

# **Formelsammlung HSR**

Thomas Küng

Urs Winiger

Adrian Freihofer

Version 1.02

17. November 2024

# Vorwort

Die vorliegende Formelsammlung wurde während unserem Studium für Elektrotechnik (2000 — 2003) an der Fachhochschule in Rapperswil mit  $\text{\LaTeX}$  erstelltgeschrieben. Ziel war es, den Inhalt an den Prüfungsstoff anzupassen, aber auch ein Werk zu schreiben, das wir später im Berufsleben verwenden können. Obwohl wir den Inhalt sorgfältig zusammengestellt haben, sind Fehler nicht ausschliessbar. Als wir von einer Studentin im Jahr 2024 darauf angesprochen wurden, haben wir uns dazu entschlossen diese Formelsammlung als GitHub Repository unter <https://www.github.com/tmkueng/Formelsammlung> unter Einhaltung der GNU Public Licence zur allgemeinen Verfügung zu stellen. Wir sind natürlich sehr stolz, dass die Formelsammlung nach über 20 Jahren immer noch sehr gefragt ist und hoffen auf viele neue Inhalte welche durch die Gemeinschaft kreiert werden.

In der Formelsammlung sind die folgenden Fächer enthalten:

- Physik
- Elektrizitätslehre
- Energie und Antriebstechnik
- Elektronik
- Digitale Signalverarbeitung
- Mathematik

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>ii</b>
<b>I. Physik</b>	<b>1</b>
<b>1. Geometrische Optik</b>	<b>2</b>
1.1. Sichtbares Licht . . . . .	2
1.2. Reflexionsgesetz . . . . .	2
1.3. Brechung . . . . .	2
1.4. Totalreflexion . . . . .	3
1.4.1. Prisma . . . . .	3
1.4.2. Lichtwellenleiter . . . . .	4
1.5. Abbildungen . . . . .	4
1.5.1. Allgemein . . . . .	4
1.5.2. Spiegel . . . . .	5
1.5.3. Abbildungen durch Spiegel . . . . .	5
1.5.4. Linsen . . . . .	6
1.5.5. Abbildungen durch Linsen . . . . .	7
1.5.6. Optische Geräte . . . . .	8
<b>2. Statik</b>	<b>12</b>
2.1. Starre Körper im Gleichgewicht . . . . .	12
2.1.1. Gleichgewichtsbedingung starrer Körper . . . . .	12
2.1.2. Haftreibung . . . . .	12
2.1.3. Reaktionsprinzip . . . . .	12
2.1.4. Drehmoment . . . . .	13
2.2. Schwerpunkt . . . . .	13
2.3. Deformierung . . . . .	14
2.3.1. Spannung . . . . .	14
2.3.2. Dehnung . . . . .	14
2.3.3. Querkontraktion . . . . .	14
2.3.4. Kompression . . . . .	15
2.3.5. Schubbeanspruchung . . . . .	15
2.3.6. Schraubenfeder . . . . .	15
2.3.7. Biegung eines Balkens . . . . .	16
2.4. Vorgehen beim Lösen von Statikaufgaben . . . . .	16
<b>3. Kinematik</b>	<b>17</b>
3.1. Gleichförmige Bewegung . . . . .	17
3.2. Gleichförmig beschleunigte Bewegung . . . . .	17

3.3.	Drehbewegung . . . . .	18
3.3.1.	Gleichförmige Kreisbewegung . . . . .	18
3.3.2.	Gleichförmig beschleunigte Kreisbewegung . . . . .	18
3.3.3.	Zentripetalbeschleunigung . . . . .	19
3.4.	Wurfbahnen . . . . .	19
3.4.1.	Freier Fall . . . . .	19
3.4.2.	Senkrechter Wurf . . . . .	19
3.4.3.	Horizontaler Wurf . . . . .	20
3.4.4.	Schiefer Wurf . . . . .	20
<b>4.</b>	<b>Dynamik</b>	<b>21</b>
4.1.	Newtonsche Gesetze . . . . .	21
4.1.1.	Erstes Newtonsches Gesetz (Trägheitsgesetz) . . . . .	21
4.1.2.	Zweites Newtonsches Gesetz (Aktionsgesetz) . . . . .	21
4.1.3.	Drittes Newtonsches Gesetz (Actio = Reactio) . . . . .	21
4.1.4.	Allgemeines Vorgehen beim lösen von Bewegungsproblemen . . . . .	21
4.2.	Masse und Gewicht . . . . .	22
4.2.1.	Spezielle Kräfte, Masse, Dichte und Reibung . . . . .	22
4.3.	Arbeit und Energie, Energieerhaltung . . . . .	22
4.3.1.	Hubarbeit, Potentielle Energie . . . . .	23
4.3.2.	Spannarbeit, Spannenergie . . . . .	23
4.3.3.	Beschleunigungsarbeit, Kinetische Energie . . . . .	23
4.3.4.	Rotationsenergie . . . . .	23
4.3.5.	Reibungsarbeit . . . . .	24
4.3.6.	Verformungsarbeit . . . . .	24
4.3.7.	Einstein, Kernbindungsenergie . . . . .	24
4.4.	Leistung . . . . .	24
4.5.	Wirkungsgrad . . . . .	25
4.6.	Impuls, Impulserhaltung . . . . .	25
4.6.1.	Drehimpuls . . . . .	25
4.6.2.	Raketenantrieb . . . . .	26
4.6.3.	Inelastischer Stoss . . . . .	26
4.6.4.	Elastischer Stoss . . . . .	26
4.7.	Analogie Translation und Rotation . . . . .	27
4.8.	Gravitation und Masse . . . . .	28
4.8.1.	Keplersche Gesetze (→ Bewegung der Planeten) . . . . .	28
4.8.2.	Newtonsches Gravitationsgesetz . . . . .	28
4.8.3.	Potentielle Energie im Gravitationsfeld einer Zentralmasse . . . . .	29
4.8.4.	Fluchtgeschwindigkeit . . . . .	29
4.8.5.	Geostationäre Bahn . . . . .	29
4.9.	Rotation und Massenträgheitsmoment . . . . .	30
4.9.1.	Massenträgheitsmoment bei Getriebe . . . . .	30
4.9.2.	Massenträgheitsmomente oft verwendeter Körper . . . . .	31
<b>5.</b>	<b>Mechanik deformierbarer Körper</b>	<b>32</b>
5.1.	Druck . . . . .	32
5.1.1.	Absoluter Druck Überdruck . . . . .	32
5.2.	Kompression . . . . .	32

5.3.	Hydrostatik . . . . .	33
5.3.1.	Schweredruck . . . . .	33
5.3.2.	Statischer Auftrieb . . . . .	33
5.3.3.	Druckwandler . . . . .	33
5.3.4.	Kraftwandler . . . . .	33
5.3.5.	Druckmessung . . . . .	34
5.3.6.	Grenzflächeneffekte . . . . .	35
5.4.	Hydrodynamik . . . . .	37
5.4.1.	Kontinuitätsgleichung . . . . .	37
5.4.2.	Bernoulli Gleichung (Energieerhaltung) . . . . .	37
5.5.	Reale Strömung . . . . .	38
5.5.1.	Zirkulation . . . . .	38
5.5.2.	Vortizität . . . . .	38
5.5.3.	Newtonsches Reibungsgesetz . . . . .	38
5.6.	Strömungsformen . . . . .	38
5.6.1.	Raynolds-Zahl . . . . .	38
5.6.2.	Laminare Strömung ( $Re < 2320$ ) . . . . .	39
5.6.3.	Volumenstrom . . . . .	39
5.6.4.	Turbulente Strömung ( $Re > 2320$ ) . . . . .	40
5.7.	Dynamischer Auftrieb . . . . .	40
5.7.1.	Tragflügel . . . . .	41
<b>6.</b>	<b>Wärmelehre</b>	<b>42</b>
6.1.	Temperatur . . . . .	42
6.2.	Ausdehnung von Materialien . . . . .	42
6.3.	Ideale Gase . . . . .	43
6.4.	Gemische idealer Gase . . . . .	43
6.5.	Reale Gase . . . . .	44
6.6.	Wärme . . . . .	44
6.6.1.	Molare Wärme kristalliner Festkörper . . . . .	45
6.6.2.	Austausch von Wärmemengen . . . . .	45
6.7.	Phasen und Phasenübergänge . . . . .	45
6.7.1.	Schmelz- und Verdampfungsenergien . . . . .	46
6.8.	Luftfeuchtigkeit . . . . .	46
6.9.	Kinetische Gastheorie . . . . .	47
6.9.1.	Mittlere freie Weglänge, Wärmeleitung, Diffusion und Viskosität . . . . .	48
6.9.2.	Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung . . . . .	48
6.10.	Temperaturstrahlung, Strahlungsgesetze . . . . .	49
6.10.1.	Strahlungsaustausch . . . . .	50
6.11.	Wärmetransport . . . . .	51
6.12.	Zustandsänderungen . . . . .	52
6.12.1.	Isobare Zustandsänderung . . . . .	52
6.12.2.	Isochore Zustandsänderungen . . . . .	52
6.12.3.	Isotherme Zustandsänderungen . . . . .	52
6.12.4.	Adiabatische Zustandsänderungen . . . . .	53
6.12.5.	Expansion und Kompression . . . . .	53
6.12.6.	Enthalpie . . . . .	54

6.13. Kreisprozesse . . . . .	54
6.13.1. Carnotprozess . . . . .	55
6.14. Entropie . . . . .	56
<b>7. Schwingungen</b>	<b>57</b>
7.1. Freie Schwingungen . . . . .	57
7.1.1. Ungedämpfte, harmonische Schwingung . . . . .	57
7.1.2. Ungedämpfte, periodische Schwingung . . . . .	58
7.1.3. Ungedämpfte, nicht periodische Schwingung . . . . .	58
7.1.4. Federpendel . . . . .	59
7.1.5. Drehpendel . . . . .	59
7.1.6. Mathematisches Pendel . . . . .	60
7.1.7. Physikalisches Pendel . . . . .	60
7.1.8. Gedämpfte Schwingung mit konstanter Reibung . . . . .	61
7.1.9. Schwingung mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung ( $D < 1$ ) . . . . .	61
7.1.10. Aperiodeische Lösung ( $D > 1$ ) . . . . .	62
7.1.11. Elektrischer Schwingkreis . . . . .	62
<b>8. Wellenlehre</b>	<b>63</b>
8.1. Wellengeschwindigkeiten . . . . .	63
8.1.1. Zusammenhänge der verschiedenen Wellen . . . . .	64
8.2. Wellengleichung . . . . .	64
8.3. Intensität . . . . .	64
8.4. Harmonische Wellen . . . . .	65
8.5. Räumliche Ausbreitung von Wellen . . . . .	65
8.6. Doppler-Effekt . . . . .	66
8.6.1. Akustischer Doppler-Effekt . . . . .	66
8.6.2. Optischer Doppler-Effekt . . . . .	66
8.6.3. Machscher Kegel . . . . .	67
8.7. Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz . . . . .	67
8.8. Optische Länge . . . . .	68
8.9. Stehende Wellen . . . . .	68
8.10. Eigenschwingungen . . . . .	69
8.10.1. Saite . . . . .	69
8.10.2. Pfeife . . . . .	69
8.10.3. Rechteckige Membrane . . . . .	70
8.11. Beugung . . . . .	70
8.11.1. Beugung am Spalt . . . . .	70
8.11.2. Beugung an kreisförmiger Öffnung . . . . .	70
8.11.3. Beugung am Gitter . . . . .	71
<b>II. Elektrizitätslehre</b>	<b>72</b>
<b>9. Grundlagen</b>	<b>73</b>
9.1. Grundgrößen . . . . .	73
9.2. Netzwerke bei Gleichstrom . . . . .	75
9.2.1. Kirchhoffsche Gesetze . . . . .	75

9.3.	Reale Quellen . . . . .	75
9.3.1.	Reale Spannungsquelle . . . . .	75
9.3.2.	Reale Stromquelle . . . . .	76
9.4.	Netzwerkanalyse . . . . .	76
9.4.1.	Netzwerkumwandlung . . . . .	76
9.4.2.	Wirkungsgrad und Leistungsanpassung . . . . .	78
9.4.3.	Systematische Analyse linearer Netzwerke . . . . .	78
9.4.4.	Quellenverschiebung . . . . .	79
9.4.5.	Netzwerke mit gesteuerten Quellen . . . . .	80
<b>10.</b>	<b>Das elektrische Strömungsfeld</b>	<b>81</b>
10.1.	Allgemein . . . . .	81
10.2.	Spezielle Felder . . . . .	81
10.2.1.	Räumliches Zentralfeld (Kugelanordnung) . . . . .	81
10.2.2.	Zylindrisches Zentralfeld . . . . .	82
10.2.3.	Leistung und räumliche Leistungsdichte . . . . .	82
<b>11.</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>83</b>
11.1.	Das Coulombsche Gesetz . . . . .	83
11.2.	Das elektrostatische Feld (Allgemein) . . . . .	83
11.3.	Spezielle Felder . . . . .	84
11.3.1.	Räumliches Zentralfeld (Kugelanordnung) . . . . .	84
11.3.2.	Zylindrisches Zentralfeld . . . . .	85
11.3.3.	Homogenes Feld (Plattenkondensator) . . . . .	85
11.3.4.	Paralleldrahtleitung . . . . .	86
11.4.	Energie im elektrischen Feld . . . . .	86
11.5.	Kräfte im elektrischen Feld . . . . .	86
11.5.1.	Allgemein . . . . .	86
11.5.2.	Verschiebung . . . . .	87
11.5.3.	Anziehung . . . . .	87
<b>12.</b>	<b>Magnetismus</b>	<b>88</b>
12.1.	Feldstärke . . . . .	88
12.2.	Permeabilität . . . . .	88
12.3.	Magnetische Flussdichte . . . . .	89
12.4.	Kräfte im Magnetischen Feld . . . . .	89
12.4.1.	Kräfte auf Ladungen . . . . .	89
12.4.2.	Kraft auf Leiter im $B$ -Feld . . . . .	90
12.4.3.	Kräfte auf parallele Leiter . . . . .	90
12.4.4.	Kräfte auf Randflächen eines Feldes . . . . .	90
12.5.	Durchflutung . . . . .	91
12.6.	Magnetischer Fluss . . . . .	91
12.7.	Ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises . . . . .	92
12.8.	Spulenfluss . . . . .	92
12.9.	Induktivität . . . . .	92
12.10.	Gegeninduktivität und induktive Kopplung . . . . .	93
12.11.	Brechung magnetischer Feldlinien . . . . .	93
12.12.	Räumliche Energiedichte . . . . .	94

12.13	Energie im magnetischen Feld . . . . .	94
12.14	Induktionsgesetz . . . . .	95
12.15	Selbstinduktion . . . . .	95
12.16	Serie- und Parallelschaltung von Induktivitäten . . . . .	96
12.17	Trafogleichungen . . . . .	96
12.18	Nichtlinearität . . . . .	97
12.18.1	$B(H)$ -Kurve in $\Phi(\Theta)$ -Kurve umrechnen . . . . .	97
12.18.2	Luftspaltkennwert $\alpha$ . . . . .	97
12.19	Spezielle Anordnungen . . . . .	98
12.19.1	Langer gerader Leiter $l \gg d$ . . . . .	98
12.19.2	Kurzer, gerader Leiter . . . . .	98
12.19.3	Kreisförmige Drahtschleife . . . . .	99
12.19.4	Voller Leiter . . . . .	99
12.19.5	Koaxialkabel . . . . .	100
12.19.6	Paralleldrahtleitung . . . . .	100
12.19.7	Zylinderspule . . . . .	101
12.19.8	Ringspule (Toroid) . . . . .	102
12.19.9	Kreisrahmenspule . . . . .	102
<b>13.</b>	<b>Wechselstromlehre</b>	<b>103</b>
13.1.	Mittel- und Kennwerte . . . . .	103
13.1.1.	Linearer Mittelwert . . . . .	103
13.1.2.	Betragsmittelwert . . . . .	103
13.1.3.	Halbwellenmittelwert . . . . .	103
13.1.4.	Quadratischer Mittelwert (Effektivwert, RMS) . . . . .	104
13.1.5.	Scheitelfaktor (Crestfaktor) . . . . .	104
13.1.6.	Formfaktor . . . . .	104
13.1.7.	Effektivwert eines zusammengesetzten, mehrfrequenten Signals . . . . .	104
13.2.	Leistung . . . . .	105
13.2.1.	Leistung und Leistungsanpassung bei Quellen . . . . .	105
13.2.2.	Effektivwert und Leistung . . . . .	105
13.3.	Energie . . . . .	106
13.4.	Komplexe Darstellung sinusförmiger Vorgänge . . . . .	106
13.5.	Komplexe Darstellung von Impedanz und Admittanz . . . . .	107
13.6.	Klemmgrößen von Schaltelementen . . . . .	107
13.6.1.	Allgemein . . . . .	107
13.6.2.	Ohm'sche Widerstände . . . . .	108
13.6.3.	Kapazitäten . . . . .	108
13.6.4.	Induktivitäten . . . . .	109
13.7.	Zeigerdarstellung Komplexer Klemmgrößen . . . . .	110
13.7.1.	Impedanztransformation . . . . .	111
13.7.2.	Transformation von Z-Ebene zu Y-Ebene . . . . .	111
13.8.	Netzwerkanalyse . . . . .	112
13.8.1.	Maschenmethode / Kreisstrommethode . . . . .	112
13.8.2.	Trennbündelmethode / Knotenspannungsmethode . . . . .	112
13.9.	Darstellungsformen . . . . .	113
13.9.1.	Beispiel: Nyquistdiagramm, Ortskurve . . . . .	113
13.9.2.	Bodediagramm . . . . .	113



13.9.3. Pol- Nullstellendiagramm . . . . .	118
13.10Eigenschaften des $PT_1$ -Glieder . . . . .	118
13.11Eigenschaften des $PT_2$ -Glieder . . . . .	119
13.12Verkpfung von Blockdiagrammen . . . . .	119
<b>III. Energie und Antriebstechnik</b>	<b>120</b>
<b>14. Dreiphasensysteme</b>	<b>121</b>
14.1. Sternschaltung . . . . .	121
14.2. Dreieckschaltung . . . . .	122
14.2.1. Leistungen bei Stern- und Dreieckschaltung . . . . .	122
<b>15. Elektromotoren und Generatoren</b>	<b>123</b>
15.1. Allgemein . . . . .	123
15.2. Gleichstrommaschine . . . . .	124
15.2.1. Fremderregte Gleichstrommaschine (GNSM) . . . . .	124
15.2.2. Nutzbremmung mit fremderregter Gleichstrommaschine . . . . .	125
15.3. Gleichstrom Nebenschlussmaschine (GNSM) . . . . .	125
15.4. Gleichstrom Reihenschlussmaschine (GRSM) . . . . .	126
15.5. Drehstrom Synchrongenerator (DSG) . . . . .	127
15.6. DSG im Inselbetrieb . . . . .	127
15.7. Belastung des DSG am starren Netz . . . . .	128
15.8. Drehmoment und Stabilität des DSG am starren Netz . . . . .	128
<b>IV. Elektronik</b>	<b>129</b>
<b>16. Diode</b>	<b>130</b>
16.1. Ideale Diode . . . . .	130
16.2. Konstantspannungsmodell . . . . .	130
16.3. Arbeitspunktberechnung . . . . .	130
16.4. Kennlinie . . . . .	131
16.4.1. Differentieller Widerstand . . . . .	131
16.5. DC- und AC-Analyse von Diodenschaltungen . . . . .	132
16.5.1. Vorgehen . . . . .	132
16.5.2. Kleinsignalanalyse . . . . .	132
16.5.3. Grosssignalanalyse . . . . .	132
16.6. Z-Dioden . . . . .	133
16.6.1. Z-Dioden zur Spannungsstabilisierung . . . . .	133
<b>17. Bipolar Transistor</b>	<b>134</b>
17.1. NPN- und PNP-Transistor . . . . .	134
17.2. Der ideale Transistor bei Gleichspannung . . . . .	135
17.2.1. DC-Ersatzschaltung . . . . .	135
17.3. Verstärkerschaltungen . . . . .	135
17.3.1. Dynamische Innenwiderstände des Transistors . . . . .	135
17.3.2. Emitterschaltung . . . . .	136

17.3.3. Basisschaltung . . . . .	137
17.3.4. Kollektorschaltung (Emitterfolger) . . . . .	137
<b>18. Feldeffekt Transistor</b>	<b>138</b>
18.1. Verschiedene Typen . . . . .	138
18.2. Der ideale MOSFET (Handrechnung) . . . . .	139
18.3. Der reale MOSFET . . . . .	140
18.4. Kleinsignal Ersatzschaltbild für tiefe Frequenzen . . . . .	141
18.5. DC-Berechnung mit idealen MOSFET Gleichungen . . . . .	142
18.6. Der FET als Schalter . . . . .	143
18.7. Des FET als AC-Verstärker . . . . .	144
18.7.1. Sourceschaltung . . . . .	144
18.7.2. Gateschaltung . . . . .	145
18.7.3. Drainschaltung . . . . .	145
18.8. Dynamische Innenwiderstände des MOS-Transistors . . . . .	146
18.9. Der FET als Spannungsgesteuerter Widerstand . . . . .	146
18.10 MOS-Diode . . . . .	147
18.11 Stromquellen . . . . .	148
18.11.1. Einfache Stromquelle . . . . .	148
18.11.2. Stromquelle mit Kaskode-Schaltung . . . . .	148
18.11.3. Stromquelle mit geregelter Kaskode-Schaltung . . . . .	149
18.12 Stromspiegel . . . . .	149
18.12.1. Widlar Stromspiegel . . . . .	149
<b>19. Operationsverstärker</b>	<b>150</b>
19.1. Verstärkung . . . . .	150
19.2. Idealer OP . . . . .	150
19.2.1. Invertierender Verstärker . . . . .	151
19.2.2. Nichtinvertierender Verstärker . . . . .	151
19.2.3. Addierer . . . . .	151
19.2.4. Subtrahierer . . . . .	152
19.2.5. Mehrfach Addierer und Subtrahierer . . . . .	152
19.2.6. Instrumentationsverstärker . . . . .	152
19.2.7. Stromquelle . . . . .	153
19.2.8. Stromspiegel . . . . .	153
19.2.9. Differentieller UI-Wandler . . . . .	154
19.2.10. Schmitt-Trigger . . . . .	154
19.2.11. Wien-Robinson Oszillator . . . . .	155
19.2.12. Beschaltung des OPs mit Zweitoren . . . . .	156
19.3. Realer Operationsverstärker . . . . .	157
19.3.1. Ein- und Ausgangsspannungsbereich . . . . .	157
19.3.2. Übertragungskennlinie . . . . .	157
19.3.3. Gleichtaktfehler (Common Mode Error) . . . . .	157
19.3.4. Effektive, geschlossene Verstärkung . . . . .	158
19.3.5. Offsetfehler . . . . .	158
19.3.6. Versorgungsspannungsfehler (Power supply error) . . . . .	158
19.3.7. Eingangsströme (Bias- und Offsetstrom) . . . . .	159
19.3.8. Kombination der statischen Fehler . . . . .	159

19.3.9. Dynamischer Eingangswiderstand . . . . .	159
19.3.10.Frequenzgang . . . . .	160
<b>20. Gegengekoppelte Verstärker</b>	<b>161</b>
20.1. Mit- und Gegenkopplung . . . . .	161
20.1.1. Gegenkopplung beim OP . . . . .	161
20.2. Gegenkopplungsarten . . . . .	162
20.2.1. Bestimmung der Gegenkopplungsart . . . . .	163
20.2.2. Eingangsschaltungen . . . . .	163
20.2.3. Ausgangsschaltungen . . . . .	163
20.3. Schleifenverstärkung . . . . .	164
20.4. Wirkung der GK auf die Sensivität der Verstärkung . . . . .	164
20.5. Das Verstärkungs-Bandbreiten-Produkt . . . . .	165
 <b>V. Digitale Signalverarbeitung</b>	 <b>166</b>
<b>21. Stochastische Signale</b>	<b>167</b>
21.1. Allgemein . . . . .	167
<b>22. Abtastung</b>	<b>168</b>
22.1. Ideale Abtastung . . . . .	168
22.2. Flat Top Sampling . . . . .	168
22.3. Sample and Hold . . . . .	169
22.4. Abtasttheorem . . . . .	169
22.5. Rekonstruktion . . . . .	169
22.5.1. Interpolation . . . . .	170
22.6. Energie und Leistung bandbegrenzter Signale . . . . .	170
 <b>VI. Mathematik</b>	 <b>171</b>
<b>23. Grundlagen</b>	<b>172</b>
23.1. Allgemeines . . . . .	172
23.1.1. Binome . . . . .	172
23.1.2. Faktorzerlegungen . . . . .	172
23.1.3. Quadratische Gleichung . . . . .	173
23.1.4. Arithmetische Folge . . . . .	173
23.1.5. Geometrische Folge . . . . .	173
23.1.6. Partialbruchzerlegung . . . . .	173
23.2. Matrizen und Determinanten . . . . .	173
23.2.1. $2 \times 2$ Matrizen . . . . .	173
23.2.2. $3 \times 3$ Matrizen . . . . .	174
23.2.3. Transponierte einer Matrix . . . . .	174
23.3. Vektorrechnung . . . . .	174
23.3.1. Grundlagen . . . . .	174
23.3.2. Lineare Abbildungen . . . . .	175

23.4. Trigonometrie . . . . .	175
23.4.1. Komplementwinkel . . . . .	175
23.4.2. Sinussatz . . . . .	176
23.4.3. Cosinussatz . . . . .	176
23.5. Goniometrie . . . . .	176
23.5.1. Serien (Lösungsmengen) . . . . .	176
23.5.2. Potenzen . . . . .	176
23.5.3. Additionstheoreme . . . . .	177
23.5.4. Doppelwinkel . . . . .	177
23.5.5. Dreifachwinkel . . . . .	177
23.5.6. Halbwinkel . . . . .	177
23.5.7. Summen und Produkte . . . . .	177
23.5.8. Genaue Funktionswerte . . . . .	178
23.6. Logarithmen . . . . .	178
23.7. Komplexe Zahlen . . . . .	178
23.7.1. Allgemeines . . . . .	178
23.7.2. Rechenregeln . . . . .	179
23.7.3. Euler . . . . .	179
23.8. Ableiten . . . . .	179
23.8.1. Rechenregeln . . . . .	179
23.9. Integrieren . . . . .	181
23.9.1. Rechenregeln . . . . .	181
23.9.2. Substitution . . . . .	181
23.9.3. Sätze . . . . .	182
23.9.4. Integration rationaler Funktionen . . . . .	182
23.9.5. Rationalisierungsformeln . . . . .	183
23.9.6. Spezielle Integrale . . . . .	183
<b>24. Fourierreihen</b>	<b>186</b>
24.1. Bezeichnungen . . . . .	186
24.2. Skalarprodukt . . . . .	186
24.2.1. Eigenschaften . . . . .	186
24.2.2. Definitionen in $\mathbb{P}$ und $\mathbb{E}$ . . . . .	186
24.2.3. Für orthonormierte Basis . . . . .	187
24.3. Norm in $\mathbb{P}$ und $\mathbb{E}$ . . . . .	187
24.4. Cauchy-Schwarzsche Ungleichung . . . . .	187
24.5. Abstand . . . . .	187
24.6. Fourierreihe reell . . . . .	187
24.6.1. Fourierkoeffizienten . . . . .	187
24.6.2. Fourierreihe der Funktion $f \in \mathbb{P}$ . . . . .	188
24.7. Fourierreihe komplex . . . . .	188
24.7.1. Fourierkoeffizienten . . . . .	188
24.7.2. Fourierreihe der Funktion $f \in \mathbb{E}$ . . . . .	188
24.8. Parsevalsches Theorem . . . . .	188
24.9. Durchgang durch LTI-System . . . . .	188
24.10 Fourierkoeffizienten wichtiger periodischer Signale . . . . .	189

<b>25. Fouriertransformation</b>	<b>191</b>
25.1. Fouriertransformation . . . . .	191
25.2. Fourier-Cosinustransformation . . . . .	191
25.3. Fourier-Sinustransformation . . . . .	192
25.4. Faltung . . . . .	192
25.4.1. Fallunterscheidung bei Definitionsbereichen . . . . .	192
25.5. Eigenschaften . . . . .	193
25.6. Fouriertransformationen mit Diracdelta . . . . .	193
25.7. Fouriertransformationen wichtiger Impulse . . . . .	194
<b>26. Laplace</b>	<b>195</b>
26.1. Laplacetransformation . . . . .	195
26.2. Rechenregeln . . . . .	196
26.3. Spezielle Laplacetransformationen . . . . .	196
26.4. Faltung . . . . .	197
26.5. Periodische Funktionen . . . . .	197
<b>27. Differentialgleichungen</b>	<b>198</b>
27.1. 1. Ordnung . . . . .	198
27.1.1. Homogene . . . . .	198
27.1.2. Partikuläre . . . . .	198
27.1.3. Lösung . . . . .	199
27.2. Höhere Ordnung . . . . .	199
27.2.1. Homogen, linear mit konstanten Koeffizienten . . . . .	199
27.2.2. Partikuläre . . . . .	199
27.3. Laplace . . . . .	200
27.3.1. Lineare Übertragung . . . . .	200
27.3.2. Nichtlineare Übertragung . . . . .	201
27.4. Übersicht Laplace und Fourier . . . . .	202
<b>28. Funktionsdiskussion</b>	<b>203</b>
28.1. Funktionen mit einer Variablen . . . . .	203
28.1.1. Zu beantwortende Fragen . . . . .	203
28.1.2. Gerade (2-Punkte-Form) . . . . .	204
28.1.3. Abstand eines Punktes von einer Geraden . . . . .	204
28.2. Funktionen mit mehreren Variablen . . . . .	204
28.2.1. Bezeichnungen . . . . .	204
28.3. Kegelschnitte . . . . .	205
28.3.1. Kreis . . . . .	205
28.3.2. Ellipse . . . . .	205
28.3.3. Hyperbel . . . . .	205
28.3.4. Parabel . . . . .	205



# **Teil I.**

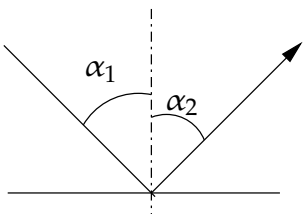
# **Physik**

# 1. Geometrische Optik

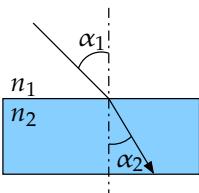
## 1.1. Sichtbares Licht

Wellenbereich $\lambda/nm$	Farbe
380 - 435	violett
435 - 465	blau
465 - 485	blaugrün
485 - 565	grün
565 - 590	gelb
590 - 630	orange
630 - 780	rot

## 1.2. Reflexionsgesetz

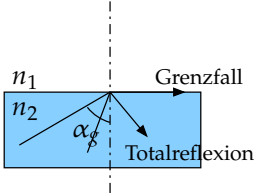
	$\alpha_1 = \alpha_2$	<div> <math>\alpha_1</math>    Einfallswinkel    <math>[rad]</math>  <math>\alpha_2</math>    Ausfallswinkel    <math>[rad]</math> </div>
---	-----------------------	---

## 1.3. Brechung

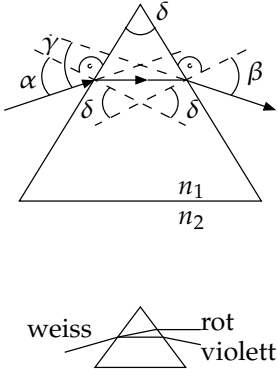
	<p>falls <math>n_2 &gt; n_1</math>:</p> $n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$ $n = \frac{c}{u}$ $n_2 > n_1 \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$	<div> <math>\alpha_1</math>    Einfallswinkel    <math>[rad]</math>  <math>\alpha_2</math>    Brechungswinkel    <math>[rad]</math>  <math>n_{1,2}</math>    Brechungsindex    <math>[1]</math> </div>
---	---	--



## 1.4. Totalreflexion

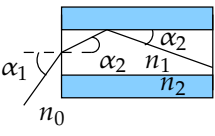
	falls $n_2 > n_1$ : $\alpha_g = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$	$\alpha_g$ Grenzwinkel    [rad] $n_{1,2}$ Brechungsindex    [1]
---	---	--

### 1.4.1. Prisma

	falls $n_2 = 1$ : $n_1 = \frac{\sin \frac{\delta + \gamma}{2}}{\frac{\delta}{2}}$ $n_2 = n_1 \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\frac{\gamma_{min} + \delta}{2}}$ $\gamma = \alpha - \delta + \arcsin\{\sin(\delta)z\}$ $z = \sqrt{\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - \sin^2 \alpha\right] - \cos \delta \sin \alpha}$ $\gamma_{min} = 2 \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \frac{\delta}{2}\right) - \delta$	$\alpha$ Einfallswinkel    [rad] $\beta$ Ausfallswinkel    [rad] $\delta$ Scheitelwinkel    [rad] $\gamma$ Ablenkwinkel    [rad] $\gamma_{min}$ min Ablenkwinkel    [rad] $n_1$ n-Prisma    [1] $n_2$ n-Medium    [1]
---	---	---

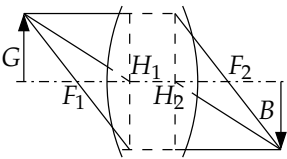
## 1. GEOMETRISCHE OPTIK

### 1.4.2. Lichtwellenleiter

	<p>falls <math>n_1 &gt; n_2</math>:</p> $\alpha_{1max} = \arcsin \frac{n_1 \cos \left[ \arcsin \left( \frac{n_2}{n_1} \right) \right]}{n_0}$ $n_0 \sin \alpha_1 = n_1 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_2}$ $n_0 \sin \alpha_1 = n_1 \sqrt{1 - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2}$ $n_0 \sin \alpha_1 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$	<table> <tr> <td><math>\alpha_1</math></td><td>Einfallswinkel</td><td>[rad]</td></tr> <tr> <td><math>\alpha_{1max}</math></td><td>max Einfalls- winkel</td><td>[rad]</td></tr> <tr> <td><math>n_0</math></td><td>n-Medium</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>n_1</math></td><td>n-Kern</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>n_2</math></td><td>n-Mantel</td><td>[1]</td></tr> </table>	$\alpha_1$	Einfallswinkel	[rad]	$\alpha_{1max}$	max Einfalls- winkel	[rad]	$n_0$	n-Medium	[1]	$n_1$	n-Kern	[1]	$n_2$	n-Mantel	[1]
$\alpha_1$	Einfallswinkel	[rad]															
$\alpha_{1max}$	max Einfalls- winkel	[rad]															
$n_0$	n-Medium	[1]															
$n_1$	n-Kern	[1]															
$n_2$	n-Mantel	[1]															

## 1.5. Abbildungen

### 1.5.1. Allgemein

 <p>Vorzeichen:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Für sammelnde optische Bauelemente ist <math>f &gt; 0</math>.</li> <li>Für zerstreuende optische Bauelemente <math>f &lt; 0</math>.</li> <li>Für virtuelle Bilder ist <math>b &lt; 0</math> und <math>B &lt; 0</math>.</li> <li>Für vortuelle Gegenstände ist <math>g &lt; 0</math> und <math>G &lt; 0</math>.</li> </ul>	$g = \overline{H_1 G}$ $b = \overline{H_2 B}$ $f = \overline{H_1 F_1}$ $f = \overline{H_2 F_2}$ $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ $\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$ $\beta = \frac{B}{G}$	<table> <tr> <td><math>g</math></td><td>Gegenstands- weite</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>b</math></td><td>Bildweite</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>f</math></td><td>Brennweite</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>H_1</math></td><td>vorderer Hauptpunkt</td><td></td></tr> <tr> <td><math>H_2</math></td><td>hinterer Hauptpunkt</td><td></td></tr> <tr> <td><math>F_1</math></td><td>vorderer Brennpunkt</td><td></td></tr> <tr> <td><math>F_2</math></td><td>hinterer Brennpunkt</td><td></td></tr> <tr> <td><math>G</math></td><td>Gegenstands- grösse</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>B</math></td><td>Bildgrösse</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>\beta</math></td><td>Abbildungs- verhältnis</td><td>[1]</td></tr> </table>	$g$	Gegenstands- weite	[m]	$b$	Bildweite	[m]	$f$	Brennweite	[m]	$H_1$	vorderer Hauptpunkt		$H_2$	hinterer Hauptpunkt		$F_1$	vorderer Brennpunkt		$F_2$	hinterer Brennpunkt		$G$	Gegenstands- grösse	[m]	$B$	Bildgrösse	[m]	$\beta$	Abbildungs- verhältnis	[1]
$g$	Gegenstands- weite	[m]																														
$b$	Bildweite	[m]																														
$f$	Brennweite	[m]																														
$H_1$	vorderer Hauptpunkt																															
$H_2$	hinterer Hauptpunkt																															
$F_1$	vorderer Brennpunkt																															
$F_2$	hinterer Brennpunkt																															
$G$	Gegenstands- grösse	[m]																														
$B$	Bildgrösse	[m]																														
$\beta$	Abbildungs- verhältnis	[1]																														

### 1.5.2. Spiegel

#### Parabolspiegel

Bei Parabolspiegeln treffen sich alle parallel einfallenden Strahlen in einem Punkt (Brennpunkt) auf der optische Achse.

#### Elliptische Spiegel

Alle Strahlen die vom einen Brennpunkt ausgesendet werden, treffen auf den zweiten Brennpunkt. (Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$  konstant ist.)

#### Hyperbolische Spiegel

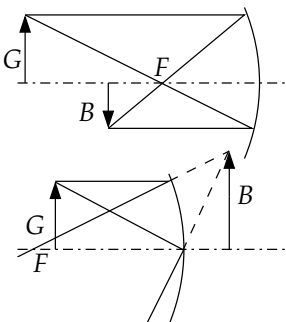
Alle Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgesendet werden, verlaufen nach der Reflexion so, als wären sie vom anderen der beiden Brennpunkte ausgesendet worden. (Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die die Differenz ihrer Abstände von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$  konstant ist.)

#### Sphärische Spiegel

Die spiegelnde Fläche ist ein Teil einer Kugel. Wenn nur ein kleiner Ausschnitt der Kugel- fläche verwendet wird, gehen parallel einfallende Strahlen näherungsweise durch einen Brennpunkt:  $f = r/2$ .

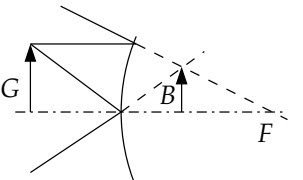
### 1.5.3. Abbildungen durch Spiegel

#### Konkavspiegel

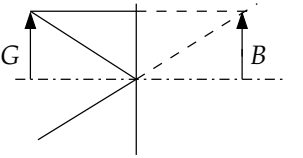
	<p>Befindet sich der Gegenstand ausserhalb der Brennweite, so entsteht ein reelles Bild, anderseits ist das Bild virtuell.</p>	<table> <tr> <td><math>G</math></td><td>Gegenstand</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>B</math></td><td>Bild</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>F</math></td><td>Brennpunkt</td><td></td></tr> </table>	$G$	Gegenstand	$[m]$	$B$	Bild	$[m]$	$F$	Brennpunkt	
$G$	Gegenstand	$[m]$									
$B$	Bild	$[m]$									
$F$	Brennpunkt										

## 1. GEOMETRISCHE OPTIK

### Konvexspiegel

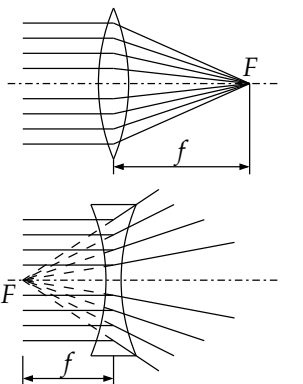
	<p>Konvexspiegel haben stets virtuelle Bilder bei reellen Gegenständen.</p>	<table> <tr> <td><math>G</math></td><td>Gegenstand</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>B</math></td><td>Bild</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>F</math></td><td>Brennpunkt</td><td></td></tr> </table>	$G$	Gegenstand	$[m]$	$B$	Bild	$[m]$	$F$	Brennpunkt	
$G$	Gegenstand	$[m]$									
$B$	Bild	$[m]$									
$F$	Brennpunkt										

### Planspiegel

	<p>Das Virtuelle Bild ist gleich gross wie der Gegenstand. Der Brennpunkt <math>F</math> liegt im Unendlichen. Der Planspiegel ist ein Spezialfall des Konvexspiegels.</p>	<table> <tr> <td><math>G</math></td><td>Gegenstand</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>B</math></td><td>Bild</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>F</math></td><td>Brennpunkt</td><td></td></tr> </table>	$G$	Gegenstand	$[m]$	$B$	Bild	$[m]$	$F$	Brennpunkt	
$G$	Gegenstand	$[m]$									
$B$	Bild	$[m]$									
$F$	Brennpunkt										

## 1.5.4. Linsen

### Linsentypen

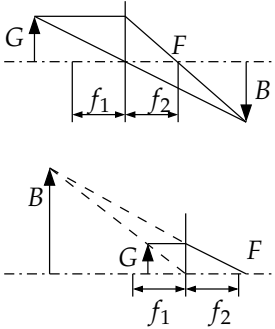
	$q = \frac{d}{f}$ $D = \frac{1}{f}$ <p>Linsenschleifergleichung:</p> $D = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$ <p>Falls das Linsenmaterial optisch dichter ist als das umgebende Medium, zeigt die obere Abbildung eine Sammel- und die untere eine Streulinse.</p>	<table> <tr> <td><math>q</math></td><td>Öffnungsverhältnis</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>d</math></td><td>effektiver Durchm.</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>f</math></td><td>Brennweite</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>D</math></td><td>Brechkraft</td><td><math>[dpt]</math></td></tr> <tr> <td><math>n_1</math></td><td>n-Umgebung</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>n_2</math></td><td>n-Linse</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>r_{1,2}</math></td><td>Linsenradien</td><td><math>[m]</math></td></tr> </table>	$q$	Öffnungsverhältnis	$[m]$	$d$	effektiver Durchm.	$[m]$	$f$	Brennweite	$[m]$	$D$	Brechkraft	$[dpt]$	$n_1$	n-Umgebung	$[1]$	$n_2$	n-Linse	$[1]$	$r_{1,2}$	Linsenradien	$[m]$
$q$	Öffnungsverhältnis	$[m]$																					
$d$	effektiver Durchm.	$[m]$																					
$f$	Brennweite	$[m]$																					
$D$	Brechkraft	$[dpt]$																					
$n_1$	n-Umgebung	$[1]$																					
$n_2$	n-Linse	$[1]$																					
$r_{1,2}$	Linsenradien	$[m]$																					

## Linsensysteme

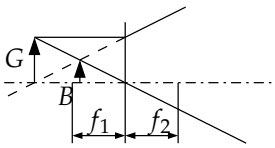
Zwei Linsen mit Brennweiten $f_1$ , $f_2$ auf einer Achse ergeben eine Linse mit Brennweite $f$ , falls ihr Abstand $d$ kleiner $f_1$ ist.	$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$ $D = D_1 + D_2 - d D_1 D_2$	$f_{1,2}$ Brennweiten $[m]$ $D$ Brechkraft $[dpt]$ $d$ Linsenabstand $[m]$
--	---	--

### 1.5.5. Abbildungen durch Linsen

#### Sammellinse

	<p>Der Gegenstand ist innerhalb der Brennweite <math>\Rightarrow</math> reelles Bild.</p> <p>Der Gegenstand ist ausserhalb der Brennweite <math>\Rightarrow</math> virtuelles Bild.</p>	$G$ Gegenstand $[m]$ $B$ Bild $[m]$ $F$ Brennpunkt $f_{1,2}$ Brennweiten $[m]$
--	---	---

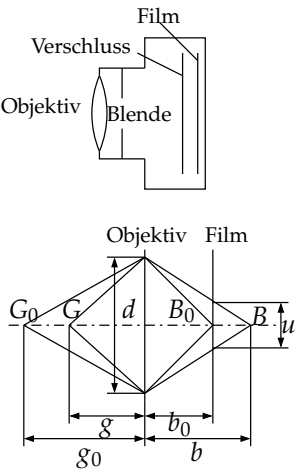
#### Zerstreuungslinse

	Bei Zerstreuungslinsen haben reelle Gegenstände stets virtuelle Bilder, unabhängig von ihrer Position.	$G$ Gegenstand $[m]$ $B$ Bild $[m]$ $F$ Brennpunkt $f_{1,2}$ Brennweiten $[m]$
---	--	---

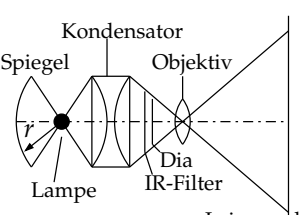
## 1. GEOMETRISCHE OPTIK

### 1.5.6. Optische Geräte

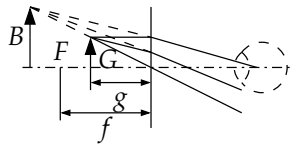
#### Fotoapparat

	$B = \frac{f}{g-f} G$ $I \approx d^2$ $H \approx \frac{1}{B^2} \approx \frac{d^2}{f^2}$ $E = Ht$ $q = \frac{d}{f} \quad Z = \frac{1}{q}$ $E \approx q^2 t$ $\frac{u}{d} = \frac{b - b_0}{b}$ $\frac{1}{g} = \frac{1}{g_0} \pm \frac{u}{qf^2}$ $g > g_0 \Rightarrow - \quad g < g_0 \Rightarrow +$	<table> <tr> <td><math>G</math></td><td>Gegenstand</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Gegenstandsweite</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>g_0</math></td><td>Schärfentieffenbereich</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>B</math></td><td>Bildweite</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>b</math></td><td>Bild</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>f</math></td><td>Brennweite</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Lichtstrom</td><td><math>[W]</math></td></tr> <tr> <td><math>d</math></td><td>Durchm. Eintrittspupille</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>H</math></td><td>Helligkeit</td><td><math>[\frac{W}{m^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>q</math></td><td>Öffnungsverhältnis</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>Z</math></td><td>Brenndeneinstellung</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>E</math></td><td>Belichtung</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Belichtungszeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>u</math></td><td>Durchm. Unschärfenkreis</td><td><math>[m]</math></td></tr> </table>	$G$	Gegenstand	$[m]$	$g$	Gegenstandsweite	$[m]$	$g_0$	Schärfentieffenbereich	$[m]$	$B$	Bildweite	$[m]$	$b$	Bild	$[m]$	$f$	Brennweite	$[m]$	$I$	Lichtstrom	$[W]$	$d$	Durchm. Eintrittspupille	$[m]$	$H$	Helligkeit	$[\frac{W}{m^2}]$	$q$	Öffnungsverhältnis	$[1]$	$Z$	Brenndeneinstellung	$[1]$	$E$	Belichtung	$[1]$	$t$	Belichtungszeit	$[s]$	$u$	Durchm. Unschärfenkreis	$[m]$
$G$	Gegenstand	$[m]$																																										
$g$	Gegenstandsweite	$[m]$																																										
$g_0$	Schärfentieffenbereich	$[m]$																																										
$B$	Bildweite	$[m]$																																										
$b$	Bild	$[m]$																																										
$f$	Brennweite	$[m]$																																										
$I$	Lichtstrom	$[W]$																																										
$d$	Durchm. Eintrittspupille	$[m]$																																										
$H$	Helligkeit	$[\frac{W}{m^2}]$																																										
$q$	Öffnungsverhältnis	$[1]$																																										
$Z$	Brenndeneinstellung	$[1]$																																										
$E$	Belichtung	$[1]$																																										
$t$	Belichtungszeit	$[s]$																																										
$u$	Durchm. Unschärfenkreis	$[m]$																																										

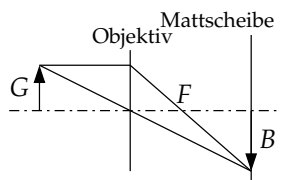
#### Projektor

	<p>Das Dia wird im Objektiv abgebildet <math>\Rightarrow g_2 = b_1</math>          Das Bild der Lampe muss im Objektiv sein.</p>	<table> <tr> <td><math>g_2</math></td><td>g-Objektiv</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>b_1</math></td><td>b-Kondensator</td><td><math>[m]</math></td></tr> </table>	$g_2$	g-Objektiv	$[m]$	$b_1$	b-Kondensator	$[m]$
$g_2$	g-Objektiv	$[m]$						
$b_1$	b-Kondensator	$[m]$						

## Lupe

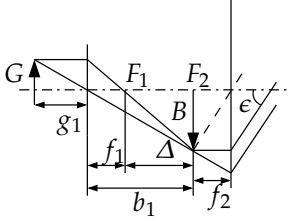
 <p>Sammellinse zur Vergrößerung des Seh winkels (Bild im Unendlichen)</p>	<p>Gegenstand in Brennweite <math>\Rightarrow</math> Sehwin- kel <math>\epsilon</math> ist unabhängig von der Augen- position</p> $V = \frac{\tan \epsilon}{\tan \epsilon_0}$ $V = \frac{s}{g} > V_{normal}$ $\tan \epsilon' = \frac{G}{f}$ $\tan \epsilon_0 = \frac{G}{s}$ $V = \frac{s}{f}$	<table> <tr> <td><math>G</math></td><td>Gegenstand</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Gegenstands- weite</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>B</math></td><td>Bildweite</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>b</math></td><td>Bild</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>f</math></td><td>Brennweite</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\epsilon</math></td><td>Sehwinkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td></td><td>durch Lupe</td><td></td></tr> <tr> <td><math>\epsilon_0</math></td><td>Sehwinkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td></td><td>ohne Lupe</td><td></td></tr> <tr> <td><math>s</math></td><td>deutliche Seh- weite</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Vergrößerung</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td></td><td>(max. ca. 25)</td><td></td></tr> </table>	$G$	Gegenstand	$[m]$	$g$	Gegenstands- weite	$[m]$	$B$	Bildweite	$[m]$	$b$	Bild	$[m]$	$f$	Brennweite	$[m]$	$\epsilon$	Sehwinkel	$[rad]$		durch Lupe		$\epsilon_0$	Sehwinkel	$[rad]$		ohne Lupe		$s$	deutliche Seh- weite	$[m]$	$V$	Vergrößerung	$[1]$		(max. ca. 25)	
$G$	Gegenstand	$[m]$																																				
$g$	Gegenstands- weite	$[m]$																																				
$B$	Bildweite	$[m]$																																				
$b$	Bild	$[m]$																																				
$f$	Brennweite	$[m]$																																				
$\epsilon$	Sehwinkel	$[rad]$																																				
	durch Lupe																																					
$\epsilon_0$	Sehwinkel	$[rad]$																																				
	ohne Lupe																																					
$s$	deutliche Seh- weite	$[m]$																																				
$V$	Vergrößerung	$[1]$																																				
	(max. ca. 25)																																					

## Mikroprojektor

 <p>Das reelle Bild einer Sam- mellinse wird verwendet und auf einer Mattscheibe abgebildet</p>	<p>Bild aus deutlicher Sehweite betrach- tet:</p> $V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$ <p>Stahlengang siehe Projektor</p>	<table> <tr> <td><math>G</math></td><td>Gegenstand</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Gegenstands- weite</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>B</math></td><td>Bildweite</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>b</math></td><td>Bild</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Vergrößerung</td><td><math>[1]</math></td></tr> </table>	$G$	Gegenstand	$[m]$	$g$	Gegenstands- weite	$[m]$	$B$	Bildweite	$[m]$	$b$	Bild	$[m]$	$V$	Vergrößerung	$[1]$
$G$	Gegenstand	$[m]$															
$g$	Gegenstands- weite	$[m]$															
$B$	Bildweite	$[m]$															
$b$	Bild	$[m]$															
$V$	Vergrößerung	$[1]$															

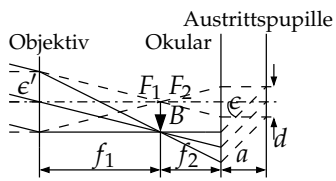
## 1. GEOMETRISCHE OPTIK

### Mikroskop

 <p>Das Objektiv verhält sich wie ein Mikroprojektor. Sein Bild wird durch das Okular, welches sich wie eine Lupe verhält, betrachtet.</p>	$V = V_1 V_2$ $V = \frac{\tan \epsilon}{\tan \epsilon_0}$ $V = \frac{B}{G} \frac{f}{f_2}$ $V = \frac{\Delta}{f_1} \frac{s}{f_2}$ $V_1 = \frac{\Delta}{f_1}$ $V_2 = \frac{s}{f_2}$ $\Delta = b_1 - f_1$	<table> <tr> <td><math>G</math></td><td>Gegenstand</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>g_1</math></td><td>Gegenstandsweite</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>B</math></td><td>Bild</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>b_1</math></td><td>Bildweite</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>F_1</math></td><td>Brennpunkt Objektiv</td><td></td></tr> <tr> <td><math>F_2</math></td><td>Brennpunkt Okular</td><td></td></tr> <tr> <td><math>f_1</math></td><td>Brennweite Objektiv</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>f_2</math></td><td>Brennweite Okular</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Delta</math></td><td>Tubuslänge</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\epsilon</math></td><td>Sehwinkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td><math>s</math></td><td>deutliche Sehweite</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Vergrößerung total</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>V_1</math></td><td>V-Objektiv</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>V_2</math></td><td>V-Okular</td><td><math>[1]</math></td></tr> </table>	$G$	Gegenstand	$[m]$	$g_1$	Gegenstandsweite	$[m]$	$B$	Bild	$[m]$	$b_1$	Bildweite	$[m]$	$F_1$	Brennpunkt Objektiv		$F_2$	Brennpunkt Okular		$f_1$	Brennweite Objektiv	$[m]$	$f_2$	Brennweite Okular	$[m]$	$\Delta$	Tubuslänge	$[m]$	$\epsilon$	Sehwinkel	$[rad]$	$s$	deutliche Sehweite	$[m]$	$V$	Vergrößerung total	$[1]$	$V_1$	V-Objektiv	$[1]$	$V_2$	V-Okular	$[1]$
$G$	Gegenstand	$[m]$																																										
$g_1$	Gegenstandsweite	$[m]$																																										
$B$	Bild	$[m]$																																										
$b_1$	Bildweite	$[m]$																																										
$F_1$	Brennpunkt Objektiv																																											
$F_2$	Brennpunkt Okular																																											
$f_1$	Brennweite Objektiv	$[m]$																																										
$f_2$	Brennweite Okular	$[m]$																																										
$\Delta$	Tubuslänge	$[m]$																																										
$\epsilon$	Sehwinkel	$[rad]$																																										
$s$	deutliche Sehweite	$[m]$																																										
$V$	Vergrößerung total	$[1]$																																										
$V_1$	V-Objektiv	$[1]$																																										
$V_2$	V-Okular	$[1]$																																										



## Fernrohre



Ein Fernglas mit den Daten  $10 \times 50$  hat eine Vergrößerung von 10 und einen Objektivdurchmesser von 50 mm.

$$V = \frac{\tan \epsilon}{\tan \epsilon_0}$$

$$\epsilon = V \epsilon'$$

$$V = \frac{f_1}{f_2}$$

$$\frac{1}{f_1 + f_2} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{D}{d} = \frac{f_1 + f_2}{a} = V$$

$$a = \frac{l}{V} \quad d = \frac{D}{V}$$

$$L = d^2$$

$$L = \left( \frac{D}{V} \right)^2$$

$$l = f_1 + f_2$$

$B$	Bildweite	[m]
$f_1$	Brennweite Objektiv	[m]
$f_2$	Brennweite Okular	[m]
$l$	Fernrohlänge	[m]
$\epsilon$	Ausfallswinkel	[rad]
$\epsilon'$	Einfallswinkel	[rad]
$s$	deutliche Seh- weite	[m]
$V$	Vergrößerung total	[1]
$L$	Lichtstärke	[1]
$D$	Durchm. Ob- jektiv	[m]
$d$	Durchm. Aus- trittspupille	[mm]
$a$	Abstand Oku- lar Austrittspu- pille	[m]

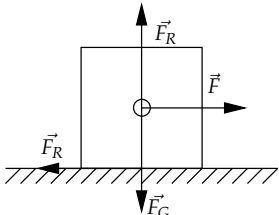
## 2. Statik

### 2.1. Starre Körper im Gleichgewicht

#### 2.1.1. Gleichgewichtsbedingung starrer Körper

Ein Körper ist dann im Gleichgewicht, wenn keine resultierende Kraft auf ihn wirkt, d.h. die Summe der ihn angreifenden Kräfte ist null.	<p>Allgemein:</p> $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$ <p>In Komponenten:</p> $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0$ $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0$ $\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0$	<p><math>F</math> Kraft <math>[N]</math>  <math>M</math> Drehmoment <math>[Nm]</math></p>
--	--	---

#### 2.1.2. Haftreibung

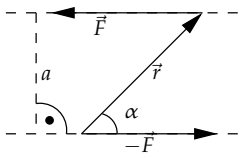
	$\vec{F}_N = \vec{F}_G \quad \vec{F}_R = \vec{F}$ $\vec{F}_R \leq \vec{F}_{Rmax} \leq \mu_H F_N$	<p><math>F</math> Kraft <math>[N]</math>  <math>F_G</math> Gewichtskraft <math>[N]</math>  <math>F_N</math> Normalkraft <math>[N]</math>  <math>F_R</math> Reibkraft <math>[N]</math>  <math>\mu_H</math> Haftreibungskoeffizient <math>[1]</math></p>
---	--	--

#### 2.1.3. Reaktionsprinzip

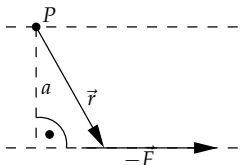
Das Reaktionsprinzip gilt, wenn zwei Körper Kräfte auf einander ausüben.	$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$	<p><math>F_{AB}</math> Kraft von Körper A <math>[N]</math>  <math>F_{BA}</math> Kraft von Körper B <math>[N]</math></p>
--	--------------------------------	---

### 2.1.4. Drehmoment

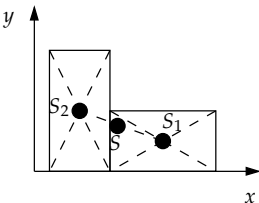
#### Drehmoment eines Kräftepaars

	$M = aF$ $\vec{M} \perp \text{ auf Ebene } \vec{r}, \vec{F} :$ $M = Fr \sin(\alpha)$ <p>Drehmomente nicht in einer Ebene:</p> $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ <p>Drehsinn im Gegenuhrzeigersinn: +</p>	<table> <tr> <td><math>M</math></td><td>Drehmoment</td><td><math>[Nm]</math></td></tr> <tr> <td><math>a</math></td><td>Abstand</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>F</math></td><td>Kraft</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> </table>	$M$	Drehmoment	$[Nm]$	$a$	Abstand	$[m]$	$F$	Kraft	$[N]$	$r$	Radius	$[m]$
$M$	Drehmoment	$[Nm]$												
$a$	Abstand	$[m]$												
$F$	Kraft	$[N]$												
$r$	Radius	$[m]$												

#### Drehmoment einer Einzelkraft

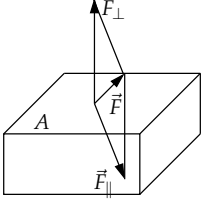
	$M = aF$ $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	<table> <tr> <td><math>M</math></td><td>Drehmoment</td><td><math>[Nm]</math></td></tr> <tr> <td><math>a</math></td><td>Abstand</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>F</math></td><td>Kraft</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> </table>	$M$	Drehmoment	$[Nm]$	$a$	Abstand	$[m]$	$F$	Kraft	$[N]$	$r$	Radius	$[m]$
$M$	Drehmoment	$[Nm]$												
$a$	Abstand	$[m]$												
$F$	Kraft	$[N]$												
$r$	Radius	$[m]$												

## 2.2. Schwerpunkt

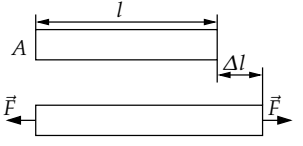
	$x_s = \frac{\sum_i x_i m_i}{\sum_i m_i}$ $y_s = \frac{\sum_i y_i m_i}{\sum_i m_i}$ $z_s = \frac{\sum_i z_i m_i}{\sum_i m_i}$ <p>Schwerpunkt eines Halbkreises:</p> $x = 0 \quad y = \frac{4r}{3\pi}$	<table> <tr> <td><math>x_s, y_s, z_s</math></td><td>Koordinaten des Gesamtschwerpunktes</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>x_i, y_i, z_i</math></td><td>Schwerpunktskoordinaten Teilkörper i</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> </table>	$x_s, y_s, z_s$	Koordinaten des Gesamtschwerpunktes	$[m]$	$x_i, y_i, z_i$	Schwerpunktskoordinaten Teilkörper i	$[m]$	$r$	Radius	$[m]$
$x_s, y_s, z_s$	Koordinaten des Gesamtschwerpunktes	$[m]$									
$x_i, y_i, z_i$	Schwerpunktskoordinaten Teilkörper i	$[m]$									
$r$	Radius	$[m]$									

## 2.3. Deformierung

### 2.3.1. Spannung

	$\sigma = \frac{F_{\perp}}{A}$ $\tau = \frac{F_{\parallel}}{A}$ $p = -\sigma$	<table> <tr> <td><math>\sigma</math></td><td>Zugspannung</td><td><math>\left[\frac{N}{m^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\tau</math></td><td>Schubspannung</td><td><math>\left[\frac{N}{m^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>\left[\frac{N}{m^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>F</math></td><td>Kraft</td><td><math>[N]</math></td></tr> </table>	$\sigma$	Zugspannung	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$	$\tau$	Schubspannung	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$	$p$	Druck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$	$A$	Fläche	$[m^2]$	$F$	Kraft	$[N]$
$\sigma$	Zugspannung	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$															
$\tau$	Schubspannung	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$															
$p$	Druck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$															
$A$	Fläche	$[m^2]$															
$F$	Kraft	$[N]$															

### 2.3.2. Dehnung

	$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ $\Delta l \sim \frac{lF}{A}$ $\epsilon = \frac{1}{E}\sigma = \frac{1}{E}\frac{F}{A}$	<table> <tr> <td><math>\epsilon</math></td><td>Dehnung</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Querschnittsfläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>l</math></td><td>Balkenlänge</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>F</math></td><td>Kraft</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr> <td><math>E</math></td><td>Elastizitätsmodul</td><td><math>\left[\frac{N}{m^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\sigma</math></td><td>Zugspannung</td><td><math>\left[\frac{N}{m^2}\right]</math></td></tr> </table>	$\epsilon$	Dehnung	$[1]$	$A$	Querschnittsfläche	$[m^2]$	$l$	Balkenlänge	$[m]$	$F$	Kraft	$[N]$	$E$	Elastizitätsmodul	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$	$\sigma$	Zugspannung	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
$\epsilon$	Dehnung	$[1]$																		
$A$	Querschnittsfläche	$[m^2]$																		
$l$	Balkenlänge	$[m]$																		
$F$	Kraft	$[N]$																		
$E$	Elastizitätsmodul	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$																		
$\sigma$	Zugspannung	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$																		

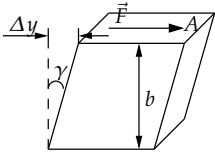
### 2.3.3. Querkontraktion

<p>Die Querkontraktion entspricht dem Dünnerwerden eines Materials bei Dehnung</p>	$\epsilon_q = \frac{\Delta d}{d} = \frac{-\mu \Delta l}{l}$ $\epsilon_q = -\mu \epsilon$	<table> <tr> <td><math>\epsilon_q</math></td><td>Querkontraktion</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Poissonzahl</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>d</math></td><td>Dicke Material</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>l</math></td><td>Länge</td><td><math>[m]</math></td></tr> </table>	$\epsilon_q$	Querkontraktion	$[1]$	$\mu$	Poissonzahl	$[1]$	$d$	Dicke Material	$[m]$	$l$	Länge	$[m]$
$\epsilon_q$	Querkontraktion	$[1]$												
$\mu$	Poissonzahl	$[1]$												
$d$	Dicke Material	$[m]$												
$l$	Länge	$[m]$												

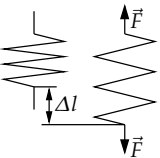
## 2.3.4. Kompression

Wird ein Körper einem Druck ausgesetzt, spricht man von Kompression	$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \Delta p$ $\kappa = \frac{3(1-2\mu)}{E}$	$V$ Volumen $[m^3]$ $p$ Druck $[\frac{N}{m^2}]$ $\kappa$ Kompressibilität $[\frac{m^2}{N}]$ $\mu$ Poissonzahl $[1]$ $E$ E-Modul $[\frac{N}{m^2}]$
---	--	---

## 2.3.5. Schubbeanspruchung

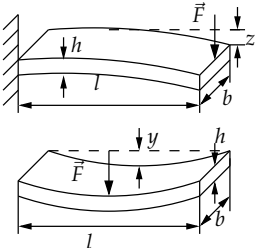
	$\frac{\Delta y}{b} = \frac{1}{G} \frac{F}{A} = \frac{1}{G} \tau$ $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$	$F$ Kraft $[N]$ $A$ Fläche $[m^2]$ $y$ Spaltbreite $[m]$ $\gamma$ Winkel $[rad]$ $b$ Körperbreite $[m]$ $G$ Schubmodul $[\frac{N}{m^2}]$ $\tau$ Schubspan. $[\frac{N}{m^2}]$ $\mu$ Poissonzahl $[1]$ $E$ E-Modul $[\frac{N}{m^2}]$
---	--	--

## 2.3.6. Schraubenfeder

	$F = c \Delta l$ $c = \frac{Gr^4}{4nR^3}$ <p>parallel: <math>c = c_1 + c_2 + \dots + c_n</math>  seriel: <math>\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n}</math></p>	$F$ Kraft $[N]$ $c$ Federkonst. $[\frac{N}{m}]$ $l$ Länge $[N]$ $G$ Schubmodul $[\frac{N}{m^2}]$ $r$ Radius Draht $[m]$ $R$ Radius Feder $[m]$ $n$ Windungen $[1]$
---	---	--

## 2. STATIK

### 2.3.7. Biegung eines Balkens

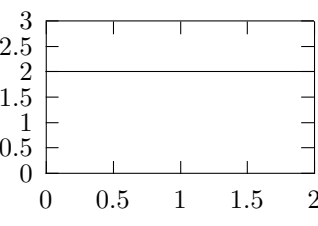
	$z = \frac{4l^3}{Eb h^3} F$ $y = \frac{5\rho g l^4}{32E h^2}$	<table> <tr> <td><math>z</math></td><td>Durchbiegung</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>y</math></td><td>Durchbiegung</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>l</math></td><td>Länge</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>b</math></td><td>Balkenbreite</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>h</math></td><td>Balkenhöhe</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>F</math></td><td>Kraft</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr> <td><math>\rho</math></td><td>Dichte</td><td><math>[\frac{kg}{m^3}]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Erdbeschleunigung</td><td><math>[\frac{m}{s^2}]</math></td></tr> <tr> <td></td><td><math>= 9,81</math></td><td></td></tr> <tr> <td><math>E</math></td><td>Elastizitätsmodul</td><td><math>[\frac{N}{m^2}]</math></td></tr> </table>	$z$	Durchbiegung	$[m]$	$y$	Durchbiegung	$[m]$	$l$	Länge	$[m]$	$b$	Balkenbreite	$[m]$	$h$	Balkenhöhe	$[m]$	$F$	Kraft	$[N]$	$\rho$	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$	$g$	Erdbeschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$		$= 9,81$		$E$	Elastizitätsmodul	$[\frac{N}{m^2}]$
$z$	Durchbiegung	$[m]$																														
$y$	Durchbiegung	$[m]$																														
$l$	Länge	$[m]$																														
$b$	Balkenbreite	$[m]$																														
$h$	Balkenhöhe	$[m]$																														
$F$	Kraft	$[N]$																														
$\rho$	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$																														
$g$	Erdbeschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$																														
	$= 9,81$																															
$E$	Elastizitätsmodul	$[\frac{N}{m^2}]$																														

## 2.4. Vorgehen beim Lösen von Statikaufgaben

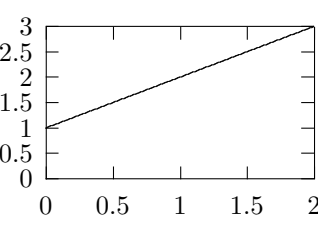
1. Skizze mit allen Kräften aufzeichnen
2. Koordinatensystem einführen
3. Falls notwendig einen Drehpunkt einführen
4. Gleichgewichtsbedingungs - Gleichungssystem aufstellen
5. Gleichungssystem auflösen

## 3. Kinematik

### 3.1. Gleichförmige Bewegung

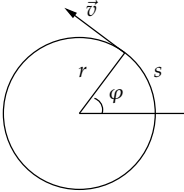
	$a = 0$ $v = \text{konstant}$ $s = vt + s_0$	<table> <tr> <td><math>a</math></td><td>Beschleunigung</td><td><math>\left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>s</math></td><td>Strecke</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>Geschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>s_0</math></td><td>Anfangs Strecke</td><td><math>[m]</math></td></tr> </table>	$a$	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	$s$	Strecke	$[m]$	$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$t$	Zeit	$[s]$	$s_0$	Anfangs Strecke	$[m]$
$a$	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$															
$s$	Strecke	$[m]$															
$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$															
$t$	Zeit	$[s]$															
$s_0$	Anfangs Strecke	$[m]$															

### 3.2. Gleichförmig beschleunigte Bewegung

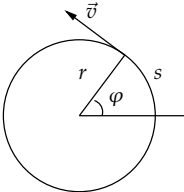
	$a = \text{konstant}$ $v = at + v_0$ $v = \dot{s}$ $s = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + s_0$ $s = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a}$ $a = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2s} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ $a = \dot{v} = \ddot{s}$ $v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2as}$	<table> <tr> <td><math>a</math></td><td>Beschleunigung</td><td><math>\left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>s</math></td><td>Strecke</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>Geschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>v_0</math></td><td>Start-Geschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>v_1</math></td><td>End-Geschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>s_0</math></td><td>Anfangs Strecke</td><td><math>[m]</math></td></tr> </table>	$a$	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	$s$	Strecke	$[m]$	$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$v_0$	Start-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$v_1$	End-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$t$	Zeit	$[s]$	$s_0$	Anfangs Strecke	$[m]$
$a$	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																					
$s$	Strecke	$[m]$																					
$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					
$v_0$	Start-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					
$v_1$	End-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					
$t$	Zeit	$[s]$																					
$s_0$	Anfangs Strecke	$[m]$																					

### 3.3. Drehbewegung

#### 3.3.1. Gleichförmige Kreisbewegung

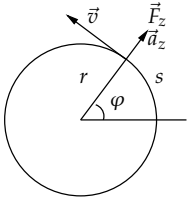
 <p>Analogie:</p> <p><math>s \rightarrow \varphi</math></p> <p><math>v \rightarrow \omega</math></p> <p><math>a \rightarrow \alpha</math></p>	$\alpha = 0$ $s = r\varphi$ $v = r\omega$ $\omega = \dot{\varphi} = \frac{v}{r}$ $\varphi = \omega t$ $f = \frac{1}{T}$ $\omega = 2\pi f$ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	<table> <tr> <td><math>\alpha</math></td><td>Winkel-Beschleunigung</td><td><math>\left[\frac{rad}{s^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Winkel-Geschw.</td><td><math>\left[\frac{rad}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Winkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>f</math></td><td>Frequenz</td><td><math>\left[\frac{1}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>s</math></td><td>Strecke</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>Geschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>s_0</math></td><td>Anfangs Strecke</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>Geschw. tang.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> </table>	$\alpha$	Winkel-Beschleunigung	$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$	$\omega$	Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$	$\varphi$	Winkel	$[rad]$	$r$	Radius	$[m]$	$T$	Periode	$[s]$	$f$	Frequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	$s$	Strecke	$[m]$	$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$t$	Zeit	$[s]$	$s_0$	Anfangs Strecke	$[m]$	$v$	Geschw. tang.	$\left[\frac{m}{s}\right]$
$\alpha$	Winkel-Beschleunigung	$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$																																	
$\omega$	Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$																																	
$\varphi$	Winkel	$[rad]$																																	
$r$	Radius	$[m]$																																	
$T$	Periode	$[s]$																																	
$f$	Frequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																																	
$s$	Strecke	$[m]$																																	
$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																																	
$t$	Zeit	$[s]$																																	
$s_0$	Anfangs Strecke	$[m]$																																	
$v$	Geschw. tang.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																																	

#### 3.3.2. Gleichförmig beschleunigte Kreisbewegung

	$\alpha = \text{konstant}$ $\alpha = \dot{\omega}$ $\alpha = \ddot{\varphi}$ $a = r\alpha$ $\omega = \alpha t + \omega_0$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha(\varphi - \varphi_0)}$ $\varphi = \frac{\alpha}{2}t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$ $\varphi = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$	<table> <tr> <td><math>\alpha</math></td><td>Winkel-Beschleunigung</td><td><math>\left[\frac{rad}{s^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Winkel-Geschw.</td><td><math>\left[\frac{rad}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega_0</math></td><td>Start-Winkel-Geschw.</td><td><math>\left[\frac{rad}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega_1</math></td><td>End-Winkel-Geschw.</td><td><math>\left[\frac{rad}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Winkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td><math>\varphi_0</math></td><td>Start-Winkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>a</math></td><td>Beschleunigung</td><td><math>\left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> </table>	$\alpha$	Winkel-Beschleunigung	$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$	$\omega$	Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$	$\omega_0$	Start-Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$	$\omega_1$	End-Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$	$\varphi$	Winkel	$[rad]$	$\varphi_0$	Start-Winkel	$[rad]$	$r$	Radius	$[m]$	$t$	Zeit	$[s]$	$a$	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
$\alpha$	Winkel-Beschleunigung	$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$																											
$\omega$	Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$																											
$\omega_0$	Start-Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$																											
$\omega_1$	End-Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$																											
$\varphi$	Winkel	$[rad]$																											
$\varphi_0$	Start-Winkel	$[rad]$																											
$r$	Radius	$[m]$																											
$t$	Zeit	$[s]$																											
$a$	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																											

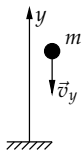


## 3.3.3. Zentripetalbeschleunigung

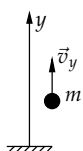
	$a_z = \frac{v^2}{r}$ $a_z = r\omega^2$ $v = \frac{2\pi r}{T}$ $F_z = ma_z = \frac{mv^2}{r}$ $F_z = m\omega^2 r$	<table> <tr> <td><math>\alpha_z</math></td><td>Zentr.-Beschleunigung</td><td><math>\left[\frac{rad}{s^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Winkel-Geschw.</td><td><math>\left[\frac{rad}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Winkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>Geschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>m</math></td><td>Masse</td><td><math>[kg]</math></td></tr> </table>	$\alpha_z$	Zentr.-Beschleunigung	$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$	$\omega$	Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$	$\varphi$	Winkel	$[rad]$	$r$	Radius	$[m]$	$T$	Periode	$[s]$	$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$m$	Masse	$[kg]$
$\alpha_z$	Zentr.-Beschleunigung	$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$																					
$\omega$	Winkel-Geschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$																					
$\varphi$	Winkel	$[rad]$																					
$r$	Radius	$[m]$																					
$T$	Periode	$[s]$																					
$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					
$m$	Masse	$[kg]$																					

## 3.4. Wurfbahnen

## 3.4.1. Freier Fall

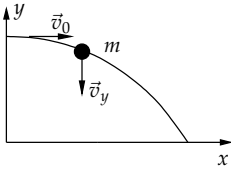
	$a_y = -g$ $v_y = -gt$ $v_e = \sqrt{2gh}$ $y = -\frac{g}{2}t^2$ $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$	<table> <tr> <td><math>v_0</math></td><td>Abschuss-Geschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>t_s</math></td><td>Steigzeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>t_f</math></td><td>Flugzeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>h</math></td><td>Höhe</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Erdbeschl. = 9.81</td><td><math>\left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> </table>	$v_0$	Abschuss-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$t$	Zeit	$[s]$	$t_s$	Steigzeit	$[s]$	$t_f$	Flugzeit	$[s]$	$h$	Höhe	$[m]$	$g$	Erdbeschl. = 9.81	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
$v_0$	Abschuss-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																		
$t$	Zeit	$[s]$																		
$t_s$	Steigzeit	$[s]$																		
$t_f$	Flugzeit	$[s]$																		
$h$	Höhe	$[m]$																		
$g$	Erdbeschl. = 9.81	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																		

## 3.4.2. Senkrechter Wurf

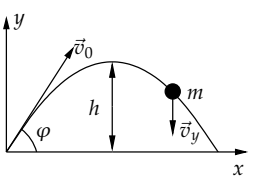
	$t_s = \left  \frac{v_0}{g} \right $ $h = \frac{v_0 t}{2} = \left  \frac{v_0^2}{2g} \right $ $t_f = 2t_s$	<table> <tr> <td><math>v_0</math></td><td>Abschuss-Geschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>t_s</math></td><td>Steigzeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>t_f</math></td><td>Flugzeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>h</math></td><td>Höhe</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Erdbeschl. = 9.81</td><td><math>\left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> </table>	$v_0$	Abschuss-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$t_s$	Steigzeit	$[s]$	$t_f$	Flugzeit	$[s]$	$h$	Höhe	$[m]$	$g$	Erdbeschl. = 9.81	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
$v_0$	Abschuss-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$															
$t_s$	Steigzeit	$[s]$															
$t_f$	Flugzeit	$[s]$															
$h$	Höhe	$[m]$															
$g$	Erdbeschl. = 9.81	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$															

### 3. KINEMATIK

#### 3.4.3. Horizontaler Wurf

	$a_x = 0 \rightarrow v_x = v_0$ $s_x = v_0 t$ $s_x = \sqrt{\frac{2v_0^2 y}{g}}$ $a_y = -g \rightarrow v_y = -gt$ $s_y = -\frac{g}{2} t^2$ $s_y = -\frac{g}{2v_0^2} s_x^2$	<table> <tr> <td><math>a</math></td><td>Beschl.</td><td><math>\left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>s</math></td><td>Strecke</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>Geschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>v_0</math></td><td>Start-Geschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Erdbeschl. = 9.81</td><td><math>\left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> </table>	$a$	Beschl.	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	$s$	Strecke	$[m]$	$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$v_0$	Start-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$t$	Zeit	$[s]$	$g$	Erdbeschl. = 9.81	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
$a$	Beschl.	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																		
$s$	Strecke	$[m]$																		
$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																		
$v_0$	Start-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																		
$t$	Zeit	$[s]$																		
$g$	Erdbeschl. = 9.81	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																		

#### 3.4.4. Schiefer Wurf

	$a_y = -g \quad a_x = 0$ $d = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\varphi)$ $h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2(\varphi)$ $t = \frac{2v_0 \sin(\varphi)}{g}$ $\Delta y = v_0 \sin(\varphi) t - \frac{gt^2}{2}$ $\Delta x = v_0 \cos(\varphi) t$ <p>Parabelgleichung:</p> $y = \tan(\varphi) s_x - \frac{gs_x^2}{2v_0^2 \cos^2(\varphi)}$	<table> <tr> <td><math>a</math></td><td>Beschl.</td><td><math>\left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>d</math></td><td>Wurfdistanz</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>s</math></td><td>Strecke</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>Geschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>v_0</math></td><td>Start-Geschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Abschusswinkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Erdbeschl. = 9.81</td><td><math>\left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> </table>	$a$	Beschl.	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	$d$	Wurfdistanz	$[m]$	$s$	Strecke	$[m]$	$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$v_0$	Start-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$t$	Zeit	$[s]$	$\varphi$	Abschusswinkel	$[rad]$	$g$	Erdbeschl. = 9.81	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
$a$	Beschl.	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																								
$d$	Wurfdistanz	$[m]$																								
$s$	Strecke	$[m]$																								
$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																								
$v_0$	Start-Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																								
$t$	Zeit	$[s]$																								
$\varphi$	Abschusswinkel	$[rad]$																								
$g$	Erdbeschl. = 9.81	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																								

# 4. Dynamik

## 4.1. Newtonsche Gesetze

### 4.1.1. Erstes Newtonsches Gesetz (Trägheitsgesetz)

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern. Die Gesamtsumme der Kräfte in einem abgeschlossenen System ist unveränderlich:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

### 4.1.2. Zweites Newtonsches Gesetz (Aktionsgesetz)

Die Beschleunigung eines Körpers ist umgekehrt proportional zu seiner Masse und direkt proportional zur Kraft, die auf ihn wirkt.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

### 4.1.3. Drittes Newtonsches Gesetz (Actio = Reactio)

Wirkt ein Körper A auf einen Körper B mit der Kraft  $\vec{F}_{AB}$ , so wirkt der Körper B mit der entgegengesetzt gerichteten, gleich grossen Kraft  $\vec{F}_{BA}$ .

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = ma_x \vec{a} \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = ma_y \vec{a} \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = ma_z \vec{a}$$

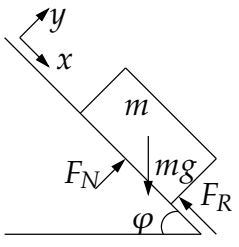
### 4.1.4. Allgemeines Vorgehen beim lösen von Bewegungsproblemen

1. Zeichnung anfertigen
2. Für jeden Körper, der untersucht werden soll, wird ein Kräftediagramm eingezeichnet
3. Ein geeignetes Koordinatensystem einführen
4. Das entstandene Gleichungssystem auflösen
5. Ergebnisse mit gesundem Menschenverstand auflösen

## 4. DYNAMIK

### 4.2. Masse und Gewicht

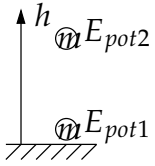
#### 4.2.1. Spezielle Kräfte, Masse, Dichte und Reibung

	$F_G = mg$ $F_R = \mu_G F_N$ $\rho = \frac{m}{V}$ $\mu = -\frac{a}{g}$ $\mu_H = \tan(\varphi_{krit})$ $F_{Hmax} = \mu_H F_N$	<table> <tr> <td><math>F_G</math></td><td>Gewichtskraft</td><td>[N]</td></tr> <tr> <td><math>F_R</math></td><td>Reibungskraft</td><td>[N]</td></tr> <tr> <td><math>F_N</math></td><td>Normalkraft</td><td>[N]</td></tr> <tr> <td><math>\rho</math></td><td>Dichte</td><td><math>[\frac{kg}{m^3}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Reibung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>\mu_G</math></td><td>Gleitreibung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>\mu_H</math></td><td>Haftreibung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>\varphi_{krit}</math></td><td>kritiesscher Winkel</td><td>[rad]</td></tr> <tr> <td><math>F_{Hmax}</math></td><td>Max. Haftreibungskraft</td><td>[N]</td></tr> <tr> <td><math>a</math></td><td>Beschleunigung</td><td><math>[\frac{m}{s^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Fallbeschleunigung</td><td><math>[\frac{m}{s^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>m</math></td><td>Masse</td><td>[kg]</td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Volumen</td><td><math>[m^3]</math></td></tr> </table>	$F_G$	Gewichtskraft	[N]	$F_R$	Reibungskraft	[N]	$F_N$	Normalkraft	[N]	$\rho$	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$	$\mu$	Reibung	[1]	$\mu_G$	Gleitreibung	[1]	$\mu_H$	Haftreibung	[1]	$\varphi_{krit}$	kritiesscher Winkel	[rad]	$F_{Hmax}$	Max. Haftreibungskraft	[N]	$a$	Beschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$	$g$	Fallbeschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$	$m$	Masse	[kg]	$V$	Volumen	$[m^3]$
$F_G$	Gewichtskraft	[N]																																							
$F_R$	Reibungskraft	[N]																																							
$F_N$	Normalkraft	[N]																																							
$\rho$	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$																																							
$\mu$	Reibung	[1]																																							
$\mu_G$	Gleitreibung	[1]																																							
$\mu_H$	Haftreibung	[1]																																							
$\varphi_{krit}$	kritiesscher Winkel	[rad]																																							
$F_{Hmax}$	Max. Haftreibungskraft	[N]																																							
$a$	Beschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$																																							
$g$	Fallbeschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$																																							
$m$	Masse	[kg]																																							
$V$	Volumen	$[m^3]$																																							

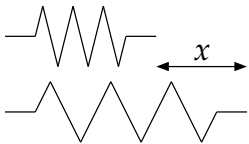
### 4.3. Arbeit und Energie, Energieerhaltung

<p>Energie ist die Fähigkeit Arbeit zu leisten. Arbeit = überwinden eines Widerstandes</p>	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ $W = Pt$ <p>Energieerhaltung im abgeschlossenen System:</p> $\sum_i E_i = const.$	<table> <tr> <td><math>W</math></td><td>Arbeit</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td><math>E</math></td><td>Energie</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td><math>F</math></td><td>Kraft</td><td>[N]</td></tr> <tr> <td><math>s</math></td><td>Weg</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td>[s]</td></tr> </table>	$W$	Arbeit	[J]	$E$	Energie	[J]	$F$	Kraft	[N]	$s$	Weg	[m]	$t$	Zeit	[s]
$W$	Arbeit	[J]															
$E$	Energie	[J]															
$F$	Kraft	[N]															
$s$	Weg	[m]															
$t$	Zeit	[s]															

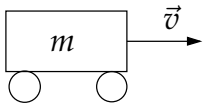
### 4.3.1. Hubarbeit, Potentielle Energie

	$E_{pot} = mgh$ $W_H \vec{F} \cdot \vec{h}$ $E_{pot} = W_H$	<table> <tr> <td><math>E_{pot}</math></td><td>potentielle Energie</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td><math>W_H</math></td><td>Hubarbeit</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td><math>m</math></td><td>Masse</td><td>[kg]</td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Fallbeschleunigung</td><td><math>\left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>h</math></td><td>Höhe</td><td>[m]</td></tr> </table>	$E_{pot}$	potentielle Energie	[J]	$W_H$	Hubarbeit	[J]	$m$	Masse	[kg]	$g$	Fallbeschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	$h$	Höhe	[m]
$E_{pot}$	potentielle Energie	[J]															
$W_H$	Hubarbeit	[J]															
$m$	Masse	[kg]															
$g$	Fallbeschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$															
$h$	Höhe	[m]															


### 4.3.2. Spannarbeit, Spannenergie

	$E_s = \frac{cx^2}{2}$ $W_s = \vec{F} \cdot \vec{x}$ $E_s = W_s$	<table> <tr> <td><math>E_s</math></td><td>Spannenergie</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td><math>W_s</math></td><td>Spannarbeit</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td><math>c</math></td><td>Federkonst.</td><td><math>\left[\frac{N}{m}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>x</math></td><td>Spann-Weg</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>F</math></td><td>Spannkraft</td><td>[N]</td></tr> </table>	$E_s$	Spannenergie	[J]	$W_s$	Spannarbeit	[J]	$c$	Federkonst.	$\left[\frac{N}{m}\right]$	$x$	Spann-Weg	[m]	$F$	Spannkraft	[N]
$E_s$	Spannenergie	[J]															
$W_s$	Spannarbeit	[J]															
$c$	Federkonst.	$\left[\frac{N}{m}\right]$															
$x$	Spann-Weg	[m]															
$F$	Spannkraft	[N]															

### 4.3.3. Beschleunigungsarbeit, Kinetische Energie

	$E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$ $W_B = \frac{m(\Delta v)^2}{2}$	<table> <tr> <td><math>E_{trans}</math></td><td>Translationsenergie</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td><math>W_B</math></td><td>Beschleunigungsarbeit</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td><math>m</math></td><td>Masse</td><td>[kg]</td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>Geschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> </table>	$E_{trans}$	Translationsenergie	[J]	$W_B$	Beschleunigungsarbeit	[J]	$m$	Masse	[kg]	$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$
$E_{trans}$	Translationsenergie	[J]												
$W_B$	Beschleunigungsarbeit	[J]												
$m$	Masse	[kg]												
$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$												

### 4.3.4. Rotationsenergie

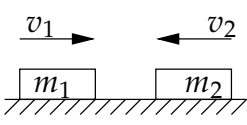
	$E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$	<table> <tr> <td><math>E_{rot}</math></td><td>Rotationsenergie</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td><math>J</math></td><td>Massenträgheit</td><td><math>[kgm^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Winkelgeschw.</td><td><math>\left[\frac{rad}{s}\right]</math></td></tr> </table>	$E_{rot}$	Rotationsenergie	[J]	$J$	Massenträgheit	$[kgm^2]$	$\omega$	Winkelgeschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$
$E_{rot}$	Rotationsenergie	[J]									
$J$	Massenträgheit	$[kgm^2]$									
$\omega$	Winkelgeschw.	$\left[\frac{rad}{s}\right]$									

## 4. DYNAMIK

### 4.3.5. Reibungsarbeit

	$W_R = F_R s$	$W_R$ Reibarbeit [J] $F_R$ Reibkraft [N] $s$ Strecke [m]
---	---------------	--

### 4.3.6. Verformungsarbeit

	Inelastisch: $W_D = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$  Elastisch: $W_D = \frac{F_1 + F_2}{2} \Delta s$	$W_D$ Deformationsarbeit [J] $m_1, m_2$ Massen [kg] $v_1, v_2$ Geschw. [ $\frac{m}{s}$ ] $F_1, F_2$ Kräfte [N]
---	--	---

### 4.3.7. Einstein, Kernbindungsenergie

	$E = mc^2$	$E$ Energie [J] $m$ Masse [kg] $c$ $v_{\text{Licht}}$ [ $\frac{m}{s}$ ] $= 299'792'458$ (Vakuum)
--	------------	--

## 4.4. Leistung

	$P = \frac{dW}{dt}$  $P = \frac{F ds}{dt} = \vec{F} \vec{s}$  $P = M \omega$	$P$ Leistung [W] $W$ Energie [J] $t$ Zeit [s] $F$ Kraft [N] $s$ Strecke [m] $M$ Drehmoment [Nm] $\omega$ Winkelgeschwindigkeit [ $\frac{rad}{s}$ ]
--	--	--

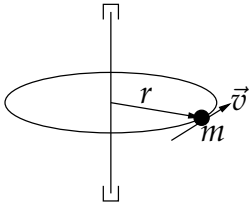
## 4.5. Wirkungsgrad

	$\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} = \frac{p_{ab}}{p_{zu}}$ $\eta_{tot} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots$	$\eta$ Wirkungsgrad [1] $P_{ab}$ P-Abgeg. [W] $P_{zu}$ P-Aufge. [W] $W_{ab}$ W-Abgeg. [J] $W_{zu}$ W-Aufge. [J]
--	---	---

## 4.6. Impuls, Impulserhaltung

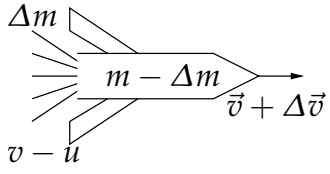
Impulserhaltungssatz: Im abgeschlossenen System bleibt der Impuls konstant	$\vec{p} = m\vec{v}$ $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ $p_{ges} = \sum_{i=1}^n m_i v_i$ Kraftstoß: $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$	$p$ Impuls $\left[\frac{kgm}{s}\right]$ $m$ Masse [kg] $v$ Geschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ $F$ Kraft [N] $\Delta t$ Wirkungs- dauer [s]
---	---	---

### 4.6.1. Drehimpuls

	$L = mvr \sin(\varphi)$ $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $L = J\omega$ $\vec{M} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$L$ Drehimpuls $\left[\frac{kgm^2}{s}\right]$ $m$ Masse [kg] $r$ Radius [m] $v$ Geschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ $\omega$ Winkelgeschw. $\left[\frac{rad}{s}\right]$ $M$ Drehmoment [Nm]
---	--	---

## 4. DYNAMIK

### 4.6.2. Raketenantrieb

	$v = u \ln \frac{m_0}{m} + v_0$ $F_s = \frac{dm}{dt} u$ <p>Spezifischer Impuls:</p> $T = \frac{u}{g}$	<table> <tr> <td><math>v</math></td><td>Geschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>u</math></td><td>v-Strahl relativ zu Rakete</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>m_0</math></td><td>Startmasse</td><td><math>[kg]</math></td></tr> <tr> <td><math>m</math></td><td>Masse</td><td><math>[kg]</math></td></tr> <tr> <td><math>F_s</math></td><td>Schubkraft</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Erdbeschl.</td><td><math>\left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> </table>	$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$u$	v-Strahl relativ zu Rakete	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$m_0$	Startmasse	$[kg]$	$m$	Masse	$[kg]$	$F_s$	Schubkraft	$[N]$	$T$	Zeit	$[s]$	$g$	Erdbeschl.	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					
$u$	v-Strahl relativ zu Rakete	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					
$m_0$	Startmasse	$[kg]$																					
$m$	Masse	$[kg]$																					
$F_s$	Schubkraft	$[N]$																					
$T$	Zeit	$[s]$																					
$g$	Erdbeschl.	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																					

### 4.6.3. Inelastischer Stoss

	$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$	<table> <tr> <td><math>v'</math></td><td>Geschw. nach Stoss</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>v_{1,2}</math></td><td>v vor Stoss</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>m_{1,2}</math></td><td>Massen</td><td><math>[kg]</math></td></tr> </table>	$v'$	Geschw. nach Stoss	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$v_{1,2}$	v vor Stoss	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$m_{1,2}$	Massen	$[kg]$
$v'$	Geschw. nach Stoss	$\left[\frac{m}{s}\right]$									
$v_{1,2}$	v vor Stoss	$\left[\frac{m}{s}\right]$									
$m_{1,2}$	Massen	$[kg]$									

### 4.6.4. Elastischer Stoss

	$v_1 - v_2 = -(v'_1 - v'_2)$ $v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ $v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$ $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$	<table> <tr> <td><math>v'_{1,2}</math></td><td>Geschw. nach Stoss</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>v_{1,2}</math></td><td>v vor Stoss</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>m_{1,2}</math></td><td>Massen</td><td><math>[kg]</math></td></tr> </table>	$v'_{1,2}$	Geschw. nach Stoss	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$v_{1,2}$	v vor Stoss	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$m_{1,2}$	Massen	$[kg]$
$v'_{1,2}$	Geschw. nach Stoss	$\left[\frac{m}{s}\right]$									
$v_{1,2}$	v vor Stoss	$\left[\frac{m}{s}\right]$									
$m_{1,2}$	Massen	$[kg]$									

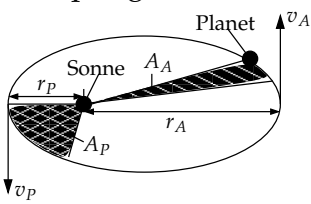


## 4.7. Analogie Translation und Rotation

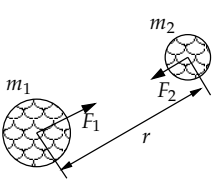
Translation			Rotation		
Symb	Grösse	Beziehung	Symb	Grösse	Beziehung
$s$	Weg		$\varphi$	Winkel	
$v$	Geschwindigkeit	$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$a$	Beschleunigung	$a = \frac{dv}{dt}$	$\alpha$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
$m$	Masse		$J$	Trägheitsmoment	$J = \int r^2 dm$
$p$	Impuls	$p = mv$	$L$	Drehimpuls	$L = J\omega$
$F$	Kraft	$F = \frac{dp}{dt}$	$M$	Drehmoment	$M = \frac{dL}{dt}$
$dW$	Arbeit	$dW = \vec{F}d\vec{s}$	$dW$	Arbeit	$dW = Md\varphi$
$P$	Leistung	$P = \vec{F}\vec{v}$	$P$	Leistung	$P = M\omega$
$E_{trans}$	Translationsenergie	$E_{trans} = \frac{mv^2}{2}$	$E_{rot}$	Rotationsenergie	$E_{rot} = J\omega^2/2$

## 4.8. Gravitation und Masse

### 4.8.1. Keplersche Gesetze (→ Bewegung der Planeten)

1. Keplergesetz	Die Planeten bewegen sich auf Elypsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. (Bahn ist eben)	$v_{P,A}$ Bahngeschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ $r_{P,A}$ Elypsen-Radien $\left[m\right]$ $T$ Umlaufdauer Planet $[s]$ $C$ Konstante $[1]$ $r$ mittlerer Abstand $\left[m\right]$ $v_K$ Kreisbahngeschwindigkeit $\left[\frac{m}{s}\right]$ $G$ Gravitationskonstante $= 6.673 \cdot 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kg s^2}\right]$
2. Keplergesetz 	Der Fahrstrahl des Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.  $v_P r_P = v_A r_A$ $A_P = A_A$	
3. Keplergesetz	Das Quadrat der Umlaufdauer eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz seiner mittleren Entfernung zur Sonne.  $T^2 = C r^3$ $t = \frac{4\pi}{GM_{Sonne}} r^3$ Planetengeschwindigkeit: $v_K = \frac{2\pi r}{T}$ $v_K = \sqrt{\frac{GM_{Sonne}}{r}}$	

### 4.8.2. Newtonsches Gravitationsgesetz

	$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ $g = G \frac{m_E}{r^2} = \frac{F}{m}$	$F$ Anziehungskraft $[N]$ $m_{1,2}$ Körpermasse $[kg]$ $r$ Abstand $[m]$ $G$ Gravitationskonstante $= 6.673 \cdot 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kg s^2}\right]$ $g$ Erdbeschl. $\left[\frac{m}{s^2}\right]$
---	---	---

## 4.8.3. Potentielle Energie im Gravitationsfeld einer Zentralmasse

	$E_{pot} = -G \frac{m_Z m}{r}$ $\varphi = -\frac{G m_Z}{r}$	$m_Z$ m-Zentralmasse [kg] $m$ Körpermasse [kg] $\varphi$ Gravitationspotential [ $\frac{m^2}{s^2}$ ] $G$ Gravitationskonstante = [ $\frac{m^3}{kg s^2}$ ] $6.673 \cdot 10^{-11}$
--	---	--

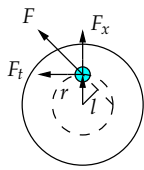
## 4.8.4. Fluchtgeschwindigkeit

Die Bahn ist eine Parabel	$v_F = \sqrt{2 \frac{G m_Z}{r_0}}$ $v_F = \sqrt{2} v_K$	$v_F$ Fluchtgeschw. [ $\frac{m}{s}$ ] $v_K$ Kreisbahngeschwindigkeit [ $\frac{m}{s}$ ] $m_Z$ m-Zentralmasse [kg] $r_0$ Abstand [m] $G$ Gravitationskonstante = [ $\frac{m^3}{kg s^2}$ ] $6.673 \cdot 10^{-11}$
---------------------------	---	---


## 4.8.5. Geostationäre Bahn

Ein geostationärer Satellit scheint von der Erde aus gesehen still zu stehen.	$r = \sqrt[3]{\frac{G m_p t^2}{4\pi^2}}$	$r$ Bahnradius [m] $m_p$ m-Planet [kg] $t$ Umlaufzeit [s] $G$ Gravitationskonstante = [ $\frac{m^3}{kg s^2}$ ] $6.673 \cdot 10^{-11}$
---	--	---

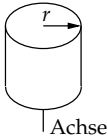
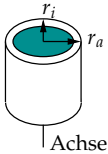

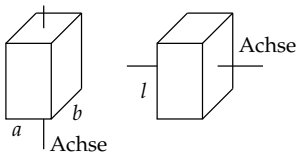
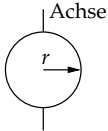
## 4.9. Rotation und Massenträgheitsmoment

	$M = F_t l = F r \sin(\varphi)$ $M = J \frac{d\omega}{dt} = J \alpha$ $J = \sum_i m_i r_i^2$ <p>Satz von Steiner:</p> $J_A = J_S + m d^2$	<table> <tr><td><math>M</math></td><td>Drehmoment</td><td><math>[Nm]</math></td></tr> <tr><td><math>F</math></td><td>Kraft</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr><td><math>F_t</math></td><td>F-tangential</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr><td><math>l</math></td><td>Hebelarm</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr><td><math>J</math></td><td>Massenträgheitsmoment</td><td><math>[kgm^2]</math></td></tr> <tr><td><math>J_A</math></td><td>J bez. Achse A</td><td><math>[kgm^2]</math></td></tr> <tr><td><math>J_S</math></td><td>J bez. Schwp</td><td><math>[kgm^2]</math></td></tr> <tr><td><math>\omega</math></td><td>Winkelgeschw.</td><td><math>[\frac{rad}{s}]</math></td></tr> <tr><td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr><td><math>d</math></td><td>Abst. Drehp.</td><td><math>[m]</math></td></tr> </table>	$M$	Drehmoment	$[Nm]$	$F$	Kraft	$[N]$	$F_t$	F-tangential	$[N]$	$l$	Hebelarm	$[m]$	$J$	Massenträgheitsmoment	$[kgm^2]$	$J_A$	J bez. Achse A	$[kgm^2]$	$J_S$	J bez. Schwp	$[kgm^2]$	$\omega$	Winkelgeschw.	$[\frac{rad}{s}]$	$t$	Zeit	$[s]$	$d$	Abst. Drehp.	$[m]$
$M$	Drehmoment	$[Nm]$																														
$F$	Kraft	$[N]$																														
$F_t$	F-tangential	$[N]$																														
$l$	Hebelarm	$[m]$																														
$J$	Massenträgheitsmoment	$[kgm^2]$																														
$J_A$	J bez. Achse A	$[kgm^2]$																														
$J_S$	J bez. Schwp	$[kgm^2]$																														
$\omega$	Winkelgeschw.	$[\frac{rad}{s}]$																														
$t$	Zeit	$[s]$																														
$d$	Abst. Drehp.	$[m]$																														

### 4.9.1. Massenträgheitsmoment bei Getriebe

	$J_1 = \frac{J_2}{\eta_G} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 = \frac{J_2}{\eta_G} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2$ $J_1 = \frac{J_2}{\eta_G i^2}$	<table> <tr><td><math>J</math></td><td>Massenträgheit</td><td><math>[kgm^2]</math></td></tr> <tr><td><math>\omega</math></td><td>Winkelgeschw.</td><td><math>[\frac{rad}{s}]</math></td></tr> <tr><td><math>n</math></td><td>Drehzahl</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr><td><math>i</math></td><td>Übersetzung</td><td><math>[1]</math></td></tr> </table>	$J$	Massenträgheit	$[kgm^2]$	$\omega$	Winkelgeschw.	$[\frac{rad}{s}]$	$n$	Drehzahl	$[1]$	$i$	Übersetzung	$[1]$
$J$	Massenträgheit	$[kgm^2]$												
$\omega$	Winkelgeschw.	$[\frac{rad}{s}]$												
$n$	Drehzahl	$[1]$												
$i$	Übersetzung	$[1]$												

### 4.9.2. Massenträgheitsmomente oft verwendeter Körper

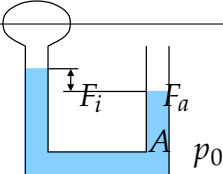
	<p>Allgemein:</p> $J = \int r^2 dm$	<p><math>J</math> Massenträgheitsmoment <math>[kgm^2]</math></p> <p><math>m</math> Masse <math>[kg]</math></p> <p><math>r</math> Radius <math>[m]</math></p> <p><math>a, b</math> Seite <math>[m]</math></p> <p><math>l</math> Länge <math>[m]</math></p>
	<p>Vollzylinder:</p> $J = \frac{mr^2}{2}$	
	<p>Hohlzylinder:</p> $J = \frac{m(r_a^2 + r_i^2)}{2}$	
	<p>Kugel:</p> $J = \frac{2}{5}mr^2$	
	<p>Quader: <math>J = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}</math></p> <p>Stange: <math>J = \frac{ml^2}{12}</math></p>	
	<p>Kreisscheibe:</p> $J = \frac{mr^2}{4} = \frac{md^2}{16}$	

# 5. Mechanik deformierbarer Körper

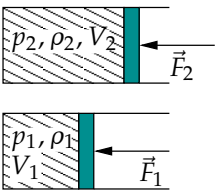
## 5.1. Druck

	$p = \frac{F}{A}$ $\tau = \frac{F}{A}$	<table> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td><math>F</math></td><td>Kraft</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>\tau</math></td><td>Schubspannung</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> </table>	$p$	Druck	$[Pa]$	$F$	Kraft	$[N]$	$A$	Fläche	$[m^2]$	$\tau$	Schubspannung	$[Pa]$
$p$	Druck	$[Pa]$												
$F$	Kraft	$[N]$												
$A$	Fläche	$[m^2]$												
$\tau$	Schubspannung	$[Pa]$												

### 5.1.1. Absoluter Druck Überdruck

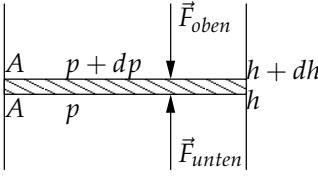
	$\Delta p = p - p_0$ $F = F_i - F_a$ $F = pA - p_0A$	<table> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td><math>p_0</math></td><td>Aussendruck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td></td><td><math>= 1,013 \cdot 10^5</math></td><td></td></tr> <tr> <td><math>F_i, F_a</math></td><td>Kraft innen, aussen</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> </table>	$p$	Druck	$[Pa]$	$p_0$	Aussendruck	$[Pa]$		$= 1,013 \cdot 10^5$		$F_i, F_a$	Kraft innen, aussen	$[N]$	$A$	Fläche	$[m^2]$
$p$	Druck	$[Pa]$															
$p_0$	Aussendruck	$[Pa]$															
	$= 1,013 \cdot 10^5$																
$F_i, F_a$	Kraft innen, aussen	$[N]$															
$A$	Fläche	$[m^2]$															

## 5.2. Kompression

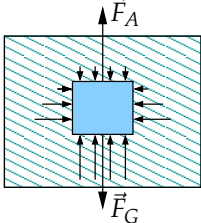
 <p>Ideale Fluide sind inkompressibel und reibungsfrei, Gase können zusammengeedrückt werden.</p>	$\kappa = \frac{-1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p}$ $K = \frac{1}{\kappa}$ <p>ideales Gas:</p> $pV = konst.$ $p_1 V_1 = p_2 V_2$	<table> <tr> <td><math>\kappa</math></td><td>Kompressibilität</td><td><math>[\frac{1}{Pa}]</math></td></tr> <tr> <td><math>K</math></td><td>Kompressionsmodul</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Volumen</td><td><math>[m^3]</math></td></tr> <tr> <td><math>\rho</math></td><td>Dichte</td><td><math>[\frac{kg}{m^3}]</math></td></tr> </table>	$\kappa$	Kompressibilität	$[\frac{1}{Pa}]$	$K$	Kompressionsmodul	$[Pa]$	$p$	Druck	$[Pa]$	$V$	Volumen	$[m^3]$	$\rho$	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$
$\kappa$	Kompressibilität	$[\frac{1}{Pa}]$															
$K$	Kompressionsmodul	$[Pa]$															
$p$	Druck	$[Pa]$															
$V$	Volumen	$[m^3]$															
$\rho$	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$															

## 5.3. Hydrostatik

### 5.3.1. Schweredruck

	$dp = -\rho \cdot g \cdot dh \quad (h \text{ positiv nach oben})$ <p>Bei Flüssigkeiten:</p> $p = \rho gh + p_0 \quad (h \text{ positiv nach unten})$ $\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p(h)}{\rho(h)}$ <p>Bei Gasen:</p> $p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gh}$	<table> <tr> <td><math>p</math></td> <td>Druck</td> <td><math>[Pa]</math></td> </tr> <tr> <td><math>p_0</math></td> <td>Druck bei <math>h = 0</math></td> <td><math>[Pa]</math></td> </tr> <tr> <td><math>\rho</math></td> <td>Dichte</td> <td><math>[\frac{kg}{m^3}]</math></td> </tr> <tr> <td><math>\rho_0</math></td> <td>Dichte bei <math>h = 0</math></td> <td><math>[\frac{kg}{m^3}]</math></td> </tr> <tr> <td><math>h</math></td> <td>Höhe</td> <td><math>[m]</math></td> </tr> <tr> <td><math>g</math></td> <td>Erdbeschleunigung</td> <td><math>[\frac{m}{s^2}]</math></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td><math>= 9.81</math></td> </tr> </table>	$p$	Druck	$[Pa]$	$p_0$	Druck bei $h = 0$	$[Pa]$	$\rho$	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$	$\rho_0$	Dichte bei $h = 0$	$[\frac{kg}{m^3}]$	$h$	Höhe	$[m]$	$g$	Erdbeschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$			$= 9.81$
$p$	Druck	$[Pa]$																					
$p_0$	Druck bei $h = 0$	$[Pa]$																					
$\rho$	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$																					
$\rho_0$	Dichte bei $h = 0$	$[\frac{kg}{m^3}]$																					
$h$	Höhe	$[m]$																					
$g$	Erdbeschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$																					
		$= 9.81$																					

### 5.3.2. Statischer Auftrieb

	$F_A = \rho_{Fl} V_K g - \rho_K V_K g$ $F_A = m_{Fl} g - m_K g$ $F_A = A \rho_{Fl} g \Delta h$	<table> <tr> <td><math>F_A</math></td> <td>Auftriebskraft</td> <td><math>[N]</math></td> </tr> <tr> <td><math>\rho_{Fl}</math></td> <td>Dichte Fluid</td> <td><math>[\frac{kg}{m^3}]</math></td> </tr> <tr> <td><math>\rho_K</math></td> <td>Dichte Körper</td> <td><math>[\frac{kg}{m^3}]</math></td> </tr> <tr> <td><math>m_{Fl}</math></td> <td>Masse Fluid</td> <td><math>[kg]</math></td> </tr> <tr> <td><math>m_K</math></td> <td>Masse Körper</td> <td><math>[kg]</math></td> </tr> <tr> <td><math>A</math></td> <td>Fläche Körper</td> <td><math>[m^2]</math></td> </tr> <tr> <td><math>g</math></td> <td>Erdbeschleunigung</td> <td><math>[\frac{m}{s^2}]</math></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td><math>= 9.81</math></td> </tr> </table>	$F_A$	Auftriebskraft	$[N]$	$\rho_{Fl}$	Dichte Fluid	$[\frac{kg}{m^3}]$	$\rho_K$	Dichte Körper	$[\frac{kg}{m^3}]$	$m_{Fl}$	Masse Fluid	$[kg]$	$m_K$	Masse Körper	$[kg]$	$A$	Fläche Körper	$[m^2]$	$g$	Erdbeschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$			$= 9.81$
$F_A$	Auftriebskraft	$[N]$																								
$\rho_{Fl}$	Dichte Fluid	$[\frac{kg}{m^3}]$																								
$\rho_K$	Dichte Körper	$[\frac{kg}{m^3}]$																								
$m_{Fl}$	Masse Fluid	$[kg]$																								
$m_K$	Masse Körper	$[kg]$																								
$A$	Fläche Körper	$[m^2]$																								
$g$	Erdbeschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$																								
		$= 9.81$																								

### 5.3.3. Druckwandler

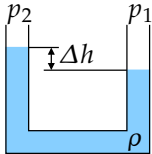
	$\frac{p_1}{p_2} = \frac{A_2}{A_1}$	<table> <tr> <td><math>p</math></td> <td>Druck</td> <td><math>[Pa]</math></td> </tr> <tr> <td><math>A</math></td> <td>Fläche</td> <td><math>[m^2]</math></td> </tr> </table>	$p$	Druck	$[Pa]$	$A$	Fläche	$[m^2]$
$p$	Druck	$[Pa]$						
$A$	Fläche	$[m^2]$						

### 5.3.4. Kraftwandler

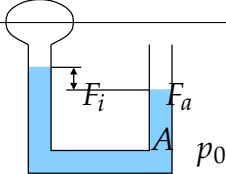
	$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$	<table> <tr> <td><math>F</math></td> <td>Kraft</td> <td><math>[N]</math></td> </tr> <tr> <td><math>A</math></td> <td>Fläche</td> <td><math>[m^2]</math></td> </tr> </table>	$F$	Kraft	$[N]$	$A$	Fläche	$[m^2]$
$F$	Kraft	$[N]$						
$A$	Fläche	$[m^2]$						

### 5.3.5. Druckmessung

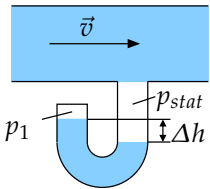
#### Manometer

	$\Delta p = p_1 - p_2$ $\Delta p = \rho g \Delta h$	<table> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td><math>h</math></td><td>Höhe</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\rho</math></td><td>Dichte</td><td><math>\left[\frac{kg}{m^3}\right]</math></td></tr> </table>	$p$	Druck	$[Pa]$	$h$	Höhe	$[m]$	$\rho$	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
$p$	Druck	$[Pa]$									
$h$	Höhe	$[m]$									
$\rho$	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$									

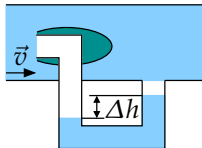
#### Absoluter Druck

	$p_a = \rho g \Delta h$	<table> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td><math>h</math></td><td>Höhe</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\rho</math></td><td>Dichte</td><td><math>\left[\frac{kg}{m^3}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Erdbeschl. =</td><td><math>\left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>9.81</td></tr> </table>	$p$	Druck	$[Pa]$	$h$	Höhe	$[m]$	$\rho$	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	$g$	Erdbeschl. =	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$			9.81
$p$	Druck	$[Pa]$															
$h$	Höhe	$[m]$															
$\rho$	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$															
$g$	Erdbeschl. =	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$															
		9.81															

#### Statischer Druck (Druck auf Rohrwand)

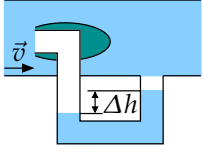
	$p_{stat} = p_1 + \rho g \Delta h$ <p>Falls oben offen:</p> $p_1 = p_0$	<table> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td><math>p_0</math></td><td>Aussendruck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td></td><td></td><td><math>= 1.013 \cdot 10^5</math></td></tr> <tr> <td><math>h</math></td><td>Höhe</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\rho</math></td><td>Dichte</td><td><math>\left[\frac{kg}{m^3}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Erdbeschl. =</td><td><math>\left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>9.81</td></tr> </table>	$p$	Druck	$[Pa]$	$p_0$	Aussendruck	$[Pa]$			$= 1.013 \cdot 10^5$	$h$	Höhe	$[m]$	$\rho$	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	$g$	Erdbeschl. =	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$			9.81
$p$	Druck	$[Pa]$																					
$p_0$	Aussendruck	$[Pa]$																					
		$= 1.013 \cdot 10^5$																					
$h$	Höhe	$[m]$																					
$\rho$	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$																					
$g$	Erdbeschl. =	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																					
		9.81																					

#### Dynamischer Druck

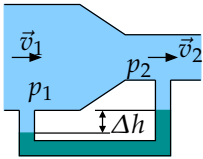
	$p_{ges} = \rho g \Delta h$	<table> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td><math>h</math></td><td>Höhe</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\rho</math></td><td>Dichte</td><td><math>\left[\frac{kg}{m^3}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Erdbeschl. =</td><td><math>\left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>9.81</td></tr> </table>	$p$	Druck	$[Pa]$	$h$	Höhe	$[m]$	$\rho$	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	$g$	Erdbeschl. =	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$			9.81
$p$	Druck	$[Pa]$															
$h$	Höhe	$[m]$															
$\rho$	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$															
$g$	Erdbeschl. =	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$															
		9.81															



## Gesamtdruck

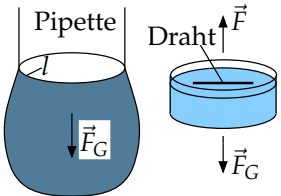
	$p_{dyn} = \rho g \Delta h$ <p>Strömungsgeschwindigkeit:</p> $v = \sqrt{\frac{2p_{dyn}}{\rho}}$	<table> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td><math>h</math></td><td>Höhe</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\rho</math></td><td>Dichte</td><td><math>\left[\frac{kg}{m^3}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Erdbeschl.</td><td><math>= \left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td></td><td>9.81</td><td></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>Geschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> </table>	$p$	Druck	$[Pa]$	$h$	Höhe	$[m]$	$\rho$	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	$g$	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$		9.81		$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$
$p$	Druck	$[Pa]$																		
$h$	Höhe	$[m]$																		
$\rho$	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$																		
$g$	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$																		
	9.81																			
$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																		

## Druckdifferenzen

 <p>Venturirohr</p>	$\Delta p = p_1 - p_2$ $\Delta p = \rho g \Delta h$ <p>Strömungsgeschwindigkeit:</p> $v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]\rho}}$	<table> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td><math>h</math></td><td>Höhe</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>\rho</math></td><td>Dichte</td><td><math>\left[\frac{kg}{m^3}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Erdbeschl.</td><td><math>= \left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td></td><td>9.81</td><td></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>Geschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> </table>	$p$	Druck	$[Pa]$	$h$	Höhe	$[m]$	$A$	Fläche	$[m^2]$	$\rho$	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	$g$	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$		9.81		$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$
$p$	Druck	$[Pa]$																					
$h$	Höhe	$[m]$																					
$A$	Fläche	$[m^2]$																					
$\rho$	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$																					
$g$	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$																					
	9.81																						
$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																					

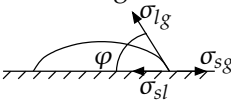
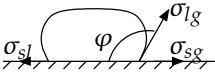
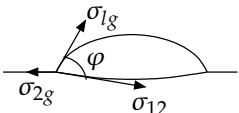
## 5.3.6. Grenzflächeneffekte

## Oberflächenspannung

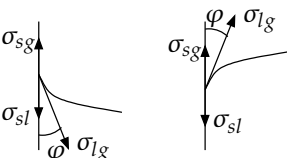
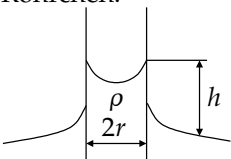
	$\sigma = \frac{F}{l}$ $\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$ <p>Kraft um Draht zu heben:</p> $F = 2\sigma l + m_{Draht}g$	<table> <tr> <td><math>\sigma</math></td><td>Oberflächen- spannung</td><td><math>\left[\frac{N}{m}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>F</math></td><td>Kraft</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr> <td><math>l</math></td><td>Länge</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Kontaktfläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>W</math></td><td>Arbeit</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Erdbeschl.</td><td><math>= \left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td></td><td>9.81</td><td></td></tr> </table>	$\sigma$	Oberflächen- spannung	$\left[\frac{N}{m}\right]$	$F$	Kraft	$[N]$	$l$	Länge	$[m]$	$A$	Kontaktfläche	$[m^2]$	$W$	Arbeit	$[J]$	$g$	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$		9.81	
$\sigma$	Oberflächen- spannung	$\left[\frac{N}{m}\right]$																					
$F$	Kraft	$[N]$																					
$l$	Länge	$[m]$																					
$A$	Kontaktfläche	$[m^2]$																					
$W$	Arbeit	$[J]$																					
$g$	Erdbeschl.	$= \left[\frac{m}{s^2}\right]$																					
	9.81																						

## 5. MECHANIK DEFORMIERBARER KÖRPER

### Grenzflächenspannung

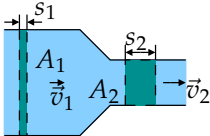
<p>Flüssigkeit auf Festkörper</p> <p>Benetzung:</p>  <p>nicht Benetzung:</p>  <p>Flüssigkeit auf Flüssigkeit</p> 	<p>Benetzung: <math>\varphi &lt; 90^\circ</math>  Nicht Benetzung: <math>\varphi &gt; 90^\circ</math>  Flüssigkeit auf Festkörper</p> $\cos(\varphi) = \frac{\sigma_{sg} - \sigma_{sl}}{\sigma_{lg}}$ <p>Flüssigkeit auf Flüssigkeit</p> $\cos(\varphi) = \frac{\sigma_{2g}^2 - \sigma_{lg}^2 - \sigma_{-2}}{2\sigma_{lg}\sigma_{l2}}$	<p><math>\varphi</math>      Kontaktwinkel <math>[rad]</math>  <math>\sigma</math>      Zugspannung <math>[\frac{N}{m}]</math>  <math>\sigma_{sl}</math>    <math>\sigma</math> fest, flüssig <math>[\frac{N}{m}]</math>  <math>\sigma</math>      <math>\sigma</math> fest, Gas <math>[\frac{N}{m}]</math>  <math>\sigma</math>      <math>\sigma</math> flüssig, Gas <math>[\frac{N}{m}]</math></p>
--	--	---

### Kapillarität

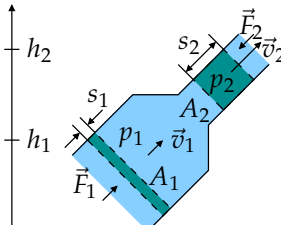
<p>Benetzung:      Nicht Benetzung:</p>  <p>Röhrchen:</p> 	$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$	<p><math>\sigma</math>      Zugspannung <math>[\frac{N}{m}]</math>  <math>h</math>      Höhe <math>[m]</math>  <math>r</math>      Radius <math>[m]</math>  <math>\rho</math>      Dichte <math>[\frac{kg}{m^3}]</math>  <math>g</math>      Erdbeschl. = <math>[\frac{m}{s^2}]</math>  9.81</p>
--	--------------------------------	--

## 5.4. Hydrodynamik

### 5.4.1. Kontinuitätsgleichung

	$A_1 v_1 = A_2 v_2$ $\Delta V = A_1 v_1 \Delta t$ $\dot{V} = v A = \text{konst}$ $s_1 = v_1 \Delta t$ $s_2 = v_2 \Delta t$	<table> <tr> <td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>Geschw.</td><td><math>[\frac{m}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>s</math></td><td>Strecke</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Volumen</td><td><math>[m^3]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> </table>	$A$	Fläche	$[m^2]$	$v$	Geschw.	$[\frac{m}{s}]$	$s$	Strecke	$[m]$	$V$	Volumen	$[m^3]$	$t$	Zeit	$[s]$
$A$	Fläche	$[m^2]$															
$v$	Geschw.	$[\frac{m}{s}]$															
$s$	Strecke	$[m]$															
$V$	Volumen	$[m^3]$															
$t$	Zeit	$[s]$															

### 5.4.2. Bernoulli Gleichung (Energieerhaltung)

	$\underbrace{p_1}_{p_{\text{statisch}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho v_1^2}_{p_{\text{dynamisch}}} + \underbrace{gh_1 \rho}_{p_{\text{schwer}}} = \underbrace{p_2}_{p_{\text{statisch}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho v_2^2}_{p_{\text{dynamisch}}} + \underbrace{gh_2 \rho}_{p_{\text{schwer}}}$ $p_1 + \frac{1}{2} \rho v^2 + gh\rho = \text{konst.}$ <p>Mit Berücksichtigung der Reibung:</p> $\underbrace{p_1}_{p_{\text{statisch}}} + \underbrace{\alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2}}_{p_{\text{dynamisch}}} + \underbrace{gh_1 \rho}_{p_{\text{schwer}}} = \underbrace{p_2}_{p_{\text{statisch}}} + \underbrace{\alpha_2 \frac{\rho v_2^2}{2}}_{p_{\text{dynamisch}}} + \underbrace{gh_2 \rho}_{p_{\text{schwer}}}$ <p>Laminar: <math>\alpha = 2</math>  Turbulent: <math>\alpha \approx 1</math></p>	<table> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>Geschw.</td><td><math>[\frac{m}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>h</math></td><td>Höhe</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\rho</math></td><td>Dichte</td><td><math>[\frac{kg}{m^3}]</math></td></tr> <tr> <td><math>F</math></td><td>Kraft</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr> <td><math>\alpha</math></td><td>Korrekturfaktor</td><td><math>[1]</math></td></tr> </table>	$p$	Druck	$[Pa]$	$v$	Geschw.	$[\frac{m}{s}]$	$h$	Höhe	$[m]$	$\rho$	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$	$F$	Kraft	$[N]$	$\alpha$	Korrekturfaktor	$[1]$
$p$	Druck	$[Pa]$																		
$v$	Geschw.	$[\frac{m}{s}]$																		
$h$	Höhe	$[m]$																		
$\rho$	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$																		
$F$	Kraft	$[N]$																		
$\alpha$	Korrekturfaktor	$[1]$																		

## 5.5. Reale Strömung

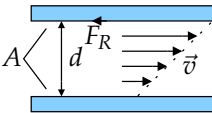
### 5.5.1. Zirkulation

	$\Gamma = \oint \vec{v} d\vec{s}$	$\Gamma$ Zirkulation $\left[\frac{m^2}{s}\right]$
		$v$ Geschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$
		$s$ Strecke $[m]$

### 5.5.2. Vortizität

	$\vec{\omega} = \text{rot} \vec{v}$	$\omega$ Vortizität $\left[\frac{1}{s}\right]$
	Rotation der Geschwindigkeit	$v$ Geschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$

### 5.5.3. Newtonsches Reibungsgesetz

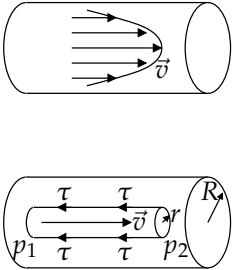
	$\tau = \eta \frac{dv}{dz}$	$\tau$ Schubspan. $\left[\frac{N}{m^2}\right]$
	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$	$v$ Geschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$
	$\varphi = \frac{1}{\eta}$	$\eta$ Dynamische Viskosität $[Pas]$
		$\nu$ Kinetische Viskosität $\left[\frac{m^2}{s}\right]$
		$\rho$ Dichte $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
		$z$ Abst. Platten $[m]$
		$\varphi$ Fluidität $\left[\frac{1}{Pas}\right]$

## 5.6. Strömungsformen

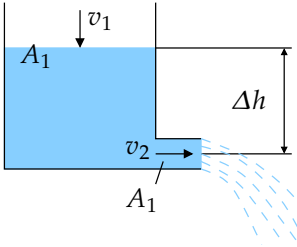
### 5.6.1. Reynolds-Zahl

	$Re = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{v L}{\nu}$	$Re$ Reynolds-Zahl $[1]$
	Im Rohr:	$\rho$ Dichte $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
	$Re = \frac{\rho v d}{\eta} = \frac{v d}{\nu}$	$v$ Geschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$
		$L$ Linearabm. $[m]$
		$d$ Rohr-Ø $[m]$
		$\eta$ Dyn. Visk. $[Pas]$
	$Re_{kritisch} = 2320$	$\nu$ Kin. Visk. $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

5.6.2. Laminare Strömung ( $Re < 2320$ )

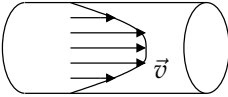
<p>Die Strömung ist laminar, wenn die Reynolds-Zahl <math>Re &lt; 2320</math> ist.</p> 	<p>Umströmte Kugel:</p> $F_R = 6\pi\eta Rv$ <p>Kugelgeschwindigkeit:</p> $v_{Kugel} = \frac{2R^2g(\rho_K - \rho_{Fl})}{9\eta}$ <p>Fluidzylinder in Fluid:</p> $v_{Zylinder} = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta}(R^2 - r^2)$ <p>Durchflussmenge:</p> $\dot{V} = \frac{\pi\Delta p R^4}{8\eta l}$ $\Delta p = p_1 - p_2$ <p>Volumenfluss:</p> $V = \frac{\pi\Delta p R^4}{8\eta l}t$ <p>Druckabfall im glatten Rohr:</p> $\Delta p = \lambda_l \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}, \quad \lambda_l = \frac{64}{Re}$ <p>Reibungskraft auf Rohr:</p> $F_R = \Delta p R^2 \pi = 8\pi\eta l v$	<p><math>F_R</math> Reibungskraft <math>[N]</math></p> <p><math>v</math> Geschw. <math>[\frac{m}{s}]</math></p> <p><math>r</math> Radius Zylinder <math>[m]</math></p> <p><math>R</math> Radius Kugel, Rohr <math>[m]</math></p> <p><math>\eta</math> Dynamische Viskosität <math>[Pas]</math></p> <p><math>\rho</math> Dichte <math>[\frac{kg}{m^3}]</math></p> <p><math>Re</math> Reynolds-Zahl <math>[1]</math></p> <p><math>\rho</math> Dichte <math>[\frac{kg}{m^3}]</math></p> <p><math>l</math> Rohrlänge <math>[m]</math></p> <p><math>V</math> Volumen <math>[m^3]</math></p> <p><math>d</math> Rohr-<math>\emptyset</math> <math>[m]</math></p> <p><math>\lambda</math> Widerstandszahl <math>[1]</math></p> <p><math>p</math> Druck <math>[Pa]</math></p> <p><math>g</math> Erdbeschl. = <math>9.81</math> <math>[\frac{m}{s^2}]</math></p>
--	---	--

## 5.6.3. Volumenstrom

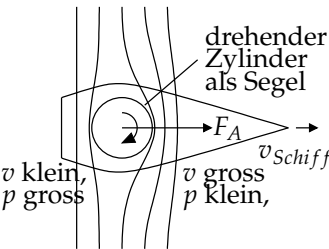
	<p><math>A_1 \gg A_2</math></p> <p><math>v_1 \approx 0</math></p> <p><math>v_2 = \sqrt{2gh}</math></p> <p>Volumenstrom:</p> $\dot{V} = a_2 v_2$	<p><math>h</math> Höhe <math>[m]</math></p> <p><math>v</math> Geschw. <math>[\frac{m}{s}]</math></p> <p><math>V</math> Volumen <math>[m^3]</math></p> <p><math>A</math> Fläche <math>[m^2]</math></p> <p><math>t</math> Zeit <math>[s]</math></p> <p><math>g</math> Erdbeschl. = <math>9.81</math> <math>[\frac{m}{s^2}]</math></p>
---	---	---

## 5. MECHANIK DEFORMIERBARER KÖRPER

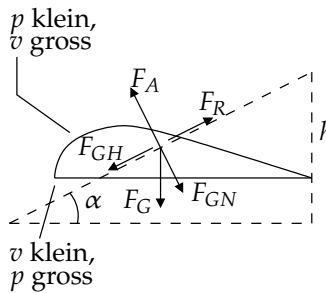
### 5.6.4. Turbulente Strömung ( $Re > 2320$ )

<p>Die Strömung ist turbulent, wenn die Reynolds-Zahl <math>Re &gt; 2320</math> ist.</p> 	<p>Druckwiderstand:</p> $F_D = \frac{c_W \rho v^2}{2} A$ <p>Druckabfall im glatten Rohr:</p> $\Delta p = \lambda_t \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}, \quad \lambda_t = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}}$	<p><math>F_D</math> Druckwiderst. <math>[N]</math>  <math>v</math> Geschw. <math>\left[\frac{m}{s}\right]</math>  <math>A</math> Angriffsfläche <math>[m^2]</math>  <math>c_W</math> Widerstandskoeffizient <math>[1]</math>  <math>\rho</math> Dichte <math>\left[\frac{kg}{m^3}\right]</math>  <math>Re</math> Reynolds-Zahl <math>[1]</math>  <math>\rho</math> Dichte <math>\left[\frac{kg}{m^3}\right]</math>  <math>l</math> Rohrlänge <math>[m]</math>  <math>d</math> Rohr-<math>\emptyset</math> <math>[m]</math>  <math>\lambda</math> Widerstandszahl <math>[1]</math>  <math>p</math> Druck <math>[Pa]</math>  <math>g</math> Erdbeschl. <math>= \left[\frac{m}{s^2}\right]</math>  9.81</p>
--	--	--

### 5.7. Dynamischer Auftrieb

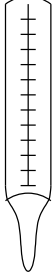
<p>Beispiel: Schiff mit Zylinder-Segel:</p> 	<p>Bei Zylinderform:</p> $F_A = \rho l v \Gamma$ $\Gamma = 4\pi^2 r^2 f$	<p><math>F_A</math> Auftriebskraft <math>[N]</math>  <math>l</math> Zylinderlänge <math>[m]</math>  <math>r</math> Radius <math>[m]</math>  <math>v</math> Fluidgeschw. <math>\left[\frac{m}{s}\right]</math>  <math>f</math> Drehfrequenz Zylinder <math>\left[\frac{1}{s}\right]</math>  <math>\rho</math> Dichte <math>\left[\frac{kg}{m^3}\right]</math>  <math>\Gamma</math> Zirkulation <math>\left[\frac{m^2}{s}\right]</math></p>
---	--	---

## 5.7.1. Tragflügel

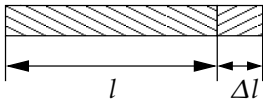
<p>Tragflügel:</p>  <p><math>p</math> klein, <math>v</math> gross</p> <p><math>v</math> klein, <math>p</math> gross</p>	<p>Auftrieb:</p> $F_A = c_A \frac{\rho v^2}{2} A_T$ <p>Induzierter Widerstand:</p> $F_W = c_W \frac{\rho v^2}{2} A_T$ $F_R = F_{GH} = F_G \sin(\alpha)$ $F_A = F_{GN} = F_G \cos(\alpha)$ $\frac{c_W}{c_A} = \frac{\text{Höhenverlust}}{\text{MeterFlug}}$	<table> <tr> <td><math>F_A</math></td> <td>Auftriebskraft</td> <td><math>[N]</math></td> </tr> <tr> <td><math>F_W</math></td> <td>Widerstands- kraft</td> <td><math>[N]</math></td> </tr> <tr> <td><math>c_A</math></td> <td>Auftriebskoef- fizient</td> <td><math>[1]</math></td> </tr> <tr> <td><math>c_W</math></td> <td>Widerstands- koeffizient</td> <td><math>[1]</math></td> </tr> <tr> <td><math>v</math></td> <td>Geschw.</td> <td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td> </tr> <tr> <td><math>A_T</math></td> <td>Fläche aus Anströmrich- tung gesehen</td> <td><math>[m^2]</math></td> </tr> <tr> <td><math>\rho</math></td> <td>Dichte Fluid</td> <td><math>\left[\frac{kg}{m^3}\right]</math></td> </tr> <tr> <td><math>\alpha</math></td> <td>Gleitwinkel</td> <td><math>[rad]</math></td> </tr> </table>	$F_A$	Auftriebskraft	$[N]$	$F_W$	Widerstands- kraft	$[N]$	$c_A$	Auftriebskoef- fizient	$[1]$	$c_W$	Widerstands- koeffizient	$[1]$	$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$A_T$	Fläche aus Anströmrich- tung gesehen	$[m^2]$	$\rho$	Dichte Fluid	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	$\alpha$	Gleitwinkel	$[rad]$
$F_A$	Auftriebskraft	$[N]$																								
$F_W$	Widerstands- kraft	$[N]$																								
$c_A$	Auftriebskoef- fizient	$[1]$																								
$c_W$	Widerstands- koeffizient	$[1]$																								
$v$	Geschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																								
$A_T$	Fläche aus Anströmrich- tung gesehen	$[m^2]$																								
$\rho$	Dichte Fluid	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$																								
$\alpha$	Gleitwinkel	$[rad]$																								

## 6. Wärmelehre

### 6.1. Temperatur

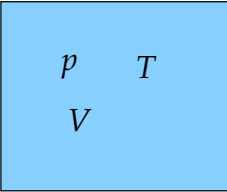
	<p>Absolute Temperatur:</p> $T = \frac{2}{3k} \bar{E}_{kin}$ $\bar{E}_{kin} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$ <p>Umrechnungen:</p> $T(K) = T(C) + 273.15$ $T(F) = \frac{9}{5} T(C) + 32$ $T(C) = \frac{5}{9} (T(F) - 32)$	<table> <tr> <td><math>T</math></td><td>Temperatur</td><td><math>[K]</math></td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>Boltzmann-konst.</td><td><math>[\frac{J}{K}]</math></td></tr> <tr> <td></td><td></td><td><math>1.381E^{-23}</math></td></tr> <tr> <td><math>m</math></td><td>Masse</td><td><math>[kg]</math></td></tr> <tr> <td><math>E_{kin}</math></td><td>kinetische Energie der Gasatome</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>Geschwindigkeit</td><td><math>[\frac{m}{s}]</math></td></tr> <tr> <td></td><td>Kelvin</td><td><math>[K]</math></td></tr> <tr> <td></td><td>Celcius</td><td><math>[^{\circ}C]</math></td></tr> <tr> <td></td><td>Fahrenheit</td><td><math>[F]</math></td></tr> </table>	$T$	Temperatur	$[K]$	$k$	Boltzmann-konst.	$[\frac{J}{K}]$			$1.381E^{-23}$	$m$	Masse	$[kg]$	$E_{kin}$	kinetische Energie der Gasatome	$[J]$	$v$	Geschwindigkeit	$[\frac{m}{s}]$		Kelvin	$[K]$		Celcius	$[^{\circ}C]$		Fahrenheit	$[F]$
$T$	Temperatur	$[K]$																											
$k$	Boltzmann-konst.	$[\frac{J}{K}]$																											
		$1.381E^{-23}$																											
$m$	Masse	$[kg]$																											
$E_{kin}$	kinetische Energie der Gasatome	$[J]$																											
$v$	Geschwindigkeit	$[\frac{m}{s}]$																											
	Kelvin	$[K]$																											
	Celcius	$[^{\circ}C]$																											
	Fahrenheit	$[F]$																											

### 6.2. Ausdehnung von Materialien

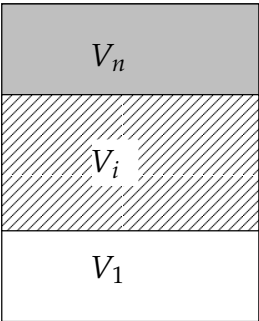
	<p>Längenausdehnung:</p> $\Delta l = \alpha l \Delta T$ <p>Volumenausdehnung:</p> $\Delta V = \gamma V \Delta T$ $\gamma = 3\alpha = \frac{\Delta V}{V \Delta T}$ $\alpha = \frac{\Delta \gamma}{\gamma \Delta T}$ $\sigma = E \alpha \Delta T = E \frac{\Delta l}{l}$	<table> <tr> <td><math>l</math></td><td>Länge</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Volumen</td><td><math>[m^3]</math></td></tr> <tr> <td><math>\alpha</math></td><td>Längenausd. koef.</td><td><math>[\frac{1}{K}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\gamma</math></td><td>Volumenausd. koef.</td><td><math>[m^3]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Delta T</math></td><td>Temperatur</td><td><math>[K]</math></td></tr> <tr> <td><math>\sigma</math></td><td>Spannung bzw. Druck</td><td><math>[\frac{N}{m^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>E</math></td><td>Elastizitätsmodul</td><td><math>[\frac{N}{m^2}]</math></td></tr> </table>	$l$	Länge	$[m]$	$V$	Volumen	$[m^3]$	$\alpha$	Längenausd. koef.	$[\frac{1}{K}]$	$\gamma$	Volumenausd. koef.	$[m^3]$	$\Delta T$	Temperatur	$[K]$	$\sigma$	Spannung bzw. Druck	$[\frac{N}{m^2}]$	$E$	Elastizitätsmodul	$[\frac{N}{m^2}]$
$l$	Länge	$[m]$																					
$V$	Volumen	$[m^3]$																					
$\alpha$	Längenausd. koef.	$[\frac{1}{K}]$																					
$\gamma$	Volumenausd. koef.	$[m^3]$																					
$\Delta T$	Temperatur	$[K]$																					
$\sigma$	Spannung bzw. Druck	$[\frac{N}{m^2}]$																					
$E$	Elastizitätsmodul	$[\frac{N}{m^2}]$																					



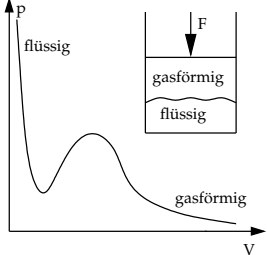
## 6.3. Ideale Gase

	$pV = \text{konst.}$ $\frac{V}{T} = \text{konst.}$ $\frac{pV}{T} = \text{konst.}$ $pV = NkT$ $N = nN_A$ $R = N_A k$ $pV = nRT$ $m = nM$ $\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$  Volumen eines idealen Gases: $22.4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$ bei $p = 10133 \text{ Pa}$ und $T = 273.15 \text{ K}$	<p> <math>p</math> Druck <math>[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}]</math>  <math>V</math> Volumen <math>[\text{m}^3]</math>  <math>T</math> Temperatur <math>[\text{K}]</math>  <math>N</math> Anz. Moleküle  <math>n</math> Anz. Mol  <math>m</math> Gasmasse <math>[\text{kg}]</math>  <math>M</math> Molmasse <math>[\text{kg}]</math>  <math>\rho</math> Dichte <math>[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]</math>  <math>N_A</math> Anz. Atome pro 12g C  <math>= 6,022 \cdot 10^{23}</math>  <math>k</math> Boltzmann-konst. <math>[\frac{\text{J}}{\text{K}}]</math>  <math>= 1,381 \cdot 10^{-23}</math>  <math>R</math> Univers.-Gaskonst. <math>[\frac{\text{J}}{\text{molK}}]</math>  <math>= 8,314</math> </p>
---	--	---

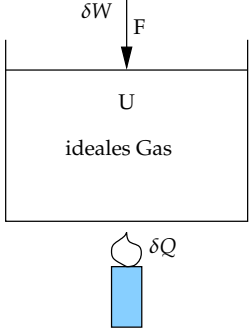
## 6.4. Gemische idealer Gase

	$\sum_{i=1}^z p_i = p$ $p_i = q_i p$ $M = \sum_{i=1}^z q_i M_i$ $\mu_i = \frac{M_i}{M} q_i$	<p> <math>p</math> (Gesamt-) Druck <math>[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}]</math>  <math>p_i</math> Partialdruck <math>[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}]</math>  <math>q</math> Konzentration <math>[\frac{1}{\text{K}}]</math>  <math>M</math> Molmasse <math>[\text{kg}]</math>  <math>\mu_i</math> Massenkonzentration </p>
---	--	--

## 6.5. Reale Gase

	$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$ $p = n \frac{RT}{V - nb} - n^2 \frac{a}{V^2}$ $a = 3p_k V_{mk}^2 = \frac{9}{8} RT_k V_{mk}$ $b = \frac{V_{mk}}{3} = \frac{RT_k}{8p_k}$ $T_k = \frac{8a}{27Rb}$ $p_k = \frac{a}{27b^2}$ $V_{mk} = 3b$	<table> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>\left[\frac{N}{m^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>V_m</math></td><td>Molvolumen</td><td><math>[m^3]</math></td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Univers.-Gaskonst.</td><td><math>\left[\frac{J}{molK}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Temperatur</td><td><math>[K]</math></td></tr> <tr> <td><math>n</math></td><td>Anz. Mol</td><td></td></tr> <tr> <td><math>a</math></td><td>Van der Waal-konst.</td><td><math>[Nm]</math></td></tr> <tr> <td><math>b</math></td><td>Van der Waal-konst.</td><td><math>[m^3]</math></td></tr> <tr> <td><math>T_k</math></td><td>Kritische Temperatur</td><td><math>[K]</math></td></tr> <tr> <td><math>p_k</math></td><td>Kritischer Druck</td><td><math>\left[\frac{N}{m^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>V_{mk}</math></td><td>Kritisches Volumen</td><td><math>[m^3]</math></td></tr> </table>	$p$	Druck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$	$V_m$	Molvolumen	$[m^3]$	$R$	Univers.-Gaskonst.	$\left[\frac{J}{molK}\right]$	$T$	Temperatur	$[K]$	$n$	Anz. Mol		$a$	Van der Waal-konst.	$[Nm]$	$b$	Van der Waal-konst.	$[m^3]$	$T_k$	Kritische Temperatur	$[K]$	$p_k$	Kritischer Druck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$	$V_{mk}$	Kritisches Volumen	$[m^3]$
$p$	Druck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$																														
$V_m$	Molvolumen	$[m^3]$																														
$R$	Univers.-Gaskonst.	$\left[\frac{J}{molK}\right]$																														
$T$	Temperatur	$[K]$																														
$n$	Anz. Mol																															
$a$	Van der Waal-konst.	$[Nm]$																														
$b$	Van der Waal-konst.	$[m^3]$																														
$T_k$	Kritische Temperatur	$[K]$																														
$p_k$	Kritischer Druck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$																														
$V_{mk}$	Kritisches Volumen	$[m^3]$																														

## 6.6. Wärme

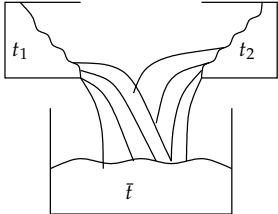
	$dU = \delta W + \delta Q$ $\delta Q = CdT$ $\delta Q = cmdT$ $\delta Q = C_m n dT$ $C = mc$ $C_m = Mc$ $C_{mp} - C_{mv} = R$ $m = nM$	<table> <tr> <td><math>U</math></td><td>Innere Energie</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>W</math></td><td>Arbeit</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>Q</math></td><td>Wärme</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>C</math></td><td>Wärmekapazität</td><td><math>\left[\frac{J}{K}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>C_m</math></td><td>Molare Wärmekapazität</td><td><math>\left[\frac{J}{molK}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>C_{mv}</math></td><td><math>C_m</math>, isochor<sup>1</sup></td><td><math>\left[\frac{J}{molK}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>C_{mp}</math></td><td><math>C_m</math>, isobar<sup>2</sup></td><td><math>\left[\frac{J}{molK}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>c</math></td><td>spez. Wärmekapazität</td><td><math>\left[\frac{J}{kgK}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>m</math></td><td>Masse</td><td><math>[kg]</math></td></tr> <tr> <td><math>M</math></td><td>Molmasse</td><td><math>\left[\frac{kg}{mol}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>n</math></td><td>Anz. Mol</td><td></td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Univers.-Gk.= 8.314</td><td><math>\left[\frac{J}{molK}\right]</math></td></tr> </table>	$U$	Innere Energie	$[J]$	$W$	Arbeit	$[J]$	$Q$	Wärme	$[J]$	$C$	Wärmekapazität	$\left[\frac{J}{K}\right]$	$C_m$	Molare Wärmekapazität	$\left[\frac{J}{molK}\right]$	$C_{mv}$	$C_m$ , isochor <sup>1</sup>	$\left[\frac{J}{molK}\right]$	$C_{mp}$	$C_m$ , isobar <sup>2</sup>	$\left[\frac{J}{molK}\right]$	$c$	spez. Wärmekapazität	$\left[\frac{J}{kgK}\right]$	$m$	Masse	$[kg]$	$M$	Molmasse	$\left[\frac{kg}{mol}\right]$	$n$	Anz. Mol		$R$	Univers.-Gk.= 8.314	$\left[\frac{J}{molK}\right]$
$U$	Innere Energie	$[J]$																																				
$W$	Arbeit	$[J]$																																				
$Q$	Wärme	$[J]$																																				
$C$	Wärmekapazität	$\left[\frac{J}{K}\right]$																																				
$C_m$	Molare Wärmekapazität	$\left[\frac{J}{molK}\right]$																																				
$C_{mv}$	$C_m$ , isochor <sup>1</sup>	$\left[\frac{J}{molK}\right]$																																				
$C_{mp}$	$C_m$ , isobar <sup>2</sup>	$\left[\frac{J}{molK}\right]$																																				
$c$	spez. Wärmekapazität	$\left[\frac{J}{kgK}\right]$																																				
$m$	Masse	$[kg]$																																				
$M$	Molmasse	$\left[\frac{kg}{mol}\right]$																																				
$n$	Anz. Mol																																					
$R$	Univers.-Gk.= 8.314	$\left[\frac{J}{molK}\right]$																																				

<sup>1</sup>Isochore Prozesse sind Zustandsänderungen bei konstantem Volumen<sup>2</sup>Isobare Prozesse sind Zustandsänderungen bei konstantem Druck

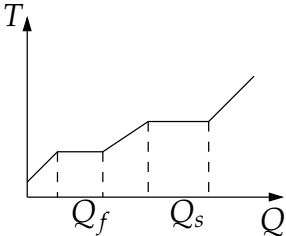
### 6.6.1. Molare Wärme kristalliner Festkörper

	falls $T > \Theta_D$ : $C_{mv} = 3R$ falls $T \ll \Theta_D$ : $C_{mv} = \frac{12\pi^4}{5} R \left( \frac{T}{\Theta_D} \right)^3$	$C_{mv}$ $C_m$ , isochor $\left[ \frac{J}{molK} \right]$ $T$ Temperatur $[K]$ $\Theta_D$ Debye-Temp. $[K]$ $R$ Univers.-Gaskonst. $\left[ \frac{J}{molK} \right]$
--	---	--

### 6.6.2. Austausch von Wärmemengen

	$\bar{t} = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 + \dots}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots}$	$\bar{t}$ Mischtemp. $[K]$ $t$ Temperatur $[K]$ $m$ Masse $[kg]$ $c$ spez. Wärmekapazität $\left[ \frac{J}{kgK} \right]$
--	---	---

## 6.7. Phasen und Phasenübergänge

	Schmelzen: $Q = mQ_s \quad q_s = \frac{Q_s}{m}$ Verdampfen: $Q = mQ_v \quad q_v = \frac{Q_v}{m}$ $\frac{dp_s}{dT} = \frac{q_s}{T \left( \frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_f} \right)}$ $\frac{dp_f}{dT} = \frac{q_f}{T \left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_s} \right)}$	$Q$ Wärme $[J]$ $m$ Masse $[kg]$ $Q_s$ Schmelzenergie $[J]$ $Q_v$ Verdampfenergie $[J]$ $q_s$ spez. Schmelz $Q- \left[ \frac{J}{kg} \right]$ $q_v$ spez. Verdampf $Q- \left[ \frac{J}{kg} \right]$ $p_s$ Dampfdruck $[Pa]$ $p_f$ Schmelzdruck $[Pa]$ $T$ Temperatur $[K]$ $\rho_g$ Dichte Phase gasförmig $\left[ \frac{kg}{m^3} \right]$ $\rho_f$ Dichte Phase flüssig $\left[ \frac{kg}{m^3} \right]$ $\rho_s$ Dichte Phase fest $\left[ \frac{kg}{m^3} \right]$
---	--	---

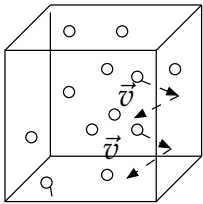
## 6.7.1. Schmelz- und Verdampfungsenergien

Substanz	$T_{\text{schmelz}} [K]$	$Q_s [\frac{kJ}{kg}]$	$T_{\text{verdampf}} [K]$	$Q_v [\frac{kJ}{kg}]$
Blei	600	24,7	2023	858
Brom	266	67,4	332	369
Ethanol	159	109	351	879
Gold	1336	62,8	3081	1701
Helium	-	-	4,2	21
Kohlendioxid	-	-	194,6	573
Kupfer	1356	205	2839	4726
Quecksilber	234	11,3	630	296
Sauerstoff	54,4	13,8	90,2	213
Schwefel	388	38,5	717,75	287
Silber	1234	105	2436	2323
Stickstoff	63	25,7	77,35	199
Wasser	273,15	333,5	373,15	2257
Zink	692	102	1184	1768

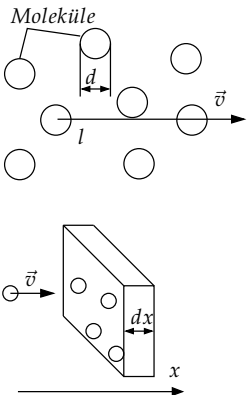
## 6.8. Luftfeuchtigkeit

	$f = \frac{m_W}{V}$ $f_r = \frac{m_W}{m_s} = \frac{p_D}{p_s} (\cdot 100\%)$ $p_s = p_{s0} 10^{\frac{7,5\vartheta}{\vartheta+237}} \quad , \vartheta \geq 0^\circ\text{C}$ $p_s = p_{s0} 10^{\frac{9,5\vartheta}{\vartheta+265,5}} \quad , \vartheta \leq 0^\circ\text{C}$ $p_D = p_s(\vartheta_d)$ $\vartheta = \frac{237 \log \frac{p_s}{6,107}}{7,5 - \log \frac{p_s}{6,107}} , p_s \geq 610,7 \text{ Pa}$ $\vartheta = \frac{265,5 \log \frac{p_s}{6,107}}{9,5 - \log \frac{p_s}{6,107}} , p_s \leq 610,7 \text{ Pa}$	$f$ Luftfeuchtigkeit absolut $[\frac{kg}{m^3}]$ $f_r$ Luftfeuchtigkeit relativ $[1]$ $m_W$ Wasserdampfmasse $[kg]$ $m_s$ Dampfmasse im Sättigungszustand $[\frac{kg}{m^3}]$ $V$ Volumen $[m^3]$ $p_D$ Partialdruck Wasserdampf $[Pa]$ $p_s$ Sättigungsdruck Wasserdampf $[Pa]$ $\vartheta$ Temperatur $[^\circ\text{C}]$ $p_{s0}$ 61070 $[Pa]$
--	--	--

## 6.9. Kinetische Gastheorie

 <p>Molekül</p> <p>Einatomige Moleküle haben keine Rotationsenergie, deshalb ist in diesem Fall: <math>E_{kin} = E_{trans}</math></p>	<p>Translationsenergie:</p> $\bar{E}_{kin} = N \frac{m \bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} N k T = \frac{3}{2} n R T$ $U = N_A \bar{E} = N_A \frac{f}{2} k T = \frac{f}{2} R T$ $U = E_{kin} + E_{pot}$ $pV = \frac{2}{3} N_A \frac{m \bar{v}^2}{2}$ <p>Mittlere Energie pro Molekül:</p> $\bar{E} = \frac{f}{2} k T$ $\bar{E}_{kin} \approx T_{abs}$ $C_{mv} = \frac{f}{2} R$ <p>f=3 bei einatomigen Molekülen f=5 bei zweiatomigen Molekülen f=6 bei mehratomigen Molekülen Volumen eines idealen Gases: <math>22.4 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{mol}</math> bei <math>p = 10133 Pa</math> und <math>T = 273.15 K</math></p>	<table> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Volumen</td><td><math>[m^3]</math></td></tr> <tr> <td><math>N</math></td><td>Anz. Moleküle</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>n</math></td><td>Anz. Mol</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>Molekül Geschwindigkeit</td><td><math>[\frac{m}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>E_{kin}</math></td><td>Kinetische Energie der Moleküle</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>E_{pot}</math></td><td>Potentielle Energie</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>U</math></td><td>Innere Energie</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>T_{abs}</math></td><td>Temperatur absolut</td><td><math>[K]</math></td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Temperatur</td><td><math>[K]</math></td></tr> <tr> <td><math>f</math></td><td>Freiheitsgrad</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>m</math></td><td>Masse</td><td><math>[kg]</math></td></tr> <tr> <td><math>C_{mv}</math></td><td>Molare Wärmekapazität</td><td><math>[\frac{J}{molK}]</math></td></tr> <tr> <td><math>N_A</math></td><td>Anz. Atome pro 12g C</td><td><math>\frac{1}{mol}</math></td></tr> <tr> <td></td><td></td><td><math>= 6,022 \cdot 10^{23}</math></td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>Boltzmann-konst.</td><td><math>[\frac{J}{K}]</math></td></tr> <tr> <td></td><td></td><td><math>= 1,381 \cdot 10^{-23}</math></td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Univers.-Gk.</td><td><math>[\frac{J}{molK}]</math></td></tr> <tr> <td></td><td></td><td><math>= 8.314</math></td></tr> </table>	$p$	Druck	$[Pa]$	$V$	Volumen	$[m^3]$	$N$	Anz. Moleküle	$[1]$	$n$	Anz. Mol	$[1]$	$v$	Molekül Geschwindigkeit	$[\frac{m}{s}]$	$E_{kin}$	Kinetische Energie der Moleküle	$[J]$	$E_{pot}$	Potentielle Energie	$[J]$	$U$	Innere Energie	$[J]$	$T_{abs}$	Temperatur absolut	$[K]$	$T$	Temperatur	$[K]$	$f$	Freiheitsgrad	$[1]$	$m$	Masse	$[kg]$	$C_{mv}$	Molare Wärmekapazität	$[\frac{J}{molK}]$	$N_A$	Anz. Atome pro 12g C	$\frac{1}{mol}$			$= 6,022 \cdot 10^{23}$	$k$	Boltzmann-konst.	$[\frac{J}{K}]$			$= 1,381 \cdot 10^{-23}$	$R$	Univers.-Gk.	$[\frac{J}{molK}]$			$= 8.314$
$p$	Druck	$[Pa]$																																																									
$V$	Volumen	$[m^3]$																																																									
$N$	Anz. Moleküle	$[1]$																																																									
$n$	Anz. Mol	$[1]$																																																									
$v$	Molekül Geschwindigkeit	$[\frac{m}{s}]$																																																									
$E_{kin}$	Kinetische Energie der Moleküle	$[J]$																																																									
$E_{pot}$	Potentielle Energie	$[J]$																																																									
$U$	Innere Energie	$[J]$																																																									
$T_{abs}$	Temperatur absolut	$[K]$																																																									
$T$	Temperatur	$[K]$																																																									
$f$	Freiheitsgrad	$[1]$																																																									
$m$	Masse	$[kg]$																																																									
$C_{mv}$	Molare Wärmekapazität	$[\frac{J}{molK}]$																																																									
$N_A$	Anz. Atome pro 12g C	$\frac{1}{mol}$																																																									
		$= 6,022 \cdot 10^{23}$																																																									
$k$	Boltzmann-konst.	$[\frac{J}{K}]$																																																									
		$= 1,381 \cdot 10^{-23}$																																																									
$R$	Univers.-Gk.	$[\frac{J}{molK}]$																																																									
		$= 8.314$																																																									

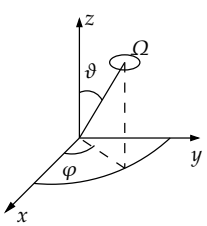
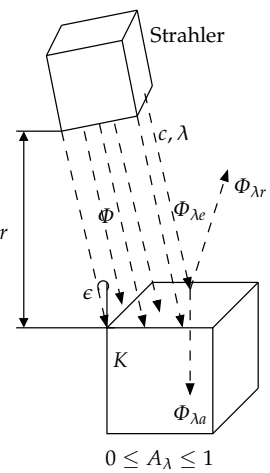
## 6.9.1. Mittlere freie Weglänge, Wärmeleitung, Diffusion und Viskosität

	$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}$ $N = N_0 e^{-x/\bar{\lambda}}$ <p>Wahrscheinlichkeit <math>f(x)dx</math>, dass ein Molekül einen freien Weg auf der Strecke <math>dx</math> hat:</p> $f(x)dx = n\sigma e^{-x/\bar{\lambda}}dx$ $\sigma = \pi d^2$ $\lambda_Q = \frac{1}{6}n\bar{v}\bar{\lambda}fk$ $D = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}$ $\eta = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\rho$	<table> <tr> <td><math>\bar{\lambda}</math></td><td>Mittlere freie Weglänge zwischen Molekülzusammenstoss</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>n</math></td><td>Anz. Moleküle (<math>\neq</math> Anz. Mole)</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>d</math></td><td><math>\emptyset</math>- Molekül</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>N</math></td><td>Anz. Moleküle durch Schicht <math>dx</math></td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>\sigma</math></td><td>Querschnitt</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>\bar{\lambda}_Q</math></td><td>Wärmeleitungskoeff.</td><td><math>[\frac{W}{m^2K}]</math></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>v - Moleküle</td><td><math>[m/s]</math></td></tr> <tr> <td><math>f</math></td><td>Freiheitsgrad</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>Boltzmann-konst. = <math>1,381 \cdot 10^{-23}</math></td><td><math>[\frac{J}{K}]</math></td></tr> <tr> <td><math>D</math></td><td>Diffusionskonst.</td><td><math>[\frac{m^2}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\eta</math></td><td>Viskosität</td><td><math>[\frac{kg}{\eta s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\rho</math></td><td>Dichte</td><td><math>[\frac{kg}{m^3}]</math></td></tr> </table>	$\bar{\lambda}$	Mittlere freie Weglänge zwischen Molekülzusammenstoss	$[m]$	$n$	Anz. Moleküle ( $\neq$ Anz. Mole)	$[1]$	$d$	$\emptyset$ - Molekül	$[m]$	$N$	Anz. Moleküle durch Schicht $dx$	$[1]$	$\sigma$	Querschnitt	$[m^2]$	$\bar{\lambda}_Q$	Wärmeleitungskoeff.	$[\frac{W}{m^2K}]$	$v$	v - Moleküle	$[m/s]$	$f$	Freiheitsgrad	$[1]$	$k$	Boltzmann-konst. = $1,381 \cdot 10^{-23}$	$[\frac{J}{K}]$	$D$	Diffusionskonst.	$[\frac{m^2}{s}]$	$\eta$	Viskosität	$[\frac{kg}{\eta s}]$	$\rho$	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$
$\bar{\lambda}$	Mittlere freie Weglänge zwischen Molekülzusammenstoss	$[m]$																																				
$n$	Anz. Moleküle ( $\neq$ Anz. Mole)	$[1]$																																				
$d$	$\emptyset$ - Molekül	$[m]$																																				
$N$	Anz. Moleküle durch Schicht $dx$	$[1]$																																				
$\sigma$	Querschnitt	$[m^2]$																																				
$\bar{\lambda}_Q$	Wärmeleitungskoeff.	$[\frac{W}{m^2K}]$																																				
$v$	v - Moleküle	$[m/s]$																																				
$f$	Freiheitsgrad	$[1]$																																				
$k$	Boltzmann-konst. = $1,381 \cdot 10^{-23}$	$[\frac{J}{K}]$																																				
$D$	Diffusionskonst.	$[\frac{m^2}{s}]$																																				
$\eta$	Viskosität	$[\frac{kg}{\eta s}]$																																				
$\rho$	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$																																				

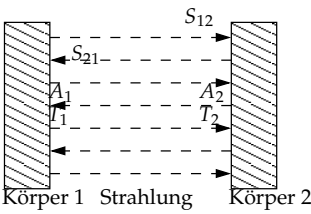
## 6.9.2. Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

	<p>Wahrscheinlichkeit, dass ein Molekül eine Geschwindigkeit zwischen <math>v</math> und <math>v + dv</math> aufweist:</p> $f(v)dv = \sqrt{\frac{2m^3}{\pi k^3 T^3}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$ $v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ $u = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\bar{v}^2}$ $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 2\sqrt{\frac{2RT}{\pi M}}$	<table> <tr> <td><math>f(v)</math></td><td>Dichtefunktion</td><td></td></tr> <tr> <td><math>m</math></td><td>Molekülmasse</td><td><math>[kg]</math></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>v - Moleküle</td><td><math>[m/s]</math></td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>freie Weglänge</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>Boltzmann-konst. = <math>1,381 \cdot 10^{-23}</math></td><td><math>[\frac{J}{K}]</math></td></tr> <tr> <td><math>v_0</math></td><td>v- wahr-scheinlichst</td><td><math>[\frac{m}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>u</math></td><td>spez. <math>\bar{v}</math></td><td><math>[\frac{m}{s}]</math></td></tr> </table>	$f(v)$	Dichtefunktion		$m$	Molekülmasse	$[kg]$	$v$	v - Moleküle	$[m/s]$	$T$	freie Weglänge	$[m]$	$k$	Boltzmann-konst. = $1,381 \cdot 10^{-23}$	$[\frac{J}{K}]$	$v_0$	v- wahr-scheinlichst	$[\frac{m}{s}]$	$u$	spez. $\bar{v}$	$[\frac{m}{s}]$
$f(v)$	Dichtefunktion																						
$m$	Molekülmasse	$[kg]$																					
$v$	v - Moleküle	$[m/s]$																					
$T$	freie Weglänge	$[m]$																					
$k$	Boltzmann-konst. = $1,381 \cdot 10^{-23}$	$[\frac{J}{K}]$																					
$v_0$	v- wahr-scheinlichst	$[\frac{m}{s}]$																					
$u$	spez. $\bar{v}$	$[\frac{m}{s}]$																					

## 6.10. Temperaturstrahlung, Strahlungsgesetze

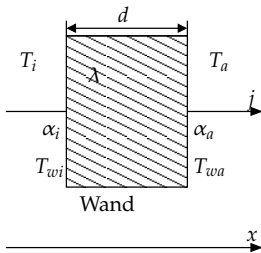
  <p>0 ≤ A<sub>λ</sub> ≤ 1</p>	$\Omega = \frac{A}{R^2} \quad I = \frac{\Phi}{\Omega}$ $E = \frac{\Phi}{A}$ $A_\lambda = \frac{\Phi_{\lambda a}}{\Phi_{\lambda e}}$ $K = \int_{HR} L(\vartheta, \varphi) \cos(\vartheta) d\Omega$ <p>Diffuse Strahlung:</p> $K = L \int_{HR} L \cos(\vartheta) d\Omega = L\pi$ <p>HR = Halbraum : z &gt; 0</p> $\frac{K_\lambda(\lambda, T)}{A_\lambda(\lambda, T)} = f(\lambda, T)$ $K_\lambda = \epsilon_\lambda(\lambda, T) K_{\lambda s}(\lambda, T)$ $\epsilon_\lambda(\lambda, T) \equiv A_\lambda(\lambda, T)$ <p>Körper schwarz: K<sub>s</sub> = σT<sup>4</sup></p> <p>Körper grau: K = εσT<sup>4</sup>, A = ε</p> $P_e = \epsilon_\lambda \sigma A T^4$ $P_{e\text{Netto}} = \epsilon_\lambda \sigma A (T^4 - T_0^4)$ $K_{\nu s}(\nu, T) d\nu = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2 (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)} d\nu$ $K_{\lambda s}(\lambda, T) d\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1)} d\lambda$ $\lambda_{\max} T = b$ $\nu = c/\lambda$ $E_{Str} = \frac{1.05 \cdot 10^{-34} c_0}{\lambda}$	<table> <tr> <td>Ω</td><td>Raumwinkel</td><td>[sr]</td></tr> <tr> <td>A</td><td>Fläche, Flächenausschnitt</td><td>[m<sup>2</sup>]</td></tr> <tr> <td>R</td><td>Kugelradius</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td>I</td><td>Strahlstärke</td><td>[W]</td></tr> <tr> <td>Φ</td><td>Strahlungsstrom</td><td>[W]</td></tr> <tr> <td>E</td><td>Bestrahlungsstärke</td><td>[W/m<sup>2</sup>]</td></tr> <tr> <td>K</td><td>Emmissionsvermögen</td><td>[W/m<sup>2</sup>]</td></tr> <tr> <td>L</td><td>Strahldichte</td><td>[W/m<sup>2</sup>sr]</td></tr> <tr> <td>A<sub>λ</sub></td><td>Absorptionszahl (Schwarzer Körper ⇒ A<sub>λ</sub> = 1)</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>ε<sub>λ</sub></td><td>Emissionsverhältn.</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td>λ</td><td>Wellenlänge</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td>ν</td><td>Frequenz</td><td>[Hz]</td></tr> <tr> <td>T</td><td>Temp. Körper</td><td>[K]</td></tr> <tr> <td>T<sub>0</sub></td><td>Umgebungs-temp.</td><td>[K]</td></tr> <tr> <td>P<sub>e</sub></td><td>Strahlungsleistung</td><td>[W]</td></tr> <tr> <td>E<sub>Str</sub></td><td>Strahlungsenergie</td><td>[J]</td></tr> <tr> <td>k</td><td>Boltzmann-konst.</td><td>[J/K]</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>= 1,381 · 10<sup>-23</sup></td></tr> <tr> <td>σ</td><td>Boltzmann-konst.</td><td>[W/m<sup>2</sup>K]</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>= 5,671 · 10<sup>-8</sup></td></tr> <tr> <td>h</td><td>Plancksche Konst.</td><td>[Js]</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>= 6,626 · 10<sup>-34</sup></td></tr> <tr> <td>b</td><td>Konst.</td><td>[mK]</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>= 2,898 · 10<sup>-3</sup></td></tr> <tr> <td>c<sub>0</sub></td><td>Lichtgeschw. (Vakuum)</td><td>[m/s]</td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>= 299'792'458</td></tr> </table>	Ω	Raumwinkel	[sr]	A	Fläche, Flächenausschnitt	[m <sup>2</sup> ]	R	Kugelradius	[m]	I	Strahlstärke	[W]	Φ	Strahlungsstrom	[W]	E	Bestrahlungsstärke	[W/m <sup>2</sup> ]	K	Emmissionsvermögen	[W/m <sup>2</sup> ]	L	Strahldichte	[W/m <sup>2</sup> sr]	A <sub>λ</sub>	Absorptionszahl (Schwarzer Körper ⇒ A <sub>λ</sub> = 1)	[1]	ε <sub>λ</sub>	Emissionsverhältn.	[1]	λ	Wellenlänge	[m]	ν	Frequenz	[Hz]	T	Temp. Körper	[K]	T <sub>0</sub>	Umgebungs-temp.	[K]	P <sub>e</sub>	Strahlungsleistung	[W]	E <sub>Str</sub>	Strahlungsenergie	[J]	k	Boltzmann-konst.	[J/K]			= 1,381 · 10 <sup>-23</sup>	σ	Boltzmann-konst.	[W/m <sup>2</sup> K]			= 5,671 · 10 <sup>-8</sup>	h	Plancksche Konst.	[Js]			= 6,626 · 10 <sup>-34</sup>	b	Konst.	[mK]			= 2,898 · 10 <sup>-3</sup>	c <sub>0</sub>	Lichtgeschw. (Vakuum)	[m/s]			= 299'792'458
Ω	Raumwinkel	[sr]																																																																														
A	Fläche, Flächenausschnitt	[m <sup>2</sup> ]																																																																														
R	Kugelradius	[m]																																																																														
I	Strahlstärke	[W]																																																																														
Φ	Strahlungsstrom	[W]																																																																														
E	Bestrahlungsstärke	[W/m <sup>2</sup> ]																																																																														
K	Emmissionsvermögen	[W/m <sup>2</sup> ]																																																																														
L	Strahldichte	[W/m <sup>2</sup> sr]																																																																														
A <sub>λ</sub>	Absorptionszahl (Schwarzer Körper ⇒ A <sub>λ</sub> = 1)	[1]																																																																														
ε <sub>λ</sub>	Emissionsverhältn.	[1]																																																																														
λ	Wellenlänge	[m]																																																																														
ν	Frequenz	[Hz]																																																																														
T	Temp. Körper	[K]																																																																														
T <sub>0</sub>	Umgebungs-temp.	[K]																																																																														
P <sub>e</sub>	Strahlungsleistung	[W]																																																																														
E <sub>Str</sub>	Strahlungsenergie	[J]																																																																														
k	Boltzmann-konst.	[J/K]																																																																														
		= 1,381 · 10 <sup>-23</sup>																																																																														
σ	Boltzmann-konst.	[W/m <sup>2</sup> K]																																																																														
		= 5,671 · 10 <sup>-8</sup>																																																																														
h	Plancksche Konst.	[Js]																																																																														
		= 6,626 · 10 <sup>-34</sup>																																																																														
b	Konst.	[mK]																																																																														
		= 2,898 · 10 <sup>-3</sup>																																																																														
c <sub>0</sub>	Lichtgeschw. (Vakuum)	[m/s]																																																																														
		= 299'792'458																																																																														

6.10.1. Strahlungsaustausch

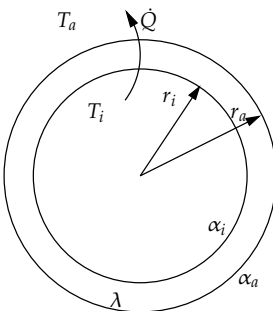
	$j = C_{12}(T_1^4 - T_2^4) = S_{12} - S_{21}$ $j = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2} \sigma$ $C_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \sigma$	<table><tr><td><math>C_{12}</math></td><td>Strahlungsaustauschzahl</td><td><math>\left[\frac{W}{m^2 K^4}\right]</math></td></tr><tr><td><math>T</math></td><td>Temperatur</td><td><math>[K]</math></td></tr><tr><td><math>S</math></td><td>Entropie</td><td><math>\left[\frac{J}{m^2}\right]</math></td></tr><tr><td><math>A</math></td><td>Absortionszahl</td><td><math>[1]</math></td></tr><tr><td><math>\epsilon</math></td><td>Emissionsverhältnis</td><td><math>[K]</math></td></tr><tr><td><math>j</math></td><td>Wärmestromdichte</td><td><math>\left[\frac{W}{m^2}\right]</math></td></tr><tr><td><math>\sigma</math></td><td>Boltzmannkonst.</td><td><math>\left[\frac{W}{mK}\right]</math></td></tr><tr><td></td><td></td><td><math>= 5,671 \cdot 10^{-8}</math></td></tr></table>	$C_{12}$	Strahlungsaustauschzahl	$\left[\frac{W}{m^2 K^4}\right]$	$T$	Temperatur	$[K]$	$S$	Entropie	$\left[\frac{J}{m^2}\right]$	$A$	Absortionszahl	$[1]$	$\epsilon$	Emissionsverhältnis	$[K]$	$j$	Wärmestromdichte	$\left[\frac{W}{m^2}\right]$	$\sigma$	Boltzmannkonst.	$\left[\frac{W}{mK}\right]$			$= 5,671 \cdot 10^{-8}$
$C_{12}$	Strahlungsaustauschzahl	$\left[\frac{W}{m^2 K^4}\right]$																								
$T$	Temperatur	$[K]$																								
$S$	Entropie	$\left[\frac{J}{m^2}\right]$																								
$A$	Absortionszahl	$[1]$																								
$\epsilon$	Emissionsverhältnis	$[K]$																								
$j$	Wärmestromdichte	$\left[\frac{W}{m^2}\right]$																								
$\sigma$	Boltzmannkonst.	$\left[\frac{W}{mK}\right]$																								
		$= 5,671 \cdot 10^{-8}$																								



## 6.11. Wärmetransport



Wärmeübergang	$\alpha$
Wandflächen innen	8
Wandflächen aussen	20
Boden, Decke nach oben	8
Boden, Decke nach unten	6



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T$$

$$I = \dot{Q} = \lambda A \frac{dT}{dx} = jA$$

$$\Delta T = IR$$

$$R = \frac{\Delta x}{\lambda A}$$

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Wandschicht:

$$j = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_{wi} - T_{wa}}{d}$$

Übergangsschicht innen:

$$j = \alpha_i (T_i - T_{wi})$$

Übergangsschicht aussen:

$$j = \alpha_a (T_{wa} - T_a)$$

$$j = k (T_i - T_a)$$

$$\dot{Q}_w = Aj = Ak\Delta T$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \sum_s \frac{d_s}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha_a}} = \frac{j}{\Delta T}$$

Für zylinderförmige Wand:

$$\dot{Q} = 2\pi r l j = 2\pi r_a l k_a \Delta T$$

$$k_a = \frac{1}{r_a \frac{1}{r_i \alpha_i} + \sum_s \frac{1}{\lambda_s} \ln \frac{r_{sa}}{r_{si}} + \frac{1}{r_a \alpha_a}}$$

Wärmebedarf eines Gebäudes:

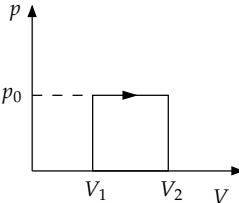
$$Q = \left( \sum_w A_w k_w + \rho c_p \dot{V} \right) G$$

$$G = \int_{\text{Heizsaison}} \Delta T dt$$

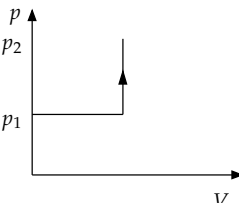
$I$	Wärmestrom	$[W]$
$R$	Wärmewiderstand	$\left[\frac{K}{W}\right]$
$j$	Wärmestromdichte	$\left[\frac{W}{m^2}\right]$
$\lambda$	Wärmeleitungskoeff.	$\left[\frac{W}{mK}\right]$
$T_L$	Lufttemperatur	$[K]$
$T_W$	Wandtemperatur	$[K]$
$T_{i,a}$	Innen- / Aussen- Temperatur	$[K]$
$t$	Zeit	$[s]$
$\rho$	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
$d$	Wanddichm.	$[m]$
$\alpha$	Wärmeübergang	$\left[\frac{W}{m^2K}\right]$
$k$	k-Wert, Wärmedurchgangszahl	$\left[\frac{W}{m^2K}\right]$
$Q$	Wärmebedarf	$[J]$
$A$	Wandfläche	$[m^2]$
$\dot{V}$	Luftaustausch	$\left[\frac{m^3}{s}\right]$
$G$	Heiztage	$[Kd]$
$r$	Zylinderradius	$[m]$
$l$	Zylinderlänge	$[m]$

## 6.12. Zustandsänderungen

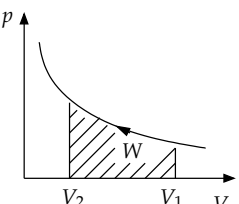
### 6.12.1. Isobare Zustandsänderung

 <p>Isobar: <math>p = \text{konstant}</math></p>	$Q = nC_{mp}(T_2 - T_1)$ $W = p(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$ $W = p_0 \int_{V_1}^{V_2} dV$	<table> <tr><td><math>Q</math></td><td>Wärme</td><td>[J]</td></tr> <tr><td><math>p</math></td><td>Druck</td><td>[Pa]</td></tr> <tr><td><math>V</math></td><td>Volumen</td><td>[m<sup>3</sup>]</td></tr> <tr><td><math>C_{mp}</math></td><td>Molare Wärmekapazität</td><td>[<math>\frac{J}{molK}</math>]</td></tr> <tr><td><math>T</math></td><td>Temperatur</td><td>[K]</td></tr> <tr><td><math>n</math></td><td>Anz. Mol Gas</td><td>[1]</td></tr> <tr><td><math>W</math></td><td>Arbeit</td><td>[J]</td></tr> <tr><td><math>R</math></td><td>Univers.-Gaskonst.</td><td>[<math>\frac{J}{molK}</math>]</td></tr> </table>	$Q$	Wärme	[J]	$p$	Druck	[Pa]	$V$	Volumen	[m <sup>3</sup> ]	$C_{mp}$	Molare Wärmekapazität	[ $\frac{J}{molK}$ ]	$T$	Temperatur	[K]	$n$	Anz. Mol Gas	[1]	$W$	Arbeit	[J]	$R$	Univers.-Gaskonst.	[ $\frac{J}{molK}$ ]
$Q$	Wärme	[J]																								
$p$	Druck	[Pa]																								
$V$	Volumen	[m <sup>3</sup> ]																								
$C_{mp}$	Molare Wärmekapazität	[ $\frac{J}{molK}$ ]																								
$T$	Temperatur	[K]																								
$n$	Anz. Mol Gas	[1]																								
$W$	Arbeit	[J]																								
$R$	Univers.-Gaskonst.	[ $\frac{J}{molK}$ ]																								

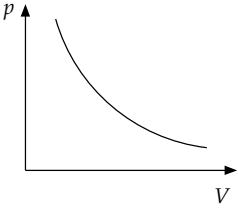
### 6.12.2. Isochore Zustandsänderungen

 <p>Isochor: <math>V = \text{konstant}</math></p>	$Q = nC_{mv}(T_2 - T_1)$ $W = 0$	<table> <tr><td><math>Q</math></td><td>Wärme</td><td>[J]</td></tr> <tr><td><math>C_{mv}</math></td><td>Molare Wärmekapazität</td><td>[<math>\frac{J}{molK}</math>]</td></tr> <tr><td><math>T</math></td><td>Temperatur</td><td>[K]</td></tr> <tr><td><math>n</math></td><td>Anz. Mol Gas</td><td>[1]</td></tr> <tr><td><math>W</math></td><td>Arbeit</td><td>[J]</td></tr> </table>	$Q$	Wärme	[J]	$C_{mv}$	Molare Wärmekapazität	[ $\frac{J}{molK}$ ]	$T$	Temperatur	[K]	$n$	Anz. Mol Gas	[1]	$W$	Arbeit	[J]
$Q$	Wärme	[J]															
$C_{mv}$	Molare Wärmekapazität	[ $\frac{J}{molK}$ ]															
$T$	Temperatur	[K]															
$n$	Anz. Mol Gas	[1]															
$W$	Arbeit	[J]															

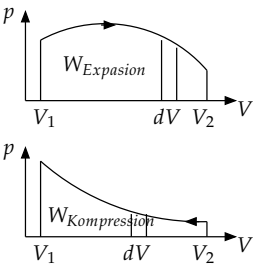
### 6.12.3. Isotherme Zustandsänderungen

 <p>isotherm: <math>T = \text{konst.}</math></p>	<p>Expansion:</p> $Q_{ab} = nRT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = W_{ab}$ <p>Kompression:</p> $Q_{zu} = nRT \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right) = W_{zu}$ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}$ $ W_{zu}  =  Q_{ab} $	<table> <tr><td><math>Q</math></td><td>Wärme</td><td>[J]</td></tr> <tr><td><math>V</math></td><td>Volumen</td><td>[m<sup>3</sup>]</td></tr> <tr><td><math>T</math></td><td>Temperatur</td><td>[K]</td></tr> <tr><td><math>n</math></td><td>Anz. Mol Gas</td><td>[1]</td></tr> <tr><td><math>W</math></td><td>Arbeit</td><td>[J]</td></tr> <tr><td><math>p</math></td><td>Druck</td><td>[Pa]</td></tr> <tr><td><math>R</math></td><td>Univers.-Gaskonst.</td><td>[<math>\frac{J}{molK}</math>]</td></tr> </table>	$Q$	Wärme	[J]	$V$	Volumen	[m <sup>3</sup> ]	$T$	Temperatur	[K]	$n$	Anz. Mol Gas	[1]	$W$	Arbeit	[J]	$p$	Druck	[Pa]	$R$	Univers.-Gaskonst.	[ $\frac{J}{molK}$ ]
$Q$	Wärme	[J]																					
$V$	Volumen	[m <sup>3</sup> ]																					
$T$	Temperatur	[K]																					
$n$	Anz. Mol Gas	[1]																					
$W$	Arbeit	[J]																					
$p$	Druck	[Pa]																					
$R$	Univers.-Gaskonst.	[ $\frac{J}{molK}$ ]																					

## 6.12.4. Adiabatische Zustandsänderungen

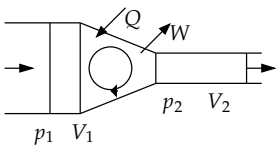
 <p>Adiabatisch:  <math>Q = konst.</math> (kein Wärmeaustausch)</p>	$dU = \delta Q - \delta W$ $pV^\kappa = konst.$ $\rightarrow p_2 = p_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\kappa$ $TV^{\kappa-1} = konst.$ $\rightarrow T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1}$ $T^\kappa p^{1-\kappa} \text{ und } Tp^{\frac{1}{\kappa}-1} = konst.$ $\rightarrow T_2 = T_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}$ $\kappa = \frac{C_{mp}}{C_{mv}}$ $\kappa = \frac{f+2}{f} \quad C_{mv} = \frac{f}{2}R$ $W = nC_{mv}(T_1 - T_2)$ $\Delta W = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\kappa - 1}$ $\Delta W = C_{mv}(p_1V_1 - p_2V_2)$	<table> <tr> <td><math>U</math></td><td>Innere Energie</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Volumen</td><td><math>[m^3]</math></td></tr> <tr> <td><math>\kappa</math></td><td>Adiabatene exponent</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>C_{mv}</math></td><td>Molare Wärmekapazität isochor</td><td><math>[\frac{J}{molK}]</math></td></tr> <tr> <td><math>C_{mp}</math></td><td>Molare Wärmekapazität isobar</td><td><math>[\frac{J}{molK}]</math></td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Temperatur</td><td><math>[K]</math></td></tr> <tr> <td><math>f</math></td><td>Freiheitsgrad</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>n</math></td><td>Anz. Mol</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>W</math></td><td>Arbeit</td><td><math>[J]</math></td></tr> </table>	$U$	Innere Energie	$[J]$	$p$	Druck	$[Pa]$	$V$	Volumen	$[m^3]$	$\kappa$	Adiabatene exponent	$[1]$	$C_{mv}$	Molare Wärmekapazität isochor	$[\frac{J}{molK}]$	$C_{mp}$	Molare Wärmekapazität isobar	$[\frac{J}{molK}]$	$T$	Temperatur	$[K]$	$f$	Freiheitsgrad	$[1]$	$n$	Anz. Mol	$[1]$	$W$	Arbeit	$[J]$
$U$	Innere Energie	$[J]$																														
$p$	Druck	$[Pa]$																														
$V$	Volumen	$[m^3]$																														
$\kappa$	Adiabatene exponent	$[1]$																														
$C_{mv}$	Molare Wärmekapazität isochor	$[\frac{J}{molK}]$																														
$C_{mp}$	Molare Wärmekapazität isobar	$[\frac{J}{molK}]$																														
$T$	Temperatur	$[K]$																														
$f$	Freiheitsgrad	$[1]$																														
$n$	Anz. Mol	$[1]$																														
$W$	Arbeit	$[J]$																														

## 6.12.5. Expansion und Kompression

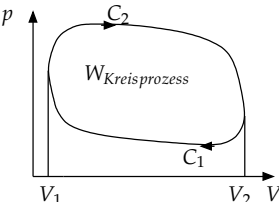
	<p>Expansion:</p> $W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = A_1$ <p>Kompression:</p> $W = \int_{V_2}^{V_1} p dV = -A_2$	<table> <tr> <td><math>W</math></td><td>Arbeit</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Volumen</td><td><math>[m^3]</math></td></tr> </table>	$W$	Arbeit	$[J]$	$p$	Druck	$[Pa]$	$V$	Volumen	$[m^3]$
$W$	Arbeit	$[J]$									
$p$	Druck	$[Pa]$									
$V$	Volumen	$[m^3]$									

## 6. WÄRMELEHRE

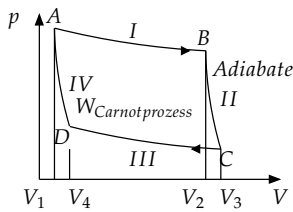
### 6.12.6. Enthalpie

 <p>Maschine</p>	$H = U + pV$ $W = Q - \Delta H$ $W_{tot} = W_g + p_2 V_2 - p_1 V_1$ <p>Isotherm: <math>W = W_g</math>    Adiabatisch: <math>W = \kappa W_g</math></p>	<table> <tr> <td><math>H</math></td><td>Enthalpie</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>W</math></td><td>Arbeit</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>W_g</math></td><td>W im abgeschlossenen System</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>Q</math></td><td>Wärme</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Volumen</td><td><math>[m^3]</math></td></tr> <tr> <td><math>\kappa</math></td><td>Adiabaten exp.</td><td><math>[1]</math></td></tr> </table>	$H$	Enthalpie	$[J]$	$W$	Arbeit	$[J]$	$W_g$	W im abgeschlossenen System	$[J]$	$Q$	Wärme	$[J]$	$p$	Druck	$[Pa]$	$V$	Volumen	$[m^3]$	$\kappa$	Adiabaten exp.	$[1]$
$H$	Enthalpie	$[J]$																					
$W$	Arbeit	$[J]$																					
$W_g$	W im abgeschlossenen System	$[J]$																					
$Q$	Wärme	$[J]$																					
$p$	Druck	$[Pa]$																					
$V$	Volumen	$[m^3]$																					
$\kappa$	Adiabaten exp.	$[1]$																					

### 6.13. Kreisprozesse

 <p>Rechtslaufend (Uhrzeigersinn): Wärmekraftmaschine Linkslaufend: Wärmepumpe</p>	$W = \underbrace{\int_{V_1}^{V_2} p dV}_{\text{Kurve } C_1} + \underbrace{\int_{V_2}^{V_1} p dV}_{\text{Kurve } C_2}$ $W = \oint \delta W = \oint \delta Q$ $Q = W$	<table> <tr> <td><math>W</math></td><td>Arbeit</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>Q</math></td><td>Wärme</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>p</math></td><td>Druck</td><td><math>[Pa]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Volumen</td><td><math>[m^3]</math></td></tr> </table>	$W$	Arbeit	$[J]$	$Q$	Wärme	$[J]$	$p$	Druck	$[Pa]$	$V$	Volumen	$[m^3]$
$W$	Arbeit	$[J]$												
$Q$	Wärme	$[J]$												
$p$	Druck	$[Pa]$												
$V$	Volumen	$[m^3]$												

## 6.13.1. Carnotprozess



Beispiel Motor:

$$T_1 = T_{\text{Zylinder}}$$

$$T_2 = T_{\text{Abgas}}$$

I: Isotherme Expansion:

$$W_{ab} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_{zu}$$

$$U = \text{konst.}$$

II: Adiabatische Expansion:

$$W_{ab} = C_{mv}(T_1 - T_2)$$

$$Q_{zu} = 0$$

III: Isotherme Kompression:

$$W_{zu} = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} = Q_{ab}$$

$$U = \text{konst.}$$

IV: Adiabatische Kompression:

$$W_{zu} = C_{mv}(T_1 - T_2)$$

$$Q_{zu} = 0$$

$$\eta_C = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Carnot-Wärmepumpe:

$$\epsilon_C = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

Carnot-Kältemaschine:

$$\epsilon_C = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

$W$	Arbeit	$[J]$
$Q$	Wärme	$[J]$
$U$	Innere Energie	$[J]$
$V$	Volumen	$[m^3]$
$C_{mv}$	Molare Wärmekapazität isochor	$[\frac{J}{molK}]$
$R$	Univers.-Gaskonst.	$[\frac{J}{molK}]$
$\eta_C$	Carnot-Wirkungsgrad (bei Wärmekraftmaschine)	$[1]$
$\epsilon_C$	Carnot-Leistungszahl (bei Wärmepumpe)	$[1]$

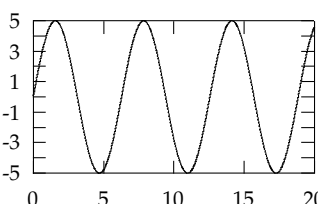
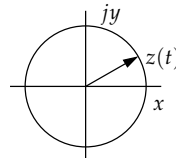
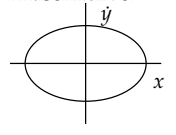
## 6.14. Entropie

<p>Im abgeschlossenen System gilt:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• S kann niemals abnehmen.</li> <li>• Bei allen Vorgängen nimmt S zu oder bleibt gleich.</li> <li>• Der Zustand wo S maximal ist, ist der stabile Zustand.</li> </ul>	$S = S_0 + \int_0^P \frac{\delta Q_r}{T}$ $dS = \frac{\delta Q_r}{T}$ $\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_r}{T}$ $S = k \cdot \ln(W)$	<p>S Entropie <math>[\frac{J}{K}]</math>  P Punkt P <math>[1]</math>  <math>Q_r</math> Wärme <math>[J]</math>  T Temperatur <math>[K]</math>  W Wahrscheinlichkeit <math>[1]</math></p>
---	---	---

# 7. Schwingungen

## 7.1. Freie Schwingungen

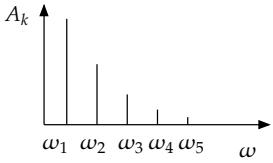
### 7.1.1. Ungedämpfte, harmonische Schwingung

<p>Zeitfunktion:</p>  <p>Zeigerbild:</p>  <p>Phasenkurve:</p> 	<p>Funktion:</p> $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $f = \frac{1}{T}$ $\omega = 2\pi f$ $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ <p>Bei einer harmonischen Schwingung ist die Beschleunigung proportional zur Auslenkung:</p> $a(t) = \ddot{y} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$ $v(t) = \dot{y} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t)$ <p>Energie bleibt konstant:</p> $E_{ges} = \frac{1}{2}cA^2 = E_{pot} + E_{kin}$ $E_{pot} = \frac{1}{2}cA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$ $E_{kin} = \frac{1}{2}cA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$	<table> <tr> <td><math>y</math></td><td>schwingende Grösse</td><td><math>[m]^1</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Amplitude</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Nullphasenwinkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>f</math></td><td>Frequenz</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>a</math></td><td>Beschleunigung</td><td><math>[\frac{m}{s^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>Geschw.</td><td><math>[\frac{m}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>E</math></td><td>Energie</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>c</math></td><td>Konstante</td><td><math>[\frac{N}{m}]</math></td></tr> </table>	$y$	schwingende Grösse	$[m]^1$	$A$	Amplitude	$[1]$	$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	$\varphi$	Nullphasenwinkel	$[rad]$	$t$	Zeit	$[s]$	$T$	Periode	$[s]$	$f$	Frequenz	$[\frac{1}{s}]$	$a$	Beschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$	$v$	Geschw.	$[\frac{m}{s}]$	$E$	Energie	$[J]$	$c$	Konstante	$[\frac{N}{m}]$
$y$	schwingende Grösse	$[m]^1$																																	
$A$	Amplitude	$[1]$																																	
$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																																	
$\varphi$	Nullphasenwinkel	$[rad]$																																	
$t$	Zeit	$[s]$																																	
$T$	Periode	$[s]$																																	
$f$	Frequenz	$[\frac{1}{s}]$																																	
$a$	Beschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$																																	
$v$	Geschw.	$[\frac{m}{s}]$																																	
$E$	Energie	$[J]$																																	
$c$	Konstante	$[\frac{N}{m}]$																																	

<sup>1</sup>m gilt nur bei mechanischen Schwingungen

## 7. SCHWINGUNGEN

### 7.1.2. Ungedämpfte, periodische Schwingung

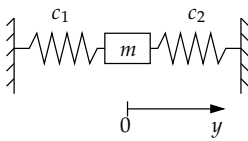
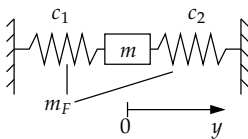
	<p>Fourierreihe:</p> $y = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$ $\omega_k = k\omega_1$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ $y = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(\omega_k t) + b_k \cos(\omega_k t)]$ $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ $\varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$	<table> <tr> <td><math>y</math></td><td>schwingende Grösse</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Amplitude</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>\left[\frac{1}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Nullphasenwinkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode der Grundschwingung</td><td><math>[s]</math></td></tr> </table>	$y$	schwingende Grösse	$[m]$	$A$	Amplitude	$[1]$	$\omega$	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	$\varphi$	Nullphasenwinkel	$[rad]$	$T$	Periode der Grundschwingung	$[s]$
$y$	schwingende Grösse	$[m]$															
$A$	Amplitude	$[1]$															
$\omega$	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$															
$\varphi$	Nullphasenwinkel	$[rad]$															
$T$	Periode der Grundschwingung	$[s]$															

### 7.1.3. Ungedämpfte, nicht periodische Schwingung

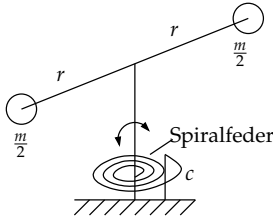
	<p>Fourierreihe:</p> $y = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	<table> <tr> <td><math>y</math></td><td>schwingende Grösse</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Amplitude</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>\left[\frac{1}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> </table>	$y$	schwingende Grösse	$[m]$	$A$	Amplitude	$[1]$	$\omega$	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	$t$	Zeit	$[s]$
$y$	schwingende Grösse	$[m]$												
$A$	Amplitude	$[1]$												
$\omega$	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$												
$t$	Zeit	$[s]$												



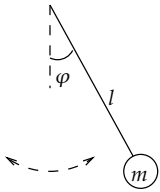
## 7.1.4. Federpendel

	<p>Federmasse vernachlässigt:</p> $m\ddot{y} + cy = 0$ $y = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$ $a(t) = -\left(\frac{c}{m}\right) y(t)$ <p>Energiesatz:</p> $\frac{1}{2}cA^2 = \frac{1}{2}cy^2(t) + \frac{1}{2}mv^2(t)$	<table><tr><td><math>y</math></td><td>schwingende Grösse</td><td><math>[m]</math></td></tr><tr><td><math>A</math></td><td>Amplitude</td><td><math>[1]</math></td></tr><tr><td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>\left[\frac{1}{s}\right]</math></td></tr><tr><td><math>\varphi</math></td><td>Nullphasenwinkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr><tr><td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr><tr><td><math>T</math></td><td>Periode</td><td><math>[s]</math></td></tr><tr><td><math>f</math></td><td>Frequenz</td><td><math>\left[\frac{1}{s}\right]</math></td></tr><tr><td><math>m</math></td><td>Bewegte Masse</td><td><math>[kg]</math></td></tr><tr><td><math>m_F</math></td><td>Masse der Feder</td><td><math>[kg]</math></td></tr><tr><td><math>c</math></td><td>Federkonstante (siehe S. 15)</td><td><math>\left[\frac{N}{m}\right]</math></td></tr><tr><td><math>a</math></td><td>Beschleunigung</td><td><math>\left[\frac{m}{s^2}\right]</math></td></tr></table>	$y$	schwingende Grösse	$[m]$	$A$	Amplitude	$[1]$	$\omega$	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	$\varphi$	Nullphasenwinkel	$[rad]$	$t$	Zeit	$[s]$	$T$	Periode	$[s]$	$f$	Frequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	$m$	Bewegte Masse	$[kg]$	$m_F$	Masse der Feder	$[kg]$	$c$	Federkonstante (siehe S. 15)	$\left[\frac{N}{m}\right]$	$a$	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
$y$	schwingende Grösse	$[m]$																																	
$A$	Amplitude	$[1]$																																	
$\omega$	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																																	
$\varphi$	Nullphasenwinkel	$[rad]$																																	
$t$	Zeit	$[s]$																																	
$T$	Periode	$[s]$																																	
$f$	Frequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																																	
$m$	Bewegte Masse	$[kg]$																																	
$m_F$	Masse der Feder	$[kg]$																																	
$c$	Federkonstante (siehe S. 15)	$\left[\frac{N}{m}\right]$																																	
$a$	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$																																	
	<p>Mit Federmasse:</p> $T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_F}{3}}{c}}$																																		

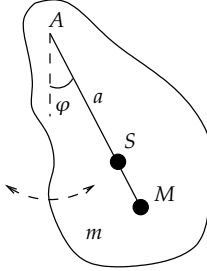
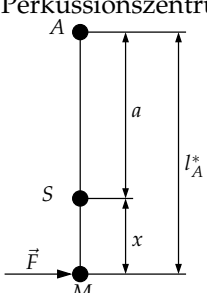
## 7.1.5. Drehpendel

	$J\ddot{\varphi} + c\varphi = 0$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J}}$ $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}}$ <p>bestimmung von Massenträgheitsmomenten:</p> $J_{unbek} = J_{bek} \frac{T_{unbek}^2}{T_{bek}^2}$	<table> <tr> <td><math>y</math></td><td>schwingende Grösse</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>\left[\frac{1}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Nullphasenwinkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>c</math></td><td>Federkonstante</td><td><math>\left[\frac{N}{m}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>J</math></td><td>Massenträgheitsmoment</td><td><math>\left[\frac{kg}{m^2}\right]</math></td></tr> </table>	$y$	schwingende Grösse	$[m]$	$\omega$	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	$\varphi$	Nullphasenwinkel	$[rad]$	$T$	Periode	$[s]$	$c$	Federkonstante	$\left[\frac{N}{m}\right]$	$J$	Massenträgheitsmoment	$\left[\frac{kg}{m^2}\right]$
$y$	schwingende Grösse	$[m]$																		
$\omega$	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																		
$\varphi$	Nullphasenwinkel	$[rad]$																		
$T$	Periode	$[s]$																		
$c$	Federkonstante	$\left[\frac{N}{m}\right]$																		
$J$	Massenträgheitsmoment	$\left[\frac{kg}{m^2}\right]$																		

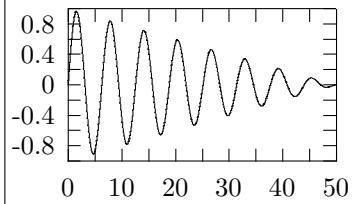
### 7.1.6. Mathematisches Pendel

	$l\ddot{\varphi} + g \sin(\varphi) = 0$ $l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	<table> <tr> <td><math>y</math></td><td>schwingende Grösse</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Winkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>l</math></td><td>Pendellänge</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Erdbeschl. =</td><td><math>[\frac{m}{s^2}]</math></td></tr> <tr> <td></td><td>9.81</td><td></td></tr> </table>	$y$	schwingende Grösse	$[m]$	$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	$\varphi$	Winkel	$[rad]$	$T$	Periode	$[s]$	$l$	Pendellänge	$[m]$	$g$	Erdbeschl. =	$[\frac{m}{s^2}]$		9.81	
$y$	schwingende Grösse	$[m]$																					
$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																					
$\varphi$	Winkel	$[rad]$																					
$T$	Periode	$[s]$																					
$l$	Pendellänge	$[m]$																					
$g$	Erdbeschl. =	$[\frac{m}{s^2}]$																					
	9.81																						

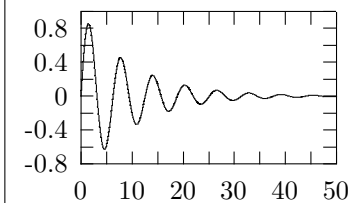
### 7.1.7. Physikalisches Pendel

 <p>Perkussionszentrum</p> 	$J_A\ddot{\varphi} + mga \sin(\varphi) = 0$ $l^* = \frac{J_A}{ma}$ $J_A\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J_A}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_S + ma^2}{mga}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{A1} + J_{A2}}{g(m_1a_1 + m_2a_2)}}$ $J_A = J_S + ma^2$ $\omega_{max} = \sqrt{\frac{g}{2}}\sqrt{\frac{m}{J_S}}$ $\omega(A) = \omega(M)$ $x = \frac{J_S}{ma}$ $E = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}$	<table> <tr> <td><math>J_A</math></td><td>Masseträgheit bez. A-Achse</td><td><math>[kgm^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>J_S</math></td><td>Masseträgheit bez. Achse    a (siehe S. 30)</td><td><math>[kgm^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>S</math></td><td>Schwerpunkt</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>a</math></td><td>Anstand zu S</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>l^*</math></td><td>Pendellänge des entspr. math. Pendel</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>y</math></td><td>schwingende Grösse</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Amplitude</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Winkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>f</math></td><td>Frequenz</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>m</math></td><td>Bewegte Masse</td><td><math>[kg]</math></td></tr> <tr> <td><math>E</math></td><td>Energie</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>M</math></td><td>Schwing-Mittelpunkt, Perkussionszentrum</td><td></td></tr> <tr> <td><math>x</math></td><td>Abstand M,S</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Erdbeschl. =</td><td><math>[\frac{m}{s^2}]</math></td></tr> <tr> <td></td><td>9.81</td><td></td></tr> </table>	$J_A$	Masseträgheit bez. A-Achse	$[kgm^2]$	$J_S$	Masseträgheit bez. Achse    a (siehe S. 30)	$[kgm^2]$	$S$	Schwerpunkt	$[1]$	$a$	Anstand zu S	$[m]$	$T$	Periode	$[s]$	$l^*$	Pendellänge des entspr. math. Pendel	$[m]$	$y$	schwingende Grösse	$[m]$	$A$	Amplitude	$[1]$	$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	$\varphi$	Winkel	$[rad]$	$t$	Zeit	$[s]$	$f$	Frequenz	$[\frac{1}{s}]$	$m$	Bewegte Masse	$[kg]$	$E$	Energie	$[J]$	$M$	Schwing-Mittelpunkt, Perkussionszentrum		$x$	Abstand M,S	$[m]$	$g$	Erdbeschl. =	$[\frac{m}{s^2}]$		9.81	
$J_A$	Masseträgheit bez. A-Achse	$[kgm^2]$																																																						
$J_S$	Masseträgheit bez. Achse    a (siehe S. 30)	$[kgm^2]$																																																						
$S$	Schwerpunkt	$[1]$																																																						
$a$	Anstand zu S	$[m]$																																																						
$T$	Periode	$[s]$																																																						
$l^*$	Pendellänge des entspr. math. Pendel	$[m]$																																																						
$y$	schwingende Grösse	$[m]$																																																						
$A$	Amplitude	$[1]$																																																						
$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																																																						
$\varphi$	Winkel	$[rad]$																																																						
$t$	Zeit	$[s]$																																																						
$f$	Frequenz	$[\frac{1}{s}]$																																																						
$m$	Bewegte Masse	$[kg]$																																																						
$E$	Energie	$[J]$																																																						
$M$	Schwing-Mittelpunkt, Perkussionszentrum																																																							
$x$	Abstand M,S	$[m]$																																																						
$g$	Erdbeschl. =	$[\frac{m}{s^2}]$																																																						
	9.81																																																							

## 7.1.8. Gedämpfte Schwingung mit konstanter Reibung

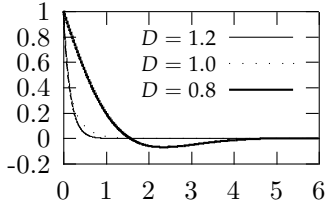
	$\Delta A = 4 \frac{F_R}{c}$ $m\ddot{y} + cy + F_R = 0$	$\Delta A$ $\Delta$ Amplitude [m] pro Periode $F_R$ Reibkraft $\left[\frac{1}{s}\right]$ $c$ Federkonstante $\left[\frac{N}{m}\right]$
---	---	---

7.1.9. Schwingung mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung  
( $D < 1$ )

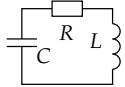
	$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ $y = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \phi_0)$ $\delta = \frac{b}{2m} \quad F_R = -b\dot{y}$ $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ $D = \frac{\frac{\Lambda}{2\pi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^2}}$ $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$ $\Lambda = \frac{2\pi D}{\sqrt{1 - D^2}}$ $\Lambda = \delta T$ $\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad \frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\delta T}$ $\frac{E_1}{E_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2}$	$y$ schwingende Grösse [m] $\omega$ Kreisfrequenz $\left[\frac{1}{s}\right]$ $\varphi$ Winkel $[rad]$ $T$ Periode [s] $\delta$ Abklingkonst. [1] $b$ Dämpfungs-konst. $\left[\frac{kg}{s}\right]$ $m$ Masse [kg] $c$ Federkonst. $\left[\frac{N}{m}\right]$ $D$ Dämpfungs-grad [1] $\Lambda$ log. Dekre-ment [1] $A$ Amplitude [1] $E$ Energie [J]
--	---	---

## 7. SCHWINGUNGEN

### 7.1.10. Aperiodeische Lösung ( $D > 1$ )

	$y = b_1 e^{\lambda_1 t} + b_2 e^{\lambda_2 t}$ $\lambda_1 = -\omega_0(D + \sqrt{D^2 - 1})$ $\lambda_2 = -\omega_0(D - \sqrt{D^2 - 1})$ <p>Grenzfall <math>D = 1</math></p> $\frac{c}{m} = \frac{b^2}{4m^2}$ $y = (b_1 + b_2 t) e^{-\delta t}$	<table> <tr> <td><math>y</math></td><td>schwingende Grösse</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\delta</math></td><td>Abklingkonst.</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>b</math></td><td>Dämpfungs-konst.</td><td><math>[\frac{kg}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>D</math></td><td>Dämpfungs-grad</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>m</math></td><td>Masse</td><td><math>[kg]</math></td></tr> <tr> <td><math>c</math></td><td>Federkonstante</td><td><math>[\frac{N}{m}]</math></td></tr> </table>	$y$	schwingende Grösse	$[m]$	$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	$\delta$	Abklingkonst.	$[1]$	$b$	Dämpfungs-konst.	$[\frac{kg}{s}]$	$D$	Dämpfungs-grad	$[1]$	$m$	Masse	$[kg]$	$c$	Federkonstante	$[\frac{N}{m}]$
$y$	schwingende Grösse	$[m]$																					
$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																					
$\delta$	Abklingkonst.	$[1]$																					
$b$	Dämpfungs-konst.	$[\frac{kg}{s}]$																					
$D$	Dämpfungs-grad	$[1]$																					
$m$	Masse	$[kg]$																					
$c$	Federkonstante	$[\frac{N}{m}]$																					

### 7.1.11. Elektrischer Schwingkreis

	$I = I_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \phi_0)$ $\delta = \frac{R}{2L}$ $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ $\omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}$	<table> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr> <td><math>L</math></td><td>Induktivität</td><td><math>[H]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\delta</math></td><td>Abklingkonst.</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>D</math></td><td>Dämpfungs-grad</td><td><math>[1]</math></td></tr> </table>	$I$	Strom	$[A]$	$R$	Widerstand	$[\Omega]$	$L$	Induktivität	$[H]$	$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	$\delta$	Abklingkonst.	$[1]$	$t$	Zeit	$[s]$	$D$	Dämpfungs-grad	$[1]$
$I$	Strom	$[A]$																					
$R$	Widerstand	$[\Omega]$																					
$L$	Induktivität	$[H]$																					
$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																					
$\delta$	Abklingkonst.	$[1]$																					
$t$	Zeit	$[s]$																					
$D$	Dämpfungs-grad	$[1]$																					

# 8. Wellenlehre

## 8.1. Wellengeschwindigkeiten

Elastische Longitudinalwellen	$u_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$u$ Wellengeschw. $[\frac{m}{s}]$
Elastische Transversalwellen	$u_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	$A$ Fläche $[m^2]$
Transversalwellen auf einem Seil oder einer Saite	$u_T = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$	$E$ Elastizitätsmodul $[\frac{N}{m^2}]$
Schwerewellen in tiefem Wasser	$u_S = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$	$F$ Spannkraft $[N]$
Schwerewellen in flachem Wasser	$u_S = \sqrt{gh}$	$G$ Schubmodul $[\frac{N}{m^2}]$
Kapillarwellen	$u_K = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}$	$h$ Wassertiefe $[m]$
Schallwellen in Fluiden	$u = \sqrt{\frac{1}{\rho\kappa}}$	$M$ Molmasse $[\frac{kg}{mol}]$
Schallwellen in Gasen	$u_G = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}$	$p$ Druck $[Pa]$
	$u_G = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}$	$T$ abs. Temp. $[K]$
		$\kappa$ Kompressibilität $[\frac{m^2}{N}]$
		$\kappa$ Adiabatenexponent $[1]$
		$\lambda$ Wellenlänge $[m]$
		$\rho$ Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$
		$\sigma$ Oberflächenspannung $[\frac{N}{m}]$
		$g$ Erdbeschl. = $9.81$ $[\frac{m}{s^2}]$
		$R$ univers. Gas-Konst. = $8.3145$ $[\frac{J}{Kmol}]$

### 8.1.1. Zusammenhänge der verschiedenen Wellen

Gilt nur bei einem Stab	$u_T = \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu)}} u_L$	$u$ Wellengeschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ $u_T$ u longitudinal $\left[\frac{m}{s}\right]$ $u_L$ u transversal $\left[\frac{m}{s}\right]$ $\mu$ Poissonzahl $[1]$
-------------------------	---------------------------------------	--

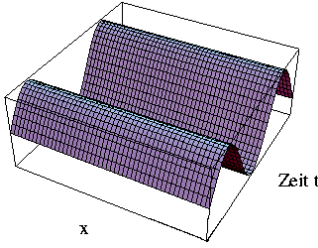
## 8.2. Wellengleichung

Bei Wellengleichungen (lineare Dgl) gilt das Superpositionsprinzip, d.h. die Summe zweier Lösungen ist wieder eine Lösung.	<p>Eindimensional:</p> $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ <p>Zweidimensional:</p> $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ <p>Dreidimensional:</p> $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ <p>oder: <math>\Delta \xi = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}</math></p> <p>wobei: <math>\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}</math></p>	$u$ Wellengeschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ $\xi$ Störung $[...]$ $t$ Zeit $[s]$ $\Delta$ Laplace-OP $[ ]$
--	--	--

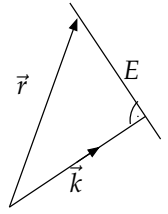
## 8.3. Intensität

	$I = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 \xi_0^2$	$I$ Intensität $\left[\frac{W}{m^2}\right]$ $u$ Wellengeschw. $\left[\frac{m}{s}\right]$ $\xi$ Störung $[...]$ $\rho$ Dichte $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ $\omega$ Winkelgeschw. $\left[\frac{1}{s}\right]$
--	---	--

## 8.4. Harmonische Wellen

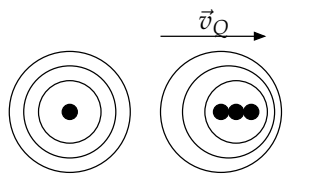
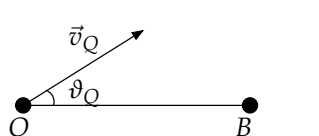
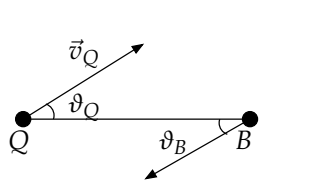
 <p> <math>\xi = f(x - ut) \rightarrow</math>  <i>Ausbreitung pos. x - Koord.</i>  <math>\xi = f(x + ut) \rightarrow</math>  <i>Ausbreitung neg. x - Koord.</i>            Bei EM - Wellen:  <math>u = c = 299'792'458 \frac{m}{s}</math> </p>	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = ku$ $k = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)$ $\xi(x, t) = \xi_0 \sin(\omega t - kx)$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{u}{\lambda}$ $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{u}{f}$ $u = \frac{\omega}{k} = \lambda f$	<table> <tr> <td><math>u</math></td><td>Wellengeschw.</td><td><math>[\frac{m}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\xi</math></td><td>Störung</td><td><math>[...]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>\lambda</math></td><td>Wellenlänge</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Phase</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>Wellenzahl</td><td><math>[\frac{1}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>f</math></td><td>Frequenz</td><td><math>[Hz]</math></td></tr> </table>	$u$	Wellengeschw.	$[\frac{m}{s}]$	$\xi$	Störung	$[...]$	$t$	Zeit	$[s]$	$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	$T$	Periode	$[s]$	$\lambda$	Wellenlänge	$[m]$	$\varphi$	Phase	$[rad]$	$k$	Wellenzahl	$[\frac{1}{m}]$	$f$	Frequenz	$[Hz]$
$u$	Wellengeschw.	$[\frac{m}{s}]$																											
$\xi$	Störung	$[...]$																											
$t$	Zeit	$[s]$																											
$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																											
$T$	Periode	$[s]$																											
$\lambda$	Wellenlänge	$[m]$																											
$\varphi$	Phase	$[rad]$																											
$k$	Wellenzahl	$[\frac{1}{m}]$																											
$f$	Frequenz	$[Hz]$																											

## 8.5. Räumliche Ausbreitung von Wellen

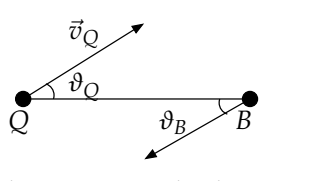
	<p>Ebene Welle:</p> $\xi(x, y, z, t) = \xi_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ $\vec{k} \cdot \vec{r} = konst.$ <p>Kugel Welle:</p> $\xi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}$	<table> <tr> <td><math>\xi</math></td><td>Störung</td><td><math>[...]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>Wellenzahl</td><td><math>[\frac{1}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Amplitude</td><td><math>[...]</math></td></tr> </table>	$\xi$	Störung	$[...]$	$t$	Zeit	$[s]$	$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	$k$	Wellenzahl	$[\frac{1}{m}]$	$r$	Radius	$[m]$	$A$	Amplitude	$[...]$
$\xi$	Störung	$[...]$																		
$t$	Zeit	$[s]$																		
$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																		
$k$	Wellenzahl	$[\frac{1}{m}]$																		
$r$	Radius	$[m]$																		
$A$	Amplitude	$[...]$																		

## 8.6. Doppler-Effekt

### 8.6.1. Akustischer Doppler-Effekt

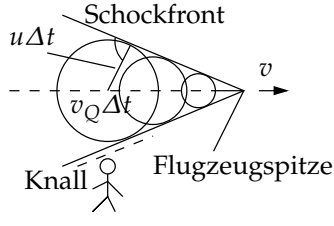
 <p>ruhende und bewegte Punktquelle</p>  <p>bewegte Punktquelle</p>  <p>bewegter Beobachter und bewegte Punktquelle</p>	<p>bewegte Quelle, ruhender Beobachter:</p> $f' = \frac{1}{1 \mp \frac{v_Q}{u}} f \quad \text{– auf Hörer zu}$ $f' = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u} \cos(\vartheta_Q)} f$ <p>ruhende Quelle, bewegter Beobachter:</p> $f' = (1 \pm \frac{v_B}{u}) f \quad \text{+ auf Quelle zu}$ $f' = (1 + \frac{v_B}{u} \cos(\vartheta_B)) f$ <p>Allgemein:</p> $f_B = \frac{u + v_B \cos(\vartheta_B)}{u - v_Q \cos(\vartheta_Q)} f_Q$	<p><math>u</math> Wellengeschw. <math>[\frac{m}{s}]</math>  <math>f</math> Frequenz <math>[Hz]</math>  <math>f'</math> gehörte Frequenz <math>[Hz]</math>  <math>v_Q</math> Geschw. Quelle <math>[\frac{m}{s}]</math>  <math>v_B</math> Geschw. Beobachter <math>[\frac{m}{s}]</math>  <math>\vartheta</math> Winkel <math>[rad]</math></p>
--	--	---

### 8.6.2. Optischer Doppler-Effekt

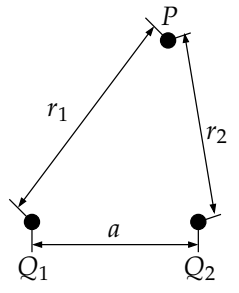
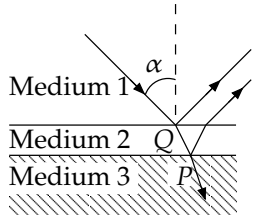
 <p>bewegter Beobachter und bewegte Punktquelle</p>	$f' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos(\vartheta)} f$ $\beta = \frac{v}{c}$ <p>falls <math>f \gg c</math>:</p> $\frac{f - f'}{f} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{v}{c}$ <p>falls <math>\vartheta = 0^\circ</math> oder <math>\vartheta = 180^\circ</math>:</p> $\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = -\frac{v}{c}$	<p><math>f</math> Frequenz <math>[Hz]</math>  <math>f'</math> gesehene Frequenz <math>[Hz]</math>  <math>v</math> Geschw. relativ Beobachter <math>[\frac{m}{s}]</math>  <math>\vartheta</math> Winkel <math>[rad]</math>  <math>c</math> Lichtgeschwindigkeit <math>[\frac{m}{s}]</math>  <math>= 299'792'458</math></p>
--	---	---



### 8.6.3. Machscher Kegel

	<p>Falls <math>v &gt; u</math> entsteht ein Machscher Kegel</p> $\sin(\vartheta) = \frac{u}{v}$ $M = \frac{v}{u}$	<p><math>u</math> Wellengeschw. <math>\left[\frac{m}{s}\right]</math>  <math>v</math> Geschw. Flugzeug <math>\left[\frac{m}{s}\right]</math>  <math>\vartheta</math> Winkel des Kegels <math>[rad]</math>  <math>M</math> Machzahl <math>[1]</math></p>
---	---	---

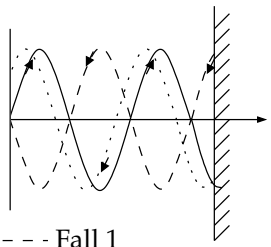
## 8.7. Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz

	$l = nr$ <p>In 1s geht Energie S durch <math>1m^2</math>:</p> $S = \frac{\delta \xi^2 \omega^2}{2} u$ <p>Prinzip von Huygens:          Jedes Flächenelement auf einer Welle kann als Zentrum einer Kugelwelle betrachtet werden. Die Wellenfläche zu einem späteren Zeitpunkt ist die Einhüllende all dieser Elementarwellen.</p>	<p><math>u</math> Wellengeschw. <math>\left[\frac{m}{s}\right]</math>  <math>l</math> Optische Weglänge <math>[m]</math>  <math>n</math> Brechungsindex <math>[1]</math>  <math>S</math> Energie <math>\left[\frac{J}{m^2s}\right]</math>  <math>\xi</math> Störung <math>[...]</math>  <math>\omega</math> Kreisfrequenz <math>\left[\frac{1}{s}\right]</math></p>
	<p>Bei der Reflexion an einem optisch dichteren Medium findet ein Phasensprung von <math>\pi</math> statt.          Beispiel: Falls Medium 1 dichter Medium 2 dichter Medium 3: Phasensprung in P und Q.</p> $\Rightarrow +\frac{\lambda}{2}$ <p><math>\rightarrow</math> Auslöschung bei <math>m\frac{\lambda}{2}</math>, <math>m = \{1, 3, 5, \dots\}</math></p>	

## 8.8. Optische Länge


Durchqueren Wellen Medien muss mit optischen Längen gerechnet werden	$s \rightarrow ns$ $\lambda \rightarrow \frac{\lambda}{n}$	$n$ Brech-Index $[1]$ $s$ Strecke $[m]$ $\lambda$ Wellenlänge $[m]$
--	---	---

## 8.9. Stehende Wellen

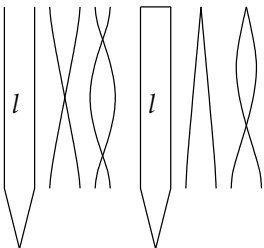
 <p>-- Fall 1      .... Fall 2      Einfallende Welle wird von Grenzfläche reflektiert</p>	<p>1. Fall: Phasensprung <math>\pi</math> bei Reflexion</p> $\xi_0 \sin(k_x - \omega t) + \xi_0 \sin(k_x + \omega t) =$ $2\xi \sin(k_x) \cos(\omega t)$ <p>Knoten bei <math>k_x = 0, \pi, 2\pi \dots</math>          Bäuche bei: <math>k_x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \dots</math></p> <p>2. Fall: Kein Phasensprung</p> $\xi_0 \sin(k_x - \omega t) - \xi_0 \sin(k_x + \omega t) =$ $-2\xi \cos(k_x) \sin(\omega t)$ <p>Knoten bei <math>k_x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \dots</math>          Bäuche bei: <math>k_x = 0, \pi, 2\pi \dots</math></p>	$\xi$ Störung $[...]$ $\omega$ Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$ $t$ Zeit $[s]$ $k$ Wellenzahl $[\frac{1}{m}]$
---	--	---

## 8.10. Eigenschwingungen

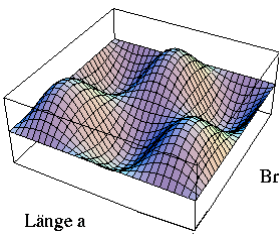
### 8.10.1. Saite

 <p>— <math>\lambda = 2l</math> - - - <math>\lambda = l</math></p> <p>Die Saite ist zweiseitig fixiert</p>	$\lambda_n = \frac{2l}{n}$ $f_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{u}{2l}n = nf_1$ $f_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ $u = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ $F = \frac{4l^2}{n^2} \rho A f^2$ <p>Bei Temperatur Änderung:</p> $\Delta f = \left( \frac{E_{Sa}(\alpha_{Trag} - \alpha_{Sa})}{8\rho_{Sa}l^2 f^2} - \alpha_{Trag} \right) \Delta T f$	<table> <tr><td><math>u</math></td><td>Wellengeschw.</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr><td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr><td><math>F</math></td><td>Spannkraft</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr><td><math>\lambda</math></td><td>Wellenlänge</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr><td><math>\rho</math></td><td>Dichte Saite</td><td><math>\left[\frac{kg}{m^3}\right]</math></td></tr> <tr><td><math>\xi</math></td><td>Störung</td><td><math>[...]</math></td></tr> <tr><td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>\left[\frac{1}{s}\right]</math></td></tr> <tr><td><math>f</math></td><td>Frequenz</td><td><math>[Hz]</math></td></tr> <tr><td><math>f_1</math></td><td>Grundfrequenz</td><td><math>[Hz]</math></td></tr> <tr><td><math>l</math></td><td>Saitenlänge</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr><td><math>n</math></td><td>n-te Harmonische</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr><td><math>\alpha</math></td><td>Längenausd. koef.</td><td><math>\left[\frac{1}{K}\right]</math></td></tr> <tr><td><math>\rho</math></td><td>Dichte</td><td><math>\left[\frac{kg}{m^3}\right]</math></td></tr> <tr><td><math>E</math></td><td>Elastizitätsmodul</td><td><math>\left[\frac{N}{m^2}\right]</math></td></tr> </table>	$u$	Wellengeschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$A$	Fläche	$[m^2]$	$F$	Spannkraft	$[N]$	$\lambda$	Wellenlänge	$[m]$	$\rho$	Dichte Saite	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	$\xi$	Störung	$[...]$	$\omega$	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$	$f$	Frequenz	$[Hz]$	$f_1$	Grundfrequenz	$[Hz]$	$l$	Saitenlänge	$[m]$	$n$	n-te Harmonische	$[1]$	$\alpha$	Längenausd. koef.	$\left[\frac{1}{K}\right]$	$\rho$	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	$E$	Elastizitätsmodul	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
$u$	Wellengeschw.	$\left[\frac{m}{s}\right]$																																										
$A$	Fläche	$[m^2]$																																										
$F$	Spannkraft	$[N]$																																										
$\lambda$	Wellenlänge	$[m]$																																										
$\rho$	Dichte Saite	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$																																										
$\xi$	Störung	$[...]$																																										
$\omega$	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$																																										
$f$	Frequenz	$[Hz]$																																										
$f_1$	Grundfrequenz	$[Hz]$																																										
$l$	Saitenlänge	$[m]$																																										
$n$	n-te Harmonische	$[1]$																																										
$\alpha$	Längenausd. koef.	$\left[\frac{1}{K}\right]$																																										
$\rho$	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$																																										
$E$	Elastizitätsmodul	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$																																										

### 8.10.2. Pfeife

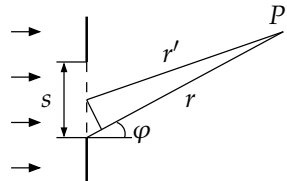
 <p>offen      gedackt</p>	<p>offene Pfeife:</p> $f_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} = \frac{u}{2l}$ $f_n = nf_1$ $\lambda_n = \frac{4l}{n} \quad n = 1, 3, 5, \dots$ <p>gedackte Pfeife:</p> $f_1 = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} = \frac{u}{4l}$ $f_n = nf_1$ $\lambda_n = \frac{4l}{n} \quad n = 2, 4, 6, \dots$	<table> <tr><td><math>f</math></td><td>Frequenz</td><td><math>[Hz]</math></td></tr> <tr><td><math>f_1</math></td><td>Grundfrequenz</td><td><math>[Hz]</math></td></tr> <tr><td><math>M</math></td><td>Molmasse</td><td><math>\left[\frac{kg}{mol}\right]</math></td></tr> <tr><td><math>T</math></td><td>abs. Temp.</td><td><math>[K]</math></td></tr> <tr><td><math>\kappa</math></td><td>Adiabatene exponent</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr><td><math>R</math></td><td>univers. Gas-Konst.</td><td><math>\left[\frac{J}{Kmol}\right]</math></td></tr> <tr><td></td><td></td><td><math>= 8.3145</math></td></tr> <tr><td><math>l</math></td><td>Saitenlänge</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr><td><math>\lambda</math></td><td>Wellenlänge</td><td><math>[m]</math></td></tr> </table>	$f$	Frequenz	$[Hz]$	$f_1$	Grundfrequenz	$[Hz]$	$M$	Molmasse	$\left[\frac{kg}{mol}\right]$	$T$	abs. Temp.	$[K]$	$\kappa$	Adiabatene exponent	$[1]$	$R$	univers. Gas-Konst.	$\left[\frac{J}{Kmol}\right]$			$= 8.3145$	$l$	Saitenlänge	$[m]$	$\lambda$	Wellenlänge	$[m]$
$f$	Frequenz	$[Hz]$																											
$f_1$	Grundfrequenz	$[Hz]$																											
$M$	Molmasse	$\left[\frac{kg}{mol}\right]$																											
$T$	abs. Temp.	$[K]$																											
$\kappa$	Adiabatene exponent	$[1]$																											
$R$	univers. Gas-Konst.	$\left[\frac{J}{Kmol}\right]$																											
		$= 8.3145$																											
$l$	Saitenlänge	$[m]$																											
$\lambda$	Wellenlänge	$[m]$																											

## 8.10.3. Rechteckige Membrane

 <p>Länge a m=3, n=2</p>	$f(x, y) = \xi_0 \sin(k_x x + \varphi_x) \sin(k_y y + \varphi_y)$ $k_x a = m\pi \quad k_y b = n\pi$ $f_{mn} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$	<table> <tr> <td><math>f_{mn}</math></td><td>Eigenfrequenz</td><td>[Hz]</td></tr> <tr> <td><math>F</math></td><td>Spannkraft</td><td>[N]</td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Masse pro Fläche</td><td><math>[\frac{kg}{m^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\xi</math></td><td>Störung</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td><math>x, y</math></td><td>Richtung x,y</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td><math>a</math></td><td>Länge</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>b</math></td><td>Breite</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>m, n</math></td><td>Anz. Oberflächen</td><td>[1]</td></tr> </table>	$f_{mn}$	Eigenfrequenz	[Hz]	$F$	Spannkraft	[N]	$\mu$	Masse pro Fläche	$[\frac{kg}{m^2}]$	$\xi$	Störung	[...]	$x, y$	Richtung x,y	[...]	$a$	Länge	[m]	$b$	Breite	[m]	$m, n$	Anz. Oberflächen	[1]
$f_{mn}$	Eigenfrequenz	[Hz]																								
$F$	Spannkraft	[N]																								
$\mu$	Masse pro Fläche	$[\frac{kg}{m^2}]$																								
$\xi$	Störung	[...]																								
$x, y$	Richtung x,y	[...]																								
$a$	Länge	[m]																								
$b$	Breite	[m]																								
$m, n$	Anz. Oberflächen	[1]																								

## 8.11. Beugung

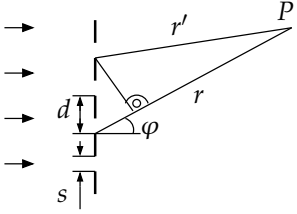
## 8.11.1. Beugung am Spalt

	$\xi = \frac{A}{r} A_s \cos(\omega t - kr_s)$ $A_s = \frac{\sin\left(\frac{ks \sin(\varphi)}{2}\right)}{\frac{ks \sin(\varphi)}{2}}$ $I_s \sim \xi^2$ <p>Nullstelle n-ter Ordnung:</p> $\sin(\varphi_n) = n \frac{\lambda}{s}$	<table> <tr> <td><math>A</math></td><td>Amplitude</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td><math>A_s</math></td><td>Formfaktor</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>s</math></td><td>Spaltbreite</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Abstand</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>\xi</math></td><td>Störung</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>Wellenzahl</td><td><math>[\frac{1}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Betrachtungswinkel</td><td>[rad]</td></tr> <tr> <td><math>I_s</math></td><td>Intensität</td><td><math>[\frac{W}{m^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\lambda</math></td><td>Wellenlänge</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>n</math></td><td>Ordnung</td><td>[1]</td></tr> </table>	$A$	Amplitude	[...]	$A_s$	Formfaktor	[1]	$s$	Spaltbreite	[m]	$r$	Abstand	[m]	$t$	Zeit	[s]	$\xi$	Störung	[...]	$k$	Wellenzahl	$[\frac{1}{m}]$	$\varphi$	Betrachtungswinkel	[rad]	$I_s$	Intensität	$[\frac{W}{m^2}]$	$\lambda$	Wellenlänge	[m]	$n$	Ordnung	[1]
$A$	Amplitude	[...]																																	
$A_s$	Formfaktor	[1]																																	
$s$	Spaltbreite	[m]																																	
$r$	Abstand	[m]																																	
$t$	Zeit	[s]																																	
$\xi$	Störung	[...]																																	
$k$	Wellenzahl	$[\frac{1}{m}]$																																	
$\varphi$	Betrachtungswinkel	[rad]																																	
$I_s$	Intensität	$[\frac{W}{m^2}]$																																	
$\lambda$	Wellenlänge	[m]																																	
$n$	Ordnung	[1]																																	

## 8.11.2. Beugung an Kreisförmiger Öffnung

	$\sin(\varphi_1) = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ $a = 1.22 f \frac{\lambda}{D}$	<table> <tr> <td><math>D</math></td><td>Öffnungsdurchmesser</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Betrachtungswinkel</td><td>[rad]</td></tr> <tr> <td><math>\lambda</math></td><td>Wellenlänge</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>a</math></td><td>Radius erster dunkler Ring</td><td>[m]</td></tr> </table>	$D$	Öffnungsdurchmesser	[m]	$\varphi$	Betrachtungswinkel	[rad]	$\lambda$	Wellenlänge	[m]	$a$	Radius erster dunkler Ring	[m]
$D$	Öffnungsdurchmesser	[m]												
$\varphi$	Betrachtungswinkel	[rad]												
$\lambda$	Wellenlänge	[m]												
$a$	Radius erster dunkler Ring	[m]												

## 8.11.3. Beugung am Gitter

	$I_g \sim \frac{A^2}{r^2} A_s^2 B^2$ $B = \frac{\sin\left(\frac{kd \sin(\varphi)}{2} Z\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin(\varphi)}{2}\right)}$ <p>Hauptmaximum n-ter Ordnung:</p> $\sin(\varphi_n) = n \frac{\lambda}{d}$ $\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = nZ$	<table> <tr> <td><math>A</math></td><td>Amplitude</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td><math>A_s</math></td><td>Formfaktor</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>s</math></td><td>Spaltbreite</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Abstand</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>\xi</math></td><td>Störung</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td><math>d</math></td><td>Gitterkonst.</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Betrachtungswinkel</td><td>[rad]</td></tr> <tr> <td><math>I_s</math></td><td>Intensität</td><td>[<math>\frac{W}{m^2}</math>]</td></tr> <tr> <td><math>\lambda</math></td><td>Wellenlänge</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>Z</math></td><td>Zahl Gitteröffnungen</td><td>[1]</td></tr> </table>	$A$	Amplitude	[...]	$A_s$	Formfaktor	[1]	$s$	Spaltbreite	[m]	$r$	Abstand	[m]	$t$	Zeit	[s]	$\xi$	Störung	[...]	$d$	Gitterkonst.	[m]	$\varphi$	Betrachtungswinkel	[rad]	$I_s$	Intensität	[ $\frac{W}{m^2}$ ]	$\lambda$	Wellenlänge	[m]	$Z$	Zahl Gitteröffnungen	[1]
$A$	Amplitude	[...]																																	
$A_s$	Formfaktor	[1]																																	
$s$	Spaltbreite	[m]																																	
$r$	Abstand	[m]																																	
$t$	Zeit	[s]																																	
$\xi$	Störung	[...]																																	
$d$	Gitterkonst.	[m]																																	
$\varphi$	Betrachtungswinkel	[rad]																																	
$I_s$	Intensität	[ $\frac{W}{m^2}$ ]																																	
$\lambda$	Wellenlänge	[m]																																	
$Z$	Zahl Gitteröffnungen	[1]																																	

# **Teil II.**

## **Elektrizitätslehre**

# 9. Grundlagen

## 9.1. Grundgrößen

Ladung $Q$	$\Delta Q = I(t) \cdot \Delta t = \int I(t)$ $\Delta Q = \frac{\Delta W(t)}{\Delta U(t)}$	$Q$ Ladung $[C], [As]$ $I$ Strom $[A]$ $J$ Stromdichte $[\frac{A}{m^2}]$ $E$ el. Feldstärke $[\frac{V}{m}]$ $v$ Driftgeschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$
Strom $I$	$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ $I = \frac{U}{R} = \frac{P}{U}$	$U$ Spannung $[V]$ $W$ Arbeit $[Ws], [J]$ $P$ Leistung $[W]$ $R$ Widerstand $[\Omega]$ $\rho$ Spez. Widerstand $[\frac{\Omega mm^2}{m}]$
Driftgeschwindigkeit $v$	$v = \frac{I}{neA}$	$G$ Leitwert $[S]$ $\kappa$ spez. Leitwert $[\frac{S}{m}]$ $t$ Zeit $[t]$ $A$ Fläche $[m^2]$ $F$ Kraft $[N]$ $m$ Masse $[kg]$ $g$ Erdbeschleunigung $[\frac{m}{s^2}]$
Spannung $U$	$U = RI$ $U(t) = \frac{\Delta W(t)}{\Delta Q}$ $U = \frac{P}{I} = \sqrt{PR}$ $\Delta U = E\Delta x$	$l$ Länge $[m]$ $\alpha$ Temp. Koeff. $[\frac{1}{^\circ C}]$ $\vartheta$ Temperatur $[^\circ C]$ $n$ Elektronendichte $[\frac{1}{m^3}]$
Energie $W$	$W = Fh = mgh$ $\Delta W(t) = U(t)I(t)\Delta t$	$e$ Elementarladung $[C]$ $1.602 \cdot 10^{19} C$

## 9. GRUNDLAGEN

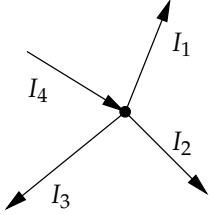
Leistung $P$	$P(t) = \frac{\Delta W(t)}{\Delta t}$ $P(t) = U(t)I(t)$ $P(t) = I^2(t)R = \frac{U^2(t)}{R}$	$Q$ Ladung $[C], [As]$ $I$ Strom $[A]$ $J$ Stromdichte $[\frac{A}{m^2}]$ $E$ el. Feldstärke $[\frac{V}{m}]$ $v$ DriftGeschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$
Widerstand $R$	$R = \frac{U}{I} = \frac{U^2}{P} = \frac{P}{I^2}$ $R = \frac{\rho l}{A} = \frac{l}{\kappa A}$	$U$ Spannung $[V]$ $W$ Arbeit $[Ws], [J]$ $P$ Leistung $[W]$ $R$ Widerstand $[\Omega]$ $\rho$ Spez. Widerstand $[\frac{\Omega mm^2}{m}]$
Spez. Widerstand $\rho$	$\rho = \frac{1}{\kappa A}$ $\rho = \rho_{20}(1 + \alpha_{20})\Delta\vartheta$	$G$ Leitwert $[S]$ $\kappa$ spez. Leitwert $[\frac{S}{m}]$ $t$ Zeit $[t]$ $A$ Fläche $[m^2]$ $F$ Kraft $[N]$ $m$ Masse $[kg]$ $g$ Erdberschleunigung $[\frac{m}{s^2}]$
Leitwert $G$	$G = \frac{\kappa A}{l} = \frac{1}{R}$	$l$ Länge $[m]$ $\alpha$ Temp. Koeff. $[\frac{1}{^\circ C}]$ $\vartheta$ Temperatur $[^\circ C]$
Spez. Leitwert $\kappa$	$\kappa = \frac{1}{\rho}$	$n$ Elektronendichte $[\frac{1}{m^3}]$ $e$ Elementarladung $[C]$ $1.602 \cdot 10^{19} C$
Stromdichte $J$	$J(t) = \frac{I(t)}{A} = \frac{\Delta I(x, y)}{\Delta A}$ $\vec{J} = \kappa \vec{E}$	
Feldstärke $E$	$E(x) = \frac{\Delta U}{\Delta x}$ $E = \frac{F}{Q}$ $\vec{E} = \rho \vec{J}$	



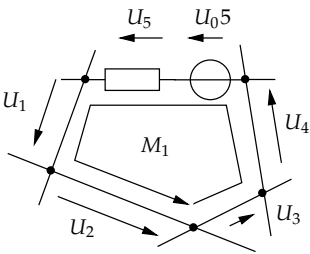
## 9.2. Netzwerke bei Gleichstrom

### 9.2.1. Kirchhoffsche Gesetze

#### Stromgesetz

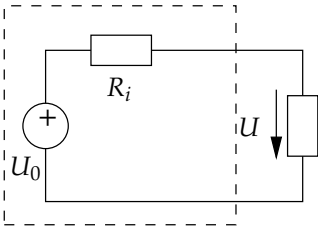
	<p>Die Summe aller zufließenden Ströme ist gleich der Summe aller Abfließenden Ströme</p> $\sum_{k=1}^N I_k = 0$	<table> <tr> <td><math>I</math></td> <td>Strom</td> <td>[A]</td> </tr> </table>	$I$	Strom	[A]
$I$	Strom	[A]			

#### Spannungsgesetz

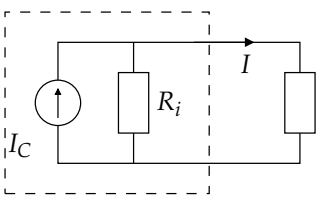
	<p>Die Summe aller Spannungen im Kreis ist null.</p> $\sum_{k=1}^N U_k = 0$	<table> <tr> <td><math>U</math></td> <td>Spannung</td> <td>[V]</td> </tr> </table>	$U$	Spannung	[V]
$U$	Spannung	[V]			

## 9.3. Reale Quellen

### 9.3.1. Reale Spannungsquelle

	$U = U_0 - R_i I$ $R_i = \frac{U_0}{I_C}$	<table> <tr> <td><math>U</math></td> <td>Spannung</td> <td>[V]</td> </tr> <tr> <td><math>I</math></td> <td>Strom</td> <td>[A]</td> </tr> <tr> <td><math>R</math></td> <td>Widerstand</td> <td>[Ω]</td> </tr> </table>	$U$	Spannung	[V]	$I$	Strom	[A]	$R$	Widerstand	[Ω]
$U$	Spannung	[V]									
$I$	Strom	[A]									
$R$	Widerstand	[Ω]									

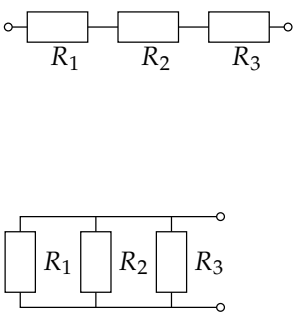
### 9.3.2. Reale Stromquelle

	$I = I_C - G_i U$ $G_i = \frac{1}{R_i} = \frac{I_C}{U_0}$	<table> <tr> <td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[I]</math></td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> </table>	$U$	Spannung	$[V]$	$I$	Strom	$[I]$	$R$	Widerstand	$[\Omega]$
$U$	Spannung	$[V]$									
$I$	Strom	$[I]$									
$R$	Widerstand	$[\Omega]$									

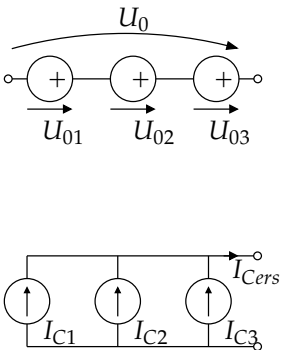
## 9.4. Netzwerkanalyse

### 9.4.1. Netzwerkumwandlung

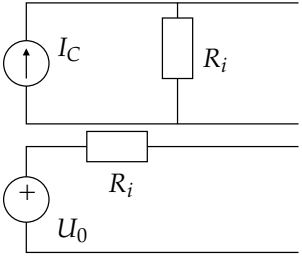
#### Widerstandsschaltungen

	<p>Serieschaltung:</p> $R_{\text{ers}} = \sum_{k=1}^n R_k$ <p>Parallelschaltung:</p> $R_{\text{ers}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}$	<table> <tr> <td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[I]</math></td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> </table>	$U$	Spannung	$[V]$	$I$	Strom	$[I]$	$R$	Widerstand	$[\Omega]$
$U$	Spannung	$[V]$									
$I$	Strom	$[I]$									
$R$	Widerstand	$[\Omega]$									

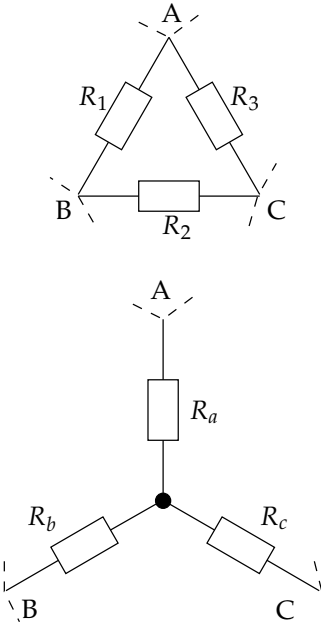
#### Mehrere Quellen

	<p>Serieschaltung von Spannungsquellen:</p> $U_{0\text{ers}} = \sum_{k=1}^n U_{0_k}$ <p>Parallelschaltung von Stromquellen:</p> $I_{C\text{ers}} = \sum_{k=1}^n I_{C_k}$	<table> <tr> <td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[I]</math></td></tr> </table>	$U$	Spannung	$[V]$	$I$	Strom	$[I]$
$U$	Spannung	$[V]$						
$I$	Strom	$[I]$						

## Quellenumwandlung

	<p>U-Quelle <math>\rightarrow</math> I-Quelle:</p> $R_i = R_i \quad I_C = \frac{U_0}{R_i}$ <p>I-Quelle <math>\rightarrow</math> U-Quelle:</p> $R_i = R_i \quad U_0 = I_C R_i$	<table> <tr> <td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[I]</math></td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> </table>	$U$	Spannung	$[V]$	$I$	Strom	$[I]$	$R$	Widerstand	$[\Omega]$
$U$	Spannung	$[V]$									
$I$	Strom	$[I]$									
$R$	Widerstand	$[\Omega]$									

## Stern – Dreieck Umwandlung

	<p>Dreieck <math>\rightarrow</math> Stern:</p> $R_a = \frac{R_1 R_2}{R_0}$ $R_b = \frac{R_2 R_3}{R_0}$ $R_c = \frac{R_1 R_3}{R_0}$ $R_0 = R_1 + R_2 + R_3$ <p>Stern <math>\rightarrow</math> Dreieck:</p> $R_1 = R_a R_b B_0 \quad G_1 = \frac{G_a G_b}{G_0}$ $R_2 = R_b R_c B_0 \quad G_1 = \frac{G_b G_c}{G_0}$ $R_3 = R_a R_c B_0 \quad G_1 = \frac{G_a G_c}{G_0}$ $G_0 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$	<table> <tr> <td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[I]</math></td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr> <td><math>G</math></td><td>Leitwert</td><td><math>[S]</math></td></tr> </table>	$U$	Spannung	$[V]$	$I$	Strom	$[I]$	$R$	Widerstand	$[\Omega]$	$G$	Leitwert	$[S]$
$U$	Spannung	$[V]$												
$I$	Strom	$[I]$												
$R$	Widerstand	$[\Omega]$												
$G$	Leitwert	$[S]$												

## Überlagerungsprinzip (Superposition)

Die Wirkungen der entsprechenden Ursachen werden einzeln betrachtet. In einer Schaltung mit mehreren Quellen wird jede Quelle einzeln betrachtet. Die übrigen Spannungsquellen werden durch einen Kurzschluss und die restlichen Stromquellen durch einen Unterbruch ersetzt. Die Summen der einzelnen Teilwirkungen ergibt die gesamte Wirkung.

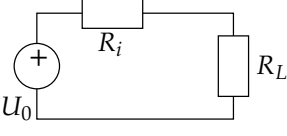
## 9. GRUNDLAGEN

(Voraussetzung: lineares System)

### Nichtlinearer Verbraucher an linearer Schaltung (Thévenin)

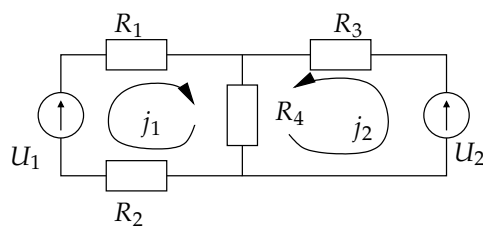
Die gesamte Schaltung muss in eine Ersatzquelle umgeformt werden. Das Ersatzschema gilt für  $U$  und  $I$ . (Achtung: z.B.  $P_{\text{Quellen}} \neq U_0 I$ )

### 9.4.2. Wirkungsgrad und Leistungsanpassung

	$\eta = \frac{P_L}{P_0} = \frac{R_L}{\underbrace{R_L + R_i}_{(*)}}$ <p>(*) gilt nicht für Ersatzschaltungen</p>	<table> <tr> <td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>P</math></td><td>Leistung</td><td><math>[W]</math></td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> </table>	$U$	Spannung	$[V]$	$P$	Leistung	$[W]$	$R$	Widerstand	$[\Omega]$
$U$	Spannung	$[V]$									
$P$	Leistung	$[W]$									
$R$	Widerstand	$[\Omega]$									

### 9.4.3. Systematische Analyse linearer Netzwerke

#### Kreisströme als Variablen (Kreistrom-Methode)



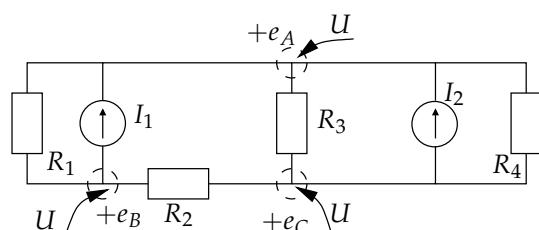
$\alpha$  = Anzahl Knoten  
 $\beta$  = Anzahl Zweige

$\beta - \alpha + 1$  unabhängige Gleichungen

$$\begin{aligned} j_1(R_1 + R_2 + R_4) + j_2 R_4 &= U_1 \\ j_1 R_4 + j_2(R_3 + R_4) &= U_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_4 & R_4 \\ R_4 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

#### Trennspannungen als Variable (Knotenspannungsmethode)



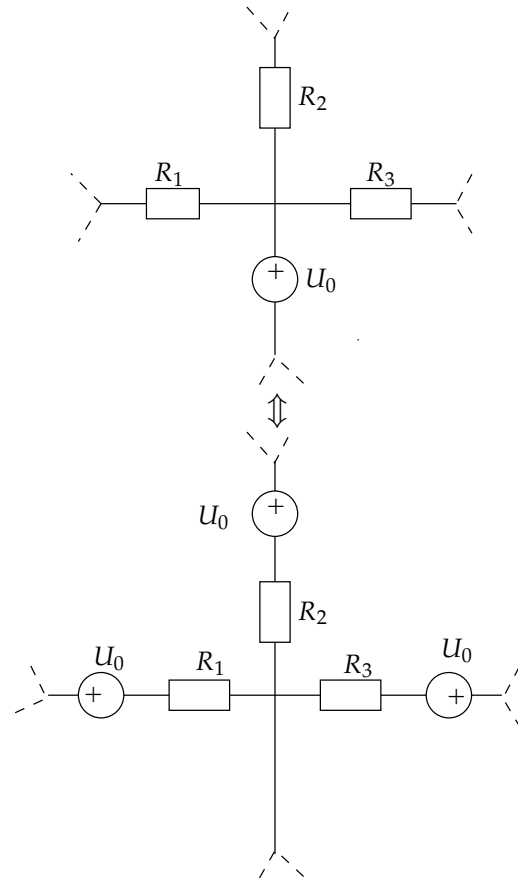
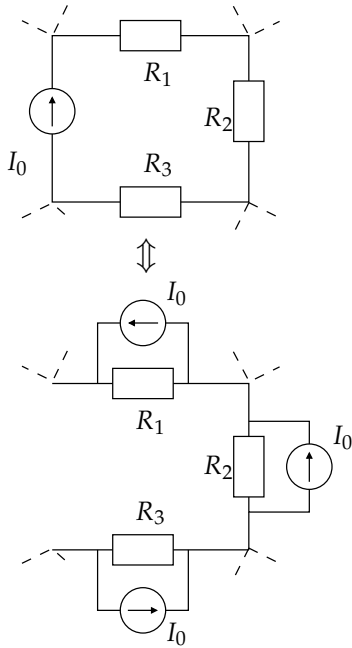
$\alpha$  = Anzahl Knoten  
 $\alpha - 1$  unabhängige Gleichungen

$$\begin{aligned} e_A(G_1 + G_3 + G_4) - e_B G_1 &= -I_1 - I_2 \\ e_A G_1 + e_B(G_1 + G_2) &= I_1 \end{aligned}$$

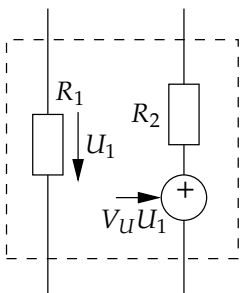
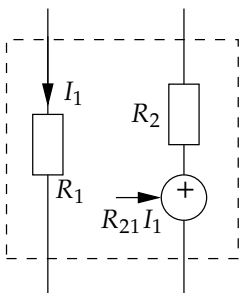
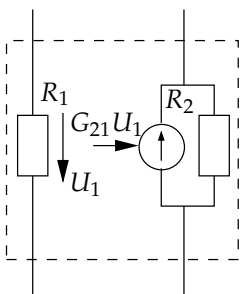
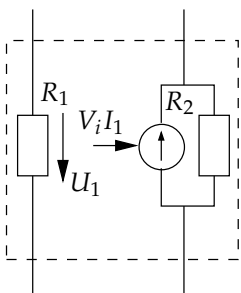
$$\begin{bmatrix} G_1 + G_3 + G_4 & -G_1 \\ G_1 & G_1 + G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 - I_2 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

### 9.4.4. Quellenverschiebung

Es werden gleiche Quellen so in die Schaltung eingefügt, dass die Wirkung der ursprünglichen Quelle aufgehoben wird.

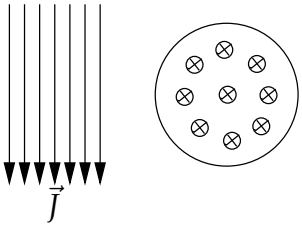


### 9.4.5. Netzwerke mit gesteuerten Quellen

	<p>Spannungsgesteuerte Spannungsquelle</p> $U_{02} = V_U U_1$	<table><tr><td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr><tr><td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr><tr><td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr><tr><td><math>G</math></td><td>Leitwert</td><td><math>[S]</math></td></tr><tr><td><math>V</math></td><td>Verstärkung</td><td><math>[1]</math></td></tr></table>	$I$	Strom	$[A]$	$U$	Spannung	$[V]$	$R$	Widerstand	$[\Omega]$	$G$	Leitwert	$[S]$	$V$	Verstärkung	$[1]$
$I$	Strom	$[A]$															
$U$	Spannung	$[V]$															
$R$	Widerstand	$[\Omega]$															
$G$	Leitwert	$[S]$															
$V$	Verstärkung	$[1]$															
	<p>Stromgesteuerte Spannungsquelle</p> $U_{02} = R_{12} U_1$																
	<p>Spannungsgesteuerte Stromquelle</p> $I_{C2} = G_{12} U_1$																
	<p>Stromgesteuerte Stromquelle</p> $I_{C2} = V_i U_1$																

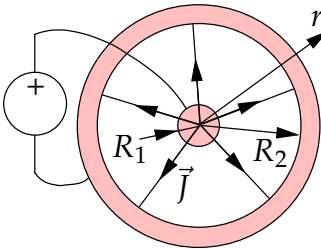
# 10. Das elektrische Strömungsfeld

## 10.1. Allgemein

	$J = \frac{\Delta I}{\Delta A}$ $I = \int \vec{J} d\vec{A} = \vec{J} \vec{A}$	<table> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>J</math></td><td>Stromdichte</td><td><math>[\frac{A}{m^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> </table>	$I$	Strom	$[A]$	$J$	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$	$A$	Fläche	$[m^2]$
$I$	Strom	$[A]$									
$J$	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$									
$A$	Fläche	$[m^2]$									

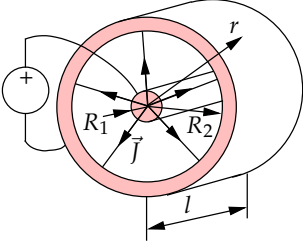
## 10.2. Spezielle Felder

### 10.2.1. Räumliches Zentralfeld (Kugelanordnung)

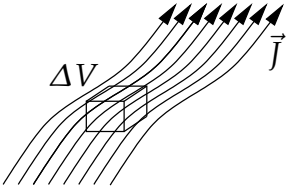
	$J(r) = \frac{I}{A_{\text{Kugel}}} = \frac{I}{4\pi r^2}$ $I = J(r)4\pi r^2 - I = 0$ $J(r) = \kappa E(r) \quad E(r) = \rho E(r)$ $E(r) = \frac{I}{4\pi \kappa r^2}$ $U_{12} = \frac{I}{4\pi \kappa} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ $V(r) = \int_r^{R_2} \vec{E}(x) d\vec{x} = \frac{I}{4\pi \kappa} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$ $G = 4\pi \kappa \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$	<table> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>J</math></td><td>Stromdichte</td><td><math>[\frac{A}{m^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>E</math></td><td>el. Feldstärke</td><td><math>[\frac{V}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>\rho</math></td><td>Spez. Widerstand</td><td><math>[\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\kappa</math></td><td>spez. Leitwert</td><td><math>[\frac{S}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>G</math></td><td>Leitwert</td><td><math>[S]</math></td></tr> <tr> <td><math>R, r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Potential</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> </table>	$I$	Strom	$[A]$	$J$	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$	$E$	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$	$U$	Spannung	$[V]$	$\rho$	Spez. Widerstand	$[\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}]$	$\kappa$	spez. Leitwert	$[\frac{S}{m}]$	$G$	Leitwert	$[S]$	$R, r$	Radius	$[m]$	$V$	Potential	$[V]$	$A$	Fläche	$[m^2]$
$I$	Strom	$[A]$																														
$J$	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$																														
$E$	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$																														
$U$	Spannung	$[V]$																														
$\rho$	Spez. Widerstand	$[\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}]$																														
$\kappa$	spez. Leitwert	$[\frac{S}{m}]$																														
$G$	Leitwert	$[S]$																														
$R, r$	Radius	$[m]$																														
$V$	Potential	$[V]$																														
$A$	Fläche	$[m^2]$																														

## 10. DAS ELEKTRISCHE STRÖMUNGSFELD

### 10.2.2. Zylindrisches Zentralfeld

	$J(r) = \frac{I}{A_{\text{Kugel}}} = \frac{I}{4\pi r^2}$ $J(r) = \frac{I}{2\pi r l}$ $J(r) = \kappa E(r) \quad E(r) = \rho E(r)$ $E(r) = \frac{I}{2\pi \kappa r l}$ $U_{12} = \frac{I}{2\pi \kappa l} \ln \frac{r_2}{r_1}$ $U = \frac{I}{2\pi \kappa l} \ln \frac{R_2}{R_1}$ $V(r) = \frac{I}{2\pi \kappa l} \ln \frac{R_2}{r}$ $G = \frac{2\pi \kappa l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$	<table> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>J</math></td><td>Stromdichte</td><td><math>[\frac{A}{m^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>E</math></td><td>el. Feldstärke</td><td><math>[\frac{V}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Potential</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>\rho</math></td><td>Spez. Widerstand</td><td><math>[\frac{\Omega mm^2}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\kappa</math></td><td>spez. Leitwert</td><td><math>[\frac{S}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>G</math></td><td>Leitwert</td><td><math>[S]</math></td></tr> <tr> <td><math>R, r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> </table>	$I$	Strom	$[A]$	$J$	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$	$E$	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$	$U$	Spannung	$[V]$	$V$	Potential	$[V]$	$\rho$	Spez. Widerstand	$[\frac{\Omega mm^2}{m}]$	$\kappa$	spez. Leitwert	$[\frac{S}{m}]$	$G$	Leitwert	$[S]$	$R, r$	Radius	$[m]$	$A$	Fläche	$[m^2]$
$I$	Strom	$[A]$																														
$J$	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$																														
$E$	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$																														
$U$	Spannung	$[V]$																														
$V$	Potential	$[V]$																														
$\rho$	Spez. Widerstand	$[\frac{\Omega mm^2}{m}]$																														
$\kappa$	spez. Leitwert	$[\frac{S}{m}]$																														
$G$	Leitwert	$[S]$																														
$R, r$	Radius	$[m]$																														
$A$	Fläche	$[m^2]$																														

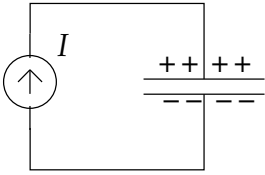
### 10.2.3. Leistung und räumliche Leistungsdichte

	$p(x, y, z) = \frac{\Delta P}{\Delta V}$ $p(x, y, z) = E(x, y, z) J(x, y, z)$ $= \kappa(x, y, z) E^2(x, y, z)$ $= \rho(x, y, z) J^2(x, y, z)$ <p>Gesamtleistung <math>P</math> aus <math>p</math>:</p> $P = \sum \Delta p = \sum_n P_n \Delta V$	<table> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>J</math></td><td>Stromdichte</td><td><math>[\frac{A}{m^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>E</math></td><td>el. Feldstärke</td><td><math>[\frac{V}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>\rho</math></td><td>Spez. Widerstand</td><td><math>[\frac{\Omega mm^2}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\kappa</math></td><td>spez. Leitwert</td><td><math>[\frac{S}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>G</math></td><td>Leitwert</td><td><math>[S]</math></td></tr> <tr> <td><math>R, r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> </table>	$I$	Strom	$[A]$	$J$	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$	$E$	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$	$U$	Spannung	$[V]$	$\rho$	Spez. Widerstand	$[\frac{\Omega mm^2}{m}]$	$\kappa$	spez. Leitwert	$[\frac{S}{m}]$	$G$	Leitwert	$[S]$	$R, r$	Radius	$[m]$	$A$	Fläche	$[m^2]$
$I$	Strom	$[A]$																											
$J$	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$																											
$E$	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$																											
$U$	Spannung	$[V]$																											
$\rho$	Spez. Widerstand	$[\frac{\Omega mm^2}{m}]$																											
$\kappa$	spez. Leitwert	$[\frac{S}{m}]$																											
$G$	Leitwert	$[S]$																											
$R, r$	Radius	$[m]$																											
$A$	Fläche	$[m^2]$																											

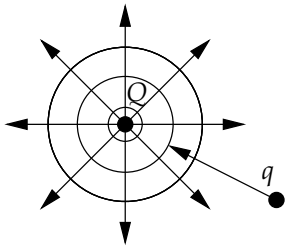


# 11. Elektrostatik

## 11.1. Das Coulombsche Gesetz

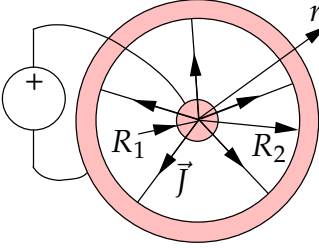
	$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r^2}$ $F > 0 \rightarrow \text{Abstossung}$ $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Nm}$	<table> <tr> <td><math>F</math></td><td>Kraft</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr> <td><math>Q</math></td><td>Ladung</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\epsilon</math></td><td>Dielektrizität</td><td><math>[\frac{C}{Nm}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\epsilon_r</math></td><td>rel. Dielektrizität</td><td></td></tr> <tr> <td><math>\epsilon_0</math></td><td>Dielektrizitätskonstante</td><td><math>[\frac{C}{Nm}]</math></td></tr> </table>	$F$	Kraft	$[N]$	$Q$	Ladung	$[C]$	$r$	Radius	$[m]$	$\epsilon$	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$	$\epsilon_r$	rel. Dielektrizität		$\epsilon_0$	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$
$F$	Kraft	$[N]$																		
$Q$	Ladung	$[C]$																		
$r$	Radius	$[m]$																		
$\epsilon$	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$																		
$\epsilon_r$	rel. Dielektrizität																			
$\epsilon_0$	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$																		

## 11.2. Das elektrostatische Feld (Allgemein)

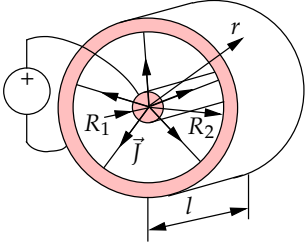
 <p>Bei mehreren Ladungen gilt das Superpositionsprinzip</p>	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{e}_r$ $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$ $U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} d\vec{s}$ $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $\psi_{el} = \int_A \vec{D} d\vec{A}$ $\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$ $Q = CU$	<table> <tr> <td><math>F</math></td><td>Kraft</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr> <td><math>Q</math></td><td>Ladung</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr> <td><math>q</math></td><td>Probeladung</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>C</math></td><td>Kapazität</td><td><math>[F]</math></td></tr> <tr> <td><math>E</math></td><td>el. Feldstärke</td><td><math>[\frac{V}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Potential</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>\sigma</math></td><td>Oberfl. Ladungsdichte</td><td><math>[\frac{C}{m^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>\psi_{el}</math></td><td>el. Fluss</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr> <td><math>\epsilon</math></td><td>Dielektrizität</td><td><math>[\frac{C}{Nm}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\epsilon_r</math></td><td>rel. Dielektrizität</td><td></td></tr> <tr> <td><math>\epsilon_0</math></td><td>Dielektrizitätskonstante</td><td><math>[\frac{C}{Nm}]</math></td></tr> </table>	$F$	Kraft	$[N]$	$Q$	Ladung	$[C]$	$q$	Probeladung	$[C]$	$r$	Radius	$[m]$	$C$	Kapazität	$[F]$	$E$	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$	$U$	Spannung	$[V]$	$V$	Potential	$[V]$	$\sigma$	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{C}{m^2}]$	$A$	Fläche	$[m^2]$	$\psi_{el}$	el. Fluss	$[C]$	$\epsilon$	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$	$\epsilon_r$	rel. Dielektrizität		$\epsilon_0$	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$
$F$	Kraft	$[N]$																																										
$Q$	Ladung	$[C]$																																										
$q$	Probeladung	$[C]$																																										
$r$	Radius	$[m]$																																										
$C$	Kapazität	$[F]$																																										
$E$	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$																																										
$U$	Spannung	$[V]$																																										
$V$	Potential	$[V]$																																										
$\sigma$	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{C}{m^2}]$																																										
$A$	Fläche	$[m^2]$																																										
$\psi_{el}$	el. Fluss	$[C]$																																										
$\epsilon$	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$																																										
$\epsilon_r$	rel. Dielektrizität																																											
$\epsilon_0$	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$																																										

## 11.3. Spezielle Felder

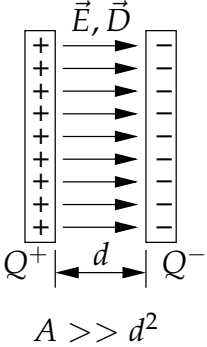
### 11.3.1. Räumliches Zentralfeld (Kugelanordnung)

	$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \text{const}$ <p>für <math>R_1 &lt; r &lt; R_2</math> gilt:</p> $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{1}{\epsilon} D(r)$ $D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{QR^2}{4\pi r^2} = \frac{\sigma R^2}{r^2}$ $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$ <p>Hülle bei <math>r</math>:</p> $\psi_{el} = D(r) 4\pi r^2 = Q$ <p>Kugelkondensator:</p> $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ $C = \frac{Q}{U} = \frac{\psi_{el}}{U} = 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$	<table> <tr> <td><math>Q</math></td><td>Ladung</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr> <td><math>R, r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>C</math></td><td>Kapazität</td><td><math>[F]</math></td></tr> <tr> <td><math>E</math></td><td>el. Feldstärke</td><td><math>\left[\frac{V}{m}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Potential</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>\sigma</math></td><td>Oberfl. Ladungsdichte</td><td><math>\left[\frac{Qmm^2}{m}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>\psi_{el}</math></td><td>el. Fluss</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr> <td><math>\epsilon</math></td><td>Dielektrizität</td><td><math>\left[\frac{C}{Nm}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\epsilon_r</math></td><td>rel. Dielektrizität</td><td></td></tr> <tr> <td><math>\epsilon_0</math></td><td>Dielektrizitätskonstante</td><td><math>\left[\frac{C}{Nm}\right]</math></td></tr> </table>	$Q$	Ladung	$[C]$	$R, r$	Radius	$[m]$	$C$	Kapazität	$[F]$	$E$	el. Feldstärke	$\left[\frac{V}{m}\right]$	$U$	Spannung	$[V]$	$V$	Potential	$[V]$	$\sigma$	Oberfl. Ladungsdichte	$\left[\frac{Qmm^2}{m}\right]$	$A$	Fläche	$[m^2]$	$\psi_{el}$	el. Fluss	$[C]$	$\epsilon$	Dielektrizität	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$	$\epsilon_r$	rel. Dielektrizität		$\epsilon_0$	Dielektrizitätskonstante	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$
$Q$	Ladung	$[C]$																																				
$R, r$	Radius	$[m]$																																				
$C$	Kapazität	$[F]$																																				
$E$	el. Feldstärke	$\left[\frac{V}{m}\right]$																																				
$U$	Spannung	$[V]$																																				
$V$	Potential	$[V]$																																				
$\sigma$	Oberfl. Ladungsdichte	$\left[\frac{Qmm^2}{m}\right]$																																				
$A$	Fläche	$[m^2]$																																				
$\psi_{el}$	el. Fluss	$[C]$																																				
$\epsilon$	Dielektrizität	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$																																				
$\epsilon_r$	rel. Dielektrizität																																					
$\epsilon_0$	Dielektrizitätskonstante	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$																																				

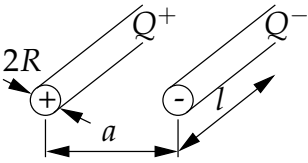
## 11.3.2. Zylindrisches Zentralfeld

	$\sigma = \frac{Q}{2\pi R_1 l} = \text{const}$ <p>für <math>R_1 &lt; r &lt; R_2</math> gilt:</p> $E(r) = \frac{Q}{2\pi \epsilon r l} = \frac{1}{\epsilon} D(r)$ $D(r) = \frac{Q}{2\pi r l} = \frac{\sigma R}{r}$ $V(r) = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln \frac{R_2}{r}$ <p>Hülle bei <math>r</math>:</p> $\psi_{el} = D(r) 2\pi r l = Q$ <p>Kondensator:</p> $U = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln \frac{R_1}{R_2}$ $C = \frac{Q}{U} = \frac{\psi_{el}}{U} = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$	<table> <tr><td><math>Q</math></td><td>Ladung</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr><td><math>R, r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr><td><math>C</math></td><td>Kapazität</td><td><math>[F]</math></td></tr> <tr><td><math>E</math></td><td>el. Feldstärke</td><td><math>[\frac{V}{m}]</math></td></tr> <tr><td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr><td><math>V</math></td><td>Potential</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr><td><math>\sigma</math></td><td>Oberfl. Ladungsdichte</td><td><math>[\frac{C}{m^2}]</math></td></tr> <tr><td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr><td><math>\psi_{el}</math></td><td>el. Fluss</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr><td><math>\epsilon</math></td><td>Dielektrizität</td><td><math>[\frac{C}{Nm}]</math></td></tr> <tr><td><math>\epsilon_r</math></td><td>rel. Dielektrizität</td><td></td></tr> <tr><td><math>\epsilon_0</math></td><td>Dielektrizitätskonstante</td><td><math>[\frac{C}{Nm}]</math></td></tr> </table>	$Q$	Ladung	$[C]$	$R, r$	Radius	$[m]$	$C$	Kapazität	$[F]$	$E$	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$	$U$	Spannung	$[V]$	$V$	Potential	$[V]$	$\sigma$	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{C}{m^2}]$	$A$	Fläche	$[m^2]$	$\psi_{el}$	el. Fluss	$[C]$	$\epsilon$	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$	$\epsilon_r$	rel. Dielektrizität		$\epsilon_0$	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$
$Q$	Ladung	$[C]$																																				
$R, r$	Radius	$[m]$																																				
$C$	Kapazität	$[F]$																																				
$E$	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$																																				
$U$	Spannung	$[V]$																																				
$V$	Potential	$[V]$																																				
$\sigma$	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{C}{m^2}]$																																				
$A$	Fläche	$[m^2]$																																				
$\psi_{el}$	el. Fluss	$[C]$																																				
$\epsilon$	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$																																				
$\epsilon_r$	rel. Dielektrizität																																					
$\epsilon_0$	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$																																				

## 11.3.3. Homogenes Feld (Plattenkondensator)

 <p><math>A \gg d^2</math></p>	$\sigma = D = \frac{Q}{A}$ $E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{A\epsilon}$ <p>Kondensator:</p> $U = \frac{\sigma}{\epsilon} d = \frac{Q}{A\epsilon} d$ $C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon A}{d}$	<table> <tr><td><math>Q</math></td><td>Ladung</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr><td><math>d</math></td><td>Abstand</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr><td><math>C</math></td><td>Kapazität</td><td><math>[F]</math></td></tr> <tr><td><math>E</math></td><td>el. Feldstärke</td><td><math>[\frac{V}{m}]</math></td></tr> <tr><td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr><td><math>V</math></td><td>Potential</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr><td><math>\sigma</math></td><td>Oberfl. Ladungsdichte</td><td><math>[\frac{C}{m^2}]</math></td></tr> <tr><td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr><td><math>\psi_{el}</math></td><td>el. Fluss</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr><td><math>\epsilon</math></td><td>Dielektrizität</td><td><math>[\frac{C}{Nm}]</math></td></tr> <tr><td><math>\epsilon_r</math></td><td>rel. Dielektrizität</td><td></td></tr> <tr><td><math>\epsilon_0</math></td><td>Dielektrizitätskonstante</td><td><math>[\frac{C}{Nm}]</math></td></tr> </table>	$Q$	Ladung	$[C]$	$d$	Abstand	$[m]$	$C$	Kapazität	$[F]$	$E$	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$	$U$	Spannung	$[V]$	$V$	Potential	$[V]$	$\sigma$	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{C}{m^2}]$	$A$	Fläche	$[m^2]$	$\psi_{el}$	el. Fluss	$[C]$	$\epsilon$	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$	$\epsilon_r$	rel. Dielektrizität		$\epsilon_0$	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$
$Q$	Ladung	$[C]$																																				
$d$	Abstand	$[m]$																																				
$C$	Kapazität	$[F]$																																				
$E$	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$																																				
$U$	Spannung	$[V]$																																				
$V$	Potential	$[V]$																																				
$\sigma$	Oberfl. Ladungsdichte	$[\frac{C}{m^2}]$																																				
$A$	Fläche	$[m^2]$																																				
$\psi_{el}$	el. Fluss	$[C]$																																				
$\epsilon$	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$																																				
$\epsilon_r$	rel. Dielektrizität																																					
$\epsilon_0$	Dielektrizitätskonstante	$[\frac{C}{Nm}]$																																				

### 11.3.4. Paralleldrahtleitung

	<p>Es gilt das Superpositionsprinzip:</p> $E_{tot} = E_{Leiter_1} + E_{Leiter_2}$ <p>Kondensator:</p> $C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi \epsilon l}{\ln \frac{a-R}{R}}$ $C' = \frac{Q}{U} = \frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{a-R}{R}}$	<table> <tr> <td><math>Q</math></td><td>Ladung</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr> <td><math>d</math></td><td>Abstand</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>C</math></td><td>Kapazität</td><td><math>[F]</math></td></tr> <tr> <td><math>E</math></td><td>el. Feldstärke</td><td><math>\left[\frac{V}{m}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Potential</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>\sigma</math></td><td>Oberfl. Ladungsdichte</td><td><math>\left[\frac{C}{m^2}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>\psi_{el}</math></td><td>el. Fluss</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr> <td><math>\epsilon</math></td><td>Dielektrizität</td><td><math>\left[\frac{C}{Nm}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\epsilon_r</math></td><td>rel. Dielektrizität</td><td></td></tr> <tr> <td><math>\epsilon_0</math></td><td>Dielektrizitätskonstante</td><td><math>\left[\frac{C}{Nm}\right]</math></td></tr> </table>	$Q$	Ladung	$[C]$	$d$	Abstand	$[m]$	$C$	Kapazität	$[F]$	$E$	el. Feldstärke	$\left[\frac{V}{m}\right]$	$U$	Spannung	$[V]$	$V$	Potential	$[V]$	$\sigma$	Oberfl. Ladungsdichte	$\left[\frac{C}{m^2}\right]$	$A$	Fläche	$[m^2]$	$\psi_{el}$	el. Fluss	$[C]$	$\epsilon$	Dielektrizität	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$	$\epsilon_r$	rel. Dielektrizität		$\epsilon_0$	Dielektrizitätskonstante	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$
$Q$	Ladung	$[C]$																																				
$d$	Abstand	$[m]$																																				
$C$	Kapazität	$[F]$																																				
$E$	el. Feldstärke	$\left[\frac{V}{m}\right]$																																				
$U$	Spannung	$[V]$																																				
$V$	Potential	$[V]$																																				
$\sigma$	Oberfl. Ladungsdichte	$\left[\frac{C}{m^2}\right]$																																				
$A$	Fläche	$[m^2]$																																				
$\psi_{el}$	el. Fluss	$[C]$																																				
$\epsilon$	Dielektrizität	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$																																				
$\epsilon_r$	rel. Dielektrizität																																					
$\epsilon_0$	Dielektrizitätskonstante	$\left[\frac{C}{Nm}\right]$																																				

## 11.4. Energie im elektrischen Feld

	$W = \frac{CU^2}{2}$ $w = \frac{W}{V}$ <p>Allgemein:</p> $w(x, y, z) = \frac{dW(x, y, z)}{dV}$	<table> <tr> <td><math>W</math></td><td>Energie</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>w</math></td><td>Energiedichte</td><td><math>[J/m^3]</math></td></tr> <tr> <td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>C</math></td><td>Kapazität</td><td><math>[F]</math></td></tr> <tr> <td><math>V</math></td><td>Volumen</td><td><math>[m^3]</math></td></tr> </table>	$W$	Energie	$[J]$	$w$	Energiedichte	$[J/m^3]$	$U$	Spannung	$[V]$	$C$	Kapazität	$[F]$	$V$	Volumen	$[m^3]$
$W$	Energie	$[J]$															
$w$	Energiedichte	$[J/m^3]$															
$U$	Spannung	$[V]$															
$C$	Kapazität	$[F]$															
$V$	Volumen	$[m^3]$															

## 11.5. Kräfte im elektrischen Feld

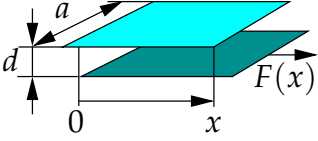
### 11.5.1. Allgemein

$$\Delta W = F \Delta x \Leftrightarrow F = \frac{\Delta W}{\Delta x} \Leftrightarrow F(x) = \frac{dW(x)}{dx}$$

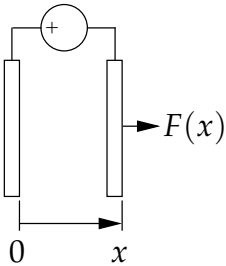
#### Prinzip der virtuellen Verschiebung

Man denkt sich den Leiter, auf den die Kraft berechnet werden soll, um  $\Delta x$  in diejenige Richtung verschoben, in welche die Kraft berechnet werden soll:  $\rightarrow$  Energiedifferenz  $\Delta W$

### 11.5.2. Verschiebung

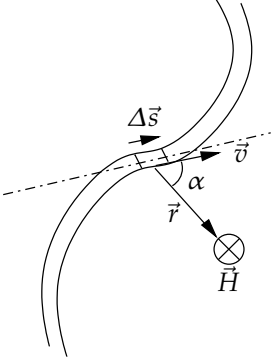
	<p>Mit eingeschalteter Quelle:</p> $W(x) = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon AU^2}{2d} = \frac{\epsilon axU^2}{2d}$ $F(x) = \frac{dW(x)}{dx} = \frac{\epsilon aU^2}{2d}$ <p>Mit ausgeschalteter Quelle:</p> $W(x) = \frac{\epsilon AU^2}{2d} = \frac{\epsilon ax_0^2 U^2}{2xd}$ $F(x) = \frac{dW(x)}{dx} = \frac{\epsilon ax_0^2 U^2}{2x^2 d}$	<table> <tr><td><math>Q</math></td><td>Ladung</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr><td><math>d</math></td><td>Abstand</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr><td><math>x</math></td><td>Überlappung</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr><td><math>C</math></td><td>Kapazität</td><td><math>[F]</math></td></tr> <tr><td><math>E</math></td><td>el. Feldstärke</td><td><math>[\frac{V}{m}]</math></td></tr> <tr><td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr><td><math>V</math></td><td>Potential</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr><td><math>\sigma</math></td><td>Oberfl. La- dungsdichte</td><td><math>[\frac{C}{m^2}]</math></td></tr> <tr><td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr><td><math>\psi_{el}</math></td><td>el. Fluss</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr><td><math>\epsilon</math></td><td>Dielektrizität</td><td><math>[\frac{C}{Nm}]</math></td></tr> <tr><td><math>\epsilon_r</math></td><td>rel. Dielektri- zität</td><td></td></tr> <tr><td><math>\epsilon_0</math></td><td>Dielektrizitäts- konstante</td><td><math>[\frac{C}{Nm}]</math></td></tr> </table>	$Q$	Ladung	$[C]$	$d$	Abstand	$[m]$	$x$	Überlappung	$[m]$	$C$	Kapazität	$[F]$	$E$	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$	$U$	Spannung	$[V]$	$V$	Potential	$[V]$	$\sigma$	Oberfl. La- dungsdichte	$[\frac{C}{m^2}]$	$A$	Fläche	$[m^2]$	$\psi_{el}$	el. Fluss	$[C]$	$\epsilon$	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$	$\epsilon_r$	rel. Dielektri- zität		$\epsilon_0$	Dielektrizitäts- konstante	$[\frac{C}{Nm}]$
$Q$	Ladung	$[C]$																																							
$d$	Abstand	$[m]$																																							
$x$	Überlappung	$[m]$																																							
$C$	Kapazität	$[F]$																																							
$E$	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$																																							
$U$	Spannung	$[V]$																																							
$V$	Potential	$[V]$																																							
$\sigma$	Oberfl. La- dungsdichte	$[\frac{C}{m^2}]$																																							
$A$	Fläche	$[m^2]$																																							
$\psi_{el}$	el. Fluss	$[C]$																																							
$\epsilon$	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$																																							
$\epsilon_r$	rel. Dielektri- zität																																								
$\epsilon_0$	Dielektrizitäts- konstante	$[\frac{C}{Nm}]$																																							

### 11.5.3. Anziehung

	$W(x) = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon AU^2}{2x}$ $F(x) = \frac{dW(x)}{dx} = \frac{\epsilon AU^2}{2x^2}$	<table> <tr><td><math>Q</math></td><td>Ladung</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr><td><math>x</math></td><td>Abstand</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr><td><math>C</math></td><td>Kapazität</td><td><math>[F]</math></td></tr> <tr><td><math>E</math></td><td>el. Feldstärke</td><td><math>[\frac{V}{m}]</math></td></tr> <tr><td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr><td><math>V</math></td><td>Potential</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr><td><math>\sigma</math></td><td>Oberfl. La- dungsdichte</td><td><math>[\frac{C}{m^2}]</math></td></tr> <tr><td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr><td><math>\psi_{el}</math></td><td>el. Fluss</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr><td><math>\epsilon</math></td><td>Dielektrizität</td><td><math>[\frac{C}{Nm}]</math></td></tr> <tr><td><math>\epsilon_r</math></td><td>rel. Dielektri- zität</td><td></td></tr> <tr><td><math>\epsilon_0</math></td><td>Dielektrizitäts- konstante</td><td><math>[\frac{C}{Nm}]</math></td></tr> </table>	$Q$	Ladung	$[C]$	$x$	Abstand	$[m]$	$C$	Kapazität	$[F]$	$E$	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$	$U$	Spannung	$[V]$	$V$	Potential	$[V]$	$\sigma$	Oberfl. La- dungsdichte	$[\frac{C}{m^2}]$	$A$	Fläche	$[m^2]$	$\psi_{el}$	el. Fluss	$[C]$	$\epsilon$	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$	$\epsilon_r$	rel. Dielektri- zität		$\epsilon_0$	Dielektrizitäts- konstante	$[\frac{C}{Nm}]$
$Q$	Ladung	$[C]$																																				
$x$	Abstand	$[m]$																																				
$C$	Kapazität	$[F]$																																				
$E$	el. Feldstärke	$[\frac{V}{m}]$																																				
$U$	Spannung	$[V]$																																				
$V$	Potential	$[V]$																																				
$\sigma$	Oberfl. La- dungsdichte	$[\frac{C}{m^2}]$																																				
$A$	Fläche	$[m^2]$																																				
$\psi_{el}$	el. Fluss	$[C]$																																				
$\epsilon$	Dielektrizität	$[\frac{C}{Nm}]$																																				
$\epsilon_r$	rel. Dielektri- zität																																					
$\epsilon_0$	Dielektrizitäts- konstante	$[\frac{C}{Nm}]$																																				

# 12. Magnetismus

## 12.1. Feldstärke

 <p>siehe spezielle Anordnungen ab S. 98.</p>	<p>Biot-Savart</p> $\vec{H} = \frac{Q}{4\pi r^3} (\vec{v} \times \vec{r})$ $H = \frac{Qv}{4\pi r^2} \sin \alpha$ <p>Leiterbezogen</p> $d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^3} (d\vec{s} \times \vec{r})$ $dH = \frac{I ds}{4\pi r^2} \sin \alpha$ $H = \int d\vec{H} = \int \frac{I}{4\pi r^2} \sin \alpha ds$	<table> <tr> <td><math>H</math></td><td>Feldstärke</td><td><math>\left[\frac{A}{m}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>ds</math></td><td>infinitesimales Leiterstück</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>v</math></td><td>Geschwindigkeit</td><td><math>\left[\frac{m}{s}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\alpha</math></td><td>Winkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> </table>	$H$	Feldstärke	$\left[\frac{A}{m}\right]$	$I$	Strom	$[A]$	$ds$	infinitesimales Leiterstück	$[m]$	$r$	Radius	$[m]$	$v$	Geschwindigkeit	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$\alpha$	Winkel	$[rad]$
$H$	Feldstärke	$\left[\frac{A}{m}\right]$																		
$I$	Strom	$[A]$																		
$ds$	infinitesimales Leiterstück	$[m]$																		
$r$	Radius	$[m]$																		
$v$	Geschwindigkeit	$\left[\frac{m}{s}\right]$																		
$\alpha$	Winkel	$[rad]$																		

## 12.2. Permeabilität

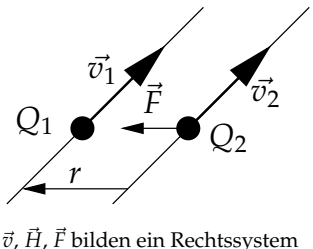
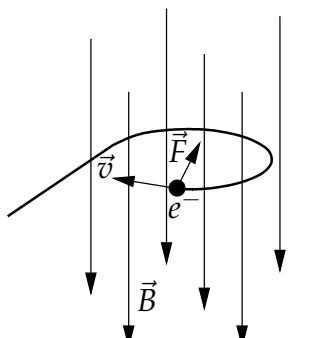
	$\mu = \mu_0 \mu_r$ $\mu_0 = \frac{4\pi}{10} \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{H}{m}$	<table> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Permeabilität</td><td><math>\left[\frac{H}{m}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\mu_r</math></td><td>Permeabilitätszahl</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>\mu_0</math></td><td>Permeabilität des Vakuums</td><td><math>\left[\frac{H}{m}\right]</math></td></tr> </table>	$\mu$	Permeabilität	$\left[\frac{H}{m}\right]$	$\mu_r$	Permeabilitätszahl	$[1]$	$\mu_0$	Permeabilität des Vakuums	$\left[\frac{H}{m}\right]$
$\mu$	Permeabilität	$\left[\frac{H}{m}\right]$									
$\mu_r$	Permeabilitätszahl	$[1]$									
$\mu_0$	Permeabilität des Vakuums	$\left[\frac{H}{m}\right]$									

## 12.3. Magnetische Flussdichte

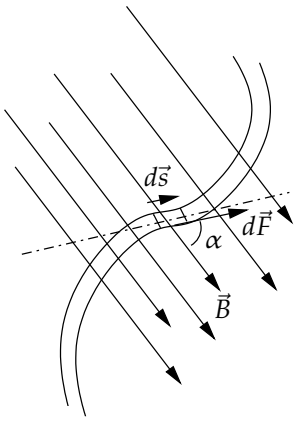
siehe spezielle Anordnungen ab S. 98.	$\vec{B} = \mu \vec{H}$	$H$ Feldstärke $\left[\frac{A}{m}\right]$ $\mu$ Permeabilität $\left[\frac{H}{m}\right]$ $B$ Flussdichte, Induktion $\left[\frac{T}{m}\right], \left[\frac{Vs}{m^2}\right]$
---------------------------------------	-------------------------	---

## 12.4. Kräfte im Magnetischen Feld

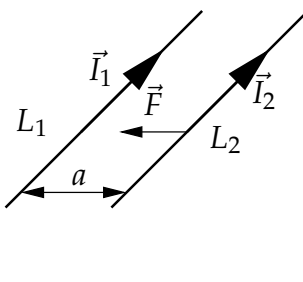
### 12.4.1. Kräfte auf Ladungen

 <p><math>\vec{v}, \vec{H}, \vec{F}</math> bilden ein Rechtssystem</p>	<p>Für parallele Bahnen</p> $F_A = \frac{\mu_0 Q_1 Q_2 v_1 v_2}{4\pi r^2}$ <p>Allgemein</p> $F = Q_2 \vec{v}_2 \times \left( \frac{\mu}{4\pi} \frac{Q_1 \vec{v}_1 \times \frac{\vec{r}}{r}}{r^2} \right)$	$H$ Feldstärke $\left[\frac{A}{m}\right]$ $F$ Kraft auf Ladung $Q_1$ $[N]$ $Q_{1,2}$ Ladung $[C]$ $v_{1,2}$ Geschwindigkeit $\left[\frac{m}{s}\right]$ $r$ Radius $[m]$ $\mu$ Permeabilität $\left[\frac{H}{m}\right]$ $B$ Flussdichte, Induktion $\left[\frac{T}{m}\right], \left[\frac{Vs}{m^2}\right]$
	$F = Q(\vec{v} \times \vec{B})$ $F = Q(\vec{v} \times \mu \vec{H})$ $F = Qv\mu H \sin \alpha$	

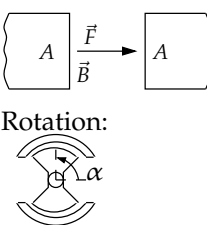
## 12.4.2. Kraft auf Leiter im B-Feld

	$d\vec{F} = \frac{dQ}{dt}(\vec{ds} \times \vec{B}) = I(d\vec{s} \times \vec{B})$ $dF = IBds \sin \alpha$ <p>für geraden Leiter:</p> $F = IBl \sin \alpha$	<table> <tr> <td><math>B</math></td><td>Flussdichte, Induktion</td><td><math>[T], [\frac{Vs}{m^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>F</math></td><td>Kraft auf Leiter</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr> <td><math>Q</math></td><td>Ladung</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>\alpha</math></td><td>Winkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td><math>ds</math></td><td>infinitesimales Leiterstück</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>l</math></td><td>Länge</td><td><math>[m]</math></td></tr> </table>	$B$	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$	$F$	Kraft auf Leiter	$[N]$	$Q$	Ladung	$[C]$	$I$	Strom	$[A]$	$\alpha$	Winkel	$[rad]$	$ds$	infinitesimales Leiterstück	$[m]$	$l$	Länge	$[m]$
$B$	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$																					
$F$	Kraft auf Leiter	$[N]$																					
$Q$	Ladung	$[C]$																					
$I$	Strom	$[A]$																					
$\alpha$	Winkel	$[rad]$																					
$ds$	infinitesimales Leiterstück	$[m]$																					
$l$	Länge	$[m]$																					

## 12.4.3. Kräfte auf parallele Leiter

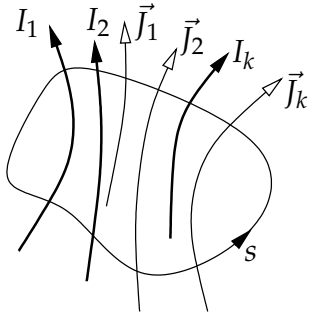
	$F = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi a}$ $\vec{I}_1 \uparrow \downarrow \vec{I}_2 \Rightarrow \text{Abstossung}$ $\vec{I}_1 \uparrow \uparrow \vec{I}_2 \Rightarrow \text{Anziehung}$	<table> <tr> <td><math>F_A</math></td><td>Kraft zwischen den Leitern</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr> <td><math>L_{1,2}</math></td><td>Leiter</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr> <td><math>I_{1,2}</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>a</math></td><td>Abstand</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Permeabilität</td><td><math>[\frac{H}{m}]</math></td></tr> </table>	$F_A$	Kraft zwischen den Leitern	$[N]$	$L_{1,2}$	Leiter	$[C]$	$I_{1,2}$	Strom	$[A]$	$a$	Abstand	$[m]$	$\mu$	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$
$F_A$	Kraft zwischen den Leitern	$[N]$															
$L_{1,2}$	Leiter	$[C]$															
$I_{1,2}$	Strom	$[A]$															
$a$	Abstand	$[m]$															
$\mu$	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$															

## 12.4.4. Kräfte auf Randflächen eines Feldes

<p>Energie <math>W</math> siehe S. 94</p>  <p>Rotation:</p>	$F = \frac{dW(s)}{ds}$ <p>Prinzip der virtuellen Verschiebung: Fläche um <math>ds</math> verschoben (s-Richtung = Kraftrichtung)</p> $F = \frac{1}{2}BHA$ <p>Bei Drehbewegung:</p> $M_{rot} = \frac{dW(\alpha)}{d\alpha}$	<table> <tr> <td><math>F</math></td><td>Kraft</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr> <td><math>s</math></td><td>Weg</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>W</math></td><td>Energie</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>B</math></td><td>Flussdichte, Induktion</td><td><math>[T], [\frac{Vs}{m^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>H</math></td><td>Feldstärke</td><td><math>[\frac{A}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>M_{rot}</math></td><td>Drehmoment</td><td><math>[Nm]</math></td></tr> <tr> <td><math>\alpha</math></td><td>Winkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> </table>	$F$	Kraft	$[N]$	$s$	Weg	$[m]$	$W$	Energie	$[J]$	$B$	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$	$H$	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$	$A$	Fläche	$[m^2]$	$M_{rot}$	Drehmoment	$[Nm]$	$\alpha$	Winkel	$[rad]$
$F$	Kraft	$[N]$																								
$s$	Weg	$[m]$																								
$W$	Energie	$[J]$																								
$B$	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$																								
$H$	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$																								
$A$	Fläche	$[m^2]$																								
$M_{rot}$	Drehmoment	$[Nm]$																								
$\alpha$	Winkel	$[rad]$																								



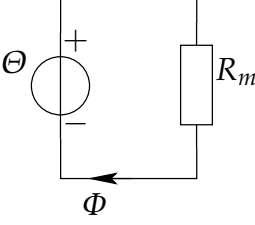
## 12.5. Durchflutung

	$\Theta = \oint_s \vec{H} ds = I$ $\Theta = \sum_{k=1}^n I_k + \iint_{A_s} \vec{J} d\vec{A}$	<table><tr><td><math>\Theta</math></td><td>Durchflutung</td><td><math>[A]</math></td></tr><tr><td><math>J</math></td><td>Stromdichte</td><td><math>[\frac{A}{m^2}]</math></td></tr><tr><td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr><tr><td><math>s</math></td><td>Geschlossene Kurve</td><td><math>[m]</math></td></tr><tr><td><math>H</math></td><td>Feldstärke</td><td><math>[\frac{A}{m}]</math></td></tr><tr><td><math>U_{mg}</math></td><td>Magnetische Spannung</td><td><math>[A]</math></td></tr><tr><td><math>l</math></td><td>Länge</td><td><math>[m]</math></td></tr></table>	$\Theta$	Durchflutung	$[A]$	$J$	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$	$I$	Strom	$[A]$	$s$	Geschlossene Kurve	$[m]$	$H$	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$	$U_{mg}$	Magnetische Spannung	$[A]$	$l$	Länge	$[m]$
$\Theta$	Durchflutung	$[A]$																					
$J$	Stromdichte	$[\frac{A}{m^2}]$																					
$I$	Strom	$[A]$																					
$s$	Geschlossene Kurve	$[m]$																					
$H$	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$																					
$U_{mg}$	Magnetische Spannung	$[A]$																					
$l$	Länge	$[m]$																					
<b>Nicht geschlossener Weg <math>A \rightarrow B</math></b>	$U_{mgAB} = \int_A^B \vec{H} d\vec{s}$ <p>z.B Luftspalt: <math>U_{mgAB} = Hl</math></p>																						
<b>Feld um Leiter</b>	$\Theta = \oint_s \vec{H} ds = I$																						
<b>Spule</b>	$\Theta = NI$																						

## 12.6. Magnetischer Fluss

siehe spezielle Anordnungen ab S. 98.	$\Phi = \iint_A \vec{B} dA$ $\Phi = \Lambda \Theta = \frac{\Theta}{R_m}$ <p>Homogenes Feld:</p> $\Phi = BA$	<table> <tr> <td><math>\Phi</math></td><td>Magnetischer Fluss</td><td><math>[Vs], [Wb]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>B</math></td><td>Flussdichte, Induktion</td><td><math>[T], [\frac{Vs}{m^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Theta</math></td><td>Durchflutung</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Lambda</math></td><td>Magnetischer Leitwert</td><td><math>[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]</math></td></tr> </table>	$\Phi$	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$	$A$	Fläche	$[m^2]$	$B$	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$	$\Theta$	Durchflutung	$[A]$	$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$
$\Phi$	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$															
$A$	Fläche	$[m^2]$															
$B$	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$															
$\Theta$	Durchflutung	$[A]$															
$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$															

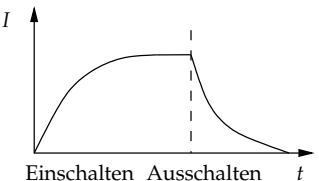
## 12.7. Ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises

	$R_m = \frac{\Theta}{\Phi}$ $\Lambda = \frac{1}{R_m}$ <p>für homogenes Feld:</p> $R_{m_n} = \frac{l_n}{\mu_n A_n}$	<table> <tr> <td><math>R_m</math></td><td>Magnetischer Widerstand</td><td><math>[\frac{A}{Vs}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Phi</math></td><td>Magnetischer Fluss</td><td><math>[Vs], [Wb]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Theta</math></td><td>Durchflutung</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Lambda</math></td><td>Magnetischer Leitwert</td><td><math>[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]</math></td></tr> <tr> <td><math>l</math></td><td>Länge</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Querschnitt</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Permeabilität</td><td><math>[\frac{H}{m}]</math></td></tr> </table>	$R_m$	Magnetischer Widerstand	$[\frac{A}{Vs}]$	$\Phi$	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$	$\Theta$	Durchflutung	$[A]$	$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$	$l$	Länge	$[m]$	$A$	Querschnitt	$[m^2]$	$\mu$	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$
$R_m$	Magnetischer Widerstand	$[\frac{A}{Vs}]$																					
$\Phi$	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$																					
$\Theta$	Durchflutung	$[A]$																					
$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$																					
$l$	Länge	$[m]$																					
$A$	Querschnitt	$[m^2]$																					
$\mu$	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$																					

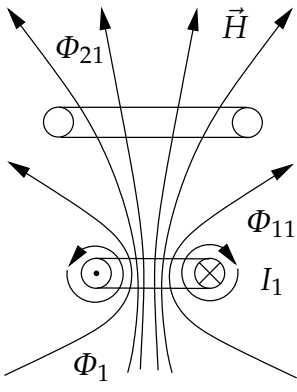
## 12.8. Spulenfluss

<p>Flüsse durch alle Einzelwindungsflächen aufsummiert (verketteter Fluss)</p>	$\Psi = N\Phi = \Lambda N^2 I$ $\Psi = LI$	<table> <tr> <td><math>\Psi</math></td><td>Spulenfluss</td><td><math>[Vs]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Phi</math></td><td>Magnetischer Fluss Einzelw.</td><td><math>[Vs], [Wb]</math></td></tr> <tr> <td><math>L</math></td><td>Induktivität</td><td><math>[\frac{Vs}{A}]</math></td></tr> <tr> <td><math>N</math></td><td>Windungszahl</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Lambda</math></td><td>Magnetischer Leitwert</td><td><math>[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]</math></td></tr> </table>	$\Psi$	Spulenfluss	$[Vs]$	$\Phi$	Magnetischer Fluss Einzelw.	$[Vs], [Wb]$	$L$	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$	$N$	Windungszahl	$[1]$	$I$	Strom	$[A]$	$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$
$\Psi$	Spulenfluss	$[Vs]$																		
$\Phi$	Magnetischer Fluss Einzelw.	$[Vs], [Wb]$																		
$L$	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$																		
$N$	Windungszahl	$[1]$																		
$I$	Strom	$[A]$																		
$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$																		

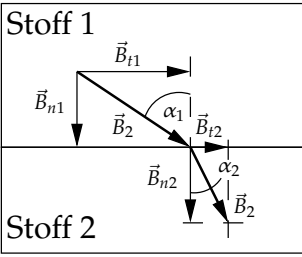
## 12.9. Induktivität

	$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\Psi}{I}$ $L = N^2 \Lambda = \frac{N^2}{R_m}$ $L = \frac{2W}{I^2}$	<table> <tr> <td><math>W</math></td><td>Energie des Feldes</td><td><math>[Ws], [J]</math></td></tr> <tr> <td><math>L</math></td><td>Induktivität</td><td><math>[H]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Phi</math></td><td>Magnetischer Fluss Einzelw.</td><td><math>[Vs], [Wb]</math></td></tr> <tr> <td><math>N</math></td><td>Windungszahl</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Lambda</math></td><td>Magnetischer Leitwert</td><td><math>[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]</math></td></tr> <tr> <td><math>R_m</math></td><td>Magnetischer Widerstand</td><td><math>[\frac{A}{Vs}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Psi</math></td><td>Spulenfluss</td><td><math>[Wb]</math></td></tr> </table>	$W$	Energie des Feldes	$[Ws], [J]$	$L$	Induktivität	$[H]$	$\Phi$	Magnetischer Fluss Einzelw.	$[Vs], [Wb]$	$N$	Windungszahl	$[1]$	$I$	Strom	$[A]$	$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$	$R_m$	Magnetischer Widerstand	$[\frac{A}{Vs}]$	$\Psi$	Spulenfluss	$[Wb]$
$W$	Energie des Feldes	$[Ws], [J]$																								
$L$	Induktivität	$[H]$																								
$\Phi$	Magnetischer Fluss Einzelw.	$[Vs], [Wb]$																								
$N$	Windungszahl	$[1]$																								
$I$	Strom	$[A]$																								
$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$																								
$R_m$	Magnetischer Widerstand	$[\frac{A}{Vs}]$																								
$\Psi$	Spulenfluss	$[Wb]$																								

## 12.10. Gegeninduktivität und induktive Kopplung

 <p>1. Index: Wirkungsort 2. Index: Ursachort</p>	$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}$ $M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2}$ $M = \sqrt{L_1 L_2} \quad \text{ohne Streufluss}$ $M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad \text{mit Streufluss}$ $k_{12} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} \quad k_{21} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}}$ $\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} = 1 - k^2$	<table> <tr> <td><math>\Psi</math></td><td>Spulenfluss</td><td><math>[Vs]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Phi</math></td><td>Magnetischer Fluss durch Windung</td><td><math>[Vs], [Wb]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Phi</math></td><td>Magnetischer Streuluss</td><td><math>[Vs], [Wb]</math></td></tr> <tr> <td><math>L</math></td><td>Induktivität</td><td><math>[\frac{Vs}{A}]</math></td></tr> <tr> <td><math>N</math></td><td>Windungszahl</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>Kopplungsfak.</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>\sigma</math></td><td>Streukoeff.</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>M</math></td><td>Gegeninduktivität</td><td><math>[\frac{Vs}{A}]</math></td></tr> </table>	$\Psi$	Spulenfluss	$[Vs]$	$\Phi$	Magnetischer Fluss durch Windung	$[Vs], [Wb]$	$\Phi$	Magnetischer Streuluss	$[Vs], [Wb]$	$L$	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$	$N$	Windungszahl	$[1]$	$I$	Strom	$[A]$	$k$	Kopplungsfak.	$[1]$	$\sigma$	Streukoeff.	$[1]$	$M$	Gegeninduktivität	$[\frac{Vs}{A}]$
$\Psi$	Spulenfluss	$[Vs]$																											
$\Phi$	Magnetischer Fluss durch Windung	$[Vs], [Wb]$																											
$\Phi$	Magnetischer Streuluss	$[Vs], [Wb]$																											
$L$	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$																											
$N$	Windungszahl	$[1]$																											
$I$	Strom	$[A]$																											
$k$	Kopplungsfak.	$[1]$																											
$\sigma$	Streukoeff.	$[1]$																											
$M$	Gegeninduktivität	$[\frac{Vs}{A}]$																											

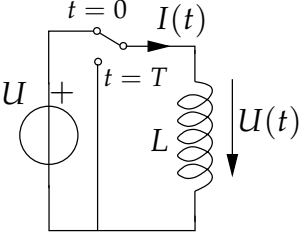
## 12.11. Brechung magnetischer Feldlinien

	$B_{n1} = B_{n2}$ $\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$ $H_{t1} = H_{t2}$ $\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$ $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$	<table> <tr> <td><math>H</math></td><td>Feldstärke</td><td><math>[\frac{A}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>B</math></td><td>Flussdichte, Induktion</td><td><math>[T], [\frac{Vs}{m^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\alpha</math></td><td>Winkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Permeabilität</td><td><math>[\frac{H}{m}]</math></td></tr> </table>	$H$	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$	$B$	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$	$\alpha$	Winkel	$[rad]$	$\mu$	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$
$H$	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$												
$B$	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$												
$\alpha$	Winkel	$[rad]$												
$\mu$	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$												

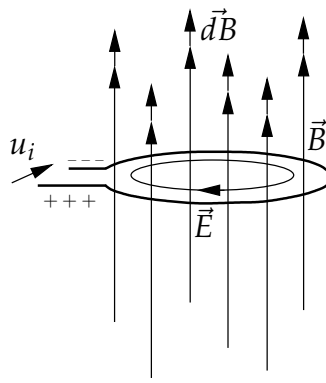
## 12.12. Räumliche Energiedichte

	Inhomogenes Feld:	$W$	Energiedichte	$\left[\frac{Ws}{m^3}\right]$
	$W_{mg(x,y,z)} = \frac{1}{2} B_{(x,y,z)} H_{(x,y,z)}$	$H$	Feldstärke	$\left[\frac{J}{m^3}\right]$
	Homogenes Feld:	$B$	Flussdichte, Induktion	$\left[\frac{A}{m}\right], \left[\frac{T}{m}\right], \left[\frac{Vs}{m^2}\right]$
	$W_{mg(x,y,z)} = \frac{\mu}{2} H_{(x,y,z)}^2$	$\mu$	Permeabilität	$\left[\frac{H}{m}\right]$

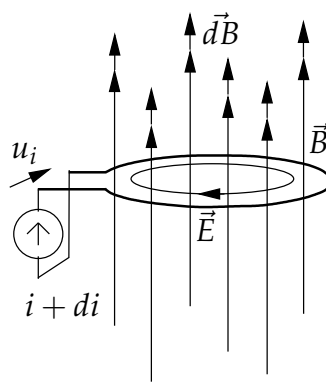
## 12.13. Energie im magnetischen Feld

	für $t \geq T$ :	$W$	Energie	$[Ws]$
	$W = \frac{U^2 T^2}{2L}$	$\mu$	Permeabilität	$\left[\frac{H}{m}\right]$
	$W = \frac{\psi^2}{2L}$	$\Psi$	Spulenfluss	$[Vs]$
	$W = \frac{LI^2}{2}$	$\Phi$	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$
	$W = \frac{I\Psi}{2}$	$L$	Induktivität	$\left[\frac{Vs}{A}\right]$
	$W = \frac{\Phi^2 R_m}{2}$	$I$	Strom	$[A]$
	$W = \frac{\Theta^2 \Lambda}{2}$	$R_m$	Magnetischer Widerstand	$\left[\frac{A}{Vs}\right]$
		$U$	Spannung	$[V]$
		$t$	Zeit	$[s]$
		$T$	Zeitpunkt	$[s]$
		$\Theta$	Durchflutung	$[A]$
		$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$\left[\frac{Vs}{A}\right], [\Omega s]$

## 12.14. Induktionsgesetz

 <p>The diagram shows a horizontal circular loop. Vertical arrows pointing upwards represent the magnetic field <math>\vec{B}</math>. A circular arrow on the loop indicates the direction of the induced electric field <math>\vec{E}</math>. A voltage source <math>u_i</math> is connected to the left side of the loop, with '+' signs on the top wire and '-' signs on the bottom wire.</p>	$u_i = \frac{d\Psi}{dt}$ $\oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -u_i$ <p><math>\vec{E}</math> bildet mit <math>d\vec{B}</math> eine Links-schraube</p>	<table> <tr> <td><math>\Psi</math></td><td>Spulenfluss</td><td><math>[Vs]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>E</math></td><td>Elektrostatisches Feld</td><td><math>[\frac{V}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>u_i</math></td><td>Induktionsspannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Phi</math></td><td>Magnetischer Fluss</td><td><math>[Vs], [Wb]</math></td></tr> <tr> <td><math>ds</math></td><td>infinitesimales Leiterstück</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>B</math></td><td>Flussdichte, Induktion</td><td><math>[T], [\frac{Vs}{m^2}]</math></td></tr> </table>	$\Psi$	Spulenfluss	$[Vs]$	$t$	Zeit	$[s]$	$E$	Elektrostatisches Feld	$[\frac{V}{m}]$	$u_i$	Induktionsspannung	$[V]$	$\Phi$	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$	$ds$	infinitesimales Leiterstück	$[m]$	$B$	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$
$\Psi$	Spulenfluss	$[Vs]$																					
$t$	Zeit	$[s]$																					
$E$	Elektrostatisches Feld	$[\frac{V}{m}]$																					
$u_i$	Induktionsspannung	$[V]$																					
$\Phi$	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$																					
$ds$	infinitesimales Leiterstück	$[m]$																					
$B$	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$																					

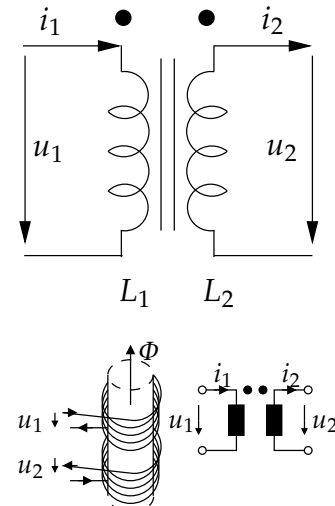
## 12.15. Selbstinduktion

 <p>The diagram shows a horizontal circular loop connected to a current source (a circle with an upward arrow) on the left. The current is labeled <math>i + di</math>. Vertical arrows pointing upwards represent the magnetic field <math>\vec{B}</math>. A circular arrow on the loop indicates the direction of the induced electric field <math>\vec{E}</math>. Below the diagram, it says "di während dt".</p>	<p>Für Schleife:</p> $u_i = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$ <p>Für Spule:</p> $u_i = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt}$	<table> <tr> <td><math>\Psi</math></td><td>Spulenfluss</td><td><math>[Vs]</math></td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>E</math></td><td>Elektrostatisches Feld</td><td><math>[\frac{V}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>u_i</math></td><td>Induktionsspannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Phi</math></td><td>Magnetischer Fluss</td><td><math>[Vs], [Wb]</math></td></tr> <tr> <td><math>L</math></td><td>Induktivität</td><td><math>[\frac{Vs}{A}]</math></td></tr> <tr> <td><math>i</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>B</math></td><td>Flussdichte, Induktion</td><td><math>[T], [\frac{Vs}{m^2}]</math></td></tr> </table>	$\Psi$	Spulenfluss	$[Vs]$	$t$	Zeit	$[s]$	$E$	Elektrostatisches Feld	$[\frac{V}{m}]$	$u_i$	Induktionsspannung	$[V]$	$\Phi$	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$	$L$	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$	$i$	Strom	$[A]$	$B$	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$
$\Psi$	Spulenfluss	$[Vs]$																								
$t$	Zeit	$[s]$																								
$E$	Elektrostatisches Feld	$[\frac{V}{m}]$																								
$u_i$	Induktionsspannung	$[V]$																								
$\Phi$	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$																								
$L$	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$																								
$i$	Strom	$[A]$																								
$B$	Flussdichte, Induktion	$[T], [\frac{Vs}{m^2}]$																								

## 12.16. Serie- und Parallelschaltung von Induktivitäten

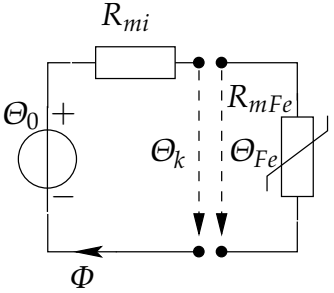
	<p>Serieschaltung</p> $L_{Ers.} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$ <p>Parallelschaltung</p> $L_{Ers.} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}}$	<p><math>L</math> Induktivität <math>\left[\frac{Vs}{A}\right]</math></p>
--	--	---

## 12.17. Trafogleichungen

	$u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$ $u_2 = u_{21} + u_{22} = M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}$ $u_1 = j\omega L_1 i_1 - j\omega M i_2$ $u_2 = j\omega M i_1 - j\omega L_2 i_2$	<p><math>u</math> Induktionsspannung <math>[V]</math></p> <p><math>i</math> Strom <math>[A]</math></p> <p><math>L</math> Induktivität <math>\left[\frac{Vs}{A}\right]</math></p> <p><math>t</math> Zeit <math>[s]</math></p> <p><math>M</math> Gegeninduktivität <math>\left[\frac{Vs}{A}\right]</math></p> <p><math>\omega</math> Kreisfrequenz <math>\left[\frac{1}{s}\right]</math></p> <p><math>R</math> (Kupfer-) Widerstand <math>[\Omega]</math></p>
--	---	---

## 12.18. Nichtlinearität

### 12.18.1. $B(H)$ -Kurve in $\Phi(\Theta)$ -Kurve umrechnen

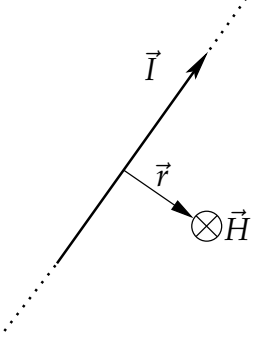
	<p>Leerlauf</p> $B_k(0) = B_c = \frac{\mu_0 A_L \Theta_0}{l_L A_{Fe}}$ <p>Kurzschluss</p> $H_0 = \frac{\Theta_0}{l_{Fe}}$ <p>Umrechnung:</p> $\Phi_{Fe} = A_{Fe} B_{Fe}$ $\Theta_{Fe} = l_{Fe} H_{Fe}$ $B_L = \frac{A_{Fe}}{A_L} B_{Fe}$	<table> <tr> <td><math>B</math></td><td>Flussdichte, Induktion</td><td><math>[T], [Vs/m^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>H</math></td><td>Feldstärke</td><td><math>[A/m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Permeabilität</td><td><math>[H/m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Theta</math></td><td>Durchflutung</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>l</math></td><td>Länge</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Querschnitt</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Phi</math></td><td>Magnetischer Fluss</td><td><math>[Vs], [Wb]</math></td></tr> </table>	$B$	Flussdichte, Induktion	$[T], [Vs/m^2]$	$H$	Feldstärke	$[A/m]$	$\mu$	Permeabilität	$[H/m]$	$\Theta$	Durchflutung	$[A]$	$l$	Länge	$[m]$	$A$	Querschnitt	$[m^2]$	$\Phi$	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$
$B$	Flussdichte, Induktion	$[T], [Vs/m^2]$																					
$H$	Feldstärke	$[A/m]$																					
$\mu$	Permeabilität	$[H/m]$																					
$\Theta$	Durchflutung	$[A]$																					
$l$	Länge	$[m]$																					
$A$	Querschnitt	$[m^2]$																					
$\Phi$	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$																					

### 12.18.2. Luftspaltkennwert $\alpha$

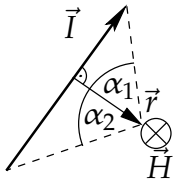
	$\alpha = \frac{A_L l_{Fe}}{A_{Fe} l_L}$ $\frac{1}{\mu_{reff}} = \frac{1}{\mu_{rFe}} + \frac{1}{\alpha}$ $\mu_{reff} = \frac{\mu_{rFe} \alpha}{\mu_{rFe} + \alpha}$	<table> <tr> <td><math>\alpha</math></td><td>Luftspaltkenngrösse</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Permeabilität</td><td><math>[H/m]</math></td></tr> <tr> <td><math>l</math></td><td>Länge</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Querschnitt</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> </table>	$\alpha$	Luftspaltkenngrösse	$[1]$	$\mu$	Permeabilität	$[H/m]$	$l$	Länge	$[m]$	$A$	Querschnitt	$[m^2]$
$\alpha$	Luftspaltkenngrösse	$[1]$												
$\mu$	Permeabilität	$[H/m]$												
$l$	Länge	$[m]$												
$A$	Querschnitt	$[m^2]$												

## 12.19. Spezielle Anordnungen

### 12.19.1. Langer gerader Leiter $l \gg d$

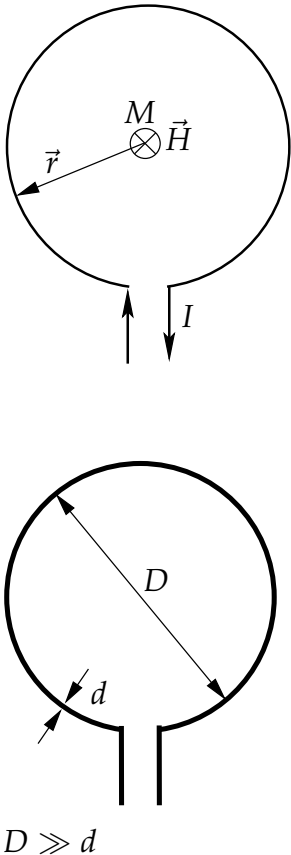
	<p>Bezugspunkt ausserhalb des Leiters im Abstand <math>r</math></p> $H = \frac{I}{2\pi r}$ $\vec{H} = \frac{I}{2\pi \vec{r} ^2}(\vec{e}_1 \times \vec{r})$	<table> <tr> <td><math>H</math></td><td>Feldstärke</td><td><math>\left[\frac{A}{m}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Abstand vom Leiter</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> </table>	$H$	Feldstärke	$\left[\frac{A}{m}\right]$	$r$	Abstand vom Leiter	$[m]$	$I$	Strom	$[A]$
$H$	Feldstärke	$\left[\frac{A}{m}\right]$									
$r$	Abstand vom Leiter	$[m]$									
$I$	Strom	$[A]$									

### 12.19.2. Kurzer, gerader Leiter

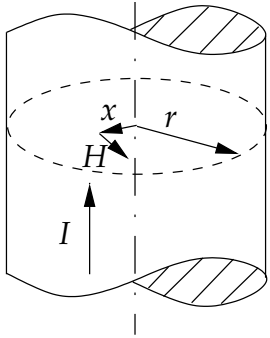
	$H = \frac{I}{4\pi r} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \cos \varphi d\varphi$ $H = \frac{I}{4\pi r} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$	<table> <tr> <td><math>H</math></td><td>Feldstärke</td><td><math>\left[\frac{A}{m}\right]</math></td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Abstand vom Leiter</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>\alpha</math></td><td>Winkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> </table>	$H$	Feldstärke	$\left[\frac{A}{m}\right]$	$r$	Abstand vom Leiter	$[m]$	$I$	Strom	$[A]$	$\alpha$	Winkel	$[rad]$
$H$	Feldstärke	$\left[\frac{A}{m}\right]$												
$r$	Abstand vom Leiter	$[m]$												
$I$	Strom	$[A]$												
$\alpha$	Winkel	$[rad]$												



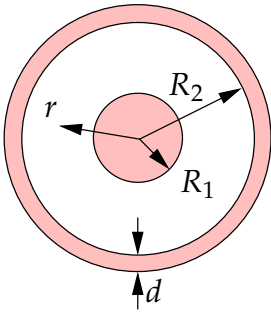
## 12.19.3. Kreisförmige Drahtschleife

 <p><math>D \gg d</math></p>	<p>Bezugspunkt: M Teilkreis:</p> $H = \frac{I}{4\pi r} \int_0^\alpha d\varphi$ <p>Vollkreis:</p> $H = \frac{I}{2r}$ <p>Feld auf der Achse:</p> $H = \frac{ I r^2}{2(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\Phi = \frac{\mu D}{2} \ln \frac{D}{d} \Theta$ $\Lambda = \mu \frac{D}{2} \ln \frac{D}{d}$ $R_m = \frac{2}{\mu D \ln \frac{D}{d}}$ $L = \mu \frac{D}{2} \ln \frac{D}{d}$	<table> <tr> <td><math>H</math></td><td>Feldstärke</td><td><math>[\frac{A}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>M</math></td><td>Mittelpunkt</td><td></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Permeabilität</td><td><math>[\frac{H}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>d</math></td><td>Draht Durchmesser</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>D</math></td><td>Schleifen Durchmesser</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Lambda</math></td><td>Magnetischer Leitwert</td><td><math>[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]</math></td></tr> <tr> <td><math>R_m</math></td><td>Magnetischer Widerstand</td><td><math>[\frac{A}{Vs}]</math></td></tr> <tr> <td><math>L</math></td><td>Induktivität</td><td><math>[\frac{Vs}{A}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Phi</math></td><td>Magnetischer Fluss</td><td><math>[Vs], [Wb]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Theta</math></td><td>Durchflutung</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>x</math></td><td>senkrechter Abstand zu M</td><td><math>[m]</math></td></tr> </table>	$H$	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$	$M$	Mittelpunkt		$I$	Strom	$[A]$	$r$	Radius	$[m]$	$\mu$	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$	$d$	Draht Durchmesser	$[m]$	$D$	Schleifen Durchmesser	$[m]$	$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$	$R_m$	Magnetischer Widerstand	$[\frac{A}{Vs}]$	$L$	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$	$\Phi$	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$	$\Theta$	Durchflutung	$[A]$	$x$	senkrechter Abstand zu M	$[m]$
$H$	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$																																							
$M$	Mittelpunkt																																								
$I$	Strom	$[A]$																																							
$r$	Radius	$[m]$																																							
$\mu$	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$																																							
$d$	Draht Durchmesser	$[m]$																																							
$D$	Schleifen Durchmesser	$[m]$																																							
$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$																																							
$R_m$	Magnetischer Widerstand	$[\frac{A}{Vs}]$																																							
$L$	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$																																							
$\Phi$	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$																																							
$\Theta$	Durchflutung	$[A]$																																							
$x$	senkrechter Abstand zu M	$[m]$																																							

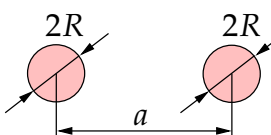
## 12.19.4. Voller Leiter

	$H = \frac{Ix}{2\pi r^2}$ <p>gilt nur für <math>x \leq r</math></p>	<table> <tr> <td><math>H</math></td><td>Feldstärke</td><td><math>[\frac{A}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Abstand von der Leiterachse</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>x</math></td><td>Abstand von der Achse</td><td><math>[m]</math></td></tr> </table>	$H$	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$	$r$	Abstand von der Leiterachse	$[m]$	$I$	Strom	$[A]$	$x$	Abstand von der Achse	$[m]$
$H$	Feldstärke	$[\frac{A}{m}]$												
$r$	Abstand von der Leiterachse	$[m]$												
$I$	Strom	$[A]$												
$x$	Abstand von der Achse	$[m]$												

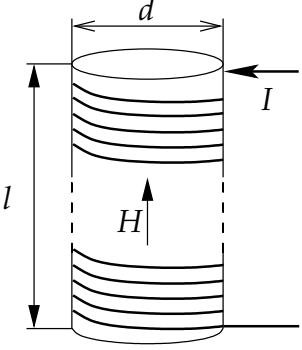
## 12.19.5. Koaxialkabel

 <p><math>l \gg R_1, R_2</math></p>	$H = \frac{I}{2\pi R_1^2} r \quad \text{für } 0 \leq r < R_1$ $H = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{für } R_1 \leq r \leq R_2$ $H = \frac{I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r - R_2}{d} \right) \quad \text{für } R_2 < r \leq R_2 + d$ $\Phi = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \Theta$ $\Lambda = \mu \frac{l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ $R_m = \frac{2\pi}{\mu l \ln \frac{R_2}{R_1}}$ $L = \mu \frac{l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ $L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$	<table> <tr> <td><math>H</math></td><td>Feldstärke</td><td><math>\left[ \frac{A}{m} \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>r</math></td><td>Abstand von der Leiterachse</td><td><math>\left[ m \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>\left[ A \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Radius</td><td><math>\left[ m \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>d</math></td><td>Manteldicke</td><td><math>\left[ m \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Permeabilität</td><td><math>\left[ \frac{H}{m} \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>l</math></td><td>Länge</td><td><math>\left[ m \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Lambda</math></td><td>Magnetischer Leitwert</td><td><math>\left[ \frac{Vs}{A} \right], \left[ \Omega s \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>R_m</math></td><td>Magnetischer Widerstand</td><td><math>\left[ \frac{A}{Vs} \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>L'</math></td><td>Induktivitätsbelag</td><td><math>\left[ \frac{Vs}{Am} \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>L</math></td><td>Induktivität</td><td><math>\left[ \frac{Vs}{A} \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Phi</math></td><td>Magnetischer Fluss</td><td><math>\left[ Vs \right], \left[ Wb \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Theta</math></td><td>Durchflutung</td><td><math>\left[ A \right]</math></td></tr> </table>	$H$	Feldstärke	$\left[ \frac{A}{m} \right]$	$r$	Abstand von der Leiterachse	$\left[ m \right]$	$I$	Strom	$\left[ A \right]$	$R$	Radius	$\left[ m \right]$	$d$	Manteldicke	$\left[ m \right]$	$\mu$	Permeabilität	$\left[ \frac{H}{m} \right]$	$l$	Länge	$\left[ m \right]$	$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$\left[ \frac{Vs}{A} \right], \left[ \Omega s \right]$	$R_m$	Magnetischer Widerstand	$\left[ \frac{A}{Vs} \right]$	$L'$	Induktivitätsbelag	$\left[ \frac{Vs}{Am} \right]$	$L$	Induktivität	$\left[ \frac{Vs}{A} \right]$	$\Phi$	Magnetischer Fluss	$\left[ Vs \right], \left[ Wb \right]$	$\Theta$	Durchflutung	$\left[ A \right]$
$H$	Feldstärke	$\left[ \frac{A}{m} \right]$																																							
$r$	Abstand von der Leiterachse	$\left[ m \right]$																																							
$I$	Strom	$\left[ A \right]$																																							
$R$	Radius	$\left[ m \right]$																																							
$d$	Manteldicke	$\left[ m \right]$																																							
$\mu$	Permeabilität	$\left[ \frac{H}{m} \right]$																																							
$l$	Länge	$\left[ m \right]$																																							
$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$\left[ \frac{Vs}{A} \right], \left[ \Omega s \right]$																																							
$R_m$	Magnetischer Widerstand	$\left[ \frac{A}{Vs} \right]$																																							
$L'$	Induktivitätsbelag	$\left[ \frac{Vs}{Am} \right]$																																							
$L$	Induktivität	$\left[ \frac{Vs}{A} \right]$																																							
$\Phi$	Magnetischer Fluss	$\left[ Vs \right], \left[ Wb \right]$																																							
$\Theta$	Durchflutung	$\left[ A \right]$																																							

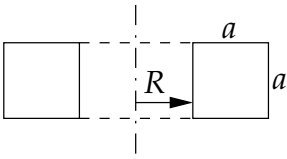
## 12.19.6. Paralleldrahtleitung

 <p><math>l \gg a</math> <math>a \gg R</math></p>	$\Lambda = \mu \frac{l}{\pi} \ln \frac{a - R}{R}$ $R_m = \frac{\pi}{\mu l \ln \frac{a - R}{R}}$ $L = \mu \frac{l}{\pi} \ln \frac{a - R}{R}$ $L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{a - R}{R}$	<table> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Permeabilität</td><td><math>\left[ \frac{H}{m} \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>l</math></td><td>Länge</td><td><math>\left[ m \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>a</math></td><td>Abstand</td><td><math>\left[ m \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Radius</td><td><math>\left[ m \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Lambda</math></td><td>Magnetischer Leitwert</td><td><math>\left[ \frac{Vs}{A} \right], \left[ \Omega s \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>R_m</math></td><td>Magnetischer Widerstand</td><td><math>\left[ \frac{A}{Vs} \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>L'</math></td><td>Induktivitätsbelag</td><td><math>\left[ \frac{Vs}{Am} \right]</math></td></tr> <tr> <td><math>L</math></td><td>Induktivität</td><td><math>\left[ \frac{Vs}{A} \right]</math></td></tr> </table>	$\mu$	Permeabilität	$\left[ \frac{H}{m} \right]$	$l$	Länge	$\left[ m \right]$	$a$	Abstand	$\left[ m \right]$	$R$	Radius	$\left[ m \right]$	$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$\left[ \frac{Vs}{A} \right], \left[ \Omega s \right]$	$R_m$	Magnetischer Widerstand	$\left[ \frac{A}{Vs} \right]$	$L'$	Induktivitätsbelag	$\left[ \frac{Vs}{Am} \right]$	$L$	Induktivität	$\left[ \frac{Vs}{A} \right]$
$\mu$	Permeabilität	$\left[ \frac{H}{m} \right]$																								
$l$	Länge	$\left[ m \right]$																								
$a$	Abstand	$\left[ m \right]$																								
$R$	Radius	$\left[ m \right]$																								
$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$\left[ \frac{Vs}{A} \right], \left[ \Omega s \right]$																								
$R_m$	Magnetischer Widerstand	$\left[ \frac{A}{Vs} \right]$																								
$L'$	Induktivitätsbelag	$\left[ \frac{Vs}{Am} \right]$																								
$L$	Induktivität	$\left[ \frac{Vs}{A} \right]$																								

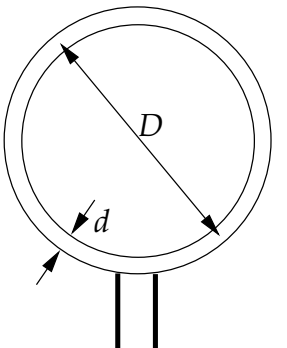
## 12.19.7. Zylinderspule

	<p>Bezugspunkt: Mittelpunkt der Achse im Innern</p> $H = \frac{IN}{\sqrt{l^2 + d^2}}$ <p>Bezugspunkt: Mittelpunkt der Stirnflächen</p> $H = \frac{IN}{2\sqrt{l^2 + d^2}}$	<p><math>H</math> Feldstärke <math>[\frac{A}{m}]</math>  <math>l</math> Länge bzw. mittl. Umfang der Spule <math>[m]</math>  <math>d</math> Durchmesser <math>[m]</math>  <math>I</math> Strom <math>[A]</math>  <math>A</math> Stirnfläche <math>[m^2]</math>  <math>\mu</math> Permeabilität <math>[\frac{H}{m}]</math>  <math>N</math> Windungszahl <math>[1]</math>  <math>\Lambda</math> Magnetischer Leitwert <math>[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]</math></p>
<p><b>Sehr lange Zylinder- spule</b> (<math>l \gg d</math>) und <b>Ringspule</b> (mittlerer Umfang <math>l</math>)</p>	<p>Bezugspunkt für <math>H</math>-Feld: im Inneren der Spule</p> $H = \frac{IN}{l}$ $\Phi = \frac{\mu A}{l} \Theta = \mu \frac{\pi d^2}{4l} \Theta$ $\Lambda = \mu \frac{A}{l} = \mu \frac{\pi d^2}{4l}$ $R_m = \frac{l}{\mu A} = \frac{4l}{\mu \pi d^2}$ $L = \mu N^2 \frac{A}{l} = \mu N^2 \frac{\pi d^2}{4l}$	<p><math>R_m</math> Magnetischer Widerstand <math>[\frac{A}{Vs}]</math>  <math>L</math> Induktivität <math>[\frac{Vs}{A}]</math>  <math>\Phi</math> Magnetischer Fluss <math>[Vs], [Wb]</math>  <math>\Theta</math> Durchflutung <math>[A]</math></p>

## 12.19.8. Ringspule (Toroid)

	$\Lambda = \mu \frac{a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$ $R_m = \frac{2\pi}{\mu a \ln \frac{R+a}{R}}$ $L = \mu N^2 \frac{a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$ $\Phi = \frac{\mu a}{2\pi} \ln \frac{R_1+a}{R_1} \Theta$ $H = \frac{NI}{R + \frac{a}{2}n}$ <p>für <math>a \ll R</math>:</p> $L = \frac{\mu N^2 A}{2R\pi}$ $\Phi \approx \frac{\mu A}{l_{\text{mittl.}}} \Theta$	<table> <tr> <td><math>a</math></td><td>Spulen Breite, Höhe</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Innenradius</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Permeabilität</td><td><math>[\frac{H}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>N</math></td><td>Windungszahl</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Lambda</math></td><td>Magnetischer Leitwert</td><td><math>[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]</math></td></tr> <tr> <td><math>R_m</math></td><td>Magnetischer Widerstand</td><td><math>[\frac{A}{Vs}]</math></td></tr> <tr> <td><math>L</math></td><td>Induktivität</td><td><math>[\frac{Vs}{A}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Phi</math></td><td>Magnetischer Fluss</td><td><math>[Vs], [Wb]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Theta</math></td><td>Durchflutung</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Fläche</td><td><math>[m^2]</math></td></tr> </table>	$a$	Spulen Breite, Höhe	$[m]$	$R$	Innenradius	$[m]$	$\mu$	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$	$N$	Windungszahl	$[1]$	$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$	$R_m$	Magnetischer Widerstand	$[\frac{A}{Vs}]$	$L$	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$	$\Phi$	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$	$\Theta$	Durchflutung	$[A]$	$A$	Fläche	$[m^2]$
$a$	Spulen Breite, Höhe	$[m]$																														
$R$	Innenradius	$[m]$																														
$\mu$	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$																														
$N$	Windungszahl	$[1]$																														
$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$																														
$R_m$	Magnetischer Widerstand	$[\frac{A}{Vs}]$																														
$L$	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$																														
$\Phi$	Magnetischer Fluss	$[Vs], [Wb]$																														
$\Theta$	Durchflutung	$[A]$																														
$A$	Fläche	$[m^2]$																														

## 12.19.9. Kreisrahmenspule

 <p><math>D \gg d</math></p>	$\Lambda = \mu \frac{D}{2} \ln \frac{D}{d}$ $R_m = \frac{2}{\mu D \ln \frac{D}{d}}$ $L = \mu N^2 \frac{D}{2} \ln \frac{D}{d}$	<table> <tr> <td><math>a</math></td><td>Spulen Breite, Höhe</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Permeabilität</td><td><math>[\frac{H}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>d</math></td><td>Draht Durchmesser</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>D</math></td><td>Schleifen Durchmesser</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>N</math></td><td>Windungszahl</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Lambda</math></td><td>Magnetischer Leitwert</td><td><math>[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]</math></td></tr> <tr> <td><math>R_m</math></td><td>Magnetischer Widerstand</td><td><math>[\frac{A}{Vs}]</math></td></tr> <tr> <td><math>L</math></td><td>Induktivität</td><td><math>[\frac{Vs}{A}]</math></td></tr> </table>	$a$	Spulen Breite, Höhe	$[m]$	$\mu$	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$	$d$	Draht Durchmesser	$[m]$	$D$	Schleifen Durchmesser	$[m]$	$N$	Windungszahl	$[1]$	$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$	$R_m$	Magnetischer Widerstand	$[\frac{A}{Vs}]$	$L$	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$
$a$	Spulen Breite, Höhe	$[m]$																								
$\mu$	Permeabilität	$[\frac{H}{m}]$																								
$d$	Draht Durchmesser	$[m]$																								
$D$	Schleifen Durchmesser	$[m]$																								
$N$	Windungszahl	$[1]$																								
$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$[\frac{Vs}{A}], [\Omega s]$																								
$R_m$	Magnetischer Widerstand	$[\frac{A}{Vs}]$																								
$L$	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$																								

# 13. Wechselstromlehre

## 13.1. Mittel- und Kennwerte

### 13.1.1. Linearer Mittelwert

	$A_m = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} a(t) dt$	$A$ Amplitude [...] $a(t)$ Signalfunktion [...] $T$ Periodendauer [s] $t$ Zeit [s]
--	--	---

### 13.1.2. Betragsmittelwert

	$A_{ m } = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T}  a(t)  dt$	$A$ Amplitude [...] $a(t)$ Signalfunktion [...] $T$ Periodendauer [s] $t$ Zeit [s]
--	--	---

### 13.1.3. Halbwellenmittelwert

	$A_{2m} = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} a(t) dt$ für $a(t) > 0$	$A_{2m}$ Halbwellen- [...] mittelwert $a(t)$ Signalfunktion [...] $T$ Periodendauer [s] $t$ Zeit [s]
--	---	--

### 13.1.4. Quadratischer Mittelwert (Effektivwert, RMS)

	$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} a^2(t) dt}$ <p>für sinunsförmige Signale:</p> $A_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$	$A$ Amplitude [...] $a(t)$ Signalfunktion [...] $T$ Periodendauer [s] $t$ Zeit [s]
--	--	---

### 13.1.5. Scheitelfaktor (Crestfaktor)

	$k_s = \frac{a_{\text{max}}}{A_{\text{eff}}}$	$A_{\text{eff}}$ Effektivwert [...] $a_{\text{max}}$ Spitzenwert [...] $k_s$ Crestfaktor [1]
--	---	--

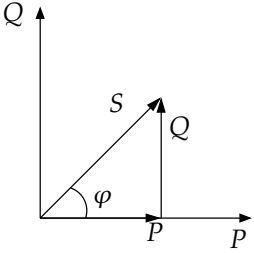
### 13.1.6. Formfaktor

	$k_f = \frac{A_{\text{eff}}}{A_{ \text{m} }}$	$A_{\text{eff}}$ Effektivwert [...] $A_{ \text{m} }$ Betragsmittelwert [...] $k_f$ Formfaktor [1]
--	---	---

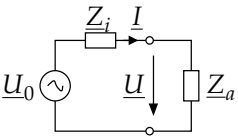
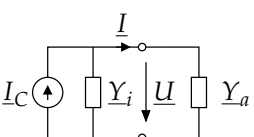
### 13.1.7. Effektivwert eines zusammengesetzten, mehrfrequenten Signals

	$A_{\text{eff}} = \sqrt{\sum_{n=0}^N A_{\text{eff}_n}^2}$	$A_{\text{eff}}$ Effektivwert [...]
--	---	-------------------------------------

## 13.2. Leistung

 <p>Beispiel mit Induktiver Last</p>	$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \frac{U^2}{\underline{Z}^*}$ $\underline{S} = P + jQ$ $P = UI \cos(\varphi) = \operatorname{Re}(S)$ $Q = UI \sin(\varphi) = \operatorname{Im}(S)$ $\cos(\varphi) = \frac{P}{S} \quad \sin(\varphi) = \frac{Q}{S}$	<table> <tr><td><math>S</math></td><td>Scheinleistung</td><td>[VA]</td></tr> <tr><td><math>P</math></td><td>Wirkleistung</td><td>[W]</td></tr> <tr><td><math>Q</math></td><td>Blindleistung</td><td>[Var]</td></tr> <tr><td><math>I</math></td><td>Strom</td><td>[A]</td></tr> <tr><td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr><td><math>\varphi</math></td><td>Phase</td><td>[rad]</td></tr> <tr><td><math>Z</math></td><td>Impedanz</td><td>[Ω]</td></tr> </table>	$S$	Scheinleistung	[VA]	$P$	Wirkleistung	[W]	$Q$	Blindleistung	[Var]	$I$	Strom	[A]	$U$	Spannung	[V]	$\varphi$	Phase	[rad]	$Z$	Impedanz	[Ω]
$S$	Scheinleistung	[VA]																					
$P$	Wirkleistung	[W]																					
$Q$	Blindleistung	[Var]																					
$I$	Strom	[A]																					
$U$	Spannung	[V]																					
$\varphi$	Phase	[rad]																					
$Z$	Impedanz	[Ω]																					

### 13.2.1. Leistung und Leistungsanpassung bei Quellen

	$\underline{S} = U_0^2 \frac{Z_a}{ Z_i + Z_a ^2}$ $P = U_0^2 \frac{R_a}{(R_a + R_i)^2 + (X_a + X_i)^2}$ <p>Bei Leistungsanpassung:</p> $X_a = -X_i \quad \text{bzw.} \quad R_a = R_i$ $\underline{Z}_a = \underline{Z}_i^*$ $P_{\max} = \frac{U_0^2}{4R_i}$	<table> <tr><td><math>S</math></td><td>Scheinleistung</td><td>[VA]</td></tr> <tr><td><math>P</math></td><td>Wirkleistung</td><td>[W]</td></tr> <tr><td><math>I</math></td><td>Strom</td><td>[A]</td></tr> <tr><td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr><td><math>Z</math></td><td>Impedanz</td><td>[Ω]</td></tr> <tr><td><math>Y</math></td><td>Admittanz</td><td>[S]</td></tr> <tr><td><math>X</math></td><td>Reaktanz</td><td>[Ω]</td></tr> <tr><td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr><td><math>G</math></td><td>Leitwert</td><td>[S]</td></tr> </table>	$S$	Scheinleistung	[VA]	$P$	Wirkleistung	[W]	$I$	Strom	[A]	$U$	Spannung	[V]	$Z$	Impedanz	[Ω]	$Y$	Admittanz	[S]	$X$	Reaktanz	[Ω]	$R$	Widerstand	[Ω]	$G$	Leitwert	[S]
$S$	Scheinleistung	[VA]																											
$P$	Wirkleistung	[W]																											
$I$	Strom	[A]																											
$U$	Spannung	[V]																											
$Z$	Impedanz	[Ω]																											
$Y$	Admittanz	[S]																											
$X$	Reaktanz	[Ω]																											
$R$	Widerstand	[Ω]																											
$G$	Leitwert	[S]																											
	$\underline{Y}_a = \underline{Y}_i^*$ $P_{\max} = \frac{I_C^2}{4G_i}$																												

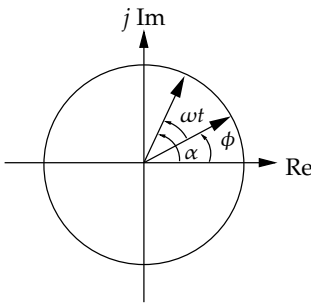
### 13.2.2. Effektivwert und Leistung

	$P = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = I_{\text{eff}}^2 R$	<table> <tr><td><math>P</math></td><td>Leistung</td><td>[W]</td></tr> <tr><td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr><td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td>[V]</td></tr> </table>	$P$	Leistung	[W]	$R$	Widerstand	[Ω]	$U$	Spannung	[V]
$P$	Leistung	[W]									
$R$	Widerstand	[Ω]									
$U$	Spannung	[V]									

### 13.3. Energie

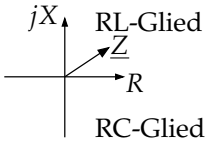
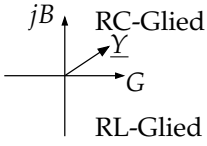
	$W(t) = \int_0^t P(\tau) d\tau$	<div> <div>W</div> <div>Energie</div> <div>[J]</div> </div> <div> <div>P</div> <div>Leistung</div> <div>[W]</div> </div> <div> <div>t</div> <div>Zeit</div> <div>[s]</div> </div>
--	---------------------------------	---

### 13.4. Komplexe Darstellung sinusförmiger Vorgänge

	<p>Hintransformation:</p> $a(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ $\underline{a}(t) = A \cos(\omega t + \phi) + jA \sin(\omega t + \phi)$ $\underline{a}(t) = A e^{j(\omega t + \phi)} = A e^{j\phi} e^{j\omega t} = \underline{A} e^{j\omega t}$ $\underline{A} = A e^{j\phi}$ <p>Rücktransformation:</p> $\underline{B} = B e^{j\beta}$ $\underline{b}(t) = \underline{B} e^{j\omega t} = B e^{j\beta} e^{j\omega t} = \underline{A} e^{j\omega t}$ $\underline{b}(t) = B \cos(\omega t + \beta) + jB \sin(\omega t + \beta)$ $b(t) = \text{Re}\{\underline{b}(t)\} = B \cos(\omega t + \beta)$	<div> <div>A, B</div> <div>Amplitude</div> <div>[V]</div> </div> <div> <div>a, b</div> <div>Signal</div> <div>[V]</div> </div> <div> <div>phi, beta</div> <div>Phase</div> <div>[rad]</div> </div> <div> <div>omega</div> <div>Winkelgeschwindigkeit</div> <div>[1/s]</div> </div> <div> <div>t</div> <div>Zeit</div> <div>[s]</div> </div>
---	--	---



## 13.5. Komplexe Darstellung von Impedanz und Admittanz

<p>Impedanz-Ebene:</p>  <p>Admittanz-Ebene:</p> 	$\underline{Z} = \frac{u(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_{\text{eff}}}{\underline{I}_{\text{eff}}} = R + jX$ $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jB$ $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \quad \text{bzw.} \quad \underline{I} = \underline{Y} \underline{U}$ $\sum_{\text{Kreis}} \underline{U}_i = 0 \quad \sum_{\text{Trennbündel}} \underline{I}_i = 0$ <p>Serieschaltung: <math>\underline{Z}_s = \sum_{i=1}^N \underline{Z}_i</math></p> <p>Parallelschaltung: <math>\underline{Y}_p = \sum_i^N \underline{Y}_i</math></p>	<p><math>U, u</math> Spannung [V]  <math>I, i</math> Strom [A]  <math>R</math> Widerstand [<math>\Omega</math>]  <math>G</math> Leitwert [S]  <math>Z</math> Impedanz [<math>\Omega</math>]  <math>Y</math> Admittanz [S]  <math>X</math> Reaktanz [<math>\Omega</math>]  <math>B</math> Suszeptanz [S]</p>
--	--	---

## 13.6. Klemmgrößen von Schaltelementen

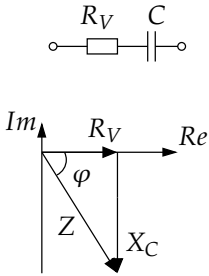
### 13.6.1. Allgemein

	$q(t) = \int_{t_a}^t i(\tau) d\tau$ $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ $p(t) = \frac{dW}{dt}$ $P_{at} = \frac{1}{t - t_a} \int_{t_a}^t p(\tau) d\tau$ $w_{at} = \int_{t_a}^t p(\tau) d\tau$	<p><math>i</math> Strom [A]  <math>u</math> Spannung [V]  <math>q</math> Ladung [C]  <math>p</math> Leistung [W]  <math>w</math> Gespeicherte Energie [J]  <math>t, \tau</math> Zeit [s]</p>
--	--	--

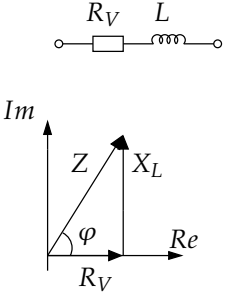
### 13.6.2. Ohm'sche Widerstände

	$u(t) = Ri(t)$ $i(t) = Gu(t)$ $p(t) = u(t)i(t)$ $\underline{Z}_R = R$ $\underline{Y}_R = \frac{1}{R} = G$	$i$ Strom [A] $u$ Spannung [V] $R$ Widerstand [ $\Omega$ ] $G$ Leitwert [S] $p$ Leistung [W] $Z$ Impedanz [ $\Omega$ ] $t, \tau$ Zeit [s]
--	---	---

### 13.6.3. Kapazitäten

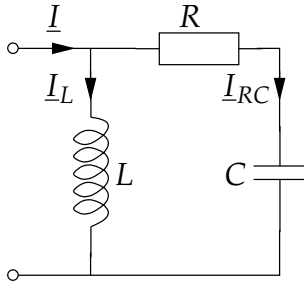
	<p>Zeitbereich:</p> $q(t) = Cu(t)$ $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}$ $u(t) = \frac{1}{C} \int_{t_a}^t i(\tau) d\tau + u(t_a)$ <p>Frequenzbereich:</p> $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{sC} = -j \frac{1}{\omega C}$ $\underline{Y}_C = j\omega C = sC$ <p>Leistung, Energie:</p> $p(t) = u(t)i(t)$ $w(t) = \frac{1}{2} Cu^2(t)$	$i$ Strom [A] $u$ Spannung [V] $q$ Ladung [C] $C$ Kapazität [F] $p$ Leistung [W] $Z$ Impedanz [ $\Omega$ ] $Y$ Admitanz [S] $\omega$ Kreisfrequenz [ $\frac{1}{s}$ ] $s$ Laplaceoperator [1] $w$ Gespeicherte Energie [J] $t, \tau$ Zeit [s]
--	---	--

## 13.6.4. Induktivitäten

	<p>Zeitbereich:</p> $\Psi(t) = Li(t)$ $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ $i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_a}^t u(\tau) d\tau + i(t_a)$ $p(t) = u(t)i(t)$ $w(t) = \frac{1}{2} Li^2(t)$ <p>Frequenzbereich:</p> $\underline{Z}_L = j\omega L = sL$ $\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{sL} = -j \frac{1}{\omega L}$ <p>Gegeninduktion:</p> $u_{12}(t) = \pm M \frac{di_2(t)}{dt}$ $\underline{Z}_M = j\omega M$ $\underline{Y}_M = \frac{1}{j\omega M} = -j \frac{1}{\omega M}$ <p>induktive Kopplung:</p> $u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt}$	<table> <tr> <td><math>i</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>u</math></td><td>Spannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>q</math></td><td>Ladung</td><td><math>[C]</math></td></tr> <tr> <td><math>Z</math></td><td>Impedanz</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr> <td><math>Y</math></td><td>Admitanz</td><td><math>[S]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>s</math></td><td>Laplaceoperator</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>M</math></td><td>Gegeninduktivität</td><td><math>[\frac{Vs}{A}]</math></td></tr> <tr> <td><math>L</math></td><td>Induktivität</td><td><math>[\frac{Vs}{A}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Psi</math></td><td>Spulenfluss</td><td><math>[Vs]</math></td></tr> <tr> <td><math>p</math></td><td>Leistung</td><td><math>[W]</math></td></tr> <tr> <td><math>w</math></td><td>Gespeicherte Energie</td><td><math>[J]</math></td></tr> <tr> <td><math>t, \tau</math></td><td>Zeit</td><td><math>[s]</math></td></tr> </table>	$i$	Strom	$[A]$	$u$	Spannung	$[V]$	$q$	Ladung	$[C]$	$Z$	Impedanz	$[\Omega]$	$Y$	Admitanz	$[S]$	$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	$s$	Laplaceoperator	$[1]$	$M$	Gegeninduktivität	$[\frac{Vs}{A}]$	$L$	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$	$\Psi$	Spulenfluss	$[Vs]$	$p$	Leistung	$[W]$	$w$	Gespeicherte Energie	$[J]$	$t, \tau$	Zeit	$[s]$
$i$	Strom	$[A]$																																							
$u$	Spannung	$[V]$																																							
$q$	Ladung	$[C]$																																							
$Z$	Impedanz	$[\Omega]$																																							
$Y$	Admitanz	$[S]$																																							
$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																																							
$s$	Laplaceoperator	$[1]$																																							
$M$	Gegeninduktivität	$[\frac{Vs}{A}]$																																							
$L$	Induktivität	$[\frac{Vs}{A}]$																																							
$\Psi$	Spulenfluss	$[Vs]$																																							
$p$	Leistung	$[W]$																																							
$w$	Gespeicherte Energie	$[J]$																																							
$t, \tau$	Zeit	$[s]$																																							

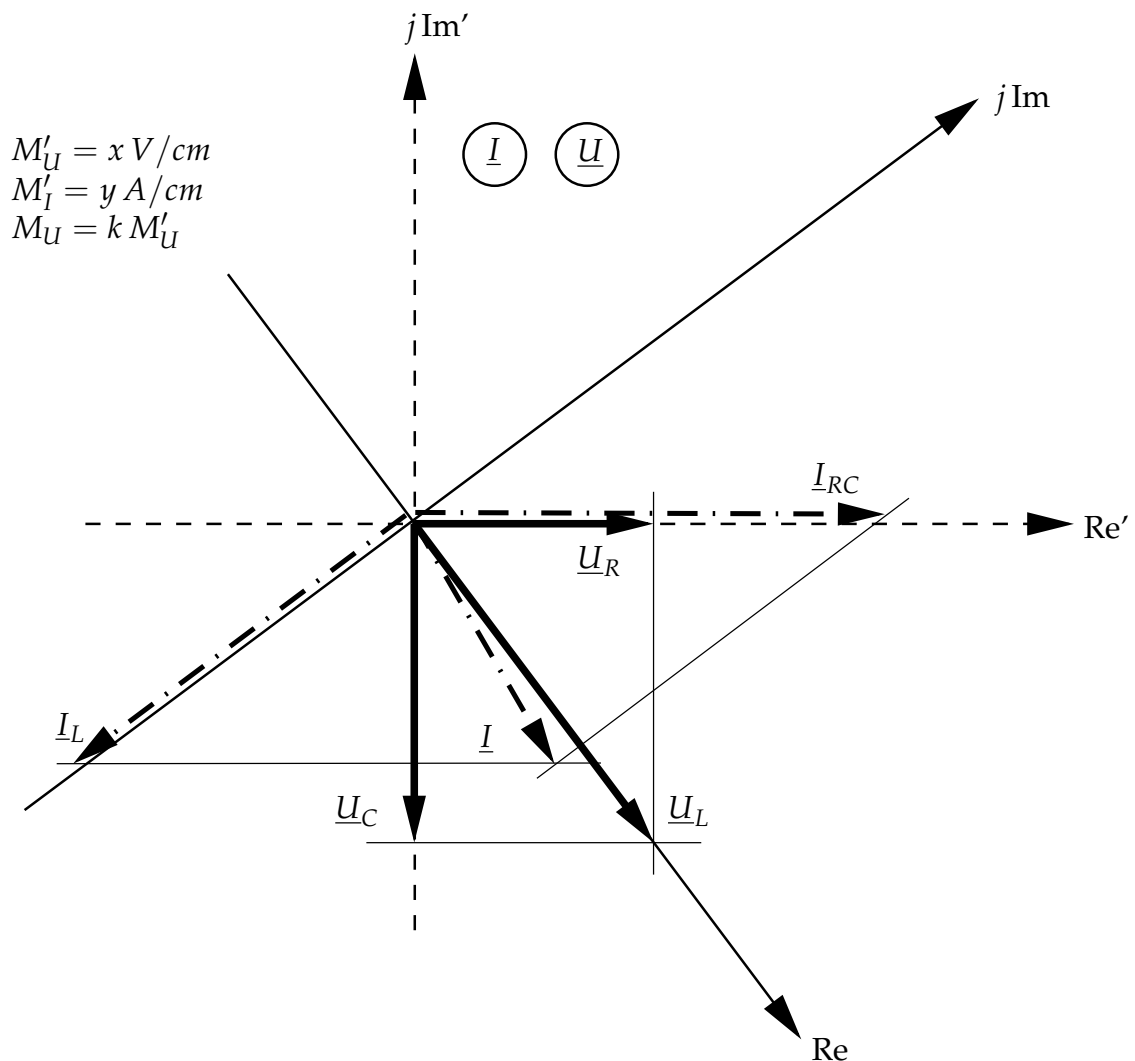
## 13.7. Zeigerdarstellung Komplexer Klemmgrößen

Alle Spannungen und Ströme am folgenden Netzwerk sind graphisch mittels Zeigerdiagramm darzustellen.

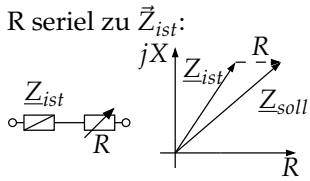
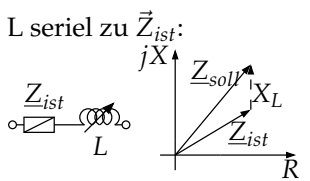
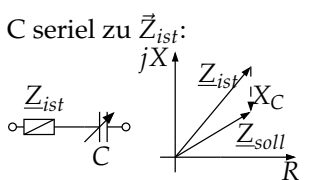
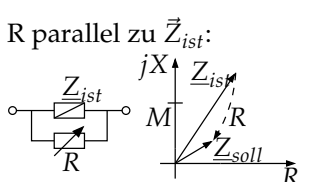
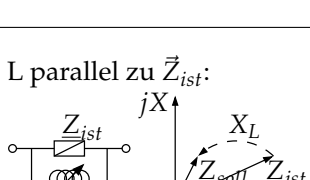
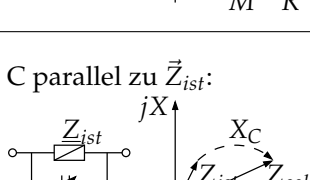


1. Impedanzen  $\underline{Z}$  aller Elemente berechnen.
2. Strom  $\underline{I}_{RC}$  auf reeller Achse  $\text{Re}'$  wählen.
3. Spannungen an  $\underline{R}$  und  $\underline{C}$  aus  $\underline{I}_{RC}$  und  $\underline{Z}$  berechnen und einzeichnen.
4. Spannung  $\underline{U}_L$  entspricht der Summe von  $\underline{U}_R$  und  $\underline{U}_C$ .
5. Strom  $\underline{I}_L$  aus  $\underline{U}_L$  und  $\underline{Z}_L$  berechnen und einzeichnen.
6. Strom  $\underline{I}$  entspricht der Summe von  $\underline{I}_{RC}$  und  $\underline{I}_L$ .
7. Achsen neu bestimmen:  $\text{Re}$  in Richtung  $\underline{U}_L$ .

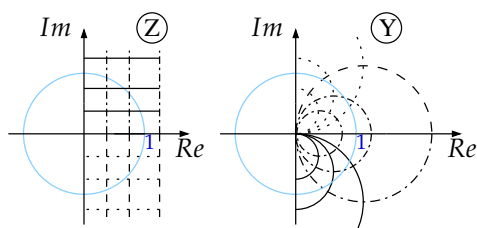
$$\text{Korrekturfaktor: } k = \frac{\underline{U}_{\text{Nenn}}}{\underline{U}_{\text{gemessen}}}$$



### 13.7.1. Impedanztransformation

<p>R seriel zu <math>\vec{Z}_{ist}</math>:</p> 	<p><math>\vec{Z}_{soll}</math> bewegt sich auf einer Geraden parallel zur R-Achse nach rechts.</p>	<p><math>\vec{Z}_{ist}</math> Impedanz, <math>[\Omega]</math> die transformiert werden soll</p> <p><math>\vec{Z}_{soll}</math> Impedanz, <math>[\Omega]</math> nach Transformation</p> <p><math>X</math> Blindwiderstand <math>[\Omega]</math></p> <p><math>R</math> Widerstand <math>[\Omega]</math></p> <p><math>L</math> Induktivität <math>[H]</math></p> <p><math>C</math> Kapazität <math>[F]</math></p>
<p>L seriel zu <math>\vec{Z}_{ist}</math>:</p> 	<p><math>\vec{Z}_{soll}</math> bewegt sich auf einer Geraden parallel zur X-Achse nach oben.</p>	
<p>C seriel zu <math>\vec{Z}_{ist}</math>:</p> 	<p><math>\vec{Z}_{soll}</math> bewegt sich auf einer Geraden parallel zur X-Achse nach unten.</p>	
<p>R parallel zu <math>\vec{Z}_{ist}</math>:</p> 	<p><math>\vec{Z}_{soll}</math> bewegt sich auf einem Halbkreis, welcher auf der X-Achse beginnt, durch den Endpunkt des <math>\vec{Z}_{ist}</math>-Vektors geht um im Nullpunkt endet. Falls <math>R = 0 \rightarrow \vec{Z}_{soll} = \vec{0}</math>. Falls <math>R = \infty \rightarrow \vec{Z}_{soll} = \vec{Z}_{ist}</math>.</p>	
<p>L parallel zu <math>\vec{Z}_{ist}</math>:</p> 	<p><math>\vec{Z}_{soll}</math> bewegt sich auf einem Kreis mit Mittelpunkt M, welcher durch den Nullpunkt sowie durch den Endpunkt des <math>\vec{Z}_{ist}</math>-Vektors geht. Für <math>L \rightarrow 0 \rightarrow \vec{Z}_{soll} \rightarrow 0</math></p>	
<p>C parallel zu <math>\vec{Z}_{ist}</math>:</p> 	<p><math>\vec{Z}_{soll}</math> bewegt sich auf einem Kreis mit Mittelpunkt M, welcher durch den Nullpunkt und den Endpunkt des <math>\vec{Z}_{ist}</math>-Vektors geht. Für <math>C \rightarrow \infty \rightarrow \vec{Z}_{soll} \rightarrow 0</math></p>	

### 13.7.2. Transformation von Z-Ebene zu Y-Ebene

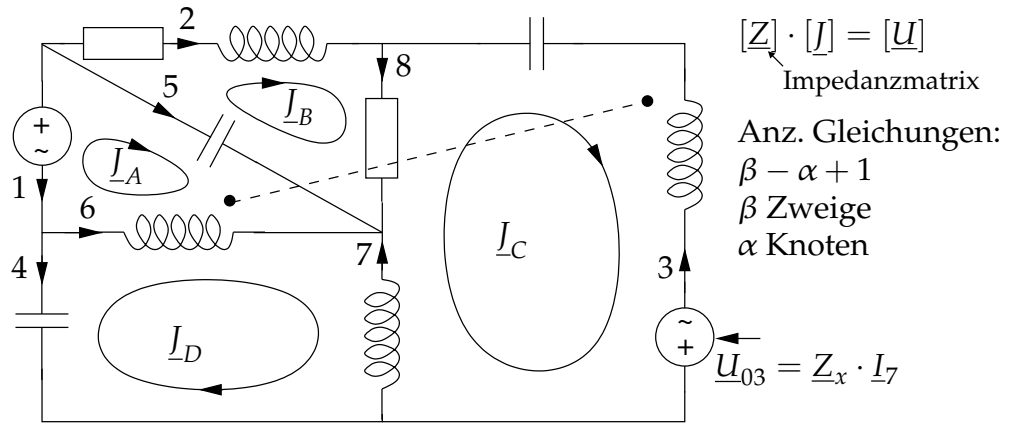


Im Bild ist zu sehen wie gewisse Punktmengen von der Z-Ebene auf die Y-Ebene abgebildet werden.

## 13.8. Netzwerkanalyse

### 13.8.1. Maschenmethode / Kreisstrommethode

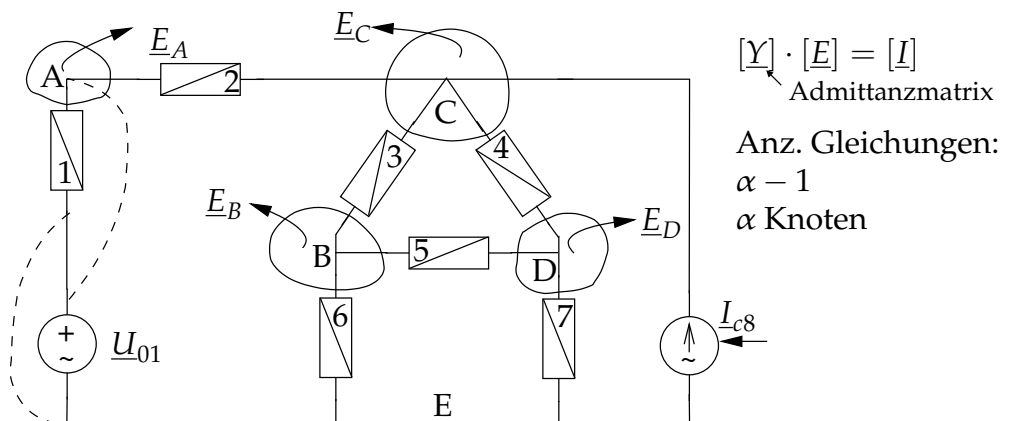
Es dürfen nur Spannungsquellen vorkommen, vorhandene Stromquellen sind zuerst umzuwandeln.



$\underline{I}_A$	$\underline{I}_B$	$\underline{I}_C$	$\underline{I}_D$	
$+ \underline{I}_A(j\omega L_6 - j\frac{1}{\omega C_5})$	$- \underline{I}_B(-j\frac{1}{\omega C_5})$	$+ \underline{I}_C j\omega M$	$- \underline{I}_D j\omega L_6$	$= \underline{U}_{01}$
$- \underline{I}_A(-j\frac{1}{\omega C_5})$	$+ \underline{I}_B(R_8 + R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_5})$	$- \underline{I}_C R_8$	$- 0$	$= 0$
$+ \underline{I}_A j\omega M$	$- \underline{I}_B R_8$	$+ \underline{I}_C(R_8 + j\omega L_7 + j\omega L_3 - j\frac{1}{\omega C_3} + \underline{Z}_x)$	$- \underline{I}_D(\underline{Z}_x + j\omega M + j\omega L_7)$	$= 0$
$- \underline{I}_A j\omega L_6$	$- 0$	$- \underline{I}_C(j\omega L_7 + j\omega M)$	$+ \underline{I}_D(j\omega L_6 + j\omega L_7 - j\frac{1}{\omega C_4})$	$= 0$

### 13.8.2. Trennbündelmethode / Knotenspannungsmethode

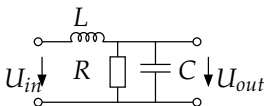
Es dürfen nur Stromquellen vorkommen, vorhandene Spannungsquellen sind zuerst umzuwandeln.



$\underline{E}_A$	$\underline{E}_B$	$\underline{E}_C$	$\underline{E}_D$	
$+ \underline{E}_A(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)$	$- 0$	$- \underline{E}_C \underline{Y}_2$	$- 0$	$= \underline{U}_{01} \underline{Y}_1$
$- 0$	$+ \underline{E}_B(\underline{Y}_3 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6)$	$- \underline{E}_C \underline{Y}_3$	$- \underline{E}_D \underline{Y}_5$	$= 0$
$- \underline{E}_A \underline{Y}_2$	$- \underline{E}_B(\underline{Y}_3 + k \underline{Y}_6)$	$+ \underline{E}_C(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4)$	$- \underline{E}_D \underline{Y}_4$	$= 0$
$- 0$	$- \underline{E}_B \underline{Y}_5$	$- \underline{E}_C \underline{Y}_4$	$+ \underline{E}_D(\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_7)$	$= 0$

## 13.9. Darstellungsformen

### 13.9.1. Beispiel: Nyquistdiagramm, Ortskurve

 <p><math>R = 2k\Omega, L = 10mH, C = 10nF</math></p>	$\underline{G} = \frac{U_{out}}{U_{in}}$ $\underline{G} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}}$ <p>tiefe f (<math>\omega \ll \frac{1}{\sqrt{LC}}</math>): <math>\underline{G} \approx 1 \angle 0^\circ</math> hohe f (<math>\omega \gg \frac{1}{\sqrt{LC}}</math>): <math>\underline{G} \approx \frac{1}{\omega^2 LC} \angle -180^\circ</math> Achsenschnittpunkte: <math>\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}</math>: <math>Re(\underline{G}) = 0 \rightarrow \omega_0 \rightarrow \underline{G} = -2j</math> <math>Im(\underline{G}) = 0 \rightarrow \omega \rightarrow 1</math></p>	<table><tr><td><math>G</math></td><td>Frequenzgang, [1]</td></tr><tr><td></td><td>Verstärkung</td></tr><tr><td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz <math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr><tr><td><math>U</math></td><td>Spannung <math>[V]</math></td></tr><tr><td><math>L</math></td><td>Induktivität <math>[H]</math></td></tr><tr><td><math>C</math></td><td>Kapazität <math>[C]</math></td></tr><tr><td><math>R</math></td><td>Widerstand <math>[\Omega]</math></td></tr></table>	$G$	Frequenzgang, [1]		Verstärkung	$\omega$	Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$	$U$	Spannung $[V]$	$L$	Induktivität $[H]$	$C$	Kapazität $[C]$	$R$	Widerstand $[\Omega]$
$G$	Frequenzgang, [1]															
	Verstärkung															
$\omega$	Kreisfrequenz $[\frac{1}{s}]$															
$U$	Spannung $[V]$															
$L$	Induktivität $[H]$															
$C$	Kapazität $[C]$															
$R$	Widerstand $[\Omega]$															

### 13.9.2. Bodediagramm

Vorgehen beim Erstellen eines Bodediagramms:

Netzwerkfunktion aufstellen 
$$F(\omega) = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots + a_n (j\omega)^n}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + \dots + b_n (j\omega)^n}$$

In Produktform 
$$F(\omega) = K_1 \prod_{i=1}^r \text{Standardterme}, \quad K_1 = \frac{a_0}{b_0}$$

Standardterme 
$$\begin{cases} (j\omega T)^n \\ (1 + j\omega T)^n \\ [1 + 2\xi j\omega T + (j\omega)^2 T^2]^n \end{cases} \quad n \pm 1, \pm 2 \dots$$

$$1 + 2\xi j\omega T + (j\omega)^2 T^2 = \begin{cases} (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) & \text{für } \xi > 1 \\ (1 + j\omega T)^2 & \text{für } \xi = 1 \\ \text{nicht aufspaltbar} & \text{für } \xi < 1 \end{cases}$$

Normierung

- Frequenz: Bezugsfrequenz  $\omega_0 = \frac{1}{T_0} \Rightarrow$  normierte Frequenz  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega T_0$   
Beispiele:  $\omega_0 = \frac{1}{T} \Rightarrow \Omega = \omega T$  oder  $\omega_0 = 1 \frac{1}{s} \Rightarrow \Omega = \omega 1s$
- Wert: Bezugswert  $K_0 \Rightarrow$  normierte Konstante  $K = \frac{K_1}{K_0}$   
Beispiel:  $K_0 = K_1 \Rightarrow K = 1$

### 13. WECHSELSTROMLEHRE

Normierte Netzwerkfunktion  $F(\omega) \Rightarrow F_n(\Omega) = F_n(\omega T_0) = F_n(\frac{\omega}{\omega_0})$

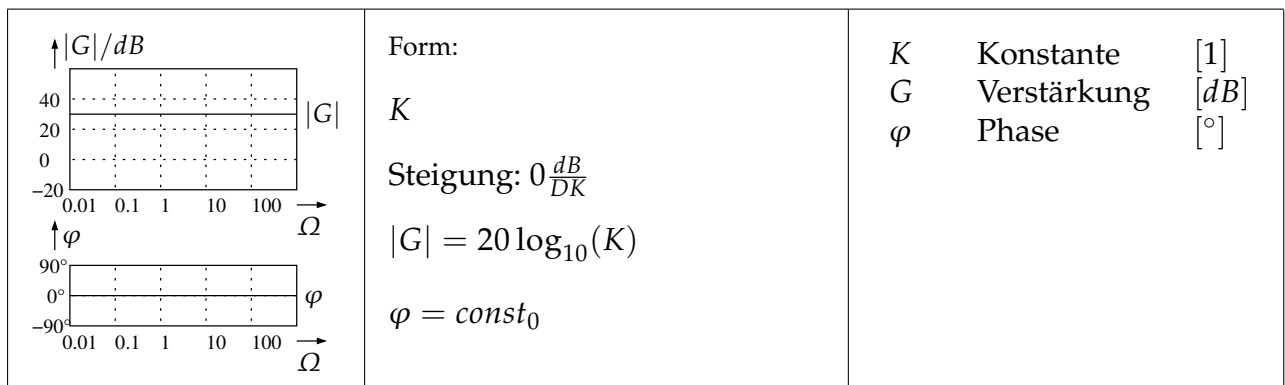
Normierte Standardterme

$$\begin{aligned} (j\omega T)^n &\Rightarrow (j\Omega \frac{T}{T_0})^n \\ (1 + j\omega T)^n &\Rightarrow (1 + j\Omega \frac{T}{T_0})^n \\ [1 + 2\xi j\omega T + (j\omega)^2 T^2]^n &\Rightarrow \left[ 1 + 2\xi j\Omega \frac{T}{T_0} + (j\Omega)^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \right]^n \end{aligned}$$

Bodediagramm

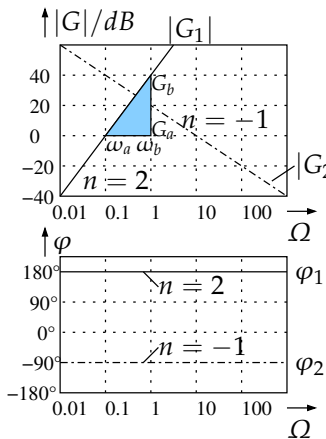
- Betrag, Amplitudengang:  $|G|/dB = \sum_{i=1}^r 20 \log_{10}\{|norm.Standardterme|\} + 20 \log_{10} K$
- Argument, Phasengang:  $\varphi = \sum_{i=1}^r \arg\{norm.Standardterme\}$

**P-Glied: Standardterm  $K$**

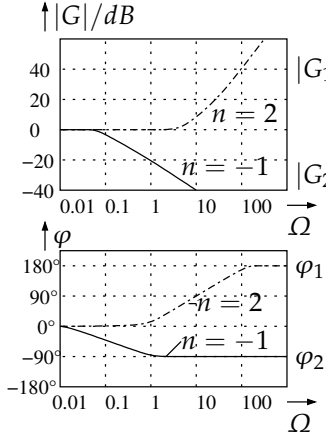




**I-Glied: Standardterm**  $(j\omega T)^n$ 

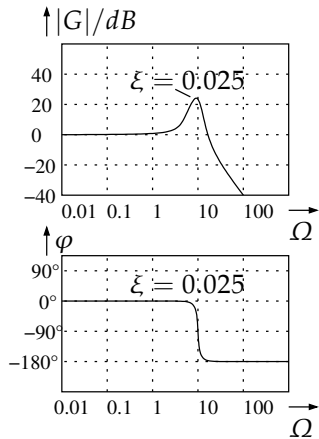
 <p>Siehe auch S.165</p>	<p>Form:</p> $(j\omega T)^n$ <p>Normalisiert:</p> $(j\omega \frac{T}{T_0})^n$ <p>Amplitude: <math> G  = \omega^n T^n</math>  <math> G  \Rightarrow</math> Gerade  Steigung: <math>n \cdot 20 \frac{dB}{DK}</math>  Falls <math>\Omega = \frac{T_0}{T} \Rightarrow  G  = 0</math></p> <p>Phase <math>\varphi</math>:  <math>\varphi = n \cdot 90^\circ</math></p> $\frac{G_a}{G_b} = \frac{\omega_a^n}{\omega_b^n}, \quad n = \pm 1$	<table> <tr> <td><math>K</math></td><td>Konstante</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>G</math></td><td>Verstärkung</td><td>[dB]</td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Phase</td><td>[°]</td></tr> <tr> <td><math>n</math></td><td>Exponent</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>T_0</math></td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Omega</math></td><td>Normierte Frequenz</td><td>[1]</td></tr> </table>	$K$	Konstante	[1]	$G$	Verstärkung	[dB]	$\varphi$	Phase	[°]	$n$	Exponent	[1]	$T$	Periode	[s]	$T_0$	Periode	[s]	$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	$\Omega$	Normierte Frequenz	[1]
$K$	Konstante	[1]																								
$G$	Verstärkung	[dB]																								
$\varphi$	Phase	[°]																								
$n$	Exponent	[1]																								
$T$	Periode	[s]																								
$T_0$	Periode	[s]																								
$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																								
$\Omega$	Normierte Frequenz	[1]																								

**PT<sub>1</sub>-Glied: Standardterm**  $(1 + j\omega T)^n$ 

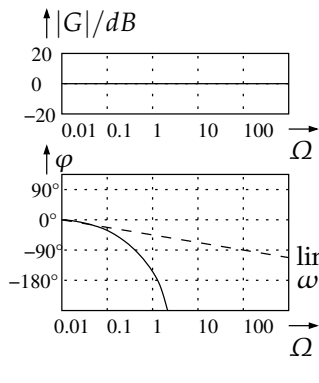
	<p>Form:</p> $(1 + j\omega T)^n$ <p>Normalisiert:</p> $\left(1 + j\Omega \frac{T}{T_0}\right)^n$ <p>Amplitude: <math> G  = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}</math>  Für <math>\Omega \ll \frac{T_0}{T} :  G  \approx 0 \frac{dB}{DK}</math>  Für <math>\Omega \gg \frac{T_0}{T} :  G  \approx n \cdot 20 \frac{dB}{DK}</math>  Knick:  Bei <math>\Omega = \frac{T_0}{T} :  G  = n \cdot 3dB</math></p> <p>Phase: <math>\varphi = \arctan(\omega T)</math>  Für <math>\Omega \ll \frac{T_0}{T} : \varphi \approx 0^\circ</math>  Für <math>\Omega \gg \frac{T_0}{T} : \varphi \approx n \cdot 90^\circ</math>  Für <math>\Omega = \frac{T_0}{T} : \varphi = n \cdot 45^\circ</math></p>	<table> <tr> <td><math>K</math></td><td>Konstante</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>G</math></td><td>Verstärkung</td><td>[dB]</td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Phase</td><td>[°]</td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>T_0</math></td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Omega</math></td><td>Normierte Frequenz</td><td>[1]</td></tr> </table>	$K$	Konstante	[1]	$G$	Verstärkung	[dB]	$\varphi$	Phase	[°]	$T$	Periode	[s]	$T_0$	Periode	[s]	$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	$\Omega$	Normierte Frequenz	[1]
$K$	Konstante	[1]																					
$G$	Verstärkung	[dB]																					
$\varphi$	Phase	[°]																					
$T$	Periode	[s]																					
$T_0$	Periode	[s]																					
$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																					
$\Omega$	Normierte Frequenz	[1]																					

### 13. WECHSELSTROMLEHRE

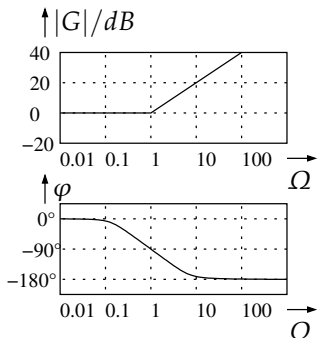
**PT<sub>2</sub>-Glied: Standardterm**  $\frac{1}{1+2\xi j\omega T+(j\omega T)^2}$

 <p>Je kleiner <math>\xi</math> ist, desto schneller springt die Phase</p>	<p>Form:</p> $\frac{1}{1 + 2\xi j\omega T + (j\omega)^2 T^2}$ <p>Normalisiert:</p> $\frac{1}{1 + 2\xi j\Omega \frac{T}{T_0} + (j\Omega)^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2}$ <p>Amplitude:</p> $ G  = \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (\omega 2\xi T)^2}$ <p>Für <math>\Omega \ll \frac{T_0}{T} :  G  \approx 0 \frac{dB}{DK}</math>          Für <math>\Omega \gg \frac{T_0}{T} :  G  \approx -40 \frac{dB}{DK}</math></p> <p>Überschwingen, Knick:  <math>\Omega = \frac{T_0}{T} :  G  = -20 \log_{10}(2\xi)</math></p> <p>Phase: <math>\varphi = \arctan\left(\frac{\omega 2\xi T}{1 - \omega^2 T^2}\right)</math>          Für <math>\Omega \ll \frac{T_0}{T} : \varphi \approx 0^\circ</math>          Für <math>\Omega \gg \frac{T_0}{T} : \varphi \approx -180^\circ</math>          Für <math>\Omega = \frac{T_0}{T} : \varphi = -90^\circ</math></p>	<table> <tr> <td><math>K</math></td><td>Konstante</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>G</math></td><td>Verstärkung</td><td>[dB]</td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Phase</td><td>[°]</td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>\frac{1}{T}</math></td><td>Resonanzfrequenz</td><td>[1/s]</td></tr> <tr> <td><math>T_0</math></td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>\xi</math></td><td>Dämpfung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td>[1/s]</td></tr> <tr> <td><math>\Omega</math></td><td>Normierte Frequenz</td><td>[1]</td></tr> </table>	$K$	Konstante	[1]	$G$	Verstärkung	[dB]	$\varphi$	Phase	[°]	$T$	Periode	[s]	$\frac{1}{T}$	Resonanzfrequenz	[1/s]	$T_0$	Periode	[s]	$\xi$	Dämpfung	[1]	$\omega$	Kreisfrequenz	[1/s]	$\Omega$	Normierte Frequenz	[1]
$K$	Konstante	[1]																											
$G$	Verstärkung	[dB]																											
$\varphi$	Phase	[°]																											
$T$	Periode	[s]																											
$\frac{1}{T}$	Resonanzfrequenz	[1/s]																											
$T_0$	Periode	[s]																											
$\xi$	Dämpfung	[1]																											
$\omega$	Kreisfrequenz	[1/s]																											
$\Omega$	Normierte Frequenz	[1]																											

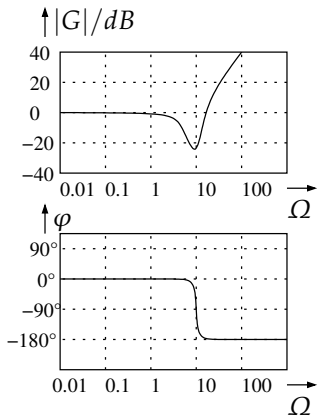
**Totzeitglied: Standardterm**  $e^{-j\omega T_t}$

	<p>Form:</p> $e^{-j\omega T_t}$ <p>Steigung: <math>0 \frac{dB}{DK}</math></p> <p><math> G  = 1</math></p> <p><math>\varphi = -\omega T_t</math></p>	<table> <tr> <td><math>T_t</math></td><td>Totzeit</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>G</math></td><td>Verstärkung</td><td>[dB]</td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Phase</td><td>[°]</td></tr> </table>	$T_t$	Totzeit	[s]	$G$	Verstärkung	[dB]	$\varphi$	Phase	[°]
$T_t$	Totzeit	[s]									
$G$	Verstärkung	[dB]									
$\varphi$	Phase	[°]									

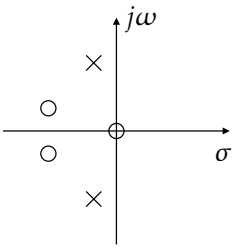
**Irregulärer Aufwärtsknick 1. Ordnung: Standardterm  $(1 - j\omega T)^n$** 

	<p>Form:</p> $(1 - j\omega T)^n$ <p>Normalisiert:</p> $\left(1 - j\Omega \frac{T}{T_0}\right)^n$ <p>Amplitude: <math> G  = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}</math>  Für <math>\Omega \ll \frac{T_0}{T}</math>: <math> G  \approx 0 \frac{dB}{DK}</math>  Für <math>\Omega \gg \frac{T_0}{T}</math>: <math> G  \approx n \cdot 20 \frac{dB}{DK}</math>  Knick:  Bei <math>\Omega = \frac{T_0}{T}</math>: <math> G  = n \cdot 3dB</math></p> <p>Phase: <math>\varphi = -\arctan(\omega T)</math>  Für <math>\Omega \ll \frac{T_0}{T}</math>: <math>\varphi \approx 0^\circ</math>  Für <math>\Omega \gg \frac{T_0}{T}</math>: <math>\varphi \approx n \cdot 90^\circ</math>  Für <math>\Omega = \frac{T_0}{T}</math>: <math>\varphi = n \cdot 45^\circ</math></p>	<table> <tr> <td><math>K</math></td><td>Konstante</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>G</math></td><td>Verstärkung</td><td><math>[dB]</math></td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Phase</td><td><math>[^\circ]</math></td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>T_0</math></td><td>Periode</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Omega</math></td><td>Normierte Frequenz</td><td><math>[1]</math></td></tr> </table>	$K$	Konstante	$[1]$	$G$	Verstärkung	$[dB]$	$\varphi$	Phase	$[^\circ]$	$T$	Periode	$[s]$	$T_0$	Periode	$[s]$	$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	$\Omega$	Normierte Frequenz	$[1]$
$K$	Konstante	$[1]$																					
$G$	Verstärkung	$[dB]$																					
$\varphi$	Phase	$[^\circ]$																					
$T$	Periode	$[s]$																					
$T_0$	Periode	$[s]$																					
$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																					
$\Omega$	Normierte Frequenz	$[1]$																					

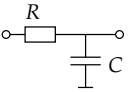
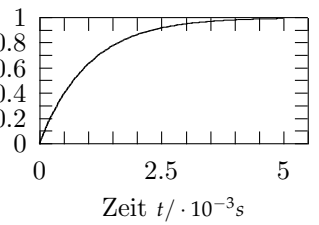
**Irregulärer Aufwärtsknick 2. Ordnung: Standardterm  $1 - 2\xi j\omega T + (j\omega T)^2$** 

 <p>Je kleiner <math>\xi</math> ist, desto schneller springt die Phase</p>	<p>Form:</p> $1 - 2\xi j\omega T + (j\omega T)^2$ <p>Normalisiert:</p> $1 - 2\xi j\Omega \frac{T}{T_0} + (j\Omega)^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2$ <p>Amplitude  <math> G  = \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (\omega 2\xi T)^2}</math>  Für <math>\Omega \ll \frac{T_0}{T}</math>: <math> G  \approx 0 \frac{dB}{DK}</math>  Für <math>\Omega \gg \frac{T_0}{T}</math>: <math> G  \approx +40 \frac{dB}{DK}</math>  Überschwingen, Knick:  <math>\Omega = \frac{T_0}{T}</math>: <math> G  = -20 \log_{10}(2\xi)</math></p> <p>Phase: <math>\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega 2\xi T}{1 - \omega^2 T^2}\right)</math>  Für <math>\Omega \ll \frac{T_0}{T}</math>: <math>\varphi \approx 0^\circ</math>  Für <math>\Omega \gg \frac{T_0}{T}</math>: <math>\varphi \approx -180^\circ</math>  Für <math>\Omega = \frac{T_0}{T}</math>: <math>\varphi = -90^\circ</math></p>	<table> <tr> <td><math>K</math></td><td>Konstante</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>G</math></td><td>Verstärkung</td><td><math>[dB]</math></td></tr> <tr> <td><math>\varphi</math></td><td>Phase</td><td><math>[^\circ]</math></td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>\frac{1}{T}</math></td><td>Resonanzfrequenz</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>T_0</math></td><td>Periode</td><td><math>[s]</math></td></tr> <tr> <td><math>\xi</math></td><td>Dämpfung</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Omega</math></td><td>Normierte Frequenz</td><td><math>[1]</math></td></tr> </table>	$K$	Konstante	$[1]$	$G$	Verstärkung	$[dB]$	$\varphi$	Phase	$[^\circ]$	$T$	Periode	$[s]$	$\frac{1}{T}$	Resonanzfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	$T_0$	Periode	$[s]$	$\xi$	Dämpfung	$[1]$	$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	$\Omega$	Normierte Frequenz	$[1]$
$K$	Konstante	$[1]$																											
$G$	Verstärkung	$[dB]$																											
$\varphi$	Phase	$[^\circ]$																											
$T$	Periode	$[s]$																											
$\frac{1}{T}$	Resonanzfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																											
$T_0$	Periode	$[s]$																											
$\xi$	Dämpfung	$[1]$																											
$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																											
$\Omega$	Normierte Frequenz	$[1]$																											

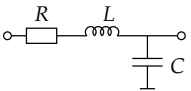
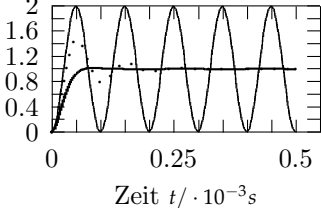
### 13.9.3. Pol- Nullstellendiagramm

 <p>Ausser <math>K</math> ist die gesamte Netzwerkfunktion aus dem Pol- Nullstellendiagramm ersichtlich.</p>	$s = \sigma + j\omega$ (Frequenzgang: $\sigma=0$ ) Netzwerkfunktion: $F(s) = K \frac{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}{(s - q_1)(s - q_2) \dots (s - q_n)}$ Nullstellen $\Rightarrow \times$ in Diagramm Polstellen $\Rightarrow \circ$ in Diagramm  Pol nahe an $j\omega$ -Achse $\Rightarrow$ Überhöhung im Amplitudengang	<table> <tr> <td><math>K</math></td><td>Konstante</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>s</math></td><td>komplexe Frequenz (Laplace)</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>\sigma</math></td><td><math>Re(s)</math></td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz von Polynom</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>p</math></td><td>von Polynom</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>q</math></td><td>von Polynom</td><td>[1]</td></tr> </table>	$K$	Konstante	[1]	$s$	komplexe Frequenz (Laplace)	[1]	$\sigma$	$Re(s)$	[1]	$\omega$	Kreisfrequenz von Polynom	$[\frac{1}{s}]$	$p$	von Polynom	[1]	$q$	von Polynom	[1]
$K$	Konstante	[1]																		
$s$	komplexe Frequenz (Laplace)	[1]																		
$\sigma$	$Re(s)$	[1]																		
$\omega$	Kreisfrequenz von Polynom	$[\frac{1}{s}]$																		
$p$	von Polynom	[1]																		
$q$	von Polynom	[1]																		

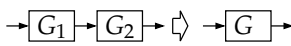
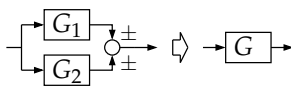
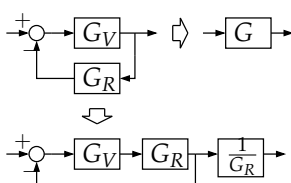
### 13.10. Eigenschaften des PT<sub>1</sub>-Glied

<p>Beispielschaltung</p>  <p>Sprungantwort:</p> 	$G = \frac{1}{1 + j\omega T}$ <p>Beispiel:</p> $T = RC$ <p>Sprungantwort:</p> $u_o = k \left[ 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right]$ $T \dot{u}_o + u_o = k u_{in}$	<table> <tr> <td><math>G</math></td><td>Verstärkung</td><td>[dB]</td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td><math>[\frac{1}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td><math>C</math></td><td>Kapazität</td><td>[F]</td></tr> <tr> <td><math>u_o</math></td><td>u-Ausgang</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{in}</math></td><td>u-Eingang</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>Faktor</td><td>[1]</td></tr> </table>	$G$	Verstärkung	[dB]	$T$	Periode	[s]	$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$	$R$	Widerstand	[Ω]	$C$	Kapazität	[F]	$u_o$	u-Ausgang	[V]	$u_{in}$	u-Eingang	[V]	$t$	Zeit	[s]	$k$	Faktor	[1]
$G$	Verstärkung	[dB]																											
$T$	Periode	[s]																											
$\omega$	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{s}]$																											
$R$	Widerstand	[Ω]																											
$C$	Kapazität	[F]																											
$u_o$	u-Ausgang	[V]																											
$u_{in}$	u-Eingang	[V]																											
$t$	Zeit	[s]																											
$k$	Faktor	[1]																											

## 13.11. Eigenschaften des PT<sub>2</sub>-Glied

<p>Beispielschaltung</p>  <p>Sprungantwort:</p> <p><math>R = 100\Omega</math> ———</p> <p><math>R = 30\Omega</math> ·····</p> <p><math>R = 0\Omega</math> ———</p> 	$G = \frac{1}{1 + 2\xi j\omega T + (j\omega)^2 T^2}$ <p>Beispiel:</p> $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad T = \sqrt{LC}$ <p>Je kleiner <math>\xi</math> desto mehr schwingt die Schaltung. Bei aktiven Schaltungen kann <math>\xi &lt; 0</math> werden.</p> $\omega_e = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}, \quad 0 < D < 1$ $\omega_0 = \frac{1}{T}$ $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}, \quad D < 0.707$ <p>Sprungantwort:</p> $u_o = k \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} x \right]$ $x = \sin \left\{ \sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t + \arccos(\xi) \right\}$ $T^2 \ddot{u}_o + 2\xi T \dot{u}_o + u_o = k u_{in}$	<table> <tr><td><math>G</math></td><td>Verstärkung</td><td>[dB]</td></tr> <tr><td><math>\varphi</math></td><td>Phase</td><td>[rad]</td></tr> <tr><td><math>T</math></td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr><td><math>\xi</math></td><td>Dämpfung</td><td>[1]</td></tr> <tr><td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td>[1/s]</td></tr> <tr><td><math>\omega_e</math></td><td>Eigenfrequenz</td><td>[1/s]</td></tr> <tr><td><math>\omega_0</math></td><td>Knickfrequenz</td><td>[1/s]</td></tr> <tr><td><math>\omega_r</math></td><td>Resonanzfrequenz</td><td>[1/s]</td></tr> <tr><td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr><td><math>L</math></td><td>Induktivität</td><td>[H]</td></tr> <tr><td><math>C</math></td><td>Kapazität</td><td>[F]</td></tr> <tr><td><math>u_o</math></td><td>u-Ausgang</td><td>[V]</td></tr> <tr><td><math>u_{in}</math></td><td>u-Eingang</td><td>[V]</td></tr> <tr><td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td>[s]</td></tr> <tr><td><math>k</math></td><td>Faktor</td><td>[1]</td></tr> </table>	$G$	Verstärkung	[dB]	$\varphi$	Phase	[rad]	$T$	Periode	[s]	$\xi$	Dämpfung	[1]	$\omega$	Kreisfrequenz	[1/s]	$\omega_e$	Eigenfrequenz	[1/s]	$\omega_0$	Knickfrequenz	[1/s]	$\omega_r$	Resonanzfrequenz	[1/s]	$R$	Widerstand	[Ω]	$L$	Induktivität	[H]	$C$	Kapazität	[F]	$u_o$	u-Ausgang	[V]	$u_{in}$	u-Eingang	[V]	$t$	Zeit	[s]	$k$	Faktor	[1]
$G$	Verstärkung	[dB]																																													
$\varphi$	Phase	[rad]																																													
$T$	Periode	[s]																																													
$\xi$	Dämpfung	[1]																																													
$\omega$	Kreisfrequenz	[1/s]																																													
$\omega_e$	Eigenfrequenz	[1/s]																																													
$\omega_0$	Knickfrequenz	[1/s]																																													
$\omega_r$	Resonanzfrequenz	[1/s]																																													
$R$	Widerstand	[Ω]																																													
$L$	Induktivität	[H]																																													
$C$	Kapazität	[F]																																													
$u_o$	u-Ausgang	[V]																																													
$u_{in}$	u-Eingang	[V]																																													
$t$	Zeit	[s]																																													
$k$	Faktor	[1]																																													

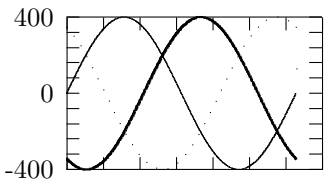
## 13.12. Verknüpfung von Blockdiagrammen

	$G = G_1 \cdot G_2$	$G$ Übertragungsfunktion [1]
	$G = G_1 \pm G_2$	
	$G = \frac{G_V}{1 + G_V G_R}$ $G = \frac{1}{G_R} \frac{G_V G_R}{1 + G_V G_R}$	

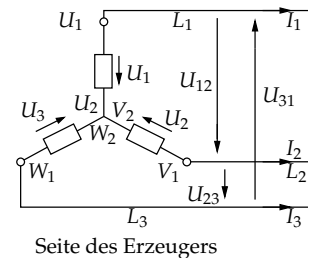
**Teil III.**

**Energie und Antriebstechnik**

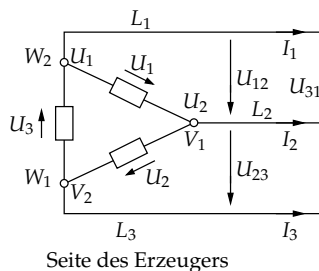
# 14. Dreiphasensysteme

	<p>Maschensatz:</p> $\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0$ $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$	<p><math>\underline{U}</math> Spannung [V] (komplex)</p> <p><math>\underline{I}</math> Strom (komplex) [A]</p>
---	---	--

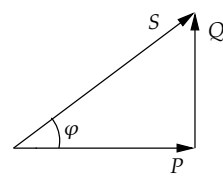
## 14.1. Sternschaltung

 <p>Seite des Erzeugers</p>	<p>Strang-Sternspannungen:</p> $\underline{U}_{Str1} = \underline{U}_1 = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$ $\underline{U}_{Str2} = \underline{U}_2 = \underline{U}_2 - \underline{U}_3$ $\underline{U}_{Str3} = \underline{U}_3 = \underline{U}_3 - \underline{U}_1$ <p>Aussenleiterspannungen:</p> $\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 \quad \angle(\underline{U}_1, \underline{U}_2) = 120^\circ$ $\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3$ $\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1$ $U = U_{Str} \sqrt{3}$ $I = I_{Str}$	<p><math>\underline{U}</math> Spannung [V]</p> <p><math>\underline{U}_{Str}</math> Strangspannung [V]</p> <p><math>\underline{I}</math> Strom [A]</p>
--	---	---

## 14.2. Dreieckschaltung

 <p>Seite des Erzeugers</p>	<p>Strang-Sternspannungen:</p> $U_{Str1} = \underline{U}_1 = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$ $U_{Str2} = \underline{U}_2 = \underline{V}_1 - \underline{V}_2$ $U_{Str3} = \underline{U}_3 = \underline{W}_1 - \underline{W}_2$ <p>Aussenleiterspannungen:</p> $\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 \quad \angle(\underline{U}_1, \underline{U}_2) = 120^\circ$ $\underline{U}_{23} = \underline{U}_2$ $\underline{U}_{31} = \underline{U}_3$ $U = U_{Str}$ $I = 2I_{Str} \cos(30^\circ) = I_{Str}\sqrt{3}$	<table> <tr> <td><math>\underline{U}</math></td> <td>Spannung</td> <td>[V]</td> </tr> <tr> <td><math>U_{Str}</math></td> <td>Strangspannung</td> <td>[V]</td> </tr> <tr> <td><math>\underline{I}</math></td> <td>Strom</td> <td>[A]</td> </tr> </table>	$\underline{U}$	Spannung	[V]	$U_{Str}$	Strangspannung	[V]	$\underline{I}$	Strom	[A]
$\underline{U}$	Spannung	[V]									
$U_{Str}$	Strangspannung	[V]									
$\underline{I}$	Strom	[A]									

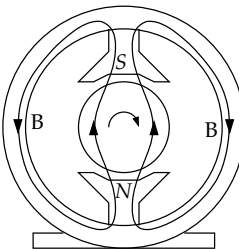
### 14.2.1. Leistungen bei Stern- und Dreieckschaltung

	$S_{Str} = U_{Str} I_{Str}$ $S = 3S_{Str} = \sqrt{3}UI$ $P = S \cos(\varphi) = \sqrt{3}UI \cos(\varphi)$ $Q = S \sin(\varphi) = \sqrt{3}UI \sin(\varphi)$ $W = Pt = \sqrt{3}UI \cos(\varphi)t$ $W_b = Qt = \sqrt{3}UI \sin(\varphi)t$	<table> <tr> <td><math>U</math></td> <td>Spannung</td> <td>[V]</td> </tr> <tr> <td><math>I</math></td> <td>Strom</td> <td>[A]</td> </tr> <tr> <td><math>S</math></td> <td>Scheinleistung</td> <td>[VA]</td> </tr> <tr> <td><math>P</math></td> <td>Wirkleistung</td> <td>[W]</td> </tr> <tr> <td><math>Q</math></td> <td>Blindleistung</td> <td>[Var]</td> </tr> <tr> <td><math>W</math></td> <td>Wirkarbeit</td> <td>[Ws]</td> </tr> <tr> <td><math>W_b</math></td> <td>Blindarbeit</td> <td>[Vars]</td> </tr> <tr> <td><math>t</math></td> <td>Zeit</td> <td>[s]</td> </tr> </table>	$U$	Spannung	[V]	$I$	Strom	[A]	$S$	Scheinleistung	[VA]	$P$	Wirkleistung	[W]	$Q$	Blindleistung	[Var]	$W$	Wirkarbeit	[Ws]	$W_b$	Blindarbeit	[Vars]	$t$	Zeit	[s]
$U$	Spannung	[V]																								
$I$	Strom	[A]																								
$S$	Scheinleistung	[VA]																								
$P$	Wirkleistung	[W]																								
$Q$	Blindleistung	[Var]																								
$W$	Wirkarbeit	[Ws]																								
$W_b$	Blindarbeit	[Vars]																								
$t$	Zeit	[s]																								

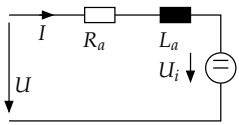


# 15. Elektromotoren und Generatoren

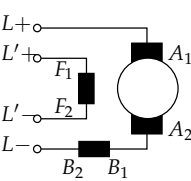
## 15.1. Allgemein

	$M = Fr$ $F = BIlz\alpha$ $M = BIlz\alpha r = BIC_m$ $C_m = lz\alpha r$ $U_i = Bl\omega z\alpha$ $\omega = 2\pi n$ $U_i \approx \phi n C_n$ $C_n = 2\pi r z \alpha$	<table> <tr> <td><math>r</math></td><td>Radius</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>F</math></td><td>Kraft</td><td><math>[N]</math></td></tr> <tr> <td><math>B</math></td><td>Induktion</td><td><math>[\frac{Vs}{m}]</math></td></tr> <tr> <td><math>I</math></td><td>Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>l</math></td><td>Leiterlänge</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>z</math></td><td>Anz. Leiter</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>\alpha</math></td><td>Polbedeckungswinkel</td><td><math>[rad]</math></td></tr> <tr> <td><math>C_m</math></td><td>Maschinenkonst.</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>\Phi</math></td><td>magn. Fluss</td><td><math>[Wb]</math></td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Winkelgeschw.</td><td><math>[\frac{rad}{s}]</math></td></tr> <tr> <td><math>U_i</math></td><td>U-Generator / Motor</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>n</math></td><td>Drehzahl</td><td><math>[1]</math></td></tr> </table>	$r$	Radius	$[m]$	$F$	Kraft	$[N]$	$B$	Induktion	$[\frac{Vs}{m}]$	$I$	Strom	$[A]$	$l$	Leiterlänge	$[m]$	$z$	Anz. Leiter	$[1]$	$\alpha$	Polbedeckungswinkel	$[rad]$	$C_m$	Maschinenkonst.	$[1]$	$\Phi$	magn. Fluss	$[Wb]$	$\omega$	Winkelgeschw.	$[\frac{rad}{s}]$	$U_i$	U-Generator / Motor	$[V]$	$n$	Drehzahl	$[1]$
$r$	Radius	$[m]$																																				
$F$	Kraft	$[N]$																																				
$B$	Induktion	$[\frac{Vs}{m}]$																																				
$I$	Strom	$[A]$																																				
$l$	Leiterlänge	$[m]$																																				
$z$	Anz. Leiter	$[1]$																																				
$\alpha$	Polbedeckungswinkel	$[rad]$																																				
$C_m$	Maschinenkonst.	$[1]$																																				
$\Phi$	magn. Fluss	$[Wb]$																																				
$\omega$	Winkelgeschw.	$[\frac{rad}{s}]$																																				
$U_i$	U-Generator / Motor	$[V]$																																				
$n$	Drehzahl	$[1]$																																				

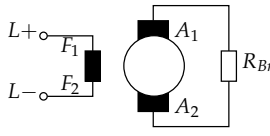
## 15.2. Gleichstrommaschine

 <p>Ersatzschaltbild Ankerkreis</p>	<p>Falls <math>U &gt; U_i \rightarrow</math> Motorbetrieb, sonst Genratorbetrieb</p> $U_i = k_1 \Phi n$ $U = U_i + R_A I L_a \frac{dI}{dt}$ $I = \frac{U - U_i}{R_A} (\text{stationär})$ $n_0 = \frac{U}{k_1 \Phi}$ $P_{el} = U_i I \pm \overset{Mot}{Gen} (I^2 R_A)$ $M = \frac{k_1}{2\pi} \Phi I = \frac{P_{mech}}{2\pi n}$ $M = k_2 \Phi I$ $n = \underbrace{\frac{U}{k_1 \Phi}}_{\text{Leerlaufterm}} - \underbrace{\frac{R_A M}{k_1 k_2 \Phi^2}}_{\text{Lastterm}}$ $M_A = \frac{k_2 \Phi U}{R_A}$	<p><math>U_i</math> Ankerspannung induziert [V]</p> <p><math>U</math> Ankerspannung [V]</p> <p><math>I</math> Strom [A]</p> <p><math>n</math> Drehzahl [1]</p> <p><math>n_0</math> n-Leerlauf [1]</p> <p><math>P</math> Leistung [W]</p> <p><math>R_A</math> R-Anker [<math>\Omega</math>]</p> <p><math>L_a</math> L-Anker [<math>\Omega</math>]</p> <p><math>\Phi</math> magn. Fluss [Wb]</p> <p><math>M</math> Drehmoment [Nm]</p> <p><math>M_A</math> M-Anlauf [Nm]</p> <p><math>k_1</math> Maschinenkonst. [1]</p> <p><math>k_2</math> Maschinenkonst. [1]</p>
--	---	--

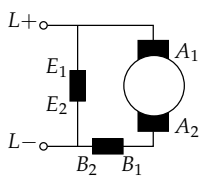
### 15.2.1. Fremderregte Gleichstrommaschine (GNSM)

	$M = \frac{k_2 \Phi U}{R_A} - \frac{k_1 k_2 \Phi^2 n}{R_A}$ <p>Drehzahlsteuerung:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Änderung des Erregerfeldes</li> <li>2. Änderung der Ankerspannung</li> <li>3. Vergrößerung des Ankerwiderstandes</li> </ol>	<p><math>U</math> Ankerspannung [V]</p> <p><math>R_A</math> R-Anker [<math>\Omega</math>]</p> <p><math>M</math> Drehmoment [Nm]</p> <p><math>\Phi</math> magn. Fluss [Wb]</p> <p><math>k_1</math> Maschinenkonst. [1]</p> <p><math>k_2</math> Maschinenkonst. [1]</p>
---	---	---

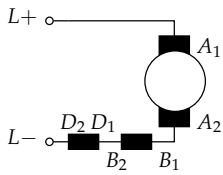
### 15.2.2. Nutzbremung mit fremderregter Gleichstrommaschine

	$n = \frac{(R_A + R_{Br})M_{Br}}{k_1 k_2 \Phi^2}$ $M = \frac{k_1 k_2 \Phi^2 n}{R_A + R_{Br}}$	<table> <tr> <td><math>n</math></td><td>Drehzahl</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>R_A</math></td><td>R-Anker</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>R_{Br}</math></td><td>R-Brems</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>M</math></td><td>Drehmoment</td><td>[Nm]</td></tr> <tr> <td><math>\Phi</math></td><td>magn. Fluss</td><td>[Wb]</td></tr> <tr> <td><math>k_1</math></td><td>Maschinen- konst.</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>k_2</math></td><td>Maschinen- konst.</td><td>[1]</td></tr> </table>	$n$	Drehzahl	[1]	$R_A$	R-Anker	[ $\Omega$ ]	$R_{Br}$	R-Brems	[ $\Omega$ ]	$M$	Drehmoment	[Nm]	$\Phi$	magn. Fluss	[Wb]	$k_1$	Maschinen- konst.	[1]	$k_2$	Maschinen- konst.	[1]
$n$	Drehzahl	[1]																					
$R_A$	R-Anker	[ $\Omega$ ]																					
$R_{Br}$	R-Brems	[ $\Omega$ ]																					
$M$	Drehmoment	[Nm]																					
$\Phi$	magn. Fluss	[Wb]																					
$k_1$	Maschinen- konst.	[1]																					
$k_2$	Maschinen- konst.	[1]																					

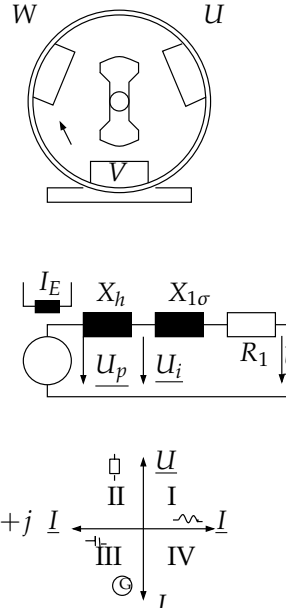
### 15.3. Gleichstrom Nebenschlussmaschine (GNSM)

	<p>Es gelten die selben Regeln wie bei der fremderregten Gleichstrommaschine, jedoch kann die Drehzahl nicht durch erniedrigen der Spannung gesenkt werden.</p> <p>Bei Widerstandsbremung ist nur der Anker an <math>R_{Br}</math> anzuschliessen.</p>	
--	--	--

## 15.4. Gleichstrom Reihenschlussmaschine (GRSM)

	$\sum R_A = R_A + R_B + R_D$ $U_i = k_1 c * I n = k_3 I n$ $M = I^2 \frac{k_3}{2\pi} = I^2 k_4$ $n = \frac{U}{\sqrt{2\pi k_3 M}} - \frac{\sum R_A}{k_3}$ $M = \frac{k_3}{2\pi} \left( \frac{U}{k_3 n + \sum R_A} \right)^2$ $M_A = \frac{k_3}{2\pi} \left( \frac{U}{\sum R_A} \right)^2$ <p>Die Änderung der Drehzahl ist wie bei GNSM</p>	<table> <tr> <td><math>n</math></td><td>Drehzahl</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>R_A</math></td><td>R-Anker</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>R_B</math></td><td>R-Wendepol- wicklung</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>R_D</math></td><td>R-Reihen- schlusswick- lung</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>U_i</math></td><td>Ankerspan- nung indu- ziert</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>M</math></td><td>Drehmoment</td><td>[Nm]</td></tr> <tr> <td><math>M_A</math></td><td>M-Anlauf</td><td>[Nm]</td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>Maschinen- konst.</td><td>[1]</td></tr> </table>	$n$	Drehzahl	[1]	$R_A$	R-Anker	[ $\Omega$ ]	$R_B$	R-Wendepol- wicklung	[ $\Omega$ ]	$R_D$	R-Reihen- schlusswick- lung	[ $\Omega$ ]	$U_i$	Ankerspan- nung indu- ziert	[V]	$U$	Spannung	[V]	$M$	Drehmoment	[Nm]	$M_A$	M-Anlauf	[Nm]	$k$	Maschinen- konst.	[1]
$n$	Drehzahl	[1]																											
$R_A$	R-Anker	[ $\Omega$ ]																											
$R_B$	R-Wendepol- wicklung	[ $\Omega$ ]																											
$R_D$	R-Reihen- schlusswick- lung	[ $\Omega$ ]																											
$U_i$	Ankerspan- nung indu- ziert	[V]																											
$U$	Spannung	[V]																											
$M$	Drehmoment	[Nm]																											
$M_A$	M-Anlauf	[Nm]																											
$k$	Maschinen- konst.	[1]																											

## 15.5. Drehstrom Synchrongenerator (DSG)

 <p>I, IV: Motorbetrieb II,III: Generatorbetrieb I,II: Abgabe induktive Blindleistung = Übererregt III, IV: Aufnahme kapazitive Blindleistung = Untererregt</p>	$n_{syn} = \frac{60f}{p}$ $U_i = z \frac{d\Phi}{dt}$ $ U_i  = Blv_R z$ $I_w = I \cos(\varphi) \quad I_b = I \sin(\varphi)$ $I^2 = I_w^2 + I_b^2$ $\underline{I} = I_w + jI_b = \frac{j}{X_d}(\underline{U}_p - \underline{U}_{Kl})$ $\underline{U}_{Kl} = \underline{U}_p + jX_d \underline{I}$ $X_d = X_H + X_\sigma$ <p>Leerlauf:</p> $\frac{I_E}{I_{E0N}} = \frac{U_p \sqrt{3}}{U_N}$ <p>Kurzschluss:</p> $X_d = \frac{U_p}{I_{K0}}$ $x_d = X_d \frac{I_N \sqrt{3}}{U_N} = X_d \frac{I_N}{U_{Kl}} = \frac{1}{k_0}$	<p><math>n_{syn}</math> Drehzahl <math>\left[\frac{1}{min}\right]</math>  <math>f</math> (Netz-) Frequenz <math>[Hz]</math>  <math>p</math> Polpaarzahl <math>[1]</math>  <math>U_i</math> Span. induziert <math>[V]</math>  <math>U_{Kl}</math> Span. Klemmen <math>[V]</math>  <math>l</math> Leiterlänge <math>[m]</math>  <math>z</math> Anz. Windungen <math>[1]</math>  <math>v_R</math> Luftspaltgeschw. <math>\left[\frac{m}{s}\right]</math>  <math>B</math> Induktion <math>\left[\frac{Vs}{m^2}\right]</math>  <math>\Phi</math> magn. Fluss <math>[Wb]</math>  <math>I_w</math> Wirkstrom <math>[A]</math>  <math>I_b</math> Blindstrom <math>[A]</math>  <math>X_d</math> synch.Reakt <math>[\Omega]</math>  <math>x_d</math> relative synch.Reakt <math>[\Omega]</math>  <math>I_E</math> Erregerstrom <math>[A]</math>  <math>U_N</math> U-Nenn verkettet <math>[V]</math>  <math>k_0</math> Leerlauf-Kurzschluss Verhältnis <math>[1]</math></p>
--	---	--

## 15.6. DSG im Inselbetrieb

	$\underline{U}_p = \underline{U}_{Kl} - jX_d \underline{I}$	<p><math>U_p</math> Span. Polrad <math>[V]</math>  <math>U_{Kl}</math> Span. Klemmen <math>[V]</math>  <math>X_d</math> synch.Reakt <math>[\Omega]</math></p>
--	---	---

## 15.7. Belastung des DSG am starren Netz

$U_p = \sqrt{\frac{U_{Netz}^2}{3} + X_d^2 I^2 + 2 \frac{U_{Netz}}{\sqrt{3}} X_d I \sin(\varphi)}$ <p>falls <math>U_N = U_{Netz}</math> :</p> $\frac{U_p \sqrt{3}}{U_N} = \sqrt{1 + x_d^2 \left(\frac{I}{I_N}\right)^2 + 2 x_d \frac{I}{I_N} \sin(\varphi)}$	$U_{Netz}$ Netzspannung [V] $U_{Kl}$ Span. Klemmen [V] $U_p$ Span. Polrad [V] $U_N$ U-Nenn verkettet [V] $X_d$ synch.Reakt [ $\Omega$ ] $x_d$ rel. synch.Reakt [ $\Omega$ ] $I$ Laststrom [A] $\varphi$ Phase [rad]
---	--

## 15.8. Drehmoment und Stabilität des DSG am starren Netz

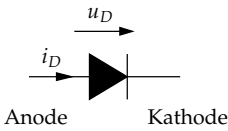
$P_{el} = \sqrt{3} U_{Netz} I \cos(\varphi)$ $P_{el} = 3 U_{Str} I_{Str} \cos(\varphi)$ $U_p \sin(\vartheta) = I X_d \cos(\varphi)$ $P_{el} = \sqrt{3} U_{Netz} \frac{U_p}{X_d} \sin(\vartheta)$ $M_{mech} = \frac{P_{mech}}{2\pi n}$ $M_{el} = \frac{P_{el}}{2\pi n}$ $M_{el} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi n} U_{Netz} \frac{U_p}{X_d} \sin(\vartheta)$ $M = c_i x l$ $c_i = \frac{3}{X_d 2\pi n}$ $x = I X_d$ $I = \frac{U_{Netz}}{\sqrt{3}} \cos(\varphi)$	$U_{Netz}$ Netzspannung [V] $U_{Str}$ Strangspan. [V] $U_p$ Span. Polrad [V] $P_{el}$ El-Wirkleistung [W] $M_{el}$ Generatormoment [Nm] $n$ Drehzahl [ $\frac{1}{min}$ ] $X_d$ synch.Reakt [ $\Omega$ ] $I$ Laststrom [A] $\varphi$ Phase [rad] $\vartheta$ Lastwinkel [rad]
---	---

# **Teil IV.**

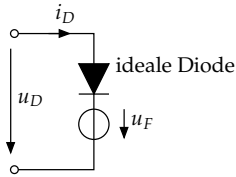
## **Elektronik**

# 16. Diode

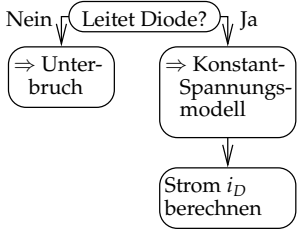
## 16.1. Ideale Diode

	<p>Sperrbereich (SB) :</p> $i_D = 0, u_D < 0$ <p>Durchlassbereich (DB):</p> $i_D \geq 0, u_D = 0$	<p><math>u_D</math>    Spannungs    [V]          über Diode</p> <p><math>i_D</math>    Strom    durch [A]          Diode</p>
---	---	--

## 16.2. Konstantspannungsmodell

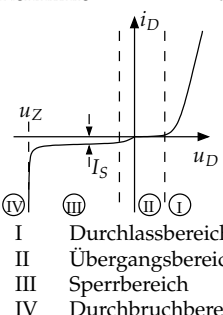
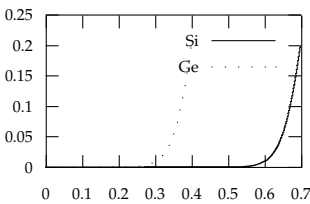
	$u_{FSiDiode} = 0.6$ $u_{FGermaniumDiode} = 0.3$ $u_{FShottkyDiode} = 0.1$ $u_{FLEDrot} = 1.6$	<p><math>u_F</math>    Forwärts-    [V]          Spannungs</p>
---	--	--

## 16.3. Arbeitspunktberechnung

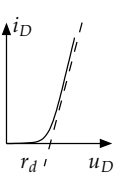
	<p>Teilweise ist es nur durch ausprobieren möglich zu sagen, ob die Diode leitet oder sperrt.</p>	<p><math>i_D</math>    Strom    durch [A]          Diode</p>
---	---	--



## 16.4. Kennlinie

<p>Kennlinie allgemein:</p>  <p>I Durchlassbereich II Übergangsbereich III Sperrbereich IV Durchbruchbereich</p> <p>Kennlinie Ge- und Si-Diode:</p> 	$i_D = I_S(e^{\frac{u_D}{U_T}} - 1)$ $i_D = I_S(e^{\frac{u_D - r_b i_D}{m U_T}} - 1)$ $U_T = \frac{kT}{e} = 8.6 \cdot 10^{-5} \cdot T$ <p> <math>U_T(300K) = 26mV</math> , <math>U_T(348K) = 30mV</math> ,  <math>U_T(393K) = 34mV</math>          Für normale Si-Diode gilt:  <math>I_S = 10^{-12} A</math> , <math>r_b = 0.1 \Omega</math> , <math>m = 1</math> </p> <p>Die vier Bereiche der Kennlinie:</p> <p>I: <math>-0.1V &lt; u_D &lt; 0.1V</math>  <math>\Rightarrow</math> Diodengleichung exakt verwenden</p> <p>II: <math>u_D &gt; 0.1V</math>  <math>\Rightarrow</math> Diodengleichung wird: <math>i_D =  I_S  e^{\frac{u_D}{U_T}}</math>          Verhältnis zweier Spannungen:  <math>\frac{I_{D2}}{I_{D1}} = e^{\frac{u_{D2} - u_{D1}}{U_T}} \rightarrow u_{D2} - u_{D1} = U_T \ln \frac{I_{D2}}{I_{D1}}</math> </p> <p>III: <math>u_D &lt; -0.1V</math>  <math>i_D = -I_S</math> oder <math>i_D =  I_S </math></p> <p>IV: Siehe Zehner-Diode</p>	<p><math>i_D</math> Strom durch Diode [A]</p> <p><math>u_D</math> Spannung über Diode [V]</p> <p><math>U_T</math> Temperaturspannung [V]</p> <p><math>T</math> Temperatur [K]</p> <p><math>I_S</math> Sättigungsstrom [A]</p> <p><math>I_R</math> Sperrstrom [A]</p> <p><math>r_b</math> Bahnwiderstand [<math>\Omega</math>]</p> <p><math>m</math> Korrekturfakt. [1]</p> <p><math>k</math> Boltzmannkonst. [<math>\frac{Ws}{K}</math>]</p> <p><math>e</math> Elementarladung [As]</p> <p><math>= 1.38 \cdot 10^{-23}</math></p> <p><math>= 1.602 \cdot 10^{-19}</math></p>
--	--	--

## 16.4.1. Differentieller Widerstand

 <p>Für kleine Signale wird die Kennlinie der Diode durch eine Tangente (= <math>r_d</math>) approximiert.</p>	$r_d = \frac{du_D}{di_D} = \frac{1}{g_d} \approx \frac{U_T}{I_{D0}}$ <p>Falls <math>m = 1</math> und <math>r_b = 0</math> gilt:</p> $g_d = \frac{di_D}{du_D} = I_S e^{\frac{u_D}{U_T}} \frac{1}{U_T} = \frac{i_D}{U_T}$	<p><math>r_d</math> Differentieller Widerstand [<math>\Omega</math>]</p> <p><math>d_d</math> Differentieller Leitwert [S]</p> <p><math>i_D</math> Strom durch Diode [A]</p> <p><math>u_D</math> Spannung über Diode [V]</p> <p><math>U_T</math> Temperaturspannung [V]</p> <p><math>m</math> Korrekturfakt. [1]</p> <p><math>I_{D0}</math> DC-Strom im Arbeitspunkt [A]</p>
---	---	---

## 16.5. DC- und AC-Analyse von Diodenschaltungen

### 16.5.1. Vorgehen

1. Schaltung aufteilen in AC- und DC-Ersatzschltbild
2. In DC-Ersatzschaltung den Arbeitspunkt bestimmen (Konstantspannungsmodell)
3. Berechnen der dynamischen Widerstände im Arbeitspunkt (approximieren der Diodenkennlinie)
4. Kleinsignalanalyse (Lineare Netzwerktheorie)
5. Gesamtlösung setzt sich aus Arbeitspunkt und Wechselstromlösung zusammen

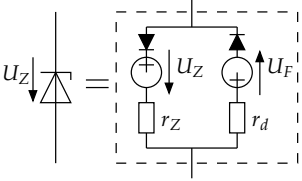
### 16.5.2. Kleinsignalanalyse

<p>Arbeitspunktbestimmung</p>	<p>DC-Ersatzschaltung: Konstantspannungsmodell (siehe S. 130)</p> <p>AC-Ersatzschaltung: Differentieller Widerstand (siehe S. 131)</p> <p>Resultierendes Gleichungssystem:</p> $\begin{cases} i_D = \frac{U_{Q0} - u_D}{R_V} \\ i_D = I_S e^{\frac{u_D}{U_T}} \end{cases}$ $i_D = 0 \quad u_D \leq U_E$ $i_D = \frac{1}{r_D(u_D - U_E)} \quad u_D > U_E$ $U_E = U_{D0} - I_{D0} r_D$	<table> <tr><td><math>U_F</math></td><td>Flussspan.</td><td>[V]</td></tr> <tr><td><math>R_V</math></td><td>Vorwiderstand</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr><td><math>U_{Q0}</math></td><td>Quellspan.</td><td>[V]</td></tr> <tr><td><math>I_{D0}</math></td><td>Arbeitsstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr><td><math>U_{D0}</math></td><td>Arbeitspan.</td><td>[V]</td></tr> <tr><td><math>U_T</math></td><td>Temperaturspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr><td><math>u_D</math></td><td>Spannung über Diode</td><td>[V]</td></tr> <tr><td><math>i_D</math></td><td>Strom durch Diode</td><td>[A]</td></tr> <tr><td><math>I_S</math></td><td>Sättigungsstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr><td><math>U_E</math></td><td>Gleichspan.</td><td>[V]</td></tr> </table>	$U_F$	Flussspan.	[V]	$R_V$	Vorwiderstand	[ $\Omega$ ]	$U_{Q0}$	Quellspan.	[V]	$I_{D0}$	Arbeitsstrom	[A]	$U_{D0}$	Arbeitspan.	[V]	$U_T$	Temperaturspannung	[V]	$u_D$	Spannung über Diode	[V]	$i_D$	Strom durch Diode	[A]	$I_S$	Sättigungsstrom	[A]	$U_E$	Gleichspan.	[V]
$U_F$	Flussspan.	[V]																														
$R_V$	Vorwiderstand	[ $\Omega$ ]																														
$U_{Q0}$	Quellspan.	[V]																														
$I_{D0}$	Arbeitsstrom	[A]																														
$U_{D0}$	Arbeitspan.	[V]																														
$U_T$	Temperaturspannung	[V]																														
$u_D$	Spannung über Diode	[V]																														
$i_D$	Strom durch Diode	[A]																														
$I_S$	Sättigungsstrom	[A]																														
$U_E$	Gleichspan.	[V]																														

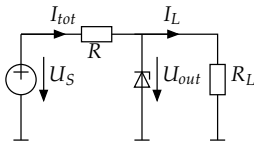
### 16.5.3. Grosssignalanalyse

<p>Für Grosssignalanalyse wird die Kennlinie durch eine Gerade durch die Punkte <math>0.1 i_{Dmax}</math> und <math>0.9 i_{Dmax}</math> approximiert.</p>	$U_E = u_D(0.1 I_{Dmax}) - 0.1 I_{Dmax} r_F$ $r_F = \frac{\Delta u_D}{0.8 I_{Dmax}}$	<table> <tr><td><math>u_D</math></td><td>Spannung über Diode</td><td>[V]</td></tr> <tr><td><math>i_D</math></td><td>Strom durch Diode</td><td>[A]</td></tr> <tr><td><math>r_F</math></td><td>Diodenwiderstand</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> </table>	$u_D$	Spannung über Diode	[V]	$i_D$	Strom durch Diode	[A]	$r_F$	Diodenwiderstand	[ $\Omega$ ]
$u_D$	Spannung über Diode	[V]									
$i_D$	Strom durch Diode	[A]									
$r_F$	Diodenwiderstand	[ $\Omega$ ]									

## 16.6. Z-Dioden

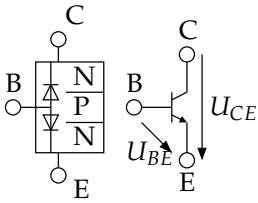
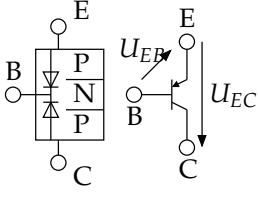
	$r_Z = \frac{du_Z}{di_Z}$ <p>Temperaturkoeffizient:</p> $\alpha = \frac{\frac{dU_Z}{dT}}{U_Z}$ <p> <math>\alpha &lt; 0</math> bei <math>U_Z &lt; 5.6V</math>  <math>\alpha \approx 0</math> bei <math>U_Z \approx 5.6V</math>  <math>\alpha &gt; 0</math> bei <math>U_Z &gt; 5.6V</math> </p> <p>Temperaturkompensation durch Serieschaltung: <math>\alpha_1 U_{Z1} = -\alpha_2 U_{Z2}</math></p>	<table> <tr> <td><math>r_Z</math></td><td>Z-Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr> <td><math>r_d</math></td><td>Differentieller Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr> <td><math>U_Z</math></td><td>Zehnersp.</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>U_F</math></td><td>Flusssp.</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Temperatur</td><td><math>[K]</math></td></tr> </table>	$r_Z$	Z-Widerstand	$[\Omega]$	$r_d$	Differentieller Widerstand	$[\Omega]$	$U_Z$	Zehnersp.	$[V]$	$U_F$	Flusssp.	$[V]$	$T$	Temperatur	$[K]$
$r_Z$	Z-Widerstand	$[\Omega]$															
$r_d$	Differentieller Widerstand	$[\Omega]$															
$U_Z$	Zehnersp.	$[V]$															
$U_F$	Flusssp.	$[V]$															
$T$	Temperatur	$[K]$															

### 16.6.1. Z-Dioden zur Spannungsstabilisierung

	$I_{totmin} = \frac{U_{Smin} - U_{outmin}}{R}$ $I_{totmax} = \frac{U_{Smax} - U_{outmin}}{R}$ $I_{outmin} = I_{totmin} - I_{Lmax}$ $I_{outmax} = I_{totmax} - I_{Lmin}$ $P_{Zmax} = U_{outnom} I_{outmax}$ <p>Rippelunterdrückung:</p> $u_{out} = u_S \frac{r_Z \parallel R_L}{R + (r_Z \parallel R_L)}$	<table> <tr> <td><math>I_{tot}</math></td><td>I-Eingang</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>U_S</math></td><td>Speisesp.</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>I_L</math></td><td>Laststrom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>U_{out}</math></td><td>Ausgangssp.</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Vorwiderstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr> <td><math>R_L</math></td><td>Lastwiderstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr> <td><math>P_Z</math></td><td>P-Verslust</td><td><math>[W]</math></td></tr> <tr> <td><math>r_Z</math></td><td>Differentieller Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr> <td><math>u_S</math></td><td>Rippel Eingang</td><td>am <math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>u_{out}</math></td><td>Rippel Ausgang</td><td>am <math>[V]</math></td></tr> </table>	$I_{tot}$	I-Eingang	$[A]$	$U_S$	Speisesp.	$[V]$	$I_L$	Laststrom	$[A]$	$U_{out}$	Ausgangssp.	$[V]$	$R$	Vorwiderstand	$[\Omega]$	$R_L$	Lastwiderstand	$[\Omega]$	$P_Z$	P-Verslust	$[W]$	$r_Z$	Differentieller Widerstand	$[\Omega]$	$u_S$	Rippel Eingang	am $[V]$	$u_{out}$	Rippel Ausgang	am $[V]$
$I_{tot}$	I-Eingang	$[A]$																														
$U_S$	Speisesp.	$[V]$																														
$I_L$	Laststrom	$[A]$																														
$U_{out}$	Ausgangssp.	$[V]$																														
$R$	Vorwiderstand	$[\Omega]$																														
$R_L$	Lastwiderstand	$[\Omega]$																														
$P_Z$	P-Verslust	$[W]$																														
$r_Z$	Differentieller Widerstand	$[\Omega]$																														
$u_S$	Rippel Eingang	am $[V]$																														
$u_{out}$	Rippel Ausgang	am $[V]$																														

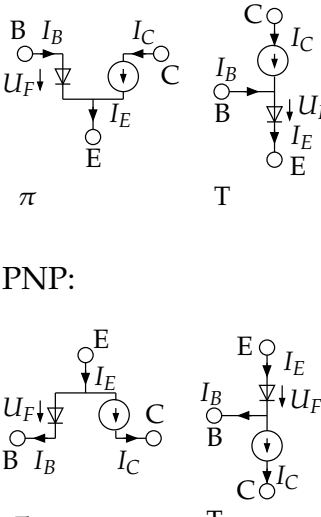
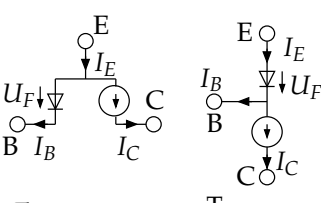
# 17. Bipolar Transistor

## 17.1. NPN- und PNP-Transistor

<p>NPN:</p>  <p>PNP:</p> 	$i_E = i_C + i_B$ $i_C = A i_E$ $B = \frac{A}{1 - A} = \frac{i_C}{i_B}$ <p>DC-Ersatzschaltung:</p> $i_B = I_{SB} e^{\frac{u_{BE}}{U_T}}$ $i_C = B I_{SB} e^{\frac{u_{BE}}{U_T}}$	<p><math>A</math> Stromverstärkung in B-Schaltung <math>[1]</math>  <math>= 0.9 \dots 0.998</math></p> <p><math>B</math> Stromverstärkung <math>[1]</math></p> <p><math>i_B</math> Basisstrom <math>[A]</math></p> <p><math>i_C</math> Kollektorstrom <math>[A]</math></p> <p><math>i_E</math> Emitterstrom <math>[A]</math></p> <p><math>u_{BE}</math> Span. B <math>\rightarrow</math> E <math>[V]</math></p> <p><math>u_T</math> Temp.-Span. Diode B <math>\rightarrow</math> E <math>[V]</math>  <math>\approx 0.026</math></p> <p><math>i_{SB}</math> Stromquelle zw. C <math>\rightarrow</math> B <math>[A]</math></p>
--	--	--

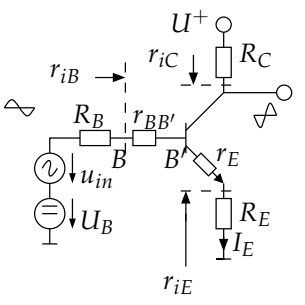
## 17.2. Der ideale Transistor bei Gleichspannung

### 17.2.1. DC-Ersatzschaltung

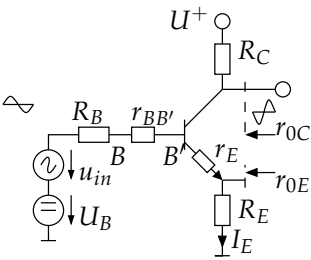
<p>NPN:</p>  <p>PNP:</p> 	$B = \frac{I_C}{I_B}$ $I_C = B I_B$ $I_E = I_B + I_C = I_B + B I_B$ $I_E = (1 + B) I_B$ <p>falls <math>B \gg 1</math> gilt:</p> $I_C \approx I_E \approx B I_B$ $A = \frac{I_C}{I_E} = \frac{B I_B}{(1 + B) I_B} = \frac{B}{1 + B}$	<p><math>A</math> Stromverstärkung in B-Schaltung [1]  <math>\approx 1</math> falls <math>B \gg 1</math></p> <p><math>B</math> DC-Stromverstärkung [1]</p> <p><math>I_B</math> Basisstrom [A]  <math>I_C</math> Kollektorstrom [A]  <math>I_E</math> Emitterstrom [A]  <math>U_F</math> Span. Diode [V]  <math>\approx 0.6</math></p>
---	---	---

## 17.3. Verstärkerschaltungen

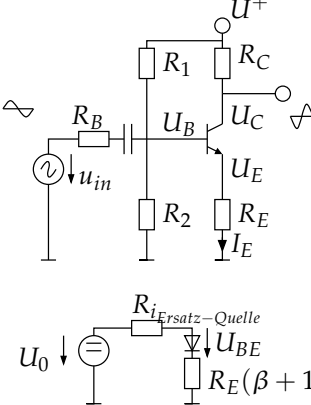
### 17.3.1. Dynamische Innenwiderstände des Transistors

	$r_{iB} = r_{BB'} + (\beta + 1)(R_E + r_E)$ $r_{iE} = r'_E = r_E + \frac{r_{BB'} + R_B}{\beta + 1}$ $r_{iC} = r_{CE} \left( 1 + \frac{\beta R_E}{R_E + R_B + r_{BB'} + r_{B'E}} \right)$ $r_{iC} \approx R_C$ $r_E = \frac{U_{temp}}{I_E} = \frac{r_{B'E}}{\beta + 1} = \frac{\frac{U_{temp}}{I_B}}{\beta + 1}$ $r_{CE} = \frac{U_{Early} + U_{CE}}{I_C} \approx \frac{U_{Early}}{I_C}$	<p><math>r_{iB}</math> r-Basis [<math>\Omega</math>]  <math>r_{iE}</math> r-Emitter [<math>\Omega</math>]  <math>r_{iC}</math> r-Kollektor [<math>\Omega</math>]  <math>r_{BB'}</math> Basisbahnwiderstand [<math>\Omega</math>]  <math>r_E</math> innerer r-Emitter [<math>\Omega</math>]  <math>R_E</math> R-Emitter [<math>\Omega</math>]  <math>\beta</math> AC-Stromverstärkung [1]  <math>R_B</math> R-Basis [<math>\Omega</math>]  <math>I_C</math> Kollektorstrom [A]  <math>I_E</math> Emitterstrom [A]  <math>U_{Early}</math> Early-Span. = [V]  20...400, typ.100  <math>U_{temp}</math> Temp-Span. [V]  <math>\approx 0.026</math></p>
---	---	---

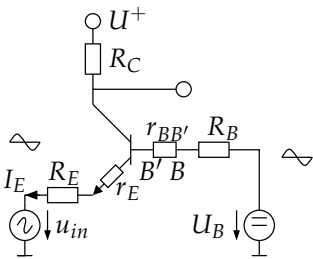
### 17.3.2. Emitterschaltug

<p>invertierend:</p> 	$A = \frac{u_{out}}{u_{in}} = -\frac{R_C}{R_E + r'_E + \frac{R_C}{\mu}}$ $A \approx -\frac{R_C}{R_E + r'_E}$ <p>Falls <math>R_E = 0</math>: <math>A = \frac{R_C \parallel r_{CE}}{r'_E}</math></p> $\mu = \frac{r_{CE}}{r'_E} \approx \frac{U_{Early}}{U_{temp}}$ $r_E = \frac{U_{temp}}{I_E} = \frac{r_{B'E}}{\beta + 1}$ $r'_E = r_E + \frac{r_{BB'} + R_B}{\beta + 1}$ $r_{CE} = \frac{U_{Early} + U_{CE}}{I_C} \approx \frac{U_{Early}}{I_C}$ <p><math>r_{0C} \approx R_C \quad r_{0E} = r_{iE} \parallel R_E \quad r_{0B} = r_{iB} \parallel R_1 \parallel R_2</math></p>	<p><math>A</math> Verstärkung [1]</p> <p><math>\mu</math> max. theoretisch A [1]</p> <p><math>\beta</math> AC-Stromverstärkung [1]</p> <p><math>R_C</math> R-Kollektor [<math>\Omega</math>]</p> <p><math>R_E</math> R-Emitter [<math>\Omega</math>]</p> <p><math>R_B</math> R-Basis [<math>\Omega</math>]</p> <p><math>r_{BB'}</math> Basisbahnwiderstand [<math>\Omega</math>]</p> <p><math>r_E</math> innerer Emitter [<math>\Omega</math>]</p> <p><math>I_C</math> I-Kollektor [A]</p> <p><math>I_E</math> Emitterstrom [A]</p> <p><math>U_{Early}</math> Early-Span. = 20...400, typ. 100 [V]</p> <p><math>U_{temp}</math> Temp-Span. <math>\approx 0.026</math> [V]</p>
--	--	---

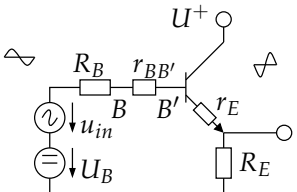
### Arbeitspunktberechnung

	$U_{0_{Ersatz-Quelle}} = U_0 = \frac{U^+}{R_1 + R_2} R_2$ $R_{i_{Ersatz-Quelle}} = R_1 \parallel R_2$ $U_{R_E} = \frac{(U_0 - U_{BE})(\beta + 1)R_E}{(R_1 \parallel R_2) + (\beta + 1)R_E}$ <p>Falls <math>I_B = 0</math>: <math>U_{RE} = U_0 - U_{BE}</math></p> $I_B = \frac{(U_0 - U_{BE} - U_{R_E})}{R_1 \parallel R_2}$ $I_C = I_E - I_B$ $U_{R_E} = I_C R_C \rightarrow U_C$	<p><math>\beta</math> AC-Stromverstärkung [1]</p> <p><math>R_C</math> R-Kollektor [<math>\Omega</math>]</p> <p><math>R_E</math> R-Emitter [<math>\Omega</math>]</p> <p><math>I_C</math> I-Kollektor [A]</p> <p><math>I_E</math> Emitterstrom [A]</p> <p><math>U^+</math> Speise-Span. [V]</p> <p><math>U_{BE}</math> B-E-Span. <math>\approx 0.6</math> [V]</p> <p><math>U_0</math> Span. der gedachten Quelle des Basisspannungsteilers [V]</p> <p><math>R_i</math> R-Innen [<math>\Omega</math>]</p>
---	--	--

## 17.3.3. Basisschaltung

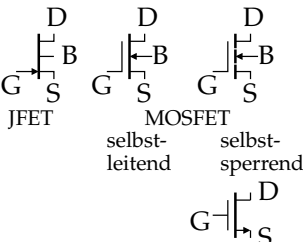
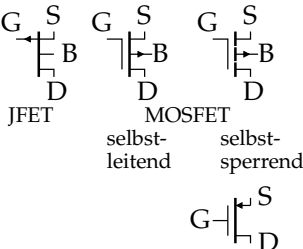
nicht invertierend:		
	$A = \frac{u_{out}}{u_{in}} = \frac{R_C}{R_E + r'_E + \frac{R_C}{\mu}}$ $A \approx \frac{R_C}{R_E + r'_E}$ <p>Falls <math>R_E = 0</math> :</p> $A = \frac{R_C \parallel r_{CE}}{r'_E}$ $\mu = \frac{r_{CE}}{r'_E} \approx \frac{U_{Early}}{U_{temp}}$ $r_E = \frac{U_{temp}}{I_E} = \frac{r_{B'E}}{\beta + 1}$ $r'_E = r_E + \frac{r_{BB'} + R_B}{\beta + 1}$ $r_{CE} = \frac{U_{Early} + U_{CE}}{I_C} \approx \frac{U_{Early}}{I_C}$ <p><math>r_{0C} \approx R_C \quad r_{0E} = r_{iE} \parallel R_E \quad r_{0B} = r_{iB} \parallel R_1 \parallel R_2</math></p>	<p><math>A</math> Verstärkung [1]  <math>\mu</math> max. theoretisch A [1]  <math>\beta</math> AC-Stromverstärkung [1]  <math>R_C</math> R-Kollektor [<math>\Omega</math>]  <math>R_E</math> R-Emitter [<math>\Omega</math>]  <math>R_B</math> R-Basis [<math>\Omega</math>]  <math>r_{BB'}</math> Basisbahnwiderstand [<math>\Omega</math>]  <math>r_E</math> innerer Emitter r- [<math>\Omega</math>]  <math>I_C</math> I-Kollektor [A]  <math>I_E</math> Emitterstrom [A]  <math>U_{Early}</math> Early-Span. = [V]  20...400, typ.100  <math>U_{temp}</math> Temp-Span. [V]  <math>\approx 0.026</math></p>

## 17.3.4. Kollektorschaltung (Emitterfolger)

nicht invertierend:		
	$A = \frac{u_{out}}{u_{in}} = \frac{R_E}{R_E + r'_E}$ <p>Falls <math>R_E \gg r'_E</math> gilt :</p> $A \approx 1$ $r'_E = r_E + \frac{r_{BB'} + R_B}{\beta + 1}$	<p><math>A</math> Verstärkung [1]  <math>R_E</math> R-Emitter [<math>\Omega</math>]  <math>R_B</math> R-Basis [<math>\Omega</math>]  <math>r_E</math> innerer Emitter r- [<math>\Omega</math>]  <math>r_{BB'}</math> Basisbahnwiderstand [<math>\Omega</math>]  <math>\beta</math> AC-Stromverstärkung [1]</p>

# 18. Feldeffekt Transistor

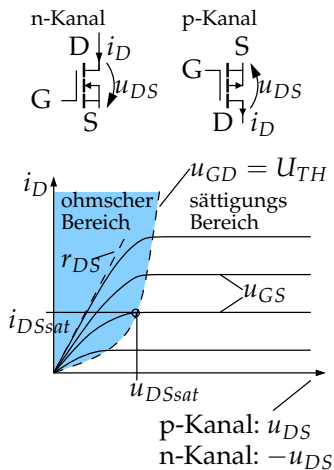
## 18.1. Verschiedene Typen

<p>n-Kanal:</p>  <p>p-Kanal:</p> 	<p>JFET: Die Isolation zwischen Kanal und Gate besteht aus einer pn-Sperrschicht (Diode).</p> <p>MOSFET: Die Isolation zwischen Kanal und Gate besteht aus einer <math>SiO_2</math>-Schicht.</p> <p>Der selbstsperrende MOSFET sowie der JFET werden mit der Gatespannung gesperrt.</p> <p>Bulk ist meistens mit Source verbunden.</p>	<p>G Gate  D Drain  B Bulk oder Substrat  S Source</p>
--	--	--



## 18.2. Der ideale MOSFET (Handrechnung)

Im gesättigten Bereich verhält sich ein FET annähernd wie eine Stromquelle, im ungesättigten Bereich stellt er einen Widerstand dar. Die Steuergrösse ist  $u_{GS}$ .



- Drainstrom fließt nur falls  $|u_{GS}| > |U_T|$ .
- Gatestrom ist 0.

$$U_{DSsat} = U_{GS} - U_T$$

$$I_{Dsat} = K \frac{U_{DS}^2}{2}$$

$$I_D = I'_D \frac{W}{L}$$

$$K = \frac{2I_{DSS}^*}{U_T^2}$$

$$K = K' \frac{W}{L}$$

$$K' = \mu C_{ox}$$

$$k' \approx K'$$

$$C_{ox} = \frac{\epsilon_{ox}}{t_{ox}}$$

$$U_A \approx aL$$

Im ohmschen Bereich gilt:

$$U_{DS} < U_{DSsat}$$

$$I_D = K \left[ (U_{GS} - U_T) U_{DS} - \frac{U_{DS}^2}{2} \right]$$

$$r_{DS} = \frac{dV_{DS}}{dI_D} = \frac{|U_A| + U_{DS}}{I_D}$$

Im gesättigten Bereich gilt:

$$U_{DS} > U_{DSsat}$$

$$I_D = \frac{k}{2} (U_{GS} - U_T)^2$$

Nur bei n-Kanal:

$$U_T > 0$$

$$U_{GS} > U_T \Rightarrow I_D > 0$$

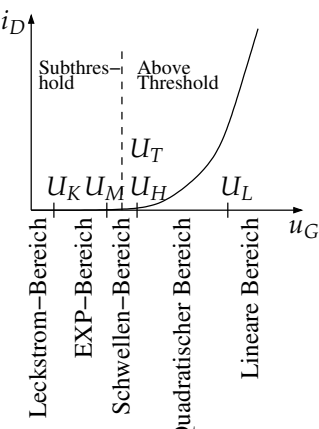
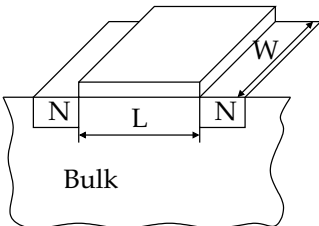
Nur bei p-Kanal:

$$U_T < 0$$

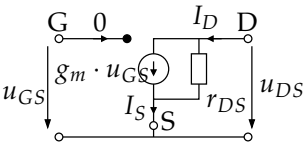
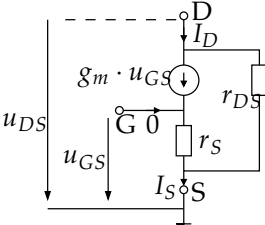
$$U_{GS} < U_T \Rightarrow I_D > 0$$

$I_D$	Drainstrom	[A]
$U_T$	Schwellspannung (0.6...8)	[V]
$K$	Transkonduktanzparameter	$[\frac{A}{V^2}]$
$k'$	spez. k	$[\frac{A}{V^2}]$
	$(k'_N \approx 44 \cdot 10^{-6}, k'_p \approx 17 \cdot 10^{-6})$	
$k$	wie K jedoch gesättigt	$[\frac{A}{V^2}]$
$U_{DS}$	DS-Spannung	[V]
$U_{GS}$	GS-Spannung	[V]
$I_{DSS}^*$	ev. anstelle von K gegeben	[A]
$W$	Kanalbreite	[m]
$L$	Kanallänge	[m]
$C_{ox}$	spez. Kapazität Kanal-Gate	$[\frac{F}{m^2}]$
$\epsilon_{ox}$	Dielektrizitätskonst. ( $SiO_2 = 3.9 \cdot 8.86 \cdot 10^{-3}$ )	$[\frac{F}{m}]$
$t_{ox}$	Dicke Isolation Kanal-Gate	[m]
$\mu$	Beweglichkeit Ladungsträger im Kanal (Für Si: $\mu_p = 580$ , $\mu_n = 230$ )	$[\frac{cm^2}{sV}]$
$r_{DS}$	dyn. Drain-Source Widerstand	$[\Omega]$
$U_A$	Earlyspannung	[V]
$L$	Gatelänge	[m]
$a$	Early Faktor $\approx 6$	$[\frac{V}{\mu m}]$

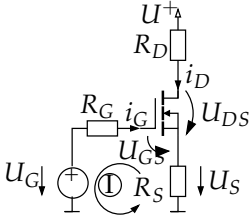
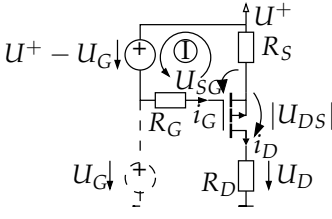
## 18.3. Der reale MOSFET

<p>Im Exp-Bereich, bei schwacher Inversion:  <math>0 &lt; U_{GS} &lt; (U_T - 60mV)</math>          Im Quad-Bereich, bei starker Inversion:  <math>U_{GS} &gt; (U_T - 60mV)</math>          Dazwischen: Moderate Inversion</p> 	<p>Im EXP-Bereich gilt:</p> $U_{DSsat} \approx 5U_{temp} \approx 130mV$ <p>ungesättigt: <math>U_{DS} \leq U_{DSsat}</math></p> $I_D = I_M e^{\frac{U_{GS}-U_M}{nU_{temp}}} \left(1 - e^{\frac{-U_{DS}}{U_{temp}}}\right) (1 + \lambda U_{DS})$ <p>gesättigt: <math>U_{DS} \geq U_{DSsat}</math></p> $I_D = I_M e^{\frac{U_{GS}-U_M}{nU_{temp}}} (1 + \lambda U_{DS})$ <p>Im Quadratischen Bereich gilt:</p> $U_{DSsat} = U_{GS} - U_T = \sqrt{2 \frac{I_D}{k}}$ <p>ungesättigt: <math>U_{DS} \leq U_{DSsat}</math></p> $I_D = K \left[ (U_{GS} - U_T) U_{DS} - \frac{U_{DS}^2}{2} \right] (1 + \lambda U_{DS})$ <p>gesättigt: <math>U_{DS} \geq U_{DSsat}</math></p> $I_D = \frac{k}{2} (U_{GS} - U_T)^2 (1 + \lambda U_{DS})$ $\lambda = \frac{1}{U_A}$ $U_T = T_{T0} \pm \Delta U_T \quad N \rightarrow +$ $\Delta U_T = \gamma (\sqrt{U_{SB} \pm \Phi_0} - \sqrt{\Phi_0})$ $U_{temp} = \frac{kT}{e} = 86 \frac{\mu V}{K} T$ $I_M = I'_M \frac{W}{L}$ $n = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{U_{SB} + \Phi_0}}$ $K = K' \frac{W}{L} = \mu C_{oc} \frac{W}{L}$ $k = k' \frac{W}{L} = \mu C_{ox} \frac{W}{L}, \quad \alpha = \frac{K'}{k'}$	<table> <tr> <td><math>I_D</math></td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td><math>I_M</math></td><td>Drainstromgrenze</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td><math>U_{GS}</math></td><td>U Gate Source</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_{DS}</math></td><td>Drain-Source</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_T</math></td><td>Schwellsp.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_{T0}</math></td><td><math>U_{T0N} \approx 0.6</math> <math>U_{T0P} \approx 0.65</math></td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_{SB}</math></td><td>U Source Bulk</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_{temp}</math></td><td>U-Temp. <math>\approx 26 \cdot 10^{-3}</math></td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_A</math></td><td>Early-Span.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>\Phi_0</math></td><td>Fermi-Pot.= <math>2\Phi_F = 0.6</math></td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>Transkond.</td><td><math>[\frac{A}{V^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>K</math></td><td>k ungesättigt</td><td><math>[\frac{A}{V^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>K', k'</math></td><td>bei quadratischem Kanal typisch: <math>k_N = 44 \cdot 10^{-6}</math>, <math>k_P = 17 \cdot 10^{-6}</math></td><td><math>[\frac{A}{V^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\alpha</math></td><td>Transkond. Verhältnis <math>\approx 1</math></td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>n</math></td><td>Subthreshold Slope Faktor <math>\approx 1.5</math></td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>\gamma</math></td><td><math>\gamma \approx 0.6</math></td><td><math>[\sqrt{V}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\lambda</math></td><td>Mod-fakt. (0.01...0.05)</td><td><math>[\frac{1}{V}]</math></td></tr> <tr> <td><math>W</math></td><td>Kanal-Länge</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>L</math></td><td>Kanal-Breite</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Temperatur</td><td>[K]</td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Beweglichkeit Ladungsträger im Kanal (Für Si: <math>\mu_p = 580</math>, <math>\mu_n = 230</math>)</td><td><math>[\frac{cm^2}{sV}]</math></td></tr> </table>	$I_D$	Drainstrom	[A]	$I_M$	Drainstromgrenze	[A]	$U_{GS}$	U Gate Source	[V]	$U_{DS}$	Drain-Source	[V]	$U_T$	Schwellsp.	[V]	$U_{T0}$	$U_{T0N} \approx 0.6$ $U_{T0P} \approx 0.65$	[V]	$U_{SB}$	U Source Bulk	[V]	$U_{temp}$	U-Temp. $\approx 26 \cdot 10^{-3}$	[V]	$U_A$	Early-Span.	[V]	$\Phi_0$	Fermi-Pot.= $2\Phi_F = 0.6$	[V]	$k$	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$	$K$	k ungesättigt	$[\frac{A}{V^2}]$	$K', k'$	bei quadratischem Kanal typisch: $k_N = 44 \cdot 10^{-6}$ , $k_P = 17 \cdot 10^{-6}$	$[\frac{A}{V^2}]$	$\alpha$	Transkond. Verhältnis $\approx 1$	[1]	$n$	Subthreshold Slope Faktor $\approx 1.5$	[1]	$\gamma$	$\gamma \approx 0.6$	$[\sqrt{V}]$	$\lambda$	Mod-fakt. (0.01...0.05)	$[\frac{1}{V}]$	$W$	Kanal-Länge	[m]	$L$	Kanal-Breite	[m]	$T$	Temperatur	[K]	$\mu$	Beweglichkeit Ladungsträger im Kanal (Für Si: $\mu_p = 580$ , $\mu_n = 230$ )	$[\frac{cm^2}{sV}]$
$I_D$	Drainstrom	[A]																																																															
$I_M$	Drainstromgrenze	[A]																																																															
$U_{GS}$	U Gate Source	[V]																																																															
$U_{DS}$	Drain-Source	[V]																																																															
$U_T$	Schwellsp.	[V]																																																															
$U_{T0}$	$U_{T0N} \approx 0.6$ $U_{T0P} \approx 0.65$	[V]																																																															
$U_{SB}$	U Source Bulk	[V]																																																															
$U_{temp}$	U-Temp. $\approx 26 \cdot 10^{-3}$	[V]																																																															
$U_A$	Early-Span.	[V]																																																															
$\Phi_0$	Fermi-Pot.= $2\Phi_F = 0.6$	[V]																																																															
$k$	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$																																																															
$K$	k ungesättigt	$[\frac{A}{V^2}]$																																																															
$K', k'$	bei quadratischem Kanal typisch: $k_N = 44 \cdot 10^{-6}$ , $k_P = 17 \cdot 10^{-6}$	$[\frac{A}{V^2}]$																																																															
$\alpha$	Transkond. Verhältnis $\approx 1$	[1]																																																															
$n$	Subthreshold Slope Faktor $\approx 1.5$	[1]																																																															
$\gamma$	$\gamma \approx 0.6$	$[\sqrt{V}]$																																																															
$\lambda$	Mod-fakt. (0.01...0.05)	$[\frac{1}{V}]$																																																															
$W$	Kanal-Länge	[m]																																																															
$L$	Kanal-Breite	[m]																																																															
$T$	Temperatur	[K]																																																															
$\mu$	Beweglichkeit Ladungsträger im Kanal (Für Si: $\mu_p = 580$ , $\mu_n = 230$ )	$[\frac{cm^2}{sV}]$																																																															
<p>Im Leckstrombereich, im Schwellenbereich und im linearen Bereich existieren keine handlichen Formeln.</p> 																																																																	

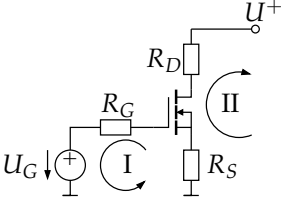
## 18.4. Kleinsignal Ersatzschaltbild für tiefe Frequenzen

<p><math>\pi</math>-Ersatzschaltbild:</p>  <p>T-Ersatzschaltbild:</p> 	<p>Steilheit im Stromquellenbetrieb bei starker Inversion:</p> $g_m = \frac{dI_D}{dU_{GS}} \approx K(U_{GS} - U_T)$ $g_m = K(U_{GS} - U_T)(1 + \lambda U_{DS})$ $g_m = \sqrt{2kI_D(1 + \lambda U_{DS})}$ $g_m \approx \sqrt{2kI_D}$ $\frac{g_{m1}}{g_{m2}} = \sqrt{\frac{I_{D1}}{I_{D2}}}$ $r_S = \frac{1}{g_m}$ <p>Ausgangswiderstand:</p> $r_{DS} = \frac{U_A +  U_{DS} }{ I_D } \approx \frac{ U_A }{ I_D }$ <p>Steilheit im Stromquellenbetrieb bei schwacher Inversion:</p> $g_m = \frac{dI_D}{dU_{GS}} = \frac{I_D}{nU_{temp}}$ $r_S = \frac{1}{g_m} = \frac{nU_{temp}}{I_D}$ <p>Body Steilheit im Stromquellenbetrieb bei starker Inversion:</p> $g_{mB} = \frac{dI_D}{dU_{SB}}$ $g_{mB} = -g_m \frac{\gamma}{2\sqrt{U_{SB} + \Phi_0}}$ $g_{mB} = -g_{mB}(n - 1)$ <p><math>\Rightarrow</math> Back-Gate hat die halbe Wirkung des Gate bei <math>U_{SB} = 0</math></p>	<table> <tr> <td><math>g_m</math></td><td>Steilheit</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td></td><td>Übertragungskennlinie</td><td></td></tr> <tr> <td><math>g_{mB}</math></td><td>Body - Steilheit</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>r_S</math></td><td>int. Source Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr> <td><math>I_D</math></td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td><math>U_T</math></td><td>Schwellspannung (0.6...8)</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_A</math></td><td>Early-Span.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_{temp}</math></td><td>U-Temp.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td></td><td><math>\approx 26 \cdot 10^{-3}</math></td><td></td></tr> <tr> <td><math>U_{DS}</math></td><td>Drain-Source-Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_{GS}</math></td><td>Gate-Source-Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_{SG}</math></td><td>Source-Gate-Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_{SB}</math></td><td>Source-Bulk-Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>K</math></td><td>Transkonduktanzparameter</td><td><math>[\frac{A}{V^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>n</math></td><td>Subthreshold Slope Faktor</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td></td><td><math>\approx 1.5</math></td><td></td></tr> <tr> <td><math>\lambda</math></td><td>Mod-fakt.</td><td><math>[\frac{1}{V}]</math></td></tr> <tr> <td></td><td>(0.01...0.05)</td><td></td></tr> <tr> <td><math>\Phi_0</math></td><td>Fermi-Pot.=</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td></td><td><math>2\Phi_F = 0.6</math></td><td></td></tr> <tr> <td><math>\gamma</math></td><td><math>\gamma \approx 0.6</math></td><td><math>[\sqrt{V}]</math></td></tr> </table>	$g_m$	Steilheit	[1]		Übertragungskennlinie		$g_{mB}$	Body - Steilheit	[1]	$r_S$	int. Source Widerstand	$[\Omega]$	$I_D$	Drainstrom	[A]	$U_T$	Schwellspannung (0.6...8)	[V]	$U_A$	Early-Span.	[V]	$U_{temp}$	U-Temp.	[V]		$\approx 26 \cdot 10^{-3}$		$U_{DS}$	Drain-Source-Spannung	[V]	$U_{GS}$	Gate-Source-Spannung	[V]	$U_{SG}$	Source-Gate-Spannung	[V]	$U_{SB}$	Source-Bulk-Spannung	[V]	$K$	Transkonduktanzparameter	$[\frac{A}{V^2}]$	$n$	Subthreshold Slope Faktor	[1]		$\approx 1.5$		$\lambda$	Mod-fakt.	$[\frac{1}{V}]$		(0.01...0.05)		$\Phi_0$	Fermi-Pot.=	[V]		$2\Phi_F = 0.6$		$\gamma$	$\gamma \approx 0.6$	$[\sqrt{V}]$
$g_m$	Steilheit	[1]																																																															
	Übertragungskennlinie																																																																
$g_{mB}$	Body - Steilheit	[1]																																																															
$r_S$	int. Source Widerstand	$[\Omega]$																																																															
$I_D$	Drainstrom	[A]																																																															
$U_T$	Schwellspannung (0.6...8)	[V]																																																															
$U_A$	Early-Span.	[V]																																																															
$U_{temp}$	U-Temp.	[V]																																																															
	$\approx 26 \cdot 10^{-3}$																																																																
$U_{DS}$	Drain-Source-Spannung	[V]																																																															
$U_{GS}$	Gate-Source-Spannung	[V]																																																															
$U_{SG}$	Source-Gate-Spannung	[V]																																																															
$U_{SB}$	Source-Bulk-Spannung	[V]																																																															
$K$	Transkonduktanzparameter	$[\frac{A}{V^2}]$																																																															
$n$	Subthreshold Slope Faktor	[1]																																																															
	$\approx 1.5$																																																																
$\lambda$	Mod-fakt.	$[\frac{1}{V}]$																																																															
	(0.01...0.05)																																																																
$\Phi_0$	Fermi-Pot.=	[V]																																																															
	$2\Phi_F = 0.6$																																																																
$\gamma$	$\gamma \approx 0.6$	$[\sqrt{V}]$																																																															

## 18.5. DC-Berechnung mit idealen MOSFET Gleichungen

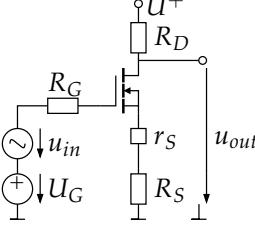
	Bei Verstärkern muss der Arbeitspunkt im Sättigungsbereich liegen! ⇒ prüfen ob $u_{DS} > u_{GS} - U_T$	$i_D$ Drainstrom [A] $U^+$ Speisespannung [V] $U_T$ Schwellspannung (0.6...8) [V] $U_G$ Gate-Spannung [V] $u_{DS}$ Drain-Source-Spannung [V] $u_{GS}$ Gate-Source-Spannung [V] $u_{SG}$ Source-Gate-Spannung [V] $R_G$ R-Gate [ $\Omega$ ] $R_D$ R-Drain [ $\Omega$ ] $R_S$ R-Source [ $\Omega$ ] $k$ Transkonduktanzparameter [ $\frac{A}{V^2}$ ]
n-Kanal: 	$i_D = \frac{k}{2}(u_{GS} - U_T)^2$ $I: U_G - i_D R_S - u_{GS} = 0$ $u_{GS} = \left( U_T - \frac{1}{k R_S} \right) + \sqrt{\frac{2}{k R_S} (U_G - U_T) + \frac{1}{(k R_S)^2}}$	
p-Kanal: 	$i_D = \frac{k}{2}(u_{GS} - U_T)^2$ $I: U_G - i_D R_S - u_{GS} = 0$ $u_{SG} = \left(  U_T  - \frac{1}{k R_S} \right) + \sqrt{\frac{2}{k R_S} (U_{GP} -  U_T ) + \frac{1}{(k R_S)^2}}$ $U_{GP} = U^+ - U_G$	
Arbeitspunkt:	$u_{DS} = U^+ - i_D (R_S + R_D)$	

## 18.6. Der FET als Schalter

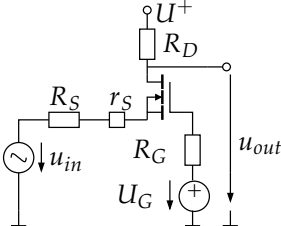
 <p>meistens: <math>R_S = 0</math></p> <p>Der Fet muss im ohmschen Bereich betrieben werden</p> <p>Schalter offen wenn <math> u_{GS}  &lt;  U_T </math></p> <p>Schalter geschlossen wenn <math> u_{GS}  \gg  U_T </math></p>	<p>Aus I und II:</p> $\begin{vmatrix} u_G - i_D R_S - u_{GS} & = & 0 \\ U^+ - i_D (R_S + R_D) - u_{DS} & = & 0 \end{vmatrix}$ $\frac{di_D}{du_{DS}} = \frac{1}{r_{DS}}$ $\frac{di_D}{du_{DS}} = K(u_{GS} - U_T) - Ku_{DS}$ $r_{DS0} = \frac{1}{K(u_{GS} - U_T)}$ <p>eingeschaltet und <math>R_S = 0</math>:</p> $i_D = \frac{U^+}{R_D + r_{DS0}}$ <p>eingeschaltet und <math>R_S \neq 0</math>:</p> $\begin{vmatrix} u_G - \frac{R_S U^+}{R_S + R_D + r_{DS0}} - u_{GS} & = & 0 \\ r_{DS0} = \frac{1}{K(u_{GS} - U_T)} & = & 0 \end{vmatrix}$	<table> <tr> <td><math>U^+</math></td><td>Speisespannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>R_S</math></td><td>R an Source</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td><math>R_D</math></td><td>R an Drain</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td><math>u_{GS}</math></td><td>Gate-Source-Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{DS}</math></td><td>Drain-Source-Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_G</math></td><td>Gate-Span.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>r_{DS}</math></td><td>dyn.Source Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td><math>r_{DS0}</math></td><td>Einschaltwiderstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td></td><td><math>u_{DS} = 0</math></td><td></td></tr> <tr> <td><math>i_D</math></td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td><math>U_T</math></td><td>Schwellspannung (0.6...8)</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>K</math></td><td>Transkond.</td><td><math>[\frac{A}{V^2}]</math></td></tr> </table>	$U^+$	Speisespannung	[V]	$R_S$	R an Source	[Ω]	$R_D$	R an Drain	[Ω]	$u_{GS}$	Gate-Source-Spannung	[V]	$u_{DS}$	Drain-Source-Spannung	[V]	$u_G$	Gate-Span.	[V]	$r_{DS}$	dyn.Source Widerstand	[Ω]	$r_{DS0}$	Einschaltwiderstand	[Ω]		$u_{DS} = 0$		$i_D$	Drainstrom	[A]	$U_T$	Schwellspannung (0.6...8)	[V]	$K$	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$
$U^+$	Speisespannung	[V]																																				
$R_S$	R an Source	[Ω]																																				
$R_D$	R an Drain	[Ω]																																				
$u_{GS}$	Gate-Source-Spannung	[V]																																				
$u_{DS}$	Drain-Source-Spannung	[V]																																				
$u_G$	Gate-Span.	[V]																																				
$r_{DS}$	dyn.Source Widerstand	[Ω]																																				
$r_{DS0}$	Einschaltwiderstand	[Ω]																																				
	$u_{DS} = 0$																																					
$i_D$	Drainstrom	[A]																																				
$U_T$	Schwellspannung (0.6...8)	[V]																																				
$K$	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$																																				

## 18.7. Des FET als AC-Verstärker

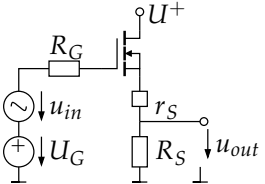
### 18.7.1. Sourceschaltung

 <ul style="list-style-type: none"> <li>• invertierend</li> <li>• Für tiefe bis mittlere Frequenzen</li> <li>• <math>r_{in}</math> gross</li> <li>• <math>r_{out}</math> gross</li> </ul>	$A = \frac{u_{out}}{u_{in}}$ $A = - \frac{R_D}{R_S + r_S + \frac{R_S + R_D}{\mu}}$ $\mu = \frac{r_{DS}}{r_S} = A_{max}$ <p>Für grosses <math>\mu</math>:</p> $A \approx - \frac{R_D}{R_S + r_S}$ <p>Bei <math>R_S = 0</math> gilt:</p> $A = - \frac{R_D \parallel r_{DS}}{r_S}$ <p>Bei <math>R_S = 0</math> und <math>R_D = \infty</math> gilt:</p> $ A  = \left  \frac{r_{DS}}{r_S} \right  = \mu$ $r_S = \frac{1}{g_m}$ $r_{DS} = \frac{U_{Early} + U_{DS}}{I_D} \approx \frac{U_{Early}}{I_D}$	<table> <tr> <td><math>U^+</math></td><td>Speisespannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{in}</math></td><td>Eingangssp.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{out}</math></td><td>Ausgangssp.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>R_G</math></td><td>R-Gate</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>R_D</math></td><td>R-Drain</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>R_S</math></td><td>R-Source</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>r_S</math></td><td>dyn.Source Widerstand</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Max A bei Sourceschaltung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>g_m</math></td><td>Steilheit Kennlinie</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>U_{Early}</math></td><td>Early 5...100</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_{DS}</math></td><td>Drain-Source-Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>I_D</math></td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> </table>	$U^+$	Speisespannung	[V]	$u_{in}$	Eingangssp.	[V]	$u_{out}$	Ausgangssp.	[V]	$A$	Verstärkung	[1]	$R_G$	R-Gate	[ $\Omega$ ]	$R_D$	R-Drain	[ $\Omega$ ]	$R_S$	R-Source	[ $\Omega$ ]	$r_S$	dyn.Source Widerstand	[ $\Omega$ ]	$\mu$	Max A bei Sourceschaltung	[1]	$g_m$	Steilheit Kennlinie	[1]	$U_{Early}$	Early 5...100	[V]	$U_{DS}$	Drain-Source-Spannung	[V]	$I_D$	Drainstrom	[A]
$U^+$	Speisespannung	[V]																																							
$u_{in}$	Eingangssp.	[V]																																							
$u_{out}$	Ausgangssp.	[V]																																							
$A$	Verstärkung	[1]																																							
$R_G$	R-Gate	[ $\Omega$ ]																																							
$R_D$	R-Drain	[ $\Omega$ ]																																							
$R_S$	R-Source	[ $\Omega$ ]																																							
$r_S$	dyn.Source Widerstand	[ $\Omega$ ]																																							
$\mu$	Max A bei Sourceschaltung	[1]																																							
$g_m$	Steilheit Kennlinie	[1]																																							
$U_{Early}$	Early 5...100	[V]																																							
$U_{DS}$	Drain-Source-Spannung	[V]																																							
$I_D$	Drainstrom	[A]																																							

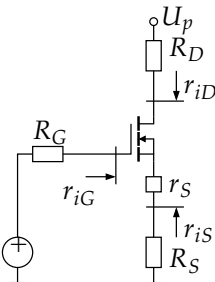
## 18.7.2. Gateschaltung

 <ul style="list-style-type: none"> <li>• nicht invertierend</li> <li>• Für hohe Frequenzen</li> <li>• <math>r_{in}</math> klein</li> <li>• <math>r_{out}</math> gross</li> </ul>	$A = \frac{u_{out}}{u_{in}}$ $A = \frac{R_D \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)}{r_s + R_S + \frac{R_D + R_S}{\mu}} = \frac{R_D}{R_S + r_s}$ $r_s = \frac{1}{g_m}$ $r_{DS} = \frac{U_{Early} + U_{DS}}{I_D} \approx \frac{U_{Early}}{I_D}$	<table> <tr> <td><math>U^+</math></td><td>Speisespannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{in}</math></td><td>Eingangssp.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{out}</math></td><td>Ausgangssp.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>R_D</math></td><td>R-Drain</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>R_S</math></td><td>R-Source</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>r_s</math></td><td>dyn.Source Widerstand</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>g_m</math></td><td>Steilheit Kennlinie</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>U_{Early}</math></td><td>Early 5...100</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_{DS}</math></td><td>Drain-Source</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>I_D</math></td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Max A bei Sourceschaltung</td><td>[1]</td></tr> </table>	$U^+$	Speisespannung	[V]	$u_{in}$	Eingangssp.	[V]	$u_{out}$	Ausgangssp.	[V]	$A$	Verstärkung	[1]	$R_D$	R-Drain	[ $\Omega$ ]	$R_S$	R-Source	[ $\Omega$ ]	$r_s$	dyn.Source Widerstand	[ $\Omega$ ]	$g_m$	Steilheit Kennlinie	[1]	$U_{Early}$	Early 5...100	[V]	$U_{DS}$	Drain-Source	[V]	$I_D$	Drainstrom	[A]	$\mu$	Max A bei Sourceschaltung	[1]
$U^+$	Speisespannung	[V]																																				
$u_{in}$	Eingangssp.	[V]																																				
$u_{out}$	Ausgangssp.	[V]																																				
$A$	Verstärkung	[1]																																				
$R_D$	R-Drain	[ $\Omega$ ]																																				
$R_S$	R-Source	[ $\Omega$ ]																																				
$r_s$	dyn.Source Widerstand	[ $\Omega$ ]																																				
$g_m$	Steilheit Kennlinie	[1]																																				
$U_{Early}$	Early 5...100	[V]																																				
$U_{DS}$	Drain-Source	[V]																																				
$I_D$	Drainstrom	[A]																																				
$\mu$	Max A bei Sourceschaltung	[1]																																				

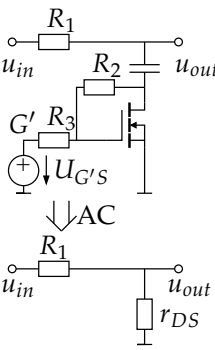
## 18.7.3. Drainschaltung

 <ul style="list-style-type: none"> <li>• nicht invertierend</li> <li>• Spannungsfolger (<math>A = 1</math>), Impedanzwandler, Leistungstreiber</li> <li>• <math>r_{in}</math> gross</li> <li>• <math>r_{out}</math> klein</li> </ul>	$A = \frac{u_{out}}{u_{in}}$ $A = -\frac{R_S}{R_S + r_s \left(1 + \frac{R_S}{r_{ds}}\right)}$ $r_s = \frac{1}{g_m}$ $r_{DS} = \frac{U_{Early} + U_{DS}}{I_D} \approx \frac{U_{Early}}{I_D}$	<table> <tr> <td><math>U^+</math></td><td>Speisespannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{in}</math></td><td>Eingangssp.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{out}</math></td><td>Ausgangssp.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>R_S</math></td><td>R-Source</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>r_s</math></td><td>dyn.Source Widerstand</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>g_m</math></td><td>Steilheit Kennlinie</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>U_{Early}</math></td><td>Early 5...100</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_{DS}</math></td><td>Drain-Source</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>I_D</math></td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Max A bei Sourceschaltung</td><td>[1]</td></tr> </table>	$U^+$	Speisespannung	[V]	$u_{in}$	Eingangssp.	[V]	$u_{out}$	Ausgangssp.	[V]	$A$	Verstärkung	[1]	$R_S$	R-Source	[ $\Omega$ ]	$r_s$	dyn.Source Widerstand	[ $\Omega$ ]	$g_m$	Steilheit Kennlinie	[1]	$U_{Early}$	Early 5...100	[V]	$U_{DS}$	Drain-Source	[V]	$I_D$	Drainstrom	[A]	$\mu$	Max A bei Sourceschaltung	[1]
$U^+$	Speisespannung	[V]																																	
$u_{in}$	Eingangssp.	[V]																																	
$u_{out}$	Ausgangssp.	[V]																																	
$A$	Verstärkung	[1]																																	
$R_S$	R-Source	[ $\Omega$ ]																																	
$r_s$	dyn.Source Widerstand	[ $\Omega$ ]																																	
$g_m$	Steilheit Kennlinie	[1]																																	
$U_{Early}$	Early 5...100	[V]																																	
$U_{DS}$	Drain-Source	[V]																																	
$I_D$	Drainstrom	[A]																																	
$\mu$	Max A bei Sourceschaltung	[1]																																	

## 18.8. Dynamische Innenwiderstände des MOS-Transistors


	$r_{iG} \rightarrow \infty$ $r_{iS} = r_S \parallel r_{DS} \approx r_S \quad (R_D = 0)$ $r_{iD} = r_{DS} \left( 1 + \frac{R_S}{r_S} + \frac{R_S}{r_{DS}} \right)$ Falls $r_{DS} \gg R_S$ : $r_{iD} \approx r_{DS} \left( 1 + \frac{R_S}{r_S} \right)$ $r_{DS} = \frac{U_{DS} + U_{Early}}{I_D} \approx \frac{U_{Early}}{I_D}$	<table> <tr><td><math>r_{iG}</math></td><td>dyn. r-Gate</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr><td><math>r_{iD}</math></td><td>dyn. r-Drain</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr><td><math>r_{iS}</math></td><td>dyn. r-Source</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr><td><math>r_S</math></td><td>siehe 18.4 auf S. 141</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr><td><math>r_{DS}</math></td><td>r-Drain-Source</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr><td><math>U_{Early}</math></td><td>Early</td><td>5...100 [V]</td></tr> <tr><td><math>U_{DS}</math></td><td>Drain-Source</td><td>[V]</td></tr> <tr><td><math>I_D</math></td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr><td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> </table>	$r_{iG}$	dyn. r-Gate	$[\Omega]$	$r_{iD}$	dyn. r-Drain	$[\Omega]$	$r_{iS}$	dyn. r-Source	$[\Omega]$	$r_S$	siehe 18.4 auf S. 141	$[\Omega]$	$r_{DS}$	r-Drain-Source	$[\Omega]$	$U_{Early}$	Early	5...100 [V]	$U_{DS}$	Drain-Source	[V]	$I_D$	Drainstrom	[A]	$R$	Widerstand	$[\Omega]$
$r_{iG}$	dyn. r-Gate	$[\Omega]$																											
$r_{iD}$	dyn. r-Drain	$[\Omega]$																											
$r_{iS}$	dyn. r-Source	$[\Omega]$																											
$r_S$	siehe 18.4 auf S. 141	$[\Omega]$																											
$r_{DS}$	r-Drain-Source	$[\Omega]$																											
$U_{Early}$	Early	5...100 [V]																											
$U_{DS}$	Drain-Source	[V]																											
$I_D$	Drainstrom	[A]																											
$R$	Widerstand	$[\Omega]$																											

## 18.9. Der FET als Spannungsgesteuerter Widerstand

	<p>ohne Linearisierung <math>R_2 = \infty</math> und <math>R_3 = 0</math>:          für kleine AC-Spannung:  <math>r_{DS}(t) = r_{DS0}</math>  <math>u_{DS}(t) = \frac{u_{in}(t)r_{DS}(t)}{R_1 + r_{DS}(t)}</math></p> <p>für grössere AC-Spannung:  <math>r_{DS}(t) = \frac{1}{K(U_{GS} - U_T) - u_{DS}(t)}</math>          mit Linearisierung <math>R_2 = R_3 \gg r_{DS}</math>:  <math>\frac{u_{out}}{u_{in}} = \frac{r_{DS}}{R_1 + r_{DS}}</math>  <math>r_{DS} = \frac{du_{DS}}{di_{DS}} = \frac{2}{K(U_{G'S} - 2U_T)}</math></p>	<table> <tr><td><math>R_1</math></td><td>Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr><td><math>R_{2,3}</math></td><td>Linearisierung</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr><td><math>r_{DS}</math></td><td>dyn.Source Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr><td><math>u_{in}</math></td><td>Eingangs-Sp.</td><td>[V]</td></tr> <tr><td><math>u_{out}</math></td><td>Ausgangs-Sp.</td><td>[V]</td></tr> <tr><td><math>u_{G'S}</math></td><td>Gate'-Span.</td><td>[V]</td></tr> <tr><td><math>r_{DS}</math></td><td>Drain-Source-Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr><td><math>r_{DS0}</math></td><td>Einschaltwiderstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr><td><math>u_{DS} = 0</math></td><td></td><td></td></tr> <tr><td><math>i_D</math></td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr><td><math>U_T</math></td><td>Schwellspannung (0.6...8)</td><td>[V]</td></tr> <tr><td><math>K</math></td><td>Transkond.</td><td><math>[\frac{A}{V^2}]</math></td></tr> </table>	$R_1$	Widerstand	$[\Omega]$	$R_{2,3}$	Linearisierung	$[\Omega]$	$r_{DS}$	dyn.Source Widerstand	$[\Omega]$	$u_{in}$	Eingangs-Sp.	[V]	$u_{out}$	Ausgangs-Sp.	[V]	$u_{G'S}$	Gate'-Span.	[V]	$r_{DS}$	Drain-Source-Widerstand	$[\Omega]$	$r_{DS0}$	Einschaltwiderstand	$[\Omega]$	$u_{DS} = 0$			$i_D$	Drainstrom	[A]	$U_T$	Schwellspannung (0.6...8)	[V]	$K$	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$
$R_1$	Widerstand	$[\Omega]$																																				
$R_{2,3}$	Linearisierung	$[\Omega]$																																				
$r_{DS}$	dyn.Source Widerstand	$[\Omega]$																																				
$u_{in}$	Eingangs-Sp.	[V]																																				
$u_{out}$	Ausgangs-Sp.	[V]																																				
$u_{G'S}$	Gate'-Span.	[V]																																				
$r_{DS}$	Drain-Source-Widerstand	$[\Omega]$																																				
$r_{DS0}$	Einschaltwiderstand	$[\Omega]$																																				
$u_{DS} = 0$																																						
$i_D$	Drainstrom	[A]																																				
$U_T$	Schwellspannung (0.6...8)	[V]																																				
$K$	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$																																				

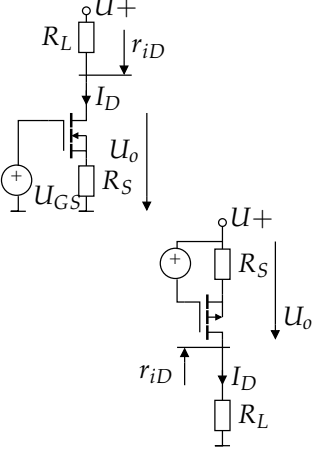


## 18.10. MOS-Diode

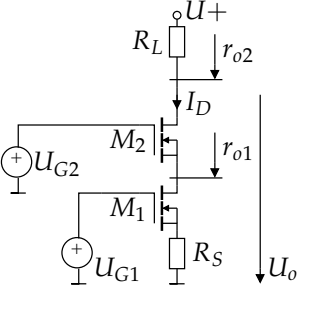
 <p>Wichtig, alle Substrate auf gleichem Potential!</p>	$I_D = \frac{k}{2}(U_{GS} - U_T)^2$ $r_{MD} = r_S \parallel r_{DS}$ $r_{MD} = \frac{u_{DS}}{i_D}$ $r_{DS} = \frac{U_A + U_{DS}}{I_D}$ $r_S = \frac{1}{g_m} = \frac{1}{\sqrt{2I_D k}}$ $U_{GS} = U_T + \sqrt{\frac{2I_D}{k(1 + \lambda U_{DS})}}$ $U_{GS} \approx U_T + \sqrt{\frac{2I_D}{k}}$ <p>Spannungsteiler</p> $\frac{U_{GS1} - U_{T1}}{U_{GS2} - U_{T2}} = \sqrt{\frac{\frac{W_2}{L_2}}{\frac{W_1}{L_1}}}$	<table> <tr> <td><math>I_D</math></td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td><math>U_T</math></td><td>Schwellspannung (0.6...8)</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>Transkonduktanzparameter</td><td><math>[\frac{A}{V^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>U_{GS}</math></td><td>Gate-Source-Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_{DS}</math></td><td>Drain-Source-Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>r_{MD}</math></td><td>Dynamischer Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td><math>g_m</math></td><td>Steilheit Übertragungskennlinie</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>r_S</math></td><td>int. Source Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td><math>U_A</math></td><td>Early-Span.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>W</math></td><td>Gate-Breite</td><td>[m]</td></tr> <tr> <td><math>L</math></td><td>Gate-Länge</td><td>[m]</td></tr> </table>	$I_D$	Drainstrom	[A]	$U_T$	Schwellspannung (0.6...8)	[V]	$k$	Transkonduktanzparameter	$[\frac{A}{V^2}]$	$U_{GS}$	Gate-Source-Spannung	[V]	$U_{DS}$	Drain-Source-Spannung	[V]	$r_{MD}$	Dynamischer Widerstand	[Ω]	$g_m$	Steilheit Übertragungskennlinie	[1]	$r_S$	int. Source Widerstand	[Ω]	$U_A$	Early-Span.	[V]	$W$	Gate-Breite	[m]	$L$	Gate-Länge	[m]
$I_D$	Drainstrom	[A]																																	
$U_T$	Schwellspannung (0.6...8)	[V]																																	
$k$	Transkonduktanzparameter	$[\frac{A}{V^2}]$																																	
$U_{GS}$	Gate-Source-Spannung	[V]																																	
$U_{DS}$	Drain-Source-Spannung	[V]																																	
$r_{MD}$	Dynamischer Widerstand	[Ω]																																	
$g_m$	Steilheit Übertragungskennlinie	[1]																																	
$r_S$	int. Source Widerstand	[Ω]																																	
$U_A$	Early-Span.	[V]																																	
$W$	Gate-Breite	[m]																																	
$L$	Gate-Länge	[m]																																	

## 18.11. Stromquellen

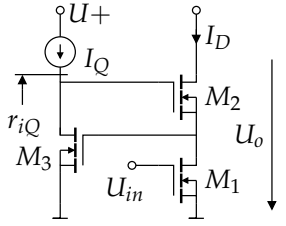
### 18.11.1. Einfache Stromquelle

 <p>Die Schaltung ist für extrem kleine Betriebsspannungen ungeeignet, da über <math>R_S</math> eine Spannung abfallen muss. Für diesen Einsatzbereich eignet sich die Kaskodeschaltung, bei der <math>R_S</math> durch einen Transistor ersetzt wird.</p>	<p>Der Fet muss im gesättigten Bereich (siehe Kapitel 18.3) betrieben werden.</p> <p>Für <math>R_S = 0</math>:</p> $I_D = \frac{k}{2}(U_{GS} - U_T)^2(1 + \lambda U_{DS})$ $r_{iD} = r_{DS} = \frac{U_A + U_{DS}}{I_D} \approx \frac{U_A}{I_D}$ $U_o \geq U_{DSsat}$ <p>Für <math>R_S \neq 0</math>:</p> $I_D = \frac{U_G - U_{GS} - U_{SS}}{R_S}$ $r_{iD} = r_{DS} \left( 1 + \frac{R_S}{r_s} + \frac{R_S}{r_{DS}} \right)$ $r_s = \frac{1}{g_m} = \frac{1}{\sqrt{2I_D k}}, \quad r_{DS} \approx \frac{U_A}{I_D}$ $U_o > R_S I_D + U_{DSsat}$ <p><math>R_S</math> dient als Gegenkopplung</p>	<table> <tr> <td><math>I_D</math></td><td>Drainstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td><math>r_{iD}</math></td><td>Innenwiderstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td><math>U_o</math></td><td>Ausgangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_A</math></td><td>Early-Span.</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_{DS}</math></td><td>U-Drain-Source</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_{SS}</math></td><td>Negative Speisespannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>U_T</math></td><td>Schwellspannung (0.6...8)</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>Transkond.</td><td>[<math>\frac{A}{V^2}</math>]</td></tr> <tr> <td><math>\lambda</math></td><td>Mod-fakt.</td><td>[<math>\frac{1}{V}</math>]</td></tr> </table>	$I_D$	Drainstrom	[A]	$r_{iD}$	Innenwiderstand	[Ω]	$U_o$	Ausgangsspannung	[V]	$U_A$	Early-Span.	[V]	$U_{DS}$	U-Drain-Source	[V]	$U_{SS}$	Negative Speisespannung	[V]	$U_T$	Schwellspannung (0.6...8)	[V]	$R$	Widerstand	[Ω]	$k$	Transkond.	[ $\frac{A}{V^2}$ ]	$\lambda$	Mod-fakt.	[ $\frac{1}{V}$ ]
$I_D$	Drainstrom	[A]																														
$r_{iD}$	Innenwiderstand	[Ω]																														
$U_o$	Ausgangsspannung	[V]																														
$U_A$	Early-Span.	[V]																														
$U_{DS}$	U-Drain-Source	[V]																														
$U_{SS}$	Negative Speisespannung	[V]																														
$U_T$	Schwellspannung (0.6...8)	[V]																														
$R$	Widerstand	[Ω]																														
$k$	Transkond.	[ $\frac{A}{V^2}$ ]																														
$\lambda$	Mod-fakt.	[ $\frac{1}{V}$ ]																														

### 18.11.2. Stromquelle mit Kaskode-Schaltung

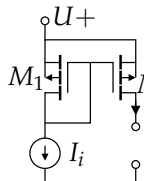
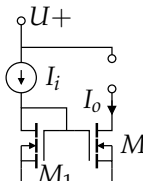
	$r_{o2} = r_{DS2} \left( 1 + \frac{r_{DS1}}{r_{S2}} + \frac{r_{DS1}}{r_{DS2}} \right)$ <p>Falls <math>\text{Typ}(M_1) = \text{Typ}(M_2)</math>:</p> $r_{o2} \approx \frac{r_{DS}^2}{r_{D2}} = \mu r_{DS}$ $U_o \geq U_{G2} - U_{GS2} + U_{DSsat2}$	<table> <tr> <td><math>r_{iD}</math></td><td>Innenwiderstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td><math>U_o</math></td><td>Ausgangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td><math>\mu</math></td><td>Max Verstärkung Source Schaltung</td><td>[1]</td></tr> </table>	$r_{iD}$	Innenwiderstand	[Ω]	$U_o$	Ausgangsspannung	[V]	$R$	Widerstand	[Ω]	$\mu$	Max Verstärkung Source Schaltung	[1]
$r_{iD}$	Innenwiderstand	[Ω]												
$U_o$	Ausgangsspannung	[V]												
$R$	Widerstand	[Ω]												
$\mu$	Max Verstärkung Source Schaltung	[1]												

### 18.11.3. Stromquelle mit geregelter Kaskode-Schaltung

 <p>Die Schaltung kann auch als Supertransistor interpretiert werden.</p>	$r_o = r_{DS1} r_{DS2} g_{m1} g_{m3} (r_{DS3} \parallel r_{iQ})$ $U_o \geq 2U_{DSsat}$ <p>Strom kann wie in vorhergehender Schaltung berechnet werden.</p>	<table> <tr> <td><math>r_o</math></td><td>Innenwiderstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr> <td><math>U_o</math></td><td>Ausgangsspannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>U_{DS}</math></td><td>U-Drain-Source</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Gate-Steilheit</td><td><math>[1]</math></td></tr> </table>	$r_o$	Innenwiderstand	$[\Omega]$	$U_o$	Ausgangsspannung	$[V]$	$U_{DS}$	U-Drain-Source	$[V]$	$R$	Widerstand	$[\Omega]$	$g$	Gate-Steilheit	$[1]$
$r_o$	Innenwiderstand	$[\Omega]$															
$U_o$	Ausgangsspannung	$[V]$															
$U_{DS}$	U-Drain-Source	$[V]$															
$R$	Widerstand	$[\Omega]$															
$g$	Gate-Steilheit	$[1]$															

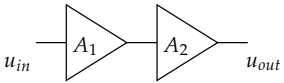
## 18.12. Stromspiegel

### 18.12.1. Widlar Stromspiegel

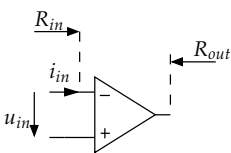
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>P-Kanal</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>N-Kanal</p>  </div> </div> <p>Ein Stromspiegel kann auch mehrere Ausgänge haben.</p> <p>Der Eingangstransistor ist als MOS-Diode geschaltet.</p> <p>Die Genauigkeit der Schaltung hängt sehr von den Exemplaren der Transistoren ab.</p>	$U_{omin} = U_{DSsat} = U_{GS2} - U_{T2}$ $U_{omin} = \sqrt{\frac{2I_{D2}}{k}}$ $n = \frac{I_o}{I_i} \approx i_o i_i$ $n = \frac{\frac{W_2}{L_2}}{\frac{W_1}{L_1}} \cdot \frac{1 + \lambda_2 U_{DS2}}{1 + \lambda U_{DS1}}$ $r_o = r_{DS2} = \frac{U_{A2} + U_{DS2}}{I_{D2}}$ $r_o \approx \frac{U_{A1}}{I_D} = \frac{1}{\lambda I_D}$ $r_i = r_{S1} \parallel r_{DS1} \approx r_{S1} = \frac{1}{g_{m1}}$ $r_i = \frac{1}{\sqrt{2I_D k}}$ $U_i = U_{GS1} = \sqrt{\frac{2I_D}{k}} + U_{T1}$	<table> <tr> <td><math>r_o</math></td><td>Innenwiderstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr> <td><math>r_i</math></td><td>Ausgangswiderstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr> <td><math>r_{DS}</math></td><td>r-Source</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr> <td><math>r_S</math></td><td>r-Drain-Source</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr> <td><math>U_o</math></td><td>Ausgangsspannung</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>U_{DS}</math></td><td>U-Drain-Source</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>U_{GS}</math></td><td>U-Gate-Source</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>U_T</math></td><td>Schwellspannung (0.6...8)</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>U_A</math></td><td>Early-Span.</td><td><math>[V]</math></td></tr> <tr> <td><math>I_D</math></td><td>Drain-Strom</td><td><math>[A]</math></td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td><math>[\Omega]</math></td></tr> <tr> <td><math>g</math></td><td>Gate-Steilheit</td><td><math>[1]</math></td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>Transkond.</td><td><math>[\frac{A}{V^2}]</math></td></tr> <tr> <td><math>\lambda</math></td><td>Mod-fakt.</td><td><math>[\frac{1}{V}]</math></td></tr> <tr> <td><math>W</math></td><td>Gate-Breite</td><td><math>[m]</math></td></tr> <tr> <td><math>L</math></td><td>Gate-Länge</td><td><math>[m]</math></td></tr> </table>	$r_o$	Innenwiderstand	$[\Omega]$	$r_i$	Ausgangswiderstand	$[\Omega]$	$r_{DS}$	r-Source	$[\Omega]$	$r_S$	r-Drain-Source	$[\Omega]$	$U_o$	Ausgangsspannung	$[V]$	$U_{DS}$	U-Drain-Source	$[V]$	$U_{GS}$	U-Gate-Source	$[V]$	$U_T$	Schwellspannung (0.6...8)	$[V]$	$U_A$	Early-Span.	$[V]$	$I_D$	Drain-Strom	$[A]$	$R$	Widerstand	$[\Omega]$	$g$	Gate-Steilheit	$[1]$	$k$	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$	$\lambda$	Mod-fakt.	$[\frac{1}{V}]$	$W$	Gate-Breite	$[m]$	$L$	Gate-Länge	$[m]$
$r_o$	Innenwiderstand	$[\Omega]$																																																
$r_i$	Ausgangswiderstand	$[\Omega]$																																																
$r_{DS}$	r-Source	$[\Omega]$																																																
$r_S$	r-Drain-Source	$[\Omega]$																																																
$U_o$	Ausgangsspannung	$[V]$																																																
$U_{DS}$	U-Drain-Source	$[V]$																																																
$U_{GS}$	U-Gate-Source	$[V]$																																																
$U_T$	Schwellspannung (0.6...8)	$[V]$																																																
$U_A$	Early-Span.	$[V]$																																																
$I_D$	Drain-Strom	$[A]$																																																
$R$	Widerstand	$[\Omega]$																																																
$g$	Gate-Steilheit	$[1]$																																																
$k$	Transkond.	$[\frac{A}{V^2}]$																																																
$\lambda$	Mod-fakt.	$[\frac{1}{V}]$																																																
$W$	Gate-Breite	$[m]$																																																
$L$	Gate-Länge	$[m]$																																																

# 19. Operationsverstärker

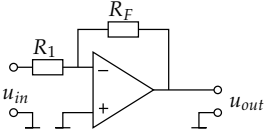
## 19.1. Verstärkung

	<p>Spannungsverstärkung:</p> $A_U[dB] = 20 \log \frac{u_{out}}{u_{in}}$ <p>Leistungsverstärkung:</p> $A_P[dB] = 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}}$ $A_{tot}[dB] = \sum_i A_i[dB]$ $A_{tot}[1] = A_1[1]A_2[1] \dots A_n[1]$	<p><math>A_U</math> Spannungsverstärkung [1]</p> <p><math>A_P</math> Leistungsverstärkung [1]</p> <p><math>A_{tot}</math> A total [1]</p> <p><math>u_{in}</math> Eingangsspannung [V]</p> <p><math>u_{out}</math> Ausgangsspannung [V]</p>
---	---	--

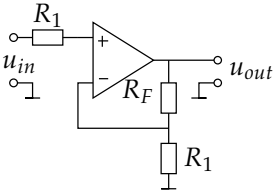
## 19.2. Idealer OP

	<p><math>R_{out} = 0</math></p> <p><math>R_{in} = \infty</math></p> <p><math>i_{in} = 0</math></p> <p><math>u_{in} = 0</math></p>	<p><math>R_{out}</math> Ausgangswiderstand [<math>\Omega</math>]</p> <p><math>R_{in}</math> Eingangswiderstand [<math>\Omega</math>]</p> <p><math>i_{in}</math> Eingangsstrom [A]</p> <p><math>u_{in}</math> Eingangsspannung [V]</p>
---	---	---

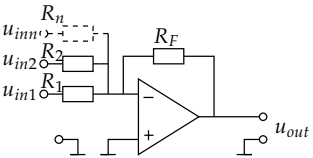
### 19.2.1. Invertierender Verstärker

	$A_{CL} = \frac{u_{out}}{u_{in}} = -\frac{R_F}{R_1}$	<table> <tr> <td><math>u_{out}</math></td><td>Ausgangs- spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{in}</math></td><td>Eingangs- spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>R_1</math></td><td>Widerstand</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>R_F</math></td><td>Rückkopp- lungswider- stand</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>A_{CL}</math></td><td>Closed Loop Gain</td><td>[1]</td></tr> </table>	$u_{out}$	Ausgangs- spannung	[V]	$u_{in}$	Eingangs- spannung	[V]	$R_1$	Widerstand	[ $\Omega$ ]	$R_F$	Rückkopp- lungswider- stand	[ $\Omega$ ]	$A_{CL}$	Closed Loop Gain	[1]
$u_{out}$	Ausgangs- spannung	[V]															
$u_{in}$	Eingangs- spannung	[V]															
$R_1$	Widerstand	[ $\Omega$ ]															
$R_F$	Rückkopp- lungswider- stand	[ $\Omega$ ]															
$A_{CL}$	Closed Loop Gain	[1]															

### 19.2.2. Nichtinvertierender Verstärker

	$A_{CL} = \frac{u_{out}}{u_{in}} = \frac{R_F}{R_1} + 1$ <p>Impedanzwandler:</p> $R_F = 0, R_1 = \infty \Rightarrow A = 1$	<table> <tr> <td><math>u_{out}</math></td><td>Ausgangs- spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{in}</math></td><td>Eingangs- spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>R_1</math></td><td>Widerstand</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>R_F</math></td><td>Rückkopp- lungswider- stand</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> </table>	$u_{out}$	Ausgangs- spannung	[V]	$u_{in}$	Eingangs- spannung	[V]	$R_1$	Widerstand	[ $\Omega$ ]	$R_F$	Rückkopp- lungswider- stand	[ $\Omega$ ]
$u_{out}$	Ausgangs- spannung	[V]												
$u_{in}$	Eingangs- spannung	[V]												
$R_1$	Widerstand	[ $\Omega$ ]												
$R_F$	Rückkopp- lungswider- stand	[ $\Omega$ ]												

### 19.2.3. Addierer

	$u_{out} = A_1 u_{in1} + A_2 u_{in2} + \dots + A_n u_{inn}$ $A_n = -\frac{R_F}{R_n}$	<table> <tr> <td><math>u_{out}</math></td><td>Ausgangs- spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{in}</math></td><td>Eingangs- spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>R_F</math></td><td>Rückkopp- lungswider- stand</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>R_n</math></td><td>Widerstand</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> </table>	$u_{out}$	Ausgangs- spannung	[V]	$u_{in}$	Eingangs- spannung	[V]	$A$	Verstärkung	[1]	$R_F$	Rückkopp- lungswider- stand	[ $\Omega$ ]	$R_n$	Widerstand	[ $\Omega$ ]
$u_{out}$	Ausgangs- spannung	[V]															
$u_{in}$	Eingangs- spannung	[V]															
$A$	Verstärkung	[1]															
$R_F$	Rückkopp- lungswider- stand	[ $\Omega$ ]															
$R_n$	Widerstand	[ $\Omega$ ]															

## 19. OPERATIONSVERSTÄRKER

### 19.2.4. Subtrahierer

	$u_{out} = A_1 u_{inn} + A_2 u_{inp}$ $A_n = -\frac{R_F}{R_1}$ $A_p = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \left( \frac{R_F}{R_1} + 1 \right)$ <p>Differenzverst.: <math> A_1  =  A_2 </math></p> $\frac{R_2}{R_3} = \frac{R_F}{R_1} = u_{Diff}$ $u_{out} = u_{Diff}(u_{inp} - u_{inn})$ <p>meist: <math>R_1 = R_3, R_F = R_2</math></p>	<table> <tr> <td><math>u_{out}</math></td><td>Ausgangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{in}</math></td><td>Eingangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{Diff}</math></td><td>Differenzspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>R_F</math></td><td>Rückkopplungswiderstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td><math>R_n</math></td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> </table>	$u_{out}$	Ausgangsspannung	[V]	$u_{in}$	Eingangsspannung	[V]	$u_{Diff}$	Differenzspannung	[V]	$A$	Verstärkung	[1]	$R_F$	Rückkopplungswiderstand	[Ω]	$R_n$	Widerstand	[Ω]
$u_{out}$	Ausgangsspannung	[V]																		
$u_{in}$	Eingangsspannung	[V]																		
$u_{Diff}$	Differenzspannung	[V]																		
$A$	Verstärkung	[1]																		
$R_F$	Rückkopplungswiderstand	[Ω]																		
$R_n$	Widerstand	[Ω]																		

### 19.2.5. Mehrfach Addierer und Subtrahierer

<p>Dummy input</p>	<p>falls: <math>A_{n1} + A_{n2} + \dots = A_{p1} + A_{p2} + \dots</math></p> $u_{out} = \sum_i A_{pi} u_{pi} - \sum_j A_{nj} u_{nj}$ <p>Beispiele :</p> $R_{n1} = \frac{R_F}{ A_{n1} }, R_{p1} = \frac{R_F}{ A_{p1} }$ $A_{n1} = \frac{R_F}{R_{n1}}$ $A_{p1} = \left( \frac{R_F}{R_{n1} \parallel \dots \parallel R_{nj}} + 1 \right) \left( \frac{(R_{p2} \parallel \dots \parallel R_{pi}) \parallel R_V}{R_{p1} + (R_{p2} \parallel \dots \parallel R_{pi}) \parallel R_V} \right)$	<table> <tr> <td><math>u_{out}</math></td><td>Ausgangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{n,p}</math></td><td>Eingangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>A</math></td><td>Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>R_F</math></td><td>Rückkopplungswiderstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td><math>R_n</math></td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> </table>	$u_{out}$	Ausgangsspannung	[V]	$u_{n,p}$	Eingangsspannung	[V]	$A$	Verstärkung	[1]	$R_F$	Rückkopplungswiderstand	[Ω]	$R_n$	Widerstand	[Ω]
$u_{out}$	Ausgangsspannung	[V]															
$u_{n,p}$	Eingangsspannung	[V]															
$A$	Verstärkung	[1]															
$R_F$	Rückkopplungswiderstand	[Ω]															
$R_n$	Widerstand	[Ω]															

### 19.2.6. Instrumentationsverstärker

	$u_{out} = (u_{inp} - u_{inn}) \frac{2R_1 + P}{P}$ $A_{Diff} = 1 + \frac{2R_1}{P}$ $u_p - u_n = i(2R_1 + P)$	<table> <tr> <td><math>u_{out}</math></td><td>Ausgangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{inn}</math></td><td>Eingangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{inp}</math></td><td>Eingangsspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>A_{Diff}</math></td><td>Diff-Verst.</td><td>[1]</td></tr> </table>	$u_{out}$	Ausgangsspannung	[V]	$u_{inn}$	Eingangsspannung	[V]	$u_{inp}$	Eingangsspannung	[V]	$A_{Diff}$	Diff-Verst.	[1]
$u_{out}$	Ausgangsspannung	[V]												
$u_{inn}$	Eingangsspannung	[V]												
$u_{inp}$	Eingangsspannung	[V]												
$A_{Diff}$	Diff-Verst.	[1]												

## 19.2.7. Stromquelle

	<p>Variante 1 und 2:</p> $i_L = \frac{u_{ref}}{R_1}$	<p><math>u_{ref}</math> Referenzspannung [V]  <math>i_L</math> Strom durch <math>R_L</math> [A]  <math>R_L</math> Lastwiderstand [<math>\Omega</math>]  <math>R</math> Widerstand [<math>\Omega</math>]</p>
	<p>Variante 3:</p> $i_L = -\frac{u_{ref}}{R_1} \cdot \frac{R_2 + R_3}{R_3}$	
	<p>Variante 4: falls <math>R_{2a} = R_{2b} = R_{2c} = R_{2d}</math>:</p> $i_L = \frac{u_{ref}}{R_1}$	

## 19.2.8. Stromspiegel

	<p><math>n = \frac{i_{out}}{i_{in}} = \frac{R_1}{R_2}</math></p> <p><math>u_{R_1} = u_{R_2}, R_1 i_{in} = R_2 i_{out}</math></p>	<p><math>i_{in}</math> Referenzstrom [A]  <math>i_{out}</math> Strom durch <math>R_L</math> [A]  <math>R_L</math> Lastwiderstand [<math>\Omega</math>]  <math>R</math> Widerstand [<math>\Omega</math>]  <math>n</math> Teilverhältnis [1]</p>
--	--	--

### 19.2.9. Differentieller UI-Wandler

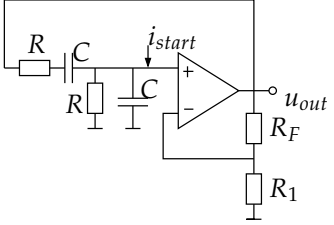
	$i_L = \frac{u_1 - u_2}{R}$ $R = R_a = R_b = R_c = R_d$	<table> <tr> <td><math>u_1</math></td><td>Eingangssp. 1</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_2</math></td><td>Eingangssp. 2</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>R_L</math></td><td>Lastwiderstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> </table>	$u_1$	Eingangssp. 1	[V]	$u_2$	Eingangssp. 2	[V]	$R_L$	Lastwiderstand	[Ω]	$R$	Widerstand	[Ω]
$u_1$	Eingangssp. 1	[V]												
$u_2$	Eingangssp. 2	[V]												
$R_L$	Lastwiderstand	[Ω]												
$R$	Widerstand	[Ω]												

### 19.2.10. Schmitt-Trigger

<p>Nicht invertierend:</p> <p>Invertierend:</p>	<p>Nicht invertierend:</p> $u_T^+ = u_{ref} + \frac{R_1}{R_F}(u_{ref} - u_{outmin})$ $u_T^- = u_{ref} - \frac{R_1}{R_F}(u_{outmax} - u_{ref})$ $u_H = u_T^+ - u_T^-$ $u_H = (u_{outmax} - u_{outmin}) \frac{R_1}{R_F}$ <p>Invertierend:</p> $u_T^+ = u_{ref} + \frac{R_1(u_{outmax} - u_{ref})}{R_1 + R_F}$ $u_T^- = u_{ref} - \frac{R_1(u_{ref} - u_{outmin})}{R_1 + R_F}$ $u_H = \frac{R_1(u_{outmax} - u_{outmin})}{R_1 + R_F}$	<table> <tr> <td><math>u_T^+</math></td><td>Sprungspannung ↗</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_T^-</math></td><td>Sprungspannung ↘</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_H</math></td><td>Hysteresespannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{ref}</math></td><td>Referenzspannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{outmax}</math></td><td>→ +Speisung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{outmin}</math></td><td>→ -Speisung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>R_F</math></td><td>Rückkopplungs-Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td><math>R_1</math></td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> </table>	$u_T^+$	Sprungspannung ↗	[V]	$u_T^-$	Sprungspannung ↘	[V]	$u_H$	Hysteresespannung	[V]	$u_{ref}$	Referenzspannung	[V]	$u_{outmax}$	→ +Speisung	[V]	$u_{outmin}$	→ -Speisung	[V]	$R_F$	Rückkopplungs-Widerstand	[Ω]	$R_1$	Widerstand	[Ω]
$u_T^+$	Sprungspannung ↗	[V]																								
$u_T^-$	Sprungspannung ↘	[V]																								
$u_H$	Hysteresespannung	[V]																								
$u_{ref}$	Referenzspannung	[V]																								
$u_{outmax}$	→ +Speisung	[V]																								
$u_{outmin}$	→ -Speisung	[V]																								
$R_F$	Rückkopplungs-Widerstand	[Ω]																								
$R_1$	Widerstand	[Ω]																								

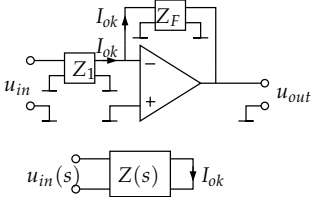


## 19.2.11. Wien-Robinson Oszillator

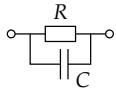
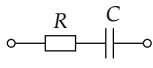
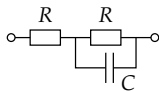
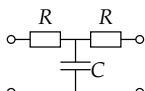
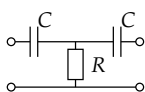
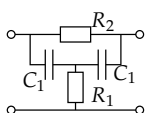
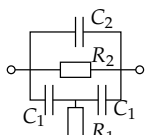
	$ G  = \frac{\omega T}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (\omega 2DT)^2}}$ $T = RC, \quad D = \frac{3}{2}$ $\varphi = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega 2DT}{1 - \omega^2 T^2}\right)$ <p>Amplitudenbedingung:  <math>A_{Loop} \geq 1</math>          Phasenbedingung:  <math>\varphi_{Loop} = n \cdot 360^\circ,</math>  <math>n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots</math></p>	<table> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>D</math></td><td>Dämpfung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>u_{out}</math></td><td>Ausgang</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td>[Ω]</td></tr> <tr> <td><math>C</math></td><td>Kapazität</td><td>[F]</td></tr> </table>	$T$	Periode	[s]	$D$	Dämpfung	[1]	$u_{out}$	Ausgang	[V]	$R$	Widerstand	[Ω]	$C$	Kapazität	[F]
$T$	Periode	[s]															
$D$	Dämpfung	[1]															
$u_{out}$	Ausgang	[V]															
$R$	Widerstand	[Ω]															
$C$	Kapazität	[F]															

## 19. OPERATIONSVERSTÄRKER

### 19.2.12. Beschaltung des OPs mit Zweitoren

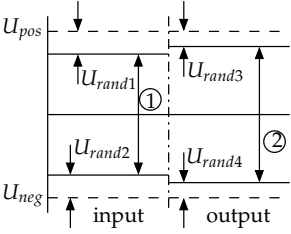
	<p>Gilt nur für invertierenden Verstärker, da sonst kein virtueller Kurzschluss am Ausgang der Zweitore ist!</p> $A(s) = \frac{u_{in}}{u_{out}} = -\frac{Z_F(s)}{Z_1(s)}$ $Z(s) = \frac{u_{in}(s)}{i_{ok}(s)}$	<table> <tr> <td><math>A</math></td><td>Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>u_{in}</math></td><td>Eingang</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>u_{out}</math></td><td>Ausgang</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>Z</math></td><td>Impedanz</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> <tr> <td><math>i_{ok}</math></td><td>Kurzschlussstrom</td><td>[A]</td></tr> <tr> <td><math>s</math></td><td>Laplace Operator</td><td>[1]</td></tr> </table>	$A$	Verstärkung	[1]	$u_{in}$	Eingang	[V]	$u_{out}$	Ausgang	[V]	$Z$	Impedanz	[ $\Omega$ ]	$i_{ok}$	Kurzschlussstrom	[A]	$s$	Laplace Operator	[1]
$A$	Verstärkung	[1]																		
$u_{in}$	Eingang	[V]																		
$u_{out}$	Ausgang	[V]																		
$Z$	Impedanz	[ $\Omega$ ]																		
$i_{ok}$	Kurzschlussstrom	[A]																		
$s$	Laplace Operator	[1]																		

#### Häufig verwendete Zweitore

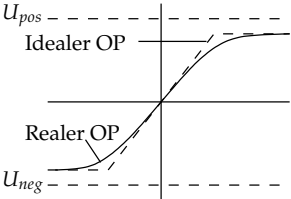
	$\frac{R}{1 + sRC}$	<div><div><math>R</math></div><div>Kapazität</div><div>[F]</div></div> <div><div><math>C</math></div><div>Widerstand</div><div>[<math>\Omega</math>]</div></div> <div><div><math>Z</math></div><div>Impedanz</div><div>[<math>\Omega</math>]</div></div> <div><div><math>s</math></div><div>Laplace Operator</div><div>[1]</div></div>
	$\frac{1}{sC}(1 + sRC)$	
	$(R_1 + R_2) \frac{1 + s \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}}{1 + sR_2 C}$	
	$R(2 + sRC)$	
	$\frac{1}{sC} \frac{1 + s2RC}{sRC}$	
	$R_2 \frac{1 + s2R_1 C_1}{1 + s2R_1 C_1 + s^2 R_1 R_2 C_1^2}$	
	$\frac{R_2(1 + s2R_1 C_1)}{1 + s(2R_1 C_2 + R_2 C_2) + s^2 R_1 R_2 C_1 (C_1 + 2C_2)}$	

## 19.3. Realer Operationsverstärker

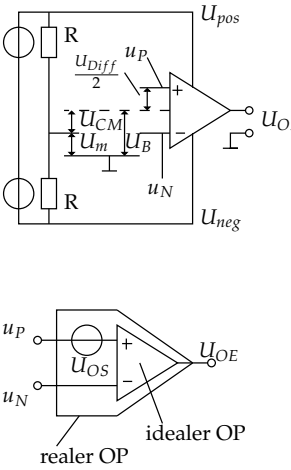
### 19.3.1. Ein- und Ausgangsspannungsbereich

 <p>1: Eingangsspannungsbereich 2: Ausgangsspannungsbereich</p>	<p>input rail to rail (IRR): <math>U_{rand1}, U_{rand2} = 0</math></p> <p>output rail to rail (ORR): <math>U_{rand3}, U_{rand4} = 0</math></p>	<p><math>U_{rand}</math> Randspannung [V] <math>U_{pos}</math> Positive Speisespannung [V] <math>U_{neg}</math> Negative Speisespannung [V]</p>
--	--	---

### 19.3.2. Übertragungskennlinie

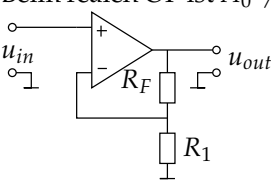
	<p><math>U_O = A_O U_{Diff}</math></p> <p><math>A_O = \frac{dU_O}{dU_D}</math></p>	<p><math>U_O</math> Ausgangsspannung [V] <math>U_{Diff}</math> Differenzspannung [V] <math>A_O</math> Open Loop Verstärkung [1]</p>
--	--	---

### 19.3.3. Gleichtaktfehler (Common Mode Error)

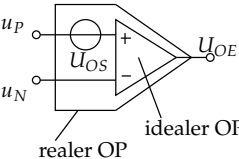
	<p><math>U_m = \frac{U_{pos} + U_{neg}}{2}</math></p> <p><math>U_B = \frac{U_P + U_N}{2}</math></p> <p><math>U_{CM} = U_B - U_m</math></p> <p><math>U_{OS} = \frac{ U_{CM} }{CMRR}</math></p> <p><math>U_{OE} =  U_{OS}  A_{pos}</math></p> <p><math>U_{OE} = A_O \left( U_{Diff} + \frac{U_{CM}}{CMRR} + \frac{U_m}{A_O} \right)</math></p> <p><math>CMRR_{max} = \frac{U_{Diff}}{U_{CM}} = \frac{U_{Diff} + 1}{4\epsilon}</math></p>	<p><math>U_m</math> Mittenspan. [V] <math>U_B</math> Biasspan. [V] <math>U_{CM}</math> Common Mode Spannung [V] <math>U_{OS}</math> Offsetspannung [V] <math>U_{pos}</math> Speisespannung [V] <math>U_{neg}</math> Speisespannung [V] <math>U_P</math> Spannung am pos. Eingang [V] <math>U_N</math> Spannung am neg. Eingang [V] <math>A_O</math> Open Loop Verstärkung [1] <math>CMRR</math> Gleichtaktunterdrückung [1] <math>\epsilon</math> Widerstandstoleranz [1]</p>
---	--	---

## 19. OPERATIONSVERSTÄRKER

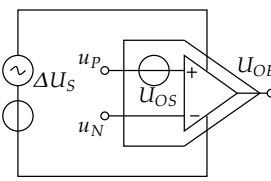
### 19.3.4. Effektive, geschlossene Verstärkung

<p>Beim realen OP ist <math>A_0 \neq \infty</math></p> 	<p>Nicht invertierend:</p> $\frac{1}{ A_{Clreal} } = \frac{1}{ A_{Clid} } + \frac{1}{ A_0 }$ <p>Invertierend:</p> $\frac{1}{ A_{Clreal} } = \frac{1}{ A_{Clid} } + \frac{1}{ \eta A_0 }$ $\eta = \frac{R_F}{R_F + R_1}$	<p><math>A_{Clreal}</math> Effektive Verstärkung real [1]</p> <p><math>A_{Clid}</math> Closed Loop Verstärkung ideal [1]</p> <p><math>A_O</math> Open Loop Verstärkung [1]</p> <p><math>R</math> Widerstand [<math>\Omega</math>]</p>
--	---	---

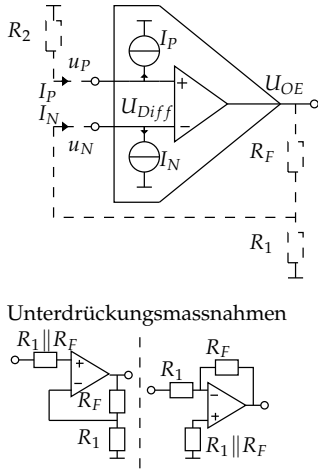
### 19.3.5. Offsetfehler

	$U_{OE} = U_{OS} A_{pos}$ $U_{OE} = U_{OS} \left( 1 + \frac{R_F}{R_1} \right)$	<p><math>U_{OE}</math> Offset-Fehler-Spannung [V]</p> <p><math>U_{OS}</math> Offsetspannung [V]</p> <p><math>A_{pos}</math> pos. Verstärkung (DC) [1]</p> <p><math>R_F, R_1</math> siehe Seite 151 [<math>\Omega</math>]</p>
--	--	--

### 19.3.6. Versorgungsspannungsfehler (Power supply error)

	$U_{OS} = \frac{\Delta U_S}{PSRR}$ $U_{OE} =  U_{OS}  A_{pos}$	<p><math>U_S</math> Speisung [V]</p> <p><math>U_{OE}</math> Offset-Fehler-Spannung [V]</p> <p><math>U_{OS}</math> Offsetspannung [V]</p> <p><math>A_{pos}</math> pos. Verstärkung [1]</p> <p><math>PSRR</math> Unterdrückung der Speisungsspannungseinflüsse [1]</p>
---	--	--

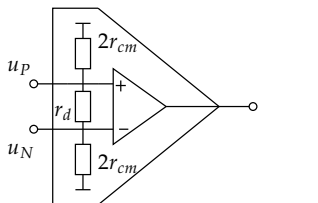
### 19.3.7. Eingangsströme (Bias- und Offsetstrom)

 <p>Unterdrückungsmaßnahmen</p>	$I_{OS} =  I_P - I_N $ $I_B = \frac{I_P + I_N}{2}$ $U_{OE} =  -I_P R_2 A_{pos} + I_N R_F $ <p>Bester Fall (Einfluss <math>I_B = 0</math>):</p> $R_2 = R_F \parallel R_1$ $\Downarrow$ $U_{OE} =  -I_{OS} R_F $	$I_{OS}$ Offsetstrom [A] $I_{P,N}$ Strom am pos, neg Eingang [A] $I_B$ Biasstrom [A] $U_{OE}$ Offset-Fehler-Spannung [V] $A_{pos}$ pos. Verstärkung [1] $R_{1,2}$ Widerstand nach GND [ $\Omega$ ]
--	--	---

### 19.3.8. Kombination der statischen Fehler

	$U_{OE} = A_{pos} ( \text{Offsetfehler}  +  \text{Versorgungsspannungsfehler}  +  \text{Gleichtaktfehler} ) + \text{Eingangsstromfehler}$ $U_{OE} = A_{pos} \left[  U_{OS}  + \left  \frac{\Delta U_S}{PSRR} \right  + \left  \frac{\Delta U_{CM}}{CMRR} \right  \right] + *$ <p>Worst-Case:</p> $* = \left( I_N R_F - I_P R_2 \frac{R_F + R_1}{R_1} \right)$ <p>Bei unterdrücktem Biasstrom - Fehler:</p> $* =  I_{OS}  R_F$	$I_{OS}$ Offsetstrom [A] $I_{P,N}$ Strom am pos, neg Eingang [A] $I_B$ Biasstrom [A] $U_{OE}$ Offset-Fehler-Spannung [V] $A_{pos}$ pos. Verstärkung [1]
--	---	---

### 19.3.9. Dynamischer Eingangswiderstand

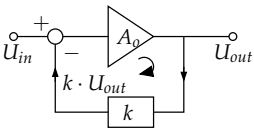
	<p>Messung bei verbundenen Eingängen:</p> $r_{cm} = 2r_{cm} \parallel 2r_{cm}$	$r_d$ Dynamischer Widerstand [ $\Omega$ ] $r_{cm}$ Common Mode Resistance [ $\Omega$ ]
---	--	---

### 19.3.10. Frequenzgang

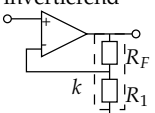
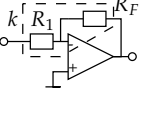
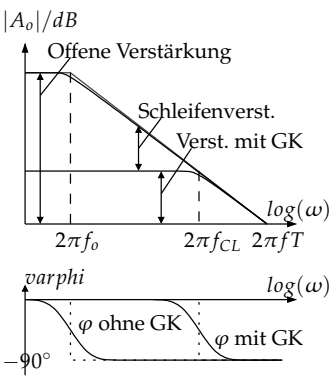
	<p>Knick:</p> $f_0 : A_{OL} = A_{DC} - 3dB$ <p>( ca. 100 Hz in Grafik )</p> $f_T : A_{OL} = 0dB = 1$ <p>( ca. <math>10^7</math> Hz in Grafik )</p> $f_0 = \frac{f_T}{A_0}$ <p>Der Verstärkungsabfall beträgt - 20 <math>\frac{dB}{Dec}</math></p> $A_{CLreal}(s) = \frac{A_{CLDC}}{1 + sT_{neu}}$ $A_{CLDC} = \frac{A_{OLDC}}{1 + k(s)A_{OLDC}}$ $T_{neu} = \frac{T_0}{1 + k(s)A_{OLDC}}$ $\omega_{neu} = \omega_0[1 + k(s)A_{OLDC}]$ <p>Nichtinvertierender Verstärker:</p> $k(s) = \frac{R_1 + R_F}{R_1}$ $f_{neu} = f_0(1 + kA_{OLDC})$ $f_{neu}A_{CL}^+ = GBP (= f_T)$ $f_{neu} = f_0A_{OLDC}$ <p>Invertierenden Verstärker:</p> $f_{neu} = k \cdot BGP = \frac{GBP}{A_{CL}^- + 1}$ $f_{neu}(A_{CL}^- + 1) = GBP (= f_T)$ $f_{neu} = \frac{1}{2}f_0A_{OLDC}$	<p><math>f_0</math> Kleinsignal Bandbreite [Hz]</p> <p><math>f_T</math> Transittfrequenz, Verstärkungs-Bandbreiten-Produkt [Hz]</p> <p><math>A_{OL}</math> Open Loop Gain [1]</p> <p><math>A_{CL}</math> Closed Loop Gain [1]</p> <p><math>A_{CL}^+</math> <math>A_{CL}</math> nichtinvertierender Verstärker [1]</p> <p><math>s</math> Laplace Operator [1]</p> <p><math>T_{neu}</math> Closed Loop Zeitkonst. [s]</p> <p><math>k</math> Faktor des Spannungsteilers [1]</p> <p><math>\omega</math> Knickfrequenz [Hz]</p> <p><math>f_{neu}</math> Knickfrequenz [Hz]</p> <p><math>GBP</math> Verstärkungs Bandbreitenprodukt [1]</p>
--	--	--

# 20. Gegengekoppelte Verstärker

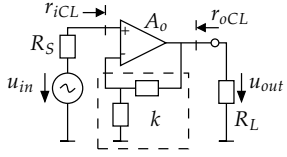
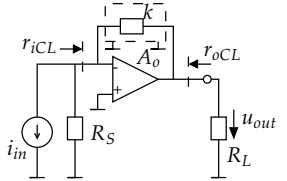
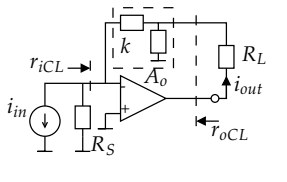
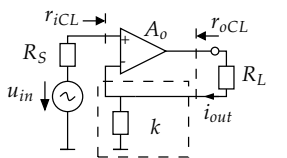
## 20.1. Mit- und Gegenkopplung

	<p>Gegenkopplung:</p> $A_{CL} = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{A_o}{1 + kA_o}$ <p>Mitkopplung:</p> $A_{CL} = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{A_o}{1 - kA_o}$	<p><math>A_{CL}</math> Closed Loop [1] Verstärkung</p> <p><math>A_o</math> Open Loop [1] Verstärkung</p> <p><math>U</math> Spannung [V]</p> <p><math>k</math> Faktor [1]</p>
---	---	--

### 20.1.1. Gegenkopplung beim OP

<p>Nicht-invertierend</p>  <p>Invertierend</p>  <p>Bodeplot:</p> 	<p>Ideal:</p> $A_{CL} = \frac{nA_o}{1 + kA_o}$ <p>Nicht invertierend:</p> $n = 1$ $ A_{CLideal}  = \frac{R_F + R_1}{R_1} = \frac{1}{k}$ <p>Invertierend:</p> $n = \frac{R_F}{R_1 + R_F} \quad k = \frac{R_1}{R_1 + R_F}$ $ A_{CLideal}  = \frac{R_F}{R_1}$ <p>Real:</p> $A_{CLreal} = nA_o \parallel A_{CLideal}$	<p><math>A_{CL}</math> Closed Loop [1] Verstärkung</p> <p><math>A_o</math> Open Loop [1] Verstärkung</p> <p><math>k</math> GK-Faktor [1]</p> <p><math>n</math> Faktor [1]</p> <p><math>R</math> Widerstand [<math>\Omega</math>]</p>
--	---	--

## 20.2. Gegenkopplungsarten

<p>Serie-Parallel</p> 	<p>Eingang: Seriell Ausgang: Parallel</p> $r_{iCL} \rightarrow \infty \quad r_{oCL} \rightarrow 0$ $r_{iCL} = r_i(1 + kA_o)$ $r_{oCL} = \frac{u_{out}}{i_{out}} = \frac{r_o}{1 + kA_o}$	<p><math>A_o</math> Open Loop [1] Verstärkung</p> <p><math>k</math> Faktor [1]</p> <p><math>r_i</math> Open Loop r- [Ω] Eingang</p> <p><math>r_o</math> Open Loop r- [Ω] Ausgang</p> <p><math>r_{iCL}</math> Closed Loop [Ω] r-Eingang</p> <p><math>r_{oCL}</math> Closed Loop [Ω] r-Ausgang</p> <p><math>u_{out}</math> u-Ausgang [V]</p> <p><math>i_{out}</math> i-Ausgang [A]</p> <p><math>R_S</math> Quell- [Ω] Widerst.</p> <p><math>R_L</math> Last-Widerst. [Ω]</p>
<p>Parallel-Parallel</p> 	<p>Eingang: Parallel Ausgang: Parallel</p> $r_{iCL} \rightarrow 0 \quad r_{oCL} \rightarrow 0$ $r_{iCL} = \frac{r_i}{1 + kA_o}$ $r_{oCL} = \frac{u_{out}}{i_{out}} = \frac{r_o}{1 + kA_o}$	
<p>Parallel-Serie</p> 	<p>Eingang: Parallel Ausgang: Seriell</p> $r_{iCL} \rightarrow 0 \quad r_{oCL} \rightarrow \infty$ $r_{iCL} = \frac{r_i}{1 + kA_o}$ $r_{oCL} = \frac{u_{out}}{i_{out}} = r_o(1 + kA_o)$	
<p>Serie-Serie</p> 	<p>Eingang: Seriell Ausgang: Seriell</p> $r_{iCL} \rightarrow \infty \quad r_{oCL} \rightarrow \infty$ $r_{iCL} = r_i(1 + kA_o)$ $r_{oCL} = \frac{u_{out}}{i_{out}} = r_o(1 + kA_o)$	

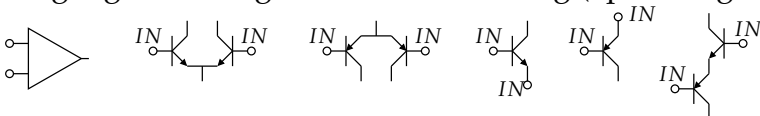


### 20.2.1. Bestimmung der Gegenkopplungsart

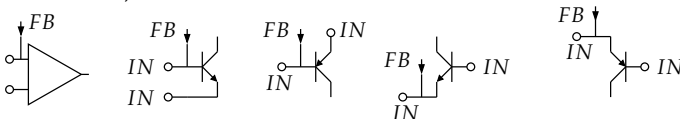
1. Forwärtspfad, Rückwärtspfad und Gegenkopplungsschleife einzeichnen.
2. Anzahl Inversionen im Vorwärtspfad ( $\Rightarrow$  Invertierend oder nicht invertierend) bzw. in der Schleife bestimmen ( $\Rightarrow$  Gegenkopplung bei ungerade Anzahl bzw. Mittkopplung bei gerader Anzahl).
3. Knoten (out, in+ und in- ) der Äquivalenten OP-Schaltung bestimmen.
4. Äquivalenten OP-Schaltung zeichnen.

### 20.2.2. Eingangsschaltungen

Eingangsschaltungen bei Serieschaltung (Spannungsaddition)

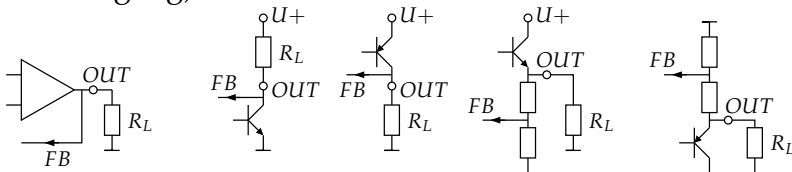


Eingangsschaltungen bei Parallelschaltung von Verstärkereingang und Ausgang (Stromaddition)

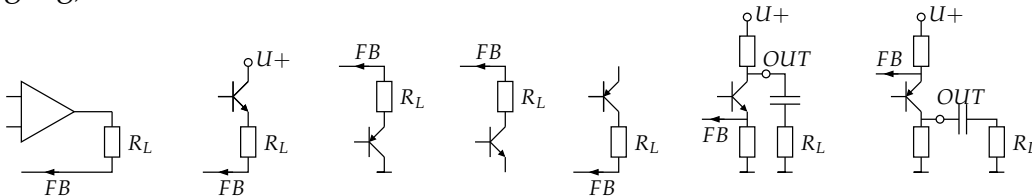


### 20.2.3. Ausgangsschaltungen

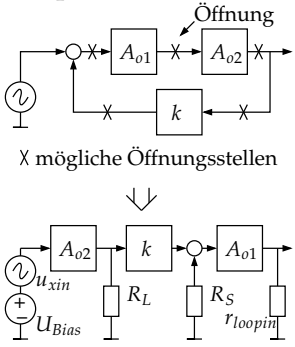
Ausgangsschaltungen bei Parallelschaltung von Last und Eingang (Spannungsabnahme am Ausgang)



Ausgangsschaltungen bei Serieschaltung von Last und Eingang (Stromabnahme am Ausgang)



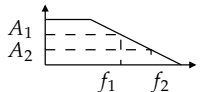
## 20.3. Schleifenverstärkung

<p>Beispiel:</p>  <p>X mögliche Öffnungsstellen</p> <p>Öffnung</p>	$A_L = kA_o = \frac{u_{xout}}{u_{xin}}$ <p>Gegenkopplungsgrad:</p> $1 + A_L = 1 + kA_L$ <p><math>U_{Bias}</math> legt den Arbeitspunkt fest. Es soll eine Trennstelle gewählt werden bei der <math>r_{loopout} \gg r_{loopin}</math> gilt <math>\Rightarrow</math> Belastung des Schleifenausganges kann vernachlässigt werden.</p>	<table> <tr> <td><math>A_L</math></td><td>Schleifen-Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>A_o</math></td><td>Open Loop Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>U</math></td><td>Spannung</td><td>[V]</td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>Faktor</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>R</math></td><td>Widerstand</td><td>[<math>\Omega</math>]</td></tr> </table>	$A_L$	Schleifen-Verstärkung	[1]	$A_o$	Open Loop Verstärkung	[1]	$U$	Spannung	[V]	$k$	Faktor	[1]	$R$	Widerstand	[ $\Omega$ ]
$A_L$	Schleifen-Verstärkung	[1]															
$A_o$	Open Loop Verstärkung	[1]															
$U$	Spannung	[V]															
$k$	Faktor	[1]															
$R$	Widerstand	[ $\Omega$ ]															

## 20.4. Wirkung der GK auf die Sensivität der Verstärkung

<p>Die Sensitivität <math>S_x^N</math> ist ein Mass für die Empfindlichkeit einer Schaltungseigenschaft N gegenüber Schwankungen eines Parameters x.</p>	$S_x^N = \frac{\frac{dN}{N}}{\frac{dx}{x}}$ $S_{A_o}^{A_{CL}} = \frac{\frac{dA_{CL}}{A_{CL}}}{\frac{dA_o}{A_o}} = \frac{A_o}{A_{CL}} \frac{dA_{CL}}{dA_o}$ $S_{A_o}^{A_{CL}} = \frac{1}{1 + kA_o}$	<table> <tr> <td><math>S</math></td><td>Sensitivität</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>A_L</math></td><td>Schleifen-Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>A_o</math></td><td>Open Loop Verstärkung</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>k</math></td><td>Faktor</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>x</math></td><td>veränderter Parameter</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td><math>N</math></td><td>Beeinflusste Grösse</td><td>[...]</td></tr> </table>	$S$	Sensitivität	[1]	$A_L$	Schleifen-Verstärkung	[1]	$A_o$	Open Loop Verstärkung	[1]	$k$	Faktor	[1]	$x$	veränderter Parameter	[...]	$N$	Beeinflusste Grösse	[...]
$S$	Sensitivität	[1]																		
$A_L$	Schleifen-Verstärkung	[1]																		
$A_o$	Open Loop Verstärkung	[1]																		
$k$	Faktor	[1]																		
$x$	veränderter Parameter	[...]																		
$N$	Beeinflusste Grösse	[...]																		

## 20.5. Das Verstärkungs-Bandbreiten-Produkt

<p>Für alle Punkte die auf einer Amplitudengeraden mit einer Neigung von <math>\pm 20 \frac{dB}{Dek}</math> liegen gilt das Gesetz vom konstanten Verstärkungs-Bandbreiten-Produkt. Siehe auch S. 115</p> 	$Af = f_T = GBP$ $A_1 f_1 = A_2 f_2$ $A_{oDC} = f_o = GBP$	$f_T$ Transitfrequenz $\left[\frac{1}{s}\right]$ = Amplitude $\cap$ 0dB-Achse $f$ Frequenz $\left[\frac{1}{s}\right]$ $A$ Verstärkung $[1]$ $A_{oDC}$ Open-Loop DC-Gain $[1]$
---	--	---

**Teil V.**

**Digitale Signalverarbeitung**

# 21. Stochastische Signale

## 21.1. Allgemein

hallo	$M = Fr$	$r$ Radius $[m]$
-------	----------	------------------

## 22. Abtastung

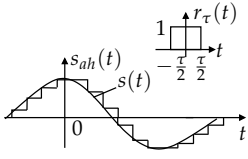
### 22.1. Ideale Abtastung

<p><b>Zeitbereich:</b></p> <p><b>Frequenzbereich:</b></p>	$s_a(t) = s(t)T\delta_p(t)$ $s_a(t) = Ts(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$ $s_a(t) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT)\delta(t - mT)$ $S_a(\omega) = S(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_c)$ $S_a(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_c)$ $\omega_c = \frac{2\pi}{T}$	<table> <tr> <td><math>s</math></td><td>Signal</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td><math>s_a</math></td><td>s abgetastet</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td><math>S</math></td><td>Spektrum von s</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>m</math></td><td>m-te Periode</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td>[<math>\frac{1}{s}</math>]</td></tr> <tr> <td><math>\omega_c</math></td><td>Abtastfrequenz</td><td>[<math>\frac{1}{s}</math>]</td></tr> </table>	$s$	Signal	[...]	$s_a$	s abgetastet	[...]	$S$	Spektrum von s	[...]	$t$	Zeit	[s]	$T$	Periode	[s]	$m$	m-te Periode	[1]	$\omega$	Kreisfrequenz	[ $\frac{1}{s}$ ]	$\omega_c$	Abtastfrequenz	[ $\frac{1}{s}$ ]
$s$	Signal	[...]																								
$s_a$	s abgetastet	[...]																								
$S$	Spektrum von s	[...]																								
$t$	Zeit	[s]																								
$T$	Periode	[s]																								
$m$	m-te Periode	[1]																								
$\omega$	Kreisfrequenz	[ $\frac{1}{s}$ ]																								
$\omega_c$	Abtastfrequenz	[ $\frac{1}{s}$ ]																								

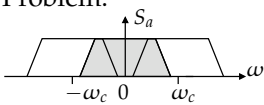
### 22.2. Flat Top Sampling

<p>Signal wird verzerrt durch <math>G_\tau(\omega)</math></p>	$s_a(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT)r_\tau(t - mT)$ $S_a(\omega) = G_\tau(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_c)$ $G_\tau(\omega) = \frac{1}{T}R_\tau(\omega) = \frac{\tau}{T} \frac{\sin(\frac{\tau}{2}\omega)}{\frac{\tau}{2}\omega}$ <p>Je kürzer die Abtast-Pulse desto breiter die <math>\frac{\sin(x)}{x}</math> Kurve.</p>	<table> <tr> <td><math>s</math></td><td>Signal</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td><math>s_a</math></td><td>s abgetastet</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td><math>S</math></td><td>Spektrum von s</td><td>[...]</td></tr> <tr> <td><math>t</math></td><td>Zeit</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>T</math></td><td>Periode</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>\tau</math></td><td>Rechteckbreite</td><td>[s]</td></tr> <tr> <td><math>m</math></td><td>m-te Periode</td><td>[1]</td></tr> <tr> <td><math>\omega</math></td><td>Kreisfrequenz</td><td>[<math>\frac{1}{s}</math>]</td></tr> </table>	$s$	Signal	[...]	$s_a$	s abgetastet	[...]	$S$	Spektrum von s	[...]	$t$	Zeit	[s]	$T$	Periode	[s]	$\tau$	Rechteckbreite	[s]	$m$	m-te Periode	[1]	$\omega$	Kreisfrequenz	[ $\frac{1}{s}$ ]
$s$	Signal	[...]																								
$s_a$	s abgetastet	[...]																								
$S$	Spektrum von s	[...]																								
$t$	Zeit	[s]																								
$T$	Periode	[s]																								
$\tau$	Rechteckbreite	[s]																								
$m$	m-te Periode	[1]																								
$\omega$	Kreisfrequenz	[ $\frac{1}{s}$ ]																								

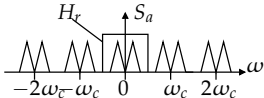
## 22.3. Sample and Hold

	<p>Entspricht Flat Top Sampling (S. 168) bei <math>\tau = T</math></p> <p>Die <math>\frac{\sin(x)}{x}</math> Kurve hat die Null-durchgänge bei <math>k\frac{2\pi}{T}, k = \{1, 2, \dots\}</math></p>	<p><math>T</math> Periode [s]</p> <p><math>\tau</math> Rechteckbreite [s]</p>
---	--	---

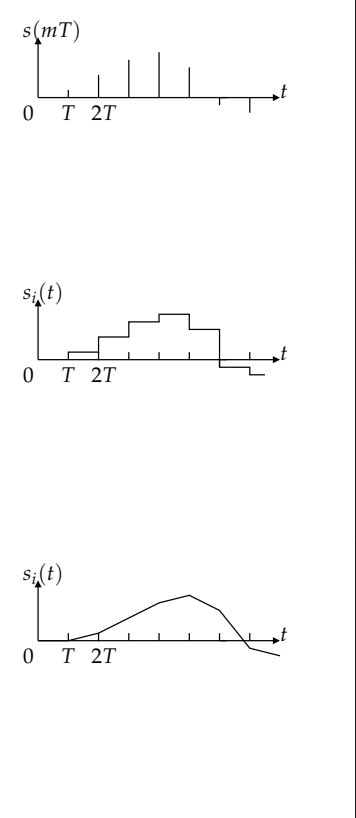
## 22.4. Abtasttheorem

<p>Problem:</p>  <p><math>\Rightarrow</math> Rekonstruktion ist nicht möglich.</p>	<p><math>\omega_c &gt; 2\omega_{max}</math></p> <p><math>\Rightarrow</math> Praktisch muss immer ein analoger Tiefpass vorgeschaltet werden.</p>	<p><math>\omega_c</math> Abtastfrequenz <math>\left[\frac{1}{s}\right]</math></p> <p><math>\omega_{max}</math> max Frequenz <math>\left[\frac{1}{s}\right]</math> in <math>s(t)</math></p>
---	--	--

## 22.5. Rekonstruktion

<p>Ist das Abtasttheorem erfüllt, so ist das ursprüngliche Signal exakt reproduzierbar.</p> 	$s_r(t) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT)h_r(t - mT)$ $s_r(t) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT)\delta(t - mT) * h_r(t)$ $h_r(t) = \frac{\omega_c}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{\omega_c}{2}t\right)}{\frac{\omega_c}{2}t}$	<p><math>s_r</math> Signal re- [...] konst.</p> <p><math>h_r</math> Stossantw. [...] Rekonstruktions-Tiefpass</p> <p><math>t</math> Zeit [s]</p> <p><math>T</math> Periode [s]</p> <p><math>m</math> m-te Periode [1]</p> <p><math>\omega_c</math> Abtastfrequenz <math>\left[\frac{1}{s}\right]</math></p>
---	---	---

## 22.5.1. Interpolation

	$s_i(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(mT)h_i(t - mT)$ $S_i(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_c)H_i(\omega)$ <p>Halteglied nullter Ordnung</p> $h_i(t) = \text{Rechteck}, h = 1, \tau = T$ $H_i(\omega) = T \frac{\sin\left(\frac{T}{2}\omega\right)}{\frac{T}{2}\omega} e^{-j\frac{T}{2}\omega}$ <p>Lineare Interpolation</p> $h_i(t) = \text{Dreieck}, h = 1, \tau = 2T$ $H_i(\omega) = T \left( \frac{\sin\left(\frac{T}{2}\omega\right)}{\frac{T}{2}\omega} \right)^2 e^{-jT\omega}$	<p><math>s_i</math> Signal interpoliert [...]</p> <p><math>h_i</math> Interpolationsfunktion [1]</p> <p><math>t</math> Zeit [s]</p> <p><math>T</math> Periode [s]</p> <p><math>\tau</math> Pulsbreite [s]</p> <p><math>m, k</math> m, k-te Periode [1]</p> <p><math>\omega</math> Kreisfrequenz [<math>\frac{1}{s}</math>]</p> <p><math>\omega_c</math> Abtastfrequenz [<math>\frac{1}{s}</math>]</p>
--	--	---

## 22.6. Energie und Leistung bandbegrenzter Signale

<p>Falls das Abtasttheorem, <math>T &lt; \frac{1}{2}f_{max}</math> eingehalten wird, hat das abgetastete Signal die selbe Energie bzw. Leistung wie das Original. Siehe Parsevalsches Theorem S. 188</p>	$W = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$ $W = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} s^2(mT)$ $P = \frac{1}{T_{per}} \int_0^{T_{per}} s^2(t)dt$ $P = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} s^2(mT)$ $N = \frac{T_{per}}{T}$	<p><math>W</math> Energie [Ws]</p> <p><math>P</math> Leistung [W]</p> <p><math>s</math> Signal [...]</p> <p><math>t</math> Zeit [s]</p> <p><math>T</math> Periode [s]</p> <p><math>T_{per}</math> Periodenintervall [s]</p> <p><math>m</math> m-te Periode [1]</p> <p><math>\omega_c</math> Abtastfrequenz [<math>\frac{1}{s}</math>]</p> <p><math>N</math> Abtastwertzahl [1]</p>
--	---	--



**Teil VI.**  
**Mathematik**

## 23. Grundlagen

## 23.1. Allgemeines

### 23.1.1. Binome

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$$

$$(a^3 \pm b^3) = (a \pm b) (a^2 \mp ab + b^2)$$

[illegible]

### 23.1.2. Faktorzerlegungen

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

für n gerade:

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} - b^{n-1})$$

für n ungerade:

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$s^2 + 1 = (s - j)(s + j)$$

**23.1.3. Quadratische Gleichung**

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**23.1.4. Arithmetische Folge**

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad d \text{ const.}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$s_n = n \frac{a_1 + a_n}{2} = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} d$$

**23.1.5. Geometrische Folge**

$$a_{n+1}/a_n = q, \quad q \text{ const.}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q}, \quad \text{falls } |q| < 1$$

**23.1.6. Partialbruchzerlegung**

$$r(z) = \frac{r_1(z)}{(z-a)(z-b)^3((z-c)^2 + d^2)^3}$$

$$r(z) = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta_1}{z-b} + \frac{\beta_2}{(z-b)^2} + \frac{\beta_3}{(z-b)^3} +$$

$$\frac{\gamma_1 z + \delta_1}{(z-c)^2 + d^2} + \frac{\gamma_2 z + \delta_2}{((z-c)^2 + d^2)^2} + \frac{\gamma_3 z + \delta_3}{((z-c)^2 + d^2)^3}$$

**23.2. Matrizen und Determinanten****23.2.1.  $2 \times 2$  Matrizen**

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$

Achtung:  $AB \neq BA$  !

Inverse: (falls  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ )

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

## 23. GRUNDLAGEN

### 23.2.2. $3 \times 3$ Matrizen

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$
$$= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

### 23.2.3. Transponierte einer Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

## 23.3. Vektorrechnung

### 23.3.1. Grundlagen

#### Skalarprodukt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = xy \cos \alpha$$

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

#### Skalare Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

$$b_a = \vec{b} \vec{e}_a$$

#### Vektorielle Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

$$\vec{b}_a = b_a \vec{e}_a = (\vec{b} \vec{e}_a) \vec{e}_a$$

#### Vektorprodukt

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a b \sin \alpha$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [a_1, a_2, a_3] \times [b_1, b_2, b_3] = \left[ \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \right]$$

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

**Steigung eines Vektors**

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\tan \alpha = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

**23.3.2. Lineare Abbildungen**

**Drehung der XY-Ebene um den Ursprung mit Drehwinkel  $\varphi$**

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

**Spiegelung der XY-Ebene an der Geraden  $g$  durch den Ursprung mit den Steigungswinkel  $\varphi$**

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

**Drehung des Raumes um die X-Achse**

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

**Drehung des Raumes um die Y-Achse**

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

**Drehung des Raumes um die Z-Achse**

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

**23.4. Trigonometrie****23.4.1. Komplementwinkel**

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\tan \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cot \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

## 23. GRUNDLAGEN

### 23.4.2. Sinussatz

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

wobei  $r$  = Umkreisradius

### 23.4.3. Cosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

## 23.5. Goniometrie

### 23.5.1. Serien (Lösungsmengen)

$$\alpha_1 = \arcsin x, \quad \alpha_2 = \pi - \alpha_1$$

$$\alpha_{1n} = \alpha_1 + n2\pi, \quad \alpha_{2n} = \alpha_2 + n2\pi$$

$$\pm \alpha = \arccos x, \quad \alpha_n = \pm \alpha + n2\pi$$

$$\alpha_0 = \arctan x, \quad \alpha_n = \alpha_0 + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

### 23.5.2. Potenzen

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{1}{8} (\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3)$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{1}{8} (\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3)$$

**23.5.3. Additionstheoreme**

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

**23.5.4. Doppelwinkel**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - \sin^2(\alpha)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

**23.5.5. Dreifachwinkel**

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

**23.5.6. Halbwinkel**

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

**23.5.7. Summen und Produkte**

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

**23.5.8. Genaue Funktionswerte**

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\cot \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

**23.6. Logarithmen**

$$\log(u \cdot v) = \log u + \log v$$

$$\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log u - \log v$$

$$\log(u^k) = k \log u$$

$$\log \sqrt[k]{u} = \frac{1}{k} \log u$$

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}$$

**23.7. Komplexe Zahlen****23.7.1. Allgemeines**

$$j^2 = -1, \quad \frac{1}{j} = -j, \quad (-1)^j = \left(e^{j\pi}\right)^j = e^{-\pi}$$

$$\underline{z} \in \mathbb{C}, \quad \bar{\underline{z}} : \text{konjugiertkomplex}$$

$$\text{karthesisch} : \underline{z} = a + jb, \quad \bar{\underline{z}} = a - jb$$

$$\text{polar} : \underline{z} = r \cdot e^{j\varphi}, \quad \bar{\underline{z}} = r \cdot e^{-j\varphi}$$

$$\underline{z} = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = r \cdot e^{j\varphi} = a + jb$$

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi$$

$$r = |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \text{I.} & \text{Quadrant} & \arctan \frac{b}{a} \\ \text{II.} & \text{Quadrant} & \arctan \frac{b}{a} + \pi \\ \text{III.} & \text{Quadrant} & \arctan \frac{b}{a} + \pi \\ \text{IV.} & \text{Quadrant} & \arctan \frac{b}{a} + 2\pi \end{cases}$$



**23.7.2. Rechenregeln**

$$(a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = a_1 \pm a_2 + j(b_1 \pm b_2)$$

$$(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + b_1a_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{(a_1 + jb_1)}{(a_2 + jb_2)} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2^2 + b_2^2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi}{n} + j \sin \frac{\varphi}{n} \right)$$

$$\sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n} \ln z} + (n-1) \text{ weitere Lösungen gleichmässig verteilt auf einem Kreis mit Radius } \sqrt[n]{r}$$

**23.7.3. Euler**

$$e^{\pm jkt} = \cos kt \pm j \sin kt$$

$$e^{\pm jk\pi} = (-1)^k, \quad e^{t+j2\pi} = e^t$$

$$\cos kt = \frac{1}{2} (e^{jkt} + e^{-jkt})$$

$$\sin kt = \frac{1}{2j} (e^{jkt} - e^{-jkt})$$

$$\cosh kt = \frac{1}{2} (e^{kt} + e^{-kt})$$

$$\sinh kt = \frac{1}{2} (e^{kt} - e^{-kt})$$

**23.8. Ableiten****23.8.1. Rechenregeln**

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left( \frac{f}{g} \right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$

$$f'^{-1} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

**Elementare Funktionen**

$$\text{pot}'_k x = k \text{pot}_{k-1} x$$

$$\sin' kx = k \cos kx$$

$$\cos' kx = -k \sin kx$$

$$\exp' kx = k \exp kx$$

$$\log' x = \frac{1}{x}$$

$$\ln' |f| = \frac{f'}{f}$$

$$(a^{kx})' = (k \ln a) a^{kx}$$

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

$$\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\cosh' x = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\sinh' x = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{arcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{arsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

**Satz von Bernoulli und de l'Hospital**

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Beispiel:**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

**23.9. Integrieren****23.9.1. Rechenregeln**

$$\int \lambda f = \lambda \int f$$

$$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$$

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

**23.9.2. Substitution**

$$\int f(x) dx$$

Aufstellen der Substitutionsgleichung:

$$u = g(x), \frac{du}{dx} = g'(x), dx = \frac{du}{g'(x)} \quad \text{bzw.} \quad x = h(u), \frac{dx}{du} = h'(u), dx = \frac{h'(u)}{du}$$

(  $u = g(x)$  bzw.  $x = h(u)$  müssen monotone Funktionen sein)

Substitution:

$$\int f(x) dx = \int \varphi(u) du$$

Integration:

$$\int \varphi(u) du = \Phi(u)$$

Rücksubstitution:

$$\int f(x) dx = \int \varphi(u) du = \Phi(u) = \Phi(g(x)) = F(x)$$

**Beispiel:**

$$\int_0^2 x \sqrt{3x^2 + 4} dx$$

$$\text{Subst: } u = 3x^2 + 4 \Leftrightarrow u' = \frac{du}{dx} = 6x$$

## 23. GRUNDLAGEN

Die neuen Grenzen erhalten wir durch Einsetzen der ursprünglichen Grenzen in die Substitutionsgleichung, die Rücksubstitution entfällt:

$$\begin{aligned} 2 &\mapsto 16 \\ 0 &\mapsto 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_4^{16} \sqrt{u} \, du$$

### 23.9.3. Sätze

$$\int_a^b f = - \int_b^a f$$

$$\int_a^b f(t) \, dt = - \int_{-a}^{-b} f(-t) \, dt$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_a^b f(t) = \int_{a+c}^{b+c} f(t-c)$$

$$f \text{ stetig} \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f(b) - \int_a^b f(a) = F(b) - F(a)$$

$$f \text{ stetig in } [a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] \text{ mit } \int_a^b f = (b-a) f(\xi)$$

### 23.9.4. Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen können integriert werden, indem man Division der Polynome durchführt

Beispiel:  $\int \frac{x^2}{x^2+1}$

$$x^2 : (x^2 + 1) = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\int 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \, dx = x + \arctan x$$

### 23.9.5. Rationalisierungsformeln

Für Rationale Funktionen von  $\sin x$  und  $\cos x$

- Beispiel

$$\int \frac{1 + \cos x}{\sin x} dx$$

- Substitution

$$u = \tan x/2$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2} du \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Weitere Rationalisierungsformeln siehe Papula Seite 148

### 23.9.6. Spezielle Integrale

$$\int \text{pot}_k = \frac{1}{k+1} \text{pot}_{k+1}$$

$$\int \exp kx dx = \frac{1}{k} \exp kx$$

$$\int a^{cx} dx = \frac{1}{c \ln a} a^{cx}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \ln |x| dx = x (\ln |x| - 1)$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln |\ln |x||$$

$$\int \log_a |x| dx = x (\log_a |x| - \log_a e)$$

$$\int x^k \ln x dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \left( \ln x - \frac{1}{k+1} \right), \quad k \neq -1, \quad x > 0$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b)$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b)$$

### 23. GRUNDLAGEN

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x|$$

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x|$$

$$\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

$$\int \frac{1}{\cos x} \, dx = \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x)$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x)$$

$$\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x$$

$$\int \cot^2 x \, dx = -\cot x - x$$

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx = \cos \frac{1}{x}$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2)$$

$$\int \operatorname{arccot} x \, dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln (1+x^2)$$

$$\int (ax+b)^k \, dx = \frac{(ax+b)^{k+1}}{a(k+1)}, \quad k \neq -1$$

$$\int (ax^p+b)^k x^{p-1} \, dx = \frac{(ax^p+b)^{k+1}}{ap(k+1)}, \quad k \neq -1, \quad ap \neq 0$$

$$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$$

$$\int \frac{ax+b}{cx+d} \, dx = \frac{ax+b}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln |cx+d|$$

$$\int \frac{x^{p-1}}{ax^p+b} \, dx = \frac{1}{ap} \ln |ax^p+b|, \quad ap \neq 0$$

$$\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \frac{ax+b}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln |cx+d|$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+a^2} dx = x - a \arctan \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{2x}{1-x^2} dx = -\ln |1-x^2|$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left( x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left( x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{|a|}$$

$$\int e^{cx} \sin(ax+b) dx = \frac{e^{cx}}{a^2+c^2} (c \sin(ax+b) - a \cos(ax+b))$$

$$\int e^{cx} \cos(ax+b) dx = \frac{e^{cx}}{a^2+c^2} (c \cos(ax+b) + a \sin(ax+b))$$

$$\int \exp_k \sin_l dx = \frac{\exp_k}{l^2-k^2} (jk \sin_l - l \cos_l)$$

$$\int \exp_k \cos_l dx = \frac{\exp_k}{l^2-k^2} (jk \cos_l - l \sin_l)$$

$$\int x^n \sin kx dx = -\frac{x^n}{k} \cos kx + \frac{n}{k} \int x^{n-1} \cos kx dx \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^n \cos kx dx = +\frac{x^n}{k} \sin kx - \frac{n}{k} \int x^{n-1} \sin kx dx \quad n \in \mathbb{N}$$

## 24. Fourierreihen

### 24.1. Bezeichnungen

Vektorraum der trigonometrischen Polynome:  $\mathbb{P} \subset \mathbb{V}$

$$\mathbb{P} = \{a_0 \cos_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos_k + b_k \sin_k \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

Vektorraum der Exponentialpolynome:  $\mathbb{E} \subset \mathbb{V}$

$$\mathbb{E} = \left\{ \sum_{k=-n}^m c_k \exp_k \mid c_k \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\sin_k = \sin kt$$

$$\cos_k = \cos kt$$

$$\exp_k = e^{jkt}$$

### 24.2. Skalarprodukt

#### 24.2.1. Eigenschaften

$$[a, b] = [b, a]$$

$$[a + b, c] = [a, c] + [b, c]$$

$$[\lambda a, b] = \lambda [a, b]$$

$$[a, a] \geq 0 \quad [a, a] = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

#### 24.2.2. Definitionen in $\mathbb{P}$ und $\mathbb{E}$

$$[f, g] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot g \quad f, g \in \mathbb{P} \text{ und STF}$$

$$[f, g] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot \bar{g} \quad f, g \in \mathbb{E}$$

$$[f, g] = \overline{[g, f]} \quad f, g \in \mathbb{E}$$



**24.2.3. Für orthonormierte Basis**

$$[\cos_k, \sin_l] = 0 \quad k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}$$

$$[\cos_k, \cos_l] = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{N}_0$$

$$[\sin_k, \sin_l] = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{N}$$

$$[\exp_k, \exp_l] = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

**24.3. Norm in  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{E}$** 

$$\|p\| = \sqrt{[p, p]} \quad p \in \mathbb{P} \text{ und } STF$$

$$\|p\|^2 = [p, p] = a_0^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2$$

$$\|e\| = \sqrt{[e, e]} \quad e \in \mathbb{E}$$

$$\|e\|^2 = [e, e] = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

**24.4. Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$[f, g]^2 \leq [f, f] \cdot [g, g]$$

**24.5. Abstand**

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

**24.6. Fourierreihe reell****24.6.1. Fourierkoeffizienten**

$$a_k = [f, \cos_k] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad f \in STF$$

$$b_k = [f, \sin_k] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad b_0 = 0$$

gerade Funktion:

$$g(-t) = g(t) \Rightarrow b_k = 0$$

ungerade Funktion:

$$u(-t) = -u(t) \Rightarrow a_k = 0$$

## 24. FOURIERREIHEN

### 24.6.2. Fourierreihe der Funktion $f \in \mathbb{P}$

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos_k + b_k \sin_k)$$

$$\cos_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad a_0 = [f, \cos_0] \quad b_0 = 0$$

## 24.7. Fourierreihe komplex

### 24.7.1. Fourierkoeffizienten

$$c_0 = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \quad c_{-k} = \overline{c_k}$$

$$c_k = \frac{1}{2} (a_k - j b_k) \quad a_k = 2 \operatorname{Re}(c_k) = c_k + c_{-k}$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + j b_k) \quad b_k = -2 \operatorname{Im}(c_k) = j (c_k - c_{-k})$$

$$c_k = [f, \exp_k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \exp_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jkt} dt$$

### 24.7.2. Fourierreihe der Funktion $f \in \mathbb{E}$

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp_k = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \exp_k + c_{-k} \exp_{-k})$$

## 24.8. Parsevalsches Theorem

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n (a_k \cos_k + b_k \sin_k) \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n (a_k^2 + b_k^2) = \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

Leistung periodischer Signale:

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

## 24.9. Durchgang durch LTI-System

gegeben:  $f(t) = c_k e^{jkt} + c_{-k} e^{-jkt} = a_k \cos_k + b_k \sin_k; \quad H(\omega)$

gesucht:  $T(f(t)) = \tilde{f}$

$$\tilde{f} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt} H(k)$$

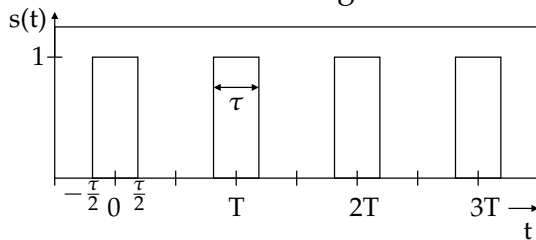
$$\tilde{a}_k = \operatorname{Re}(H(k)(a_k - jb_k))$$

$$\tilde{b}_k = -\operatorname{Im}(H(k)(a_k - jb_k))$$

$$\tilde{f} = \tilde{a}_k \cos_k + \tilde{b}_k \sin_k$$

## 24.10. Fourierkoeffizienten wichtiger periodischer Signale

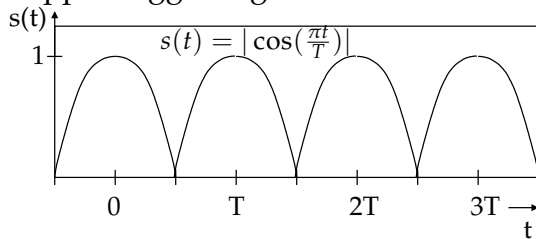
Periodische Rechteckfolge



$$c_n = a_n = \frac{\tau}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\frac{n\pi\tau}{T}}$$

$$b_n = 0$$

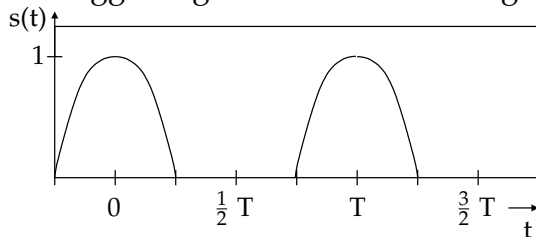
Doppelweggleichgerichtete cos-Schwingung



$$c_n = a_n = \frac{2}{\pi} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

$$b_n = 0$$

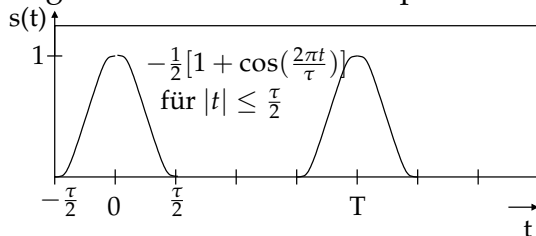
Einweggleichgerichtete cos-Schwingung



$$c_n = a_n = \frac{1}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{1 - n^2}$$

$$b_n = 0$$

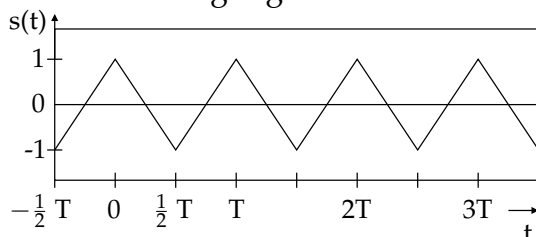
Folge von Raised-Cosine-Impulsen



$$c_n = a_n = \frac{\tau}{2T} \frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\frac{n\pi\tau}{T}} \frac{1}{1 - \left(\frac{n\tau}{T}\right)^2}$$

$$b_n = 0$$

Dreieckschwingung DC-frei

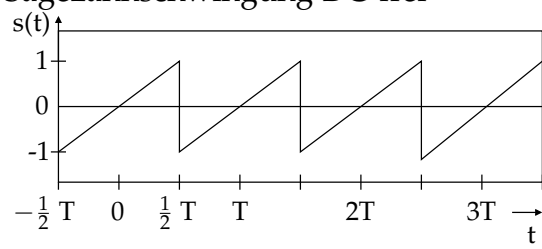


$$c_n = a_n = \frac{2[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^2}, \quad c_0 = 0$$

$$b_n = 0$$

## 24. FOURIERREIHEN

Sägezahnschwingung DC-frei



$$c_n = -jb_n, \quad c_0 = 0$$

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

## 25. Fouriertransformation

$$\begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{\quad} & \tilde{f} = f * h \\
 \mathcal{F} \downarrow & & \uparrow \mathcal{F}^{-1} \\
 F & \xrightarrow{\quad} & \tilde{F} = F \cdot H
 \end{array}$$

### 25.1. Fouriertransformation

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega), \quad \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = f(t)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Wichtig: Sonderfälle beachten! (Division durch 0 in der Lösung separat behandeln)

### 25.2. Fourier-Cosinustransformation

Für gerade Funktionen

$$\mathcal{F}_c(f(t)) = F_c(\omega), \quad \mathcal{F}_c^{-1}(F_c(\omega)) = f(t)$$

$$F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega$$

$$F = 2F_c$$

## 25.3. Fourier-Sinustransformation

Für ungerade Funktionen

$$\mathcal{F}_s(f(t)) = F_s(\omega), \quad \mathcal{F}_s^{-1}(F_s(\omega)) = f(t)$$

$$F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

$$f(t) = \frac{j}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega t d\omega$$

$$F = -2jF_s$$

## 25.4. Faltung

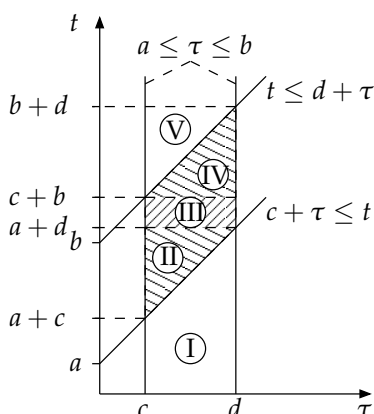
$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

$$f * g = g * f \quad (f * g) * k = f * (g * k)$$

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) = F \cdot G$$

### 25.4.1. Fallunterscheidung bei Definitionsbereichen

$$\begin{aligned} p(t) &= (f * g) \\ D(g(t)) &= [a|b] \\ D(f(t)) &= [c|d] \end{aligned}$$



1. Fall:  $c + b < a + d$

I	$t < a + c:$	$p(t) = 0$
II	$a + c \leq t \leq b + c:$	$p(t) = \int_a^{t-c} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$
III	$b + c \leq t \leq a + d:$	$p(t) = \int_a^b f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$
IV	$a + d \leq t \leq b + d:$	$p(t) = \int_{t-d}^b f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$
V	$b + d < t:$	$p(t) = 0$

2. Fall:  $c + b > a + d$

I	$t < a + c:$	$p(t) = 0$
II	$a + c \leq t \leq a + d:$	$p(t) = \int_a^{t-c} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$
III	$a + d \leq t \leq b + c:$	$p(t) = \int_{t-d}^{t-c} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$
IV	$b + c \leq t \leq b + d:$	$p(t) = \int_{t-d}^b f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$
V	$b + d < t:$	$p(t) = 0$

3. Fall:  $c + b = a + d$

III	$a + d = t = b + c:$	$p(t) = p(a + d)$
-----	----------------------	-------------------

## 25.5. Eigenschaften

$t \mapsto f(t)$	$\omega \mapsto \overline{F(-\omega)}$
$t \mapsto f(-t)$	$\omega \mapsto F(-\omega)$
$t \mapsto f(at)$	$\omega \mapsto \frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$t \mapsto f(t - t_0)$	$\omega \mapsto F(\omega) e^{-j\omega t_0}$
$t \mapsto e^{j\omega_0 t} f(t)$	$\omega \mapsto F(\omega - \omega_0)$
$t \mapsto F(t)$	$\omega \mapsto 2\pi f(-\omega)$
$t \mapsto f^{(n)}(t)$	$\omega \mapsto (j\omega)^n F(\omega)$
$t \mapsto (-jt)^n f(t)$	$\omega \mapsto F^{(n)}(\omega)$
$t \mapsto \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\omega \mapsto \frac{1}{j\omega} F(\omega)$

## 25.6. Fouriertransformationen mit Diracdelta

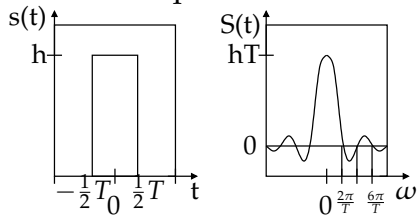
<i>Funktion</i>	<i>Fourier – Transformierte</i>
$t \mapsto \delta(t)$	$\omega \mapsto 1$
$t \mapsto 1$	$\omega \mapsto 2\pi\delta(\omega)$
$t \mapsto \delta(t - t_0)$	$\omega \mapsto e^{-j\omega t_0}$
$t \mapsto e^{j\omega_0 t}$	$\omega \mapsto 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$t \mapsto \sin(\omega_0 t)$	$\omega \mapsto j\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$
$t \mapsto \cos(\omega_0 t)$	$\omega \mapsto \pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$
$t \mapsto \delta^{(n)}(t)$	$\omega \mapsto (j\omega)^n$
$t \mapsto \text{sign}(t)$	$\omega \mapsto \frac{2}{j\omega}$
$t \mapsto \frac{1}{\pi t}$	$\omega \mapsto -j\pi \text{sign}(\omega)$
<i>us</i>	$\omega \mapsto \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

Faltung mit Dirac:

$$(f(t) * \delta(t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t_0 - t) dt = f(t_0)$$

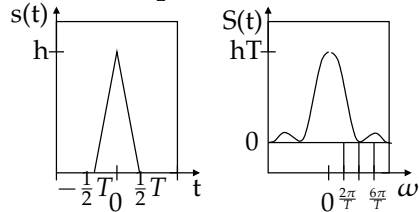
## 25.7. Fouriertransformationen wichtiger Impulse

### Rechteckimpuls



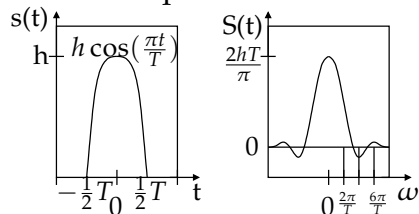
$$S(\omega) = hT \frac{\sin\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{\left(\frac{T\omega}{2}\right)}$$

### Dreieckimpuls



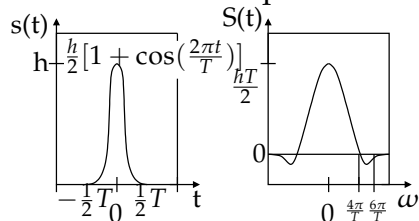
$$S(\omega) = \frac{hT}{2} \left[ \frac{\sin\left(\frac{T\omega}{4}\right)}{\frac{T\omega}{4}} \right]^2$$

### Cosinusimpuls



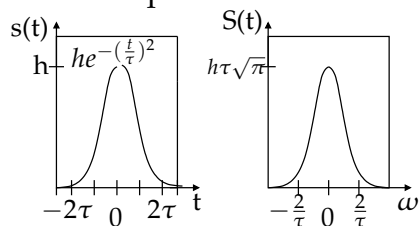
$$S(\omega) = \frac{2hT}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{1 - \left(\frac{T\omega}{\pi}\right)^2}$$

### Raised-Cosine-Impuls



$$S(\omega) = \frac{hT}{2} \frac{\sin\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{\frac{T\omega}{2} \left[ 1 - \left(\frac{T\omega}{2\pi}\right)^2 \right]}$$

### Gauss-Impuls



$$S(\omega) = h\tau\sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4}}$$



## 26. Laplace

$$\begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{\quad} & \tilde{f} = f * g \\
 \mathcal{L} \downarrow & & \uparrow \mathcal{L}^{-1} \\
 F & \xrightarrow{\quad} & \tilde{F} = F \cdot G
 \end{array}
 \quad G = \frac{1}{cp(s)}$$

### 26.1. Laplacetransformation

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s), \quad \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t), \quad s \in \mathbb{C}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad \text{falls } t \geq 0$$

$$f(t) = 0, \quad \text{falls } t < 0$$

## 26.2. Rechenregeln

$$\begin{array}{ll}
t \mapsto f(at) & s \mapsto \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0 \\
t \mapsto \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right) & (s \mapsto F(as)) \\
t \mapsto u(t-a) \cdot f(t-a) & s \mapsto e^{-as} F(s) \quad a > 0 \\
t \mapsto f(t+a) & s \mapsto e^{as} \left( F(s) - \int_0^a f(t) e^{-st} dt \right) \quad a > 0 \\
t \mapsto e^{-bt} f(t) & s \mapsto F(s+b) \quad c \in \mathbb{C} \\
t \mapsto f'(t) & s \mapsto s F(s) - f(0) \\
t \mapsto f^{(2)}(t) & s \mapsto s^2 F(s) - s f(0) - f'(0) \\
t \mapsto f^{(3)}(t) & s \mapsto s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f^{(2)}(0) \\
t \mapsto f^{(n)}(t) & s \mapsto s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0) \\
t \mapsto -t f(t) & s \mapsto F'(s) \\
t \mapsto +t^2 f(t) & s \mapsto F^{(2)}(s) \\
t \mapsto -t^3 f(t) & s \mapsto F^{(3)}(s) \\
t \mapsto (-1)^n t^n f(t) & s \mapsto F^{(n)}(s) \\
t \mapsto \int_0^t f(\tau) d\tau & s \mapsto \frac{1}{s} F(s)
\end{array}$$

## 26.3. Spezielle Laplacetransformationen

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

$$\mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \quad \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{d} e^{ct} \sin ct\right) = \frac{1}{(s-c)^2 + d^2}$$

$$\mathcal{L}\left(e^{ct} \left(\frac{c}{d} \sin dt + \cos dt\right)\right) = \frac{s}{(s-c)^2 + d^2}$$

## 26.4. Faltung

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

$$f * g = g * f \quad f(t) = g(t) = 0 \quad \text{falls } t < 0$$

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) = F \cdot G$$

Die Fallunterscheidung bei eingeschränkten Definitionsbereichen der Funktionen ist die selbe wie bei der Fourier-Theorie in Abschnitt 25.4.1 auf S. 192

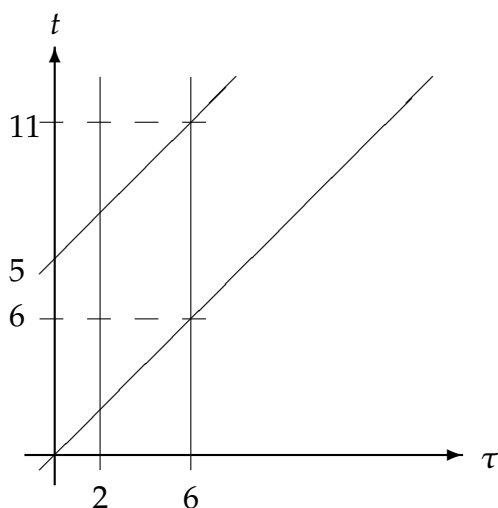
**Beispiel:**

Geg:  $g(t) = u(t) - u(t - 5)$  und  $f(t) = u(t - 2) - u(t - 6)$

Ges:  $\tilde{f} = (f * g)(t)$

$$\tilde{f} = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

$$g(t - \tau) = 1 \quad \text{falls} \quad 0 \leq t - \tau \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad \tau \leq t \leq 5 + \tau$$



## 26.5. Periodische Funktionen

$f$  auf einer Periode  $T$  vorgeben.

$$F(s) = \int_0^T f(t) e^{-st} dt$$

Periodische Fortsetzung:

$$F_{\text{per}}(s) = F(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

# 27. Differentialgleichungen

## 27.1. 1. Ordnung

### 27.1.1. Homogene

#### Separierbar

Praktisches Vorgehen beim Lösen der separierbaren Differentialgleichungen:

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

$$\Leftrightarrow h(y) dy = g(x) dx \Leftrightarrow \int h(y) dy = \int g(x) dx$$

$$\Leftrightarrow H(y) = G(x) + c$$

Wenn durch ein Ausdruck, der die unbekannte Funktion enthält zu dividieren ist, so ist zu prüfen ob sein Verschwinden eine Lösung der DGL ergibt.

#### Substitution

Gegeben:

$$y'(x) = (x + y(x))^2$$

Substitution:

$$z = x + y(x) \Rightarrow z' = 1 + y'(x) \Leftrightarrow y'(x) = z' - 1$$

Einsetzen:

$$z' - 1 = z^2 \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} - 1 = z^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - z^2} dz = dx \Rightarrow \text{separierbar}$$

### 27.1.2. Partikuläre

$$\text{DGL: } y' + y = q$$

**Ansatz**

Ansatz für partikuläre Lösung: «Ähnlich» wie die Störfunktion ( $q$ ), jedoch nicht in der homogenen Lösung enthalten.

Störfunktion	Ansatz
$\sin t, \cos t$	$a \sin t + b \cos t$
$e^{-t}$	$a e^{-t}$
$t e^{-t}$	$a e^{-t} + b t e^{-t}$
$t$	$at + b$

Ansatz in DGL einsetzen und Koeffizientenvergleich durchführen.

**Variation der Konstanten**

Homogene Lsg:  $y_h = c p(x)$

Ansatz:  $y_p = g(x) p(x)$  (c wird durch  $g(x)$  ersetzt)

Ansatz in DGL einsetzen und nach  $g(x)$  auflösen

**27.1.3. Lösung**

Gesamtlösungsmenge:  $y = y_h + y_p$

**27.2. Höhere Ordnung****27.2.1. Homogen, linear mit konstanten Koeffizienten**

DGL:  $y^{(4)} + 6y^{(3)} + 22y'' + 30y' + 13y = 0$

$\Rightarrow$  charakteristisches Polynom:  $p(t) = t^4 + 6t^3 + 22t^2 + 30t + 13$

$\Leftrightarrow p(t) = (t+1)^2(t+2-3j)(t+2+3j)$

$\mathbb{N}(p) = \{-1; -1; -2+3j; -2-3j\}$

Aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms ergeben sich die Lösungen.

Ordnung DGL = Anzahl Lösungen

$y_1(t) = e^{-t}$      $y_2(t) = t e^{-t}$      $y_3(t) = e^{t(-2+3j)}$      $y_4 = e^{t(-2-3j)}$

Linearkombinationen aus Lösungen komplexer Nullstellen ergibt reelle Lösungen:

$$\frac{1}{2} (y_3(t) + y_4(t)) = e^{-2t} \cos 3t$$

$$\frac{1}{2j} (y_3(t) - y_4(t)) = e^{-2t} \sin 3t$$

**27.2.2. Partikuläre****Ansatz**

$\Rightarrow$  Siehe 27.1.1 Homogene S. 198

**Variation der Konstanten**Störfunktion:  $q(x)$ Homogene Lsg:  $y_1(t) \quad y_2(t)$ Ansatz:  $y_p = g_1(t) y_1(t) + g_2(t) y_2(t)$  $\Rightarrow$  Gleichungssystem:

$$g_1'(t) y_1(t) + g_2'(t) y_2(t) = 0$$

$$g_1'(t) y_1'(t) + g_2'(t) y_2'(t) = q(x)$$

Dieses Gleichungssystem liefert  $g_1(t)$  und  $g_2(t)$ **27.3. Laplace****27.3.1. Lineare Übertragung**Übertragungsfunktion:  $G(s) = \frac{1}{cp(s)}$ Stossantwort:  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \tilde{u}'$ wobei  $cp$  = Charakteristisches Polynom und  $\tilde{u}$  = Sprungantwort

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y^{(2)}(0) = 0, \quad \dots, \quad y^{(n)}(0) = 0$$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = q$$

 $\Downarrow \mathcal{L}$ 

$$Y(s) \cdot cp(s) = F(s) \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{F(s)}{cp(s)} = F(s) \cdot G(s)$$

 $\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$ 

$$y(t) = (f * g)(t)$$

**Beispiel:**

$$y^{(2)} + 5y' + 6y = u, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

 $\Downarrow \mathcal{L}$ 

$$Y(s) \cdot (s^2 + 5s + 6) = Y(s) \cdot (s + 2)(s + 3) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+2} + \frac{\gamma}{s+3}$$

$$1 = \alpha(s+2)(s+3) + \beta(s+3)s + \gamma(s+2)s$$

$$s = 0: \quad 1 = 6\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{6}$$

$$s = -2: \quad 1 = -2\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = -\frac{1}{2}$$

$$s = -3: \quad 1 = 3\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{3}$$

$$Y(s) = \frac{1}{6} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+3}$$

$$\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = \frac{1}{6}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{3}e^{-3t}u(t)$$

$$y(t) = \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \right) u(t)$$

### 27.3.2. Nichtlineare Übertragung

**Beispiel:** Geg:  $g(t) = 1 - \cos t$

Ges:  $\tilde{v}$  auf  $v = \sin t$

mit  $\tilde{v}''(0) = 1$ ,  $\tilde{v}'(0) = 0$ ,  $\tilde{v}(0) = 0$

$$g(t) = 1 - \cos t$$

$$\Downarrow \mathcal{L}$$

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^3+s} = \frac{1}{cp(s)}$$

$$\Rightarrow \text{DGL: } y^{(3)} + y' = \sin t$$

$$\Downarrow \mathcal{L}$$

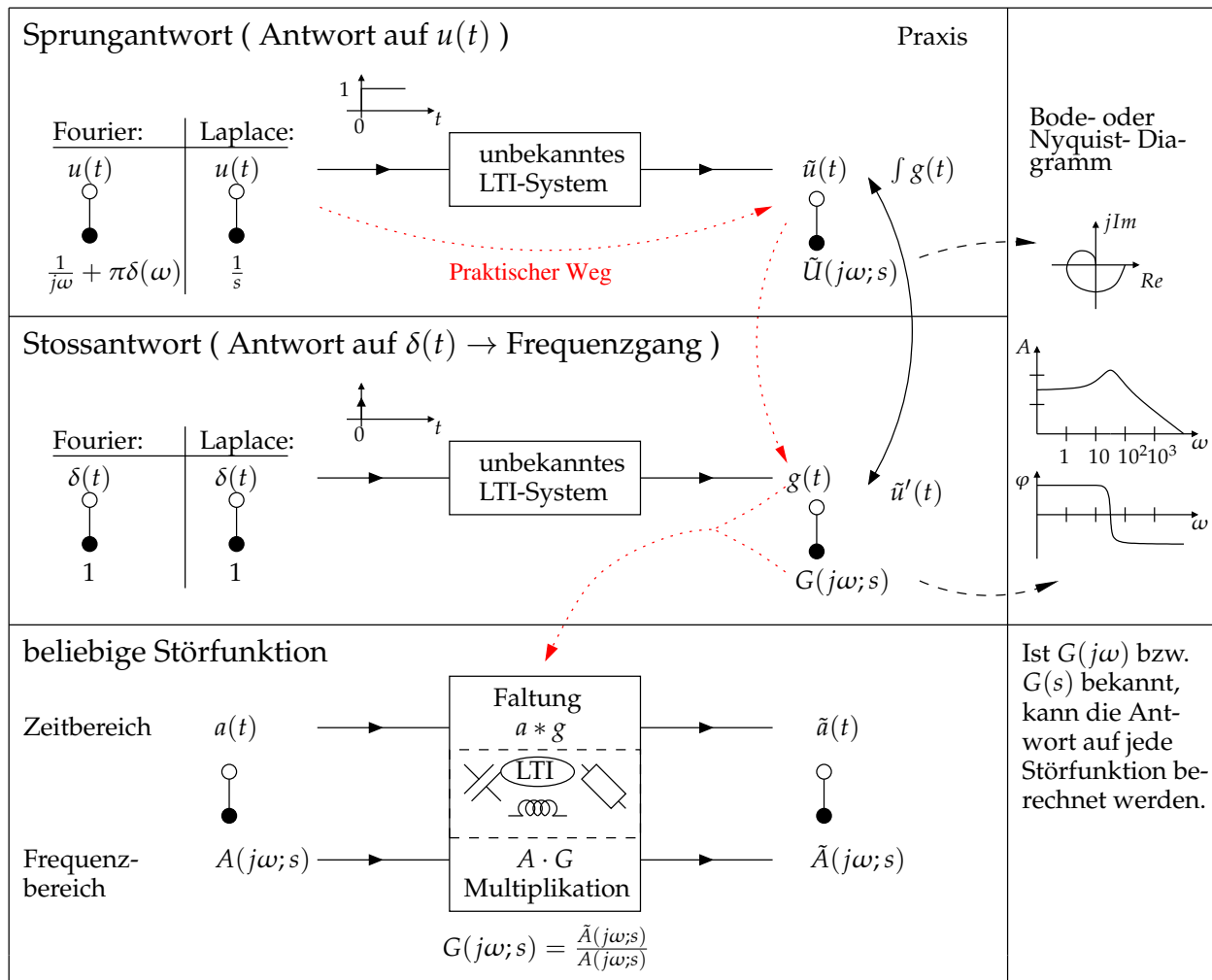
$$s^3 Y(s) - 1 + s Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \Leftrightarrow Y(s)(s^3+s) = \frac{1}{s^2+1} + 1$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^3+s} \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^3+1}$$

$$\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = (g * \sin)(t) + g(t)$$

## 27.4. Übersicht Laplace und Fourier





# 28. Funktionsdiskussion

## 28.1. Funktionen mit einer Variablen

### 28.1.1. Zu beantwortende Fragen

1. Definitionsbereich  $D(f)$
2. Bild von  $f$
3. Hat der Graph von  $f$ ,  $G(f)$  Symmetrien?  
Gerade  $f(-x) = f(x)$  oder Ungerade  $f(-x) = -f(x)$
4. Gibt es Polstellen?
5. Gibt es Gebiete der Koordinatenebene wo der Graph keine Punkte hat?  
(Achtung beim kürzen)
6. Gibt es Schranken für die Funktionswerte?
7. Welches sind die Nullstellen von  $f$ ?
8. Welches sind die Nullstellen der Ableitungen von  $f$ ?
9. Wo steigt  $f$ , wo fällt  $f$ ?
10. Gibt es Grenzwerte für Argumente gegen  $\pm\infty$ ?
11. Gibt es Asymptoten?

$$m = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) \quad q = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

Asymptote:  $mx + q$

Bei Brüchen mit Polynomen ergibt eine Division mit Rest die Asymptote:  
Beispiel:

$$(x^3 - 4x^2 - 17x + 60) \div (x^2 - 4) = \underbrace{x - 4}_{\text{Asymptote}} + \underbrace{\frac{44 - 13x}{x^2 - 4}}_{\text{Rest}}$$

Die Nullstellen des Zählerpolynoms im Rest ergeben die Schnittpunkte zwischen der Asymptote und der Funktion.

12. Gibt es absolute Maximal- oder Minimalstellen?

### 28.1.2. Gerade (2-Punkte-Form)

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

### 28.1.3. Abstand eines Punktes von einer Geraden

Gegeben: Gerade  $Ax + By + C = 0$ , Punkt  $P = (p_1, p_2)$

$$d = \left| \frac{Ap_1 + Bp_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

## 28.2. Funktionen mit mehreren Variablen

### 28.2.1. Bezeichnungen

$$f_1(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_2(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

#### Richtungsvektoren an die Parameterlinien

Richtungsvektor an die Abszissenlinie:  $(1, 0, f_1(x, y))$

Richtungsvektor an die Ordinatenlinie:  $(0, 1, f_2(x, y))$

#### Tangentialebene

$$\varepsilon: \quad \vec{p} = (p_1, p_2, p_3) = (x, y, f(x, y)) + \alpha(1, 0, f_1(x, y)) + \beta(0, 1, f_2(x, y))$$

$$\vec{n}_\varepsilon = (f_1(x, y), f_2(x, y), -1)$$

#### Gradient

Wir betrachten die Funktion  $f : (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ . Sie ist in einer gewissen Umgebung  $U$  von  $(x_0, y_0)$  definiert.

Die Richtung des stärksten Anstiegs von  $f$  in  $(x_0, y_0)$  ist

$$\text{grad} f(x_0, y_0) = (f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0)) = \vec{v}$$

( $\Rightarrow$  Richtung der Fallgeraden in der Grundrissebene)

Richtungsvektor der Fallgerade der Tangentialebene:

$$(f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0), f_1(x_0, y_0)^2 + f_2(x_0, y_0)^2)$$

#### Richtungsableitung

$$D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = \text{grad} f(x_0, y_0) \cdot \vec{e}_v$$

wobei  $\vec{e}_v$  der Einheitsvektor in Richtung  $\vec{v}$  ist

**Totales Differential**

$$df = h \cdot f_1(x, y) + k \cdot f_2(x, y)$$

wobei h und k die Inkremente sind

**Kettenregel**

Vollständig differenzierbare Funktionen:

$$f : (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$$

$$u : (y_1, y_2) \mapsto u(y_1, y_2)$$

$$v : (y_1, y_2) \mapsto v(y_1, y_2)$$

$$\tilde{f} : (y_1, y_2) \mapsto f(u(y_1, y_2), v(y_1, y_2))$$

Dann sind

$$\tilde{f}_1(y_1, y_2) = f_1(u(y_1, y_2), v(y_1, y_2)) \cdot u_1(y_1, y_2) + f_2(u(y_1, y_2), v(y_1, y_2)) \cdot v_1(y_1, y_2)$$

$$\tilde{f}_2(y_1, y_2) = f_1(u(y_1, y_2), v(y_1, y_2)) \cdot u_2(y_1, y_2) + f_2(u(y_1, y_2), v(y_1, y_2)) \cdot v_2(y_1, y_2)$$

**28.3. Kegelschnitte****28.3.1. Kreis**

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$M = (x_0, y_0)$$

**28.3.2. Ellipse**

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$M = (x_0, y_0)$$

**28.3.3. Hyperbel**

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$M = (x_0, y_0)$$

**28.3.4. Parabel**

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

$$S = (x_0, y_0)$$

# Index

- Überdruck, 32
- Überlagerungsprinzip, 77
- $2 \times 2$  Matrizen
  - Matrizen und Determinanten, 173
- $3 \times 3$  Matrizen
  - Matrizen und Determinanten, 174
- Abbildungen, 4
- Ableiten, 179
  - Bernoulli, de l'Hospital, 181
  - Elementare Funktionen, 180
  - Rechenregeln, 179
- Absoluter Druck, 32
- Abtasttheorem, 169
- Abtastung, 168
  - Abtasttheorem, 169
  - Energie, 170
  - Flat Top Sampling, 168
  - Ideale, 168
  - Interpolation, 170
  - Leistung, 170
  - Real, 168, 169
  - Rechteckpuls, 168, 169
  - Rekonstruktion, 169
  - Sample and Hold, 169
- AC-Verstärker, 144
- Addierer, 151, 152
- Additionstheoreme, 177
- adiabatisch, 53
- Admittanz, 107, 111
- Antriebstechnik, 121
- Aperiodische Schwingung, 62
- Arbeit, 22
  - Beschleunigungs-, 23
  - Expansions-, 53
  - Hub-, 23
  - Kompressions-, 53
  - Reibungs-, 24
  - Spann-, 23
  - Verformungs-, 24
- Aufleiten, 181
  - Rechenregeln, 181
  - Sätze, 182
  - Spezielle Integrale, 183
- Auftrieb, 33
- Ausdehnung
  - Längen-, 42
  - Volumen-, 42
- Austausch von Wärmemengen, 45
- Austrittsgeschwindigkeit, 39
- Basisschaltug, 137
- Bernoulli, 181
- Beschleunigte Bewegung, 17
- Beugung, 70
  - Am Gitter, 71
  - Am Spalt, 70
  - kreisförmige Öffnung, 70
- Bewegung der Planeten, 28
- Biasstrom, 159
- Biegung
  - Balken, 16
- Binom, 172
- Biot-Savart, 88
- Bipolar Tansistor, 137
- Blindleistung, 105
- Bodediagramm, 113
- Brechung, 2
- Carnotprozess, 55
- Cauchy-Schwarzsche, 187
- Common Mode Error, 157
- Cosinuswerte, 178
- Crestfaktor, 104
- Dämpfung, 119
- Dampfdruck, 45
- Debye-Temperetur, 45
- Deformierbare Körper, 32
- Deformierung, 14

- Dehnung, 14
- Dezibel, 150
- Dichte, 22
- Differential Gleichungen, 198
  - 1.Ordnung, 198
  - Hohere Ordnung, 199
  - Homogen, linear, konst, 199
  - Homogene, 198
  - Partikulare, 198, 199
- Differentieller UI-Wandler, 154
- Differenzieren, 179
  - Bernoulli, de l'Hospital, 181
  - Elementare Funktionen, 180
  - Rechenregeln, 179
- Digital
  - Abtastung, 168
  - Sampling, 168
- Digitale Signalverarbeitung, 167
- Diode, 133, 147
  - übergangsbereich, 131
  - AC-Analyse, 132
  - Arbeitspunktberechnung, 130
  - DC-Analyse, 132
  - Differentieller Widerstand, 131
  - Durchbruchbereich, 131
  - Durchlassbereich, 131
  - Grosssignalanalyse, 132
  - ideale, 130
  - Kennlinie, 131
  - Kleinsignalanalyse, 132
  - Konstantspannungsmodell, 130
  - Spannungsstabilisierung, 133
  - Sperrbereich, 131
  - Temperaturkoeffizient, 133
  - Z-Diode, 133
- Diracdelta, 193
- Doppelwinkel, 177
- Doppler-Effekt, 66
  - Akustischer, 66
  - Optischer, 66
- Drehbewegung, 18
- Drehimpuls, 25
- Drehmoment, 13, 128
- Drehstrom, 121
  - Synchrongenerator, 128
- Dreieckschaltung, 122
- Dreifachwinkel, 177
- Dreiphasen, 121
- Dreiphasensysteme, 121
- DriftGeschwindigkeit, 73
- Druck, 32
  - Absoluter, 34
  - Dampfdruck, 45
  - Differenzen, 35
  - Dynamischer, 34
  - Gesamt, 35
  - Schmelzdruck, 45
  - Statischer, 34
- Druck auf Rohrwand, 34
- Druckmessung, 34
- Druckwandler, 33
- DSG, 128
  - Stabilität, 128
- Durchflutung, 91
- Dynamik, 21
- Effektivwert, 105
- Eigenschwingungen, 69
- Einstein, 24
- Einzelkraft, 13
- El. Arbeit, 73
- El. Leistung, 73
- Elastischer Stoss, 26
- Elektronendichte, 73
- Elektrischer Schwingkreis, 62
- Elektrizitätslehre
  - Überlagerungsprinzip, 77
  - Arbeit, 73
  - DriftGeschwindigkeit, 73
  - Elektronendichte, 73
  - Elementarladung, 73
  - Feldstärke, 73
  - Gleichstrom, 75
  - Kirchoff, 75
  - Knotensatz, 75
  - Knotenspannungsmethode, 78
  - Kreisströme, 78
  - Kreisstrom-Methode, 78
  - Ladung, 73
  - Leistung, 73
  - Leistungsanpassung, 78
  - Leitwert, 73
  - Maschensatz, 75
  - Netzwerkanalyse, 76
  - Netzwerkumwandlung, 76

- Nichtlinear, 78
- Quellen, 75
  - gesteuerte, 80
  - Mehrere, 76
- Quellenumwandlung, 77
- Quellenverschiebung, 79
- Spannung, 73
- Spannungsgesetz, 75
- Spannungsquelle, 75
- spez. Leitwert, 73
- Spez. Widerstand, 73
- Stern – Dreieck, 77
- Strom, 73
- Stromdichte, 73
- Stromgesetz, 75
- Stromquelle, 76
- Superposition, 77
- Thévenin, 78
- Trennspannungen, 78
- Widerstand, 73
- Wirkungsgrad, 78
- Elektromotor, 123
- Elektronik, 130
- Elektrostatik, 83
  - Allgemein, 83
  - Das Coulombsche Gesetz, 83
  - Energie, 86
  - Homogenes Feld, 85
  - Kräfte, 86
    - Anziehung, 87
    - Verschiebung, 87
  - Paralleldrahtleitung, 86
  - Räumliches Zentralfeld, 84
  - Zylindrisches Zentralfeld, 85
- Elementarladung, 73
- Elliptische Spiegel, 5
- Emitterfolger, 137
- Emitterschaltug, 136
- Energie, 22, 106, 170
  - Expansions-, 53
  - Kernbindungs-, 24
  - Kinetische-, 23
  - Kompressions-, 53
  - Potentielle-, 23
  - Reibungs-, 24
  - Rotations-, 23
  - Spann-, 23
  - Strahlung, 49
- Energietechnik, 121
- Enthalpie, 54
- Entropie, 56
- Euler, 179
- Expansion, 53
- Faktorzerlegungen, 172
- Feder, 15, 23
- Feldeffekt Transistor, 149
- Feldstärke, 73
- Fernrohre, 11
- Fet
  - AC-Verstärker, 144
  - DC-Berechnung, 142
  - Diode, 147
  - Drainschaltung, 145
  - Fet-Typen, 138
  - Gateschaltung, 145
  - Gleichstrom, 142
  - Innenwiderstände, 146
  - Kleinsignal Ersatz, 141
  - MOS-Diode, 147
  - MOSFET
    - ideal, 139
    - real, 140
  - Schalter, 143
  - Sourceschaltung, 144
  - Stromquelle, 148
    - Geregelte Kaskode, 149
    - Kaskode, 148
    - Kaskode geregelt, 149
  - Stromspiegel
    - Widlar, 149
  - VCR, 146
  - Widerstand, 146
- Fet-Typen, 138
- Flüssigkeiten, 32
- Fluchtgeschwindigkeit, 29
- Fluide, 32, 35
  - Überdruck, 32
  - Absoluter Druck, 32
  - Auftrieb, 33
  - Druck, 32
    - Absoluter, 34
    - Differenzen, 35
    - Dynamischer, 34
    - Gesamt, 35

- Statischer, 34
- Druckmessung, 34
- Druckwandler, 33
- Grenzflächeneffekte, 35
- Grenzflächenspannung, 36
- Hydrodynamik, 37
- Hydrostatik, 33
- Kapillarität, 36
- Kompression, 32
- Kontinuitätsgleichung, 37
- Kraftwandler, 33
- Manometer, 34
- Schweredruck, 33
- Strömung
  - Dynamischer Auftrieb, 40
  - Formen, 38
  - Laminare, 39
  - Newtonsches Reibungsgesetz, 38
  - Raynolds-Zahl, 38
  - Reale, 38
  - Tragflügel, 41
  - Turbulent, 40
  - Volumenstrom, 39
  - Vortizität, 38
  - Zirkulation, 38
- Folge
  - Aritmetische, 173
  - Geometrische, 173
- Fotoapparat, 8
- Fourier
  - Bezeichnungen, 186
  - Cauchy-Schwarzsche, 187
  - Cosine Folge, 189
  - Cosine-Impuls, 194
  - Cosinus-Impuls, 194
  - Cosinustransformation, 191
  - Diracdelta, 193
  - Doppelweg Gleichgerichtet, 189
  - Dreieck Folge, 189
  - Dreieck-Impuls, 194
  - Einweg Gleichgerichtet, 189
  - Exp. Polynome, 186
  - Faltung, 192
  - Funktion  $f \in \mathbb{E}$ , 188
  - Funktion  $f \in \mathbb{P}$ , 188
  - Impulse, 194
  - Koeffizienten, 187
  - Koeffizienten komplex, 188
  - Norm in  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{E}$ , 187
  - Orthonormierte Basis, 187
  - Rechteck-Impuls, 194
  - Rechtecksignal, 189
  - Reihe komplex, 188
  - Reihe reel, 187
  - Reihen, 186
  - Sägezahn Signal, 190
  - Skalarprodukt, 186
  - Transformation, 191
  - trig. Polynome, 186
- Fourierreihe, 186
- Freier Fall, 19
- Funktionsdiskussion, 203
  - Bezeichnungen, 204
  - Funktionen mit einer Variablen, 203
  - Funktionen mit mehreren Variablen, 204
- Gase
  - Gemische, 43
  - Ideal, 43
  - Kinetische Gasttheorie, 47
  - Mittlere freie Weglänge, 48
  - Reale, 44
  - Wärmeleitung, 48
- GBP, 160, 165
- Gedämpfte Schwingung, 61
- Gegeninduktivität, 93
- Gegenkopplung, 161
- Gegenkopplungsarten, 162
- Gemische idealer Gase, 43
- Generator, 123, 127
  - Inselbetrieb, 127
  - Synchron, 128
- Generator am starren Netz, 128
- Generatoren, 123
- Geometrische Optik, 2
- Geostationär, 29
- Geregelte Kaskode, 149
- Getriebe, 30
- Gewichtskraft, 22
- Gleichförmige Bewegung, 17
- Gleichgewichtsbedingung, 12
- Gleichstrom, 75
- Gleichstrommaschine, 124
  - Fremderregt, 124
  - Nebenschluss, 125, 126

- Nutzbremmung, 125
- Gleichtaktfehler, 157
- Goniometrie, 176
  - Additionstheoreme, 177
  - Doppelwinkel, 177
  - Dreifachwinkel, 177
  - Genaue Funktionswerte, 178
  - Halbwinkel, 177
  - Logarithmen, 178
  - Potenzen, 176
  - Summe und Produkte, 177
- Gravitation, 28
- Gravitationsfeld, 29
- Gravitationsgesetz, 28
- Grenzflächeneffekte, 35
- Grenzflächenspannung, 36
- Grundlagen
  - Grundgrößen, 73, 80
  - Vektorrechnung, 174
- Haftreibung, 12
- Halbwinkel, 177
- Harmonische Welle, 65
- Horizontaler Wurf, 20
- Hospital, 181
- Hydrodynamik, 37
- Hydrostatik, 33
- Hyperbolische Spiegel, 5
- I-Glied, 115
- ideale Diode, 130
- Ideale Gase, 43
- Idealer OP, 150
- Impedanz, 107, 111
- Impedanztransformation, 111
- Impuls, 25
- Impulse, 194
- Induktionsgesetz, 95
- induktive Kopplung, 93
- Induktivität, 92
  - Drahtschleife, 99
  - Kreisrahmenspule, 102
  - Paralleldrahtleitung, 100
  - Ringspule, Toroid, 102
- Induktivitäten, 109
  - Parallelschaltung, 96
  - Serieschaltung, 96
- inelastischer Stoss, 26
- Inselbetrieb, 127
- Instabilität, 119
- Instrumentationsverstärker, 152
- Integrieren, 181
  - Integration rationaler Funktionen, 182
  - Rechenregeln, 181
  - Sätze, 182
  - Spezielle Integrale, 183
  - Substitution, 181
- Intensität, 64
- Interferenz, 67
- Isobar, 44
- isobar, 52
- Isochor, 44
- isochor, 52
- isotherm, 52
- k-Wert, 51
- Kapazitäten, 108
- Kapillarität, 36
- Kaskode, 148
- Kaskode geregelt, 149
- Kepler-Gesetze, 28
- Kinematik, 17
  - Beschleunigte Bewegung, 17
  - Drehbewegung, 18
  - Freier Fall, 19
  - Horizontaler Wurf, 20
  - Kreisbewegung, 18
  - Schiefer Wurf, 20
  - Senkrechter Wurf, 19
  - Winkelbeschleunigung, 18
  - Winkelgeschwindigkeit, 18
  - Wurfbahnen, 19
  - Zentripetalbeschleunigung, 19
- Kinetische Gasttheorie, 47
  - Mittlere freie Weglänge, 48
- Kirchoff, 75
- Knotensatz, 75
- Knotenspannungsmethode, 78
- Kollektorschaltug, 137
- Komparator, 154
- Komplexe Zahlen, 178, 179
  - Euler, 179
- Kompression, 15, 32
- Komression, 53
- Konkavspiegel, 5
- Kontinuitätsgleichung, 37



- Konvexspiegel, 6
- Kräfte im Magnetfeld, 89
- Kräftepaar, 13
- Kraftwandler, 33
- Kreisbewegung, 18
- Kreisprozess, 54
- Kreisströme, 78
- Kreisstrom-Methode, 78
- Kreisstrommethode, 112
- Kurvendiskussion, 203
  
- Ladung, 73
- Laplace, 195
  - Lineare Übertragung, 200
  - Nichtlineare Übertragung, 201
- Laplacetransformation
  - Faltung, 197
  - Periodische Funktionen, 197
  - Rechenregeln, 196
  - Spezielle, 196
- Leistung, 24, 105, 170
- Leistung bei Sternschaltung, 122
- Leistungsanpassung, 78, 105
- Leitwert, 73
- Lichtwellenleiter, 4
- Lineare Abbildungen
  - Vektorrechnung, 175
- Linsen, 6
- Linsensysteme, 7
- Linsentypen, 6
- Luftfeuchtigkeit, 46
- Lupe, 9
  
- Machscher Kegel, 67
- Magetismus
  - Energiedichte, 94
- Magn. Widerstand, 92
- Magnetismus, 73
  - Brechung, 93
  - Durchflutung, 91
  - Energie, 94
  - Feldstärke, 88
    - Koaxialkabel, 100
    - Kreisförmiger Leiter, 99
    - Kurzer, gerader Leiter, 98
    - Langer gerader Leiter, 98
    - Voller Leiter, 99
    - Zylinderspule, 101
- Fluss, 91
  - Flussdichte, 89
  - Gegeninduktivität, 93
  - Induktionsgesetz, 95
  - induktive Kopplung, 93
  - Induktivität, 92
  - Kräfte, 89
  - Nichtlinearität, 97
  - Ohmsches Gesetz, 92
  - Permeabilität, 88
  - Selbstinduktion, 95
  - Spulenfluss, 92
  - Trafogleichungen, 96
  - Widerstand, 92
- Manometer, 34
- Maschenmethode, 112
- Maschensatz, 75
- Masse, 28
- Massenträgheit, 30
- Massenträgheit (tabelle), 31
- Mathematik, 172
- Matrix
  - Transponierte, 174
- Matrizen und Determinanten, 173
- Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung, 48
- Membrane, 70
- Mikroprojektor, 9
- Mikroskop, 10
- Mischtemperatur, 45
- Mitkopplung, 161
- Mittel- und Kennwerte, 103
- MOS-Diode, 147
- Motor, 123
- Motoren, 123, 167
  - Gleichstrom, 124
  
- Nebenschlussmaschine, 125, 126
- Netzwerkanalyse, 76
- Netzwerkumwandlung, 76
- Newtonsches Reibungsgesetz, 38
- Nichtlinear, 78
- Nichtlinearität, 97
- Norm in  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{E}$ , 187
- Nullstelle, 118
- Nyquistdiagramm, 113
  
- Offsetfehler, 158

- Ohm, 108
- Operationsverstärker, 151, 160
  - Übertragungskennlinie, 157
  - Addierer, 151, 152
  - Ausgangsspannungsbereich, 157
  - Bandbreite, 160
  - Beschaltung mit Zweitor, 156
  - Biasstrom, 159
  - Common Mode Error, 157
  - Differentieller UI-Wandler, 154
  - Differenzverstärker, 152
  - Dynamischer Eingangswiderstand, 159
  - Eingangsströme, 159
  - Fehler, 157
  - Frequenzgang, 160
  - GBP, 160
  - Geschlossene Verstärkung, 158
  - Gleichtaktfehler, 157
  - Idealer-, 150
  - Invertierender Verstärker, 156
  - Komparator, 154
  - Offsetfehler, 158
  - Oszillator, 155
  - Power supply error, 158
  - Realer, 157
  - Schmitt-Trigger, 154
  - Spannungsfolger, 151
  - Statische Fehler, 159
  - Stromquelle, 153
  - Stromspiegel, 153
  - Subtrahierer, 152
  - Transitfrequenz, 160
  - Versorgungsspannungsfehler, 158
  - Verstärker
    - Invertierend, 151
    - Nicht Invertierend, 151
  - Verstärkungsbandbreitenprodukt, 160
  - Wien-Robinson Oszillator, 155
- Optik, 2
  - Abbildungen, 4
  - Brechung, 2
  - Elliptische Spiegel, 5
  - Fernrohre, 11
  - Fotoapparat, 8
  - Hyperbolische Spiegel, 5
  - Konkavspiegel, 5
  - Konvexspiegel, 6
  - Lichtwellenleiter, 4
  - Linsen, 6
  - Linsensysteme, 7
  - Linsentypen, 6
  - Lupe, 9
  - Mikroprojektor, 9
  - Mikroskop, 10
  - Parabolspiegel, 5
  - Planspiegel, 6
  - Prisma, 3
  - Projektor, 8
  - Reflexionsgesetz, 2
  - Sammellinse, 7
  - Sphärische Spiegel, 5
  - Spiegel, 5
  - Totalreflexion, 3
  - Zerstreuungslinse, 7
- Optische Weglänge, 68
- Orthonormierte Basis, 187
- Ortskurve, 113
- Oszillator, 155
- P-Glied, 115
- Parabolspiegel, 5
- Parsevalsches Theorem, 188
- Partialbruchzerlegung, 173
- Pascal Dreieck, 172
- Pendel
  - Drehpendel, 59
  - Federpendel, 59
  - Mathematisches Pendel, 60
  - Physikalisches Pendel, 60
- Permeabilität, 88
- Pfeife, 69
- Phasenübergänge, 45
- Physik, 2
- Planeten-Bewegung, 28
- Planspiegel, 6
- Pol-Nullstellendiagramm, 118
- Polstelle, 118
- Potentielle Energie, 29
- Prisma, 3
- Projektor, 8
- Proportionalglied, 114
- PT<sub>1</sub>-Glied, 115, 118
- PT<sub>2</sub>-Glied, 116, 119
- Quadratische Gleichung, 173

- Quellen, 75
  - gesteuerte, 80
  - Mehrere, 76
- Quellenumwandlung, 77
- Quellenverschiebung, 79
- Querkontraktion, 14
- Rückkopplung, 161
- Raketenantrieb, 26
- Rationalisierungsformeln, 183
- Raynolds-Zahl, 38
- Reaktionsprinzip, 12
- Realer OP, 157
- Reflexionsgesetz, 2
- Reibungsarbeit, 24
- Reibungskraft, 22
- Reihen
  - Fourier, 186
- Ringing, 119
- RMS, 104
- RMS-Wert, 105
- Rotation, 27
- Saite, 69
- Sammellinse, 7
- Sample and Hold, 169
- Sampling, 168
- Scheinleistung, 105
- Schiefer Wurf, 20
- Schleifenverstärkung, 164
- Schmelzdruck, 45
- Schmitt-Trigger, 154
- Schraubenfeder, 15
- Schubbeanspruchung, 15
- Schweredruck, 33
- Schwerpunkt, 13
- Schwingen, 119
- Schwingung
  - Aperiodische Schwingung, 62
  - Gedämpfte Schwingung, 61
- Schwingungen, 57
  - aperiodische Schwingung, 58
  - Drehpendel, 59
  - Elektrischer Schwingkreis, 62
  - Federpendel, 59
  - freie Schwingung, 57
  - Harmonische Schwingung, 57
  - Mathematisches Pendel, 60
  - periodische Schwingung, 58
  - Physikalisches Pendel, 60
  - Ungedämpfte Schwingung, 57
- Selbstinduktion, 95
- Senkrechter Wurf, 19
- Sensivität, 164
- Sinuswerte, 178
- Skalare Projektion
  - Vektorrechnung, 174
- Skalarprodukt
  - Vektorrechnung, 174
- Spannung, 14, 73
  - an Grenzflächen, 36
- Spannungsfolger, 151
- Spannungsgesetz, 75
- Spannungsquelle, 75
- Spannungsstabilisierung, 133
- spez. Leitwert, 73
- Spez. Widerstand, 73
- Sphärische Spiegel, 5
- Spiegel, 5
- Spulenfluss, *siehe* Magnetismus
- Standardterm, 114
  - Aufwärtsknick, 117
  - Dämpfung, 119
  - I-Glied, 115
  - Instabilität, 119
  - P-Glied, 115
  - PT<sub>1</sub>-Glied, 115, 118
  - PT<sub>2</sub>-Glied, 116, 119
  - Quadratisch, 116, 117
  - Ringing, 119
  - Schwingen, 119
  - Totzeitglied, 116
- Starre Körper im Gleichgewicht, 12
- Statik, 12
- Statischer Auftrieb, 33
- Stehende Welle, 68
- Stern – Dreieck, 77
- Sternschaltung, 121
- Stochastische Signale, 167
- Stoss
  - elastisch, 26
  - inelastisch, 26
- Strömung
  - Austrittsgeschwindigkeit, 39
  - Dynamischer Auftrieb, 40

- Formen, 38
- Laminare, 39
- Newtonsches Reibungsgesetz, 38
- Raynolds-Zahl, 38
- Reale, 38
- Tragflügel, 41
- Turbulent, 40
- Volumenstrom, 39
- Vortizität, 38
- Zirkulation, 38
- Strömungsfeld
  - Allgemein, 81
  - Leistung, 82
  - Leistungsdichte, 82
  - Räumliches Zentralfeld, 81
  - Zylindrisches Zentralfeld, 82
- Strömungsformen, 38
- Strahlung
  - Gesetze-, 49
  - Temperatur-, 49
  - Wärme, 50
- Strahlungsenergie, 49
- Strom, 73
- Stromdichte, 73
- Stromgesetz, 75
- Stromquelle, 76, 148, 153
  - Geregelte Kaskode, 149
  - Kaskode, 148
  - Kaskode geregelt, 149
- Stromspiegel, 153
  - Widlar, 149
- Subtrahierer, 152
- Superposition, 77
- Symetrischer Eingang, 152
- Synchrongenerator, 127, 128
- Tangenswerte, 178
- Tansistor
  - Bipolar, 137
- Temperatur, 42
  - Celcius, 42
  - Debeye-, 45
  - Fahrenheit, 42
  - Kelvin, 42
- Temperaturstrahlung, 49, 50
- Thévenin, 78
- Totalreflexion, 3
- Totzeitglied, 116
- Trafogleichungen, 96
- Tragflügel, 41
- Transistor
  - Basisschaltug, 137
  - DC-Ersatzschaltung, 135
  - Dynamische Innenwiderstände, 135
  - Emitterfolger, 137
  - Emitterschaltug, 136
    - Arbeitspunkt, 136
  - Feldeffekt, 149
  - Funktionsweise, 134
  - Idealer, 135
  - Kollektorschaltug, 137
  - NPN, 134
  - PNP, 134
  - Unipolar, 149
  - Verstärkerschaltungen, 135
- Transitfrequenz, 165
- Translation, 27
- Transponierte, 174
- Trennbündelmethode, 112
- Trennspannungen, 78
- Trigonometrie, 175
  - Cosinussatz, 176
  - Komplementwinkel, 175
  - Sinussatz, 176
- VCR, 146
- Vektorielle Projektion
  - Vektorrechnung, 174
- Vektorprodukt
  - Vektorrechnung, 174
- Vektorrechnung, 174
- Versorgungsspannungsfehler, 158
- Verstärker, 161, 165
  - Ausgangschaltungen, 163
  - Eingangschaltungen, 163
  - GBP, 165
  - Gegenkopplung, 161
  - Invertierend, 151
  - Mitkopplung, 161
  - Nicht Invertierend, 151
  - Rückkopplung, 161
  - Schleifenverstärkung, 164
  - Transitfrequenz, 165
- Verstärkung, 150
- Verstärkungs Bandbreiten Produkt, 165
- Verstärkungsbandbreitenprodukt, 160

- Vierpole, 156
- Vortizität, 38
- Vorwort, i
- Wärme, 44
  - Austausch-, 45
  - Energie, 44
  - Molare-, 45
- Wärmeaustausch, 50
- Wärmebedarf eines Gebäudes, 51
- Wärmelehre, 42
- Wärmeleitung in Gasen, 48
- Wärmetransport, 51
- Wechselstrom
  - Betragsmittelwert, 103
  - Formfaktor, 104
  - Halbwellenmittelwert, 103
  - Linearer Mittelwert, 103
  - Mittel- und Kennwerte, 103
  - Quadratischer Effektivwert, 104
    - zusammeng. Sign., 104
  - Quadratischer Mittelwert, 104
  - Quadratischer RMS, 104
  - RMS, 104
  - Scheitelfaktor, 104
- Wechselstrom
  - Admittanz, 107
  - Blindleistung, 105
  - Bodediagramm, 113
    - Standardterm, 114
  - Darstellungsformen, 113
  - Energie, 106
  - Impedanz, 107
  - Impedanztransformation, 111
  - Induktivitäten, 109
  - Kapazitäten, 108
  - Kreisstrommethode, 112
  - Leistung, 105
  - Leistungsanpassung, 105
  - Maschenmethode, 112
  - Nyquistdiagramm, 113
  - Ortskurve, 113
  - Scheinleistung, 105
  - Transformation ZY, 111
  - Trennbündelmethode, 112
  - Widerstand, 108
  - Z und Y-Ebene, 111
- Wechselstrom
  - RMS, 104
- Welle
  - Überlagerung, 67
  - Beugung, 70
    - Am Gitter, 71
    - Am Spalt, 70
    - kreisförmige Öffnung, 70
  - Doppler-Effekt
    - Akustischer, 66
    - Optischer, 66
  - Eigenschwingung, 69
  - Harmonische, 65
  - Intensität, 64
  - Interferenz, 67
  - Kapillarwelle, 63
  - Longitudinalwelle, 63
  - Machscher Kegel, 67
  - Membrane, 70
  - Optische Weglänge, 68
  - Phasensprung, 67
  - Räumliche Ausbreitung, 65
  - Schallwelle, 63
  - Schwerewelle, 63
  - Seilwelle, 63
  - Stehende, 68
  - Transversalwelle, 63
  - Wellengleichung, 64
- Wellengeschwindigkeiten, 63
- Wellengleichung, 64
- Wellenlehre, 63
- Widerstand, 73, 108
- Widlar, 149
- Wien-Robinson Oszillator, 155
- Winkelbeschleunigung, 18
- Winkelgeschwindigkeit, 18
- Wirkungsgrad, 25, 78
  - Carnot, 55
- Wurfbahnen, 19
- Z-Diode, 133
- Zeigerdarstellung, 110
- Zentralmasse, 29
- Zentripetalbeschleunigung, 19
- Zerstreuungslinse, 7
- zurückgeführte Energie, 56
- Zustandsänderungen, 52
  - adiabatisch, 53
  - isobar, 52

## *Index*

isochor, 52  
isotherm, 52  
Zweitore, 156