]$ A Kontaktfläche $[m^2]$ W Arbeit $[J]$ g Erdbeschl. 9.81 $= [\frac{m}{s^2}]$

Grenzflächenspannung

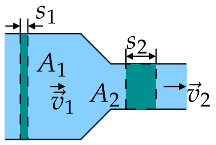
Flüssigkeit auf Festkörper Benetzung:  nicht Benetzung:  Flüssigkeit auf Flüssigkeit 	Benetzung: $\varphi < 90°$ Nicht Benetzung: $\varphi > 90°$ Flüssigkeit auf Festkörper $$\cos(\varphi) = \frac{\sigma_{sg} - \sigma_{sl}}{\sigma_{lg}}$$ Flüssigkeit auf Flüssigkeit $$\cos(\varphi) = \frac{\sigma_{2g}^2 - \sigma_{lg}^2 - \sigma_{-2}}{2\sigma_{lg}\sigma_{l2}}$$	φ Kontaktwinkel $[rad]$ σ Zugspannung $[\frac{N}{m}]$ σ_{sl} σ fest, flüssig $[\frac{N}{m}]$ σ σ fest, Gas $[\frac{N}{m}]$ σ σ flüssig, Gas $[\frac{N}{m}]$

Kapillarität

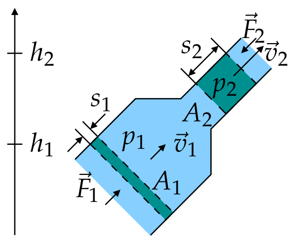
Benetzung:  Nicht Benetzung:  Röhrchen: 	$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$$	σ Zugspannung $[\frac{N}{m}]$ h Höhe $[m]$ r Radius $[m]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ g Erdbeschl. $=$ 9.81 $[\frac{m}{s^2}]$

5.4. Hydrodynamik

5.4.1. Kontinuitätsgleichung

 	$A_1 v_1 = A_2 v_2$ $\Delta V = A_1 v_1 \Delta t$ $\dot{V} = vA = konst$ $s_1 = v_1 \Delta t$ $s_2 = v_2 \Delta t$	A Fläche $[m^2]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$ s Strecke $[m]$ V Volumen $[m^3]$ t Zeit $[s]$

5.4.2. Bernoulli Gleichung (Energieerhaltung)

 	$\overbrace{p_1}^{p_{statisch}} + \overbrace{\frac{1}{2}\rho v_1^2}^{p_{dynamisch}} + \overbrace{gh_1\rho}^{p_{schwer}} = \underbrace{p_2}_{p_{statisch}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v_2^2}_{p_{dynamisch}} + \overbrace{gh_2\rho}^{}_{p_{schwer}}$ $p_1 + \frac{1}{2}\rho v^2 + gh\rho = konst.$ Mit Berücksichtigung der Reibung: $\overbrace{p_1}^{p_{statisch}} + \overbrace{\alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2}}^{p_{dynamisch}} + \overbrace{gh_1\rho}^{p_{schwer}} = \underbrace{p_2}_{p_{statisch}} + \underbrace{\alpha_2 \frac{\rho v_2^2}{2}}_{p_{dynamisch}} + \overbrace{gh_2\rho}^{}_{p_{schwer}}$ Laminar: $\alpha = 2$ Turbulent: $\alpha \approx 1$	p Druck $[Pa]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$ h Höhe $[m]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ F Kraft $[N]$ α Korrekturfaktor $[1]$

5.5. Reale Strömung

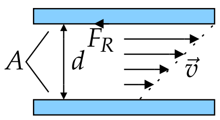
5.5.1. Zirkulation

	$\Gamma = \oint \vec{v} d\vec{s}$	Γ Zirkulation $[\frac{m^2}{s}]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$ s Strecke $[m]$

5.5.2. Vortizität

	$\vec{\omega} = rot\vec{v}$ Rotation der Geschwindigkeit	ω Vortizität $[\frac{1}{s}]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$

5.5.3. Newtonsches Reibungsgesetz

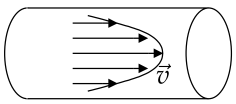
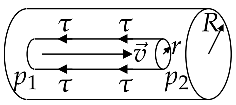
	$\tau = \eta \frac{dv}{dz}$ $\nu = \frac{\eta}{rho}$ $\varphi = \frac{1}{\eta}$	τ Schubspan. $[\frac{N}{m^2}]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$ η Dynamische Viskosität $[Pas]$ ν Kinetische Viskosität $[\frac{m^2}{s}]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ z Abst. Platten $[m]$ φ Fluidität $[\frac{1}{Pas}]$

5.6. Strömungsformen

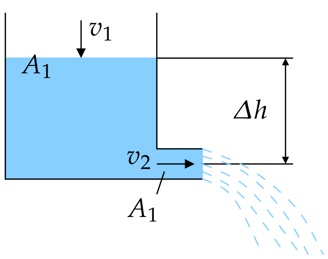
5.6.1. Raynolds-Zahl

	$Re = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{vL}{\nu}$ Im Rohr: $Re = \frac{\rho v d}{\eta} = \frac{vd}{\nu}$ $Re_{kritisch} = 2320$	Re Raynolds-Zahl $[1]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$ L Linearabm. $[m]$ d Rohr-$\emptyset$ $[m]$ η Dyn.Visk. $[Pas]$ ν Kin. Visk. $[\frac{m^2}{s}]$

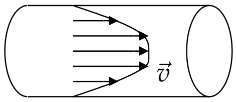
5.6.2. Laminare Strömung (Re < 2320)

Die Strömung ist laminar, wenn die Raynolds-Zahl $Re < 2320$ ist.   	Umströmte Kugel: $F_R = 6\pi\eta R v$ Kugelgeschwindigkeit: $v_{Kugel} = \frac{2R^2 g(\rho_K - \rho_{Fl})}{9\eta}$ Fluidzylinder in Fluid: $v_{Zylinder} = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta}(R^2 - r^2)$ Durchflussmenge: $\dot{V} = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta l}$ $\Delta p = p_1 - p_2$ Volumenfluss: $V = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta l} t$ Druckabfall im glatten Rohr: $\Delta p = \lambda_l \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}, \qquad \lambda_l = \frac{64}{Re}$ Reibungskraft auf Rohr: $F_R = \Delta p R^2 \pi = 8\pi\eta l v$	F_R Reibungskraft $[N]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$ r Radius Zylinder $[m]$ R Radius Kugel, Rohr $[m]$ η Dynamische Viskosität $[Pas]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ Re Raynolds-Zahl $[1]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ l Rohrlänge $[m]$ V Volumen $[m^3]$ d Rohr-∅ $[m]$ λ Widerstandszahl $[1]$ p Druck $[Pa]$ g Erdbeschl. $= 9.81$ $[\frac{m}{s^2}]$

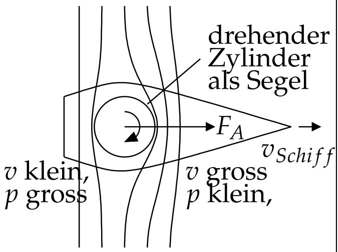
5.6.3. Volumenstrom

 	$A_1 \gg A_2$ $v_1 \approx 0$ $v_2 = \sqrt{2gh}$ Volumenstrom: $\dot{V} = a_2 v_2$	h Höhe $[m]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$ V Volumen $[m^3]$ A Fläche $[m^2]$ t Zeit $[s]$ g Erdbeschl. $= 9.81$ $[\frac{m}{s^2}]$

5.6.4. Turbulente Strömung (Re $>$ 2320)

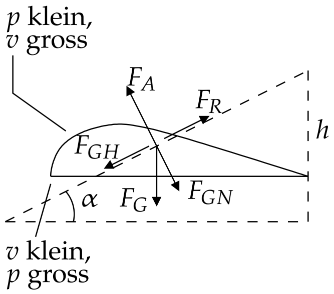
Die Strömung ist turbulent, wenn die Raynolds-Zahl $Re > 2320$ ist.  	Druckwiderstand: $F_D = \frac{c_W \rho v^2}{2} A$ Druckabfall im glatten Rohr: $\Delta p = \lambda_t \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}, \qquad \lambda_t = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}}$	F_D Druckwiderst. $[N]$ v Geschw. $[\frac{m}{s}]$ A Angriffsfläche $[m^2]$ c_W Widerstands-koeffizient $[1]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ Re Raynolds-Zahl $[1]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ l Rohrlänge $[m]$ d Rohr-$\emptyset$ $[m]$ λ Widerstands-zahl $[1]$ p Druck $[Pa]$ g Erdbeschl. $=$ 9.81 $[\frac{m}{s^2}]$

5.7. Dynamischer Auftrieb

Beispiel: Schiff mit Zylinder-Segel:  	Bei Zylinderform: $F_A = \rho l v \Gamma$ $\Gamma = 4\pi^2 r^2 f$	F_A Auftriebskraft $[N]$ l Zylinderlänge $[m]$ r Radius $[m]$ v Fluidgeschw. $[\frac{m}{s}]$ f Drehfrequenz Zylinder $[\frac{1}{s}]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ Γ Zirkulaion $[\frac{m^2}{s}]$

5.7.1. Tragflügel

Tragflügel:



Auftrieb:

$$F_A = c_A \frac{\rho v^2}{2} A_T$$

Induzierter Widerstand:

$$F_W = c_W \frac{\rho v^2}{2} A_T$$

$$F_R = F_{GH} = F_G \sin(\alpha)$$

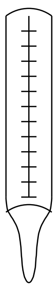
$$F_A = F_{GN} = F_G \cos(\alpha)$$

$$\frac{c_W}{c_A} = \frac{Höhenverlust}{MeterFlug}$$

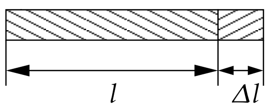
F_A	Auftriebskaft	$[N]$
F_W	Widerstandskraft	$[N]$
c_A	Auftriebskoeffizient	$[1]$
c_W	Widerstandskoeffizient	$[1]$
v	Geschw.	$[\frac{m}{s}]$
A_T	Fläche aus Anströmrichtung gesehen	$[m^2]$
ρ	Dichte Fluid	$[\frac{kg}{m^3}]$
α	Gleitwinkel	$[rad]$

6. Wärmelehre

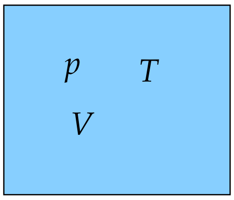
6.1. Temperatur

	Absolute Temperatur: $T = \frac{2}{3k}\bar{E}_{kin}$ $\bar{E}_{kin} = \frac{1}{2}m\bar{v}^2$ Umrechnungen: $T(K) = T(C) + 273.15$ $T(F) = \frac{9}{5}T(C) + 32$ $T(C) = \frac{5}{9}(T(F) - 32)$	T Temperatur $[K]$ k Bolzmann-konst. $1.381E^{-23}$ $[\frac{J}{K}]$ m Masse $[kg]$ E_{kin} kinetische Energie der Gasatome $[J]$ v Geschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$ Kelvin $[K]$ Celcius $[°C]$ Farenheit $[F]$

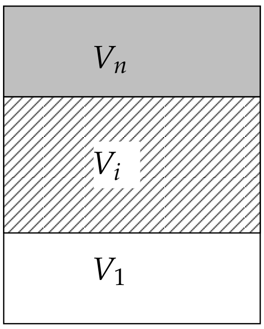
6.2. Ausdehnung von Materialien

	Längenausdehnung: $\Delta l = \alpha l \Delta T$ Volumenausdehnung: $\Delta V = \gamma V \Delta T$ $\gamma = 3\alpha = \frac{\Delta V}{\gamma \Delta T}$ $\alpha = \frac{\Delta \gamma}{\gamma \Delta T}$ $\sigma = E\alpha\Delta T = E\frac{\Delta l}{l}$	l Länge $[m]$ V Volumen $[m^3]$ α Längenausd. koef. $[\frac{1}{K}]$ γ Volumenausd. koef. $[m^3]$ ΔT Temperatur $[K]$ σ Spannung bzw. Druck $[\frac{N}{m^2}]$ E Elastizitätsmodul $[\frac{N}{m^2}]$

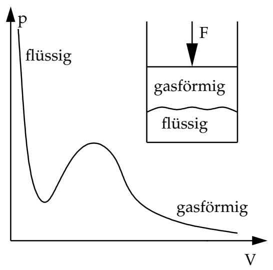
6.3. Ideale Gase

	$pV = konst.$ $\frac{V}{T} = konst.$ $\frac{pV}{T} = konst.$ $pV = NkT$ $N = nN_A$ $R = N_A k$ $pV = nRT$ $m = nM$ $\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$ Volumen eines idealen Gases: $22.4 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{mol}$ bei $p = 10133 Pa$ und T = 273.15 K	p Druck $[\frac{N}{m^2}]$ V Volumen $[m^3]$ T Temperatur $[K]$ N Anz. Moleküle n Anz. Mol m Gasmasse $[kg]$ M Molmasse $[kg]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ N_A Anz. Atome pro 12g C $= 6,022 \cdot 10^{23}$ $\frac{1}{mol}$ k Bolzmann-konst.$=$ $1,381 \cdot 10^{-23}$ $[\frac{J}{K}]$ R Univers.-Gaskonst. $= 8,314$ $[\frac{J}{molK}]$

6.4. Gemische idealer Gase

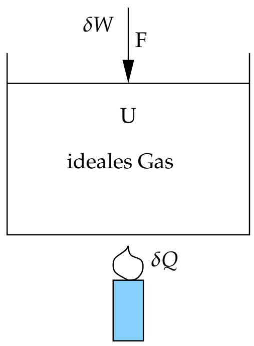
	$\sum_{i=1}^{z} p_i = p$ $p_i = q_i p$ $M = \sum_{i=1}^{z} q_i M_i$ $\mu_i = \frac{M_i}{M} q_i$	p (Gesamt-) Druck $[\frac{N}{m^2}]$ p_i Partialdruck $[\frac{N}{m^2}]$ q Konzentration $[\frac{1}{K}]$ M Molmasse $[kg]$ μ_i Massenkonzentration

6.5. Reale Gase



Formel	Symbol	Bedeutung	Einheit
$(p+\frac{a}{V_m^2})(V_m-b)=RT$	p	Druck	$[\frac{N}{m^2}]$
$p=n\frac{RT}{V-nb}-n^2\frac{a}{V^2}$	V_m	Molvolumen	$[m^3]$
$a=3p_kV_{mk}{}^2=\frac{9}{8}RT_kV_{mk}$	R	Univers.-Gaskonst.	$[\frac{J}{molK}]$
$b=\frac{V_{mk}}{3}=\frac{RT_k}{8p_k}$	T	Temperatur	$[K]$
$T_k=\frac{8a}{27Rb}$	n	Anz. Mol	
$p_k=\frac{a}{27b^2}$	a	Van der Waal-konst.	$[Nm]$
$V_mk=3b$	b	Van der Waal-konst.	$[m^3]$
	T_k	Kritische Temperatur	$[K]$
	p_k	Kritischer Druck	$[\frac{N}{m^2}]$
	V_{mk}	Kritisches Volumen	$[m^3]$

6.6. Wärme



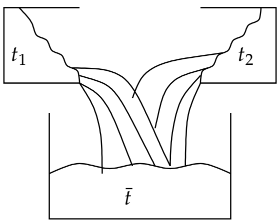
Formel	Symbol	Bedeutung	Einheit
$dU=\delta W+\delta Q$	U	Innere Energie	$[J]$
$\delta Q=CdT$	W	Arbeit	$[J]$
$\delta Q=cmdT$	Q	Wärme	$[J]$
$\delta Q=C_mndT$	C	Wärmekapazität	$[\frac{J}{K}]$
$C=mc$	C_m	Molare Wärmekapazität	$[\frac{J}{molK}]$
$C_m=Mc$	C_{mv}	C_m, isochor [1]	$[\frac{J}{molK}]$
$C_{mp}-C_{mv}=R$	C_{mp}	C_m, isobar [2]	$[\frac{J}{molK}]$
$m=nM$	c	spez. Wärmekapazität	$[\frac{J}{kgK}]$
	m	Masse	$[kg]$
	M	Molmasse	$[\frac{kg}{mol}]$
	n	Anz. Mol	
	R	Univers.-Gk.= 8.314	$[\frac{J}{molK}]$

[1] Isochore Proszesse sind Zustandsänderungen bei konstantem Volumen
[2] Isobare Prozesse sind Zustandsänderungen bei konstantem Druck

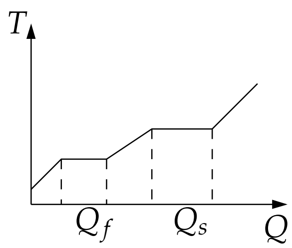
6.6.1. Molare Wärme kristalliner Festkörper

	falls $T > \Theta_D$: $C_{mv} = 3R$ falls $T << \Theta_D$: $C_{mv} = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3$	C_{mv} C_m, isochor $[\frac{J}{molK}]$ T Temperatur $[K]$ Θ_D Debye-Temp. $[K]$ R Univers.-Gaskonst. $[\frac{J}{molK}]$

6.6.2. Austausch von Wärmemengen

	$\bar{t} = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 + ...}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + ...}$	$\bar{t}$ Mischtemp. $[K]$ t Temperatur $[K]$ m Masse $[kg]$ c spez. Wärmekapazität $[\frac{J}{kgK}]$

6.7. Phasen und Phasenübergänge

	Schmelzen: $Q = mQ_s \qquad q_s = \frac{Q_s}{m}$ Verdampfen: $Q = mQ_v \qquad q_v = \frac{Q_v}{m}$ $\frac{dp_s}{dT} = \frac{q_s}{T\left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_f}\right)}$ $\frac{dp_f}{dT} = \frac{q_f}{T\left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_s}\right)}$	Q Wärme $[J]$ m Masse $[kg]$ Q_s Schmelzenergie $[J]$ Q_v Verdampf-Energie $[J]$ q_s spez. Q-Schmelz $[\frac{J}{kg}]$ q_v spez. Q-Verdampf $[\frac{J}{kg}]$ p_s Dampfdruck $[Pa]$ p_f Schmelzdruck $[Pa]$ T Temperatur $[K]$ ρ_g Dichte Phase gasförmig $[\frac{kg}{m^3}]$ ρ_f Dichte Phase flüssig $[\frac{kg}{m^3}]$ ρ_s Dichte Phase fest $[\frac{kg}{m^3}]$

6.7.1. Schmelz- und Verdampfungsenergien

Substanz	$T_{schmelz}[K]$	$Q_s[\frac{kJ}{kg}]$	$T_{verdampf}[K]$	$Q_v[\frac{kJ}{kg}]$
Blei	600	24,7	2023	858
Brom	266	67,4	332	369
Ethanol	159	109	351	879
Gold	1336	62,8	3081	1701
Helium	-	-	4,2	21
Kohlendioxid	-	-	194.6	573
Kupfer	1356	205	2839	4726
Quecksilber	234	11,3	630	296
Sauerstoff	54,4	13,8	90,2	213
Schwefel	388	38,5	717,75	287
Silber	1234	105	2436	2323
Stickstoff	63	25,7	77,35	199
Wasser	273,15	333,5	373,15	2257
Zink	692	102	1184	1768

6.8. Luftfeuchtigkeit

$$f = \frac{m_W}{V}$$

$$f_r = \frac{m_W}{m_s} = \frac{p_D}{p_s}(\cdot 100\%)$$

$$p_s = p_{s0} 10^{\frac{7,5\vartheta}{\vartheta+237}} \qquad ,\vartheta \geq 0°C$$

$$p_s = p_{s0} 10^{\frac{9,5\vartheta}{\vartheta+265,5}} \qquad ,\vartheta \leq 0°C$$

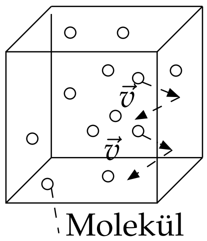
$$p_D = p_s(\vartheta_d)$$

$$\vartheta = \frac{237 \log \frac{p_s}{6,107}}{7,5 - \log \frac{p_s}{6,107}}, p_s \geq 610,7Pa$$

$$\vartheta = \frac{265,5 \log \frac{p_s}{6,107}}{9,5 - \log \frac{p_s}{6,107}}, p_s \leq 610,7Pa$$

f	Luftfeuchtigkeit absolut	$[\frac{kg}{m^3}]$
f_r	Luftfeuchtigkeit relativ	$[1]$
m_W	Wasserdampfmasse	$[kg]$
m_s	Dampfmasse im Sättigungszustand	$[\frac{kg}{m^3}]$
V	Volumen	$[m^3]$
p_D	Partialdruck Wasserdampf	$[Pa]$
p_s	Sättigungsdruck Wasserdampf	$[Pa]$
ϑ	Temperatur	$[°C]$
p_{s0}	61070	$[Pa]$

6.9. Kinetische Gastheorie



Einatomige Moleküle haben keine Rotationsenergie, deshalb ist in diesem Fall: $E_{kin} = E_{trans}$

Translationsenergie:

$$\bar{E}_{kin} = N\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT$$

$$U = N_A\bar{E} = N_A\frac{f}{2}kT = \frac{f}{2}RT$$

$$U = E_{kin} + E_{pot}$$

$$pV = \frac{2}{3}N_A\frac{mv^2}{2}$$

Mittlere Energie pro Molekül:

$$\bar{E} = \frac{f}{2}kT$$

$$\bar{E}_{kin} \approx T_{abs}$$

$$C_{mv} = \frac{f}{2}R$$

f=3 bei einatomigen Molekülen

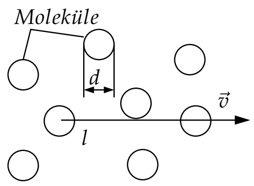
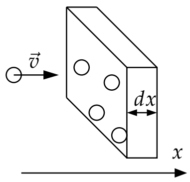
f=5 bei zweiatomigen Molekülen

f=6 bei mehratomigen Molekülen

Volumen eines idealen Gases: $22.4 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{mol}$ bei $p = 10133Pa$ und T = 273.15 K

p	Druck	$[Pa]$
V	Volumen	$[m^3]$
N	Anz. Moleküle	$[1]$
n	Anz. Mol	$[1]$
v	Molekül Geschwindigkeit	$[\frac{m}{s}]$
E_{kin}	Kinetische Energie der Moleküle	$[J]$
E_{pot}	Potentielle Energie	$[J]$
U	Innere Energie	$[J]$
T_{abs}	Temperatur absolut	$[K]$
T	Temperatur	$[K]$
f	Freiheitsgrad	$[1]$
m	Masse	$[kg]$
C_{mv}	Molare Wärmekapazität	$[\frac{J}{molK}]$
N_A	Anz. Atome pro 12g C $= 6,022 \cdot 10^{23}$	$\frac{1}{mol}$
k	Bolzmannkonst. $= 1,381 \cdot 10^{-23}$	$[\frac{J}{K}]$
R	Univers.-Gk.$= 8.314$	$[\frac{J}{molK}]$

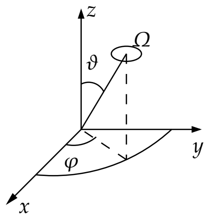
6.9.1. Mittlere freie Weglänge, Wärmeleitung, Diffusion und Viskosität

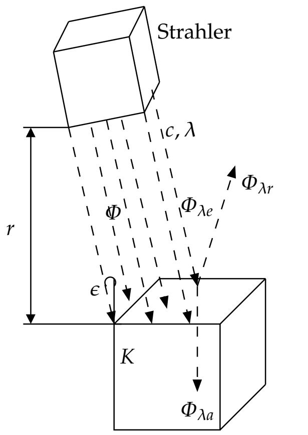
 	$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2}$ $N = N_0 e^{-x/\bar{\lambda}}$ Wahrscheinlichkeit $f(x)dx$, dass ein Molekül einen freien Weg auf der Strecke dx hat: $f(x)dx = n\sigma e^{-x/\bar{\lambda}} dx$ $\sigma = \pi d^2$ $\lambda_Q = \frac{1}{6} n \bar{v} \bar{\lambda} f k$ $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$ $\eta = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho$	$\bar{\lambda}$ Mittlere freie Weglänge zwischen Molekülzusammenstoss $[m]$ n Anz. Moleküle ($\neq$ Anz. Mole) $[1]$ d $\emptyset$- Molekül $[m]$ N Anz. Moleküle durch Schicht dx $[1]$ σ Querschnitt $[m^2]$ $\bar{\lambda}_Q$ Wärmeleitungskoeff. $[\frac{W}{m^2K}]$ v v - Moleküle $[m/s]$ f Freiheitsgrad $[1]$ k Bolzmann-konst. $= 1{,}381 \cdot 10^{-23}$ $[\frac{J}{K}]$ D Diffusions-konst. $[\frac{m^2}{s}]$ η Viskosität $[\frac{kg}{ms}]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$

6.9.2. Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

	Wahrscheinlichkeit, dass ein Molekül eine Geschwindigkeit zwischen v und v + dv aufweist: $f(v)dv = \sqrt{\frac{2m^3}{\pi k^3 T^3}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$ $v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ $u = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\bar{v}^2}$ $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 2\sqrt{\frac{2RT}{\pi M}}$	$f(v)$ Dichtefunktion m Molekülmasse $[kg]$ v v - Moleküle $[m/s]$ T freie Weglänge $[m]$ k Bolzmann-konst. $= 1{,}381 \cdot 10^{-23}$ $[\frac{J}{K}]$ v_0 v- wahrscheinlichst $[\frac{m}{s}]$ u spez. $\bar{v}$ $[\frac{m}{s}]$

6.10. Temperaturstrahlung, Strahlungsgesetze





$0 \leq A_\lambda \leq 1$

$$\Omega = \frac{A}{R^2} \qquad I = \frac{\Phi}{\Omega}$$

$$E = \frac{\Phi}{A}$$

$$A_\lambda = \frac{\Phi_{\lambda a}}{\Phi_{\lambda e}}$$

$$K = \int_{HR} L(\vartheta, \varphi)\cos(\vartheta) d\Omega$$

Diffuse Strahlung:

$$K = L \int_{HR} L \cos(\vartheta) d\Omega = L\pi$$

$HR = Halbraum : z > 0$

$$\frac{K_\lambda(\lambda, T)}{A_\lambda(\lambda, T)} = f(\lambda, T)$$

$$K_\lambda = \epsilon_\lambda(\lambda, T) K_{\lambda s}(\lambda, T)$$

$$\epsilon_\lambda(\lambda, T) \equiv A_\lambda(\lambda, T)$$

Körper schwarz: $K_s = \sigma T^4$

Körper grau: $K = \epsilon\sigma T^4$, $A = \epsilon$

$$P_e = \epsilon_\lambda \sigma A T^4$$

$$P_{eNetto} = \epsilon_\lambda \sigma A (T^4 - T_0^4)$$

$$K_{\nu s}(\nu, T) d\nu = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2 (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)} d\nu$$

$$K_{\lambda s}(\lambda, T) d\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1)} d\lambda$$

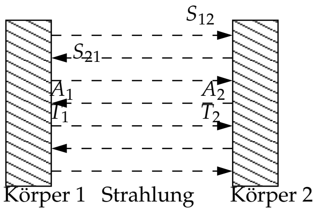
$$\lambda_{max} T = b$$

$$\nu = c/\lambda$$

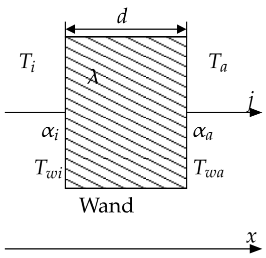
$$E_{Str} = \frac{1.05 \cdot 10^{-34} c_0}{\lambda}$$

Ω	Raumwinkel	$[sr]$
A	Fläche, Flächenausschnitt	$[m^2]$
R	Kugelradius	$[m]$
I	Strahlstärke	$[W]$
Φ	Strahlungsstrom	$[W]$
E	Bestrahlungsstärke	$[\frac{W}{m^2}]$
K	Emmisionsvermögen	$[\frac{W}{m^2}]$
L	Strahldichte	$[\frac{W}{m^2 sr}]$
A_λ	Absorbationszahl (Schwarzer Körper $\Rightarrow A_\lambda = 1$)	$[1]$
ϵ_λ	Emissionsverhältn.	$[1]$
λ	Wellenlänge	$[m]$
ν	Frequenz	$[Hz]$
T	Temp. Körper	$[K]$
T_0	Umgebungstemp.	$[K]$
P_e	Strahlungsleistung	$[W]$
E_{Str}	Strahlungs Energie	$[J]$
k	Bolzmannkonst. $= 1,381 \cdot 10^{-23}$	$[\frac{J}{K}]$
σ	Bolzmannkonst. $= 5,671 \cdot 10^{-8}$	$[\frac{W}{mK}]$
h	Plancksche Konst. $= 6,626 \cdot 10^{-34}$	$[Js]$
b	Konst. $= 2,898 \cdot 10^{-3}$	$[mK]$
c_0	Lichtgeschw. $= 299'792'458$ (Vakuum)	$[\frac{m}{s}]$

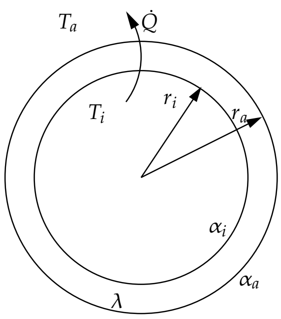
6.10.1. Strahlungsaustausch

	$j = C_{12}(T_1^4 - T_2^4) = S_{12} - S_{21}$ $j = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}\sigma$ $C_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}\sigma$	C_{12} Strahlungs-austausch-zahl $[\frac{W}{m^2 K^4}]$ T Temperatur $[K]$ S Entropie $[\frac{J}{m^2}]$ A Absortionszahl $[1]$ ϵ Emissionsver-hältnis $[K]$ j Wärmestrom-dichte $[\frac{W}{m^2}]$ σ Bolzmann-konst. $= 5,671 \cdot 10^{-8}$ $[\frac{W}{mK}]$

6.11. Wärmetransport



Wärmeübergang	α
Wandflächen	
innen	8
aussen	20
Boden, Decke	
nach oben	8
nach unten	6



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{\rho c}\Delta T$$

$$I = \dot{Q} = \lambda A \frac{dT}{dx} = jA$$

$$\Delta T = IR$$

$$R = \frac{\Delta x}{\lambda A}$$

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

Wandschicht:

$$j = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_{wi} - T_{wa}}{d}$$

Übergangsschicht innen:

$$j = \alpha_i (T_i - T_{wi})$$

Übergangsschicht aussen:

$$j = \alpha_a (T_{wa} - T_a)$$

$$j = k(T_i - T_a)$$

$$\dot{Q}_w = Aj = Ak\Delta T$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \sum_s \frac{d_s}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha_a}} = \frac{j}{\Delta T}$$

Für zylinderförmige Wand:

$$\dot{Q} = 2\pi r l j = 2\pi r_a l k_a \Delta T$$

$$k_a = \frac{1}{r_a} \frac{1}{\frac{1}{r_i \alpha_i} + \sum_s \frac{1}{\lambda_s} ln \frac{r_{sa}}{r_{si}} + \frac{1}{r_a \alpha_a}}$$

Wärmebedarf eines Gebäudes:

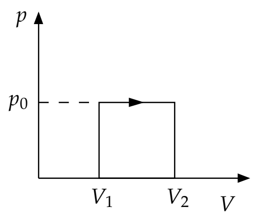
$$Q = (\sum_w A_w k_w + \rho c_p \dot{V}) G$$

$$G = \int_{Heizsaison} \Delta T dt$$

I	Wärmestrom	$[W]$
R	Wärmewiderstand	$[\frac{K}{W}]$
j	Wärmestromdichte	$[\frac{W}{m^2}]$
λ	Wärmeleitungskoeff.	$[\frac{W}{mK}]$
T_L	Luft-Temperatur	$[K]$
T_W	Wand-Temperatur	$[K]$
$T_{i,a}$	Innen- / Aussen-Temperatur	$[K]$
t	Zeit	$[s]$
ρ	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$
d	Wandduchm.	$[m]$
α	Wärmeübergang	$[\frac{W}{m^2K}]$
k	k-Wert, Wärmedurchgangszahl	$[\frac{W}{m^2K}]$
Q	Wärmebedarf	$[J]$
A	Wandfläche	$[m^2]$
$\dot{V}$	Luftaustausch	$[\frac{m^3}{s}]$
G	Heiztage	$[Kd]$
r	Zylinderradius	$[m]$
l	Zylinderlänge	$[m]$

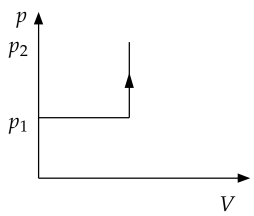
6.12. Zustandänderungen

6.12.1. Isobare Zustandsänderung

<table>
<tr>
<td>

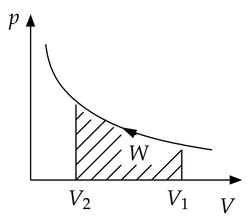
Isobar: $p = konstant$</td>
<td>$Q = nC_{mp}(T_2 - T_1)$
$W = p(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$
$W = p_0 \int_{V_1}^{V_2} dV$</td>
<td>Q Wärme $[J]$
p Druck $[Pa]$
V Volumen $[m^3]$
C_{mp} Molare Wärmekapazität $[\frac{J}{molK}]$
T Temperatur $[K]$
n Anz. Mol Gas $[1]$
W Arbeit $[J]$
R Univers.-Gaskonst. $[\frac{J}{molK}]$</td>
</tr>
</table>

6.12.2. Isochore Zustandsänderungen

<table>
<tr>
<td>

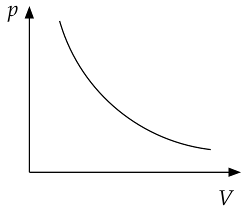
Isochor: $V = konstant$</td>
<td>$Q = nC_{mv}(T_2 - T_1)$
$W = 0$</td>
<td>Q Wärme $[J]$
C_{mv} Molare Wärmekapazität $[\frac{J}{molK}]$
T Temperatur $[K]$
n Anz. Mol Gas $[1]$
W Arbeit $[J]$</td>
</tr>
</table>

6.12.3. Isotherme Zustandsänderungen

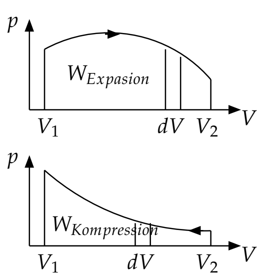
<table>
<tr>
<td>

isotherm: $T = konst.$</td>
<td>Expansion:
$Q_{ab} = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = W_{ab}$
Kompression:
$Q_{zu} = nRT \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = W_{zu}$
$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}$
$\mid W_{zu} \mid = \mid Q_{ab} \mid$</td>
<td>Q Wärme $[J]$
V Volumen $[m^3]$
T Temperatur $[K]$
n Anz. Mol Gas $[1]$
W Arbeit $[J]$
p Druck $[Pa]$
R Univers.-Gaskonst. $[\frac{J}{molK}]$</td>
</tr>
</table>

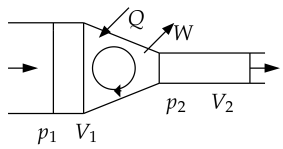
6.12.4. Adiabatische Zustandsänderungen

 Adiabatisch: $Q = konst.$ (kein Wärmeaustausch)	$dU = \delta Q - \delta W$ $pV^\kappa = konst.$ $\rightarrow p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa$ $TV^{\kappa-1} = konst.$ $\rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}$ $T^\kappa p^{1-\kappa}$ und $Tp^{\frac{1}{\kappa}-1} = konst.$ $\rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}$ $\kappa = \frac{C_{mp}}{C_{mv}}$ $\kappa = \frac{f+2}{f} \qquad C_{mv} = \frac{f}{2}R$ $W = nC_{mv}(T_1 - T_2)$ $\Delta W = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\kappa - 1}$ $\Delta W = C_{mv}(p_1V_1 - p_2V_2)$	U Innere Energie $[J]$ p Druck $[Pa]$ V Volumen $[m^3]$ κ Adiabatenexponent $[1]$ C_{mv} Molare Wärmekapazität isochor $[\frac{J}{molK}]$ C_{mp} Molare Wärmekapazität isobar $[\frac{J}{molK}]$ T Temperatur $[K]$ f Freiheitsgrad $[1]$ n Anz. Mol $[1]$ W Arbeit $[J]$

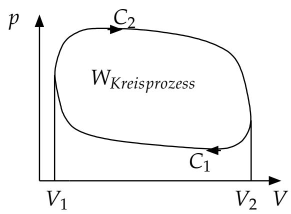
6.12.5. Expansion und Kompression

	Expansion: $W = \int_{V_1}^{V_2} pdV = A_1$ Kompression: $W = \int_{V_2}^{V_1} pdV = -A_2$	W Arbeit $[J]$ p Druck $[Pa]$ V Volumen $[m^3]$

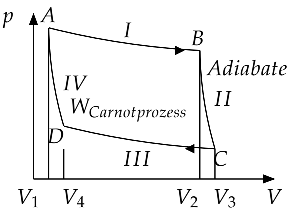
6.12.6. Enthalpie

 Maschine	$H = U + pV$ $W = Q - \Delta H$ $W_{tot} = W_g + p_2 V_2 - p_1 V_1$ Isotherm: $W = W_g$ Adiabatisch: $W = \kappa W_g$	H Enthalpie $[J]$ W Arbeit $[J]$ W_g W im abgeschlossenen System $[J]$ Q Wärme $[J]$ p Druck $[Pa]$ V Volumen $[m^3]$ κ Adiabaten exp. $[1]$

6.13. Kreisprozesse

 Rechtslaufend (Uhrzeigersinn): Wärmekraftmaschine Linkslaufend: Wärmepumpe	$W = \underbrace{\int_{V_1}^{V_2} pdV}_{KurveC_1} + \underbrace{\int_{V_2}^{V_1} pdV}_{KurveC_2}$ $W = \oint \delta W = \oint \delta Q$ $Q = W$	W Arbeit $[J]$ Q Wärme $[J]$ p Druck $[Pa]$ V Volumen $[m^3]$

6.13.1. Carnotprozess

 Beispiel Motor: $T_1 = T_{Zylinder}$ $T_2 = T_{Abgas}$	I: Isotherme Expansion: $W_{ab} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_{zu}$ $U = konst.$ II: Adiabatische Expansion: $W_{ab} = C_{mv}(T_1 - T_2)$ $Q_{zu} = 0$ III: Isotherme Kompression: $W_{zu} = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} = Q_{ab}$ $U = konst.$ IV: Adiabatische Kompression: $W_{zu} = C_{mv}(T_1 - T_2)$ $Q_{zu} = 0$ $\eta_C = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ Carnot-Wärmepumpe: $\epsilon_C = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$ Carnot-Kältemaschine: $\epsilon_C = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$	W Arbeit $[J]$ Q Wärme $[J]$ U Innere Energie $[J]$ V Volumen $[m^3]$ C_{mv} Molare Wärmekapazität isochor $[\frac{J}{molK}]$ R Univers.-Gaskonst. $[\frac{J}{molK}]$ η_C Cornot-Wirkungsgrad (bei Wärmekraftmaschine) $[1]$ ϵ_C Carnot-Leistungszahl (bei Wärmepunpe) $[1]$

6.14. Entropie

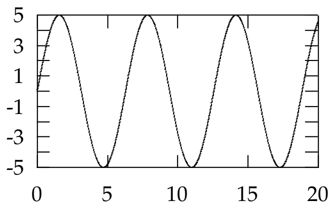
Im abgeschlossenen System gilt: • S kann niemals abnehmen. • Bei allen Vorgängen nimmt S zu oder bleibt gleich. • Der Zustand wo S maximal ist, ist der stabile Zustand.	$S = S_0 + \int_0^P \frac{\delta Q_r}{T}$ $dS = \frac{\delta Q_r}{T}$ $\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_r}{T}$ $S = k \cdot \ln(W)$	S Entropie $[\frac{J}{K}]$ P Punkt P $[1]$ Q_r Wärme $[J]$ T Temperatur $[K]$ W Wahrscheinlichkeit $[1]$

7. Schwingungen

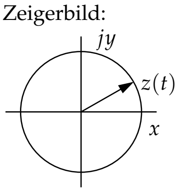
7.1. Freie Schwingungen

7.1.1. Ungedämpfte, harmonische Schwingung

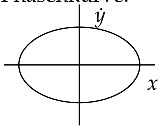
Zeitfunktion:



Zeigerbild:



Phasenkurve:



Funktion:

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

Bei einer harmonischen Schwingung ist die Beschleunigung proportional zur Auslenkung:

$$a(t) = \ddot{y} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$$

$$v(t) = \dot{y} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

Energie bleibt konstant:

$$E_{ges} = \frac{1}{2}cA^2 = E_{pot} + E_{kin}$$

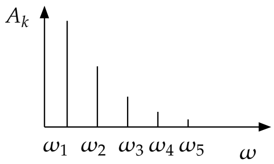
$$E_{pot} = \frac{1}{2}cA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}cA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

y	schwingende Grösse	$[m]$[1]
A	Amplitude	$[1]$
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$
φ	Nullphasenwinkel	$[rad]$
t	Zeit	$[s]$
T	Periode	$[s]$
f	Frequenz	$[\frac{1}{s}]$
a	Beschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$
v	Geschw.	$[\frac{m}{s}]$
E	Energie	$[J]$
c	Konstante	$[\frac{N}{m}]$

[1] m gilt nur bei mechanischen Schwingungen

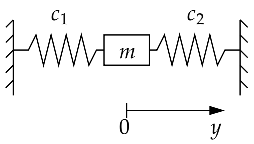
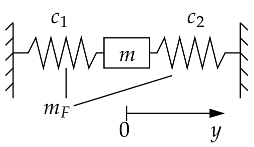
7.1.2. Ungedämpfte, periodische Schwingung

	Fourierreihe: $$y = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$$ $$\omega_k = k\omega_1$$ $$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$ $$y = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(\omega_k t) + b_k \cos(\omega_k t)]$$ $$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$ $$\varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$	y schwingende Grösse $[m]$ A Amplitude $[1]$ ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ φ Nullphasenwinkel $[rad]$ T Periode der Grundschwingung $[s]$

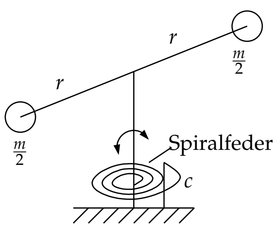
7.1.3. Ungedämpfte, nicht periodische Schwingung

	Fourierreihe: $$y = \int_{\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$	y schwingende Grösse $[m]$ A Amplitude $[1]$ ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ t Zeit $[s]$

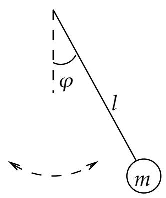
7.1.4. Federpendel

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Federmasse vernachlässigt:
$m\ddot{y} + cy = 0$
$y = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$
$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$
$a(t) = -\left(\frac{c}{m}\right) y(t)$
Energiesatz:
$\frac{1}{2}cA^2 = \frac{1}{2}cy^2(t) + \frac{1}{2}mv^2(t)$</td>
<td rowspan="2">y schwingende Grösse $[m]$
A Amplitude $[1]$
ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$
φ Nullphasenwinkel $[rad]$
t Zeit $[s]$
T Periode $[s]$
f Frequenz $[\frac{1}{s}]$
m Bewegte Masse $[kg]$
m_F Masse der Feder $[kg]$
c Federkonstante (siehe S. 15) $[\frac{N}{m}]$
a Beschleunigung $[\frac{m}{s^2}]$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Mit Federmasse:
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{m_F}{3}}{c}}$</td>
</tr>
</table>

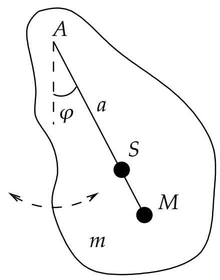
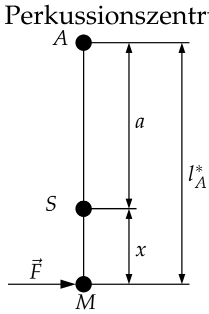
7.1.5. Drehpendel

<table>
<tr>
<td></td>
<td>$J\ddot{y} + c\varphi = 0$
$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J}}$
$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{c}}$
bestimmung von Massenträgheitsmomenten:
$J_{unbek} = J_{bek}\frac{T^2_{unbek}}{T^2_{bek}}$</td>
<td>y schwingende Grösse $[m]$
ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$
φ Nullphasenwinkel $[rad]$
T Periode $[s]$
c Federkonstante $[\frac{N}{m}]$
J Massenträgheitsmoment $[\frac{kg}{m^2}]$</td>
</tr>
</table>

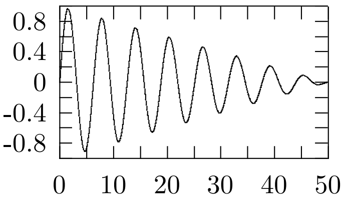
7.1.6. Mathematisches Pendel

	$l\ddot{y} + g\sin(\varphi) = 0$	y	schwingende Grösse	$[m]$
	$l\ddot{y} + g\varphi = 0$	ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$
	$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$	φ	Winkel	$[rad]$
	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	T	Periode	$[s]$
		l	Pendellänge	$[m]$
		g	Erdbeschl. = 9.81	$[\frac{m}{s^2}]$

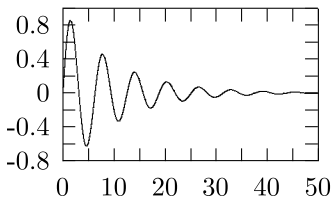
7.1.7. Physikalisches Pendel

	$J_A\ddot{\varphi} + mga\sin(\varphi) = 0$	J_A	Masseträgheit bez. A-Achse	$[kgm^2]$
	$l^* = \frac{J_A}{ma}$	J_S	Masseträgheit bez. Achse ∥ a (siehe S. 30)	$[kgm^2]$
	$J_A\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0$	S	Schwerpunkt	$[1]$
	$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J_A}}$	a	Anstand zu S	$[m]$
	$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_S + ma^2}{mga}}$	T	Periode	$[s]$
	$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{A1} + J_{A2}}{g(m_1a_1 + m_2a_2)}}$	l^*	Pendellänge des entsp. math. Pendel	$[m]$
Perkussionszentrum	$J_A = J_S + ma^2$	y	schwingende Grösse	$[m]$
	$\omega_{max} = \sqrt{\frac{g}{2}\sqrt{\frac{m}{J_S}}}$	A	Amplitude	$[1]$
	$\omega(A) = \omega(M)$	ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$
	$x = \frac{J_S}{ma}$	φ	Winkel	$[rad]$
	$E = \frac{m\omega_0^2A^2}{2}$	t	Zeit	$[s]$
		f	Frequenz	$[\frac{1}{s}]$
		m	Bewegte Masse	$[kg]$
		E	Energie	$[J]$
		M	Schwing-Mittelpunkt, Perkussionszentrum	
		x	Abstand M,S	$[m]$
		g	Erdbeschl. = 9.81	$[\frac{m}{s^2}]$

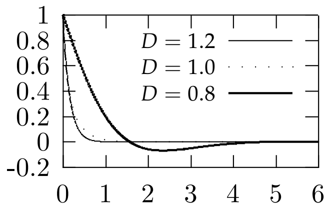
7.1.8. Gedämpfte Schwingung mit konstanter Reibung

 	$\Delta A = 4\frac{F_R}{c}$ $m\ddot{y} + cy + F_R = 0$	ΔA — Δ Amplitude pro Periode — $[m]$ F_R — Reibkraft — $[\frac{1}{s}]$ c — Federkonstante — $[\frac{N}{m}]$

7.1.9. Schwingung mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung ($D < 1$)

 	$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ $y = Ae^{-\delta t}\sin(\omega_d t + \phi_0)$ $\delta = \frac{b}{2m} \qquad F_R = -b\dot{y}$ $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ $D = \frac{\frac{\Lambda}{2\pi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^2}}$ $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - D^2}$ $\Lambda = \frac{2\pi D}{\sqrt{1 - D^2}}$ $\Lambda = \delta T$ $\Lambda = \ln\frac{A_n}{A_{n+1}} \qquad \frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\delta T}$ $\frac{E_1}{E_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2}$	y — schwingende Grösse — $[m]$ ω — Kreisfrequenz — $[\frac{1}{s}]$ φ — Winkel — $[rad]$ T — Periode — $[s]$ δ — Abkling-konst. — $[1]$ b — Dämpfungs-konst. — $[\frac{kg}{s}]$ m — Masse — $[kg]$ c — Federkonst. — $[\frac{N}{m}]$ D — Dämpfungsgrad — $[1]$ Λ — log. Dekrement — $[1]$ A — Amplitude — $[1]$ E — Energie — $[J]$

7.1.10. Aperiodeische Lösung ($D > 1$)



$$y = b_1 e^{\lambda_1 t} + b_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_1 = -\omega_0 (D + \sqrt{D^2 - 1})$$

$$\lambda_2 = -\omega_0 (D - \sqrt{D^2 - 1})$$

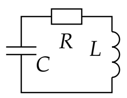
Grenzfall $D = 1$

$$\frac{c}{m} = \frac{b^2}{4m^2}$$

$$y = (b_1 + b_2 t) e^{-\delta t}$$

y	schwingende Grösse	$[m]$
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$
δ	Abkling-konst.	$[1]$
b	Dämpfungs-konst.	$[\frac{kg}{s}]$
D	Dämpfungs-grad	$[1]$
m	Masse	$[kg]$
c	Federkonstante	$[\frac{N}{m}]$

7.1.11. Elektrischer Schwingkreis



$$I = I_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \phi_0)$$

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}$$

I	Strom	$[A]$
R	Widerstand	$[\Omega]$
L	Induktivität	$[H]$
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$
δ	Abkling-konst.	$[1]$
t	Zeit	$[s]$
D	Dämpfungs-grad	$[1]$

8. Wellenlehre

8.1. Wellengeschwindigkeiten

Elastische Longitudinalwellen	$u_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	u Wellengeschw. $[\frac{m}{s}]$ A Fläche $[m^2]$ E Elastizitätsmodul $[\frac{N}{m^2}]$ F Spannkraft $[N]$ G Schubmodul $[\frac{N}{m^2}]$ h Wassertiefe $[m]$ M Molmasse $[\frac{kg}{mol}]$ p Druck $[Pa]$ T abs. Temp. $[K]$ κ Kompressibilität $[\frac{m^2}{N}]$ $\varkappa$ Adiabatenexponent $[1]$ λ Wellenlänge $[m]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ σ Oberflächenspannung $[\frac{N}{m}]$ g Erdbeschl. $=$ 9.81 $[\frac{m}{s^2}]$ R univers. Gas-Konst. $= 8.3145$ $[\frac{J}{Kmol}]$
Elastische Transversalwellen	$u_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	
Transversalwellen auf einem Seil oder einer Saite	$u_T = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$	
Schwerewellen in tiefem Wasser	$u_S = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$	
Schwerewellen in flachem Wasser	$u_S = \sqrt{gh}$	
Kapillarwellen	$u_K = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}$	
Schallwellen in Fluiden	$u = \sqrt{\frac{1}{\rho\kappa}}$	
Schallwellen in Gasen	$u_G = \sqrt{\frac{\varkappa p}{\rho}}$ $u_G = \sqrt{\frac{\varkappa RT}{M}}$	

8.1.1. Zusammenhänge der verschiedenen Wellen

Gilt nur bei einem Stab	$u_T = \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu)}} u_L$	u Wellengeschw. $[\frac{m}{s}]$ u_T u longitudinal $[\frac{m}{s^2}]$ u_L u transversal $[\frac{m}{s^2}]$ μ Poissonzahl $[1]$

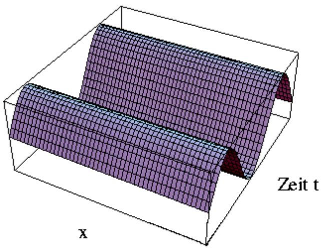
8.2. Wellengleichung

Bei Wellengleichungen (lineare Dgl) gilt das Superpositionsprinzip, d.h. die Summe zweier Lösungen ist wieder eine Lösung.	Eindimensional: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ Zweidimensional: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ Dreidimesnional: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ $\text{oder}: \Delta \xi = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ $\text{wobei}: \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	u Wellengeschw. $[\frac{m}{s}]$ ξ Störung $[...]$ t Zeit $[s]$ Δ Laplace-OP $[]$

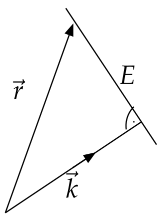
8.3. Intensität

	$I = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 \xi_0^2$	I Intensität $[\frac{W}{m^2}]$ u Wellengeschw. $[\frac{m}{s}]$ ξ Störung $[...]$ ρ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$ ω Winkelgeschw. $[\frac{1}{s}]$

8.4. Harmonische Wellen

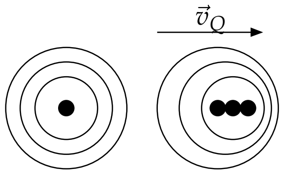
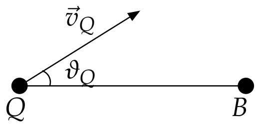
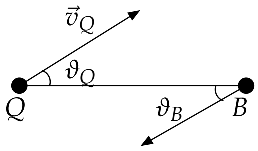
 $\xi = f(x-ut) \rightarrow Ausbreitung pos. x - Koord.$ $\xi = f(x+ut) \rightarrow Ausbreitung neg. x - Koord.$ Bei EM - Wellen: $u = c = 299'792'458 \frac{m}{s}$	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = ku$ $k = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)$ $\xi(x,t) = \xi_0 \sin(\omega t - kx)$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{u}{\lambda}$ $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{u}{f}$ $u = \frac{\omega}{k} = \lambda f$	u Wellengeschw. $[\frac{m}{s}]$ ξ Störung $[...]$ t Zeit $[s]$ ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ T Periode $[s]$ λ Wellenlänge $[m]$ φ Phase $[rad]$ k Wellenzahl $[\frac{1}{m}]$ f Frequenz $[Hz]$

8.5. Räumliche Ausbreitung von Wellen

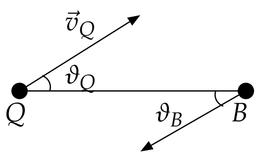
	Ebene Welle: $\xi(x,y,z,t) = \xi_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$ $\vec{k}\vec{r} = konst.$ Kugel Welle: $\xi(r,t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}$	ξ Störung $[...]$ t Zeit $[s]$ ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ k Wellenzahl $[\frac{1}{m}]$ r Radius $[m]$ A Amplitude $[...]$

8.6. Doppler-Effekt

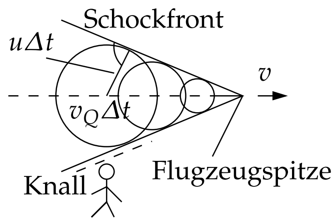
8.6.1. Akustischer Doppler-Effekt

 ruhende und bewegte Punktquelle	bewegte Quelle, ruhender Beobachter: $f' = \frac{1}{1 \mp \frac{v_Q}{u}} f$ − auf Hörer zu $f' = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u}\cos(\vartheta_Q)} f$	u Wellengeschw. $[\frac{m}{s}]$ f Frequenz $[Hz]$ f' gehörte Frequenz $[Hz]$ v_Q Geschw. Quelle $[\frac{m}{s}]$ v_B Geschw. Beobachter $[\frac{m}{s}]$ ϑ Winkel $[rad]$
 bewegte Punktquelle	ruhende Quelle, bewegter Beobachter: $f' = (1 \pm \frac{v_B}{u}) f$ + auf Quelle zu $f' = (1 + \frac{v_B}{u}\cos(\vartheta_B) f$	
 bewegter Beobachter und bewegte Punktquelle	Allgemein: $f_B = \frac{u + v_B\cos(\vartheta_B)}{u - v_Q\cos(\vartheta_Q)} f_Q$	

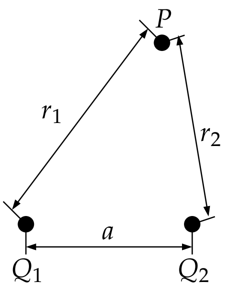
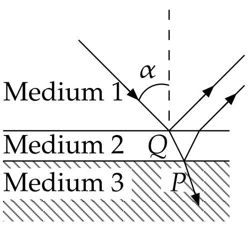
8.6.2. Optischer Doppler-Effekt

 bewegter Beobachter und bewegte Punktquelle	$f' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta\cos(\vartheta)} f$ $\beta = \frac{v}{c}$ falls $f \gg c$: $\frac{f - f'}{f} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{v}{c}$ falls $\vartheta = 0°$ oder $\vartheta = 180°$: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{v}{c}$	f Frequenz $[Hz]$ f' gesehene Frequenz $[Hz]$ v Geschw. relativ Beobachter Quelle $[\frac{m}{s}]$ ϑ Winkel $[rad]$ c Lichtgeschwindigkeit = $299'792'458$ $[\frac{m}{s}]$

8.6.3. Machscher Kegel

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Falls $v > u$ entsteht ein Machscher Kegel
$$\sin(\vartheta) = \frac{u}{v}$$
$$M = \frac{v}{u}$$</td>
<td>u Wellengeschw. $[\frac{m}{s}]$
v Geschw. Flugzeug $[\frac{m}{s}]$
ϑ Winkel des Kegels $[rad]$
M Machzahl $[1]$</td>
</tr>
</table>

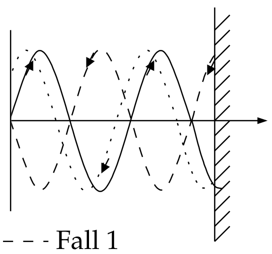
8.7. Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$l = nr$
In 1s geht Energie S durch $1m^2$:
$$S = \frac{\delta\xi^2\omega^2}{2}u$$
Prinzip von Huygens:
Jedes Flächenelement auf einer Welle kann als Zentrum einer Kugelwelle betrachtet weden. Die Wellenfläche zu einem späteren Zeitpunkt ist die Einhüllende all dieser Elementarwellen.</td>
<td rowspan="2">u Wellengeschw. $[\frac{m}{s}]$
l Optische Weglänge $[m]$
n Brechungsindex $[1]$
S Energie $[\frac{J}{m^2s}]$
ξ Störung $[...]$
ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Bei der Reflexion an einem optisch dichteren Medium findet ein Phasensprung von π statt.
Beispiel: Falls Medium 1 dichter Medium 2 dichter Medium 3: Phasensprung in P und Q.
$$\Rightarrow +\frac{\lambda}{2}$$
$\rightarrow$ Auslöschung bei $m\frac{\lambda}{2}$, $m = \{1, 3, 5, ...\}$</td>
</tr>
</table>

8.8. Optische Länge

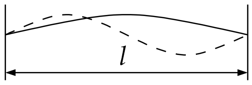
Durchqueren Wellen Medien muss mit optischen Längen gerechnet werden	$s \rightarrow ns$ $\lambda \rightarrow \frac{\lambda}{n}$	n Brech-Index $[1]$ s Strecke $[m]$ λ Wellenlänge $[m]$

8.9. Stehende Wellen

 - - - Fall 1 · · · · Fall 2 Einfallende Welle wird von Grenzfläche reflektiert	1. Fall: Phasensprung π bei Reflexion $\xi_0 \sin(k_x - \omega t) + \xi_0 \sin(k_x + \omega t) =$ $2\xi \sin(k_x) \cos(\omega t)$ Knoten bei $k_x = 0, \pi, 2\pi$ ... Bäuche bei: $k_x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ ... 2. Fall: Kein Phasensprung $\xi_0 \sin(k_x - \omega t) - \xi_0 \sin(k_x + \omega t) =$ $-2\xi \cos(k_x) \sin(\omega t)$ Knoten bei $k_x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ ... Bäuche bei: $k_x = 0, \pi, 2\pi$ ...	ξ Störung $[...]$ ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ t Zeit $[s]$ k Wellenzahl $[\frac{1}{m}]$

8.10. Eigenschwingungen

8.10.1. Saite



—— $\lambda = 2l$
- - - $\lambda = l$

Die Saite ist zweiseitig fixiert

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}$$

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{u}{2l} n = n f_1$$

$$f_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

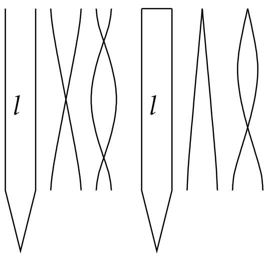
$$F = \frac{4l^2}{n^2}\rho A f^2$$

Bei Temperatur Änderung:

$$\Delta f = \left(\frac{E_{Sa}(\alpha_{Trag} - \alpha_{Sa})}{8\rho_{Sa} l^2 f^2} - \alpha_{Trag}\right)\Delta T f$$

u	Wellengeschw.	$[\frac{m}{s}]$
A	Fläche	$[m^2]$
F	Spannkraft	$[N]$
λ	Wellenlänge	$[m]$
ρ	Dichte Saite	$[\frac{kg}{m^3}]$
ξ	Störung	[...]
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$
f	Frequenz	$[Hz]$
f_1	Grundfrequenz	$[Hz]$
l	Saitenlänge	$[m]$
n	n-te Harmonische	$[1]$
α	Längenausd. koef.	$[\frac{1}{K}]$
ρ	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$
E	Elastizitätsmodul	$[\frac{N}{m^2}]$

8.10.2. Pfeife



offen gedackt

offene Pfeife:

$$f_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\varkappa RT}{M}} = \frac{u}{2l}$$

$$f_n = n f_1$$

$$\lambda_n = \frac{4l}{n} \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

gedackte Pfeife:

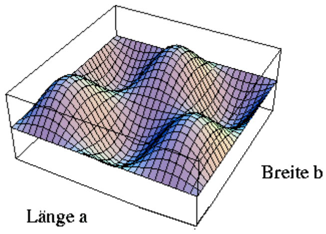
$$f_1 = \frac{1}{4l}\sqrt{\frac{\varkappa RT}{M}} = \frac{u}{4l}$$

$$f_n = n f_1$$

$$\lambda_n = \frac{4l}{n} \quad n = 2, 4, 6, \ldots$$

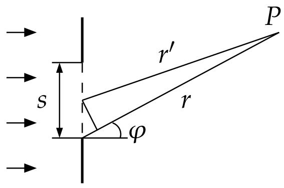
f	Frequenz	$[Hz]$
f_1	Grundfrequenz	$[Hz]$
M	Molmasse	$[\frac{kg}{mol}]$
T	abs. Temp.	$[K]$
$\varkappa$	Adiabatenexponent	$[1]$
R	univers. Gas-Konst. $= 8.3145$	$[\frac{J}{Kmol}]$
l	Saitenlänge	$[m]$
λ	Wellenlänge	$[m]$

8.10.3. Rechteckige Membrane

 m=3, n=2	$f(x,y) = \xi_0 \sin(k_x x + \varphi_x)\sin(k_y y + \varphi_y)$ $k_x a = m\pi \qquad k_y b = n\pi$ $f_{mn} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\mu}}\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$	f_{mn} Eigenfrequenz $[Hz]$ F Spannkraft $[N]$ μ Masse pro Fläche $[\frac{kg}{m^2}]$ ξ Störung [...] x, y Richtung x,y [...] a Länge $[m]$ b Breite $[m]$ m, n Anz. Oberwellen $[1]$

8.11. Beugung

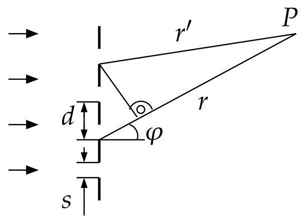
8.11.1. Beugung am Spalt

	$\xi = \frac{A}{r} A_s \cos(\omega t - k r_s)$ $A_s = \frac{\sin\left(\frac{ks\sin(\varphi)}{2}\right)}{\frac{ks\sin(\varphi)}{2}}$ $I_s \sim \xi^2$ Nullstelle n-ter Ordnung: $\sin(\varphi_n) = n\frac{\lambda}{s}$	A Amplitude [...] A_s Formfaktor $[1]$ s Spaltbreite $[m]$ r Abstand $[m]$ t Zeit $[s]$ ξ Störung [...] k Wellenzahl $[\frac{1}{m}]$ φ Betrachtungswinkel $[rad]$ I_s Intensität $[\frac{W}{m^2}]$ λ Wellenlänge $[m]$ n Ordnung $[1]$

8.11.2. Beugung an Kreisförmiger Öffnung

	$\sin(\varphi_1) = 1.22\frac{\lambda}{D}$ $a = 1.22 f\frac{\lambda}{D}$	D Öffnungsdurchmesser $[m]$ φ Betrachtungswinkel $[rad]$ λ Wellenlänge $[m]$ a Radius erster dunkler Ring $[m]$

8.11.3. Beugung am Gitter

 	$I_g \sim \frac{A^2}{r^2} A_s^2 B^2$ $B = \frac{\sin\left(\frac{kd\sin(\varphi)}{2} Z\right)}{\sin\left(\frac{kd\sin(\varphi)}{2}\right)}$ Hauptmaximum n-ter Ordnung: $\sin(\varphi_n) = n\frac{\lambda}{d}$ $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nZ$	A Amplitude $[...]$ A_s Formfaktor $[1]$ s Spaltbreite $[m]$ r Abstand $[m]$ t Zeit $[s]$ ξ Störung $[...]$ d Gitterkonst. $[m]$ φ Betrachtungswinkel $[rad]$ I_s Intensität $[\frac{W}{m^2}]$ λ Wellenlänge $[m]$ Z Zahl Gitteröffnungen $[1]$

Teil II.

Elektrizitätslehre

9. Grundlagen

9.1. Grundgrössen

Ladung Q	$\Delta Q = I(t) \cdot \Delta t = \int I(t)$ $\Delta Q = \frac{\Delta W(t)}{\Delta U(t)}$
Strom I	$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ $I = \frac{U}{R} = \frac{P}{U}$
Driftgeschwindigkeit v	$v = \frac{I}{neA}$
Spannung U	$U = RI$ $U(t) = \frac{\Delta W(t)}{\Delta Q}$ $U = \frac{P}{I} = \sqrt{PR}$ $\Delta U = E\Delta x$
Energie W	$W = Fh = mgh$ $\Delta W(t) = U(t)I(t)\Delta t$

Q	Ladung	$[C]$, $[As]$
I	Strom	$[A]$
J	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$
E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$
v	DriftGeschwindigkeit	$[\frac{m}{s}]$
U	Spannung	$[V]$
W	Arbeit	$[Ws]$, $[J]$
P	Leistung	$[W]$
R	Widerstand	$[\Omega]$
ρ	Spez. Widerstand	$[\frac{\Omega mm^2}{m}]$
G	Leitwert	$[S]$
κ	spez. Leitwert	$[\frac{S}{m}]$
t	Zeit	$[t]$
A	Fläche	$[m^2]$
F	Kraft	$[N]$
m	Masse	$[kg]$
g	Erdberschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$
l	Länge	$[m]$
α	Temp. Koeff.	$[\frac{1}{°C}]$
ϑ	Temperatur	$[°C]$
n	Elekronendichte	$[\frac{1}{m^3}]$
e	Elementarladung $1.602 \cdot 10^{19} C$	$[C]$

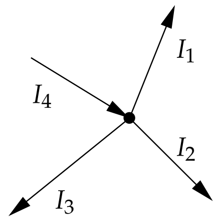
Leistung P	$P(t) = \frac{\Delta W(t)}{\Delta t}$ $P(t) = U(t)I(t)$ $P(t) = I^2(t)R = \frac{U^2(t)}{R}$
Widerstand R	$R = \frac{U}{R} = \frac{U^2}{P} = \frac{P}{I^2}$ $R = \frac{\rho l}{A} = \frac{l}{\kappa A}$
Spez. Widerstand ρ	$\rho = \frac{1}{\kappa A}$ $\rho = \rho_{20}(1 + \alpha_{20})\Delta\vartheta$
Leitwert G	$G = \frac{\kappa A}{l} = \frac{1}{R}$
Spez. Leitwert κ	$\kappa = \frac{1}{\rho}$
Stromdichte J	$J(t) = \frac{I(t)}{A} = \frac{\Delta I(x,y)}{\Delta A}$ $\vec{J} = \kappa \vec{E}$
Feldstärke E	$E(x) = \frac{\Delta U}{\Delta x}$ $E = \frac{F}{Q}$ $\vec{E} = \rho \vec{J}$

Q	Ladung	$[C]$, $[As]$
I	Strom	$[A]$
J	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$
E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$
v	DriftGeschwindigkeit	$[\frac{m}{s}]$
U	Spannung	$[V]$
W	Arbeit	$[Ws]$, $[J]$
P	Leistung	$[W]$
R	Widerstand	$[\Omega]$
ρ	Spez. Widerstand	$[\frac{\Omega mm^2}{m}]$
G	Leitwert	$[S]$
κ	spez. Leitwert	$[\frac{S}{m}]$
t	Zeit	$[t]$
A	Fläche	$[m^2]$
F	Kraft	$[N]$
m	Masse	$[kg]$
g	Erdberschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$
l	Länge	$[m]$
α	Temp. Koeff.	$[\frac{1}{°C}]$
ϑ	Temperatur	$[°C]$
n	Elekronendichte	$[\frac{1}{m^3}]$
e	Elementarladung $1.602 \cdot 10^{19} C$	$[C]$

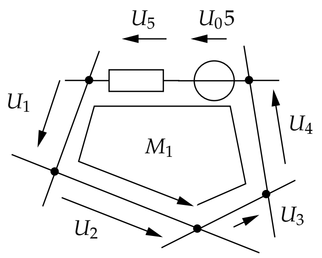
9.2. Netzwerke bei Gleichstrom

9.2.1. Kirchoffsche Gesetzte

Stromgesetz

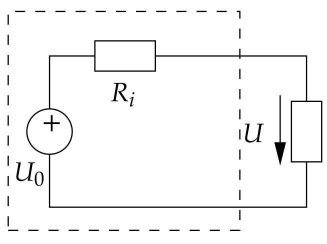
	Die Summe aller zufliessenden Ströme ist gleich der Summe aller Abfliessenden Ströme $\sum_{k=1}^{N} I_k = 0$	I Strom $[A]$

Spannungsgesetz

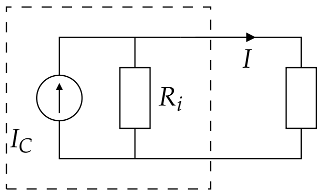
	Die Summe aller Spannungen im Kreis ist null. $\sum_{k=1}^{N} U_k = 0$	U Spannung $[V]$

9.3. Reale Quellen

9.3.1. Reale Spannungsquelle

	$U = U_0 - R_i I$ $R_i = \frac{U_0}{I_C}$	U Spannung $[V]$ I Strom $[I]$ R Widerstand $[\Omega]$

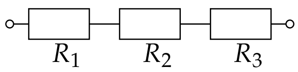
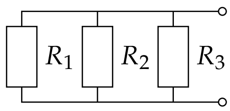
9.3.2. Reale Stromquelle

	$I = I_C - G_i U$ $G_I = \frac{1}{R_i} = \frac{I_C}{U_0}$	U Spannung $[V]$ I Strom $[I]$ R Widerstand $[\Omega]$

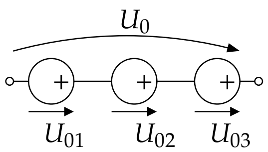
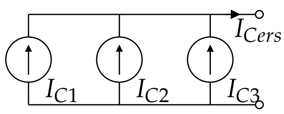
9.4. Netzwerkanalyse

9.4.1. Netzwerkumwandlung

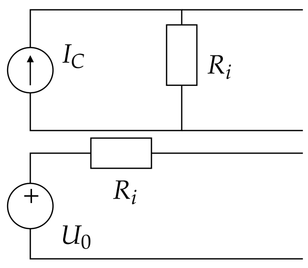
Widerstandsschaltungen

 	Serieschaltung: $R_{\text{ers}} = \sum_{k=1}^{n} R_k$ Parallelschaltung: $R_{\text{ers}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}$	U Spannung $[V]$ I Strom $[I]$ R Widerstand $[\Omega]$

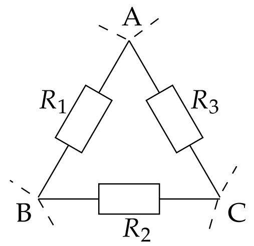
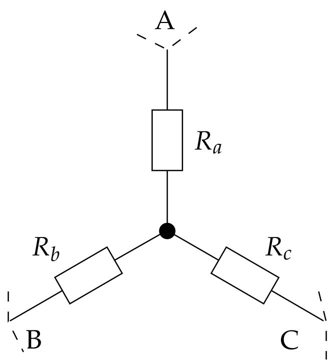
Mehrere Quellen

 	Serieschaltung von Spannungsquellen: $U_{0_{\text{ers}}} = \sum_{k=1}^{n} U_{0_k}$ Parallelschaltung von Stromquellen: $I_{C_{\text{ers}}} = \sum_{k=1}^{n} I_{C_k}$	U Spannung $[V]$ I Strom $[I]$

Quellenumwandlung

	U-Quelle → I-Quelle: $R_i = R_i \qquad I_C = \dfrac{U_0}{R_i}$ I-Quelle → U-Quelle: $R_i = R_i \qquad U_0 = I_C R_i$	U Spannung $[V]$ I Strom $[I]$ R Widerstand $[\Omega]$

Stern – Dreieck Umwandlung

	Dreieck → Stern: $R_a = \dfrac{R_1 R_2}{R_0}$ $R_b = \dfrac{R_2 R_3}{R_0}$ $R_c = \dfrac{R_1 R_3}{R_0}$ $R_0 = R_1 + R_2 + R_3$ Stern → Dreieck: $R_1 = R_a R_b B_0 \qquad G_1 = \dfrac{G_a G_b}{G_0}$ $R_2 = R_b R_c B_0 \qquad G_1 = \dfrac{G_b G_c}{G_0}$ $R_3 = R_a R_c B_0 \qquad G_1 = \dfrac{G_a G_c}{G_0}$ $G_0 = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$	U Spannung $[V]$ I Strom $[I]$ R Widerstand $[\Omega]$ G Leitwert $[S]$

Überlagerungsprinzip (Superposition)

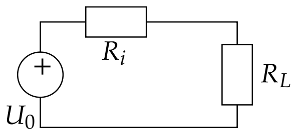
Die Wirkungen der entsprechenden Ursachen werden einzeln betrachtet. In einer Schaltung mit mehreren Quellen wird jede Quelle einzeln betrachtet. Die übrigen Spannungsquellen werden durch einen Kurzschluss und die restlichen Stromquellen durch einen Unterbruch ersetzt. Sie Summen der einzelnen Teilwirkungen ergibt die gesamte Wirkung.

(Voraussetzung: lineares System)

Nichtlinearer Verbraucher an linearer Schaltung (Thévenin)

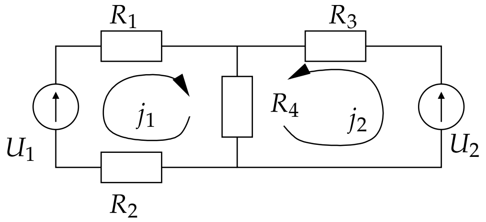
Die gesammte Schaltung muss in eine Ersatzquelle umgeformt werden. Das Ersatzschema gilt für U und I. (Achtung: z.B. $P_{Quellen} \neq U_0 I$)

9.4.2. Wirkungsgrad und Leistungsanpassung

	$\eta = \frac{P_L}{P_0} = \underbrace{\frac{R_L}{R_L + R_i}}_{(*)}$ (*) gilt nicht für Ersatzschaltungen	U Spannung $[V]$ P Leistung $[W]$ R Widerstand $[\Omega]$

9.4.3. Systematische Analyse linearer Netzwerke

Kreisströme als Variablen (Kreisstrom-Methode)



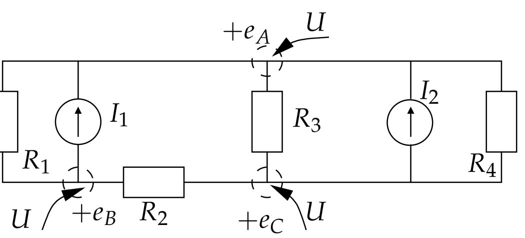
$\beta - \alpha + 1$ unabhängige Gleichungen

$$
\begin{aligned}
j_1(R_1 + R_2 + R_4) &+ j_2 R_4 &= U_1 \\
j_1 R_4 &+ j_2(R_3 + R_4) &= U_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \text{Anzahl Knoten} \\
\beta &= \text{Anzahl Zweige}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_4 & R_4 \\ R_4 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}
$$

Trennspannungen als Variable (Knotenspannungsmethode)



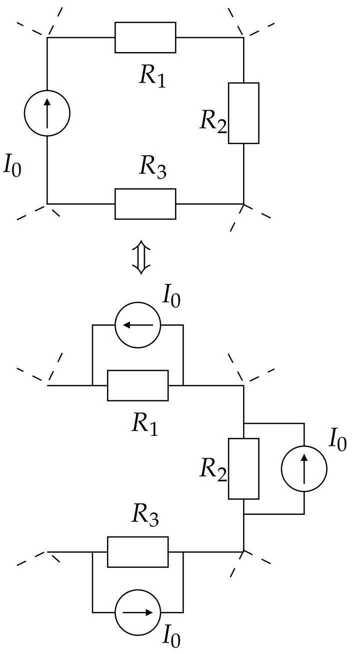
α = Anzahl Knoten
$\alpha - 1$ unabhängige Gleichungen

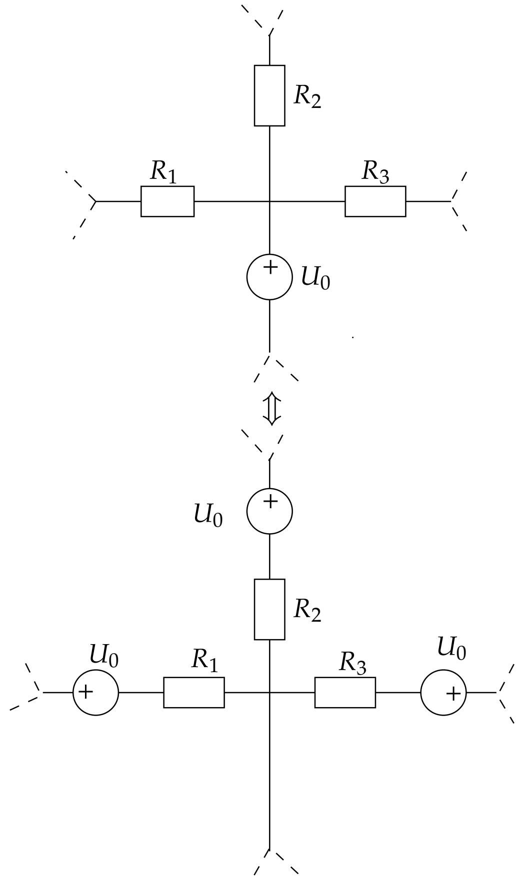
$$
\begin{aligned}
e_A(G_1 + G_3 + G_4) &- e_B G_1 &= -I_1 - I_2 \\
e_A G_1 &+ e_B(G_1 + G_2) &= I_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} G_1 + G_3 + G_4 & -G_1 \\ G_1 & G_1 + G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 - I_2 \\ I_1 \end{bmatrix}
$$

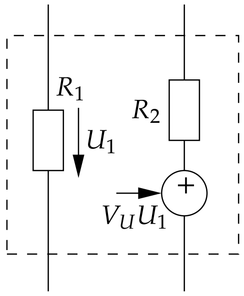
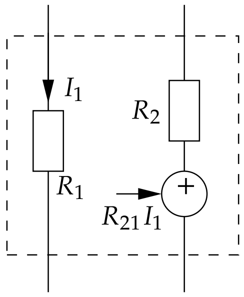
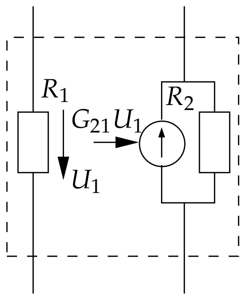
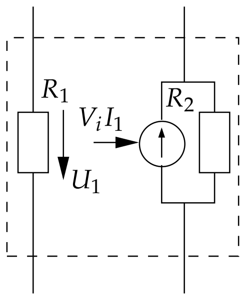
9.4.4. Quellenverschiebung

Es werden gleiche Quellen so in die Schaltung eingefügt, dass die Wirkung der ursprünglichen Quelle aufgehoben wird.



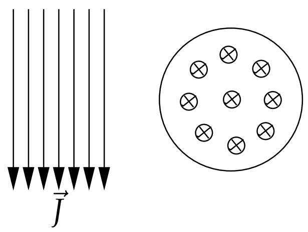


9.4.5. Netzwerke mit gesteuerten Quellen

	Spannungsgesteuerte Spannungsquelle $U_{02} = V_U U_1$	I Strom $[A]$ U Spannung $[V]$ R Widerstand $[\Omega]$ G Leitwert $[S]$ V Verstärkung $[1]$
	Stromgesteuerte Spannungsquelle $U_{02} = R_{12} U_1$	
	Spannungsgesteuerte Stromquelle $I_{C2} = G_{12} U_1$	
	Stromgesteuerte Stromquelle $I_{C2} = V_i U_1$	

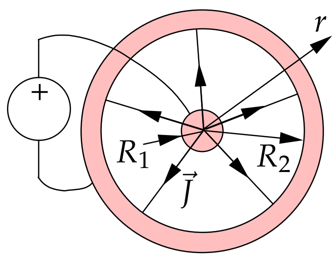
10. Das elektrische Strömungsfeld

10.1. Allgemein

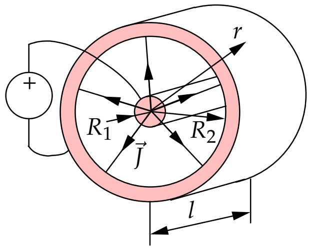
	$J = \frac{\Delta I}{\Delta A}$	I	Strom	$[A]$
	$I = \int \vec{J}\, d\vec{A} = \vec{J}\vec{A}$	J	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$
		A	Fläche	$[m^2]$

10.2. Spezielle Felder

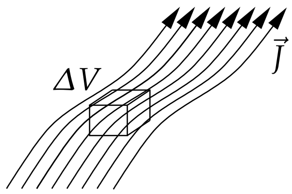
10.2.1. Räumliches Zentralfeld (Kugelanordnung)

	$J(r) = \frac{I}{A_{\text{Kugel}}} = \frac{I}{4\pi r^2}$	I	Strom	$[A]$
	$I = J(r) 4\pi r^2 - I = 0$	J	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$
	$J(r) = \kappa E(r) \qquad E(r) = \rho E(r)$	E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$
	$E(r) = \frac{I}{4\pi\kappa r^2}$	U	Spannung	$[V]$
	$U_{12} = \frac{I}{4\pi\kappa}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$	ρ	Spez. Widerstand	$[\frac{\Omega mm^2}{m}]$
	$V(r) = \int\limits_{r}^{R_2} \vec{E}(x)\, d\vec{x} = \frac{I}{4\pi\kappa}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$	κ	spez. Leitwert	$[\frac{S}{m}]$
	$G = 4\pi\kappa \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$	G	Leitwert	$[S]$
		R, r	Radius	$[m]$
		V	Potential	$[V]$
		A	Fläche	$[m^2]$

10.2.2. Zylindrisches Zentralfeld

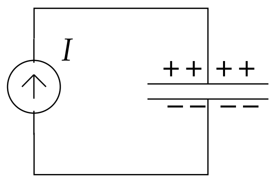
	$J(r) = \frac{I}{A_{\text{Kugel}}} = \frac{I}{4\pi r^2}$ $J(r) = \frac{I}{2\pi rl}$ $J(r) = \kappa E(r) \qquad E(r) = \rho E(r)$ $E(r) = \frac{I}{2\pi\kappa rl}$ $U_{12} = \frac{I}{2\pi\kappa l} \ln \frac{r_2}{r_1}$ $U = \frac{I}{2\pi\kappa l} \ln \frac{R_2}{R_1}$ $V(r) = \frac{I}{2\pi\kappa l} \ln \frac{R_2}{r}$ $G = \frac{2\pi\kappa l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$	I Strom $[A]$ J Stromdichte $[\frac{A}{m^2}]$ E el. Feldstärke $[\frac{V}{m}]$ U Spannung $[V]$ V Potential $[V]$ ρ Spez. Widerstand $[\frac{\Omega mm^2}{m}]$ κ spez. Leitwert $[\frac{S}{m}]$ G Leitwert $[S]$ R, r Radius $[m]$ A Fläche $[m^2]$

10.2.3. Leistung und räumliche Leistungsdichte

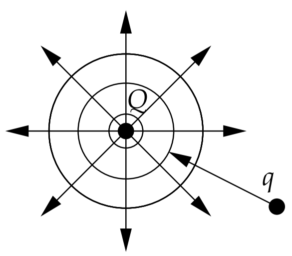
	$p(x,y,z) = \frac{\Delta P}{\Delta I}$ $p(x,y,z) = E(x,y,z)J(x,y,z)$ $= \kappa(x,y,z)E^2(x,y,z)$ $= \rho(x,y,z)J^2(x,y,z)$ Gesammtleistung P aus p: $P = \sum \Delta p = \sum_n P_n \Delta V$	I Strom $[A]$ J Stromdichte $[\frac{A}{m^2}]$ E el. Feldstärke $[\frac{V}{m}]$ U Spannung $[V]$ ρ Spez. Widerstand $[\frac{\Omega mm^2}{m}]$ κ spez. Leitwert $[\frac{S}{m}]$ G Leitwert $[S]$ R, r Radius $[m]$ A Fläche $[m^2]$

11. Elektrostatik

11.1. Das Coulobsche Gesetz

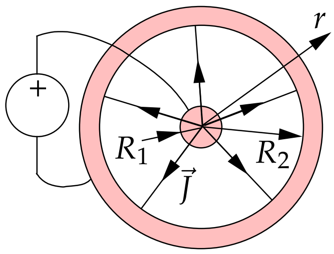
 	$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r^2}$ $F > 0 \rightarrow$ Abstossung $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Nm}$	F Kraft $[N]$ Q Ladung $[C]$ r Radius $[m]$ ϵ Dielektrizität $[\frac{C}{Nm}]$ ϵ_r rel. Dielektrizität ϵ_0 Dielektrizitätskonstante $[\frac{C}{Nm}]$

11.2. Das elektrostatsiche Feld (Allgemein)

 Bei mehreren Ladungen gilt das Superpositionsprinzip	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\vec{e}_r$ $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$ $U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\, d\vec{s}$ $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ $\psi_{el} = \int_A \vec{D}\, d\vec{A}$ $\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$ $Q = CU$	F Kraft $[N]$ Q Ladung $[C]$ q Probeladung $[C]$ r Radius $[m]$ C Kapazität $[F]$ E el. Feldstärke $[\frac{V}{m}]$ U Spannung $[V]$ V Potential $[V]$ σ Oberfl. Ladungsdichte $[\frac{\Omega mm^2}{m}]$ A Fläche $[m^2]$ ψ_{el} el. Fluss $[C]$ ϵ Dielektrizität $[\frac{C}{Nm}]$ ϵ_r rel. Dielektrizität ϵ_0 Dielektrizitätskonstante $[\frac{C}{Nm}]$

11.3. Spezielle Felder

11.3.1. Räumliches Zentralfeld (Kugelanordnung)

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = const$$

für $R_1 < r < R_2$ gilt:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{1}{\epsilon}D(r)$$

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{QR^2}{4\pi r^2} = \frac{\sigma R^2}{r^2}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Hülle bei r:

$$\psi_{el} = D(r)4\pi r^2 = Q$$

Kugelkondensator:

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

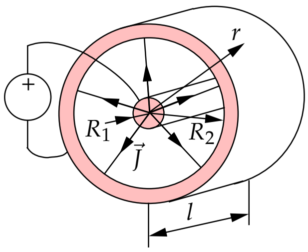
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\psi_{el}}{U} = 4\pi\epsilon\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

</td>
<td>

Q	Ladung	$[C]$
R, r	Radius	$[m]$
C	Kapazität	$[F]$
E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$
U	Spannung	$[V]$
V	Potential	$[V]$
σ	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{\Omega mm^2}{m}]$
A	Fläche	$[m^2]$
ψ_{el}	el. Fluss	$[C]$
ϵ	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$
ϵ_r	rel. Dielektrizität	
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$

</td>
</tr>
</table>

11.3.2. Zylindrisches Zentralfeld



$$\sigma = \frac{Q}{2\pi R_1 l} = const$$

für $R_1 < r < R_2$ gilt:

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon r l} = \frac{1}{\epsilon} D(r)$$

$$D(r) = \frac{Q}{2\pi r l} = \frac{\sigma R}{r}$$

$$V(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{R_2}{r}$$

Hülle bei r:

$$\psi_{el} = D(r) 2\pi r l = Q$$

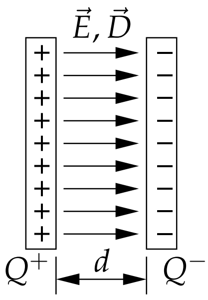
Kondensator:

$$U = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\psi_{el}}{U} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{R_1}{R_1}}$$

Q	Ladung	$[C]$
R, r	Radius	$[m]$
C	Kapazität	$[F]$
E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$
U	Spannung	$[V]$
V	Potential	$[V]$
σ	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{\Omega mm^2}{m}]$
A	Fläche	$[m^2]$
ψ_{el}	el. Fluss	$[C]$
ϵ	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$
ϵ_r	rel. Dielektrizität	
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$

11.3.3. Homogenes Feld (Plattenkondesator)



$A >> d^2$

$$\sigma = D = \frac{Q}{A}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{A\epsilon}$$

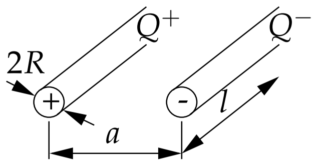
Kondensator:

$$U = \frac{\sigma}{\epsilon} d = \frac{Q}{A\epsilon} d$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon A}{d}$$

Q	Ladung	$[C]$
d	Abstand	$[m]$
C	Kapazität	$[F]$
E	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$
U	Spannung	$[V]$
V	Potential	$[V]$
σ	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{\Omega mm^2}{m}]$
A	Fläche	$[m^2]$
ψ_{el}	el. Fluss	$[C]$
ϵ	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$
ϵ_r	rel. Dielektrizität	
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$

11.3.4. Paralleldrahtleitung

	Es gilt das Superpositionsprinzip: $E_{tot} = E_{Leiter_1} + E_{Leiter_2}$ Kondensator: $C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi \epsilon l}{\ln \frac{a-R}{R}}$ $C' = \frac{Q}{U} = \frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{a-R}{R}}$	Q Ladung $[C]$ d Abstand $[m]$ C Kapazität $[F]$ E el. Feldstärke $[\frac{V}{m}]$ U Spannung $[V]$ V Potential $[V]$ σ Oberfl. Ladungsdichte $[\frac{\Omega mm^2}{m}]$ A Fläche $[m^2]$ ψ_{el} el. Fluss $[C]$ ϵ Dielektrizität $[\frac{C}{Nm}]$ ϵ_r rel. Dielektrizität ϵ_0 Dielektrizitätskonstante $[\frac{C}{Nm}]$

11.4. Energie im elektrischen Feld

	$W = \frac{CU^2}{2}$ $w = \frac{W}{V}$ Allgemein: $w(x, y, z) = \frac{d\, W(x, y, z)}{d\, V}$	W Energie $[J]$ w Energiedichte $[J/m^3]$ U Spannung $[V]$ C Kapazität $[F]$ V Volumen $[m^3]$

11.5. Kräfte im elektrischen Feld

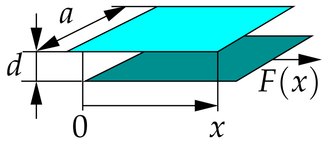
11.5.1. Allgemein

$$\Delta W = F\, \Delta x \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{\Delta W}{\Delta x} \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = \frac{dW(x)}{dx}$$

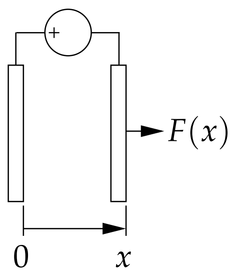
Prinzip der virtuellen Verschiebung

Man denkt sich den Leiter, auf den die Kraft berchnet werden soll, um Δx in diejenige Richtung verschoben, in welche die Kraft berechnet werden soll: $\rightarrow$ Energiedifferenz ΔW

11.5.2. Verschiebung

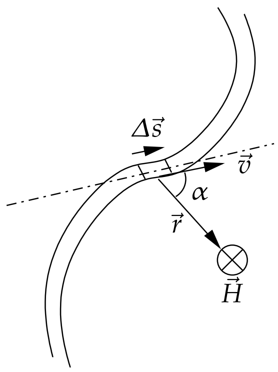
	Mit eingeschalteter Quelle: $W(x) = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon AU^2}{2d} = \frac{\epsilon axU^2}{2d}$ $F(x) = \frac{dW(x)}{dx} = \frac{\epsilon aU^2}{2d}$ Mit ausgeschalteter Quelle: $W(x) = \frac{\epsilon AU^2}{2d} = \frac{\epsilon ax_0^2U^2}{2xd}$ $F(x) = \frac{dW(x)}{dx} = \frac{\epsilon ax_0^2U^2}{2x^2d}$	Q Ladung $[C]$ d Abstand $[m]$ x Überlappung $[m]$ C Kapazität $[F]$ E el. Feldstärke $[\frac{V}{m}]$ U Spannung $[V]$ V Potential $[V]$ σ Oberfl. Ladungsdichte $[\frac{\Omega mm^2}{m}]$ A Fläche $[m^2]$ ψ_{el} el. Fluss $[C]$ ϵ Dielektrizität $[\frac{C}{Nm}]$ ϵ_r rel. Dielektrizität ϵ_0 Dielektrizitätskonstante $[\frac{C}{Nm}]$

11.5.3. Anziehung

	$W(x) = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon AU^2}{2x}$ $F(x) = \frac{dW(x)}{dx} = \frac{\epsilon AU^2}{2x^2}$	Q Ladung $[C]$ x Abstand $[m]$ C Kapazität $[F]$ E el. Feldstärke $[\frac{V}{m}]$ U Spannung $[V]$ V Potential $[V]$ σ Oberfl. Ladungsdichte $[\frac{\Omega mm^2}{m}]$ A Fläche $[m^2]$ ψ_{el} el. Fluss $[C]$ ϵ Dielektrizität $[\frac{C}{Nm}]$ ϵ_r rel. Dielektrizität ϵ_0 Dielektrizitätskonstante $[\frac{C}{Nm}]$

12. Magnetismus

12.1. Feldstärke

 siehe spezielle Anordnungen ab S. 98.	Biot-Savart $\vec{H} = \frac{Q}{4\pi r^3}(\vec{v} \times \vec{r})$ $H = \frac{Qv}{4\pi r^2} \sin\alpha$ Leiterbezogen $d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^3}(d\vec{s} \times \vec{r})$ $dH = \frac{I\,ds}{4\pi r^2} \sin\alpha$ $H = \int d\vec{H} = \int \frac{I}{4\pi r^2} \sin\alpha\, ds$	H Feldstärke $[\frac{A}{m}]$ I Strom $[A]$ ds infinitdesimalkleines Leiterstück $[m]$ r Radius $[m]$ v Geschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$ $[m]$ α Winkel $[rad]$

12.2. Permeabilität

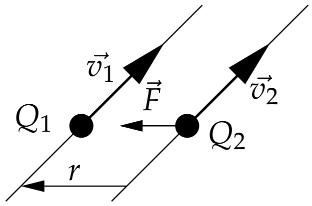
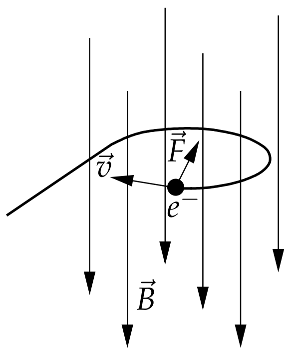
	$\mu = \mu_0 \mu_r$ $\mu_0 = \frac{4\pi}{10} \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{H}{m}$	μ Permeabilität $[\frac{H}{m}]$ μ_r Permeabilitätszahl $[1]$ μ_0 Permeabilität des Vakuums $[\frac{H}{m}]$

12.3. Magnetische Flussdichte

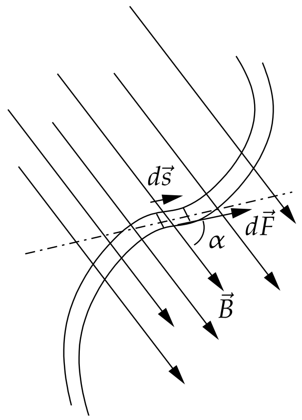
siehe spezielle Anordnungen ab S. 98.	$\vec{B} = \mu\vec{H}$	H Feldstärke $[\frac{A}{m}]$ μ Permeabilität $[\frac{H}{m}]$ B Flussdichte, Induktion $[T]$, $[\frac{Vs}{m^2}]$

12.4. Kräfte im Magnetischen Feld

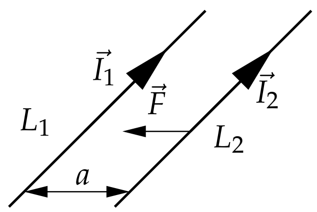
12.4.1. Kräfte auf Ladungen

 $\vec{v}, \vec{H}, \vec{F}$ bilden ein Rechtssystem	Für parallele Bahnen $F_A = \dfrac{\mu_0 Q_1 Q_2 v_1 v_2}{4\pi r^2}$ Allgemein $F = Q_2\vec{v}_2 \times \left(\dfrac{\mu}{4\pi}\dfrac{Q_1\vec{v}_1 \times \frac{\vec{r}}{r}}{r^2}\right)$	H Feldstärke $[\frac{A}{m}]$ F Kraft auf Ladung Q_1 $[N]$ $Q_{1,2}$ Lanung $[C]$ $v_{1,2}$ Geschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$ $[m]$ r Radius $[m]$ μ Permeabilität $[\frac{H}{m}]$ B Flussdichte, Induktion $[T]$, $[\frac{Vs}{m^2}]$
	$F = Q(\vec{v} \times \vec{B})$ $F = Q(\vec{v} \times \mu\vec{H})$ $F = Qv\mu H \sin\alpha$	

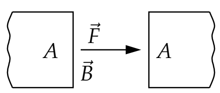
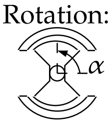
12.4.2. Kraft auf Leiter im B-Feld

	$d\vec{F} = \frac{dQ}{dt}(\vec{ds} \times \vec{B}) = I(d\vec{s} \times \vec{B})$ $dF = IBds \sin\alpha$ für geraden Leiter: $F = IBl \sin\alpha$	B Flussdichte, Induktion $[T]$, $[\frac{Vs}{m^2}]$ F Kraft auf Leiter $[N]$ Q Lanung $[C]$ I Strom $[A]$ α Winkel $[rad]$ ds infinitdesimalkleines Leiterstück $[m]$ l Länge $[m]$

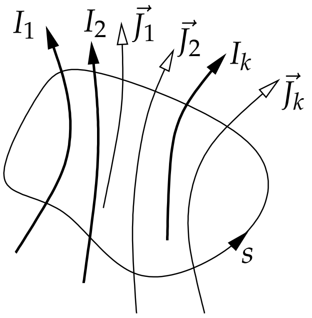
12.4.3. Kräfte auf paralle Leiter

	$F = \frac{\mu l I_1 I_2}{2\pi a}$ $\vec{I}_1 \uparrow\downarrow \vec{I}_2 \Rightarrow$ Abstossung $\vec{I}_1 \uparrow\uparrow \vec{I}_2 \Rightarrow$ Anziehung	F_A Kraft zwischen den Leitern $[N]$ $L_{1,2}$ Leiter $[C]$ $I_{1,2}$ Strom $[A]$ a Abstand $[m]$ μ Permeabilität $[\frac{H}{m}]$

12.4.4. Kräfte auf Randflächen eines Feldes

Energie W siehe S. 94  Rotation: 	$F = \frac{dW(s)}{ds}$ Prinzip der virtuellen Verschiebung: Fläche um ds verschoben (s-Richtung = Kraftrichtung) $F = \frac{1}{2}BHA$ Bei Drehbewegung: $M_{rot} = \frac{dW(\alpha)}{d\alpha}$	F Kraft $[N]$ s Weg $[m]$ W Energie $[J]$ B Flussdichte, Induktion $[T]$, $[\frac{Vs}{m^2}]$ H Feldstärke $[\frac{A}{m}]$ A Fläche $[m^2]$ M_{rot} Drehmoment $[Nm]$ α Winkel $[rad]$

12.5. Durchflutung

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$\Theta = \oint\limits_S \vec{H}\,ds = I$

$\Theta = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k + \iint\limits_{A_s} \vec{J}\,\vec{d}A$</td>
<td rowspan="4">

Θ	Durchflutung	$[A]$
J	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$
I	Strom	$[A]$
s	Geschlossene Kurve	$[m]$
H	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$
U_{mg}	Magnetische Spannung	$[A]$
l	Länge	$[m]$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Nicht geschlossenser Weg $A \rightarrow B$</td>
<td>$U_{mgAB} = \int\limits_A^B \vec{H}\,d\vec{s}$

z.B Luftspalt: $U_{mgAB} = Hl$</td>
</tr>
<tr>
<td>Feld um Leiter</td>
<td>$\Theta = \oint\limits_S \vec{H}\,ds = I$</td>
</tr>
<tr>
<td>Spule</td>
<td>$\Theta = NI$</td>
</tr>
</table>

12.6. Magnetischer Fluss

<table>
<tr>
<td>siehe spezielle Anordnungen ab S. 98.</td>
<td>$\Phi = \iint\limits_A \vec{B}\,dA$

$\Phi = \Lambda\Theta = \frac{\Theta}{R_m}$

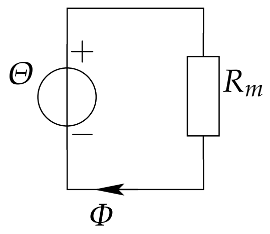
Homogenes Feld:

$\Phi = BA$</td>
<td>

Φ	Magnetischer Fluss	$[Vs]$, $[Wb]$
A	Fläche	$[m^2]$
B	Flussdichte, Induktion	$[T]$, $[\frac{Vs}{m^2}]$
Θ	Durchflutung	$[A]$
Λ	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}]$, $[\Omega s]$

</td>
</tr>
</table>

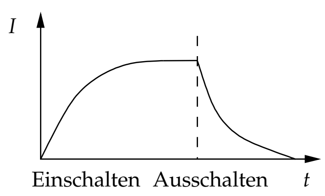
12.7. Ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises

	$R_m = \frac{\Theta}{\Phi}$ $\Lambda = \frac{1}{R_m}$ für homogenes Feld: $R_{m_n} = \frac{l_n}{\mu_n A_n}$	R_m Magnetischer Widerstand $[\frac{A}{Vs}]$ Φ Magnetischer Fluss $[Vs]$, $[Wb]$ Θ Durchflutung $[A]$ Λ Magnetischer Leitwert $[\frac{Vs}{A}]$, $[\Omega s]$ l Länge $[m]$ A Querschnitt $[m^2]$ μ Permeabilität $[\frac{H}{m}]$

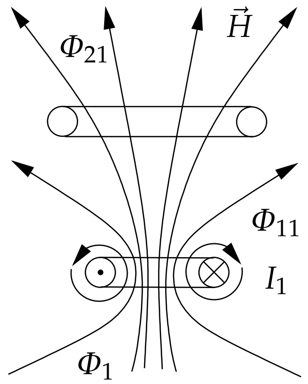
12.8. Spulenfluss

Flüsse durch alle Einzelwindungsflächen aufsummiert (verketteter Fluss)	$\Psi = N\Phi = \Lambda N^2 I$ $\Psi = LI$	Ψ Spulenfluss $[Vs]$ Φ Magnetischer Fluss Einzelw. $[Vs]$, $[Wb]$ L Induktivität $[\frac{Vs}{A}]$ N Windungszahl $[1]$ I Strom $[A]$ Λ Magnetischer Leitwert $[\frac{Vs}{A}]$, $[\Omega s]$

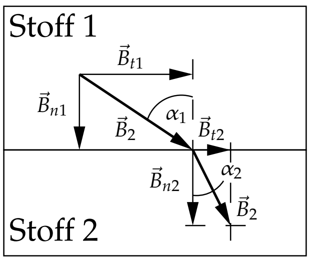
12.9. Induktivität

	$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\Psi}{I}$ $L = N^2 \Lambda = \frac{N^2}{R_m}$ $L = \frac{2W}{I^2}$	W Energie des Feldes $[Ws]$, $[J]$ L Induktivität $[H]$ Φ Magnetischer Fluss Einzelw. $[Vs]$, $[Wb]$ N Windungszahl $[1]$ I Strom $[A]$ Λ Magnetischer Leitwert $[\frac{Vs}{A}]$, $[\Omega s]$ R_m Magnetischer Widerstand $[\frac{A}{Vs}]$ Ψ Spulenfluss $[Wb]$

12.10. Gegeninduktivität und induktive Kopplung

 1. Index: Wirkungsort 2. Index: Ursachort	$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1}$ $M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{N_1\Phi_{12}}{I_2}$ $M = \sqrt{L_1 L_2}$ ohne Streufluss $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ mit Streufluss $k_{12} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}}$ $k_{21} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}}$ $\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} = 1 - k^2$	Ψ Spulenfluss $[Vs]$ Φ Magnetischer Fluss durch Windung $[Vs]$, $[Wb]$ Φ Magnetischer Streuluss $[Vs]$, $[Wb]$ L Induktivität $[\frac{Vs}{A}]$ N Windungszahl $[1]$ I Strom $[A]$ k Kopplungsfak. $[1]$ σ Streukoef. $[1]$ M Gegeninduktivität $[\frac{Vs}{A}]$

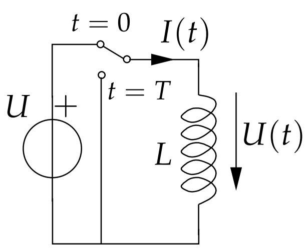
12.11. Brechung magnetischer Feldlinien

	$B_{n1} = B_{n2}$ $\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$ $H_{t1} = H_{t2}$ $\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$ $\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$	H Feldstärke $[\frac{A}{m}]$ B Flussdichte, Induktion $[T]$, $[\frac{Vs}{m^2}]$ α Winkel $[rad]$ μ Permeabilität $[\frac{H}{m}]$

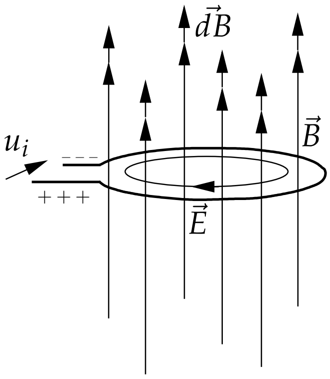
12.12. Räumliche Energiedichte

	Inhomogenes Feld: $W_{mg_{(x,y,z)}} = \frac{1}{2} B_{(x,y,z)} H_{(x,y,z)}$ Homogenes Feld: $W_{mg_{(x,y,z)}} = \frac{\mu}{2} H^2_{(x,y,z)}$	W Energiedichte $[\frac{Ws}{m^3}]$ $[\frac{J}{m^3}]$ H Feldstärke $[\frac{A}{m}]$ B Flussdichte, Induktion $[T]$, $[\frac{Vs}{m^2}]$ μ Permeabilität $[\frac{H}{m}]$

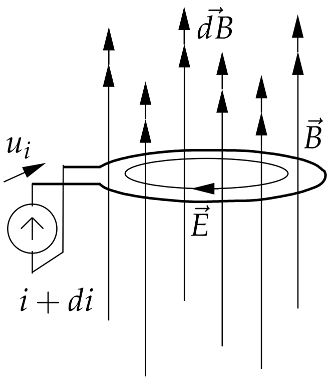
12.13. Energie im magnetischen Feld

	für $t \geq T$: $W = \frac{U^2 T^2}{2L}$ $W = \frac{\Psi^2}{2L}$ $W = \frac{LI^2}{2}$ $W = \frac{I\Psi}{2}$ $W = \frac{\Phi^2 R_m}{2}$ $W = \frac{\Theta^2 \Lambda}{2}$	W Enegie $[Ws]$ μ Permeabilität $[\frac{H}{m}]$ Ψ Spulenfluss $[Vs]$ Φ Magnetischer Fluss $[Vs]$, $[Wb]$ L Induktivität $[\frac{Vs}{A}]$ I Strom $[A]$ R_m Magnetischer Widerstand $[\frac{A}{Vs}]$ U Spannung $[V]$ t Zeit $[s]$ T Zeitpunkt $[s]$ Θ Durchflutung $[A]$ Λ Magnetischer Leitwert $[\frac{Vs}{A}]$, $[\Omega s]$

12.14. Induktionsgesetz

	$u_i = \frac{d\Psi}{dt}$ $\oint \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -u_i$ $\vec{E}$ bildet mit $d\vec{B}$ eine Linksschraube	Ψ Spulenfluss $[Vs]$ t Zeit $[s]$ E Elekrtostatisches Feld $[\frac{V}{m}]$ u_i Induktionsspannung $[V]$ Φ Magnetischer Fluss $[Vs]$, $[Wb]$ ds infinitdesimalkleines Leiterstück $[m]$ B Flussdichte, Induktion $[T]$, $[\frac{Vs}{m^2}]$

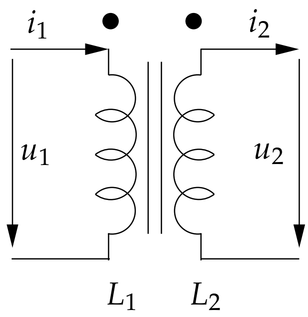
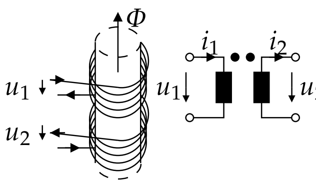
12.15. Selbstinduktion

 di während dt	Für Schleife: $u_i = \frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di}{dt}$ Für Spule: $u_i = \frac{d\Psi}{dt} = L\frac{di}{dt}$	Ψ Spulenfluss $[Vs]$ t Zeit $[s]$ E Elekrtostatisches Feld $[\frac{V}{m}]$ u_i Induktionsspannung $[V]$ Φ Magnetischer Fluss $[Vs]$, $[Wb]$ L Induktivität $[\frac{Vs}{A}]$ i Strom $[A]$ B Flussdichte, Induktion $[T]$, $[\frac{Vs}{m^2}]$

12.16. Serie- und Parallelschaltung von Induktivitäten

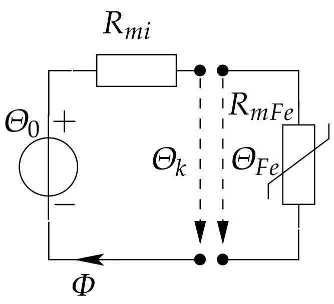
	Serieschaltung $L_{Ers.} = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ Parallelschaltung $L_{Ers.} = \dfrac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}}$	L Induktivität $[\frac{Vs}{A}]$

12.17. Trafogleichungen

	$u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$ $u_2 = u_{21} + u_{22} = M\frac{di_1}{dt} - L_2\frac{di_2}{dt}$ $u_1 = j\omega L_1\underline{i}_1 - j\omega M\underline{i}_2$ $u_2 = j\omega M\underline{i}_1 - j\omega L_2\underline{i}_2$	u Induktionsspannung $[V]$ i Strom $[A]$ L Induktivität $[\frac{Vs}{A}]$ t Zeit $[s]$ M Gegeninduktivität $[\frac{Vs}{A}]$ ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ R (Kupfer-) Widerstand $[\Omega]$

12.18. Nichtlinearität

12.18.1. $B(H)$-Kurve in $\Phi(\Theta)$-Kurve umrechnen

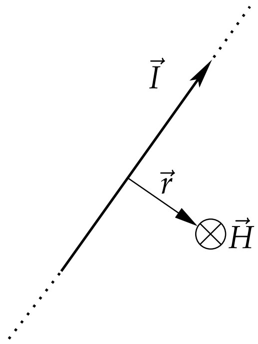
	Leerlauf $B_k(0) = B_c = \frac{\mu_0 A_L \Theta_0}{l_L A_{Fe}}$ Kurzschluss $H_0 = \frac{\Theta_0}{l_{Fe}}$ Umrechung: $\Phi_{Fe} = A_{Fe} B_{Fe}$ $\Theta_{Fe} = l_{Fe} H_{Fe}$ $B_L = \frac{A_{Fe}}{A_L} B_{Fe}$	B Flussdichte, Induktion $[T]$, $[\frac{Vs}{m^2}]$ H Feldstärke $[\frac{A}{m}]$ μ Permeabilität $[\frac{H}{m}]$ Θ Durchflutung $[A]$ l Länge $[m]$ A Querschnitt $[m^2]$ Φ Magnetischer Fluss $[Vs]$, $[Wb]$

12.18.2. Luftspaltkennwert α

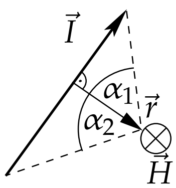
	$\alpha = \frac{A_L\, l_{Fe}}{A_{Fe}\, l_L}$ $\frac{1}{\mu_{reff}} = \frac{1}{\mu_{rFe}} + \frac{1}{\alpha}$ $\mu_{reff} = \frac{\mu_{rFe}\, \alpha}{\mu_{rFe} + \alpha}$	α Luftspalt-kenngrösse $[1]$ μ Permeabilität $[\frac{H}{m}]$ l Länge $[m]$ A Querschnitt $[m^2]$

12.19. Spezielle Anordnungen

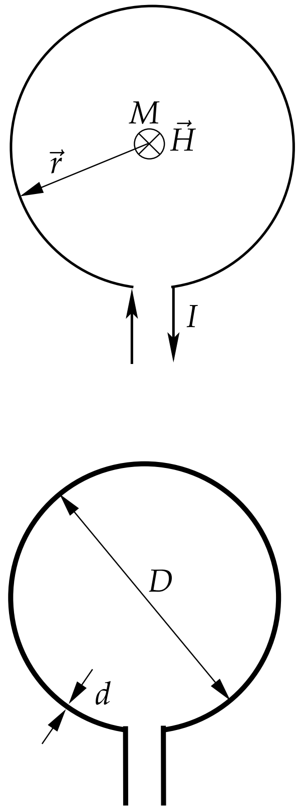
12.19.1. Langer gerader Leiter $l \gg d$

	Bezugspunkt ausserhalb des Leiters im Abstand r $H = \frac{I}{2\pi r}$ $\vec{H} = \frac{I}{2\pi\|\vec{r}\|^2}(\vec{e}_1 \times \vec{r})$	H Feldstärke $[\frac{A}{m}]$ r Abstand vom Leiter $[m]$ I Strom $[A]$

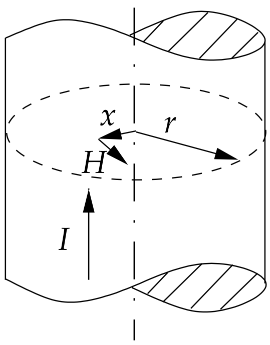
12.19.2. Kurzer, gerader Leiter

	$H = \frac{I}{4\pi r}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \cos\varphi \, d\varphi$ $H = \frac{I}{4\pi r}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$	H Feldstärke $[\frac{A}{m}]$ r Abstand vom Leiter $[m]$ I Strom $[A]$ α Winkel $[rad]$

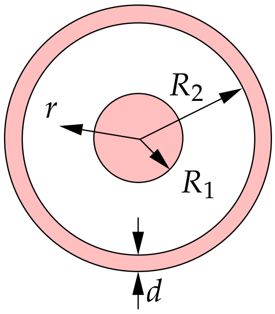
12.19.3. Kreisförmige Drahtschleife

 $D \gg d$	Bezugspunkt: M Teilkreis: $H = \frac{I}{4\pi r} \int_0^{\alpha} d\varphi$ Vollkreis: $H = \frac{I}{2r}$ Feld auf der Achse: $H = \frac{\|I\|r^2}{2(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\Phi = \frac{\mu D}{2} \ln \frac{D}{d} \Theta$ $\Lambda = \mu \frac{D}{2} \ln \frac{D}{d}$ $R_m = \frac{2}{\mu D \ln \frac{D}{d}}$ $L = \mu \frac{D}{2} \ln \frac{D}{d}$	H Feldstärke $[\frac{A}{m}]$ M Mittelpunkt I Strom $[A]$ r Radius $[m]$ μ Permeabilität $[\frac{H}{m}]$ d Draht Durchmesser $[m]$ D Schleifen Durchmesser $[m]$ Λ Magnetischer Leitwert $[\frac{Vs}{A}]$, $[\Omega s]$ R_m Magnetischer Widerstand $[\frac{A}{Vs}]$ L Induktivität $[\frac{Vs}{A}]$ Φ Magnetischer Fluss $[Vs]$, $[Wb]$ Θ Durchflutung $[A]$ x senkrechter Abstand zu M $[m]$

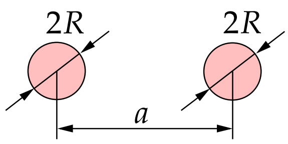
12.19.4. Voller Leiter

	$H = \frac{Ix}{2\pi r^2}$ gilt nur für $x \leq r$	H Feldstärke $[\frac{A}{m}]$ r Abstand von der Leiterachse $[m]$ I Strom $[A]$ x Abstand von der Achse $[m]$

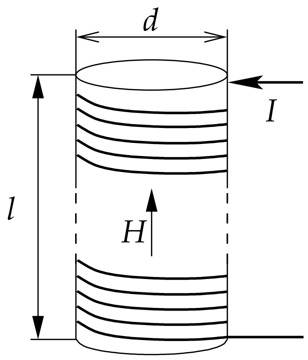
12.19.5. Koaxialkabel

 $l \gg R_1, R_2$	$H = \frac{I}{2\pi R_1^2} r \quad \text{für } 0 \le r < R_1$ $H = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{für } R_1 \le r \le R_2$ $H = \frac{I}{2\pi r}\left(1 - \frac{r - R_2}{d}\right)$ für $R_2 < r \le R_2 + d$ $\Phi = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \Theta$ $\Lambda = \mu \frac{l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ $R_m = \frac{2\pi}{\mu l \ln \frac{R_2}{R_1}}$ $L = \mu \frac{l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ $L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$	H Feldstärke $[\frac{A}{m}]$ r Abstand von der Leiterachse $[m]$ I Strom $[A]$ R Radius $[m]$ d Manteldicke $[m]$ μ Permeabilität $[\frac{H}{m}]$ l Länge $[m]$ Λ Magnetischer Leitwert $[\frac{Vs}{A}]$, $[\Omega s]$ R_m Magnetischer Widerstand $[\frac{A}{Vs}]$ L' Induktivitätsbelag $[\frac{Vs}{Am}]$ L Induktivität $[\frac{Vs}{A}]$ Φ Magnetischer Fluss $[Vs]$, $[Wb]$ Θ Durchflutung $[A]$

12.19.6. Paralleldrahtleitung

 $l \gg a$ $a \gg R$	$\Lambda = \mu \frac{l}{\pi} \ln \frac{a - R}{R}$ $R_m = \frac{\pi}{\mu l \ln \frac{a-R}{R}}$ $L = \mu \frac{l}{\pi} \ln \frac{a - R}{R}$ $L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{a - R}{R}$	μ Permeabilität $[\frac{H}{m}]$ l Länge $[m]$ a Abstand $[m]$ R Radius $[m]$ Λ Magnetischer Leitwert $[\frac{Vs}{A}]$, $[\Omega s]$ R_m Magnetischer Widerstand $[\frac{A}{Vs}]$ L' Induktivitätsbelag $[\frac{Vs}{Am}]$ L Induktivität $[\frac{Vs}{A}]$

12.19.7. Zylinderspule

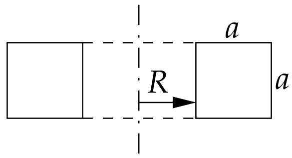
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Bezugspunkt: Mittelpunkt der Achse im Innern

$$H = \frac{IN}{\sqrt{l^2 + d^2}}$$
Bezugspunkt: Mittelpunkt der Stirnflächen

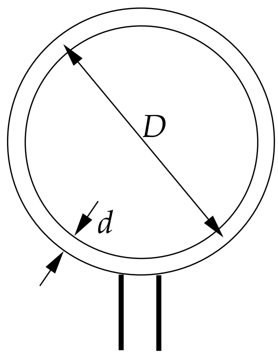
$$H = \frac{IN}{2\sqrt{l^2 + d^2}}$$</td>
<td rowspan="2">H Feldstärke $[\frac{A}{m}]$
l Länge bzw. mittl. Umfang der Spule $[m]$
d Durchmesser $[m]$
I Strom $[A]$
A Stirnfläche $[m^2]$
μ Permeabilität $[\frac{H}{m}]$
N Windungszahl $[1]$
Λ Magnetischer Leitwert $[\frac{Vs}{A}]$, $[\Omega s]$
R_m Magnetischer Widerstand $[\frac{A}{Vs}]$
L Induktivität $[\frac{Vs}{A}]$
Φ Magnetischer Fluss $[Vs]$, $[Wb]$
Θ Durchflutung $[A]$</td>
</tr>
<tr>
<td>Sehr lange Zylinderspule ($l \gg d$) und Ringspule (mittlerer Umfang l)</td>
<td>Bezugspunkt für H-Feld: im Inneren der Spule

$$H = \frac{IN}{l}$$
$$\Phi = \frac{\mu A}{l}\Theta = \mu\frac{\pi d^2}{4l}\Theta$$
$$\Lambda = \mu\frac{A}{l} = \mu\frac{\pi d^2}{4l}$$
$$R_m = \frac{l}{\mu A} = \frac{4l}{\mu\pi d^2}$$
$$L = \mu N^2\frac{A}{l} = \mu N^2\frac{\pi d^2}{4l}$$</td>
</tr>
</table>

12.19.8. Ringspule (Toroid)

	$\Lambda = \mu \frac{a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$ $R_m = \frac{2\pi}{\mu a \ln \frac{R+a}{R}}$ $L = \mu N^2 \frac{a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$ $\Phi = \frac{\mu a}{2\pi} \ln \frac{R_1 + a}{R_1} \Theta$ $H = \frac{NI}{R + \frac{a}{2} n}$ für $a \ll R$: $L = \frac{\mu N^2 A}{2R\pi}$ $\Phi \approx \frac{\mu A}{l_{mittl.}} \Theta$	a Spulen Breite, Höhe $[m]$ R Innenradius $[m]$ μ Permeabilität $[\frac{H}{m}]$ N Windungszahl $[1]$ Λ Magnetischer Leitwert $[\frac{Vs}{A}]$, $[\Omega s]$ R_m Magnetischer Widerstand $[\frac{A}{Vs}]$ L Induktivität $[\frac{Vs}{A}]$ Φ Magnetischer Fluss $[Vs]$, $[Wb]$ Θ Durchflutung $[A]$ A Fläche $[m^2]$

12.19.9. Kreisrahmenspule

 $D \gg d$	$\Lambda = \mu \frac{D}{2} \ln \frac{D}{d}$ $R_m = \frac{2}{\mu D \ln \frac{D}{d}}$ $L = \mu N^2 \frac{D}{2} \ln \frac{D}{d}$	a Spulen Breite, Höhe $[m]$ μ Permeabilität $[\frac{H}{m}]$ d Draht Durchmesser $[m]$ D Schleifen Durchmesser $[m]$ N Windungszahl $[1]$ Λ Magnetischer Leitwert $[\frac{Vs}{A}]$, $[\Omega s]$ R_m Magnetischer Widerstand $[\frac{A}{Vs}]$ L Induktivität $[\frac{Vs}{A}]$

13. Wechselstromlehre

13.1. Mittel- und Kennwerte

13.1.1. Linearer Mittelwert

	$$A_{\mathrm{m}} = \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} a(t)\, dt$$	A Amplitude [...] $a(t)$ Signalfunktion [...] T Periodendauer $[s]$ t Zeit $[s]$

13.1.2. Betragsmittelwert

	$$A_{\mathrm{\|m\|}} = \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} \|a(t)\|\, dt$$	A Amplitude [...] $a(t)$ Signalfunktion [...] T Periodendauer $[s]$ t Zeit $[s]$

13.1.3. Halbwellenmittelwert

	$$A_{\mathrm{2m}} = \frac{2}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} a(t)\, dt$$ für $a(t) > 0$	A_{2m} Halbwellen-mittelwert [...] $a(t)$ Signalfunktion [...] T Periodendauer $[s]$ t Zeit $[s]$

13.1.4. Quadratischer Mittelwert (Effektivwert, RMS)

	$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} a^2(t)\, dt}$ für sinunsförmige Signale: $A_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$	A Amplitude $[\ldots]$ $a(t)$ Signalfunktion $[\ldots]$ T Periodendauer $[s]$ t Zeit $[s]$

13.1.5. Scheitelfaktor (Crestfaktor)

	$k_{\text{s}} = \frac{a_{\text{max}}}{A_{\text{eff}}}$	A_{eff} Effektivwert $[\ldots]$ a_{max} Spitzenwert $[\ldots]$ k_{s} Crestfaktor $[1]$

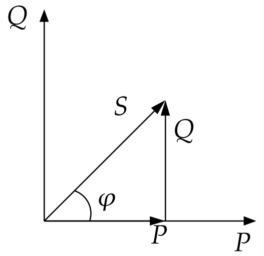
13.1.6. Formfaktor

	$k_{\text{f}} = \frac{A_{\text{eff}}}{A_{\lvert\text{m}\rvert}}$	A_{eff} Effektivwert $[\ldots]$ $A_{\lvert\text{m}\rvert}$ Betragsmittel-wert $[\ldots]$ k_{f} Formfaktor $[1]$

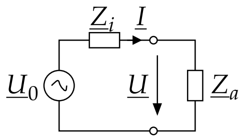
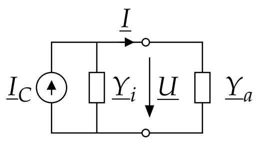
13.1.7. Effektivwert eines zusammengesetzten, mehrfrequenten Signals

	$A_{\text{eff}} = \sqrt{\sum\limits_{n=0}^{N} A^2_{\text{eff}_n}}$	A_{eff} Effektivwert $[\ldots]$

13.2. Leistung

 Beispiel mit Induktiver Last	$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^\star = \frac{U^2}{\underline{Z}^\star}$ $\underline{S} = P + jQ$ $P = UI\cos(\varphi) = Re(S)$ $Q = UI\sin(\varphi) = Im(S)$ $\cos(\varphi) = \frac{P}{S} \quad \sin(\varphi) = \frac{Q}{S}$	S Scheinleistung $[VA]$ P Wirkleistung $[W]$ Q Blindleistung $[Var]$ I Strom $[A]$ U Spannung $[V]$ φ Phase $[rad]$ Z Impedanz $[\Omega]$

13.2.1. Leistung und Leistungsanpassung bei Quellen

	$\underline{S} = U_0^2 \frac{Z_a}{\lvert Z_i + Z_a\rvert^2}$ $P = U_0^2 \frac{R_a}{(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2}$ Bei Leistungsanpassung: $X_a = -X_i \quad \text{bzw.} \quad R_a = R_i$ $\underline{Z}_a = \underline{Z}_i^\star$ $P_{max} = \frac{U_0^2}{4R_i}$	S Scheinleistung $[VA]$ P Wirkleistung $[W]$ I Strom $[A]$ U Spannung $[V]$ Z Impedanz $[\Omega]$ Y Admittanz $[S]$ X Reaktanz $[\Omega]$ R Widerstand $[\Omega]$ G Leitwert $[S]$
	$\underline{Y}_a = \underline{Y}_i^\star$ $P_{max} = \frac{I_C^2}{4G_i}$	

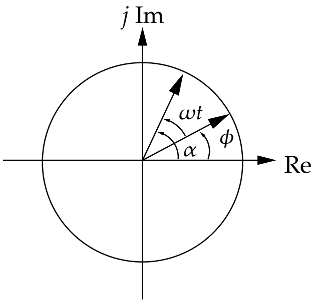
13.2.2. Effektivwert und Leistung

	$P = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = I_{eff}^2 R$	P Leistung $[W]$ R Widerstand $[\Omega]$ U Spannung $[V]$

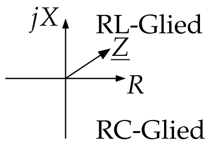
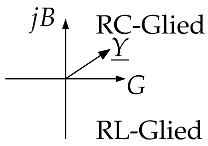
13.3. Energie

	$W(t) = \int_0^t P(\tau) d\tau$	W Energie $[J]$ P Leistung $[W]$ t Zeit $[s]$

13.4. Komplexe Darstellung sinusförmiger Vorgänge

	Hintransformation: $a(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ $\underline{a}(t) = A\cos(\omega t + \phi) + jA\sin(\omega t + \phi)$ $\underline{a}(t) = Ae^{j(\omega t+\phi)} = Ae^{j\phi}e^{j\omega t} = \underline{A}e^{j\omega t}$ $\underline{A} = Ae^{j\phi}$ Rücktransformation: $\underline{B} = Be^{j\beta}$ $\underline{b}(t) = \underline{B}e^{j\omega t} = Be^{j\beta}e^{j\omega t} = \underline{A}e^{j\omega t}$ $\underline{b}(t) = B\cos(\omega t + \beta) + jB\sin(\omega t + \beta)$ $b(t) = \mathrm{Re}\{\underline{b}(t)\} = B\cos(\omega t + \beta)$	A, B Amplitude $[V]$ a, b Signal $[V]$ ϕ, β Phase $[rad]$ ω Winkelgeschwindigkeit $[\frac{1}{s}]$ t Zeit $[s]$

13.5. Komplexe Darstellung von Impedanz und Admittanz

Impedanz-Ebene:  Admittanz-Ebene: 	$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_{\text{eff}}}{\underline{I}_{\text{eff}}} = R + jX$ $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jB$ $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$ bzw. $\underline{I} = \underline{Y}\,\underline{U}$ $\sum_{\text{Kreis}} \underline{U}_i = 0$ $\sum_{\text{Trennbündel}} \underline{I}_i = 0$ Serieschaltung: $\underline{Z}_s = \sum_{i=1}^{N} \underline{Z}_i$ Parallelschaltung: $\underline{Y}_p = \sum_{i}^{N} \underline{Y}_i$	U, u Spannung $[V]$ I, i Strom $[I]$ R Widerstand $[\Omega]$ G Leitwert $[S]$ Z Impedanz $[\Omega]$ Y Admitanz $[S]$ X Reaktanz $[\Omega]$ B Suszeptanz $[S]$

13.6. Klemmgrössen von Schaltelementen

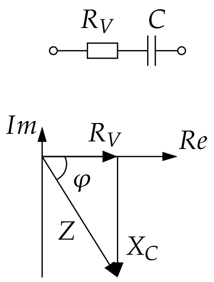
13.6.1. Allgemein

	$q(t) = \int_{t_a}^{t} i(\tau)\,d\tau$ $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ $p(t) = \frac{dW}{dt}$ $P_{at} = \frac{1}{t - t_a} \int_{t_a}^{t} p(\tau)\,d\tau$ $w_{at} = \int_{t_a}^{t} p(\tau)\,d\tau$	i Strom $[A]$ u Spannung $[V]$ q Ladung $[C]$ p Leistung $[W]$ w Gespeicherte Energie $[J]$ t, τ Zeit $[s]$

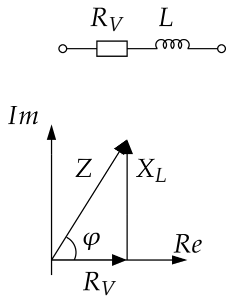
13.6.2. Ohm'sche Widerstände

	$u(t) = Ri(t)$ $i(t) = Gu(t)$ $p(t) = u(t)i(t)$ $\underline{Z}_R = R$ $\underline{Y}_R = \frac{1}{R} = G$	i Strom $[A]$ u Spannung $[V]$ R Widerstand $[\Omega]$ G Leitwert $[S]$ p Leistung $[W]$ Z Impedanz $[\Omega]$ t, τ Zeit $[s]$

13.6.3. Kapazitäten

	Zeitbereich: $q(t) = Cu(t)$ $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{du(t)}{dt}$ $u(t) = \frac{1}{C}\int_{t_a}^{t} i(\tau)\, d\tau + u(t_a)$ Frequenzbereich: $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{sC} = -j\frac{1}{\omega C}$ $\underline{Y}_C = j\omega C = sC$ Leistung, Energie: $p(t) = u(t)i(t)$ $w(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t)$	i Strom $[A]$ u Spannung $[V]$ q Ladung $[C]$ C Kapazität $[F]$ p Leistung $[W]$ Z Impedanz $[\Omega]$ Y Admitanz $[S]$ ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ s Laplaceoperator $[1]$ w Gespeicherte Energie $[J]$ t, τ Zeit $[s]$

13.6.4. Induktivitäten



Zeitbereich:

$$\Psi(t) = Li(t)$$

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int\limits_{t_a}^{t} u(\tau)\,d\tau + i(t_a)$$

$$p(t) = u(t)i(t)$$

$$w(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

Frequenzbereich:

$$\underline{Z}_L = j\omega L = sL$$

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{sL} = -j\frac{1}{\omega L}$$

Gegeninduktion:

$$u_{12}(t) = \pm M\frac{di_2(t)}{dt}$$

$$\underline{Z}_M = j\omega M$$

$$\underline{Y}_M = \frac{1}{j\omega M} = -j\frac{1}{\omega M}$$

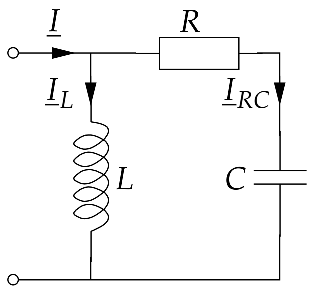
induktive Kopplung:

$$u_1(t) = L_1\frac{di_1(t)}{dt} \pm M\frac{di_2(t)}{dt}$$

i	Strom	$[A]$
u	Spannung	$[V]$
q	Ladung	$[C]$
Z	Impedanz	$[\Omega]$
Y	Admitanz	$[S]$
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$
s	Laplaceoperator	$[1]$
M	Gegeninduktivität	$[\frac{Vs}{A}]$
L	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$
Ψ	Spulenfluss	$[Vs]$
p	Leistung	$[W]$
w	Gespeicherte Energie	$[J]$
t, τ	Zeit	$[s]$

13.7. Zeigerdarstellung Komplexer Klemmgrössen

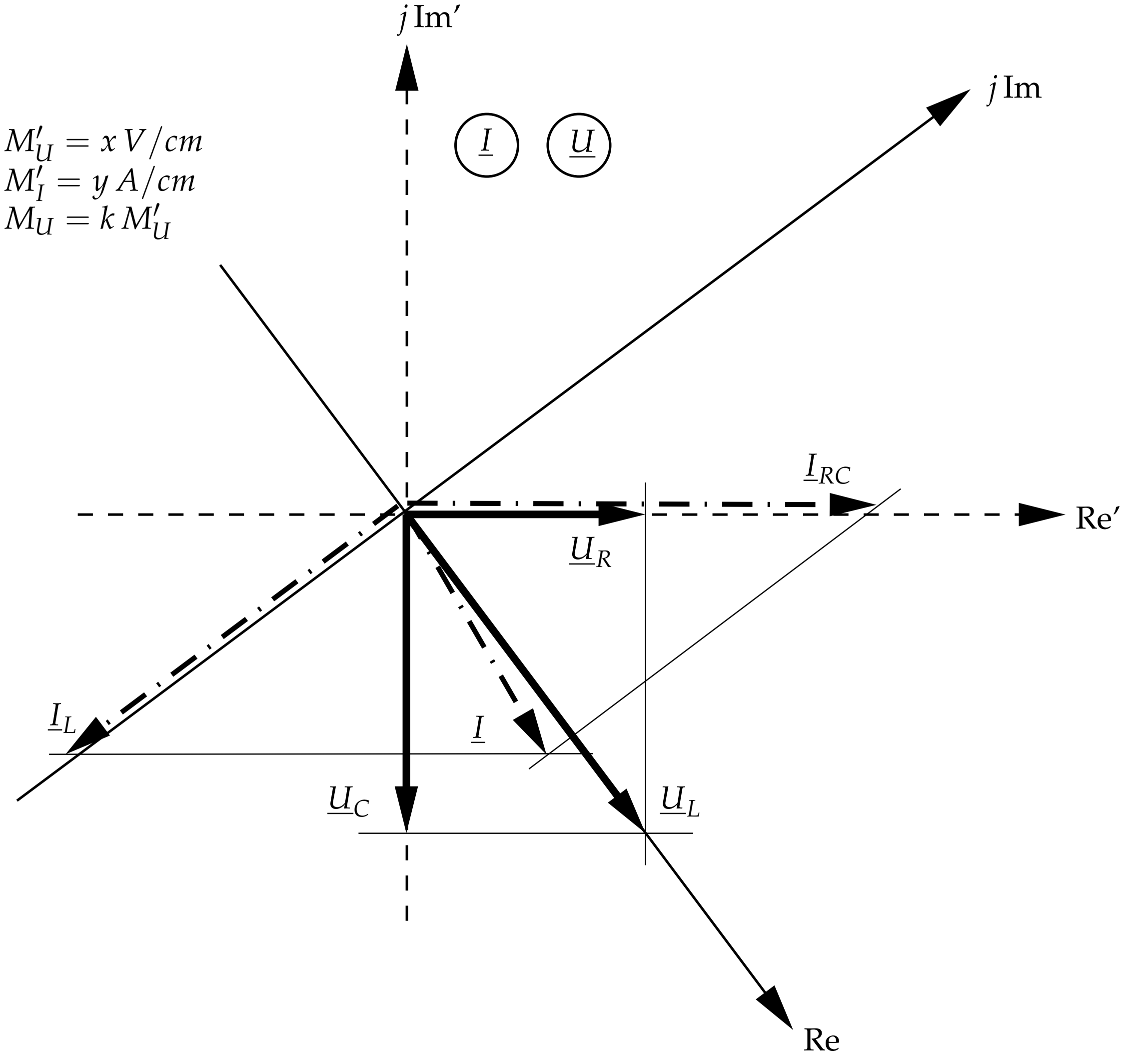
Alle Spannungen und Ströme am folgenden Netzwerk sind graphisch mittels Zeigerdiagramm darzustellen.



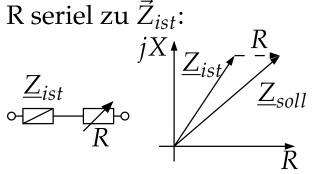
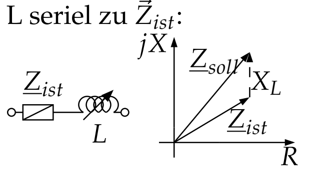
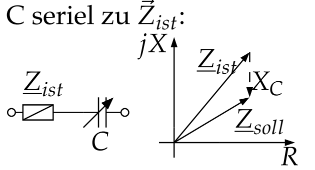
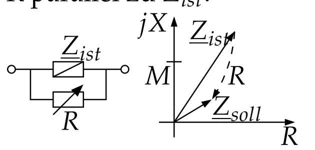
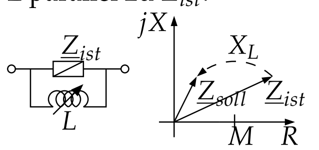
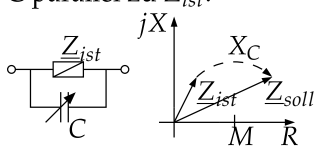
1. Impedanzen $\underline{Z}$ aller Elemente berechen.
2. Strom $\underline{I}_{RC}$ auf reeller Achse Re′ wählen.
3. Spannungen an $\underline{R}$ und $\underline{C}$ aus $\underline{I}_{RC}$ und $\underline{Z}$ berechnen und einzeichnen.
4. Spannung $\underline{U}_L$ entspricht der Summe von $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_C$.

   Korrekturfaktor: $k = \dfrac{\underline{U}_{Nenn}}{\underline{U}_{gemessen}}$

5. Strom $\underline{I}_L$ aus $\underline{U}_L$ und $\underline{Z}_L$ berechnen und einzeichnen.
6. Strom $\underline{I}$ entspricht der Summe von $\underline{I}_{RC}$ und $\underline{I}_L$.
7. Achsen neu bestimmen: Re in Richtung $\underline{U}_L$.

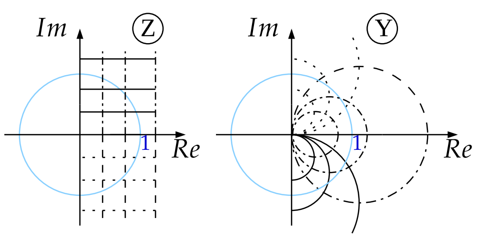


13.7.1. Impedanztransformation

R seriel zu $\vec{Z}_{ist}$: 	$\vec{Z}_{soll}$ bewegt sich auf einer Geraden parallel zur R-Achse nach rechts.
L seriel zu $\vec{Z}_{ist}$: 	$\vec{Z}_{soll}$ bewegt sich auf einer Geraden parallel zur X-Achse nach oben.
C seriel zu $\vec{Z}_{ist}$: 	$\vec{Z}_{soll}$ bewegt sich auf einer Geraden parallel zur X-Achse nach unten.
R parallel zu $\vec{Z}_{ist}$: 	$\vec{Z}_{soll}$ bewegt sich auf einem Halbkreis, welcher auf der X-Achse beginnt, durch den Endpunkt des $\vec{Z}_{ist}$-Vektors geht um im Nullpunkt endet. Falls $R = 0 \rightarrow \vec{Z}_{soll} = \vec{0}$. Falls $R = \infty \rightarrow \vec{Z}_{soll} = \vec{Z}_{ist}$.
L parallel zu $\vec{Z}_{ist}$: 	$\vec{Z}_{soll}$ bewegt sich auf einem Kreis mit Mittelpunkt M, welcher durch den Nullpunkt sowie durch den Endpunkt des $\vec{Z}_{ist}$- Vektors geht. Für $L \longrightarrow 0 \rightarrow \vec{Z}_{soll} \longrightarrow 0$
C parallel zu $\vec{Z}_{ist}$: 	$\vec{Z}_{soll}$ bewegt sich auf einem Kreis mit Mittelpunkt M, welcher durch den Nullpunkt und den Endpunkt des $\vec{Z}_{ist}$- Vektors geht. Für $C \longrightarrow \infty \rightarrow \vec{Z}_{soll} \longrightarrow 0$

Z_{ist}	Impedanz, die transformiert werden soll	$[\Omega]$
Z_{soll}	Impedanz, nach Transformation	$[\Omega]$
X	Blindwiderstand	$[\Omega]$
R	Widerstand	$[\Omega]$
L	Induktivität	$[H]$
C	Kapazität	$[F]$

13.7.2. Transformation von Z-Ebene zu Y-Ebene

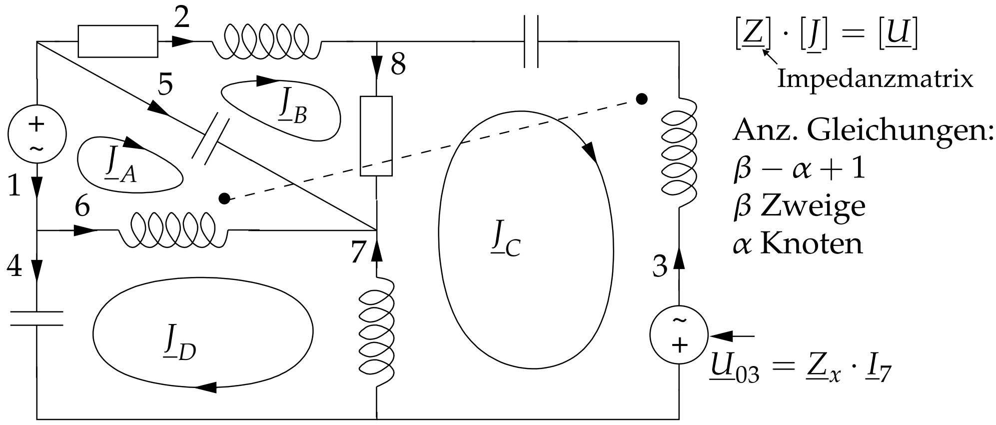


Im Bild ist zu sehen wie gewisse Punktmengen von der Z-Ebene auf die Y-Ebene abgebildet werden.

13.8. Netzwerkanalyse

13.8.1. Maschenmethode / Kreisstrommethode

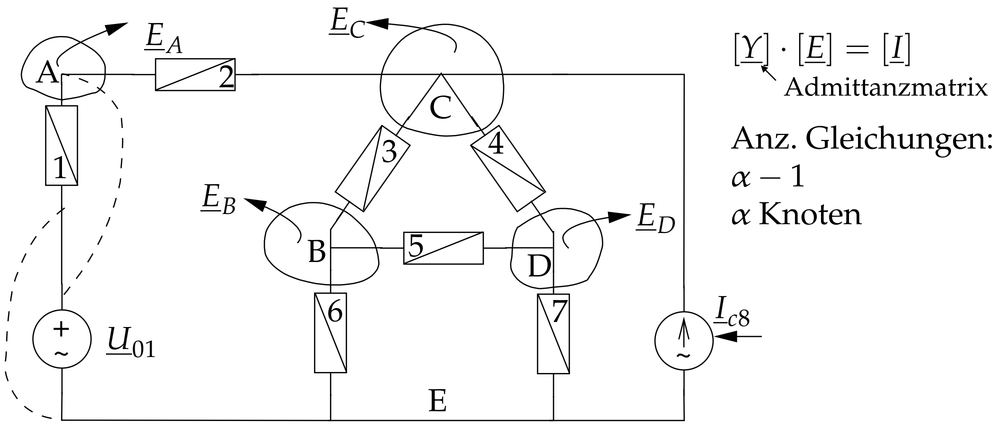
Es dürfen nur Spannungsquellen vorkommen, vorhandene Stromquellen sind zuerst umzuwandeln.



$$\begin{array}{lllllll}
\underline{J}_A & \underline{J}_B & \underline{J}_C & \underline{J}_D & & \\
+\underline{J}_A(j\omega L_6 - j\frac{1}{\omega C_5}) & -\underline{J}_B(-j\frac{1}{\omega C_5}) & +\underline{J}_C j\omega M & -\underline{J}_D j\omega L_6 & = & \underline{U}_{01} \\
-\underline{J}_A(-j\frac{1}{\omega C_5}) & +\underline{J}_B(R_8 + R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_5}) & -\underline{J}_C R_8 & -0 & = & 0 \\
+\underline{J}_A j\omega M & -\underline{J}_B R_8 & +\underline{J}_C(R_8 + j\omega L_7 + j\omega L_3 - j\frac{1}{\omega C_3} + \underline{Z}_x) & -\underline{J}_D(\underline{Z}_x + j\omega M + j\omega L_7) & = & 0 \\
-\underline{J}_A j\omega L_6 & -0 & -\underline{J}_C(j\omega L_7 + j\omega M) & +\underline{J}_D(j\omega L_6 + j\omega L_7 - j\frac{1}{\omega C_4}) & = & 0
\end{array}$$

13.8.2. Trennbündelmethode / Knotenspannungsmethode

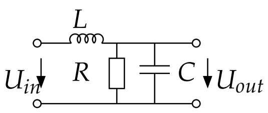
Es dürfen nur Stromquellen vorkommen, vorhandene Spannungsquellen sind zuerst umzuwandeln.



$$\begin{array}{llllll}
\underline{E}_A & \underline{E}_B & \underline{E}_C & \underline{E}_D & & \\
+\underline{E}_A(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) & -0 & -\underline{E}_C\underline{Y}_2 & -0 & = & \underline{U}_{01}\underline{Y}_1 \\
-0 & +\underline{E}_B(\underline{Y}_3 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6) & -\underline{E}_C\underline{Y}_3 & -\underline{E}_D\underline{Y}_5 & = & 0 \\
-\underline{E}_A\underline{Y}_2 & -\underline{E}_B(\underline{Y}_3 + k\underline{Y}_6) & +\underline{E}_C(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) & -\underline{E}_D\underline{Y}_4 & = & 0 \\
-0 & -\underline{E}_B\underline{Y}_5 & -\underline{E}_C\underline{Y}_4 & +\underline{E}_D(\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_7) & = & 0
\end{array}$$

13.9. Darstellungsformen

13.9.1. Beispiel: Nyquistdiagramm, Ortskurve

 $R = 2k\Omega$, $L = 10mH$, $C = 10nF$	$\underline{G} = \frac{\underline{U}_{out}}{\underline{U}_{in}}$ $\underline{G} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega\frac{L}{R}}$ tiefe f ($\omega \ll \frac{1}{\sqrt{LC}}$): $\underline{G} \approx 1\angle 0°$ hohe f ($\omega \gg \frac{1}{\sqrt{LC}}$): $\underline{G} \approx \frac{1}{\omega^2 LC}\angle -180°$ Achsenschnittpunkte: $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$: $Re(\underline{G}) = 0 \rightarrow \omega_0 \rightarrow \underline{G} = -2j$ $Im(\underline{G}) = 0$: $\rightarrow \omega \rightarrow 1$	G Frequenzgang, Verstärkung [1] ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ U Spannung $[V]$ L Induktivität $[H]$ C Kapazität $[C]$ R Widerstand $[\Omega]$

13.9.2. Bodediagramm

Vorgehen beim Erstellen eines Bodediagramms:

Netzwerkfunktion aufstellen $$F(\omega) = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2(j\omega)^2 + \ldots + a_n(j\omega)^n}{b_0 + b_1 j\omega + b_2(j\omega)^2 + \ldots + b_n(j\omega)^n}$$

In Produktform $$F(\omega) = K_1 \prod_{i=1}^{r} \text{Standardterme}, \quad K_1 = \frac{a_0}{b_0}$$

Standardterme $$\begin{cases} (j\omega T)^n \\ (1 + j\omega T)^n \\ \left[1 + 2\xi j\omega T + (j\omega)^2 T^2\right]^n \end{cases} \qquad n \pm 1 \, , \pm 2 \ldots$$

$$1 + 2\xi j\omega T + (j\omega)^2 T^2 = \begin{cases} (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) & \text{für} \quad \xi > 1 \\ (1 + j\omega T)^2 & \text{für} \quad \xi = 1 \\ \text{nicht aufspaltbar} & \text{für} \quad \xi < 1 \end{cases}$$

Normierung

- Frequenz: Bezugsfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{T_0} \Longrightarrow$ normierte Frequenz $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega T_0$
  Beispiele: $\omega_0 = \frac{1}{T} \Longrightarrow \Omega = \omega T$ oder $\omega_0 = 1\frac{1}{s} \Longrightarrow \Omega = \omega 1s$
- Wert: Betzugswert $K_0 \Longrightarrow$ normierte Konstante $K = \frac{K_1}{K_0}$
  Beispiel: $K_0 = K_1 \Longrightarrow K = 1$

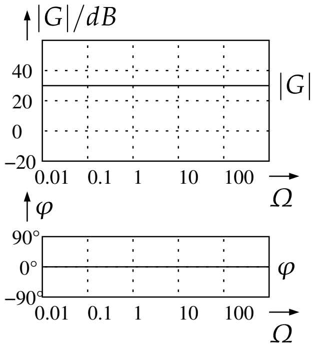
Normierte Netzwerkfunktion $F(\omega) \Longrightarrow F_n(\Omega) = F_n(\omega T_0) = F_n(\frac{\omega}{\omega_0})$
Normierte Standardterme

$$\begin{array}{lcl} (j\omega T)^n & \Longrightarrow & (j\Omega \frac{T}{T_0})^n \\ (1 + j\omega T)^n & \Longrightarrow & (1 + j\Omega \frac{T}{T_0})^n \\ \left[1 + 2\xi j\omega T + (j\omega)^2 T^2\right]^n & \Longrightarrow & \left[1 + 2\xi j\Omega \frac{T}{T_0} + (j\Omega)^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right]^n \end{array}$$

Bodediagramm

- Betrag, Amplitudengang: $|G|/dB = \sum_{i=1}^{r} 20 \log_{10}\{|norm.Standardterme|\} + 20 \log_{10} K$
- Argument, Phasengang: $\varphi = \sum_{i=1}^{r} arg\{norm.Standardterme\}$

P-Glied: Standardterm K

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Form:

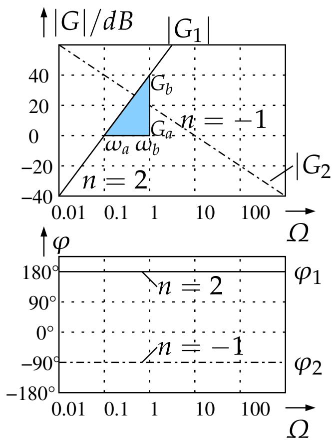
K

Steigung: $0 \frac{dB}{DK}$

$|G| = 20 \log_{10}(K)$

$\varphi = const_0$</td>
<td>K Konstante $[1]$
G Verstärkung $[dB]$
φ Phase $[°]$</td>
</tr>
</table>

I-Glied: Standardterm $(j\omega T)^n$



Siehe auch S.165

Form:

$(j\omega T)^n$

Normalisiert:

$(j\omega \frac{T}{T_0})^n$

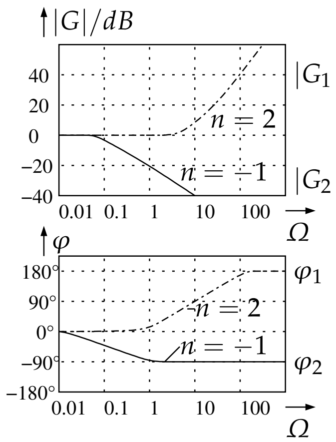
Amplitude: $|G| = \omega^n T^n$
$|G| \Rightarrow$ Gerade
Steigung: $n \cdot 20\frac{dB}{DK}$
Falls $\Omega = \frac{T_0}{T} \Rightarrow |G| = 0$

Phase φ:
$\varphi = n \cdot 90°$

$$\frac{G_a}{G_b} = \frac{\omega_a^n}{\omega_b^n}, \qquad n = \pm 1$$

K	Konstante	[1]
G	Verstärkung	$[dB]$
φ	Phase	[°]
n	Exponent	[1]
T	Periode	$[s]$
T_0	Periode	$[s]$
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$
Ω	Normierte Frequenz	[1]

PT$_1$-Glied: Standardterm $(1 + j\omega T)^n$



Form:

$(1 + j\omega T)^n$

Normalisiert:

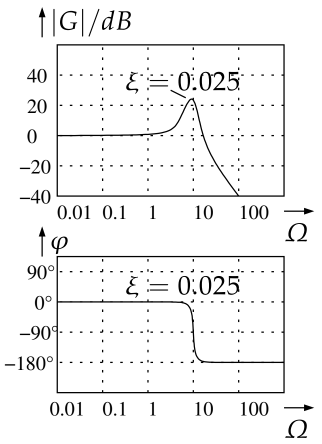
$$\left(1 + j\Omega \frac{T}{T_0}\right)^n$$

Amplitude: $|G| = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$
Für $\Omega \ll \frac{T_0}{T} : |G| \approx 0\frac{dB}{DK}$
Für $\Omega \gg \frac{T_0}{T} : |G| \approx n \cdot 20\frac{dB}{DK}$
Knick:
Bei $\Omega = \frac{T_0}{T} : |G| = n \cdot 3dB$

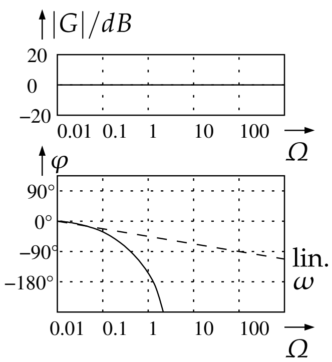
Phase: $\varphi = \arctan(\omega T)$
Für $\Omega \ll \frac{T_0}{T} : \varphi \approx 0°$
Für $\Omega \gg \frac{T_0}{T} : \varphi \approx n \cdot 90°$
Für $\Omega = \frac{T_0}{T} : \varphi = n \cdot 45°$

K	Konstante	[1]
G	Verstärkung	$[dB]$
φ	Phase	[°]
T	Periode	$[s]$
T_0	Periode	$[s]$
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$
Ω	Normierte Frequenz	[1]

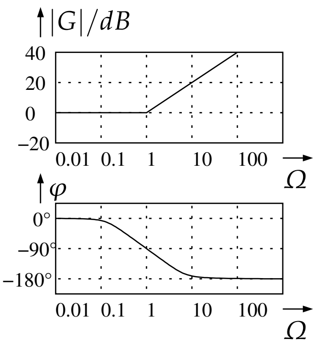
PT$_2$-Glied: Standardterm $\frac{1}{1+2\xi j\omega T+(j\omega T)^2}$

 Je kleiner ξ ist, desto schneller springt die Phase	Form: $\frac{1}{1+2\xi j\omega T+(j\omega)^2T^2}$ Normalisiert: $\frac{1}{1+2\xi j\Omega\frac{T}{T_0}+(j\Omega)^2\left(\frac{T}{T_0}\right)^2}$ Amplitude: $\|G\| = \sqrt{(1-\omega^2T^2)^2+(\omega 2\xi T)^2}$ Für $\Omega \ll \frac{T_0}{T}$: $\|G\| \approx 0\frac{dB}{DK}$ Für $\Omega \gg \frac{T_0}{T}$: $\|G\| \approx -40\frac{dB}{DK}$ Überschwingen, Knick: $\Omega = \frac{T_0}{T}$: $\|G\| = -20\log_{10}(2\xi)$ Phase: $\varphi = \arctan(\frac{\omega 2\xi T}{1-\omega^2T^2})$ Für $\Omega \ll \frac{T_0}{T}$: $\varphi \approx 0°$ Für $\Omega \gg \frac{T_0}{T}$: $\varphi \approx -180°$ Für $\Omega = \frac{T_0}{T}$: $\varphi = -90°$	K Konstante $[1]$ G Verstärkung $[dB]$ φ Phase $[°]$ T Periode $[s]$ $\frac{1}{T}$ Resonanzfrequenz $[\frac{1}{s}]$ T_0 Periode $[s]$ ξ Dämpfung $[1]$ ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ Ω Normierte Frequenz $[1]$

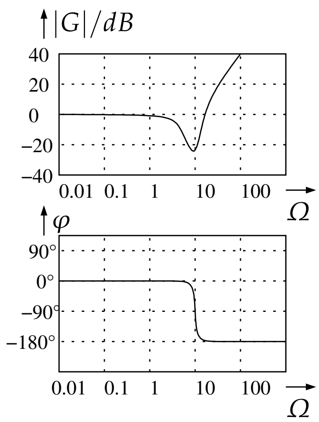
Totzeitglied: Standardterm $e^{-j\omega T_t}$

 	Form: $e^{-j\omega T_t}$ Steigung: $0\frac{dB}{DK}$ $\|G\| = 1$ $\varphi = -\omega T_t$	T_t Totzeit $[s]$ G Verstärkung $[dB]$ φ Phase $[°]$

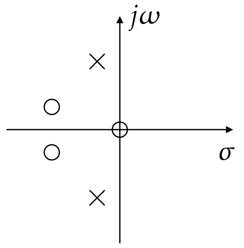
Irregulärer Aufwärtsknick 1. Ordnung: Standardterm $(1 - j\omega T)^n$

	Form: $(1 - j\omega T)^n$ Normalisiert: $\left(1 - j\Omega \frac{T}{T_0}\right)^n$ Amplitude: $\vert G\vert = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$ Für $\Omega \ll \frac{T_0}{T} : \vert G\vert \approx 0\frac{dB}{DK}$ Für $\Omega \gg \frac{T_0}{T} : \vert G\vert \approx n \cdot 20\frac{dB}{DK}$ Knick: Bei $\Omega = \frac{T_0}{T} : \vert G\vert = n \cdot 3dB$ Phase: $\varphi = -\arctan(\omega T)$ Für $\Omega \ll \frac{T_0}{T} : \varphi \approx 0°$ Für $\Omega \gg \frac{T_0}{T} : \varphi \approx n \cdot 90°$ Für $\Omega = \frac{T_0}{T} : \varphi = n \cdot 45°$	K Konstante $[1]$ G Verstärkung $[dB]$ φ Phase $[°]$ T Periode $[s]$ T_0 Periode $[s]$ ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ Ω Normierte Frequenz $[1]$

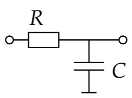
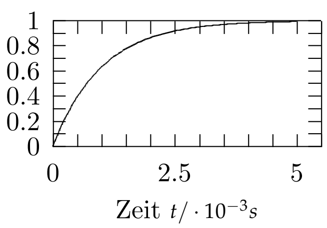
Irregulärer Aufwärtsknick 2. Ordnung: Standardterm $1 - 2\xi j\omega T + (j\omega T)^2$

 Je kleiner ξ ist, desto schneller springt die Phase	Form: $1 - 2\xi j\omega T + (j\omega)^2 T^2$ Normalisiert: $1 - 2\xi j\Omega \frac{T}{T_0} + (j\Omega)^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2$ Amplitude $\vert G\vert = \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (\omega 2\xi T)^2}$ Für $\Omega \ll \frac{T_0}{T} : \vert G\vert \approx 0\frac{dB}{DK}$ Für $\Omega \gg \frac{T_0}{T} : \vert G\vert \approx +40\frac{dB}{DK}$ Überschwingen, Knick: $\Omega = \frac{T_0}{T} : \vert G\vert = -20\log_{10}(2\xi)$ Phase: $\varphi = -\arctan(\frac{\omega 2\xi T}{1 - \omega^2 T^2})$ Für $\Omega \ll \frac{T_0}{T} : \varphi \approx 0°$ Für $\Omega \gg \frac{T_0}{T} : \varphi \approx -180°$ Für $\Omega = \frac{T_0}{T} : \varphi = -90°$	K Konstante $[1]$ G Verstärkung $[dB]$ φ Phase $[°]$ T Periode $[s]$ $\frac{1}{T}$ Resonanzfrequenz $[\frac{1}{s}]$ T_0 Periode $[s]$ ξ Dämpfung $[1]$ ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ Ω Normierte Frequenz $[1]$

13.9.3. Pol- Nullstellendiagramm

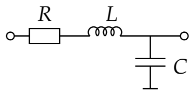
 Ausser K ist die gesamte Netzwerkfuntion aus dem Pol- Nullstellendiagramm ersichtlich.	$s = \sigma + jw$ (Frequenzgang: σ=0) Netzwerkfunktion: $F(s) = K\frac{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}{(s-q_1)(s-q_2)\dots(s-q_n)}$ Nullstellen $\Rightarrow$ $\times$ in Diagramm Polstellen $\Rightarrow\bigcirc$ in Diagramm Pol nahe an $j\omega$-Achse $\Rightarrow$ Überhöhung im Amplitudengang	K Konstante $[1]$ s komplexe Frequenz (Laplace) $[1]$ σ $Re(s)$ $[1]$ ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ p von Polynom $[1]$ q von Polynom $[1]$

13.10. Eigenschaften des PT$_1$-Glied

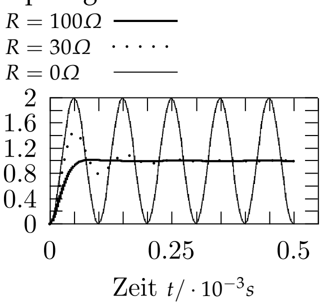
Beispielschaltung  Sprungantwort:  	$G = \frac{1}{1+j\omega T}$ Beispiel: $T = RC$ Sprungantwort: $u_o = k\left[1 - e^{-\frac{t}{T}}\right]$ $T\dot{u}_o + u_o = ku_{in}$	G Verstärkung $[dB]$ T Periode $[s]$ ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ R Widerstand $[\Omega]$ C Kapazität $[F]$ u_o u-Ausgang $[V]$ u_{in} u-Eingang $[V]$ t Zeit $[s]$ k Faktor $[1]$

13.11. Eigenschaften des PT$_2$-Glied

Beispielschaltung



Sprungantwort:



$$G = \frac{1}{1 + 2\xi j\omega T + (j\omega)^2 T^2}$$

Beispiel:

$$\xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad T = \sqrt{LC}$$

Je kleiner ξ desto mehr schwingt die Schaltung. Bei aktiven Schaltungen kann $\xi < 0$ werden.

$$\omega_e = \omega_0\sqrt{1 - D^2}, \quad 0 < D < 1$$

$$\omega_0 = \frac{1}{T}$$

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2D^2}, \quad D < 0.707$$

Sprungantwort:

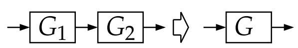
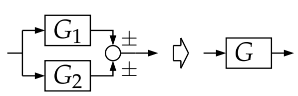
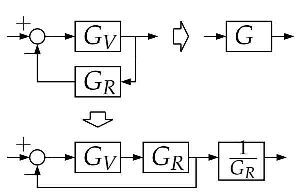
$$u_o = k\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} x\right]$$

$$x = \sin\left\{\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 t + \arccos(\xi)\right\}$$

$$T^2\ddot{u}_o + 2\xi T\dot{u}_o + u_o = ku_{in}$$

G	Verstärkung	$[dB]$
φ	Phase	$[rad]$
T	Periode	$[s]$
ξ	Dämpfung	$[1]$
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$
ω_e	Eigenfrequenz	$[\frac{1}{s}]$
ω_0	Knickfrequenz	$[\frac{1}{s}]$
ω_r	Resonanzfrequenz	$[\frac{1}{s}]$
R	Widerstand	$[\Omega]$
L	Inuktivität	$[H]$
C	Kapazität	$[F]$
u_o	u-Ausgang	$[V]$
u_{in}	u-Eingang	$[V]$
t	Zeit	$[s]$
k	Faktor	$[1]$

13.12. Verküpfung von Blockdiagrammen

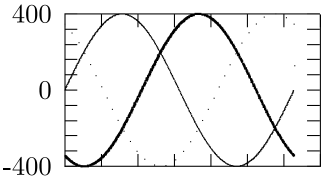
	$G = G_1 \cdot G_2$
	$G = G_1 \pm G_2$
	$G = \frac{G_V}{1 + G_V G_R}$ $G = \frac{1}{G_R}\frac{G_V G_R}{1 + G_V G_R}$

G	Übertragungsfunktion	$[1]$

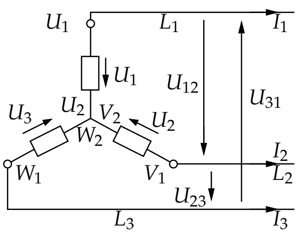
Teil III.

Energie und Antriebstechnik

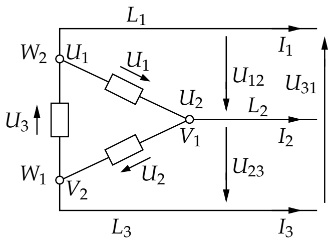
14. Dreiphasensysteme

	Maschensatz: $\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0$ $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$	$\underline{U}$ Spannung (komplex) $[V]$ $\underline{I}$ Strom (komplex) $[A]$

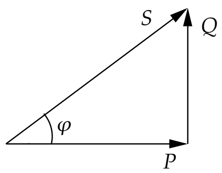
14.1. Sternschaltung

 Seite des Erzeugers	Strang-Sternspannungen: $\underline{U}_{Str1} = \underline{U}_1 = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$ $\underline{U}_{Str2} = \underline{U}_2 = \underline{V}_1 - \underline{V}_2$ $\underline{U}_{Str3} = \underline{U}_3 = \underline{W}_1 - \underline{W}_2$ Aussenleiterspannungen: $\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$ $\angle(\underline{U}_1, \underline{U}_2) = 120°$ $\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3$ $\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1$ $U = U_{Str}\sqrt{3}$ $I = I_{Str}$	$\underline{U}$ Spannung $[V]$ U_{Str} Strangspannung $[V]$ $\underline{I}$ Strom $[A]$

14.2. Dreieckschaltung

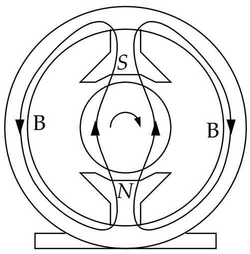
 Seite des Erzeugers	Strang-Sternspannungen: $\underline{U}_{Str1} = \underline{U}_1 = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$ $\underline{U}_{Str2} = \underline{U}_2 = \underline{V}_1 - \underline{V}_2$ $\underline{U}_{Str3} = \underline{U}_3 = \underline{W}_1 - \underline{W}_2$ Aussenleiterspannungen: $\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 \quad \angle(\underline{U}_1, \underline{U}_2) = 120°$ $\underline{U}_{23} = \underline{U}_2$ $\underline{U}_{31} = \underline{U}_3$ $U = U_{Str}$ $I = 2I_{Str}\cos(30°) = I_{Str}\sqrt{3}$	$\underline{U}$ Spannung $[V]$ U_{Str} Strangspannung $[V]$ $\underline{I}$ Strom $[A]$

14.2.1. Leistungen bei Stern- und Dreieckschaltung

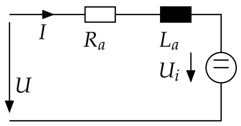
	$S_{Str} = U_{Str}I_{Str}$ $S = 3S_{Str} = \sqrt{3}UI$ $P = S\cos(\varphi) = \sqrt{3}UI\cos(\varphi)$ $Q = S\sin(\varphi) = \sqrt{3}UI\sin(\varphi)$ $W = Pt = \sqrt{3}UI\cos(\varphi)t$ $W_b = Qt = \sqrt{3}UI\sin(\varphi)t$	U Spannung $[V]$ I Strom $[A]$ S Scheinleitung $[VA]$ P Wirkleistung $[W]$ Q Blindleistung $[Var]$ W Wirkarbeit $[Ws]$ W_b Blindarbeit $[Vars]$ t Zeit $[s]$

15. Elektromotoren und Generatoren

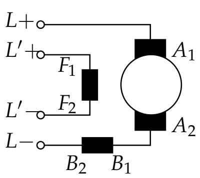
15.1. Allgemein

	$M = Fr$	r	Radius	$[m]$
	$F = BIlz\alpha$	F	Kraft	$[N]$
	$M = BIlz\alpha r = BIC_m$	B	Induktion	$[\frac{Vs}{m}]$
	$C_m = lz\alpha r$	I	Strom	$[A]$
	$U_i = Bl\omega z\alpha$	l	Leiterlänge	$[m]$
	$\omega = 2\pi n$	z	Anz. Leiter	$[1]$
	$U_i \approx \phi n C_n$	α	Polbedeckungswinkel	$[rad]$
	$C_n = 2\pi rz\alpha$	C_m	Maschinenkonst.	$[1]$
		Φ	magn. Fluss	$[Wb]$
		ω	Winkelgeschw.	$[\frac{rad}{s}]$
		U_i	U-Generator / Motor	$[V]$
		n	Drehzahl	$[1]$

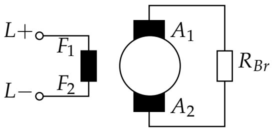
15.2. Gleichstrommaschine

 Ersatzschaltbild Ankerkreis	Falls $U > U_i \rightarrow$ Motorbetrieb, sonst Genratorbetrieb $U_i = k_1 \Phi n$ $U = U_i + R_A I L_a \frac{dI}{dt}$ $I = \frac{U - U_i}{R_A}$(stationär) $n_0 = \frac{U}{k_1 \Phi}$ $P_{el} = U_i I \pm^{Mot}_{Gen} (I^2 R_A)$ $M = \frac{k_1}{2\pi} \Phi I = \frac{P_{mech}}{2\pi n}$ $M = k_2 \Phi I$ $n = \underbrace{\frac{U}{k_1 \Phi}}_{Leerlaufterm} - \underbrace{\frac{R_A M}{k_1 k_2 \Phi^2}}_{Lastterm}$ $M_A = \frac{k_2 \Phi U}{R_A}$	U_i Ankerspannung induziert $[V]$ U Ankerspannung $[V]$ I Strom $[A]$ n Drehzahl $[1]$ n_0 n-Leerlauf $[1]$ P Leistung $[W]$ R_A R-Anker $[\Omega]$ L_a L-Anker $[\Omega]$ Φ magn. Fluss $[Wb]$ M Drehmoment $[Nm]$ M_A M-Anlauf $[Nm]$ k_1 Maschinen-konst. $[1]$ k_2 Maschinen-konst. $[1]$

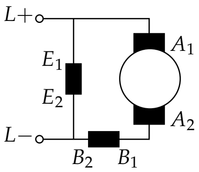
15.2.1. Fremderregte Gleichstrommaschine (GNSM)

	$M = \frac{k_2 \Phi U}{R_A} - \frac{k_1 k_2 \Phi^2 n}{R_A}$ Drehzahlsteuerung: 1. Änderung des Erregerfeldes 2. Änderung der Ankerspannung 3. Vergrösserung des Ankerwiderstandes	U Ankerspannung $[V]$ R_A R-Anker $[\Omega]$ M Drehmoment $[Nm]$ Φ magn. Fluss $[Wb]$ k_1 Maschinen-konst. $[1]$ k_2 Maschinen-konst. $[1]$

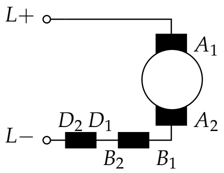
15.2.2. Nutzbremsung mit fremderregter Gleichstrommaschine

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$$n = \frac{(R_A + R_{Br})M_{Br}}{k_1 k_2 \Phi^2}$$
$$M = \frac{k_1 k_2 \Phi^2 n}{R_A + R_{Br}}$$</td>
<td>n Drehzahl $[1]$
R_A R-Anker $[\Omega]$
R_{Br} R-Brems $[\Omega]$
M Drehmoment $[Nm]$
Φ magn. Fluss $[Wb]$
k_1 Maschinen-konst. $[1]$
k_2 Maschinen-konst. $[1]$</td>
</tr>
</table>

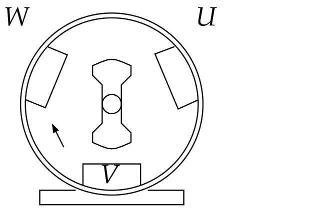
15.3. Gleichstrom Nebenschlussmaschine (GNSM)

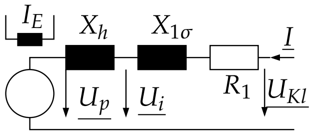
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Es gelten die selben Regeln wie bei der fremderregten Gleichstrommaschine, jedoch kann die Drehzahl nicht durch erniedrigen der Spannung gesenkt werden.
Bei Widerstandsbremsung ist nur der Anker an R_{Br} anzuschliessen.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

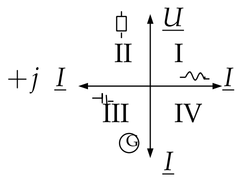
15.4. Gleichstrom Reihenschlussmaschine (GRSM)

 	$\sum R_A = R_A + R_B + R_D$ $U_i = k_1 c * In = k_3 In$ $M = I^2 \frac{k_3}{2\pi} = I^2 k_4$ $n = \frac{U}{\sqrt{2\pi k_3 M}} - \frac{\sum R_A}{k_3}$ $M = \frac{k_3}{2\pi}\left(\frac{U}{k_3 n + \sum R_A}\right)^2$ $M_A = \frac{k_3}{2\pi}\left(\frac{U}{\sum R_A}\right)^2$ Die änderung der Drehzahl ist wie bei GNSM	n Drehzahl $[1]$ R_A R-Anker $[\Omega]$ R_B R-Wendepolwicklung $[\Omega]$ R_D R-Reihenschlusswicklung $[\Omega]$ U_i Ankerspannung induziert $[V]$ U Spannung $[V]$ M Drehmoment $[Nm]$ M_A M-Anlauf $[Nm]$ k Maschinenkonst. $[1]$

15.5. Drehstrom Synchrongenerator (DSG)







I, IV: Motorbetrieb

II,III: Generatorbetrieb

I,II: Abgabe induktive Blindleistung = Übererregt

III, IV: Aufnahme kapazitive Blindleistung = Untererregt

$$n_{syn} = \frac{60f}{p}$$

$$U_i = z\frac{d\Phi}{dt}$$

$$|U_i| = Blv_R z$$

$$I_w = I\cos(\varphi) \quad I_b = I\sin(\varphi)$$

$$I^2 = I_w^2 + I_b^2$$

$$\underline{I} = I_w + jI_b = \frac{j}{X_d}(\underline{U}_p - \underline{U}_{Kl})$$

$$\underline{U}_{Kl} = \underline{U}_p + jX_d\underline{I}$$

$$X_d = X_H + X_\sigma$$

Leerlauf:

$$\frac{I_E}{I_{E0N}} = \frac{U_p\sqrt{3}}{U_N}$$

Kurzsschluss:

$$X_d = \frac{U_p}{I_{K0}}$$

$$x_d = X_d\frac{I_N\sqrt{3}}{U_N} = X_d\frac{I_N}{U_{Kl}} = \frac{1}{k_0}$$

n_{syn}	Drehzahl	$[\frac{1}{min}]$
f	(Netz-) Frequenz	$[Hz]$
p	Polpaarzahl	$[1]$
U_i	Span. induziert	$[V]$
U_{Kl}	Span. Klemmen	$[V]$
l	Leiterlänge	$[m]$
z	Anz. Windungen	$[1]$
v_R	Luftspaltgeschw.	$[\frac{m}{s}]$
B	Induktion	$[\frac{Vs}{m^2}]$
Φ	magn. Fluss	$[Wb]$
I_w	Wirkstrom	$[A]$
I_b	Blindstrom	$[A]$
X_d	synch.Reakt	$[\Omega]$
x_d	relative synch.Reakt	$[\Omega]$
I_E	Erregerstrom	$[A]$
U_N	U-Nenn verkettet	$[V]$
k_0	Leerlauf-Kurzschluss Verhältnis	$[1]$

15.6. DSG im Inselbetrieb

$$\underline{U}_p = \underline{U}_{Kl} - jX_d\underline{I}$$

U_p	Span. Polrad	$[V]$
U_{Kl}	Span. Klemmen	$[V]$
X_d	synch.Reakt	$[\Omega]$

15.7. Belastung des DSG am starren Netz

	$U_p = \sqrt{\frac{U_{Netz}^2}{3} + X_d^2 I^2 + 2\frac{U_{Netz}}{\sqrt{3}} X_d I \sin(\varphi)}$ falls $U_N = U_{Netz}$: $\frac{U_p\sqrt{3}}{U_N} = \sqrt{1 + x_d^2 \left(\frac{I}{I_N}\right)^2 + 2x_d \frac{I}{I_N} \sin(\varphi)}$	U_{Netz} Netzspannung $[V]$ U_{Kl} Span. Klemmen $[V]$ U_p Span. Polrad $[V]$ U_N U-Nenn verkettet $[V]$ X_d synch.Reakt $[\Omega]$ x_d rel. synch.Reakt $[\Omega]$ I Laststrom $[A]$ φ Phase $[rad]$

15.8. Drehmoment und Stabilität des DSG am starren Netz

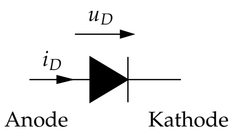
	$P_{el} = \sqrt{3} U_{Netz} I \cos(\varphi)$ $P_{el} = 3 U_{Str} I_{Str} \cos(\varphi)$ $U_p \sin(\vartheta) = I X_d \cos(\varphi)$ $P_{el} = \sqrt{3} U_{Netz} \frac{U_p}{X_d} \sin(\vartheta)$ $M_{mech} = \frac{P_{mech}}{2\pi n}$ $M_{el} = \frac{P_{el}}{2\pi n}$ $M_{el} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi n} U_{Netz} \frac{U_p}{X_d} \sin(\vartheta)$ $M = c_i x l$ $c_i = \frac{3}{X_d 2\pi n}$ $x = I X_d$ $I = \frac{U_{Netz}}{\sqrt{3}} \cos(\varphi)$	U_{Netz} Netzspannung $[V]$ U_{Str} Strangspan. $[V]$ U_p Span. Polrad $[V]$ P_{el} El-Wirkleistung $[W]$ M_{el} Generatormoment $[Nm]$ n Drehzahl $[\frac{1}{min}]$ X_d synch.Reakt $[\Omega]$ I Laststrom $[A]$ φ Phase $[rad]$ ϑ Lastwinkel $[rad]$

Teil IV.

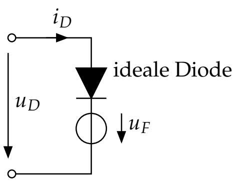
Elektronik

16. Diode

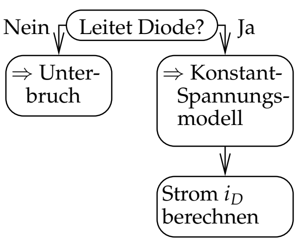
16.1. Ideale Diode

	Sperrbereich (SB) : $i_D = 0, u_D < 0$ Durchlassbereich (DB): $i_D \geq 0, u_D = 0$	u_D Spannungs über Diode $[V]$ i_D Strom durch Diode $[A]$

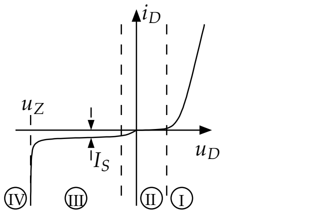
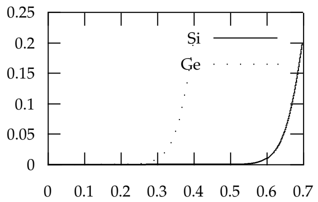
16.2. Konstantspannungsmodel

	$u_{FSIDiode} = 0.6$ $u_{FGermaniumDiode} = 0.3$ $u_{FShottkyDiode} = 0.1$ $u_{FLEDrot} = 1.6$	u_F Forwärts-Spannungs $[V]$

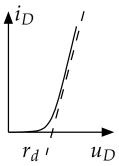
16.3. Arbeitspunktberechnung

	Teilweise ist es nur durch ausprobieren möglich zu sagen, ob die Diode leitet oder sperrt.	i_D Strom durch Diode $[A]$

16.4. Kennlinie

Kennlinie allgemein:  I Durchlassbereich II Übergangsbereich III Sperrbereich IV Durchbruchbereich Kennlinie Ge- und Si-Diode:  	$i_D = I_S(e^{\frac{u_D}{U_T}} - 1)$ $i_D = I_S(e^{\frac{u_D - r_b i_D}{m U_T}} - 1)$ $U_T = \frac{kT}{e} = 8.6 \cdot 10^{-5} \cdot T$ $U_T(300K) = 26mV$, $U_T(348K) = 30mV$, $U_T(393K) = 34mV$ Für normale Si-Diode gilt: $I_S = 10^{-12}A$, $r_b = 0.1\Omega$, $m = 1$ Die vier Bereiche der Kennlinie: I: $-0.1V < u_D < 0.1V$ $\Rightarrow$ Diodengleichung exakt verwenden II: $u_D > 0.1V$ $\Rightarrow$ Diodengleichung wird: $i_D = \|I_S\| e^{\frac{u_D}{U_T}}$ Verhältnis zweier Spannungen: $\frac{I_{D2}}{I_{D1}} = e^{\frac{U_{D2} - U_{D1}}{U_T}} \rightarrow U_{D2} - U_{D1} = U_T \ln \frac{I_{D2}}{I_{D1}}$ III: $u_D < -0.1V$ $i_D = -I_S$ oder $i_D = \|I_S\|$ IV: Siehe Zehner-Diode	i_D Strom durch Diode $[A]$ u_D Spannung über Diode $[V]$ U_T Temperatur-spannung $[V]$ T Temperatur $[K]$ I_S Sättigungs-strom $[A]$ I_R Sperrstrom $[A]$ r_b Bahnwider-stand $[\Omega]$ m Korrekturfakt. $[1]$ k Bolzmann-konst. $= 1.38 \cdot 10^{-23}$ $[\frac{Ws}{K}]$ e Elementar-ladung $= 1.602 \cdot 10^{-19}$ $[As]$

16.4.1. Differentieller Widerstand

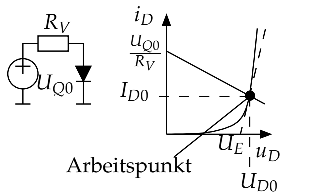
 Für kleine Signale wird die Kennlinie der Diode durch eine Tangente ($= r_d$) approximiert.	$r_d = \frac{du_D}{di_D} = \frac{1}{g_d} \approx \frac{U_T}{I_{D0}}$ Falls $m = 1$ und $r_b = 0$ gilt: $g_d = \frac{di_D}{du_D} = I_S e^{\frac{u_D}{U_T}} \frac{1}{U_T} = \frac{i_D}{U_T}$	r_d Differentieller Widerstand $[\Omega]$ d_d Differentieller Leitwert $[S]$ i_D Strom durch Diode $[A]$ u_D Spannung über Diode $[V]$ U_T Temperatur-spannung $[V]$ m Korrekturfakt. $[1]$ I_{D0} DC-Strom im Arbeitspunkt $[A]$

16.5. DC- und AC-Analyse von Diodenschaltungen

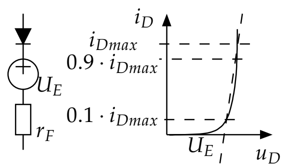
16.5.1. Vorgehen

1. Schaltung aufteilen in AC- und DC-Ersatzschltbild
2. In DC-Ersatzschaltung den Arbeitspunkt bestimmen (Konstantspannungsmodell)
3. Berechnen der dynamischen Widerstände im Arbeitspunkt (approximieren der Diodenkennlinie)
4. Kleinsignalanalyse (Lineare Netzwerktheorie)
5. Gesamtlösung setzt sich aus Arbeitspunkt und Wechselstromlösung zusammen

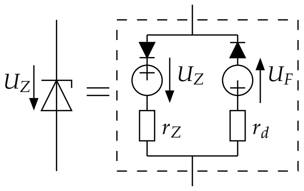
16.5.2. Kleinsignalanalyse

 Arbeitspunktbestimmung	DC-Ersatzschaltung: Konstantspannungsmodell (siehe S. 130) AC-Ersatzschaltung: Differentieller Widerstand (siehe S. 131) Resultierendes Gleichungssystem: $\left\lvert \begin{array}{l} i_D = \frac{U_{Q0}-u_D}{R_V} \\ i_D = I_S e^{\frac{u_D}{U_T}} \end{array} \right\rvert$ $i_D = 0 \qquad u_D <= U_E$ $i_D = \frac{1}{r_D(u_D-U_E)} \qquad u_D => U_E$ $U_E = U_{D0} - I_{D0} rd$	U_F Flussspan. $[V]$ R_V Vorwiderstand $[\Omega]$ U_{Q0} Quellspan. $[V]$ I_{D0} Arbeitsstrom $[A]$ U_{D0} Arbeitspan. $[V]$ U_T Temperaturspannung $[V]$ u_D Spannung über Diode $[V]$ i_D Strom durch Diode $[A]$ I_S Sättigungsstrom $[A]$ U_E Gleichspan. $[V]$

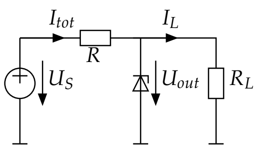
16.5.3. Grosssignalanalyse

 Für Grosssignalanalyse wird die Kennlinie durch eine Gerade durch die Punkte $0.1 i_{Dmax}$ und $0.9 i_{Dmax}$ approximiert.	$U_E = u_D(0.1 I_{Dmax}) - 0.1 I_{Dmax} r_F$ $r_F = \frac{\Delta u_D}{0.8 I_{Dmax}}$	u_D Spannung über Diode $[V]$ i_D Strom durch Diode $[A]$ r_F Diodenwiderstand $[\Omega]$

16.6. Z-Dioden

	$r_Z = \frac{du_Z}{di_Z}$ Teperaturkoeffizient: $\alpha = \frac{\frac{dU_Z}{dT}}{U_Z}$ $\alpha < 0$ bei $U_Z < 5.6V$ $\alpha \approx 0$ bei $U_Z \approx 5.6V$ $\alpha > 0$ bei $U_Z > 5.6V$ Temperaturkompensation durch Serieschaltung: $\alpha_1 U_{Z1} = -\alpha_2 U_{Z2}$	r_Z Z-Widerstand $[\Omega]$ r_d Differentieller Widerstand $[\Omega]$ U_Z Zehnersp. $[V]$ U_F Flusssp. $[V]$ T Temperatur $[K]$

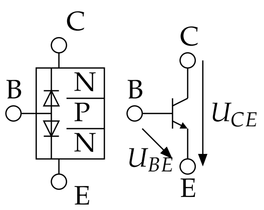
16.6.1. Z-Dioden zur Spannungsstabilisierung

	$I_{totmin} = \frac{U_{Smin} - U_{outmin}}{R}$ $I_{totmax} = \frac{U_{Smax} - U_{outmin}}{R}$ $I_{outmin} = I_{totmin} - I_{Lmax}$ $I_{outmax} = I_{totmax} - I_{Lmin}$ $P_{Zmax} = U_{outnom} I_{outmax}$ Rippelunterdrückung: $u_{out} = u_S \frac{r_Z \| R_L}{R + (r_Z \| R_L)}$	I_{tot} I-Eingang $[A]$ U_S Speisesp. $[V]$ I_L Laststrom $[A]$ U_{out} Ausgangssp. $[V]$ R Vorwiderstand $[\Omega]$ R_L Lastwiderstand $[\Omega]$ P_Z P-Verslust $[W]$ r_Z Differentieller Widerstand $[\Omega]$ u_S Rippel am Eingang $[V]$ u_{out} Rippel am Ausgang $[V]$

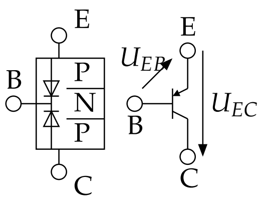
17. Bipolar Transistor

17.1. NPN- und PNP-Transistor

NPN:



PNP:



$$i_E = i_C + i_B$$

$$i_C = A i_E$$

$$B = \frac{A}{1-A} = \frac{i_C}{i_B}$$

DC-Ersatzschaltung:

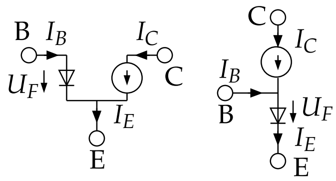
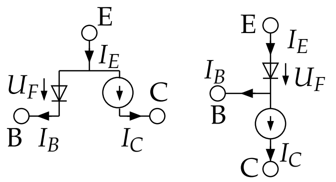
$$i_B = I_{SB} e^{\frac{u_{BE}}{U_T}}$$

$$i_C = B I_{SB} e^{\frac{u_{BE}}{U_T}}$$

A	Stromverstärkung in B-Schaltung = 0.9...0.998	[1]
B	Stromverstärkung	[1]
i_B	Basisstrom	$[A]$
i_C	Kollektorstrom	$[A]$
i_E	Emitterstrom	$[A]$
u_{BE}	Span. B $\rightarrow$ E	$[V]$
u_T	Temp.-Span. Diode B $\rightarrow$ E $\approx$ 0.026	$[V]$
i_{SB}	Stromquelle zw. C $\rightarrow$ B	$[A]$

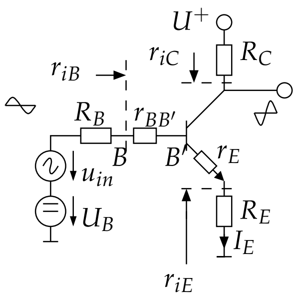
17.2. Der ideale Transistor bei Gleichspannung

17.2.1. DC-Ersatzschaltung

NPN:  π T PNP:  π T	$B = \frac{I_C}{I_B}$ $I_C = BI_B$ $I_E = I_B + I_C = I_B + BI_B$ $I_E = (1+B)I_B$ falls $B \gg 1$ gilt: $I_C \approx I_E \approx BI_B$ $A = \frac{I_C}{I_E} = \frac{BI_B}{(1+B)I_B} = \frac{B}{1+B}$	A Stromverstärkung in B-Schaltung ≈ 1 falls $B \gg 1$ [1] B DC-Stromverstärkung [1] I_B Basisstrom $[A]$ I_C Kollektorstrom $[A]$ I_E Emitterstrom $[A]$ U_F Span. Diode ≈ 0.6 $[V]$

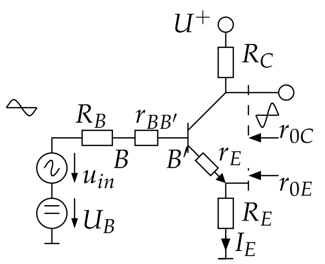
17.3. Verstärkerschaltungen

17.3.1. Dynamische Innenwiderstände des Transistors

	$r_{iB} = r_{BB'} + (\beta+1)(R_E + r_E)$ $r_{iE} = r'_E = r_E + \frac{r_{BB'} + R_B}{\beta+1}$ $r_{iC} = r_{CE}\left(1 + \frac{\beta R_E}{R_E + R_B + r_{BB'} + r_{B'E}}\right)$ $r_{iC} \approx R_C$ $r_E = \frac{U_{temp}}{I_E} = \frac{r_{B'E}}{\beta+1} = \frac{\frac{U_{temp}}{I_B}}{\beta+1}$ $r_{CE} = \frac{U_{Early} + U_{CE}}{I_C} \approx \frac{U_{Early}}{I_C}$	r_{iB} r-Basis $[\Omega]$ r_{iE} r-Emitter $[\Omega]$ r_{iC} r-Kollektor $[\Omega]$ $r_{BB'}$ Basisbahnwiderstand $[\Omega]$ r_E innerer r-Emitter $[\Omega]$ R_E R-Emitter $[\Omega]$ β AC-Stromverstärkung [1] R_B R-Basis $[\Omega]$ I_C Kollektorstrom $[A]$ I_E Emitterstrom $[A]$ U_{Early} Early-Span. = 20...400, $typ.$100 $[V]$ U_{temp} Temp-Span. ≈ 0.026 $[V]$

17.3.2. Emitterschaltug

invertierend:



$$A = \frac{u_{out}}{u_{in}} = -\frac{R_C}{R_E + r'_E + \frac{R_C}{\mu}}$$

$$A \approx -\frac{R_C}{R_E + r'_E}$$

Falls $R_E = 0$: $A = \frac{R_C \| r_{CE}}{r'_E}$

$$\mu = \frac{r_{CE}}{r'_E} \approx \frac{U_{Early}}{U_{temp}}$$

$$r_E = \frac{U_{temp}}{I_E} = \frac{r_{B'E}}{\beta + 1}$$

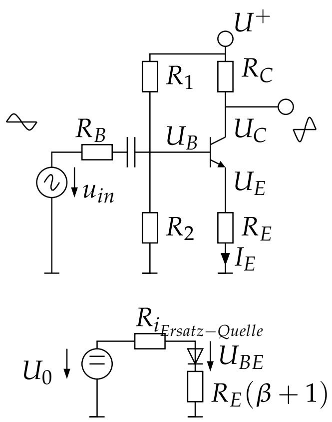
$$r'_E = r_E + \frac{r_{BB'} + R_B}{\beta + 1}$$

$$r_{CE} = \frac{U_{Early} + U_{CE}}{I_C} \approx \frac{U_{Early}}{I_C}$$

$r_{0C} \approx R_C$ $\quad r_{0E} = r_{iE} \| R_E$ $\quad r_{0B} = r_{iB} \| R_1 \| R_2$

A	Verstärkung	$[1]$
μ	max. theoretisch A	$[1]$
β	AC-Stromverstärkung	$[1]$
R_C	R-Kollektor	$[\Omega]$
R_E	R-Emitter	$[\Omega]$
R_B	R-Basis	$[\Omega]$
$r_{BB'}$	Basisbahnwiderstand	$[\Omega]$
r_E	innerer r-Emitter	$[\Omega]$
I_C	I-Kollektor	$[A]$
I_E	Emitterstrom	$[A]$
U_{Early}	Early-Span. $=$ 20...400, $typ.100$	$[V]$
U_{temp}	Temp-Span. ≈ 0.026	$[V]$

Arbeitspunktberechnung



$$U_{0_{Ersatz-Quelle}} = U_0 = \frac{U^+}{R_1 + R_2} R_2$$

$$R_{i_{Ersatz-Quelle}} = R_1 \| R_2$$

$$U_{R_E} = \frac{(U_0 - U_{BE})(\beta + 1) R_E}{(R_1 \| R_2) + (\beta + 1) R_E}$$

Falls $I_B = 0$: $U_{RE} = U_0 - U_{BE}$

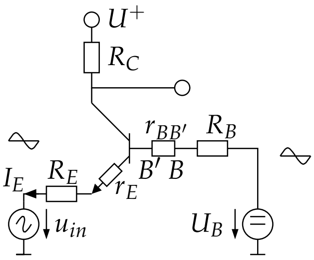
$$I_B = \frac{(U_0 - U_{BE} - U_{R_E})}{R_1 \| R_2}$$

$$I_C = I_E - I_B$$

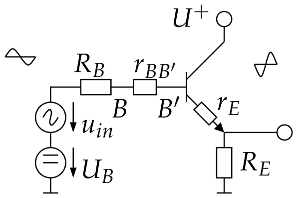
$$U_{R_E} = I_C R_C \to U_C$$

β	AC-Stromverstärkung	$[1]$
R_C	R-Kollektor	$[\Omega]$
R_E	R-Emitter	$[\Omega]$
I_C	I-Kollektor	$[A]$
I_E	Emitterstrom	$[A]$
U^+	Speise-Span.	$[V]$
U_{BE}	B-E-Span. ≈ 0.6	$[V]$
U_0	Span.der gedachten Quelle des Basisspannungsteilers	$[V]$
R_i	R-Innen	$[\Omega]$

17.3.3. Basisschaltung

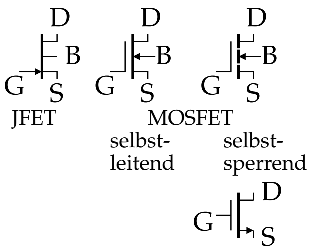
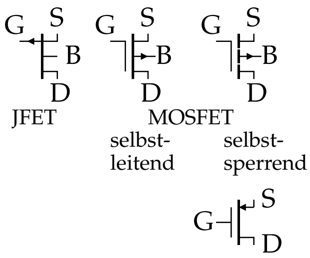
nicht invertierend: 	$A = \frac{u_{out}}{u_{in}} = \frac{R_C}{R_E + r'_E + \frac{R_C}{\mu}}$ $A \approx \frac{R_C}{R_E + r'_E}$ Falls $R_E = 0$: $A = \frac{R_C \| r_{CE}}{r'_E}$ $\mu = \frac{r_{CE}}{r'_E} \approx \frac{U_{Early}}{U_{temp}}$ $r_E = \frac{U_{temp}}{I_E} = \frac{r_{B'E}}{\beta + 1}$ $r'_E = r_E + \frac{r_{BB'} + R_B}{\beta + 1}$ $r_{CE} = \frac{U_{Early} + U_{CE}}{I_C} \approx \frac{U_{Early}}{I_C}$ $r_{0C} \approx R_C$ $r_{0E} = r_{iE} \| R_E$ $r_{0B} = r_{iB} \| R_1 \| R_2$	A μ β R_C R_E R_B $r_{BB'}$ r_E I_C I_E U_{Early} U_{temp}	Verstärkung max. theoretisch A AC-Stromverstärkung R-Kollektor R-Emitter R-Basis Basisbahnwiderstand innerer r-Emitter I-Kollektor Emitterstrom Early-Span. = 20...400, $typ.100$ Temp-Span. ≈ 0.026	[1] [1] [1] [Ω] [Ω] [Ω] [Ω] [Ω] [A] [A] [V] [V]

17.3.4. Kollektorschaltung (Emitterfolger)

nicht invertierend: 	$A = \frac{u_{out}}{u_{in}} = \frac{R_E}{R_E + r'_E}$ Falls $R_E \gg r'_E$ gilt : $A \approx 1$ $r'_E = r_E + \frac{r_{BB'} + R_B}{\beta + 1}$	A R_E R_B r_E $r_{BB'}$ β	Verstärkung R-Emitter R-Basis innerer r-Emitter Basisbahnwiderstand AC-Stromverstärkung	[1] [Ω] [Ω] [Ω] [Ω] [1]

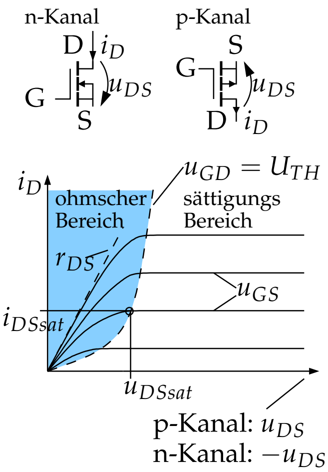
18. Feldeffekt Transistor

18.1. Verschiedene Typen

n-Kanal:  p-Kanal:  	JFET: Die Isoltion zwischen Kanal und Gate besteht aus einer pn-Sperrschicht (Diode). MOSFET: Die Isoltion zwischen Kanal und Gate besteht aus einer SiO_2-Schicht. Der selbstsperrende MOSFET sowie der JFET werden mit der Gatespannung gesperrt. Bulk ist meistens mit Source verbunden.	G Gate D Drain B Bulk oder Substrat S Source

18.2. Der ideale MOSFET (Handrechnung)

Im gesättigten Bereich verhält sich ein FET annähernd wie eine Stromquelle, im ungesättigten Bereich stellt er einen Widerstand dar. Die Steuergrösse ist u_{GS}.



- Drainstrom fliesst nur falls $|u_{GS}| > |U_T|$.
- Gatestrom ist 0.

$$U_{DSsat} = U_{GS} - U_T$$

$$I_{Dsat} = K\frac{U_{DS}^2}{2}$$

$$I_D = I_D' \frac{W}{L}$$

$$K = \frac{2I_{DSS}^*}{U_T^2}$$

$$K = K'\frac{W}{L} \qquad K' = \mu C_{ox}$$

$$k' \approx K' \qquad C_{ox} = \frac{\epsilon_{ox}}{t_{ox}}$$

$$U_A \approx aL$$

Im ohmschen Bereich gilt:

$$U_{DS} < U_{DSsat}$$

$$I_D = K\left[(U_{GS} - U_T)U_{DS} - \frac{U_{DS}^2}{2}\right]$$

$$r_{DS} = \frac{dV_{DS}}{dI_D} = \frac{|U_A| + U_{DS}}{I_D}$$

Im gesättigten Bereich gilt:

$$U_{DS} > U_{DSsat}$$

$$I_D = \frac{k}{2}(U_{GS} - U_T)^2$$

Nur bei n-Kanal:

$$U_T > 0$$

$$U_{GS} > U_T \Rightarrow I_D > 0$$

Nur bei p-Kanal:

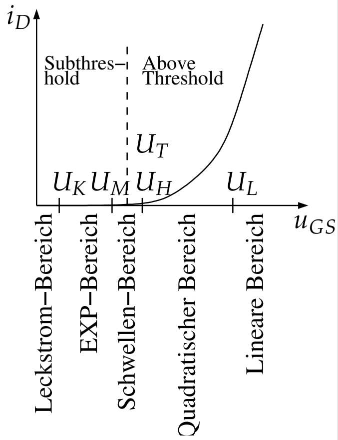
$$U_T < 0$$

$$U_{GS} < U_T \Rightarrow I_D > 0$$

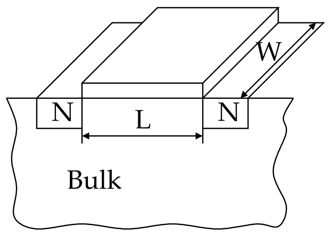
I_D	Drainstrom	$[A]$
U_T	Schwellspannung (0.6...8)	$[V]$
K	Transkonduktanzparameter	$[\frac{A}{V^2}]$
k'	spez. k ($k_N' \approx 44 \cdot 10^{-6}, k_P' \approx 17 \cdot 10^{-6}$)	$[\frac{A}{V^2}]$
k	wie K jedoch gesättigt	$[\frac{A}{V^2}]$
U_{DS}	DS-Spannung	$[V]$
U_{GS}	GS-Spannung	$[V]$
I_{DSS}^*	ev. anstelle von K gegeben	$[A]$
W	Kanalbreite	$[m]$
L	Kanallänge	$[m]$
C_{ox}	spez. Kapazität Kanal-Gate	$[\frac{F}{m^2}]$
ϵ_{ox}	Dielektrizitätskonst. ($SiO_2 = 3.9 \cdot 8.86 \cdot 10^{-3}$)	$[\frac{F}{m}]$
t_{ox}	Dicke Isolation Kanal-Gate	$[m]$
μ	Beweglichkeit Ladungsträger im Kanal (Für Si: $\mu_p = 580$, $\mu_n = 230$)	$[\frac{cm^2}{sV}]$
r_{DS}	dyn. Drain-Source Widerstand	$[\Omega]$
U_A	Earlyspannung	$[V]$
L	Gatelänge	$[m]$
a	Early Faktor ≈ 6	$[\frac{V}{\mu m}]$

18.3. Der reale MOSFET

Im Exp-Bereich, bei schwacher Inversion:
$0 < U_{GS} < (U_T - 60mV)$
Im Quad-Bereich, bei starker Inversion:
$U_{GS} > (U_T - 60mV)$
Dazwischen: Moderate Inversion



Im Leckstrombereich, im Schwellenbereich und im linearen Bereich existieren keine handlichen Formeln.



Im EXP-Bereich gilt:

$$U_{DSsat} \approx 5U_{temp} \approx 130mV$$

ungesättigt: $U_{DS} \leq U_{DSsat}$

$$I_D = I_M e^{\frac{U_{GS}-U_M}{nU_{temp}}}\left(1 - e^{\frac{-U_{DS}}{U_{temp}}}\right)(1+\lambda U_{DS})$$

gesättigt: $U_{DS} \geq U_{DSsat}$

$$I_D = I_M e^{\frac{U_{GS}-U_M}{nU_{temp}}}(1+\lambda U_{DS})$$

Im Quadratischen Bereich gilt:

$$U_{DSsat} = U_{GS} - U_T = \sqrt{2\frac{I_D}{k}}$$

ungesättigt: $U_{DS} \leq U_{DSsat}$

$$I_D = K\left[(U_{GS}-U_T)U_{DS} - \frac{U_{DS}^2}{2}\right](1+\lambda_{U_{DS}})$$

gesättigt: $U_{DS} \geq U_{DSsat}$

$$I_D = \frac{k}{2}(U_{GS}-U_T)^2(1+\lambda_{U_{DS}})$$

$$\lambda = \frac{1}{U_A}$$

$$U_T = T_{T0} \pm \Delta U_T \qquad N \to +$$

$$\Delta U_T = \gamma(\sqrt{U_{SB} \pm \Phi_0}\sqrt{\Phi_0})$$

$$U_{temp} = \frac{kT}{e} = 86\frac{\mu U}{K}T$$

$$I_M = I'_M\frac{W}{L}$$

$$n = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{U_{SB}+\Phi_0}}$$

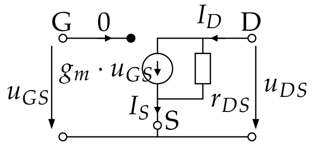
$$K = K'\frac{W}{L} = \mu C_{oc}\frac{W}{L}$$

$$k = k'\frac{W}{L} = \mu C_{ox}\frac{W}{L}, \qquad \alpha = \frac{K'}{k'}$$

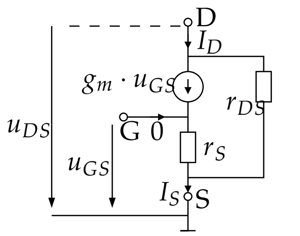
I_D	Drainstrom	$[A]$
I_M	Drainstrom-grenze	$[A]$
U_{GS}	U Gate Source	$[V]$
U_{DS}	Drain-Source	$[V]$
U_T	Schwellsp.	$[V]$
U_{T0}	$U_{T0N} \approx 0.6$ $U_{T0P} \approx 0.65$	$[V]$
U_{SB}	U Source Bulk	$[V]$
U_{temp}	U-Temp. $\approx 26 \cdot 10^{-3}$	$[V]$
U_A	Early-Span.	$[V]$
Φ_0	Fermi-Pot.= $2\Phi_F = 0.6$	$[V]$
k	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$
K	k ungesättigt	$[\frac{A}{V^2}]$
K', k'	bei quadratischem Kanal typisch: $k_N = 44 \cdot 10^{-6}$, $k_P = 17 \cdot 10^{-6}$	$[\frac{A}{V^2}]$
α	Transkond. Verhältnis ≈ 1	$[1]$
n	Subthreshold Slope Faktor ≈ 1.5	$[1]$
γ	$\gamma \approx 0.6$	$[\sqrt{V}]$
λ	Mod-fakt. (0.01...0.05)	$[\frac{1}{V}]$
W	Kanal-Länge	$[m]$
L	Kanal-Breite	$[m]$
T	Temperatur	$[K]$
μ	Beweglichkeit Ladungsträger im Kanal (Für Si: $\mu_p = 580$, $\mu_n = 230$)	$[\frac{cm^2}{sV}]$

18.4. Kleinsignal Ersatzschaltbild für tiefe Frequenzen

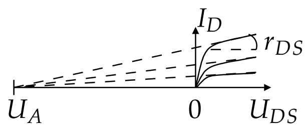
π-Ersatzschaltbild:



T-Ersatzschaltbild:



Die Kleinsignal-Ersatzschaltbilder gelten für n- und p-Kanal FETs



Steilheit im Stromquellenbetrieb bei starker Inversion:

$$g_m = \frac{dI_D}{dU_{GS}} \approx K(U_{GS} - U_T)$$

$$g_m = K(U_{GS} - U_T)(1 + \lambda U_{DS})$$

$$g_m = \sqrt{2kI_D(1 + \lambda U_{DS})}$$

$$g_m \approx \sqrt{2kI_D}$$

$$\frac{g_{m1}}{g_{m2}} = \sqrt{\frac{I_{D1}}{I_{D2}}}$$

$$r_S = \frac{1}{g_m}$$

Ausgangswiderstand:

$$r_{DS} = \frac{U_A + |U_{DS}|}{|I_D|} \approx \frac{|U_A|}{|I_D|}$$

Steilheit im Stromquellenbetrieb bei schwacher Inversion:

$$g_m = \frac{dI_D}{dU_{GS}} = \frac{I_D}{nU_{temp}}$$

$$r_S = \frac{1}{g_m} = \frac{nU_{temp}}{I_D}$$

Body Steilheit im Stromquellenbetrieb bei starker Inversion:

$$g_{mB} = \frac{dI_D}{dU_{SB}}$$

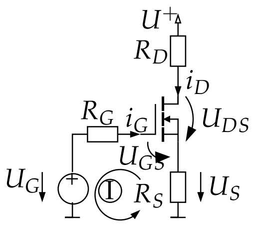
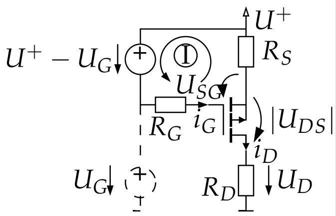
$$g_{mB} = -g_m \frac{\gamma}{2\sqrt{U_{SB} + \Phi_0}}$$

$$g_{mB} = -g_{mB}(n-1)$$

$\Rightarrow$ Back-Gate hat die halbe Wirkung des Gate bei $U_{SB} = 0$

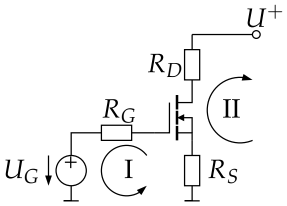
g_m	Steilheit Übertragungskennlinie	$[1]$
g_{mB}	Body - Steilheit	$[1]$
r_S	int. Source Widerstand	$[\Omega]$
I_D	Drainstrom	$[A]$
U_T	Schwellspannung (0.6...8)	$[V]$
U_A	Early-Span.	$[V]$
U_{temp}	U-Temp. $\approx 26 \cdot 10^{-3}$	$[V]$
U_{DS}	Drain-Source-Spannung	$[V]$
U_{GS}	Gate-Source-Spannung	$[V]$
U_{SG}	Source-Gate-Spannung	$[V]$
U_{SB}	Source-Bulk-Spannung	$[V]$
K	Transkonduktanzparameter	$[\frac{A}{V^2}]$
n	Subthreshold Slope Faktor ≈ 1.5	$[1]$
λ	Mod-fakt. (0.01...0.05)	$[\frac{1}{V}]$
Φ_0	Fermi-Pot.= $2\Phi_F = 0.6$	$[V]$
γ	$\gamma \approx 0.6$	$[\sqrt{V}]$

18.5. DC-Berechnung mit idealen MOSFET Gleichungen

	Bei Verstärkern muss der Arbeitspunkt im Sättigungsbereich liegen! $\Rightarrow$ prüfen ob $u_{DS} > u_{GS} - U_T$
n-Kanal: 	$i_D = \frac{k}{2}(u_{GS} - U_T)^2$ $I: \quad U_G - i_D R_S - u_{GS} = 0$ $u_{GS} = \left(U_T - \frac{1}{kR_S}\right) + \sqrt{\frac{2}{kR_S}(U_G - U_T) + \frac{1}{(kR_S)^2}}$
p-Kanal: 	$i_D = \frac{k}{2}(u_{GS} - U_T)^2$ $I: U_G - i_D R_S - u_{GS} = 0$ $u_{SG} = \left(\|U_T\| - \frac{1}{kR_S}\right) + \sqrt{\frac{2}{kR_S}(U_{GP} - \|U_T\|) + \frac{1}{(kR_S)^2}}$ $U_{GP} = U^+ - U_G$
Arbeitspunkt:	$u_{DS} = U^+ - i_D(R_S + R_D)$

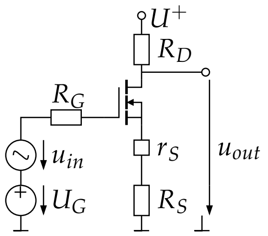
i_D	Drainstrom	$[A]$
U^+	Speisespannung	$[V]$
U_T	Schwellspannung (0.6...8)	$[V]$
U_G	Gate-Spannung	$[V]$
u_{DS}	Drain-Source-Spannung	$[V]$
u_{GS}	Gate-Source-Spannung	$[V]$
u_{SG}	Source-Gate-Spannung	$[V]$
R_G	R-Gate	$[\Omega]$
R_D	R-Drain	$[\Omega]$
R_S	R-Source	$[\Omega]$
k	Transkonduktanzparameter	$[\frac{A}{V^2}]$

18.6. Der FET als Schalter

 meistens: $R_S = 0$ Der Fet muss im ohmschen Bereich betrieben werden Schalter offen wenn $\lvert u_{GS}\rvert < \lvert U_T\rvert$ Schalter geschlossen wenn $\lvert u_{GS}\rvert \gg \lvert U_T\rvert$	Aus I und II: $\left\lvert \begin{array}{lcl} u_G - i_D R_S - u_{GS} & = & 0 \\ U^+ - i_D(R_S + R_D) - u_{DS} & = & 0 \end{array} \right\rvert$ $\frac{di_D}{du_{DS}} = \frac{1}{r_{DS}}$ $\frac{di_D}{du_{DS}} = K(u_{GS} - U_T) - Ku_{DS}$ $r_{DS0} = \frac{1}{K(u_{GS} - U_T)}$ eingeschaltet und $R_S = 0$: $i_D = \frac{U^+}{R_D + r_{DS0}}$ eingeschaltet und $R_S \neq 0$: $\left\lvert \begin{array}{lcl} u_G - \frac{R_S U^+}{R_S + R_D + r_{DS0}} - u_{GS} & = & 0 \\ r_{DS0} = \frac{1}{K(U_{GS} - U_T)} & = & 0 \end{array} \right\rvert$	U^+ Speisespannung $[V]$ R_S R an Source $[\Omega]$ R_D R an Drain $[\Omega]$ u_{GS} Gate-Source-Spannung $[V]$ u_{DS} Drain-Source-Spannung $[V]$ u_G Gate-Span. $[V]$ r_{DS} dyn.Source Widerstand $[\Omega]$ r_{DS0} Einschaltwiderstand $u_{DS} = 0$ $[\Omega]$ i_D Drainstrom $[A]$ U_T Schwellspannung (0.6...8) $[V]$ K Transkond. $[\frac{A}{V^2}]$

18.7. Des FET als AC-Verstärker

18.7.1. Sourceschaltung



- invertierend
- Für tiefe bis mittlere Frequenzen
- r_{in} gross
- r_{out} gross

$$A = \frac{u_{out}}{u_{in}}$$

$$A = -\frac{R_D}{R_S + r_S + \frac{R_S+R_D}{\mu}}$$

$$\mu = \frac{r_{DS}}{r_S} = A_{max}$$

Für grosses μ:

$$A \approx -\frac{R_D}{R_S + r_S}$$

Bei $R_S = 0$ gilt:

$$A = -\frac{R_D \| r_{DS}}{r_S}$$

Bei $R_S = 0$ und $R_D = \infty$ gilt:

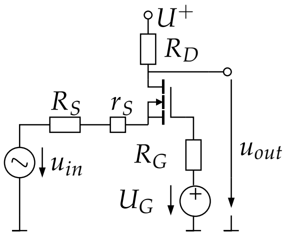
$$|A| = \left| \frac{r_{DS}}{r_S} \right| = \mu$$

$$r_S = \frac{1}{g_m}$$

$$r_{DS} = \frac{U_{Early} + U_{DS}}{I_D} \approx \frac{U_{Early}}{I_D}$$

U^+	Speisespannung	$[V]$
u_{in}	Eingangssp.	$[V]$
u_{out}	Ausgangssp.	$[V]$
A	Verstärkung	$[1]$
R_G	R-Gate	$[\Omega]$
R_D	R-Drain	$[\Omega]$
R_S	R-Source	$[\Omega]$
r_S	dyn.Source Widerstand	$[\Omega]$
μ	Max A bei Sourceschaltung	$[1]$
g_m	Steilheit Kennlinie	$[1]$
U_{Early}	Early 5...100	$[V]$
U_{DS}	Drain-Source-Spannnung	$[V]$
I_D	Drainstrom	$[A]$

18.7.2. Gateschaltung

<table>
<tr>
<td>


- nicht invertierend
- Für hohe Frequenzen
- r_{in} klein
- r_{out} gross
</td>
<td>

$$A = \frac{u_{out}}{u_{in}}$$

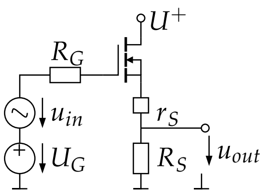
$$A = \frac{R_D\left(1+\frac{1}{\mu}\right)}{r_S + R_S + \frac{R_D+R_S}{\mu}} = \frac{R_D}{R_S + r_S}$$

$$r_S = \frac{1}{g_m}$$

$$r_{DS} = \frac{U_{Early}+U_{DS}}{I_D} \approx \frac{U_{Early}}{I_D}$$
</td>
<td>

U^+	Speisespannung	$[V]$
u_{in}	Eingangssp.	$[V]$
u_{out}	Ausgangssp.	$[V]$
A	Verstärkung	[1]
R_D	R-Drain	$[\Omega]$
R_S	R-Source	$[\Omega]$
r_S	dyn.Source Widerstand	$[\Omega]$
g_m	Steilheit Kennlinie	[1]
U_{Early}	Early 5...100	$[V]$
U_{DS}	Drain-Source	$[V]$
I_D	Drainstrom	$[A]$
μ	Max A bei Sourceschaltung	[1]
</td>
</tr>
</table>

18.7.3. Drainschaltung

<table>
<tr>
<td>


- nicht invertierend
- Spannungsfolger ($A = 1$), Impedanzwandler, Leistungstreiber
- r_{in} gross
- r_{out} klein
</td>
<td>

$$A = \frac{u_{out}}{u_{in}}$$

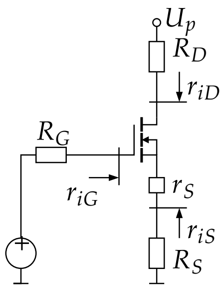
$$A = -\frac{R_S}{R_S + r_S\left(1+\frac{R_S}{r_{ds}}\right)}$$

$$r_S = \frac{1}{g_m}$$

$$r_{DS} = \frac{U_{Early}+U_{DS}}{I_D} \approx \frac{U_{Early}}{I_D}$$
</td>
<td>

U^+	Speisespannung	$[V]$
u_{in}	Eingangssp.	$[V]$
u_{out}	Ausgangssp.	$[V]$
A	Verstärkung	[1]
R_S	R-Source	$[\Omega]$
r_S	dyn.Source Widerstand	$[\Omega]$
g_m	Steilheit Kennlinie	[1]
U_{Early}	Early 5...100	$[V]$
U_{DS}	Drain-Source	$[V]$
I_D	Drainstrom	$[A]$
μ	Max A bei Sourceschaltung	[1]
</td>
</tr>
</table>

18.8. Dynamische Innenwiderstände des MOS-Transistors



$$r_{iG} \to \infty$$

$$r_{iS} = r_S \| r_{DS} \approx r_S \qquad (R_D = 0)$$

$$r_{iD} = r_{DS}\left(1 + \frac{R_S}{r_S} + \frac{R_S}{r_{DS}}\right)$$

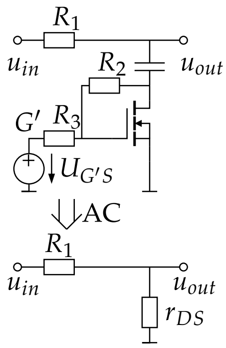
Falls $r_{DS} \gg R_S$:

$$r_{iD} \approx r_{DS}\left(1 + \frac{R_S}{r_S}\right)$$

$$r_{DS} = \frac{U_{DS} + U_{Early}}{I_D} \approx \frac{U_{Early}}{I_D}$$

r_{iG}	dyn. r-Gate	$[\Omega]$
r_{iD}	dyn. r-Drain	$[\Omega]$
r_{iS}	dyn. r-Source	$[\Omega]$
r_S	siehe 18.4 auf S. 141	$[\Omega]$
r_{DS}	r-Drain-Source	$[\Omega]$
U_{Early}	Early 5...100	$[V]$
U_{DS}	Drain-Source	$[V]$
I_D	Drainstrom	$[A]$
R	Widerstand	$[\Omega]$

18.9. Der FET als Spannungsgesteuerter Widerstand



ohne Linearisierung $R_2 = \infty$ und $R_3 = 0$:
für kleine AC-Spannung:

$$r_{DS}(t) = r_{DS0}$$

$$u_{DS}(t) = \frac{u_{in}(t) r_{DS}(t)}{R_1 + r_{DS}(t)}$$

für grössere AC-Spannung:

$$r_{DS}(t) = \frac{1}{K(U_{GS} - U_T) - u_{DS}(t)}$$

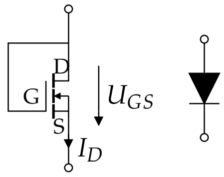
mit Linearisierung $R_2 = R_3 \gg r_{DS}$:

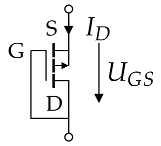
$$\frac{u_{out}}{u_{in}} = \frac{r_{DS}}{R_1 + r_{DS}}$$

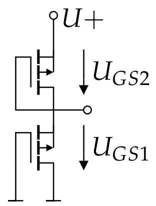
$$r_{DS} = \frac{du_{DS}}{di_{DS}} = \frac{2}{K(U_{G'S} - 2U_T)}$$

R_1	Widerstand	$[\Omega]$
$R_{2,3}$	Linearisierung	$[\Omega]$
r_{DS}	dyn.Source Widerstand	$[\Omega]$
u_{in}	Eingangs-Sp.	$[V]$
u_{out}	Ausgangs-Sp.	$[V]$
$u_{G'S}$	Gate'-Span.	$[V]$
r_{DS}	Drain-Source-Widerstand	$[\Omega]$
r_{DS0}	Einschalt-widerstand $u_{DS} = 0$	$[\Omega]$
i_D	Drainstrom	$[A]$
U_T	Schwellspan-nung (0.6...8)	$[V]$
K	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$

18.10. MOS-Diode







Wichtig, alle Substrate auf gleichem Potential!

$$I_D = \frac{k}{2}(U_{GS} - U_T)^2$$

$$r_{MD} = r_S \| r_{DS}$$

$$r_{MD} = \frac{u_{DS}}{i_D}$$

$$r_{DS} = \frac{U_A + U_{DS}}{I_D}$$

$$r_S = \frac{1}{g_m} = \frac{1}{\sqrt{2 I_D k}}$$

$$U_{GS} = U_T + \sqrt{\frac{2 I_D}{k(1 + \lambda U_{DS}}}$$

$$U_{GS} \approx U_T + \sqrt{\frac{2 I_D}{k}}$$

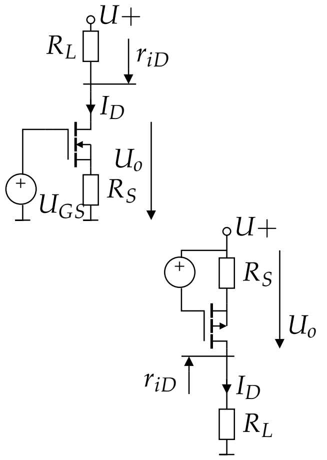
Spannungsteiler

$$\frac{U_{GS1} - U_{T1}}{U_{GS2} - U_{T2}} = \sqrt{\frac{\frac{W_2}{L_2}}{\frac{W_1}{L_1}}}$$

I_D	Drainstrom	$[A]$
U_T	Schwellspannung (0.6...8)	$[V]$
k	Transkonduktanzparameter	$[\frac{A}{V^2}]$
U_{GS}	Gate-Source-Spannung	$[V]$
U_{DS}	Drain-Source-Spannung	$[V]$
r_{MD}	Dynamischer Widerstand	$[\Omega]$
g_m	Steilheit Übertragungskennlinie	$[1]$
r_S	int. Source Widerstand	$[\Omega]$
U_A	Early-Span.	$[V]$
W	Gate-Breite	$[m]$
L	Gate-Länge	$[m]$

18.11. Stromquellen

18.11.1. Einfache Stromquelle



Die Schaltung ist für extrem kleine Betriebsspannungen ungeeignet, da über R_S eine Spannung abfallen muss. Für diesen Einsatzbereich eignet sich die Kaskodeschaltung, bei der R_S durch einen Transistor ersetzt wird.

Der Fet muss im gesättigten Bereich (siehe Kapitel 18.3) betrieben werden.

Für $R_S = 0$:

$$I_D = \frac{k}{2}(U_{GS} - U_T)^2(1 + \lambda U_{DS})$$

$$r_{iD} = r_{DS} = \frac{U_A + U_{DS}}{I_D} \approx \frac{U_A}{I_D}$$

$$U_o \geq U_{DSsat}$$

Für $R_S \neq 0$:

$$I_D = \frac{U_G - U_{GS} - U_{SS}}{R_S}$$

$$r_{iD} = r_{DS}\left(1 + \frac{R_S}{r_S} + \frac{R_S}{r_{DS}}\right)$$

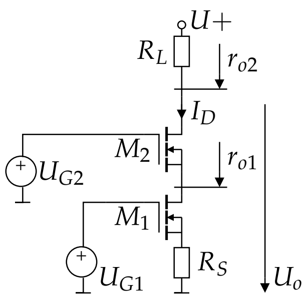
$$r_S = \frac{1}{g_m} = \frac{1}{\sqrt{2 I_D k}},\; r_{DS} \approx \frac{U_A}{I_D}$$

$$U_o > R_S I_D + U_{DSsat}$$

R_S dient als Gegenkopplung

I_D	Drainstrom	$[A]$
r_{iD}	Innenwiderstand	$[\Omega]$
U_o	Ausgangsspannung	$[V]$
U_A	Early-Span.	$[V]$
U_{DS}	U-Drain-Source	$[V]$
U_{SS}	Negative Speisespannung	$[V]$
U_T	Schwellspannung (0.6...8)	$[V]$
R	Widerstand	$[\Omega]$
k	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$
λ	Mod-fakt.	$[\frac{1}{V}]$

18.11.2. Stromquelle mit Kaskode-Schaltung



$$r_{o2} = r_{DS2}\left(1 + \frac{r_{DS1}}{r_{S2}} + \frac{r_{DS1}}{r_{DS2}}\right)$$

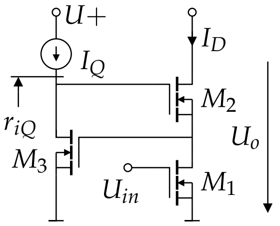
Falls Typ(M_1) = Typ(M_2):

$$r_{o2} \approx \frac{r_{DS}^2}{r_{D2}} = \mu r_{DS}$$

$$U_o \geq U_{G2} - U_{GS2} + U_{DSsat2}$$

r_{iD}	Innenwiderstand	$[\Omega]$
U_o	Ausgangsspannung	$[V]$
R	Widerstand	$[\Omega]$
μ	Max Verstärkung Source Schlautng	$[1]$

18.11.3. Stromquelle mit geregelter Kaskode-Schaltung

<table>
<tr>
<td>

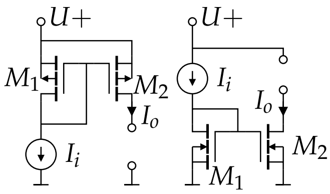
Die Schaltung kann auch als Supertransistor interpretiert werden.</td>
<td>$r_o = r_{DS1} r_{DS2} g_{m1} g_{m3} (r_{DS3} \| r_{iQ})$

$U_o \geq 2U_{DSsat}$

Strom kann wie in vorhergehender Schaltung berechnet werden.</td>
<td>r_o Innenwiderstand $[\Omega]$
U_o Ausgangsspannung $[V]$
U_{DS} U-Drain-Source $[V]$
R Widerstand $[\Omega]$
g Gate-Steilheit $[1]$</td>
</tr>
</table>

18.12. Stromspiegel

18.12.1. Widlar Stromspiegel

<table>
<tr>
<td>

Ein Stromspiegel kann auch mehrere Ausgänge haben.
Der Eingangstransistor ist als MOS-Diode geschaltet.

Die Genauigkeit der Schaltung hängt sehr von den Exemplaren der Transistoren ab.</td>
<td>$U_{omin} = U_{DSsat} = U_{GS2} - U_{T2}$

$U_{omin} = \sqrt{\frac{2I_{D2}}{k}}$

$n = \frac{I_o}{I_i} \approx i_o i_i$

$n = \frac{\frac{W_2}{L_2}}{\frac{W_1}{L_1}} \cdot \frac{1 + \lambda_2 U_{DS2}}{1 + \lambda U_{DS1}}$

$r_o = r_{DS2} = \frac{U_{A2} + U_{DS2}}{I_{D2}}$

$r_o \approx \frac{U_{A1}}{I_D} = \frac{1}{\lambda I_D}$

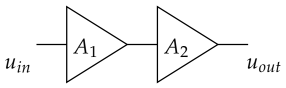
$r_i = r_{S1} \| r_{DS1} \approx r_{S1} = \frac{1}{g_{m1}}$

$r_i = \frac{1}{\sqrt{2 I_D k}}$

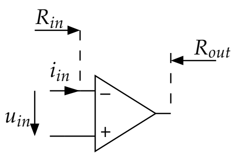
$U_i = U_{GS1} = \sqrt{\frac{2I_D}{k}} + U_{T1}$</td>
<td>r_o Innenwiderstand $[\Omega]$
r_i Ausgangswiderstand $[\Omega]$
r_{DS} r-Source $[\Omega]$
r_S r-Drain-Source $[\Omega]$
U_o Ausgangsspannung $[V]$
U_{DS} U-Drain-Source $[V]$
U_{GS} U-Gate-Source $[V]$
U_T Schwellspannung (0.6...8) $[V]$
U_A Early-Span. $[V]$
I_D Drain-Strom $[A]$
R Widerstand $[\Omega]$
g Gate-Steilheit $[1]$
k Transkond. $[\frac{A}{V^2}]$
λ Mod-fakt. $[\frac{1}{V}]$
W Gate-Breite $[m]$
L Gate-Länge $[m]$</td>
</tr>
</table>

19. Operationsverstärker

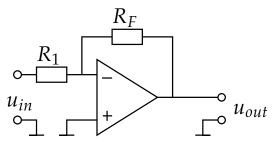
19.1. Verstärkung

	Spannungsverstärkung: $A_U[dB] = 20 \log \frac{u_{out}}{u_{in}}$ Leistungsverstärkung: $A_P[dB] = 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}}$ $A_{tot}[dB] = \sum_i A_i[dB]$ $A_{tot}[1] = A_1[1] A_2[1] \dots A_n[1]$	A_U Spannungsverstärkung $[1]$ A_P Leistungsverstärkung $[1]$ A_{tot} A total $[1]$ u_{in} Eingangsspannung $[V]$ u_{out} Ausgangsspannung $[V]$

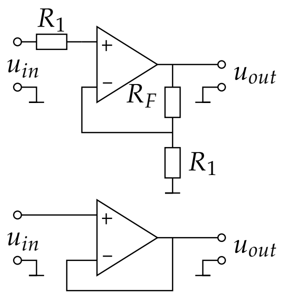
19.2. Idealer OP

	$R_{out} = 0$ $R_{in} = \infty$ $i_{in} = 0$ $u_{in} = 0$	R_{out} Ausgangswiderstand $[\Omega]$ R_{in} Eingangswiderstand $[\Omega]$ i_{in} Eingangsstrom $[A]$ u_{in} Eingangsspannung $[V]$

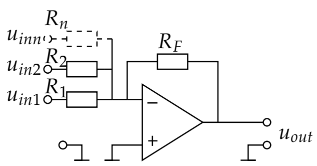
19.2.1. Invertierender Verstärker

	$A_{CL} = \frac{u_{out}}{u_{in}} = -\frac{R_F}{R_1}$	u_{out} Ausgangsspannung $[V]$ u_{in} Eingangsspannung $[V]$ R_1 Widerstand $[\Omega]$ R_F Rückkopplungswiderstand $[\Omega]$ A_{CL} Closed Loop Gain $[1]$

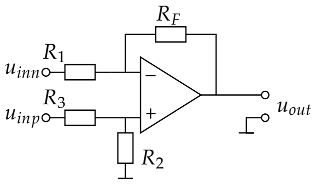
19.2.2. Nichtinvertierender Verstärker

	$A_{CL} = \frac{u_{out}}{u_{in}} = \frac{R_F}{R_1} + 1$ Impedanzwandler: $R_F = 0, R_1 = \infty \Rightarrow A = 1$	u_{out} Ausgangsspannung $[V]$ u_{in} Eingangsspannung $[V]$ R_1 Widerstand $[\Omega]$ R_F Rückkopplungswiderstand $[\Omega]$

19.2.3. Addierer

	$u_{out} = A_1 u_{in1} + A_2 u_{in2} + ...$ $+A_n u_{inn}$ $A_n = -\frac{R_F}{R_n}$	u_{out} Ausgangsspannung $[V]$ u_{in} Eingangsspannung $[V]$ A Verstärkung $[1]$ R_F Rückkopplungswiderstand $[\Omega]$ R_n Widerstand $[\Omega]$

19.2.4. Subtrahierer

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

$$u_{out} = A_1 u_{inn} + A_2 u_{inp}$$

$$A_n = -\frac{R_F}{R_1}$$

$$A_p = \frac{R_2}{R_2 + R_3}\left(\frac{R_F}{R_1} + 1\right)$$

Differenzverst.: $|A_1| = |A_2|$

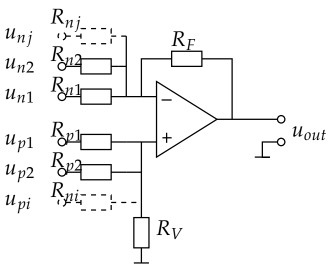
$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{R_F}{R_1} = u_{Diff}$$

$$u_{out} = u_{Diff}(u_{inp} - u_{inn})$$

meist: $R_1 = R_3, R_F = R_2$
</td>
<td>

u_{out} Ausgangsspannung $[V]$
u_{in} Eingangsspannung $[V]$
u_{Diff} Differenzspannung $[V]$
A Verstärkung $[1]$
R_F Rückkopplungswiderstand $[\Omega]$
R_n Widerstand $[\Omega]$
</td>
</tr>
</table>

19.2.5. Mehrfach Addierer und Subtrahierer

<table>
<tr>
<td>

Dummy input</td>
<td>

falls: $A_{n1} + A_{n2} + ... = A_{p1} + A_{p2} + ...$

$$u_{out} = \sum_i A_{pi} u_{pi} - \sum_j A_{nj} u_{nj}$$

Beispiele :

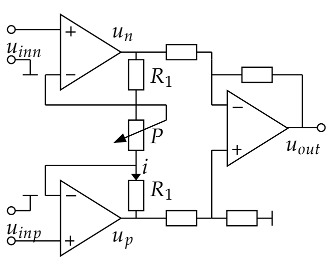
$$R_{n1} = \frac{R_F}{|A_{n1}|}, R_{p1} = \frac{R_F}{|A_{p1}|}$$

$$A_{n1} = \frac{R_F}{R_{n1}}$$

$$A_{p1} = \left(\frac{R_F}{R_{n1}\|...\|R_{nj}} + 1\right)\left(\frac{(R_{p2}\|...\|R_{pi})\|R_V}{R_{p1} + (R_{p2}\|...\|R_{pi})\|R_V}\right)$$
</td>
<td>

u_{out} Ausgangsspannung $[V]$
$u_{n,p}$ Eingangsspannung $[V]$
A Verstärkung $[1]$
R_F Rückkopplungswiderstand $[\Omega]$
R_n Widerstand $[\Omega]$
</td>
</tr>
</table>

19.2.6. Instrumentationsverstärker

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

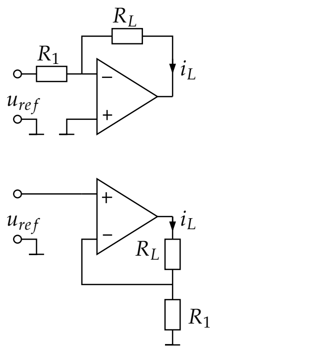
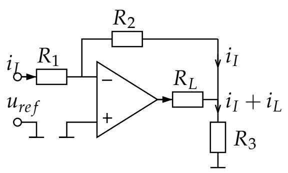
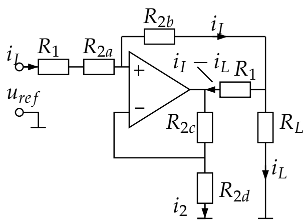
$$u_{out} = (u_{inp} - u_{inn})\frac{2R_1 + P}{P}$$

$$A_{Diff} = 1 + \frac{2R_1}{P}$$

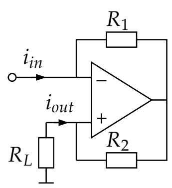
$$u_p - u_n = i(2R_1 + P)$$
</td>
<td>

u_{out} Ausgangsspannung $[V]$
u_{inn} Eingangsspannung $[V]$
u_{inp} Eingangsspannung $[V]$
A_{Diff} Diff-Verst. $[1]$
</td>
</tr>
</table>

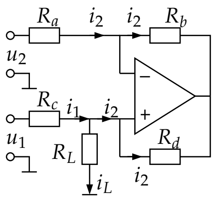
19.2.7. Stromquelle

	Variante 1 und 2: $i_L = \frac{u_{ref}}{R_1}$	u_{ref} Referenz-spannung $[V]$ i_L Strom durch R_L $[A]$ R_L Lastwider-stand $[\Omega]$ R Widerstand $[\Omega]$
	Variante 3: $i_L = -\frac{u_{ref}}{R_1} \cdot \frac{R_2 + R_3}{R_3}$	
	Variante 4: falls $R_{2a} = R_{2b} = R_{2c} = R_{2d}$: $i_L = \frac{u_{ref}}{R_1}$	

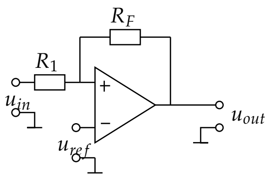
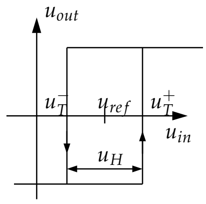
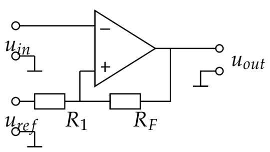
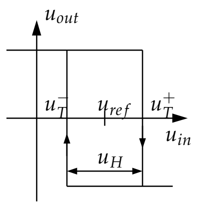
19.2.8. Stromspiegel

	$n = \frac{i_{out}}{i_{in}} = \frac{R_1}{R_2}$ $u_{R_1} = u_{R_2}, R_1 i_{in} = R_2 i_{out}$	i_{in} Referenz-strom $[A]$ i_{out} Strom durch R_L $[A]$ R_L Lastwider-stand $[\Omega]$ R Widerstand $[\Omega]$ n Teilerverhält-nis $[1]$

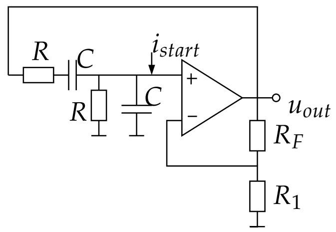
19.2.9. Differentieller UI-Wandler

	$i_L = \frac{u_1 - u_2}{R}$ $R = R_a = R_b = R_c = R_d$	u_1 Eingagssp. 1 $[V]$ u_2 Eingansspp. 2 $[V]$ R_L Lastwiderstand $[\Omega]$ R Widerstand $[\Omega]$

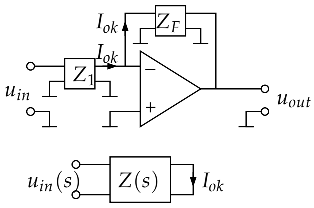
19.2.10. Schmitt-Trigger

Nicht invertierend:   Invertierend:  	Nicht invertierend: $u_T^+ = u_{ref} + \frac{R_1}{R_F}(u_{ref} - u_{outmin})$ $u_T^- = u_{ref} - \frac{R_1}{R_F}(u_{outmax} - u_{ref})$ $u_H = u_T^+ - u_T^-$ $u_H = (u_{outmax} - u_{outmin})\frac{R_1}{R_F}$ Invertierend: $u_T^+ = u_{ref} + \frac{R_1(u_{outmax} - u_{ref})}{R_1 + R_F}$ $u_T^- = u_{ref} - \frac{R_1(u_{ref} - u_{outmin})}{R_1 + R_F}$ $u_H = \frac{R_1(u_{outmax} - u_{outmin})}{R_1 + R_F}$	u_T^+ Sprungspannung $\nearrow$ $[V]$ u_T^- Sprungspannung $\searrow$ $[V]$ u_H Hysteresespannung $[V]$ u_{ref} Referenzspannung $[V]$ u_{outmax} $\rightarrow$ +Speisung $[V]$ u_{outmin} $\rightarrow$ -Speisung $[V]$ R_F Rückkopplungs-Widerstand $[\Omega]$ R_1 Widerstand $[\Omega]$

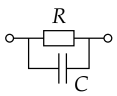
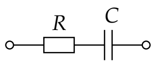
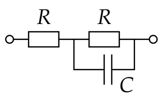
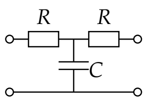
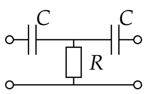
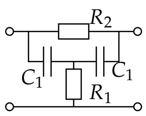
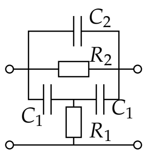
19.2.11. Wien-Robinson Oszillator

	$\lvert G\rvert = \frac{\omega T}{\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2 + (\omega 2DT)^2}}$ $T = RC, \qquad D = \frac{3}{2}$ $\varphi = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega 2DT}{1-\omega^2T^2}\right)$ Amplitudenbedingung: $A_{Loop} \geq 1$ Phasenbedingung: $\varphi_{Loop} = n \cdot 360^\circ$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	T Periode $[s]$ D Dämpfung $[1]$ u_{out} Ausgang $[V]$ R Widerstand $[\Omega]$ C Kapazität $[F]$

19.2.12. Beschaltung des OPs mit Zweitoren

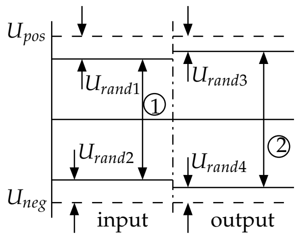
	Gilt nur für invertierenden Verstärker, da sonst kein virtueller Kurzschluss am Ausgang der Zweitore ist! $A(s) = \frac{u_{in}}{u_{out}} = -\frac{Z_F(s)}{Z_1(s)}$ $Z(s) = \frac{u_{in}(s)}{i_{ok}(s)}$	A Verstärkung $[1]$ u_{in} Eingang $[V]$ u_{out} Ausgang $[V]$ Z Impedanz $[\Omega]$ i_{ok} Kurzschlussstrom $[A]$ s Laplace Operator $[1]$

Häufig verwendete Zweitore

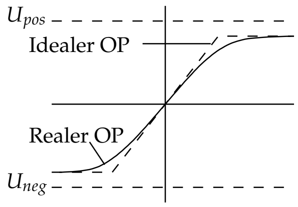
	$\frac{R}{1+sRC}$	R Kapazität $[F]$ C Widerstand $[\Omega]$ Z Impedanz $[\Omega]$ s Laplace Operator $[1]$
	$\frac{1}{sC}(1+sRC)$	
	$(R_1+R_2)\frac{1+s\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}}{1+sR_2C}$	
	$R(2+sRC)$	
	$\frac{1}{sC}\frac{1+s2RC}{sRC}$	
	$R_2\frac{1+s2R_1C_1}{1+s2R_1C_1+s^2R_1R_2C_1^2}$	
	$\frac{R_2(1+s2R_1C_1)}{1+s(2R_1C_2+R_2C_2)+s^2R_1R_2C_1(C_1+2C_2)}$	

19.3. Realer Operationsverstärker

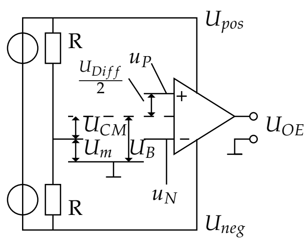
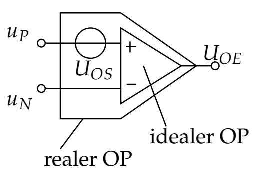
19.3.1. Ein- und Ausgangsspannungsbereich

 1: Eingangsspannungsbereich 2: Ausgangsspannungsbereich	input rail to rail (IRR): $U_{rand1}, U_{rand2} = 0$ output rail to rail (ORR): $U_{rand3}, U_{rand4} = 0$	U_{rand} Randspannung $[V]$ U_{pos} Positive Speisespannung $[V]$ U_{neg} Negative Speisespannung $[V]$

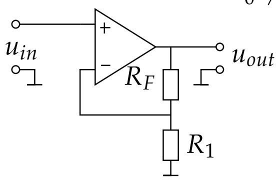
19.3.2. Übertragungskennlinie

	$U_O = A_O U_{Diff}$ $A_O = \frac{dU_O}{dU_D}$	U_O Ausgangsspannung $[V]$ U_{Diff} Differenzspannung $[V]$ A_O Open Loop Verstärkung $[1]$

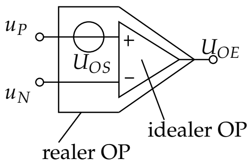
19.3.3. Gleichtaktfehler (Common Mode Error)

 	$U_m = \frac{U_{pos} + U_{neg}}{2}$ $U_B = \frac{U_P + U_N}{2}$ $U_{CM} = U_B - U_m$ $U_{OS} = \frac{\lvert U_{CM}\rvert}{CMRR}$ $U_{OE} = \lvert U_{OS}\rvert A_{pos}$ $U_{OE} = A_O \left(U_{Diff} + \frac{U_{CM}}{CMRR} + \frac{U_m}{A_O} \right)$ $CMRR_{max} = \frac{U_{Diff}}{U_{CM}} = \frac{U_{Diff} + 1}{4\epsilon}$	U_m Mittenspan. $[V]$ U_B Biasspan. $[V]$ U_{CM} Common Mode Spannung $[V]$ U_{OS} Offsetspannung $[V]$ U_{pos} U_{neg} Speisespannung $[V]$ U_P Spannung am pos. Eingang $[V]$ U_N Spannung am neg. Eingang $[V]$ A_O Open Loop Verstärkung $[1]$ CMRR Gleichtaktunterdrückung $[1]$ ϵ Widerstandstolleranz $[1]$

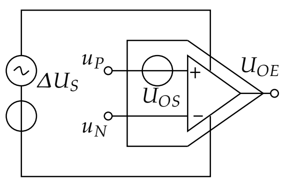
19.3.4. Effektive, geschlossene Verstärkung

Beim realen OP ist $A_0 \neq \infty$ 	Nicht invertierend: $$\frac{1}{\lvert A_{Clreal}\rvert} = \frac{1}{\lvert A_{Clid}\rvert} + \frac{1}{\lvert A_0\rvert}$$ Invertierend: $$\frac{1}{\lvert A_{Clreal}\rvert} = \frac{1}{\lvert A_{Clid}\rvert} + \frac{1}{\lvert \eta A_0\rvert}$$ $$\eta = \frac{R_F}{R_F + R_1}$$	A_{Clreal} Effektive Verstärkung real [1] A_{Clid} Closed Loop Verstärkung ideal [1] A_O Open Loop Verstärkung [1] R Widerstand [Ω]

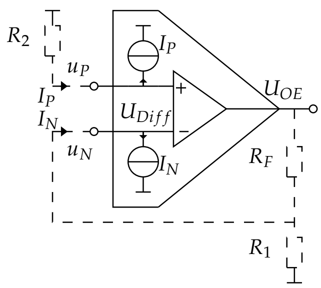
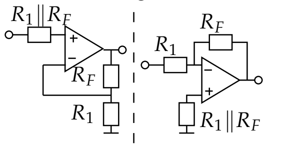
19.3.5. Offsetfehler

	$$U_{OE} = U_{OS} A_{pos}$$ $$U_{OE} = U_{OS}\left(1 + \frac{R_F}{R_1}\right)$$	U_{OE} Offset-Fehler-Spannung [V] U_{OS} Offsetspannung [V] A_{pos} pos. Verstärkung (DC) [1] R_F, R_1 siehe Seite 151 [Ω]

19.3.6. Versorgungsspannungsfehler (Power supply error)

	$$U_{OS} = \frac{\Delta U_S}{PSRR}$$ $$U_{OE} = \lvert U_{OS}\rvert A_{pos}$$	U_S Speisung [V] U_{OE} Offset-Fehler-Spannung [V] U_{OS} Offsetspannung [V] A_{pos} pos. Verstärkung [1] PSRR Unterdrückung der Speisespannungseinflüsse [1]

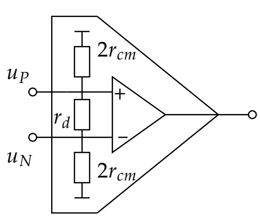
19.3.7. Eingangsströme (Bias- und Offsetstrom)

 Unterdrückungsmassnahmen 	$I_{OS} = \|I_P - I_N\|$ $I_B = \dfrac{I_P + I_N}{2}$ $U_{OE} = \| - I_P R_2 A_{pos} + I_N R_F\|$ Bester Fall (Einfluss $I_B = 0$): $R_2 = R_F \| R_1$ $\Downarrow$ $U_{OE} = \| - I_{OS} R_F\|$	I_{OS} Offsetstrom $[A]$ $I_{P,N}$ Strom am pos, neg Eingang $[A]$ I_B Biasstrom $[A]$ U_{OE} Offset-Fehler-Spannung $[V]$ A_{pos} pos. Verstärkung $[1]$ $R_{1,2}$ Widerstand nach GND $[\Omega]$

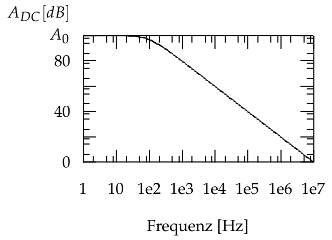
19.3.8. Kombination der statischen Fehler

	$U_{OE} = A_{pos}($ |Offsetfehler| + |Versorgungsspannungsfehler |+| Gleichtaktfehler |)+ Eingangsstromfehler $U_{OE} = A_{pos} \left[\|U_{OS}\| + \|\dfrac{\Delta U_S}{PSRR}\| + \|\dfrac{\Delta U_{CM}}{CMRR}\| \right] + *$ Worst-Case: $* = \left(I_N R_F - I_P R_2 \dfrac{R_F + R_1}{R_1} \right)$ Bei unterdrücktem Biasstrom - Fehler: $* = \|I_{OS}\| R_F$	I_{OS} Offsetstrom $[A]$ $I_{P,N}$ Strom am pos, neg Eingang $[A]$ I_B Biasstrom $[A]$ U_{OE} Offset-Fehler-Spannung $[V]$ A_{pos} pos. Verstärkung $[1]$

19.3.9. Dynamischer Eingangswiderstand

	Messung bei verbundenen Eingängen: $r_{cm} = 2r_{cm} \| 2r_{cm}$	r_d Dynamischer Widerstand $[\Omega]$ r_{cm} Common Mode Resistance $[\Omega]$

19.3.10. Frequenzgang



Knick:

$$f_0 : A_{OL} = A_{DC} - 3dB$$

(ca. 100 Hz in Grafik)

$$f_T : A_{OL} = 0dB = 1$$

(ca. 10^7 Hz in Grafik)

$$f_0 = \frac{f_T}{A_0}$$

Der Verstärkungsabfall beträgt - 20 $\frac{dB}{Dec}$

$$A_{CLreal}(s) = \frac{A_{CLDC}}{1 + sT_{neu}}$$

$$A_{CLDC} = \frac{A_{OLDC}}{1 + k(s)A_{OLDC}}$$

$$T_{neu} = \frac{T_0}{1 + k(s)A_{OLDC}}$$

$$\omega_{neu} = \omega_0[1 + k(s)A_{OLDC}]$$

Nichtinvertierneder Verstärker:

$$k(s) = \frac{R_1 + R_F}{R_1}$$

$$f_{neu} = f_0(1 + kA_{OLDC})$$

$$f_{neu}A^+_{CL} = GBP(= f_T)$$

$$f_{neu} = f_0 A_{OLDC}$$

Invertierneden Verstärker:

$$f_{neu} = k \cdot BGP = \frac{GBP}{A^-_{CL} + 1}$$

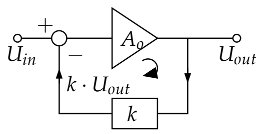
$$f_{neu}(A^-_{CL} + 1) = GBP(= f_T)$$

$$f_{neu} = \frac{1}{2} f_0 A_{OLDC}$$

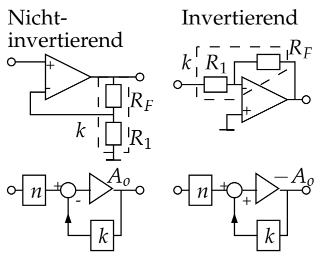
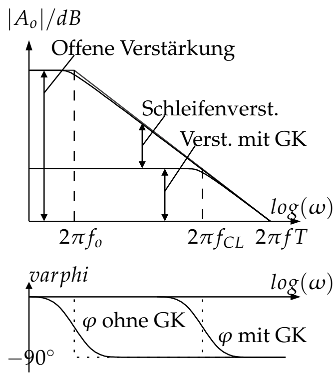
f_0	Kleinsignal Bandbreite	$[Hz]$
f_T	Transitfrequnz, Verstärkungs-Bandbreiten-Produkt	$[Hz]$
A_{OL}	Open Loop Gain	$[1]$
A_{CL}	Closed Loop Gain	$[1]$
A^+_{CL}	A_{CL} nichtin-vertiereder Verstärker	$[1]$
s	Laplace Operator	$[1]$
T_{neu}	Closed Loop Zeitkonst.	$[s]$
k	Faktor des Spannungsteilers	$[1]$
ω	Knickfrequenz	$[Hz]$
f_{neu}	Knickfrequenz	$[Hz]$
GBP	Verstärkungs Bandbreiten-produkt	$[1]$

20. Gegengekoppelte Verstärker

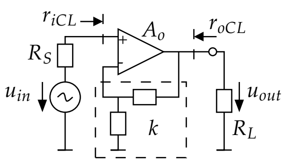
20.1. Mit- und Gegenkopplung

	Gegenkopplung: $$A_{CL} = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{A_o}{1 + kA_o}$$ Mitkopplung: $$A_{CL} = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{A_o}{1 - kA_o}$$	A_{CL} Closed Loop Verstärkung [1] A_o Open Loop Verstärkung [1] U Spannung $[V]$ k Faktor [1]

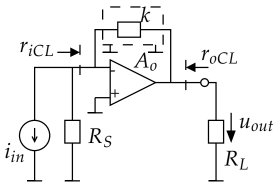
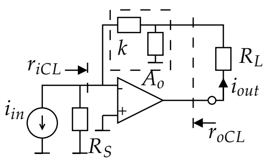
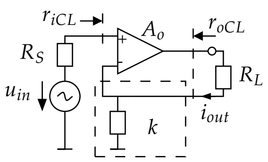
20.1.1. Gegenkopplung beim OP

 Bodeplot: 	Ideal: $$A_{CL} = \frac{nA_o}{1 + kA_o}$$ Nicht invertierend: $$n = 1$$ $$\lvert A_{CLideal}\rvert = \frac{R_F + R_1}{R_1} = \frac{1}{k}$$ Inveriterend: $$n = \frac{R_F}{R_1 + R_F} \qquad k = \frac{R_1}{R_1 + R_F}$$ $$\lvert A_{CLideal}\rvert = \frac{R_F}{R_1}$$ Real: $$A_{CLreal} = nA_o \| A_{CLideal}$$	A_{CL} Closed Loop Verstärkung [1] A_o Open Loop Verstärkung [1] k GK-Faktor [1] n Faktor [1] R Widerstand $[\Omega]$

20.2. Gegenkopplungsarten

<table>
<tr>
<td>Serie-Parallel

</td>
<td>Eingang: Seriell
Ausgang: Parallel
$r_{iCL} \to \infty \qquad r_{oCL} \to 0$
$r_{iCL} = r_i(1 + kA_o)$
$r_{oCL} = \frac{u_{out}}{i_{out}} = \frac{r_o}{1 + kA_o}$</td>
<td rowspan="4">

A_o	Open Loop Verstärkung	[1]
k	Faktor	[1]
r_i	Open Loop r-Eingang	$[\Omega]$
r_o	Open Loop r-Ausgang	$[\Omega]$
r_{iCL}	Closed Loop r-Eingang	$[\Omega]$
r_{oCL}	Closed Loop r-Ausgang	$[\Omega]$
u_{out}	u-Ausgang	$[V]$
i_{out}	i-Ausgang	$[A]$
R_S	Quell-Widerst.	$[\Omega]$
R_L	Last-Widerst.	$[\Omega]$

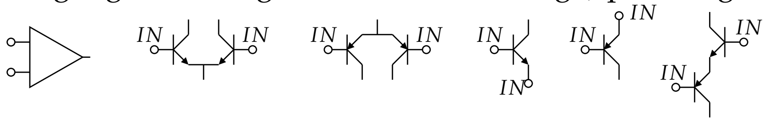
</td>
</tr>
<tr>
<td>Parallel-Parallel

</td>
<td>Eingang: Parallel
Ausgang: Parallel
$r_{iCL} \to 0 \qquad r_{oCL} \to 0$
$r_{iCL} = \frac{r_i}{1 + kA_o}$
$r_{oCL} = \frac{u_{out}}{i_{out}} = \frac{r_o}{1 + kA_o}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Parallel-Serie

</td>
<td>Eingang: Parallel
Ausgang: Seriell
$r_{iCL} \to 0 \qquad r_{oCL} \to \infty$
$r_{iCL} = \frac{r_i}{1 + kA_o}$
$r_{oCL} = \frac{u_{out}}{i_{out}} = r_o(1 + kA_o)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Serie-Serie

</td>
<td>Eingang: Seriell
Ausgang: Seriell
$r_{iCL} \to \infty \qquad r_{oCL} \to \infty$
$r_{iCL} = r_i(1 + kA_o)$
$r_{oCL} = \frac{u_{out}}{i_{out}} = r_o(1 + kA_o)$</td>
</tr>
</table>

20.2.1. Bestimmung der Gegenkopplungsart

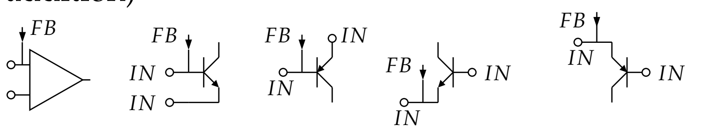
1. Forwärtspfad, Rückwärtspfad und Gegenkopplugsschleife einzeichnen.
2. Anzahl Inversionen im Vorwärtspfad (⇒ Invertierend oder nicht invertierend) bzw. in der Schleife bestimmen (⇒ Gegenkopplung bei ungerade Anzahl bzw. Mittkopplung bei gerader Anzahl).
3. Knoten (out, in+ und in−) der Äquivalenten OP-Schaltung bestimmen.
4. Äquivalenten OP-Schaltung zeichnen.

20.2.2. Eingangsschaltungen

Eingangsschaltungen bei Serieschaltung (Spannungsaddition)

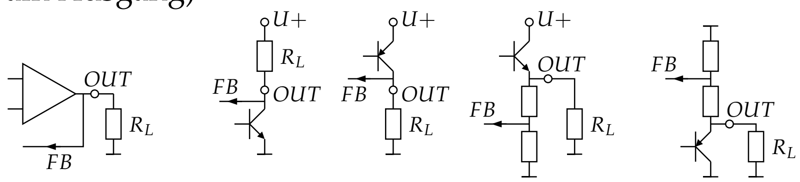


Eingangsschaltungen bei Parallelschaltung von Verstärkereingnag und Ausgang (Stromaddition)

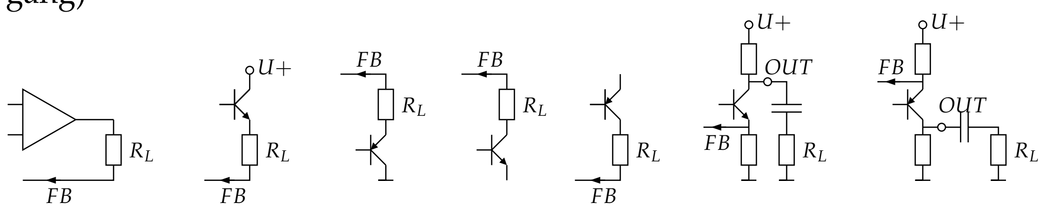


20.2.3. Ausgangsschaltungen

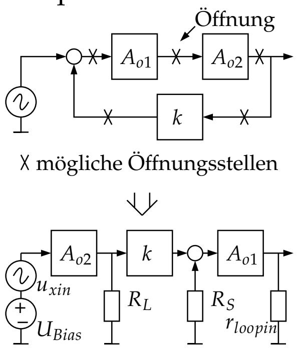
Ausgangsschaltungen bei Parallelschaltung von Last und Eingang (Spannungsabnahme am Ausgang)



Ausgangsschaltungen bei Serieschaltung von Last und Eingang (Stromabnahme am Ausgang)



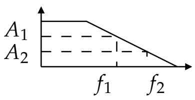
20.3. Schleifenverstärkung

Beispiel: 	$A_L = kA_o = \frac{u_{xout}}{u_{xin}}$ Gegenkopplungsgrad: $1 + A_L = 1 + kA_L$ U_{Bias} legt den Arbeitspunkt fest. Es soll eine Trennstelle gewählt werden bei der $r_{loopout} \gg r_{loopin}$ gilt $\Rightarrow$ Belastung des Schleifenausganges kann vernachlässigt werden.	A_L Schliefen-Verstärkung [1] A_o Open Loop Verstärkung [1] U Spannung [V] k Faktor [1] R Widerstand [Ω]

20.4. Wirkung der GK auf die Sensivität der Verstärkung

Die Sensitivität S_x^N ist ein Mass für die Empfindlichkeit einer Schaltungseigenschaft N gegenüber Schwankungen eines Parameters x.	$S_x^N = \frac{\frac{dN}{N}}{\frac{dx}{x}}$ $S_{A_o}^{A_{CL}} = \frac{\frac{dA_{CL}}{A_{CL}}}{\frac{dA_o}{A_o}} = \frac{A_o}{A_{CL}} \frac{dA_{CL}}{dA_o}$ $S_{A_o}^{A_{CL}} = \frac{1}{1 + kA_o}$	S Sensitivität [1] A_L Schliefen-Verstärkung [1] A_o Open Loop Verstärkung [1] k Faktor [1] x veränderter Parameter [...] N Beeinflusste Grösse [...]

20.5. Das Verstärkungs-Bandbreiten-Produkt

Für alle Punkte die auf einer Amplitudengeraden mit einer Neigung von $\pm 20\frac{dB}{Dek}$ liegen gilt das Gesetz vom konstanten Verstärkungs-Bandbreiten-Produkt. Siehe auch S. 115 	$Af = f_T = GBP$ $A_1 f_1 = A_2 f_2$ $A_{oDC} = f_o = GBP$	f_T Transitfrequenz $[\frac{1}{s}]$ = Amplitude $\cap$ $0dB$-Achse f Frequenz $[\frac{1}{s}]$ A Verstärkung $[1]$ A_{oDC} Open-Loop DC-Gain $[1]$

Teil V.

Digitale Signalverarbeitung

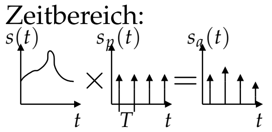
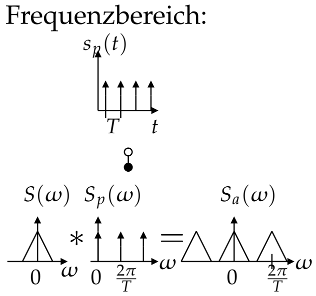
21. Stochastische Signale

21.1. Allgemein

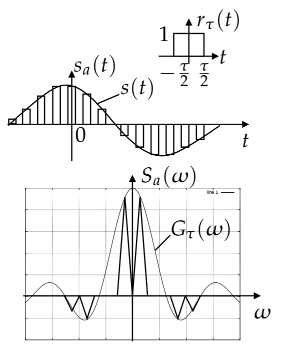
hallo	$M = Fr$	r Radius $[m]$

22. Abtastung

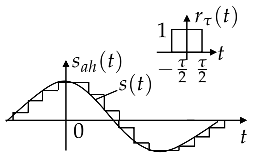
22.1. Ideale Abtastung

Zeitbereich:  Frequenzbereich:  	$s_a(t) = s(t)T\delta_p(t)$ $s_a(t) = Ts(t)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT)$ $s_a(t) = T\sum_{m=-\infty}^{\infty}s(mT)\delta(t-mT)$ $S_a(\omega) = S(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_c)$ $S_a(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}S(\omega-k\omega_c)$ $\omega_c = \frac{2\pi}{T}$	s Signal [...] s_a s abgetastet [...] S Spektrum von s [...] t Zeit $[s]$ T Periode $[s]$ m m-te Periode [1] ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ ω_c Abtastfrequenz $[\frac{1}{s}]$

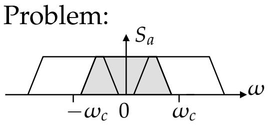
22.2. Flat Top Sampling

 Signal wird verzerrt durch $G_\tau(\omega)$	$s_a(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}s(mT)r_\tau(t-mT)$ $S_a(\omega) = G_\tau(\omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty}S(\omega-k\omega_c)$ $G_\tau(\omega) = \frac{1}{T}R_\tau(\omega) = \frac{\tau}{T}\frac{\sin\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)}{\frac{\tau}{2}\omega}$ Je kürzer die Abtast-Pulse desto breiter die $\frac{\sin(x)}{x}$ Kurve.	s Signal [...] s_a s abgetastet [...] S Spektrum von s [...] t Zeit $[s]$ T Periode $[s]$ τ Rechteckbreite $[s]$ m m-te Periode [1] ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$

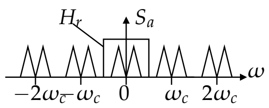
22.3. Sample and Hold

	Entspricht Flat Top Sampling (S. 168) bei $\tau = T$ Die $\frac{\sin(x)}{x}$ Kurve hat die Nulldurgänge bei $k\frac{2\pi}{T}, k = \{1, 2, ...\}$	T Periode $[s]$ τ Rechteckbreite $[s]$

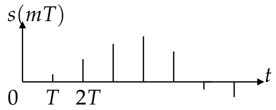
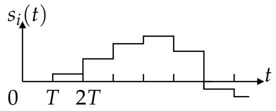
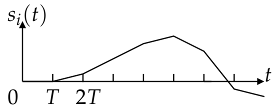
22.4. Abtasttheorem

Problem:  ⇒ Rekonstruktion ist nicht möglich.	$\omega_c > 2\omega_{max}$ ⇒ Praktisch muss immer ein analoger Tiefpass vorgeschaltet werden.	ω_c Abtastfrequenz$[\frac{1}{s}]$ ω_{max} max Frequenz in $s(t)$ $[\frac{1}{s}]$

22.5. Rekonstruktion

Ist das Abtasttheorem erfüllt, so ist das ursprüngliche Signal exakt reproduzierbar. 	$s_r(t) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT) h_r(t - mT)$ $s_r(t) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT)\delta(t - mT) * h_r(t)$ $h_r(t) = \frac{\omega_c}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{\omega_c}{2}t\right)}{\frac{\omega_c}{2}t}$	s_r Signal rekonst. [...] h_r Stossantw. Rekonstruktions-Tiefpass [...] t Zeit $[s]$ T Periode $[s]$ m m-te Periode $[1]$ ω_c Abtastfrequenz$[\frac{1}{s}]$

22.5.1. Interpolation

	$s_i(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT) h_i(t - mT)$ $S_i(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_c) H_i(\omega)$	s_i Signal interpoliert [...] h_i Interpolatiosfunktion [1] t Zeit $[s]$ T Periode $[s]$ τ Pulsbreite $[s]$ m, k m,k-te Periode [1] ω Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ ω_c Abtastfrequenz $[\frac{1}{s}]$
	Halteglied nullter Ordnung $h_i(t) = \text{Rechteck}, h = 1, \tau = T$ $H_i(\omega) = T \frac{\sin\left(\frac{T}{2}\omega\right)}{\frac{T}{2}\omega} e^{-j\frac{T}{2}\omega}$	
	Lineare Interpolation $h_i(t) = \text{Dreieck}, h = 1, \tau = 2T$ $H_i(\omega) = T \left(\frac{\sin\left(\frac{T}{2}\omega\right)}{\frac{T}{2}\omega} \right)^2 e^{-jT\omega}$	

22.6. Energie und Leistung bandbegrenzter Signale

Falls das Abtasttheorem, $T < \frac{1}{2} f_{max}$ eingehalten wird, hat das abgetastete Signal die selbe Energie bzw. Leistung wie das Original. Siehe Parsevalsches Theorem S. 188	$W = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$ $W = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} s^2(mT)$ $P = \frac{1}{T_{per}} \int_0^{T_{per}} s^2(t) dt$ $P = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} s^2(mT)$ $N = \frac{T_{per}}{T}$	W Energie $[Ws]$ P Leistung $[W]$ s Signal [...] t Zeit $[s]$ T Periode $[s]$ T_{per} Periodenintervall $[s]$ m m-te Periode [1] ω_c Abtastfrequenz $[\frac{1}{s}]$ N Abtastwertezahl [1]

Teil VI.

Mathematik

23. Grundlagen

23.1. Allgemeines

23.1.1. Binome

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\left(a^2 - b^2\right) = (a-b)\,(a+b)$$

$$\left(a^3 \pm b^3\right) = (a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right)$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1\\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1\\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1\\
1 \quad 11 \quad 55 \quad 165 \quad 330 \quad 462 \quad 462 \quad 330 \quad 165 \quad 55 \quad 11 \quad 1\\
1 \quad 12 \quad 66 \quad 220 \quad 495 \quad 792 \quad 924 \quad 792 \quad 495 \quad 220 \quad 66 \quad 12 \quad 1
\end{array}$$

23.1.2. Faktorzerlegungen

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

für n gerade:

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + -\ldots + ab^{n-2} - b^{n-1})$$

für n ungerade:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + -\ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$s^2 + 1 = (s-j)(s+j)$$

23.1.3. Quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

23.1.4. Arithmetische Folge

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad d \; const.$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\, d$$

$$s_n = n\frac{a_1 + a_n}{2} = a_1 n + \frac{n\,(n-1)}{2}d$$

23.1.5. Geometrische Folge

$$a_{n+1}/a_n = q, \quad q \; const.$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}, \quad falls \; |q| < 1$$

23.1.6. Partialbruchzerlegung

$$r\,(z) = \frac{r_1\,(z)}{(z-a)\,(z-b)^3\left((z-c)^2 + d^2\right)^3}$$

$$r\,(z) = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta_1}{z-b} + \frac{\beta_2}{(z-b)^2} + \frac{\beta_3}{(z-b)^3} +$$

$$\frac{\gamma_1 z + \delta_1}{(z-c)^2 + d^2} + \frac{\gamma_2 z + \delta_2}{\left((z-c)^2 + d^2\right)^2} + \frac{\gamma_3 z + \delta_3}{\left((z-c)^2 + d^2\right)^3}$$

23.2. Matrizen und Determinanten

23.2.1. 2 × 2 Matrizen

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$

Achtung: $AB \neq BA$!

Inverse: (falls $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

23.2.2. 3 × 3 Matrizen

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

23.2.3. Transponierte einer Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

23.3. Vektorrechnung

23.3.1. Grundlagen

Skalarprodukt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = xy \cos \alpha$$

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

Skalare Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

$$b_a = \vec{b}\,\vec{e}_a$$

Vektorielle Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

$$\vec{b}_a = b_a\,\vec{e}_a = (\vec{b}\,\vec{e}_a)\vec{e}_a$$

Vektorprodukt

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a\,b \sin \alpha$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [a_1, a_2, a_3] \times [b_1, b_2, b_3] = \left[det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}, -det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \right]$$

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Steigung eines Vektors

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$$\tan\alpha = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

23.3.2. Lineare Abbildungen

Drehung der XY-Ebene um den Ursprung mit Drehwinkel φ

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Spiegelung der XY-Ebene an der Geraden g durch den Ursprung mit den Steigungswinkel φ

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Drehung des Raumes um die X-Achse

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Drehung des Raumes um die Y-Achse

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Drehung des Raumes um die Z-Achse

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

23.4. Trigonometrie

23.4.1. Komplementwinkel

$$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \qquad \cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$$\tan\alpha = \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) \qquad \cot\alpha = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

23.4.2. Sinussatz

$\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

wobei r = Umkreisradius

23.4.3. Cosinussatz

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

23.5. Goniometerie

23.5.1. Serien (Lösungsmengen)

$\alpha_1 = \arcsin x, \quad \alpha_2 = \pi - \alpha_1$

$\alpha_{1n} = \alpha_1 + n2\pi, \quad \alpha_{2n} = \alpha_2 + n2\pi$

$\pm\alpha = \arccos x, \quad \alpha_n = \pm\alpha + n2\pi$

$\alpha_0 = \arctan x, \quad \alpha_n = \alpha_0 + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

23.5.2. Potenzen

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^3\alpha = \dfrac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$

$\cos^3\alpha = \dfrac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha)$

$\sin^4\alpha = \dfrac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3)$

$\cos^4\alpha = \dfrac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3)$

23.5.3. Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(a \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

23.5.4. Doppelwinkel

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2cos^2(\alpha) - 1 = 1 - sin^2(\alpha)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

23.5.5. Dreifachwinkel

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha + 3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

23.5.6. Halbwinkel

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

23.5.7. Summen und Produkte

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$$

23.5.8. Genaue Funktionswerte

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\cot\alpha$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

23.6. Logarithmen

$$\log(u \cdot v) = \log u + \log v$$

$$\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log u - \log v$$

$$\log\left(u^k\right) = k \log u$$

$$\log \sqrt[k]{u} = \frac{1}{k} \log u$$

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}$$

23.7. Komplexe Zahlen

23.7.1. Allgemeines

$$j^2 = -1, \quad \frac{1}{j} = -j, \quad (-1)^j = \left(e^{j\pi}\right)^j = e^{-\pi}$$

$$\underline{z} \in \mathbb{C}, \quad \overline{\underline{z}} : \mathrm{k}onjugiertkomplex$$

$$\mathrm{k}arthesisch : \underline{z} = a + jb, \quad \overline{\underline{z}} = a - jb$$

$$\mathrm{p}olar : \underline{z} = r \cdot e^{j\varphi}, \quad \overline{\underline{z}} = r \cdot e^{-j\varphi}$$

$$\underline{z} = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r \cdot e^{j\varphi} = a + jb$$

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$$

$$r = |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \begin{cases} I. & \text{Quadrant} \quad \arctan\frac{b}{a} \\ II. & \text{Quadrant} \quad \arctan\frac{b}{a} + \pi \\ III. & \text{Quadrant} \quad \arctan\frac{b}{a} + \pi \\ IV. & \text{Quadrant} \quad \arctan\frac{b}{a} + 2\pi \end{cases}$$

23.7.2. Rechenregeln

$(a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = a_1 \pm a_2 + j\,(b_1 \pm b_2)$

$(a_1 + jb_1)\,(a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j\,(a_1b_2 + b_1a_2)$

$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = r_1r_2 \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$

$\dfrac{(a_1 + jb_1)}{(a_2 + jb_2)} = \dfrac{(a_1 + jb_1)\,(a_2 - jb_2)}{\left(a_2^2 + b_2^2\right)}$

$\dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$

$\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{n} + j\sin\dfrac{\varphi}{n}\right)$

$\sqrt[n]{\underline{z}} = e^{\frac{1}{n}\ln\underline{z}}$+$(n-1)$ weitere Lösungen gleichmässig verteilt auf einem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{r}$

23.7.3. Euler

$e^{\pm jkt} = \cos kt \pm j\sin kt$

$e^{\pm jk\pi} = (-1)^k, \quad e^{t+j2\pi} = e^t$

$\cos kt = \dfrac{1}{2}\left(e^{jkt} + e^{-jkt}\right)$

$\sin kt = \dfrac{1}{2j}\left(e^{jkt} - e^{-jkt}\right)$

$\cosh kt = \dfrac{1}{2}\left(e^{kt} + e^{-kt}\right)$

$\sinh kt = \dfrac{1}{2}\left(e^{kt} - e^{-kt}\right)$

23.8. Ableiten

23.8.1. Rechenregeln

$(\lambda f)' = \lambda f'$

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$

$f'^{-1} = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

$(f \circ g)' = \left(f' \circ g\right) \cdot g'$

Elementare Funktionen

$$\mathrm{pot'}_k x = k\,\mathrm{pot}_{k-1} x$$

$$\sin' kx = k \cos kx$$

$$\cos' kx = -k \sin kx$$

$$\exp' kx = k \exp kx$$

$$\log' x = \frac{1}{x}$$

$$\ln' |f| = \frac{f'}{f}$$

$$\left(a^{kx}\right)' = (k \ln a)\, a^{kx}$$

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

$$\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$arccot' x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$cosh' x = sinhx = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$sinh' x = coshx = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$arcosh' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$arsinh' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Satz von Bernoulli und de l'Hospital

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to t_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiel:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t} = 0$$

23.9. Integrieren

23.9.1. Rechenregeln

$$\int \lambda f = \lambda \int f$$

$$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$$

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

23.9.2. Substitution

$$\int f(x)\,dx$$

Aufstellen der Substitutionsgleichung:

$$u = g(x),\ \frac{du}{dx} = g'(x),\ dx = \frac{du}{g'(x)} \qquad \text{bzw. } x = h(u),\ \frac{dx}{du} = h'(u),\ dx = \frac{h'(u)}{du}$$

($u = g(x)$ bzw. $x = h(u)$ müssen monotone Funktionen sein)
Substitution:

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi(d)\,du$$

Integration:

$$\int \varphi(u)\,du = \Phi(u)$$

Rücksubstitutuion:

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi(u)\,du = \Phi(u) = \Phi(g(x)) = F(x)$$

Beispiel:

$$\int_0^2 x\sqrt{3x^2+4}\,dx$$

Subst: $u = 3x^2 + 4 \;\Leftrightarrow\; u' = \dfrac{du}{dx} = 6x$

Die neuen Grenzen erhalten wir durch Einsetzten der ursprünglichen Grenzen in die Substitutionsgleichung, die Rücksubstition entfällt:

$$\begin{array}{lcl} 2 & \mapsto & 16 \\ 0 & \mapsto & 4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \int_4^{16} \sqrt{u}\, du$$

23.9.3. Sätze

$$\int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f$$

$$\int\limits_a^b f(t)\, dt = -\int\limits_{-a}^{-b} f(-t)\, dt$$

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$$

$$\int\limits_a^b f(t) = \int\limits_{a+c}^{b+c} f(t-c)$$

$$f \text{ stetig} \Rightarrow \int\limits_a^b f = \int f(b) - \int f(a) = F(b) - F(a)$$

$$f \text{ stetig in } [a,b] \Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b] \text{ mit } \int\limits_a^b f = (b-a)\, f(\xi)$$

23.9.4. Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen können integriert werden, indem man Division der Polynome durchführt
Beispiel: $\int \frac{x^2}{x^2+1}$

$$x^2 : (x^2+1) = 1 + \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int 1 + \frac{1}{x^2+1}\, dx = x + \arctan x$$

23.9.5. Rationalisierungsformeln

Für Rationale Funktionen von $\sin x$ **und** $\cos x$

- Beispiel

$$\int \frac{1+\cos x}{\sin x}\, dx$$

- Substitution

$$u = \tan x/2$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{2}{1+u^2}\, du \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Weitere Rationalisierungsformeln siehe Papula Seite 148

23.9.6. Spezielle Integrale

$$\int \mathrm{pot}_k = \frac{1}{k+1}\, \mathrm{pot}_{k+1}$$

$$\int \exp kx\, dx = \frac{1}{k} \exp kx$$

$$\int a^{cx}\, dx = \frac{1}{c \ln a} a^{cx}$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x$$

$$\int \ln |x|\, dx = x\,(\ln |x| - 1)$$

$$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \ln |\ln |x||$$

$$\int \log_a |x|\ dx = x\,(\log_a |x| - \log_a \mathrm{e})$$

$$\int x^k \ln x\, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\left(\ln x - \frac{1}{k+1}\right), \quad k \neq -1, \quad x > 0$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\,(\ln x)^2$$

$$\int \sin(ax+b)\ dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b)$$

$$\int \cos(ax+b)\ dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b)$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x|$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x|$$

$$\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right|$$

$$\int \frac{1}{\cos x} \, dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$$

$$\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x$$

$$\int \cot^2 x \, dx = -\cot x - x$$

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx = \cos \frac{1}{x}$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$$

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln\left(1 + x^2\right)$$

$$\int \mathrm{arccot}\, x \, dx = x \,\mathrm{arccot} x + \frac{1}{2} \ln\left(1 + x^2\right)$$

$$\int (ax + b)^k \, dx = \frac{(ax + b)^{k+1}}{a(k+1)}, \quad k \neq 1$$

$$\int (ax^p + b)^k x^{p-1} \, dx = \frac{(ax^p + b)^{k+1}}{ap(k+1)}, \quad k \neq 1, \quad ap \neq 0$$

$$\int \frac{1}{ax + b} \, dx = \frac{1}{a} \ln|ax + b|$$

$$\int \frac{ax + b}{cx + d} \, dx = \frac{ax + b}{c} - \frac{ad - bc}{c^2} \ln|cx + d|$$

$$\int \frac{x^{p-1}}{ax^p + b} \, dx = \frac{1}{ap} \ln|ax^p + b|, \quad ap \neq 0$$

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx = \frac{ax+b}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln|cx+d|$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+a^2}\,dx = x - a\arctan\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{2x}{1-x^2}\,dx = -\ln\left|1-x^2\right|$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{|a|}$$

$$\int e^{cx}\sin(ax+b)\;dx = \frac{e^{cx}}{a^2+c^2}\left(c\sin(ax+b) - a\cos(ax+b)\right)$$

$$\int e^{cx}\cos(ax+b)\;dx = \frac{e^{cx}}{a^2+c^2}\left(c\cos(ax+b) + a\sin(ax+b)\right)$$

$$\int \exp_k \sin_l\;dx = \frac{\exp_k}{l^2-k^2}\left(jk\sin_l - l\cos_l\right)$$

$$\int \exp_k \cos_l\;dx = \frac{\exp_k}{l^2-k^2}\left(jk\cos_l - l\sin_l\right)$$

$$\int x^n\sin kx\,dx = -\frac{x^n}{k}\cos kx + \frac{n}{k}\int x^{n-1}\cos kx\,dx \quad n\in\mathbb{N}$$

$$\int x^n\cos kx\,dx = +\frac{x^n}{k}\sin kx - \frac{n}{k}\int x^{n-1}\sin kx\,dx \quad n\in\mathbb{N}$$

24. Fourierreihen

24.1. Bezeichungen

Vektorraum der trigonometrischen Polynome: $\mathbb{P} \subset \mathbb{V}$

$$\mathbb{P} = \{a_0 \cos_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos_k + b_k \sin_k | n \in N^*\}$$

Vektorraum der Exponentialpolynome: $\mathbb{E} \subset \mathbb{V}$

$$\mathbb{E} = \{\sum_{k=-n}^{m} c_k \exp_k | c_k \in \mathbb{C}\}$$

$$\sin_k = \sin kt$$

$$\cos_k = \cos kt$$

$$\exp_k = e^{jkt}$$

24.2. Skalarprodukt

24.2.1. Eigenschaften

$$[a, b] = [b, a]$$

$$[a + b, c] = [a, c] + [b, c]$$

$$[\lambda a, b] = \lambda [a, b]$$

$$[a, a] \geq 0 \qquad [a, a] = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

24.2.2. Definitionen in $\mathbb{P}$ und $\mathbb{E}$

$$[f, g] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot g \qquad f, g \in \mathbb{P} \text{ und } STF$$

$$[f, g] = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f \cdot \overline{g} \qquad f, g \in \mathbb{E}$$

$$[f, g] = \overline{[g, f]} \qquad f, g \in \mathbb{E}$$

24.2.3. Für orthonormierte Basis

$$[\cos_k, \sin_l] = 0 \qquad k \in \mathbb{N}_0,\ l \in \mathbb{N}$$

$$[\cos_k, \cos_l] = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \qquad k, l \in \mathbb{N}_0$$

$$[\sin_k, \sin_l] = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \qquad k, l \in \mathbb{N}$$

$$[\exp_k, \exp_l] = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \qquad k, l \in \mathbb{Z}$$

24.3. Norm in $\mathbb{P}$ und $\mathbb{E}$

$$\|p\| = \sqrt{[p,p]} \qquad p \in \mathbb{P} \text{ und } STF$$

$$\|p\|^2 = [p,p] = a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2$$

$$\|e\| = \sqrt{[e,e]} \qquad e \in \mathbb{E}$$

$$\|e\|^2 = [e,e] = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

24.4. Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$[f,g]^2 \leq [f,f] \cdot [g,g]$$

24.5. Abstand

$$\mathrm{d}\,(f,g) = \|f - g\|$$

24.6. Fourierreihe reell

24.6.1. Fourierkoeffizienten

$$a_k = [f, \cos_k] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \; dt \qquad f \in STF$$

$$b_k = [f, \sin_k] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \; dt \qquad b_0 = 0$$

gerade Funktion:
$g(-t) = g(t) \Rightarrow b_k = 0$
ungerade Funktion:
$u(-t) = -u(t) \Rightarrow a_k = 0$

24.6.2. Fourierreihe der Funktion $f \in \mathbb{P}$

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos_k + b_k \sin_k\right)$$

$$\cos_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad a_0 = [f, \cos_0] \qquad b_0 = 0$$

24.7. Fourierreihe komplex

24.7.1. Fourierkoeffizienten

$$c_0 = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \qquad c_{-k} = \overline{c_k}$$

$$c_k = \frac{1}{2}\left(a_k - jb_k\right) \qquad a_k = 2\,\mathrm{R}e\left(c_k\right) = c_k + c_{-k}$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}\left(a_k + jb_k\right) \qquad b_k = -2\,\mathrm{I}m\left(c_k\right) = j\left(c_k - c_{-k}\right)$$

$$c_k = [f, \exp_k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \exp_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-jkt}\, dt$$

24.7.2. Fourierreihe der Funktion $f \in \mathbb{E}$

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp_k = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \exp_k + c_{-k} \exp_{-k}\right)$$

24.8. Parsevalsches Theorem

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \cos_k + b_k \sin_k\right) \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

Leistung periodischer Signale:

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

24.9. Durchgang durch LTI-System

gegeben: $f(t) = c_k e^{jkt} + c_{-k} e^{-jkt} = a_k \cos_k + b_k \sin_k\,; \quad H(\omega)$

gesucht: $T(f(t)) = \tilde{f}$

$$\tilde{f} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt} H(k)$$

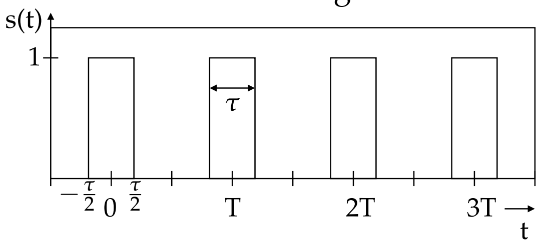
$\tilde{a}_k = \mathrm{Re}(H(k)(a_k - jb_k))$

$\tilde{b}_k = -\mathrm{Im}(H(k)(a_k - jb_k))$

$\tilde{f} = \tilde{a}_k \cos_k + \tilde{b}_k \sin_k$

24.10. Fourierkoeffizienten wichtiger periodischer Signale

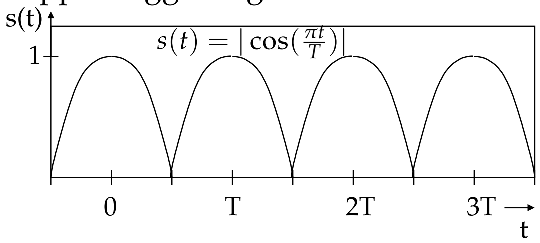
Periodische Rechteckfolge



$$c_n = a_n = \frac{\tau}{T}\frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\frac{n\pi\tau}{T}}$$

$$b_n = 0$$

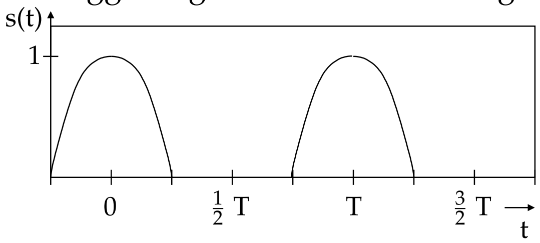
Doppelweggleichgerichtete cos-Schwingung



$$c_n = a_n = \frac{2}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}$$

$$b_n = 0$$

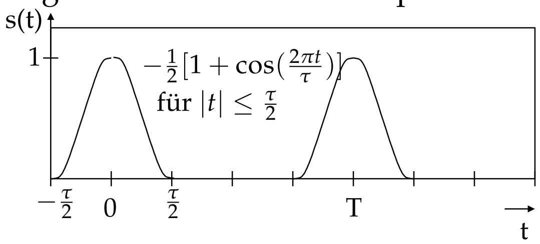
Einweggleichgerichtete cos-Schwingung



$$c_n = a_n = \frac{1}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{1-n^2}$$

$$b_n = 0$$

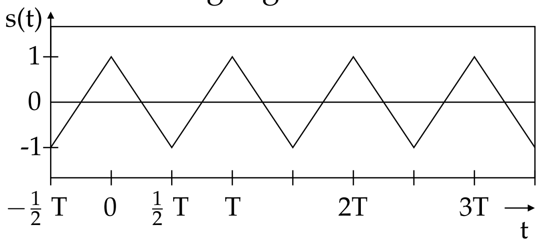
Folge von Raised-Cosine-Impulsen



$$c_n = a_n = \frac{\tau}{2T}\frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\frac{n\pi\tau}{T}}\frac{1}{1-\left(\frac{n\tau}{T}\right)^2}$$

$$b_n = 0$$

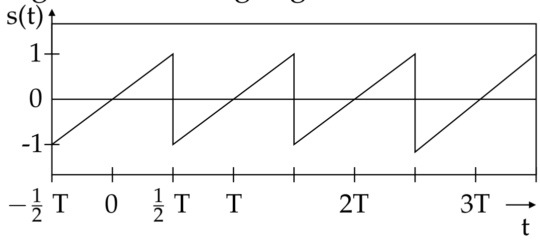
Dreieckschwingung DC-frei



$$c_n = a_n = \frac{2[1-(-1)^n]}{(n\pi)^2}, \qquad c_0 = 0$$

$$b_n = 0$$

Sägezahnschwingung DC-frei



$$c_n = -jb_n, \qquad c_0 = 0$$

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

25. Fouriertransformation

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & \tilde{f} = f * h \\
F \arrow[r] & \tilde{F} = F \cdot H \arrow[u, "\mathcal{F}^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

25.1. Fouriertransformation

$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega), \qquad \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = f(t)$

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

Wichtig: Sonderfälle beachten! (Division durch 0 in der Lösung separat behandeln)

25.2. Fourier-Cosinustransformation

Für gerade Funktionen

$\mathcal{F}_c(f(t)) = F_c\,(\omega)\,, \qquad \mathcal{F}_c^{-1}(F_c(\omega)) = f(t)$

$$F_c(\omega) = \int\limits_{0}^{\infty} f(t) \cos \omega t\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} F_c(\omega)\, \cos \omega t\, d\omega$$

$F = 2F_c$

25.3. Fourier-Sinustransformation

Für ungerade Funktionen

$$\mathcal{F}_s(f(t)) = F_s(\omega), \qquad \mathcal{F}_s^{-1}(F_s(\omega)) = f(t)$$

$$F_s(\omega) = \int\limits_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt$$

$$f(t) = \frac{j}{\pi} \int\limits_0^\infty F_s(\omega)\ \sin \omega t \, d\omega$$

$$F = -2jF_s$$

25.4. Faltung

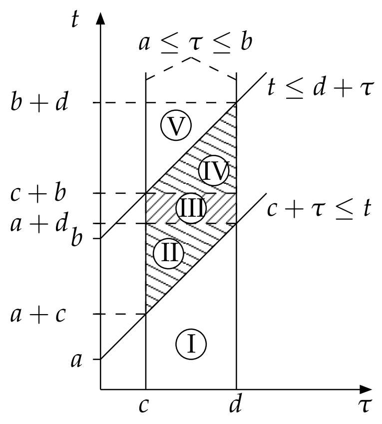
$$(f * g)\,(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$$

$$f * g = g * f \qquad (f * g) * k = f * (g * k)$$

$$\mathcal{F}\,(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) = F \cdot G$$

25.4.1. Fallunterscheidung bei Definitionsbereichen

$p(t) = (f * g)$
$D(g(t)) = [a|b]$
$D(f(t)) = [c|d]$



1. Fall: $c + b < a + d$

I	$t < a + c$:	$p(t) = 0$
II	$a + c \leq t \leq b + c$:	$p(t) = \int_a^{t-c} f(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$
III	$b + c \leq t \leq a + d$:	$p(t) = \int_a^{b} f(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$
IV	$a + d \leq t \leq b + d$:	$p(t) = \int_{t-d}^{b} f(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$
V	$b + d < t$:	$p(t) = 0$

2. Fall: $c + b > a + d$

I	$t < a + c$:	$p(t) = 0$
II	$a + c \leq t \leq a + d$:	$p(t) = \int_a^{t-c} f(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$
III	$a + d \leq t \leq b + c$:	$p(t) = \int_{t-d}^{t-c} f(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$
IV	$b + c \leq t \leq b + d$:	$p(t) = \int_{t-d}^{b} f(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$
V	$b + d < t$:	$p(t) = 0$

3. Fall: $c + b = a + d$

III	$a + d = t = b + c$:	$p(t) = p(a + d)$

25.5. Eigenschaften

$t \mapsto f(t)$	$\omega \mapsto \overline{F(-\omega)}$
$t \mapsto f(-t)$	$\omega \mapsto F(-\omega)$
$t \mapsto f(at)$	$\omega \mapsto \frac{1}{\lvert a\rvert}F(\frac{\omega}{a})$
$t \mapsto f(t-t_0)$	$\omega \mapsto F(\omega)e^{-jwt_0}$
$t \mapsto e^{j\omega_0 t}f(t)$	$\omega \mapsto F(\omega-\omega_0)$
$t \mapsto F(t)$	$\omega \mapsto 2\pi f(-\omega)$
$t \mapsto f^{(n)}(t)$	$\omega \mapsto (j\omega)^n F(\omega)$
$t \mapsto (-jt)^n f(t)$	$\omega \mapsto F^{(n)}(\omega)$
$t \mapsto \int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau$	$\omega \mapsto \frac{1}{j\omega}F(\omega)$

25.6. Fouriertransformationen mit Diracdelta

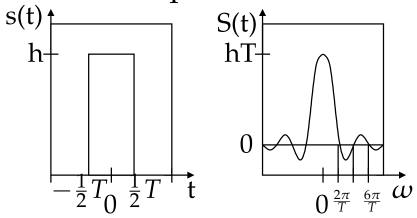
$Funktion$	$Fourier-Transformierte$
$t \mapsto \delta(t)$	$\omega \mapsto 1$
$t \mapsto 1$	$\omega \mapsto 2\pi\delta(\omega)$
$t \mapsto \delta(t-t_0)$	$\omega \mapsto e^{-j\omega t_0}$
$t \mapsto e^{j\omega_0 t}$	$\omega \mapsto 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$t \mapsto \sin(\omega_0 t)$	$\omega \mapsto j\pi(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0))$
$t \mapsto \cos(\omega_0 t)$	$\omega \mapsto \pi(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0))$
$t \mapsto \delta^{(n)}(t)$	$\omega \mapsto (j\omega)^n$
$t \mapsto sign(t)$	$\omega \mapsto \frac{2}{j\omega}$
$t \mapsto \frac{1}{\pi t}$	$\omega \mapsto -j\pi sign(\omega)$
us	$\omega \mapsto \frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

Faltung mit Dirac:

$$(f(t)*\delta(t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t_0-t)dt = f(t_0)$$

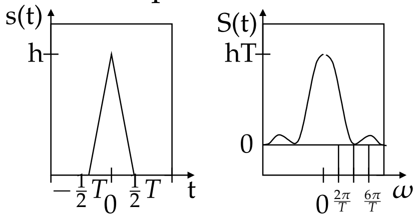
25.7. Fouriertransformationen wichtiger Impulse

Rechteckimpuls



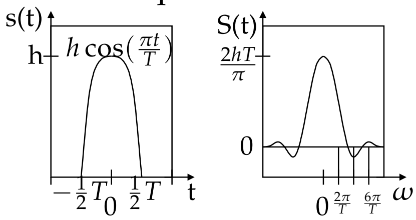
$$S(\omega) = hT\frac{\sin\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{\left(\frac{T\omega}{2}\right)}$$

Dreieckimpuls



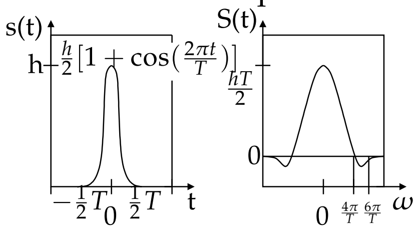
$$S(\omega) = \frac{hT}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{T\omega}{4}\right)}{\frac{T\omega}{4}}\right]^2$$

Cosinusimpuls



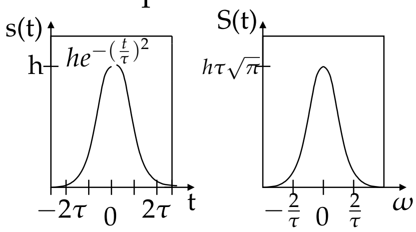
$$S(\omega) = \frac{2hT}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{1-\left(\frac{T\omega}{\pi}\right)^2}$$

Raised-Cosine-Impuls



$$S(\omega) = \frac{hT}{2}\frac{\sin\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{\frac{T\omega}{2}\left[1-\left(\frac{T\omega}{2\pi}\right)^2\right]}$$

Gauss-Impuls



$$S(\omega) = h\tau\sqrt{\pi}e^{\frac{-\omega^2\tau^2}{4}}$$

26. Laplace

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{L}"'] & \tilde{f} = f * g \\
F \arrow[r] & \tilde{F} = F \cdot G \arrow[u, "\mathcal{L}^{-1}"']
\end{tikzcd} \qquad G = \tfrac{1}{\mathrm{c}p(s)}$$

26.1. Laplacetransformation

$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = F(s), \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right) = f(t), \qquad s \in \mathbb{C}$

$$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds, \quad \mathrm{f}alls\ t \geq 0$$

$$f(t) = 0, \quad \mathrm{f}alls\ t < 0$$

26.2. Rechenregeln

$t \mapsto f(at)$	$s \mapsto \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0$
$t \mapsto \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)$	$(s \mapsto F(a\,s))$
$t \mapsto u(t-a) \cdot f(t-a)$	$s \mapsto e^{-as} F(s) \quad a > 0$
$t \mapsto f(t+a))$	$s \mapsto e^{as} \left(F(s) - \int\limits_0^a f(t)\, e^{-st}\, dt \right) \quad a > 0$
$t \mapsto e^{-bt} f(t)$	$s \mapsto F(s+b) \quad c \in \mathbb{C}$
$t \mapsto f'(t)$	$s \mapsto s\, F(s) - f(0)$
$t \mapsto f^{(2)}(t)$	$s \mapsto s^2 F(s) - s\, f(0) - f'(0)$
$t \mapsto f^{(3)}(t)$	$s \mapsto s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f^{(2)}(0)$
$t \mapsto f^{(n)}(t)$	$s \mapsto s^n F(s) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0)$
$t \mapsto -t\, f(t)$	$s \mapsto F'(s)$
$t \mapsto +t^2 f(t)$	$s \mapsto F^{(2)}(s)$
$t \mapsto -t^3 f(t)$	$s \mapsto F^{(3)}(s)$
$t \mapsto (-1)^n\, t^n f(t)$	$s \mapsto F^{(n)}(s)$
$t \mapsto \int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau$	$s \mapsto \frac{1}{s} F(s)$

26.3. Spezielle Laplacetransformationen

$$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = 1$$

$$\mathcal{L}\left(u(t)\right) = \frac{1}{s} \quad \mathrm{Re}\,(s) > 0$$

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\right) = \frac{1}{s-a} \quad \mathrm{Re}\,(s) > \mathrm{Re}\,(a)$$

$$\mathcal{L}\left(t^n\right) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\left(t^n e^{at}\right) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{d} e^{ct} \sin ct\right) = \frac{1}{(s-c)^2 + d^2}$$

$$\mathcal{L}\left(e^{ct}\left(\frac{c}{d} \sin dt + \cos dt\right)\right) = \frac{s}{(s-c)^2 + d^2}$$

26.4. Faltung

$$(f * g)\,(t) = \int\limits_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau)\; d\tau$$

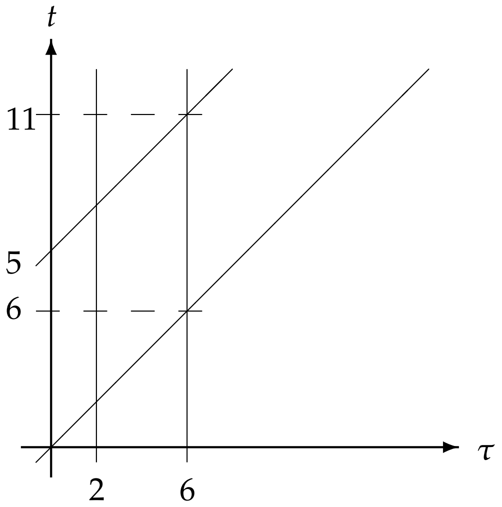
$$f * g = g * f \qquad f(t) = g(t) = 0 \quad falls\ t < 0$$

$$\mathcal{L}\,(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) = F \cdot G$$

Die Fallunterscheidung bei eingeschränkten Definitionsbereichen der Funktionen ist die selbe wie bei der Fourier-Theorie in Abschnitt 25.4.1 auf S. 192
Beispiel:
Geg: $g(t) = u(t) - u(t-5)$ und $f(t) = u(t-2) - u(t-6)$
Ges: $\tilde{f} = (f * g)(t)$

$$\tilde{f} = \int\limits_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$$

$$g(t-\tau) = 1 \quad \text{falls} \quad 0 \leq t - \tau \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad \tau \leq t \leq 5 + \tau$$



26.5. Periodische Funktionen

f auf einer Periode T vorgeben.

$$F(s) = \int\limits_0^T f(t)\, e^{-st}\, dt$$

Periodische Fortsetzung:

$$F_{per}(s) = F(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

27. Differentialgleichungen

27.1. 1. Ordnung

27.1.1. Homogene

Separierbar

Praktisches Vorgehen beim Lösen der separierbaren Differentialgleichungen:

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

$$\Leftrightarrow \quad h(y)\,dy = g(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad H(y) = G(x) + c$$

Wenn durch ein Ausdruck, der die unbekannte Funktion enthält zu dividieren ist, so ist zu prüfen ob sein Verschwinden eine Lösung der DGL ergibt.

Substitution

Gegeben:

$$y'(x) = (x + y(x))^2$$

Substitution:

$$z = x + y(x) \Rightarrow z' = 1 + y'(x) \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = z' - 1$$

Einsetzten:

$$z' - 1 = z^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} - 1 = z^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1 - z^2}\,dz = dx \quad \Rightarrow \quad \text{separierbar}$$

27.1.2. Partikuläre

DGL: $y' + y = q$

Ansatz

Ansatz für partikuläre Lösung: «Ähnlich» wie die Störfunktion (q), jedoch nicht in der homogenen Lösung enthalten.

Störfunktion	Ansatz
$\sin t$, $\cos t$	$a \sin t + b \cos t$
e^{-t}	$a\, e^{-t}$
$t\, e^{-t}$	$a\, e^{-t} + bt\, e^{-t}$
t	$at + b$

Ansatz in DGL einsetzten und Koeffizientenvergleich durchführen.

Variation der Konstanten

Homogene Lsg: $y_h = c\, p(x)$
Ansatz: $y_p = g(x)\, p(x)$ (c wird durch $g(x)$ ersetzt)
Ansatz in DGL einsetzten und nach $g(x)$ auflösen

27.1.3. Lösung

Gesamtlösungsmenge: $y = y_h + y_p$

27.2. Höhere Ordnung

27.2.1. Homogen, linear mit konstanten Koeffizienten

DGL: $y^{(4)} + 6y^{(3)} + 22y'' + 30y' + 13y = 0$
$\Rightarrow$ charakteristisches Polynom: $p(t) = t^4 + 6t^3 + 22t^2 + 30t + 13$

$\Leftrightarrow \quad p(t) = (t+1)^2(t+2-3j)(t+2+3j)$

$\mathbb{N}(p) = \{-1; -1; -2+3j; -2-3j\}$

Aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms ergeben sich die Lösungen.
Ordnung DGL = Anzahl Lösungen

$y_1(t) = e^{-t} \qquad y_2(t) = t\, e^{-t} \qquad y_3(t) = e^{t(-2+3j)} \qquad y_4 = e^{t(-2-3j)}$

Linearkombinationen aus Lösungen komplexer Nullstellen ergibt reelle Lösungen:

$$\frac{1}{2}\left(y_3(t) + y_4(t)\right) = e^{-2t} \cos 3t$$

$$\frac{1}{2j}\left(y_3(t) - y_4(t)\right) = e^{-2t} \sin 3t$$

27.2.2. Partikuläre

Ansatz

$\Rightarrow$ Siehe 27.1.1 Homogene S. 198

Variation der Konstanten

Störfunktion: $q(x)$
Homogene Lsg: $y_1(t) \quad y_2(t)$
Ansatz: $y_p = g_1(t)\, y_1(t) + g_2(t)\, y_2(t)$
$\Rightarrow$ Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} g_1'(t)\, y_1(t) + g_2'(t)\, y_2(t) &= 0 \\ g_1'(t)\, y_1'(t) + g_2'(t)\, y_2'(t) &= q(x) \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem liefert $g_1(t)$ und $g_2(t)$

27.3. Laplace

27.3.1. Lineare Übertragung

Uebertragungsfunktion: $G(s) = \frac{1}{cp(s)}$
Stossantwort: $g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \tilde{u}'$
wobei cp = Charakteristisches Polynom und $\tilde{u}$ = Sprungantwort

$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y^{(2)}(0) = 0,\ \ldots,\ y^{(n)}(0) = 0$

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = q$

$\Downarrow \mathcal{L}$

$$Y(s) \cdot cp(s) = F(s) \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{F(s)}{cp(s)} = F(s) \cdot G(s)$$

$\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$

$y(t) = (f * g)\,(t)$

Beispiel:

$y^{(2)} + 5y' + 6y = u, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

$\Downarrow \mathcal{L}$

$$Y(s) \cdot \left(s^2 + 5s + 6\right) = Y(s) \cdot (s+2)\,(s+3) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s\,(s+2)\,(s+3)} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+2} + \frac{\gamma}{s+3}$$

$1 = \alpha\,(s+2)\,(s+3) + \beta\,(s+3)\,s + \gamma\,(s+2)\,s$

$$\begin{array}{lll} s = 0: & 1 = 6\alpha & \Rightarrow \ \alpha = \frac{1}{6} \\ s = -2: & 1 = -2\beta & \Rightarrow \ \beta = -\frac{1}{2} \\ s = -3: & 1 = 3\gamma & \Rightarrow \ \gamma = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$Y(s) = \frac{1}{6}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{3}\frac{1}{s+3}$$

$\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$

$$y(t) = \frac{1}{6}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{3}e^{-3t}u(t)$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t}\right)u(t)$$

27.3.2. Nichtlineare Übertragung

Beispiel: Geg: $\quad g(t) = 1 - \cos t$
Ges: $\quad \tilde{v}$ auf $v = \sin t$
mit $\tilde{v}''(0) = 1, \quad \tilde{v}'(0) = 0, \quad \tilde{v}(0) = 0$

$$g(t) = 1 - \cos t$$

$\Downarrow \mathcal{L}$

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^3+s} = \frac{1}{cp(s)}$$

$$\Rightarrow \quad \text{DGL:} \quad y^{(3)} + y' = \sin t$$

$\Downarrow \mathcal{L}$

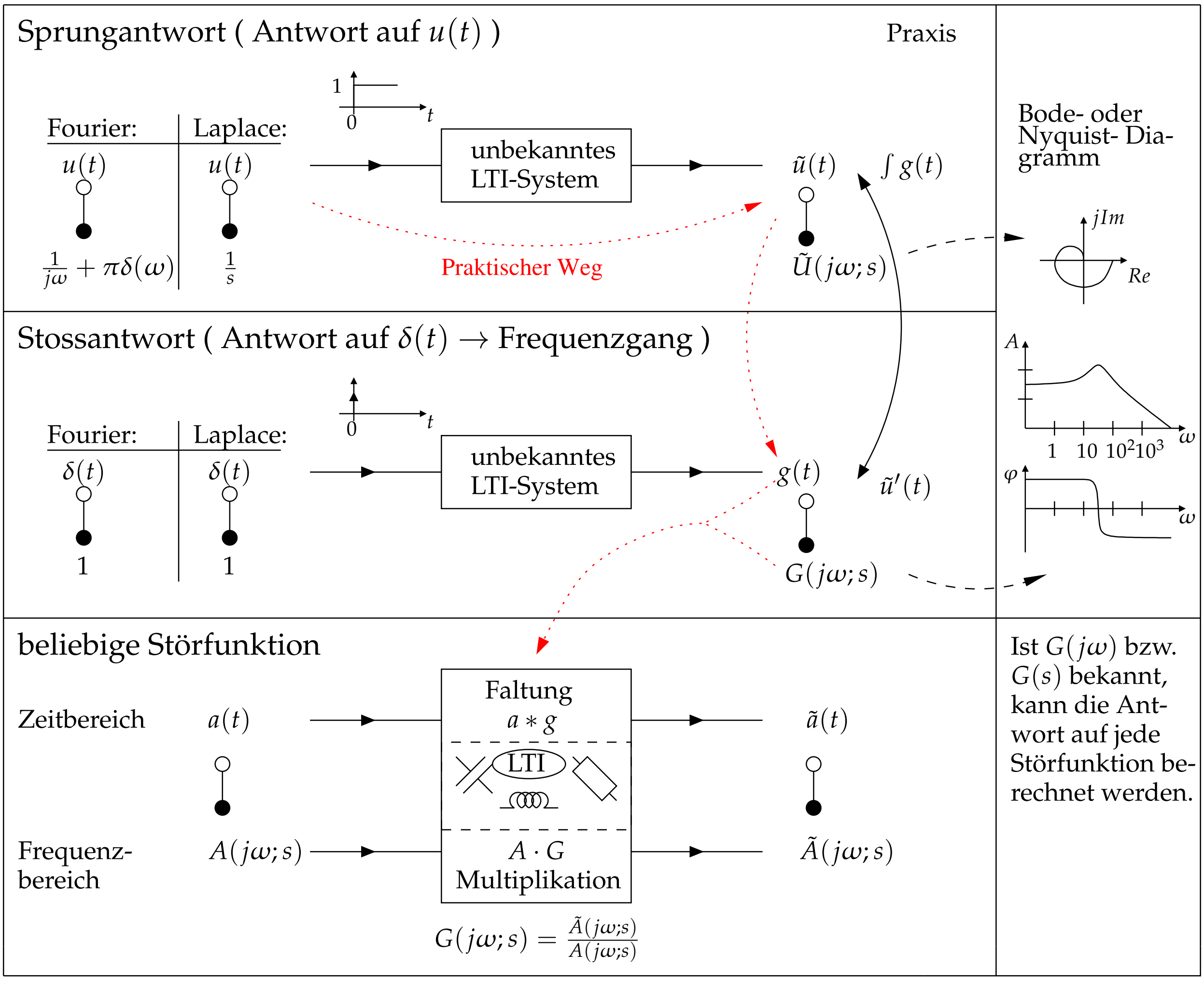
$$s^3Y(s) - 1 + s\,Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad Y(s)(s^3+s) = \frac{1}{s^2+1} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^3+s}\,\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^3+1}$$

$\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$

$$y(t) = (g * \sin)(t) + g(t)$$

27.4. Übersicht Laplace und Fourier



28. Funktionsdiskussion

28.1. Funktionen mit einer Variablen

28.1.1. Zu beantwortende Fragen

1. Definitiondbereich $D(f)$
2. Bild von f
3. Hat der Graph von f, $G(f)$ Symmetrien?
   Gerade $f(-x) = f(x)$ oder Ungerade $f(-x) = -f(x)$
4. Gibt es Polstellen?
5. Gibt es Gebiete der Koordinatenebene wo der Graph keine Punkte hat? (Achtung beim kürzen)
6. Gibt es Schranken für die Funktionswerte?
7. Welches sind die Nullstellen von f?
8. Welches sind die Nullstellen der Ableitungen von f?
9. Wo steigt f , wo fällt f?
10. Gibt es Grenzwerte für Argumente gegen $\pm\infty$?
11. Gibt es Asymptoten?

    $$m = \lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) \qquad q = \lim_{|x|\to\infty} (f(x) - mx)$$

    Asymptote: $mx + q$

    Bei Brüchen mit Polynomen ergibt eine Division mit Rest die Asymptote:
    Beispiel:

    $$(x^3 - 4x^2 - 17x + 60) \div (x^2 - 4) = \underbrace{x - 4}_{Assymptote} + \underbrace{\frac{44 - 13x}{x^2 - 4}}_{Rest}$$

    Die Nullstellen des Zählerpolynoms im Rest ergeben die Schnittpunkte zwischen der Asymptote und der Funktion.
12. Gibt es absolute Maximal- oder Minimalstellen?

28.1.2. Gerade (2-Punkte-Form)

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

28.1.3. Abstand eines Punktes von einer Geraden

Gegeben: Gerade $Ax + By + C = 0$, Punkt $P = (p_1, p_2)$

$$d = \left| \frac{Ap_1 + Bp_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

28.2. Funktionen mit mehreren Variablen

28.2.1. Bezeichnungen

$$f_1(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_2(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Richtungsvektoren an die Parameterlinien

Richtungsvektor an die Abszissenlinie: $(1, 0, f_1(x, y))$
Richtungsvektor an die Ordinatenlinie: $(0, 1, f_2(x, y))$

Tangentialebene

$$\varepsilon : \quad \vec{p} = (p_1, p_2, p_3) = (x, y, f(x, y)) + \alpha(1, 0, f_1(x, y)) + \beta(0, 1, f_2(x, y))$$

$$\vec{n_\varepsilon} = (f_1(x, y), f_2(x, y), -1)$$

Gradient

Wir betrachten die Funktion $f : (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$. Sie ist in einer gewissen Umgebung U von (x_0, y_0) definiert.
Die Richtung des stärksten Anstiegs von f in (x_0, y_0) ist

$$\mathrm{grad} f(x_0, y_0) = (f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0)) = \vec{v}$$

($\Rightarrow$ Richtung der Fallgeraden in der Grundrissebene)
Richtungsvektor der Fallgerade der Tangentialebene:

$$(f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0), f_1(x_0, y_0)^2 + f_2(x_0, y_0)^2)$$

Richtungsableitung

$$D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = \mathrm{grad} f(x_0, y_0) \cdot \vec{e_v}$$

wobei $\vec{e_v}$ der Einheitsvektor in Richtung $\vec{v}$ ist

Totales Differential

$df = h \cdot f_1(x,y) + k \cdot f_2(x,y)$

wobei h und k die Inkremente sind

Kettenregel

Vollständig differenzierbare Funktionen:

$f : (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$

$u : (y_1, y_2) \mapsto u(y_1, y_2)$

$v : (y_1, y_2) \mapsto v(y_1, y_2)$

$\tilde{f} : (y_1, y_2) \mapsto f(u(y_1, y_2), v(y_1, y_2))$

Dann sind

$\tilde{f}_1(y_1, y_2) = f_1(u(y_1, y_2), v(y_1, y_2)) \cdot u_1(y_1, y_2) + f_2(u(y_1, y_2), v(y_1, y_2)) \cdot v_1(y_1, y_2)$

$\tilde{f}_2(y_1, y_2) = f_1(u(y_1, y_2), v(y_1, y_2)) \cdot u_2(y_1, y_2) + f_2(u(y_1, y_2), v(y_1, y_2)) \cdot v_2(y_1, y_2)$

28.3. Kegelschnitte

28.3.1. Kreis

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$M = (x_0, y_0)$

28.3.2. Ellipse

$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

$M = (x_0, y_0)$

28.3.3. Hyperbel

$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

$M = (x_0, y_0)$

28.3.4. Parabel

$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

$S = (x_0, y_0)$

Index