

# Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Γραμμική Παραμετροποίηση - Εκτίμηση Αγνώστων Παραμέτρων -  
Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Μπίλλας Θωμάς Αχιλλέας  
ΑΕΜ: hidden

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών ΑΠΘ  
Απρίλιος 2024

# Εργασία 1

Μπίλλας Θωμάς Αχιλλέας

Απρίλιος 2024

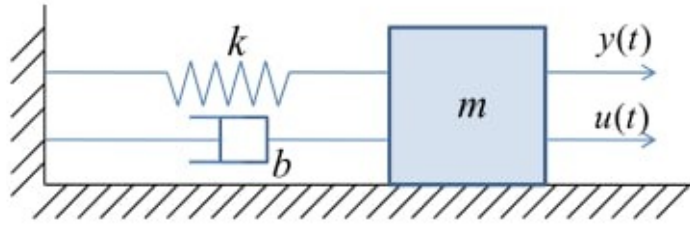
## Περιεχόμενα

<b>0</b>	<b>Πρόλογος</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Θέμα 1</b>	<b>3</b>
1.1	Ερώτημα 1 . . . . .	3
1.2	Ερώτημα 2 . . . . .	4
1.3	Ερώτημα 3 . . . . .	4
1.3.1	Για την επιλογή των $\lambda_1, \lambda_2$ . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Θέμα 2</b>	<b>9</b>
2.1	Ερώτημα 1 . . . . .	9
2.2	Ερώτημα 2 . . . . .	16

## 0 Πρόλογος

Η παρούσα αναφορά συντάσσεται στα πλαίσια του μαθήματος “Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων” του 8ου εξαμήνου στο τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΑΠΘ. Αφορά Γραμμική Παραμετροποίηση, Εκτίμηση Αγνώστων Παραμέτρων και τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων. Στο πρώτο σκέλος της αναφοράς πραγματοποιείται θεωρητική ανάλυση για ένα σύστημα μάζα - ελατήριο - αποσβεστήρας όπως αυτή διδάχθηκε στην αίθουσα και ακολουθώντας τις σημειώσεις του μαθήματος. Επιπλέον, με βάση τη θεωρητική ανάλυση του συστήματος γίνεται η προσομοίωση και ανάλυση του στο MATLAB με βάση τα δεδομένα που δόθηκαν στην εκφώνηση. Στο δεύτερο σκέλος πραγματοποιείται η ίδια ανάλυση για ένα κύκλωμα RLC με δύο πηγές τάσεις. Στη συνέχεια, πέρα από τα θεωρητικά και πειραματικά αποτελέσματα, καταγράφονται και παρατηρήσεις, σχόλια και συμπεράσματα που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της ανάλυσης. Τέλος, στον υποβληθέντα φάκελο υπάρχουν και οι κώδικες του MATLAB που οδήγησαν στα διαγράμματα που παρουσιάζονται στο μήκος της αναφοράς και αποτελούν τη βάση για ορισμένα από τα συμπεράσματα και τις παρατηρήσεις που αναφέρθηκαν.

# 1 Θέμα 1



Σχήμα 1: Δοθέν σύστημα μάζας - ελατηρίου - αποσβεστήρα

Δίνεται το παραπάνω σύστημα, όπου  $b > 0$  η σταθερά απόσβεσης,  $k > 0$  η σταθερά ελατηρίου,  $m > 0$  η μάζα του σώματος,  $y(t)$  η μετατόπιση αυτού λόγω μιας εξωτερικής δύναμης  $u(t)$  που εφαρμόζεται σε αυτό.

## 1.1 Ερώτημα 1

Για να περιγράψουμε τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος θα χρησιμοποιήσουμε τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα μέσω του οποίου μπορεί να διατυπωθεί το εξής:

$$\Sigma F = m \cdot a \Leftrightarrow u - k \cdot y - b \cdot \dot{y} = m \cdot \ddot{y} \Leftrightarrow \ddot{y} = -\frac{b}{m} \cdot \dot{y} - \frac{k}{m} \cdot y + \frac{1}{m} \cdot u \quad (1)$$

Διαθέτοντας τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος μπορούμε να το παραμετροποιήσουμε γραμμικά όπως μας ζητείται με την εξής μεθοδολογία:

- Ορίζουμε τα διανύσματα των παραμέτρων  $\theta_1^*$  και  $\theta_2^*$  τα οποία συνθέτουν το διάνυσμα παραμέτρων  $\theta^*$  και για τα οποία ισχύει:

$$\theta_1^* = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & \frac{k}{m} \end{bmatrix}^T$$

$$\theta_2^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \end{bmatrix}^T$$

$$\theta^* = [\theta_1^{*T} \quad \theta_2^{*T}]^T = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{1}{m} \end{bmatrix}^T$$

Επιπλέον ομαδοποιούμε τα διανύσματα εισόδου-εξόδου σε διάνυσμα  $\Delta$  για το οποίο ισχύει:

$$\Delta = [-\dot{y} \quad -y \quad u]^T$$

Άρα το (1) γράφεται στη μορφή:  $\ddot{y} = \theta^{*T} \cdot \Delta$ .

- Στη συνέχεια περνάμε το σύστημα από ευσταθές φίλτρο  $\frac{1}{\Lambda(s)}$  για το οποίο όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία θα πρέπει να ισχύει:  $\Lambda(s) = (s + \lambda_1) \cdot (s + \lambda_2) = s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot s + (\lambda_1 \cdot \lambda_2)$  με τα  $\lambda_1, \lambda_2$  θετικά. Συνεπώς παίρνουμε τον πίνακα

$$\lambda = [\lambda_1 + \lambda_2 \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2]^T$$

Επίσης παίρνουμε τους πίνακες

$$\Delta_1(s) = [s \quad 1]^T$$

και

$$\Delta_2(s) = [1]^T$$

- Τέλος ορίζουμε το διάνυσμα  $\theta_\lambda$  για το οποίο ισχύει:

$$\theta_\lambda = [\theta_1^{*T} - \lambda^T \quad \theta_2^{*T}]^T = \left[ \frac{b}{m} - (\lambda_1 + \lambda_2) \quad \frac{k}{m} - \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad \frac{1}{m} \right]^T$$

Και το διάνυσμα  $\zeta$  για το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε και τα  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$  έχουμε:

$$\zeta = \left[ -\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} \cdot y \quad \frac{\Delta_2^T(s)}{\Lambda(s)} \cdot u \right]^T = \left[ -\frac{s}{\Lambda(s)} \cdot y \quad -\frac{1}{\Lambda(s)} \cdot y \quad \frac{1}{\Lambda(s)} \cdot u \right]^T$$

Και φέρνουμε τελικά το σύστημα στην επιθυμητή μορφή:

$$y = \theta_\lambda^T \cdot \zeta$$

όπου

$$\theta_\lambda = \left[ \frac{b}{m} - (\lambda_1 + \lambda_2) \quad \frac{k}{m} - \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad \frac{1}{m} \right]^T$$

και

$$\zeta = \left[ -\frac{s}{\Lambda(s)} \cdot y \quad -\frac{1}{\Lambda(s)} \cdot y \quad \frac{1}{\Lambda(s)} \cdot u \right]^T$$

## 1.2 Ερώτημα 2

Έχοντας φέρει το σύστημα σε παραμετροποιημένη μορφή:

$$y = \theta_\lambda^T \cdot \zeta$$

Μπορούμε με βάση και τη θεωρία να χρησιμοποιήσουμε τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων για να εκτιμήσουμε το διάνυσμα  $\theta_\lambda$  στα στοιχεία του οποίου βρίσκονται οι άγνωστες παράμετροι  $m$ ,  $b$  και  $k$ .

Θα δώσουμε σε αυτό το σημείο την έκφραση από την οποία θα βρεθεί το άγνωστο διάνυσμα και στο επόμενο ερώτημα αφού έχουμε προσομοιώσει το σύστημα στο MATLAB θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση ode και ειδικότερα την ode45 για να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση του συστήματος και στη συνέχεια μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων θα βρεθούν οι ζητούμενες εκτιμήσεις για τις παραμέτρους.

Συνεπώς, έστω ότι μετράμε την έξοδο  $Y$  σε  $N$  διαφορετικές χρονικές στιγμές. Θα έχουμε τους πίνακες:

$$Y = [y(t_1) \quad \dots \quad y(t_N)]^T$$

$$\theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \varphi_3(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \varphi_3(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1(t_N) & \varphi_2(t_N) & \varphi_3(t_N) \end{bmatrix}$$

Και γνωρίζουμε πως το ζητούμενο διάνυσμα  $\theta_0$  προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους  $V$  του σφάλματος  $e = Y - \varphi \cdot \theta$ , η οποία είναι  $V(\theta, Z_N) = \frac{1}{N} \cdot \frac{|Y - \varphi \cdot \theta|^2}{2}$ . Λύνοντας την  $\left. \frac{\partial V(\theta, Z_N)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0$

παίρνουμε το ζητούμενο  $\theta = \theta_0$ .

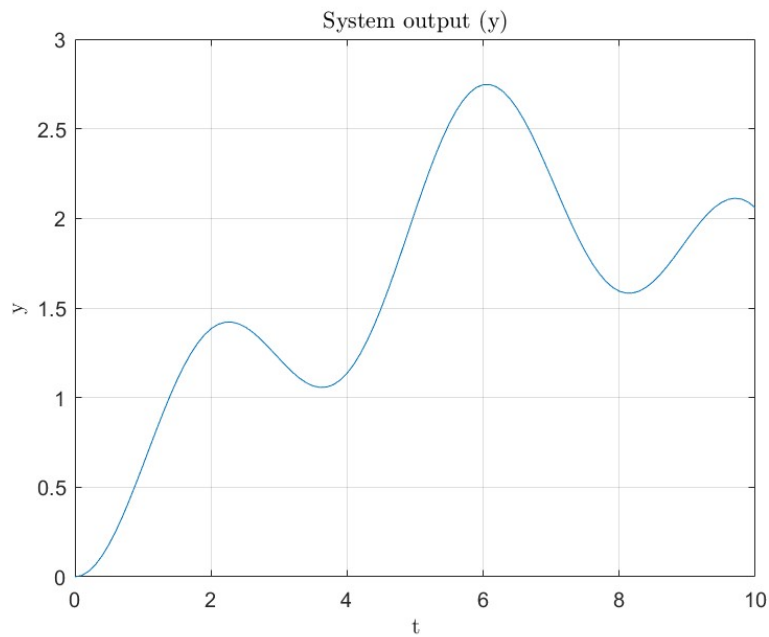
Η θεωρία μας δίνει ότι:

$$\theta_0^T = Y^T \cdot \Phi \cdot (\Phi^T \cdot \Phi)^{-1}$$

## 1.3 Ερώτημα 3

Προσομοιώνουμε το σύστημα στο MATLAB και επιλέγουμε με βάση την εκφώνηση τιμές για τις σταθερές ( $m = 8.5$ ,  $b = 0.65$ ,  $k = 2$ ) και για την είσοδο ( $u(t) = 10 \cdot \cos(0.5\pi t) + 3$ ). Θεωρούμε μηδενικές αρχικές συνθήκες, δειγματοληπτούμε κάθε  $0.1s$ . από το διάστημα  $[t_0 \quad t_f] = [0 \quad 10]$  και χρησιμοποιούμε την ode45 για την επίλυση.

Για την έξοδο  $y$  του συστήματος παίρνουμε:



Σχήμα 2: Η έξοδος του συστήματος συναρτήσει του χρόνου

Για να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο, χρειάζεται να επιλέξουμε τιμές για τα  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  του ευσταθούς φίλτρου. Επιλέγουμε για το φίλτρο να έχει ένα διπλό πραγματικό πόλο στο  $-1$  δηλαδή επιλέγουμε  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Η επιλογή αυτή δίνει ιδιαίτερα ικανοποιητικές τιμές για τις εκτιμήσεις και θα αναλυθεί παρακάτω. Για τις εκτιμήσεις προκύπτουν οι εξής τιμές:

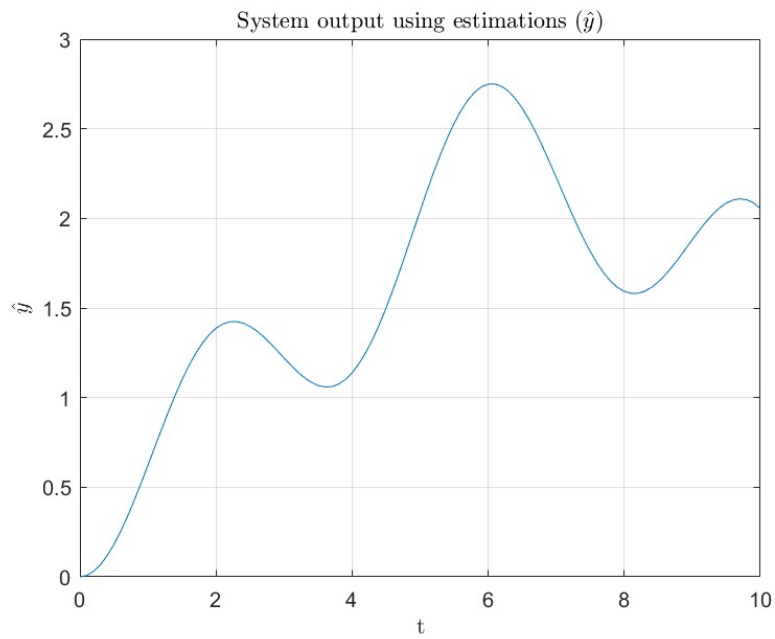
```
The estimations using the Least Squares Method for lamda_1 = 1 and lamda_2 = 1 are:
k_hat =
    2.0003

b_hat =
    0.6403

m_hat =
    8.4905
```

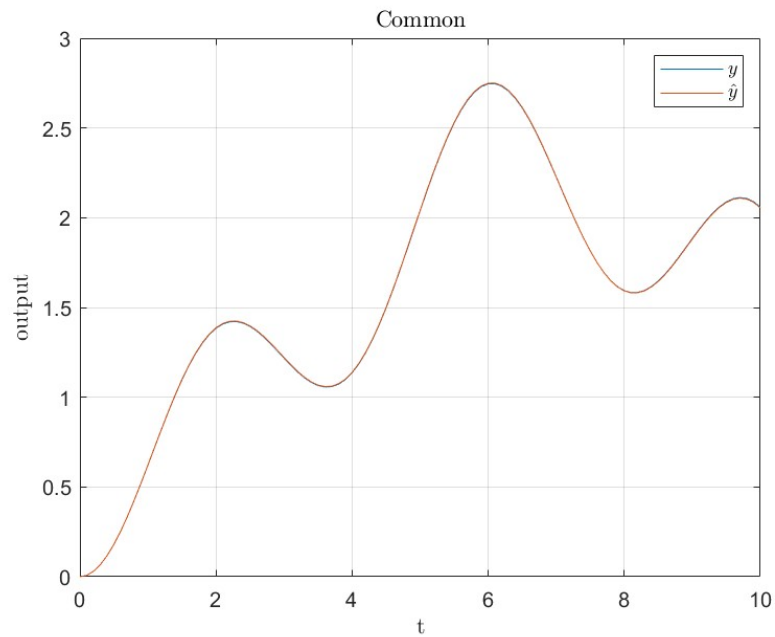
Σχήμα 3: Εκτιμήσεις των παραμέτρων από το MATLAB

Παρατηρούμε πως οι εκτιμήσεις είναι πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές των παραμέτρων συνεπώς μπορούμε να περιμένουμε πως η έξοδος του συστήματος χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις για τις παραμέτρους θα είναι πολύ κοντά στην πραγματική έξοδο. Πράγματι:



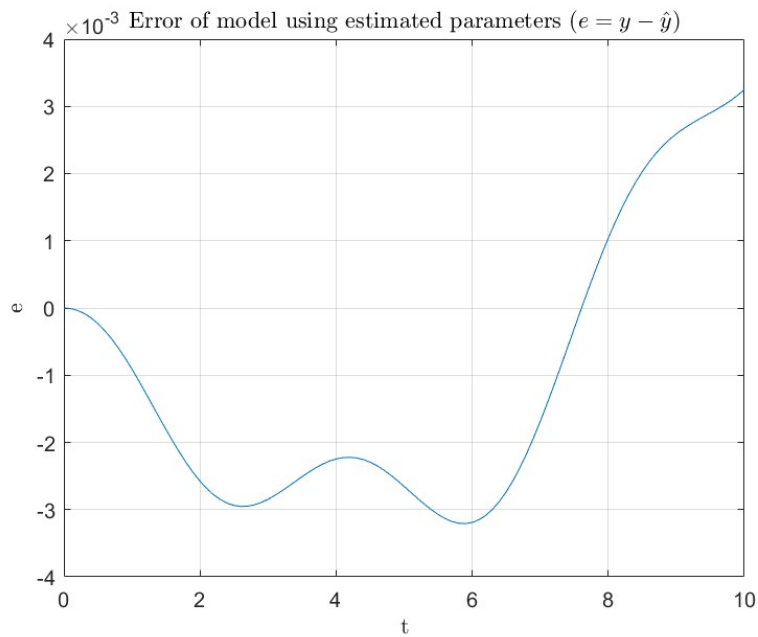
Σχήμα 4: Η έξοδος του συστήματος με εκτίμηση για τις παραμέτρους συναρτήσει του χρόνου

Και σε κοινό διάγραμμα η έξοδος για τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων και για τις εκτιμήσεις:



Σχήμα 5: Η έξοδος για τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων και για τις εκτιμήσεις συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρούμε πως πρακτικά φαίνονται να ταυτίζονται και άρα περιμένουμε και η διαφορά τους, δηλαδή το σφάλμα της εκτίμησης να είναι πολύ μικρό. Πράγματι:



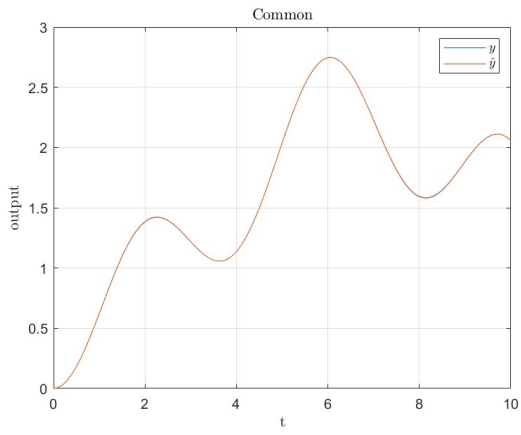
Σχήμα 6: Σφάλμα μοντέλου - Διαφορά πραγματικής εξόδου και εξόδου με εκτιμήσεις

Παρατηρούμε πως το σφάλμα δεν ξεπερνά κατά απόλυτη τιμή το 0.0033 είναι δηλαδή της τάξεως του  $10^{-3}$  γεγονός που καθιστά το μοντέλο μας ιδιαίτερα ικανοποιητικό.

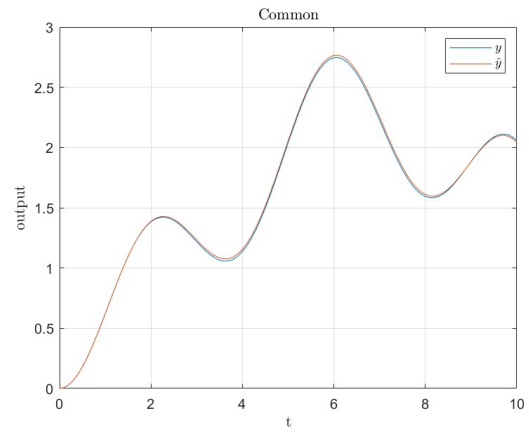
### 1.3.1 Για την επιλογή των $\lambda_1, \lambda_2$

Το σκεπτικό πίσω από την επιλογή των  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι να έχει το ευσταθές φίλτρο έναν διπλό πραγματικό αρνητικό πόλο. Δοκιμάζοντας διάφορες τιμές καταλήγουμε πως η μεγαλύτερη ακρίβεια στις εκτιμήσεις των παραμέτρων υπάρχει όταν επιλέγουμε τιμές γύρω στο 0.5 όμως για να μην επιλέξουμε μία τιμή τόσο κοντά στο 0, καταλήγουμε στην επιλογή που έγινε στην ανάλυση για  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Παραθέτουμε τα κοινά διαγράμματα της εξόδου του συστήματος με τις πραγματικές των παραμέτρων και της εξόδου με τις εκτιμήσεις για διάφορες τιμές του διπλού πόλου για να επιβεβαιωθεί ότι δεν ήταν ικανοποιητικές οι εκτιμήσεις.

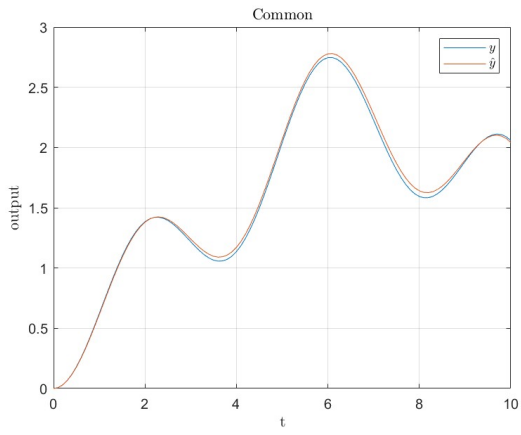




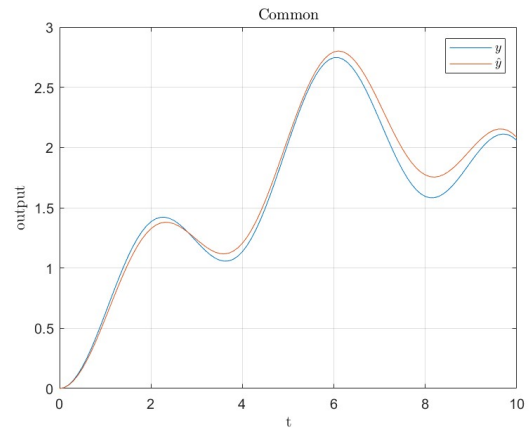
(α') Κοινό διάγραμμα για  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$



(β') Κοινό διάγραμμα για  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$

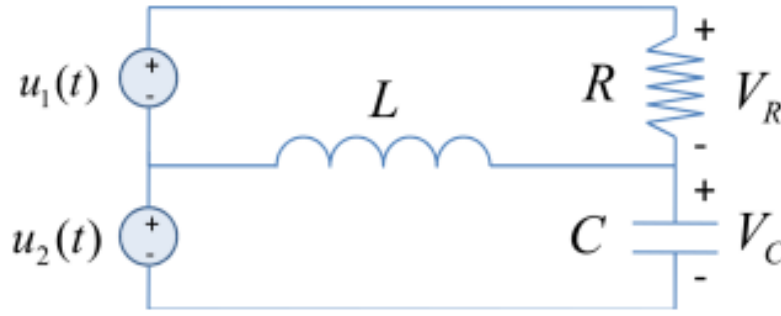


(γ') Κοινό διάγραμμα για  $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$



(δ') Κοινό διάγραμμα για  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10$

## 2 Θέμα 2



Σχήμα 8: Δοθέν σύστημα - Κύκλωμα RLC

Δίνεται το παραπάνω κύκλωμα με 2 πηγές τάσης, αντίσταση  $R$ , πηνίο  $L$  και πυκνωτή  $C$ , όπου  $u_1(t) = 3 \cdot \sin(\pi t)$  και  $u_2(t) = 2.5$  ενώ μπορούμε να μετρήσουμε μόνο τις τάσεις  $V_R$  και  $V_C$  στα άκρα της αντίστασης και του πυκνωτή αντίστοιχα.

### 2.1 Ερώτημα 1

Ζητείται να βρεθεί ο πίνακας μεταφοράς του κυκλώματος, συνεπώς είναι αναγκαίο να προβούμε σε κυκλωματική ανάλυση. Θεωρούμε πως ο άνω βρόχος διέρχεται από ρεύμα  $I_1$  φοράς όμοια με την ωρολογιακή την οποία ορίζουμε και ως θετική φορά σε αυτόν. Επίσης, θεωρούμε πως ο κάτω βρόχος διέρχεται από ρεύμα  $I_2$  φοράς όμοια με την ωρολογιακή την οποία ορίζουμε και ως θετική φορά σε αυτόν.

Για τον πάνω βρόχο με βάση τον Δεύτερο Κανόνα του Kirchhoff θα ισχύει ότι:

$$u_1(t) = V_R + V_{L1}$$

όπου

$$V_{L1} = L \cdot \frac{dI_{L1}}{dt} = L \cdot \frac{d(I_1 - I_2)}{dt} = L \cdot \dot{I}_1 - L \cdot \dot{I}_2$$

Άρα

$$u_1(t) = V_R + L \cdot \dot{I}_1 - L \cdot \dot{I}_2 \quad (2)$$

Για τον κάτω βρόχο με βάση τον Δεύτερο Κανόνα του Kirchhoff θα ισχύει ότι:

$$u_2(t) = V_C + V_{L2}$$

όπου

$$V_{L2} = L \cdot \frac{dI_{L2}}{dt} = L \cdot \frac{d(I_2 - I_1)}{dt} = L \cdot \dot{I}_2 - L \cdot \dot{I}_1$$

Άρα

$$u_2(t) = V_C + L \cdot \dot{I}_2 - L \cdot \dot{I}_1 \quad (3)$$

Θέλουμε να έχουμε στις εξισώσεις μας μόνο τα  $V_C$ ,  $V_R$ ,  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  και τις παραμέτρους  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Χρησιμοποιούμε τον νόμο του Ohm και έχουμε:

$$I_1 = \frac{V_R}{R} \implies \dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_R}{R}$$

Ενώ επίσης για τους πυκνωτές γνωρίζουμε ότι:

$$I_2 = C \cdot \frac{dV_C}{dt} = C \cdot \dot{V}_C \implies \ddot{I}_2 = C \cdot \ddot{V}_C$$

Άρα:

$$(2) \implies u_1(t) = V_R + \frac{L}{R} \cdot \dot{V}_R - L \cdot C \cdot \ddot{V}_C \quad (4)$$

και

$$(3) \implies u_2(t) = V_C - \frac{L}{R} \cdot \dot{V}_R + L \cdot C \cdot \ddot{V}_C \quad (5)$$

Επιπλέον εφαρμόζοντας τον Δεύτερο Κανόνα του Kirchhoff σε όλο το κύκλωμα, δηλαδή στον υπερβρόχο, θα πάρουμε:

$$u_1(t) + u_2(t) = V_C + V_R \quad (6)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (6) για να απαλείψουμε το  $V_R$  και αντικαθιστώντας είτε στην (4) είτε στην (5) και μετά από πράξεις παίρνουμε:

$$\ddot{V}_C + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{V}_C + \frac{1}{L \cdot C} \cdot V_C = \frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{u}_1 + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{u}_2 + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_2 \quad (7)$$

Ενώ, χρησιμοποιώντας την σχέση (6) για να απαλείψουμε το  $V_C$  και αντικαθιστώντας είτε στην (4) είτε στην (5) και μετά από πράξεις παίρνουμε:

$$\ddot{V}_R + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{V}_R + \frac{1}{R \cdot L} \cdot V_R = \ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_1 \quad (8)$$

Συνεχίζουμε παίρνοντας τον Μετασχηματισμό Laplace για τις δυο τελευταίες σχέσεις και παίρνουμε αντίστοιχα:

$$s^2 \cdot V_C(s) + \frac{s}{R \cdot C} \cdot V_C(s) + \frac{1}{L \cdot C} \cdot V_C(s) = \frac{s}{R \cdot C} U_1(s) + \frac{s}{R \cdot C} U_2(s) + \frac{1}{L \cdot C} \cdot U_2(s)$$

$$s^2 \cdot V_R(s) + \frac{s}{R \cdot C} \cdot V_R(s) + \frac{1}{L \cdot C} \cdot V_R(s) = s^2 \cdot U_1(s) + s^2 \cdot U_2(s) + \frac{1}{L \cdot C} \cdot U_2(s)$$

Μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε σε σχέσεις της μορφής:

$$V_C(s) = a \cdot U_1(s) + b \cdot U_2(s)$$

και

$$V_R(s) = c \cdot U_1(s) + d \cdot U_2(s)$$

Δηλαδή

$$\begin{bmatrix} V_C(s) \\ V_R(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

όπου ο

$$G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

με

$$a = \frac{\frac{s}{R \cdot C}}{s^2 + \frac{s}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$b = \frac{\frac{s}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}{s^2 + \frac{s}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$c = \frac{s^2 + \frac{1}{L \cdot C}}{s^2 + \frac{s}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

και

$$d = \frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

είναι ο πίνακας μεταφοράς του κυκλώματος.

Για να προσδιοριστεί πλήρως ο  $G$ , μένει να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Για να το κάνουμε αυτό

θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων όπως μας ζητείται. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο τόσο στην διαφορική εξίσωση (7) όσο και στην διαφορική εξίσωση (8). Θα επιλέξουμε την (7) μιας και αυτή έχει παραγώγους μικρότερης τάξης για τις  $u(t)$  και άρα τα διανύσματα των παραμέτρων θα είναι μικρότερα σε σχέση με την άλλη επιλογή.

Συνεπώς, γραμμικοποιούμε παραμετρικά πρώτα το σύστημα όπως ακριβώς κάναμε και στο Θέμα 1. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\ddot{V}_C + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{V}_C + \frac{1}{L \cdot C} \cdot V_C &= \frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{u}_1 + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{u}_2 + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ddot{V}_C &= -\frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{V}_C - \frac{1}{L \cdot C} \cdot V_C + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{u}_1 + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \dot{u}_2 + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_2\end{aligned}$$

- Ορίζουμε τα διανύσματα των παραμέτρων  $\theta_1^*$  και  $\theta_2^*$  τα οποία συνθέτουν το διάνυσμα παραμέτρων  $\theta^*$  και για τα οποία ισχύει:

$$\begin{aligned}\theta_1^* &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R \cdot C} & \frac{1}{L \cdot C} \end{bmatrix}^T \\ \theta_2^* &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R \cdot C} & 0 & \frac{1}{R \cdot C} & \frac{1}{L \cdot C} \end{bmatrix}^T \\ \theta^* &= [\theta_1^{*T} \quad \theta_2^{*T}]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{R \cdot C} & \frac{1}{L \cdot C} & \frac{1}{R \cdot C} & 0 & \frac{1}{R \cdot C} & \frac{1}{L \cdot C} \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

Επιπλέον ομαδοποιούμε τα διανύσματα εισόδου-εξόδου σε διάνυσμα  $\Delta$  για το οποίο ισχύει:

$$\Delta = [-\dot{V}_C \quad -V_C \quad \dot{u}_1 \quad u_1 \quad \dot{u}_2 \quad u_2]^T$$

Άρα η (7) γράφεται στη μορφή:  $\ddot{y} = \theta^{*T} \cdot \Delta$ .

- Στη συνέχεια περνάμε το σύστημα από ευσταθές φίλτρο  $\frac{1}{\Lambda(s)}$  για το οποίο όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία θα πρέπει να ισχύει:  $\Lambda(s) = (s + \lambda_1) \cdot (s + \lambda_2) = s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot s + (\lambda_1 \cdot \lambda_2)$  με τα  $\lambda_1, \lambda_2$  θετικά. Συνεπώς παίρνουμε τον πίνακα

$$\lambda = [\lambda_1 + \lambda_2 \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2]^T$$

Επίσης παίρνουμε τους πίνακες

$$\begin{aligned}\Delta_1(s) &= [s \quad 1]^T \\ \Delta_2(s) &= [s \quad 1]^T \\ \Delta_3(s) &= [s \quad 1]^T\end{aligned}$$

- Τέλος ορίζουμε το διάνυσμα  $\theta_\lambda$  για το οποίο ισχύει:

$$\theta_\lambda = [\theta_1^{*T} - \lambda^T \quad \theta_2^{*T}]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{R \cdot C} - (\lambda_1 + \lambda_2) & \frac{1}{L \cdot C} - \lambda_1 \cdot \lambda_2 & \frac{1}{R \cdot C} & 0 & \frac{1}{R \cdot C} & \frac{1}{L \cdot C} \end{bmatrix}^T$$

Και το διάνυσμα  $\zeta$  για το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε και τα  $\Delta_1, \Delta_2$  και  $\Delta_3$  έχουμε:

$$\begin{aligned}\zeta &= \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} \cdot V_C & \frac{\Delta_2^T(s)}{\Lambda(s)} \cdot u_1 & \frac{\Delta_3^T(s)}{\Lambda(s)} \cdot u_2 \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)} \cdot V_C & -\frac{1}{\Lambda(s)} \cdot V_C & \frac{s}{\Lambda(s)} \cdot u_1 & \frac{1}{\Lambda(s)} \cdot u_1 & \frac{s}{\Lambda(s)} \cdot u_2 & \frac{1}{\Lambda(s)} \cdot u_2 \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

Και φέρνουμε τελικά το σύστημα στην επιθυμητή γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή:

$$V_C = \theta_\lambda^T \cdot \zeta$$

όπου

$$\theta_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{R \cdot C} - (\lambda_1 + \lambda_2) & \frac{1}{L \cdot C} - \lambda_1 \cdot \lambda_2 & \frac{1}{R \cdot C} & 0 & \frac{1}{R \cdot C} & \frac{1}{L \cdot C} \end{bmatrix}^T$$

και

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)} \cdot V_C & -\frac{1}{\Lambda(s)} \cdot V_C & \frac{s}{\Lambda(s)} \cdot u_1 & \frac{1}{\Lambda(s)} \cdot u_1 & \frac{s}{\Lambda(s)} \cdot u_2 & \frac{1}{\Lambda(s)} \cdot u_2 \end{bmatrix}^T$$

Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων, πάλι όπως και στο Θέμα 1. Μόνο που οι μετρήσεις για την έξοδο  $y = V_C$  δε θα προκύψουν από την ode και την προσομοίωση του συστήματος, αλλά από το αρχείο v.p, και έτσι θα βρούμε τις εκτιμήσεις για τις άγνωστες παραμέτρους που υπάρχουν στο διάνυσμα  $\theta_\lambda$ . Συνεπώς, έστω ότι μετράμε την έξοδο  $Y = V_C$  σε  $N$  διαφορετικές χρονικές στιγμές. Θα έχουμε τους πίνακες:

$$Y = [y(t_1) \quad \dots \quad y(t_N)]^T$$

$$\theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6]^T$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \varphi_3(t_1) & \varphi_4(t_1) & \varphi_5(t_1) & \varphi_6(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \varphi_3(t_2) & \varphi_4(t_2) & \varphi_5(t_2) & \varphi_6(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1(t_N) & \varphi_2(t_N) & \varphi_3(t_N) & \varphi_4(t_N) & \varphi_5(t_N) & \varphi_6(t_N) \end{bmatrix}$$

Και γνωρίζουμε πως το ζητούμενο διάνυσμα  $\theta_0$  προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους  $V$  του σφάλματος  $e = Y - \varphi \cdot \theta$ , η οποία είναι  $V(\theta, Z_N) = \frac{1}{N} \cdot \frac{|Y - \varphi \cdot \theta|^2}{2}$ . Λύνοντας την  $\left. \frac{\partial V(\theta, Z_N)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0$  παίρνουμε το ζητούμενο  $\theta = \theta_0$ .

Η θεωρία μας δίνει ότι:

$$\theta_0^T = Y^T \cdot \Phi \cdot (\Phi^T \cdot \Phi)^{-1}$$

Υλοποιώντας τον αλγόριθμο στο MATLAB και χρησιμοποιώντας για τις ιδιοτιμές του φίλτρου τις τιμές  $\lambda_1 = 10$  και  $\lambda_2 = 10$ , οι οποίες επιλέχθηκαν μετά από αρκετές δοκιμές καταλήγουμε στις τιμές  $-0.63$ ,  $63$  για τις ποσότητες  $\frac{1}{R \cdot C}$  και  $\frac{1}{L \cdot C}$  αντίστοιχα. Οι τιμές αυτές προκύπτουν από το διάνυσμα των παραμέτρων το οποίο δίνει 3 τιμές για την ποσότητα  $\frac{1}{R \cdot C}$  και 2 για την ποσότητα  $\frac{1}{L \cdot C}$  παίρνοντας τον μέσο όρο. Η αρνητική τιμή για την χωρητικότητα μας προβληματίζει σε ένα βαθμό όμως αυτό δε συνεπάγεται κάποιο σφάλμα στη μεθοδολογία και μπορεί να οφείλεται είτε στις δεδομένες τιμές του v.p είτε να ερμηνευτεί σαν κάποια μετατροπή στη μορφολογία του δοθέντος κυκλώματος. Με αυτές τις τιμές θα γίνουν οι προσομοιώσεις για τα  $\hat{V}_C$  και  $\hat{V}_R$ .

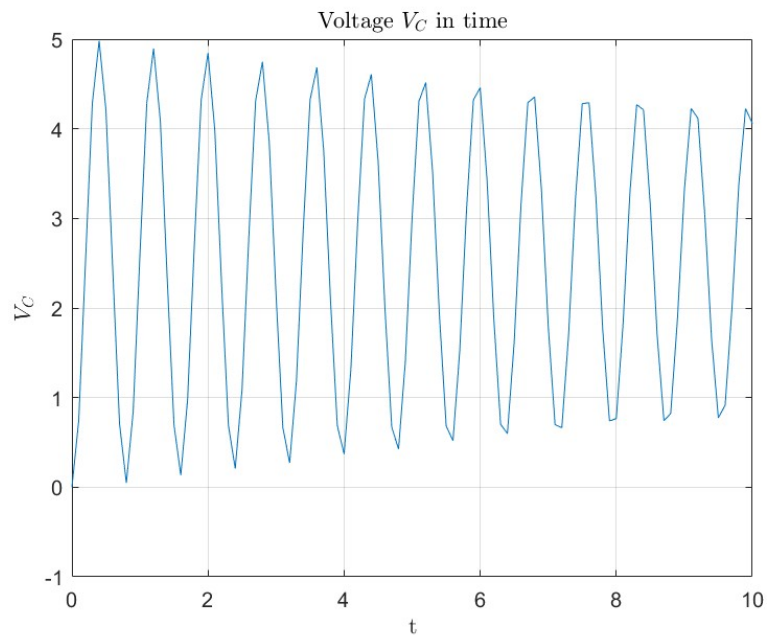
```
Estimated theta matrix:
-20.9142 -39.9498 0.0671 0.0107 -1.0526 60.0502

The estimations using the Least Squares Method for lamda_1 = 10 and lamda_2 = 10 are:
1/RC =
-0.6333

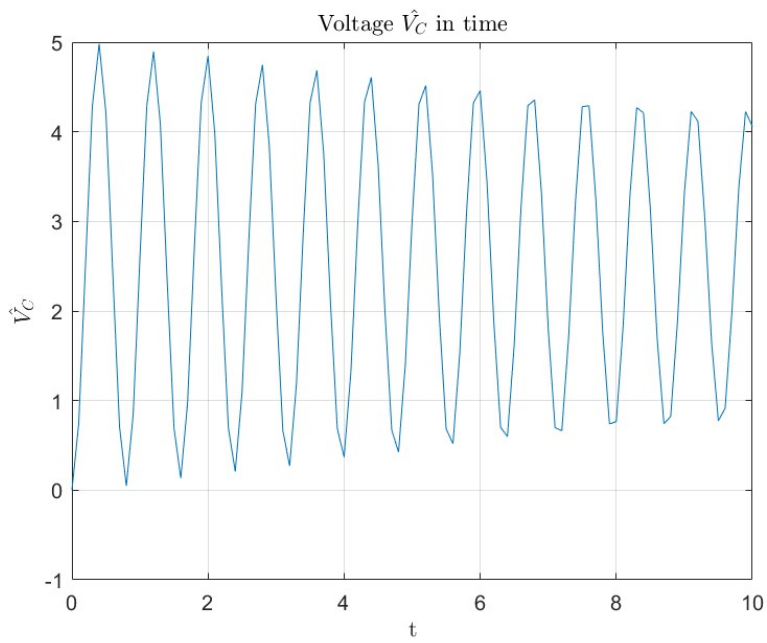
1/LC =
60.0502
```

Σχήμα 9: Το διάνυσμα των εκτιμήσεων

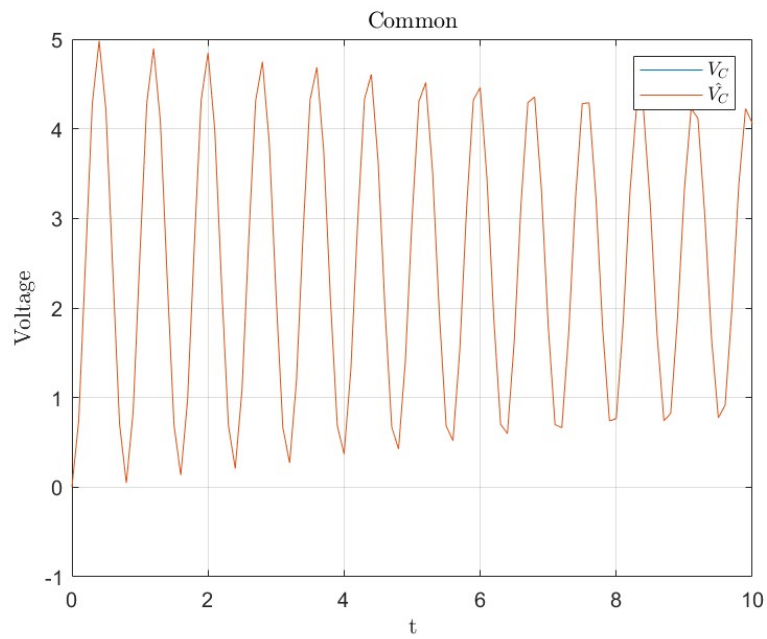
Για το  $V_C$ :



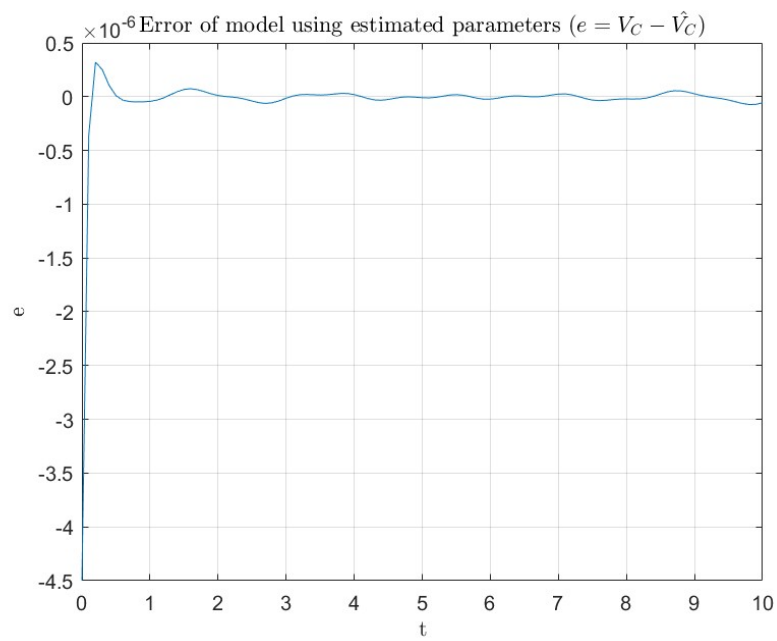
Σχήμα 10: Η τάση  $V_C$  συναρτήσει του χρόνου



Σχήμα 11: Η εκτίμηση της τάσης  $V_C$  ( $\hat{V}_C$ ) συναρτήσει του χρόνου

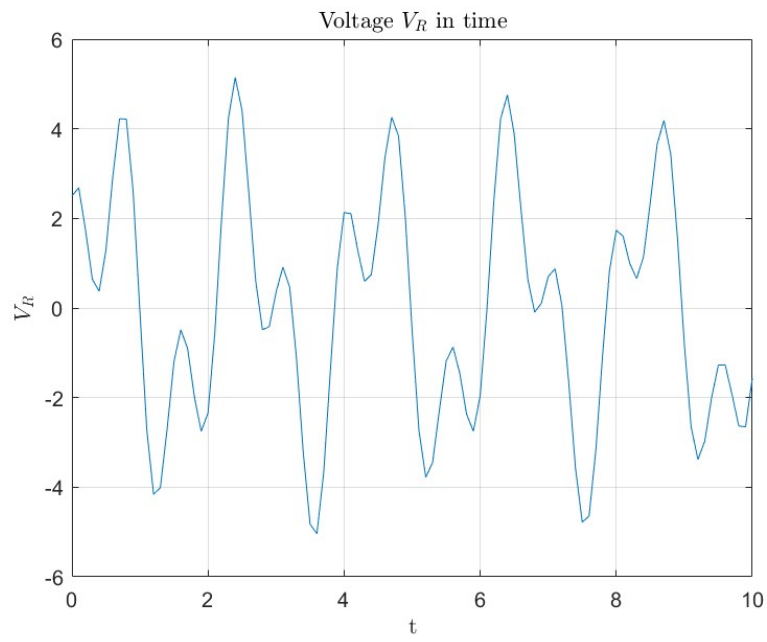


Σχήμα 12: Η τάση  $V_C$  και η εκτίμηση της τάσης ( $\hat{V}_C$ ) συναρτήσει του χρόνου σε κοινό διάγραμμα

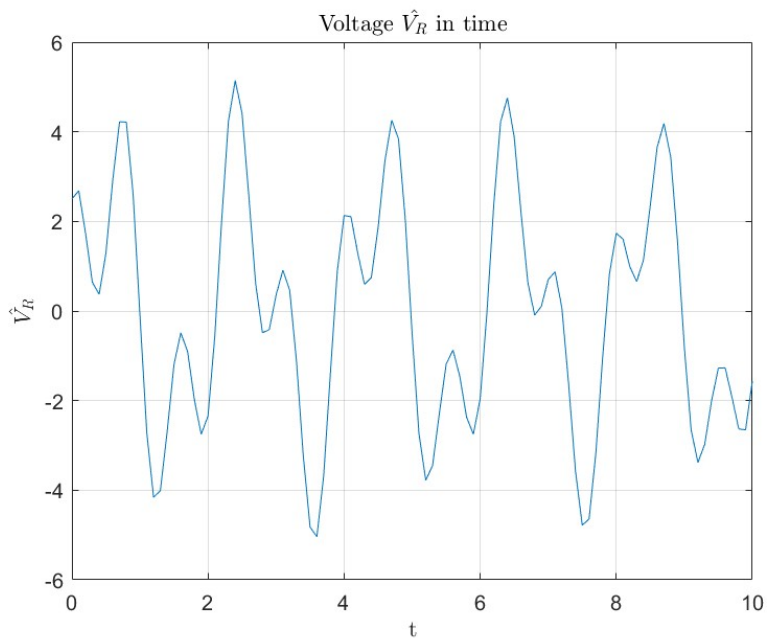


Σχήμα 13: Το σφάλμα μεταξύ τάσης  $V_C$  και της εκτίμησης  $\hat{V}_C$  συναρτήσει του χρόνου ( $e = V_C - \hat{V}_C$ )

Για το  $V_R$ :

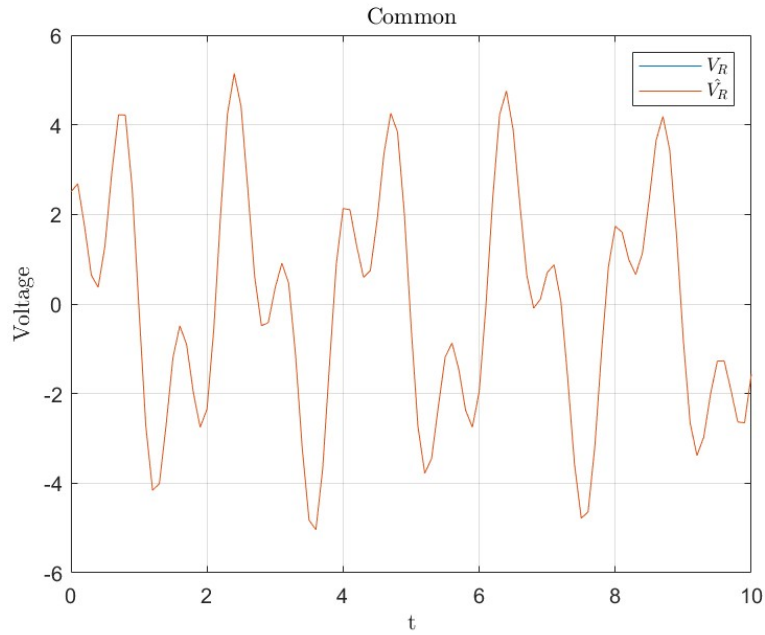


Σχήμα 14: Η τάση  $V_R$  συναρτήσει του χρόνου

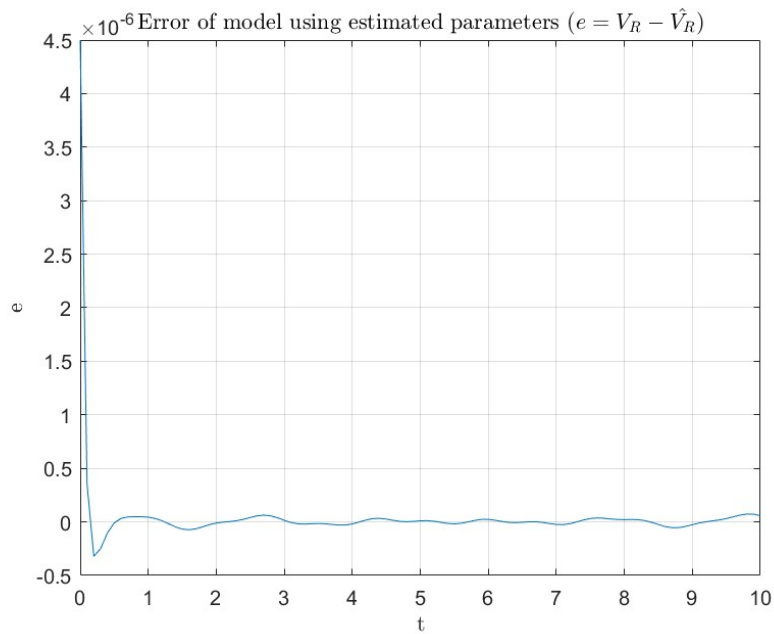


Σχήμα 15: Η εκτίμηση της τάσης  $V_R$  ( $\hat{V}_R$ ) συναρτήσει του χρόνου





Σχήμα 16: Η τάση  $V_R$  και η εκτίμηση της τάσης ( $\hat{V}_R$ ) συναρτήσει του χρόνου σε κοινό διάγραμμα



Σχήμα 17: Το σφάλμα μεταξύ τάσης  $V_R$  και της εκτίμησης  $\hat{V}_R$  συναρτήσει του χρόνου ( $e = V_R - \hat{V}_R$ )

Παρατηρούμε πως τόσο η εκτίμηση της  $V_C$  όσο και αυτή της  $V_R$  είναι πάρα πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές όπως φαίνεται τόσο από τα ξεχωριστά διαγράμματα όσο και από τα κοινά, γεγονός που επιβεβαιώνεται και από το διάγραμμα για τη διαφορά - σφάλμα όπου οι τιμές του σφάλματος είναι της τάξης του  $10^{-6}$ .

## 2.2 Ερώτημα 2

Θα προσθέσουμε θόρυβο χειροκίνητα στις μετρήσεις του  $V_C$ , έτσι ώστε να έχουμε καλύτερη εικόνα για το μέγεθός του και για τη μεταβολή που επιφέρει αυτός στο σύστημα. Τυχαιά κάνουμε την εξής προσθήκη στον κώδικα μας:

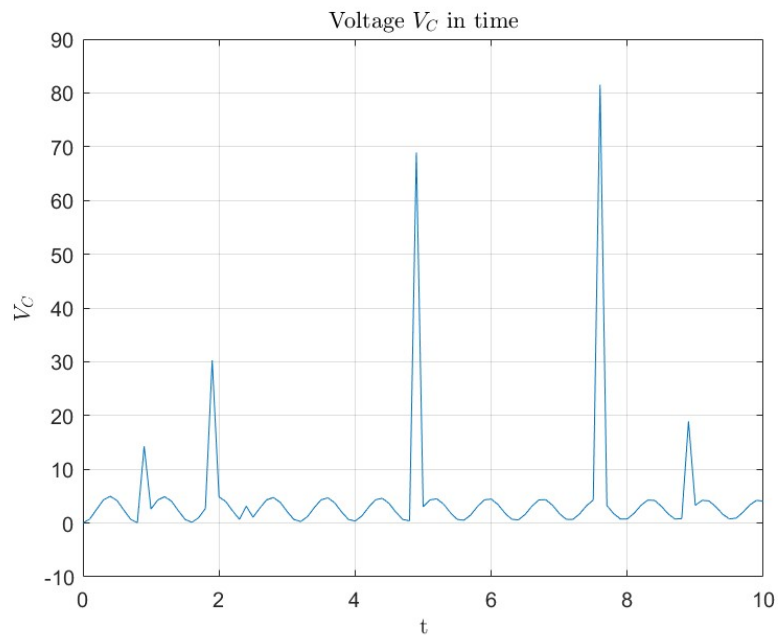
```

V_C(1,10) = 17* V_C(1,10);
V_C(1,20) = 7* V_C(1,20);
V_C(1,25) = 15* V_C(1,25);
V_C(1,50) = 22* V_C(1,25);
V_C(1,77) = 19* V_C(1,77);
V_C(1,90) = 10* V_C(1,90);

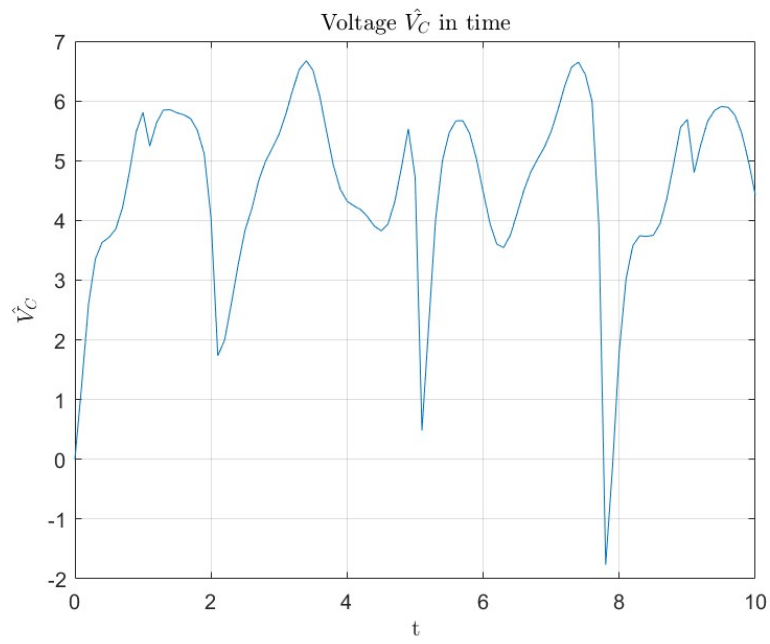
```

Σχήμα 18: Θόρυβος

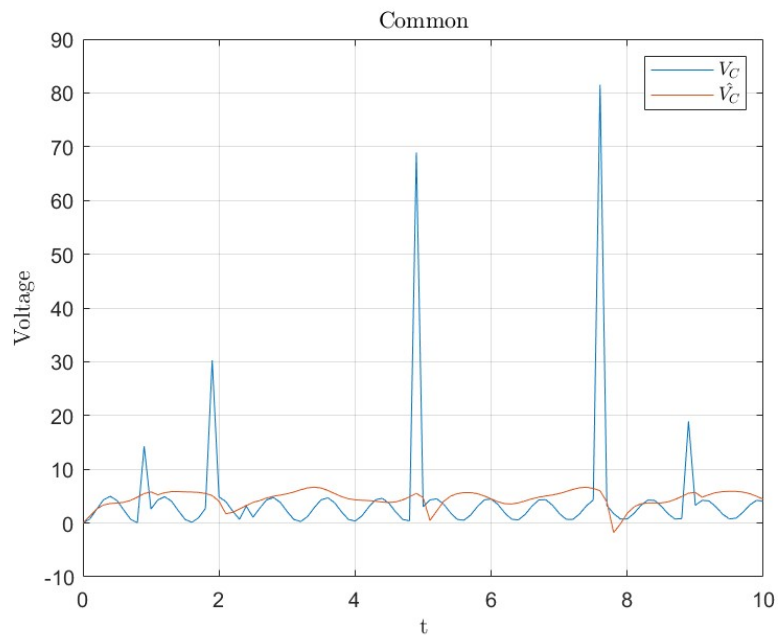
Έχουμε την εξής συμπεριφορά στο σύστημα: Για το  $V_C$ :



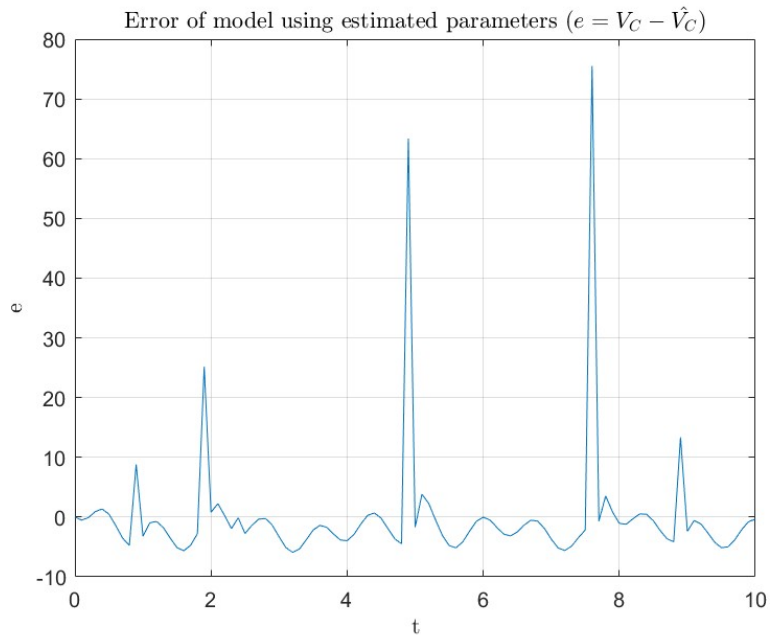
Σχήμα 19: Η τάση  $V_C$  συναρτήσει του χρόνου, παρουσία θορύβου



Σχήμα 20: Η εκτίμηση της τάσης  $V_C$  ( $\hat{V}_C$ ) συναρτήσει του χρόνου, παρουσία θορύβου

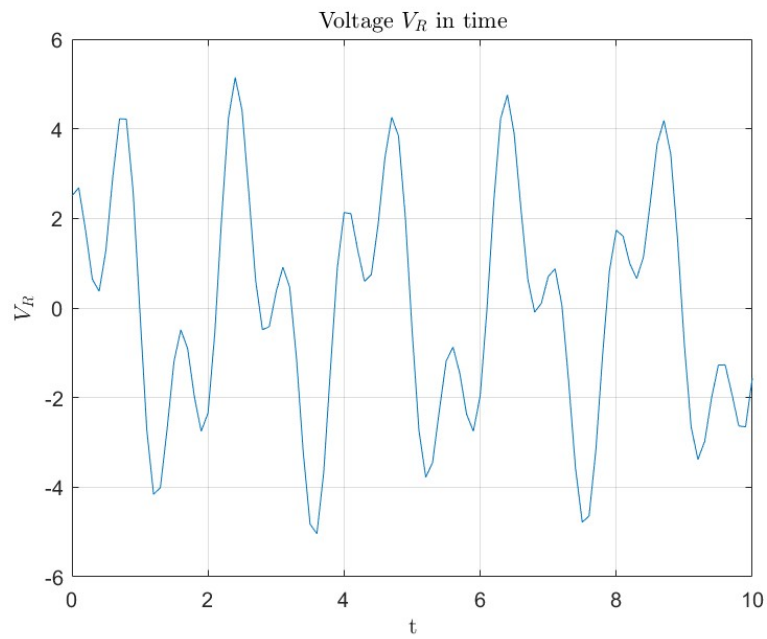


Σχήμα 21: Η τάση  $V_C$  και η εκτίμηση της τάσης ( $\hat{V}_C$ ) συναρτήσει του χρόνου σε κοινό διάγραμμα, παρουσία θορύβου

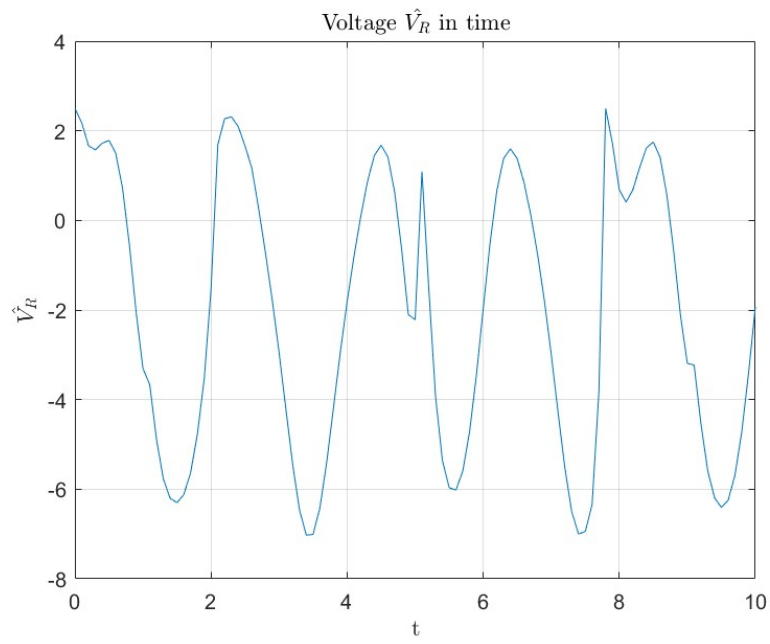


Σχήμα 22: Το σφάλμα μεταξύ τάσης  $V_C$  και της εκτίμησης  $\hat{V}_C$  συναρτήσει του χρόνου ( $e = V_C - \hat{V}_C$ ), παρουσία θορύβου

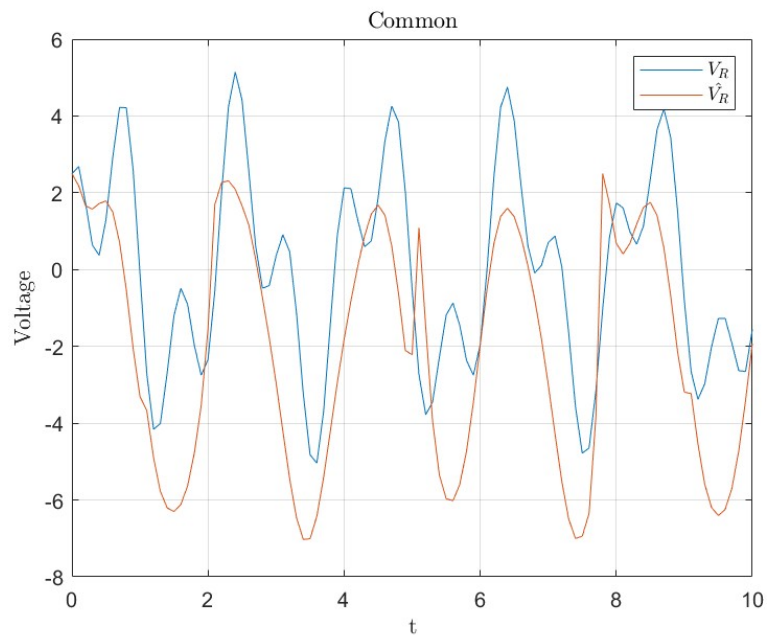
Για το  $V_R$ :



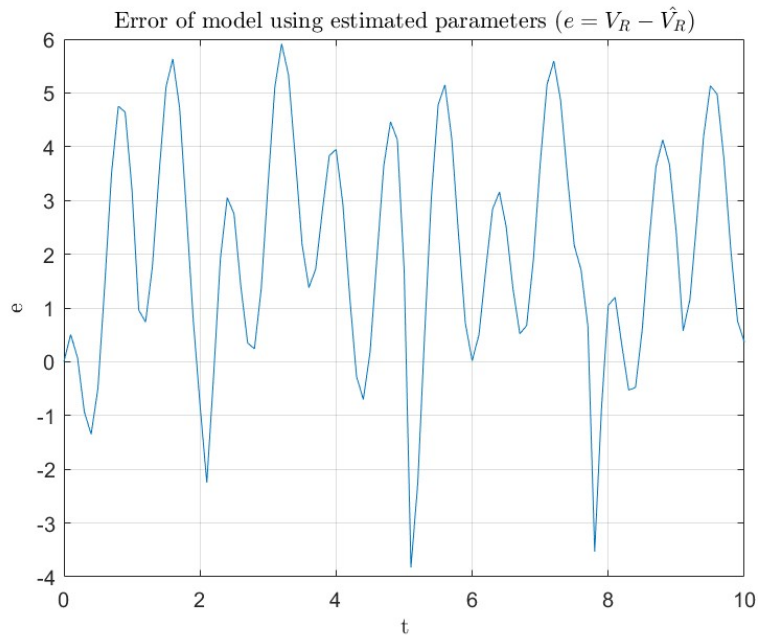
Σχήμα 23: Η τάση  $V_R$  συναρτήσει του χρόνου, παρουσία θορύβου



Σχήμα 24: Η εκτίμηση της τάσης  $V_R$  ( $\hat{V}_R$ ) συναρτήσει του χρόνου, παρουσία θορύβου



Σχήμα 25: Η τάση  $V_R$  και η εκτίμηση της τάσης ( $\hat{V}_R$ ) συναρτήσει του χρόνου σε κοινό διάγραμμα, παρουσία θορύβου



Σχήμα 26: Το σφάλμα μεταξύ τάσης  $V_R$  και της εκτίμησης  $\hat{V}_R$  συναρτήσει του χρόνου ( $e = V_R - \hat{V}_R$ ), παρουσία θορύβου

Παρατηρούμε πως ενώ οι εκτιμήσεις των  $V_C$ ,  $V_R$  προσπαθούν να ακολουθήσουν την συμπεριφορά των πραγματικών  $V_C$ ,  $V_R$  στα σημεία όπου είναι αισθητός ο θόρυβος, δηλαδή για παράδειγμα σε απότομη αύξηση της τάσης η εκτίμηση έχει μια απότομη ανοδική πορεία προσπαθώντας να ακολουθήσει την πραγματική έκφραση, δεν είναι ιδιαίτερα ακριβείς και υπάρχουν πολύ μεγάλα σφάλματα λόγω των μεγάλων διαφορών ειδικότερα στις χρονικές στιγμές που έχουμε τοποθετήσει τον θόρυβο αλλά και γύρω από αυτές.

Τέλος για τις εκτιμήσεις έχουμε:

```
Estimated theta matrix with noise present:
-1.1156  23.0420 -14.0389 -19.8858  1.2343  226.7987

The estimations with noise present using the Least Squares Method for lamda_1 = 10 and lamda_2 = 10 are:
1/RC =
2.0266

1/LC =
174.9204
```

Σχήμα 27: Το διάνυσμα των εκτιμήσεων παρουσία θορύβου στις μετρήσεις

Υπάρχουν μεγάλες αλλαγές σε σχέσεις με τις εκτιμήσεις χωρίς θόρυβο στις μετρήσεις, γεγονός που με βάση και την υπόλοιπη ανάλυση δεν προκαλεί ιδιαίτερη έκπληξη.