Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων - Μέθοδοι Πραγματικού Χρόνου με Προβολή - Αξιολόγηση Μοντέλου

Μπίλλας Θωμάς Αχιλλέας
AEM: hidden
hidden

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών ΑΠΘ
Τετάρτη 10 Ιουλίου 2024

Project

Μπίλλας Θωμάς Αχιλλέας

Τετάρτη 10 Ιουλίου 2024

Περιεχόμενα

0 Πρόλογος

Η παρούσα αναφορά συντάσσεται στα πλαίσια του μαθήματος "Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων" του 8ου εξαμήνου στο τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΑΠΘ. Αφορά Εκτίμηση Αγνώστων Παραμέτρων με χρήση Μεθόδων Πραγματικού Χρόνου με Προβολή, καθώς και την Αξιλόγηση του Μοντέλου που επιλέχθηκε. Στο πρώτο θέμα της αναφοράς πραγματοποιείται θεωρητική ανάλυση και σχεδίαση εκτιμητή -αλγορίθμου πραγματικού χρόνου με χρήση της μεθόδου Lyapunov με προβολή στο δοθέν σύστημα, καθώς και η μέλετη της ευστάθειας του συστήματος εκτίμησης. Στο δεύτερο θέμα, με βάση τη θεωρητική ανάλυση του πρώτου θέματος γίνεται η προσομοίωση και ανάλυση του συστήματος και του εκτιμητή στο MATLAB με βάση τα δεδομένα που δόθηκαν στην εκφώνηση, καθώς και η αξιολόγηση του μοντέλου με εγκάρσια αξιολόγηση. Το τρίτο θέμα απαιτεί να αποδειχθούν ορισμένα συμπεράσματα. Στη συνέχεια, πέρα από τα θεωρητικά και πειραματικά αποτελέσματα, καταγράφονται και παρατηρήσεις, σχόλια και συμπεράσματα που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της ανάλυσης. Τέλος, στον υποβληθέντα φάκελο υπάρχουν και οι κώδικες του MATLAB που οδήγησαν στα διαγράμματα που παρουσιάζονται στο μήκος της αναφοράς και αποτελούν τη βάση για ορισμένα από τα συμπεράσματα και τις παρατηρήσεις που αναφέρθηκαν.

1 Θέμα 1

Παρατηρούμε πως το σύστημα που μας δίνεται είναι της μορφής $\dot{x} = ax + bu$ με $a > 0$,$b > 0$ συνεπώς έχουμε ένα ασταθές σύστημα. Θα χρησιμοποιήσουμε Μεθοδολογία Εκτίμησης Lyapunov με Μεικτή Τοπολογία (Μ.Τ.). Συνεπώς:

- Ορίζουμε το Μοντέλο (Μ):

$$\dot{\hat{x}} = \hat{a}x + \hat{b}u + \theta_m(x - \hat{x})$$

με $\theta_m > 0$

- Ορίζουμε το σφάλαμα:

$$e_x = x - \hat{x}$$

Καθώς και τα παραμετρικά σφάλματα:

$$e_a = \hat{a} - a$$

$$e_b = \hat{b} - b$$

Με παραγώγους

$$\dot{e_a} = \dot{\hat{a}}$$

$$\dot{e_b} = \dot{\hat{b}}$$

διότι τα a,b είναι σταθερές και άρα οι παράγωγοι τους είναι 0. Ενώ

$$\dot{e_x} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = ax + bu - \hat{a}x - \hat{b}u - \theta_m(x - \hat{x}) = (a - \hat{a})x + (b - \hat{b})u - \theta_m(x - \hat{x})$$

δηλαδή

$$\dot{e_x} = -e_a x - e_b u - e_x\theta_m$$

- Ορίζουμε συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}{e_x}^2 + \frac{1}{2}{e_a}^2 + \frac{1}{2}{e_b}^2 \geq 0$$

και το " = " ισχύει μόνο για $e_a = e_b = e_x = 0$.
Με παράγωγο:

$$\dot{V} = e_x\dot{e_x} + e_a\dot{e_a} + e_b\dot{e_b}$$

$$\dot{V} = e_x(-e_a x - e_b u - e_x\theta_m) + e_a\dot{\hat{a}} + e_b\dot{\hat{b}}$$

$$\dot{V} = -{e_x}^2\theta_m - e_x e_b u - e_x e_a x + e_a\dot{\hat{a}} + e_b\dot{\hat{b}}$$

Θέλουμε να ισχύει $\dot{V} \leq 0$ και άρα κάνουμε την επιλογή:

$$\dot{\hat{a}} = xe_x$$

$$\dot{\hat{b}} = ue_x$$

ΕΦαρμόζουμε και προβολή αφού για τις παραμέτρους a,b οι οποίες είναι σταθερές αλλά άγνωστες ισχύει $a \geq 0$ και $0.5 \leq b \leq 1.5$.
Θα ορίσουμε τα σύνολα:

$$\Theta_{in_a} = \{a : a > 0\}$$

$$\Theta_{b_a} = \{a : a = 0\}$$

$$\Theta_{in_b} = \{b : 0.5 < b < 1.5\}$$

$$\Theta_{b_{b1}} = \{b : b = 0.5\}$$

$$\Theta_{b_{b2}} = \{b : b = 1.5\}$$

Άρα θα έχουμε:

$$\dot{\hat{a}} = \begin{cases} xe_x & \text{αν } \hat{a} \in \Theta_{in_a} \text{ ή (αν } \hat{a} \in \Theta_{b_a} \text{και } \dot{\hat{a}} > 0) \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\dot{\hat{b}} = \begin{cases} ue_x & \text{αν } \hat{b} \in \Theta_{in_b} \text{ ή (αν } \hat{b} \in \Theta_{b_{b1}}\text{και } \dot{\hat{b}} > 0) \text{ ή (αν } \hat{b} \in \Theta_{b_{b2}}\text{και } \dot{\hat{b}} < 0) \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ολοκληρώνοντας τη σχεδίαση του εκτιμητή περνάμε στην ανάλυση της ευστάθειας του συστήματος που σχεδιάσαμε. Θα βασιστούμε κατά κανόνα στο κεφάλαιο 4.1 των σημειώσεων το οποίο αναλύθηκε και στον πίνακα στην έκτη διάλεξη.

Έχουμε αποδείξει ότι $V(t) \geq 0$, $\dot{V}(t) \leq 0$ άρα $\lim_{t\to\infty} V(t) = V_\infty$ άρα το ίδιο ισχύει και για τα ορίσματα της V οπότε $e_x(t), e_a(t), e_b(t) \in L_\infty$ δηλαδή τα σφάλματα είναι φραγμένα. Μας δίνεται από την εκφώνηση ότι $x \in L_\infty$ και επειδή $e_x(t) \in L_\infty$ συμπεραίνουμε πως $\hat{x} \in L_\infty$. Επιπλέον αφού $e_a(t), e_b(t) \in L_\infty$ άρα και $\hat{a}(t), \hat{b(t)} \in L_\infty$. Ολοκληρώνουμε την $\dot{V} = -\theta_m {e_x}^2$ στο $[0, +\infty)$ και μετά απο πράξεις έχουμε:

$$[V_\infty - V(0)] \cdot \frac{1}{\theta_m} = \int_0^{+\infty} {e_x}^2(\tau)\, d\tau$$

με φράγμενα τα V_∞, $V(0) = \dfrac{1}{2}(x(0) - \hat{x}(0))^2 + \dfrac{1}{2}(\hat{a}(0) - a)^2 + \dfrac{1}{2}(\hat{b}(0) - b)^2$ άρα συνεπάγεται ότι:

$$\int_0^{+\infty} {e_x}^2(\tau)\, d\tau < \infty \Rightarrow (\int_0^{+\infty} {e_x}^2(\tau)\, d\tau)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Συνεπώς καταλήγουμε ότι $e_x \in L_2$. Γνωρίζουμε ότι $\dot{e_x} = -e_a x - e_b u - e_x \theta_m$ με θ_m σταθερά, $x, u \in L_\infty$ από εκφώνηση και $e_a, e_b \in L_\infty$ όπως δείξαμε παραπάνω, άρα συμπεραίνουμε ότι και $\dot{e_x} \in L_\infty$.

Τώρα αφού γνωρίζουμε ότι $e_x \in L_2$, $e_x \in L_\infty$, $\dot{e_x} \in L_\infty$ επικαλούμαστε το λήμμα Barbalat και συμπεραίνουμε ότι $\lim_{t\to\infty} e_x(t) = 0$. Άρα αποδείξαμε την ευστάθεια του συστήματος εκτίμησης και θα μπορούσαμε να τελειώσουμε την ανάλυση εδώ. Επιλέγουμε να δείξουμε συμπληρωματικά ότι οι εκτιμήσεις συγκλίνουν και στις πραγματικές τιμές, αφού λόγω του παραπάνω και επειδή $\dot{\hat{a}} = xe_x$, $\dot{\hat{b}} = ue_x$ και $x, u \in L_\infty$ καταλήγουμε ότι $\lim_{t\to\infty} \dot{\hat{a}}(t) = 0$ και $\lim_{t\to\infty} \dot{\hat{a}}(t) = 0$ δηλαδή οι εκτιμήσεις $\hat{a}(t), \hat{b}(t)$ θα μεταβάλλονται όλο και πιο αργά, όμως δεν μπορούμε να πούμε ακόμα ότι θα τείνουν σε σταθερές τιμές.

Για να το αποδείξουμε αυτό χρησιμοποιήσουμε τη Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης (Σ.Ε.Δ.). Για να κάνουμε τον έλεγχο ικανοποίσης της ΣΕΔ θα φέρουμε το σύστημα σε γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή, άρα κινούμαστε ως εξης:

$$\dot{x} = ax + bu \Rightarrow \dot{x} = ax + bu + \theta_m x - \theta_m x \Rightarrow \dot{x} + \theta_m x = ax + \theta_m x + bu$$

Ισοδύναμα:

$$x = \frac{1}{s + \theta_m}[(a + \theta_m)x + bu] = \theta^{*T}\varphi$$

όπου $\theta^* = \begin{bmatrix}\theta_m + a & b\end{bmatrix}^T$ και $\varphi = \begin{bmatrix}\dfrac{x}{s+\theta_m} & \dfrac{u}{s+\theta_m}\end{bmatrix}^T$.

Θα πρέπει να υπάρχουν $T_0 > 0$, $a_0 > 0$ και $a_1 > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει για κάθε t:

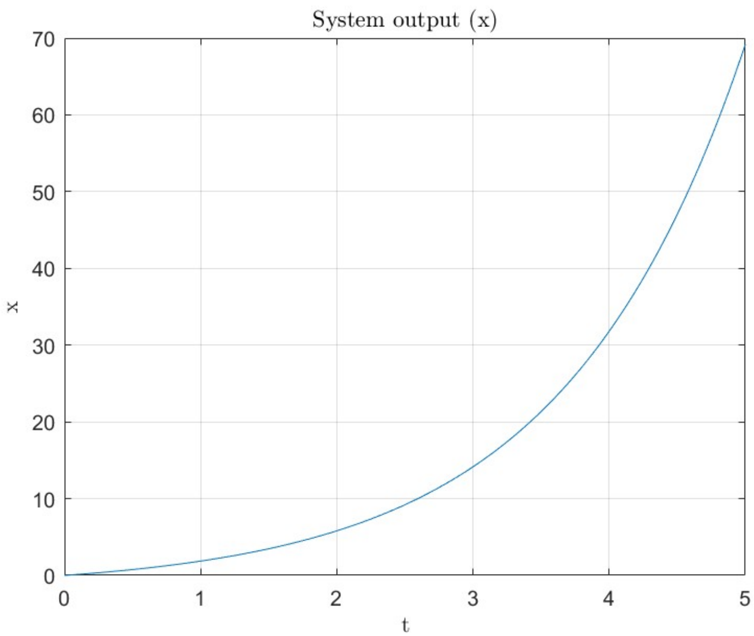
$$a_1 I \geq \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \varphi(\tau)\varphi^T(\tau)\, d\tau \geq a_o I$$

όπου I ο μοναδιαίος $2x2$ πίνακας και φ το διάνυσμα που ορίστηκε παραπάνω. Αποδεικνύεται ότι το παραπάνω ισχύει με βάση τις σημειώσεις του μαθήματος και άρα οι εκτιμήσεις θα συγκλίνουν και στις πραγματικές τους τιμές.

2 Θέμα 2

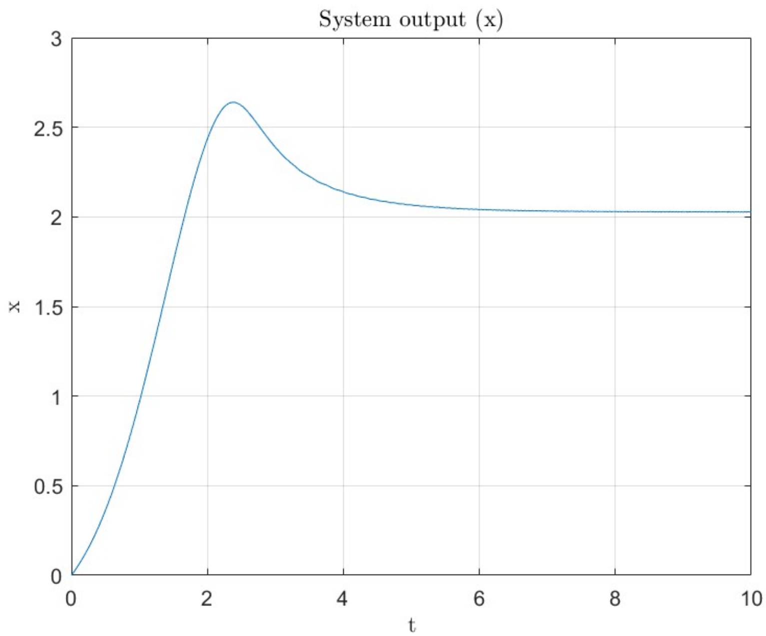
2.1 Πειραματισμός και ανάλυση του συστήματος και του εκτιμητή

Προτού προσομοιώσουμε το πραγματικό σύστημα μαζί με τον εκτιμητή που σχεδιάσαμε θα πραγματοποιήσουμε κάποιες "δοκιμαστικές" προσομοιώσεις οι οποίες θα μας βοηθήσουν να αντιληφθούμε καλύτερα το σύστημα, τον εκτιμητή καθώς και την συμπεριφορά τους.
Προσομοιώνουμε το πραγματικό σύστημα στο MATLAB με $a = 0.75$ και $b = 1.25$ και διεγείροντας το με βηματική είσοδο επιβεβαιώνουμε και μέσω προσομοίωσης το προφανές, δηλαδή ότι το σύστημα είναι ασταθές.



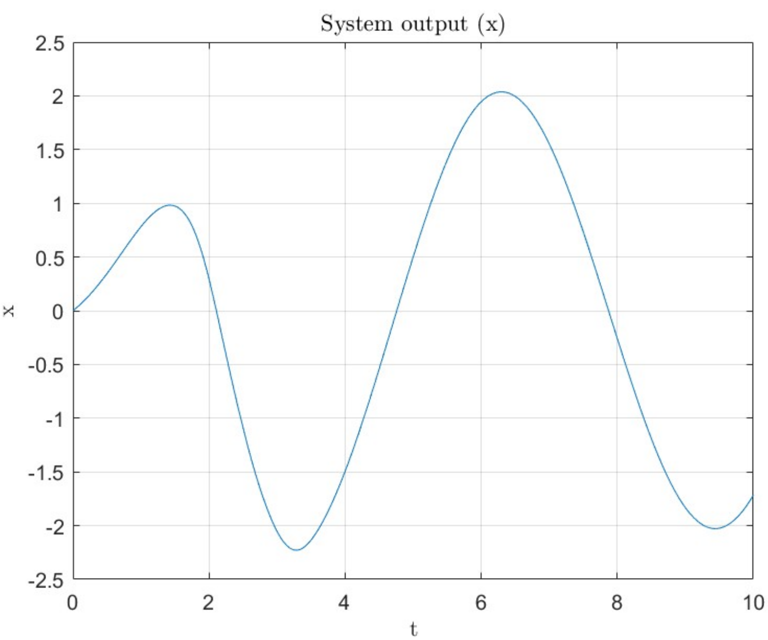
Σχήμα 1: Η έξοδος x του πραγματικού συστήματος για βηματική είσοδο.

Τώρα προσομοιώνουμε ορθά την είσοδο του συστήματος κάνοντας τις ασφαλείς επιλογές $A = 2$, $\rho_0 = 10$ και με σταθερό $w = 1$ και $k = 1$ εντός των αποδεκτών ορίων και με $x_d = A$ έχουμε ευστάθεια.



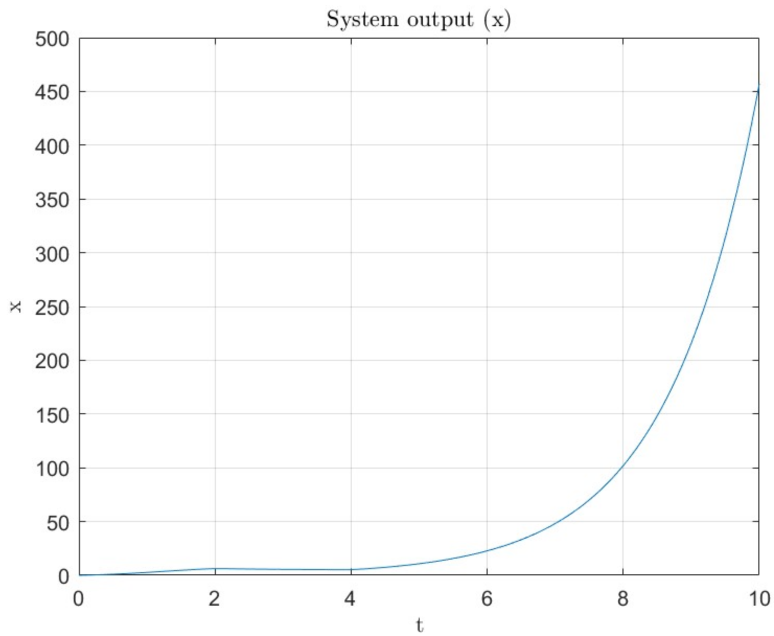
Σχήμα 2: Η έξοδος x του πραγματικού συστήματος για σταθερό $w = 1$ και $x_d = A = 2$

Για ημιτονοειδής διέγερση της μορφής $x_d = Acos(t) = 2cos(t)$ έχουμε:



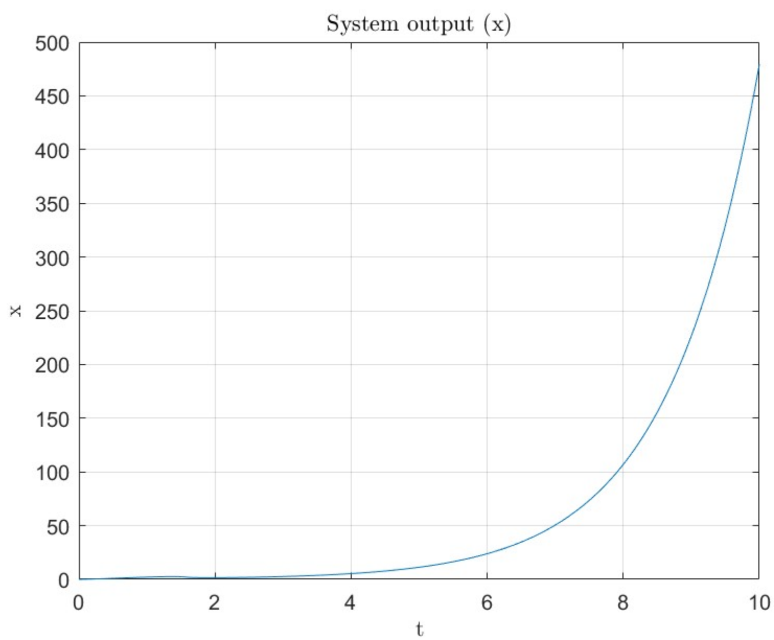
Σχήμα 3: Η έξοδος x του πραγματικού συστήματος για σταθερό $w = 1$ και $x_d = Acos(t) = 2cos(t)$

Ενώ αλλάζοντας την επιλογή του A σε $A = 5$ που δεν πληροί και την προϋπόθεση για το ρ_0 παρατηρούμε αστάθεια.



Σχήμα 4: Η έξοδος x του πραγματικού συστήματος για σταθερό $w = 1$ και $x_d = A = 5$

Και για ημιτονοειδής διέγερση της μορφής $x_d = Acos(t) = 5cos(t)$ (επιλέγουμε συχνότητα $\omega = 1$) έχουμε:

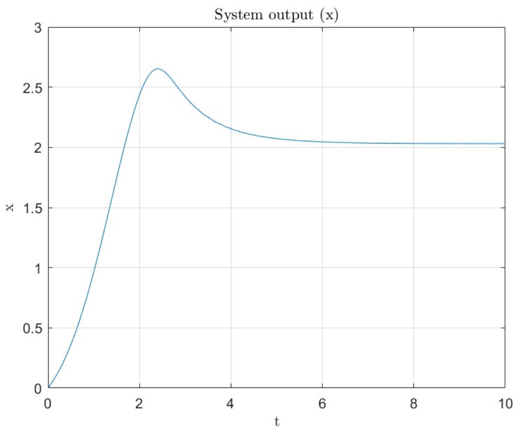


Σχήμα 5: Η έξοδος x του πραγματικού συστήματος για σταθερό $w = 1$ και $x_d = Acos(t) = 5cos(t)$

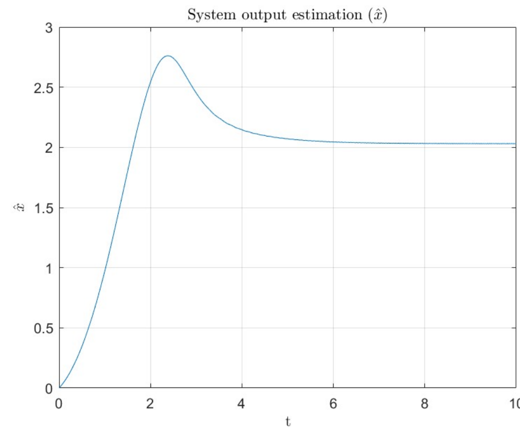
Αντιλαμβανόμαστε πως καθώς μεγαλώνουμε το A θα ήταν σκόπιμο να αυξάνουμε τόσο το ρ_0 όσο και το k. Ήρθε η ώρα να προσομοιώσουμε το σύστημα και τον εκτιμητή όπως μας ζητείται. Δε θα γίνει ιδιαίτερη ανάλυση του τρόπου με τον οποίο προσομοιώνουμε τον εκτιμητή μεθοδολογίας Lyapunov με μεικτή τοπολογία στο MATLAB καθώς έχει αναλυθεί στην Εργασία 2 του μαθήματος σε βάθος. Προκύπτει:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \hat{x} \\ x_3 = \hat{\theta_1} \\ x_4 = \hat{\theta_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x_1} = ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = x_3x_1 + x_4u + \theta_m(x_1 - x_2 + \eta) \\ \dot{x_3} = x_1(x_1 - x_2) \\ \dot{x_4} = u(x_1 - x_2) \end{cases}$$

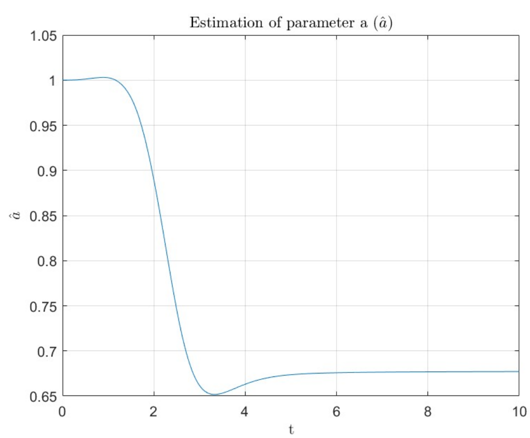
Αποδίδουμε την κατάλληλη τιμή στο w, η οποία είναι $w(t) = \hat{b}(t)$. Προφανώς και δεν ξεχνάμε ότι πρέπει να εισάγουμε και τον περιορισμό λόγω της προβολής, όμως θα ερευνήσουμε και μέσω προσομοίωσης κατά πόσο αυτή είναι απαραίτητη για την ευστάθεια του συστήματος. Προσομοιώνουμε το σύστημα και τον εκτιμητή ακριβώς όπως μας ζητούνται χωρίς όμως την προβολή και έχουμε:
Για επιθυμητή τροχιά $x_d = A = 2$ και με $k = 1$, $\rho_0 = 10$, $\theta_m = 4$ (τιμή στην οποία καταλήγουμε με δοκιμές ως αποδεκτή) έχουμε τα εξής:



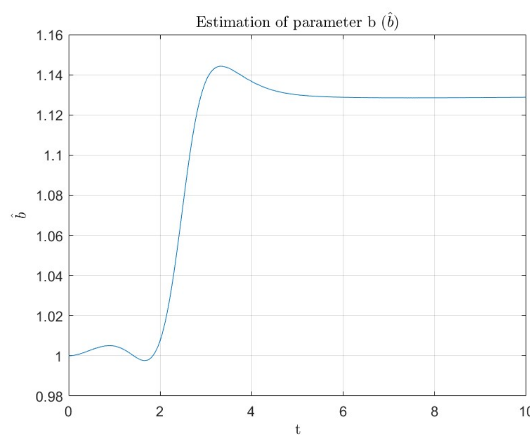
(α′) Έξοδος πραγματικού συστήματος (x)



(β′) Έξοδος εκτιμητή ($\hat{x}$)



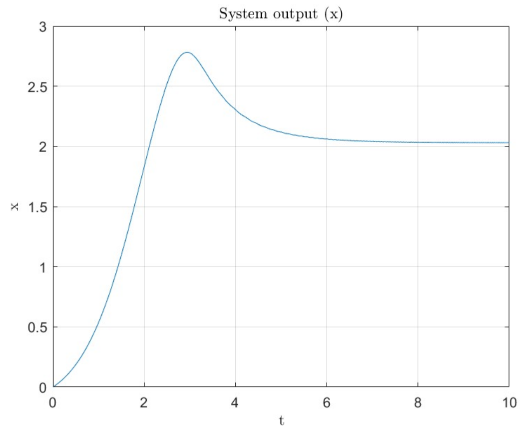
(γ′) Εκτίμηση της παραμέτρου a ($\hat{a}$)



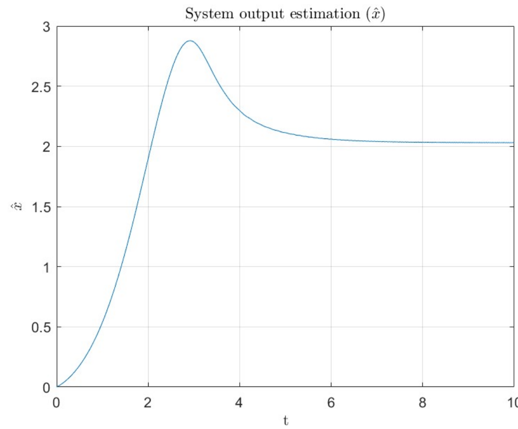
(δ′) Εκτίμηση της παραμέτρου b ($\hat{b}$)

Σχήμα 6: Για $x_d = A = 2$

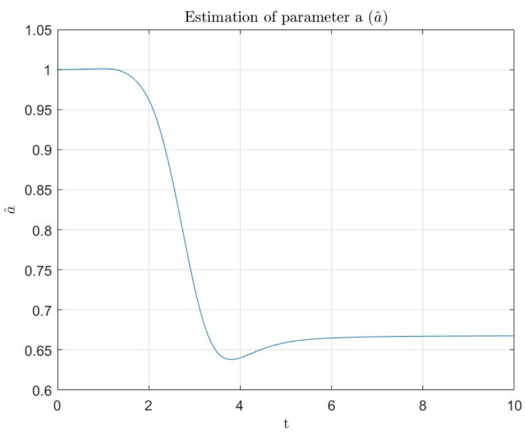
Μεγαλώνοντας το A αλλά και το ρ_0 ώστε να ικανοποιείται ο σχεδιαστικός περιορισμός ο αλγόριθμος δεν τερματίζει και άρα με περαιτέρω δοκιμές συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει να αυξάνουμε και το k. Ήρθε η ώρα να προσομοιώσουμε το σύστημα και τον εκτιμητή ακριβώς όπως μας ζητείται μαζί με την προβολή.
Παρουσιάζουμε ενδεικτικά κάποια γραφήματα πριν περάσουμε στην αξιολόγηση του μοντέλου εκτίμησης. Χρησιμοποιούμε $\rho_0 = 20$ και $\theta_m = 4$.



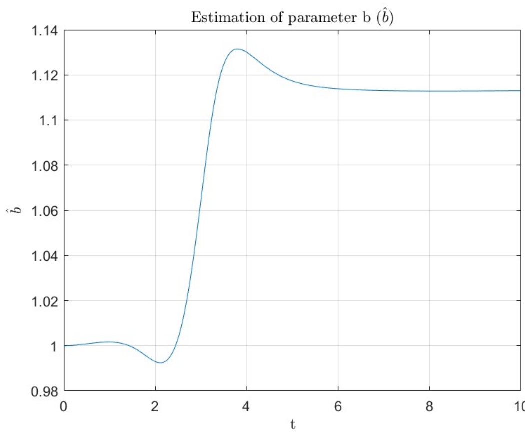
(α′) Έξοδος πραγματικού συστήματος (x)



(β′) Εξοδος εκτιμητή ($\hat{x}$)

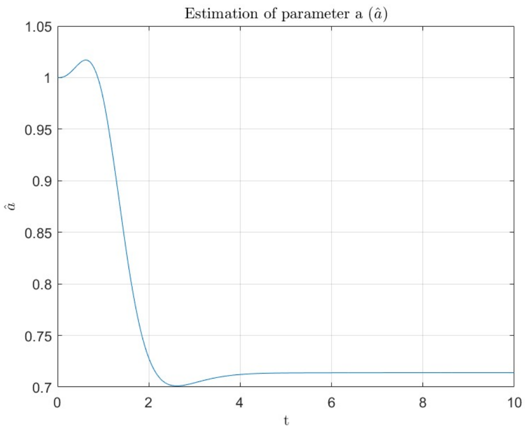


(γ′) Εκτίμηση της παραμέτρου a ($\hat{a}$)

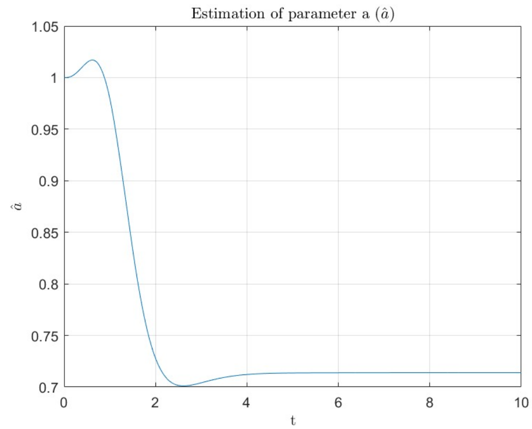


(δ′) Εκτίμηση της παραμέτρου b ($\hat{b}$)

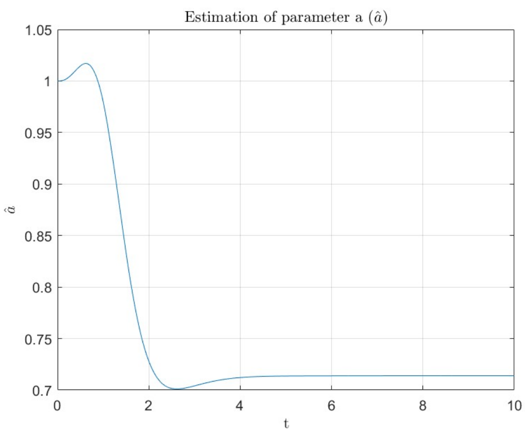
Σχήμα 7: Για $x_d = A = 2$ και $k = 1$



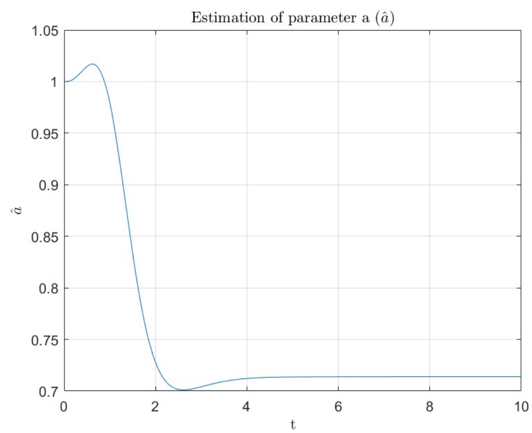
(α′) Έξοδος πραγματικού συστήματος (x)



(β′) Εξοδος εκτιμητή ($\hat{x}$)

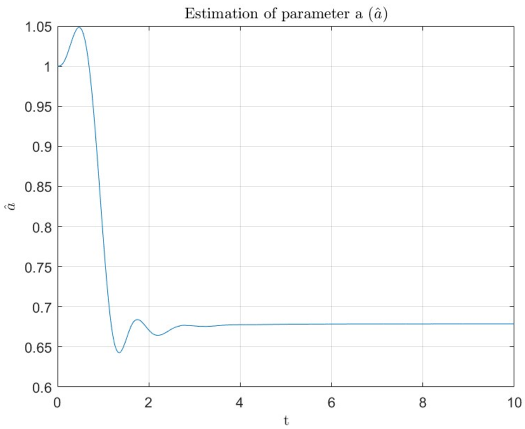


(γ′) Εκτίμηση της παραμέτρου a ($\hat{a}$)

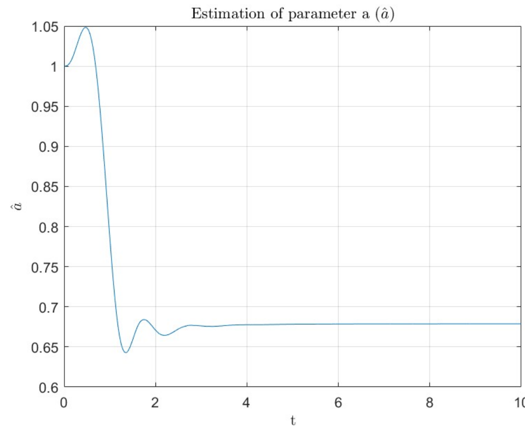


(δ′) Εκτίμηση της παραμέτρου b ($\hat{b}$)

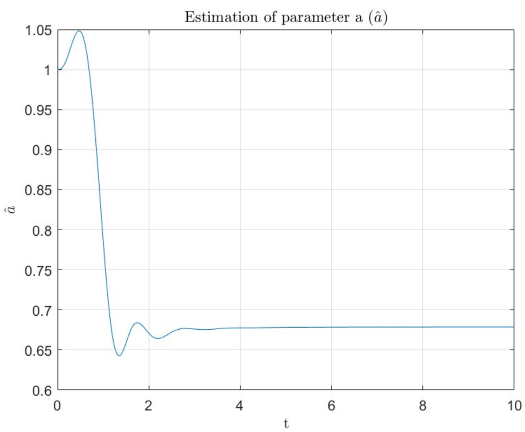
Σχήμα 8: Για $x_d = A = 2$ και $k = 10$



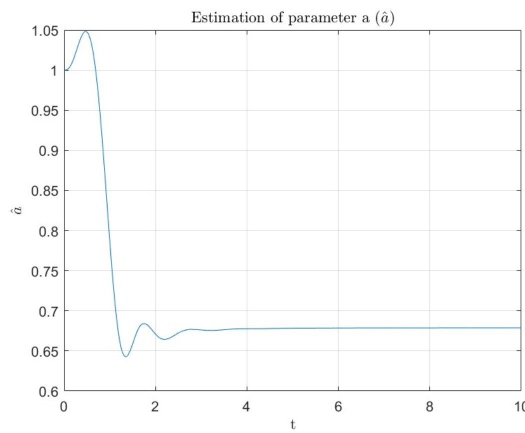
(α′) Έξοδος πραγματικού συστήματος (x)



(β′) Εξοδος εκτιμητή ($\hat{x}$)

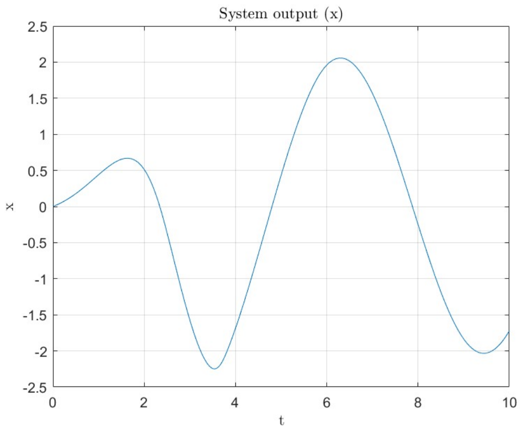


(γ′) Εκτίμηση της παραμέτρου a ($\hat{a}$)

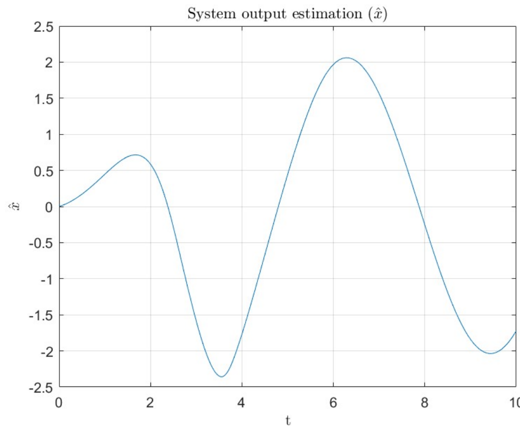


(δ′) Εκτίμηση της παραμέτρου b ($\hat{b}$)

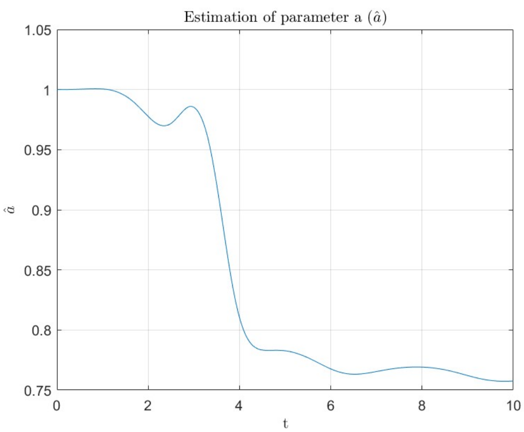
Σχήμα 9: Για $x_d = A = 5$ και $k = 10$



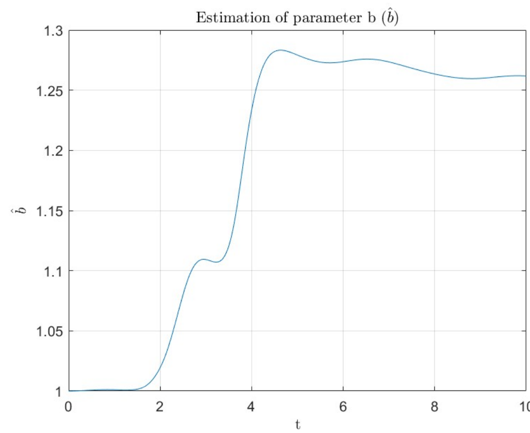
(α′) Έξοδος πραγματικού συστήματος (x)



(β′) Εξοδος εκτιμητή ($\hat{x}$)

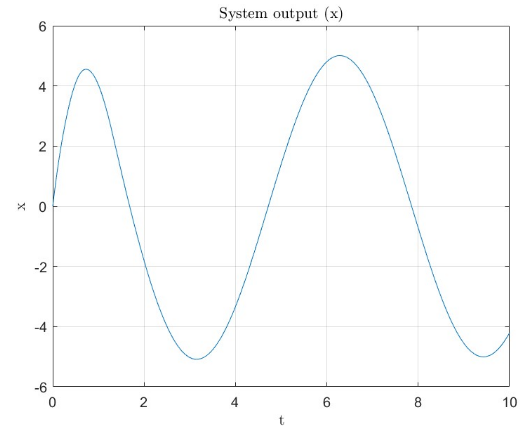


(γ′) Εκτίμηση της παραμέτρου a ($\hat{a}$)

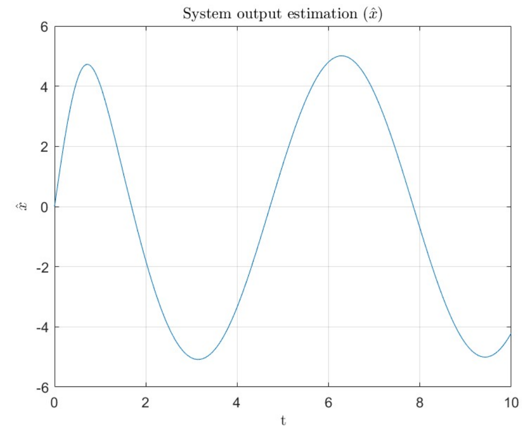


(δ′) Εκτίμηση της παραμέτρου b ($\hat{b}$)

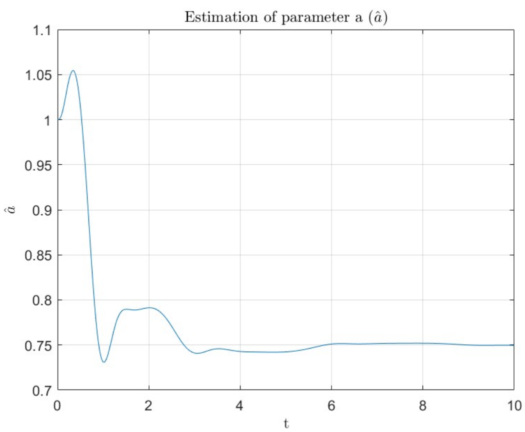
Σχήμα 10: Για $x_d = Acos(wt) = 2cos(t)$ και $k = 1$



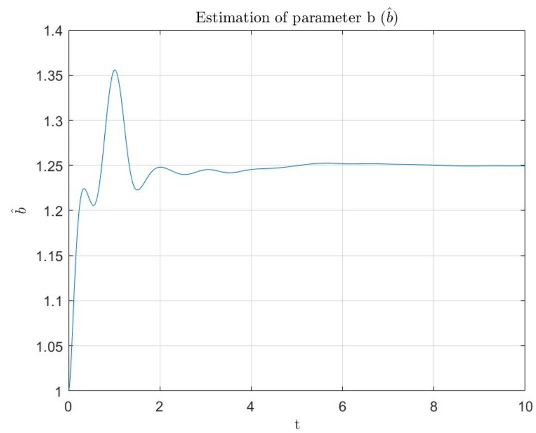
(α΄) Έξοδος πραγματικού συστήματος (x)



(β΄) Εξοδος εκτιμητή ($\hat{x}$)



(γ΄) Εκτίμηση της παραμέτρου a ($\hat{a}$)



(δ΄) Εκτίμηση της παραμέτρου b ($\hat{b}$)

Σχήμα 11: Για $x_d = Acos(wt) = 5cos(t)$ και $k = 20$

2.2 Διαδικασία Εγκάρσιας Αξιολόγησης

Μετά από έρευνα, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι το κατάλληλο toolbox για αξιολόγηση μέσω της διαδικασίας της Εγκάρσιας Αξιολόγησης, είναι το Bioinformatics Toolbox, του οποίου το documentation παραθέτεται εδώ: `https://www.mathworks.com/help/bioinfo/` Δεν έγινε δυνατό να γραφεί σωστά ο κώδικας για την αξιόλογηση, καθώς αντιμετωπίστηκαν προβλήματα στην ενημέρωση των εκτιμώμενων παραμέτρων $\hat{a}$, $\hat{b}$ με τα δεδομένα που προέκυπταν από το σετ εκμάθησης (training data), συνεπώς σε αυτό το σημείο δεν παρουσιάζεται κάποιο συμπέρασμα ή αποτέλεσμα, πέρα από τον κώδικα που υπάρχει στον φάκελο που συνοδεύει την αναφορά.

3 Θέμα 3

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Lyapunov $V(t) = \frac{1}{2}\varepsilon^2(t)$ θα δείξουμε τα ζητούμενα. Το σκεπτικό είναι να καταλήξουμε σε μία σχέση της μορφής $\dot{V} \leq \gamma(t)(A - |\varepsilon|)$ με A σταθερά και$\gamma(t) > 0$ και όταν $|\varepsilon| > A$ θα έχουμε το set του ultimate bound του ε. Συνεπώς, παραγωγίζουμε την V και έχουμε:

$$\dot{V} = \varepsilon\dot{\varepsilon} = \varepsilon\frac{d\varepsilon}{d\xi}\dot{\xi} = \varepsilon\frac{2}{1-\xi^2}\dot{\xi}$$

αφού

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi} = \frac{1-\xi}{1+\xi} \cdot \frac{(1-\xi)+(1+\xi)}{1-\xi^2} = \frac{2}{1-\xi^2}$$

Επιπλέον:

$$\xi(t) = \frac{x(t) - x_d(t)}{\rho(t)} \Rightarrow \dot{\xi}(t) = \frac{\dot{x}(t) - \dot{x_d}(t)}{\rho(t)} - \frac{x(t) - x_d(t)}{\rho^2(t)}\dot{\rho}(t)$$

Αντικαθιστούμε τα γνωστά στην $\dot{V}$ και έχουμε:

$$\dot{V} = \varepsilon(t)\frac{2}{1-\xi^2}\left(\frac{ax(t) - b\dfrac{k}{w(t)}\varepsilon(t) - \dot{x}_d(t)}{\rho(t)} - \frac{x(t) - x_d(t)}{\rho^2(t)}\dot{\rho}(t)\right)$$

$$\dot{V} = \frac{2}{1-\xi^2}\left(\frac{ax(t)\varepsilon(t) - b\dfrac{k}{w(t)}\varepsilon^2(t) - \dot{x}_d(t)\varepsilon(t)}{\rho(t)} - \varepsilon(t)\frac{x(t) - x_d(t)}{\rho^2(t)}\dot{\rho}(t)\right)$$

Στη σχέση αυτή έχουμε θετικές σταθερές τα a, b, k, το $\xi \in (-1, 1)$ λόγω του πεδίου ορισμού της $\varepsilon(t)$, τα $x(t)$, $x_d(t)$ φραγμένα λόγω του $\xi(t)$ και του φραγμένου, μεταξύ των ρ_0 και ρ_∞, $\rho(t)$, του οποίου η παράγωγος $\dot{\rho}(t)$ μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά και είναι επίσης φραγμένη. Επίσης $\dot{x}_d$ φραγμένο από εκφώνηση, $w(t)$ φραγμένο απο πάνω και από κάτω και θετικό άρα ο αρνητικός όρος $-\varepsilon^2(t)$ κυριαρχεί και άρα έχουμε πως $\dot{V} \leq 0$ και άρα αποδείξαμε ότι τόσο $x(t)$, όσο και $u(t)$ είναι φραγμένα δηλαδή $x(t), u(t) \in L_\infty$.
Για το ερώτημα ii) πιθανώς εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι η $\varepsilon(t)$ έχει πεδίο ορισμού το $(-1, 1)$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ καθώς και την υπόδειξη της εκφώνησης για τα όρια.