

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων - Μέθοδοι Πραγματικού Χρόνου

Μπίλλας Θωμάς Αχιλλέας
ΑΕΜ: hidden
hidden

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών ΑΠΘ
Πέμπτη 25 Απριλίου 2024

Εργασία 2

Μπίλιας Θωμάς Αχιλλέας

Πέμπτη 25 Απριλίου 2024

Περιεχόμενα

0 Πρόλογος	2
1 Θέμα 1	3
1.1 Θεωρητική Ανάλυση	3
1.2 Πειραματική Ανάλυση	4
1.2.1 Ερώτημα i) είσοδος $u(t) = 5$	4
1.2.2 Ερώτημα ii) είσοδος $u(t) = 5\sin(2t)$	8
1.3 Σχόλια - Παρατηρήσεις	12
2 Θέμα 2	13
2.1 Μέθοδος Lyapunov για παράλληλη τοπολογία	13
2.1.1 Θεωρητική Ανάλυση	13
2.1.2 Πειραματική Ανάλυση	13
2.2 Μέθοδος Lyapunov για μεικτή τοπολογία	24
2.2.1 Θεωρητική Ανάλυση	24
2.2.2 Πειραματική Ανάλυση	25
2.3 Σχόλιο	32

0 Πρόλογος

Η παρούσα αναφορά συντάσσεται στα πλαίσια του μαθήματος “Προσομίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων” του 8ου εξαμήνου στο τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΑΠΘ. Αφορά Εκτίμηση Αγνώστων Παραμέτρων με χρήση Μεθόδων Πραγματικού Χρόνου. Στο πρώτο θέμα της αναφοράς πραγματοποιείται θεωρητική ανάλυση και σχεδίαση εκτιμητή πραγματικού χρόνου με τη χρήση της μενόδου κλίσης σε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα μιας διάστασης όπως αυτή διδάχθηκε στην αίθουσα και ακολουθώντας τις σημειώσεις του μαθήματος. Επιπλέον, με βάση τη θεωρητική ανάλυση του συστήματος γίνεται η προσομοίωση και ανάλυση του στο MATLAB με βάση τα δεδομένα που δόθηκαν στην εκφώνηση. Στο δεύτερο θέμα πραγματοποιείται η ίδια ανάλυση για το σύστημα αυτή τη φορά με τη μέθοδο Lyapunov. Στη συνέχεια, πέρα από τα θεωρητικά και πειραματικά αποτελέσματα, καταγράφονται και παρατηρήσεις, σχόλια και συμπεράσματα που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της ανάλυσης. Τέλος, στον υποβληθέντα φάκελο υπάρχουν και οι κώδικες του MATLAB που οδήγησαν στα διαγράμματα που παρουσιάζονται στο μήκος της αναφοράς και αποτελούν τη βάση για ορισμένα από τα συμπεράσματα και τις παρατηρήσεις που αναφέρθηκαν, καθώς επίσης και φωτογραφίες των διαγραμάτων που προσφέρονται για εύρεση των γ, λ στο Θέμα 1 και των γ_1, γ_2 στο Θέμα 2.

1 Θέμα 1

1.1 Θεωρητική Ανάλυση

Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{x} = -ax + bu, \quad x(0) = 0 \quad (1)$$

όπου x είναι η κατάσταση του συστήματος, u είναι η είσοδος, και $a > 0, b > 0$ σταθερές αλλά άγνωστες παράμετροι.

Θα ακολουθήσουμε την εξής μεθοδολογία: Αρχικά όταν γραμμικοποιήσουμε παραμετρικό το σύστημα, δηλαδή:

- Αρχικά όταν γραμμικοποιήσουμε παραμετρικό το σύστημα. Χρησιμοποιούμε ευσταθές φίλτρο $\Lambda(s) = s + \lambda$, με $\lambda > 0$ έτσι όταν προσθέσουμε και στα δύο μέλη της (1) τον όρο λx και άρα έχουμε:

$$\dot{x} + \lambda x = -ax + \lambda x + bu$$

και παίρνοντας τον Μετασχηματισμό Laplace προκύπτει:

$$sX + \lambda X = (\lambda - a)X + bU \Leftrightarrow X = \frac{\lambda - a}{s + \lambda}X + \frac{b}{s + \lambda}U$$

Άρα το σύστημα μας έχει τη γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή:

$$x = \theta^{*T} \cdot \varphi$$

όπου

$$\theta^* = [\lambda - a \quad b]^T = [\theta_1^{*T} \quad \theta_2^{*T}]^T$$

και

$$\varphi = \left[\frac{1}{s + \lambda}X \quad \frac{1}{s + \lambda}U \right]^T = [\varphi_1 \quad \varphi_2]^T$$

- Με βάση τα παραπάνω όταν χρησιμοποιήσουμε εκτιμητή της μορφής:

$$\hat{x} = \hat{\theta}^T \cdot \varphi$$

Για το σφάλμα έχουμε:

$$e = x - \hat{x} = \theta^{*T} \cdot \varphi - \hat{\theta}^T \cdot \varphi = (\theta^{*T} - \hat{\theta}^T) \cdot \varphi = -\tilde{\theta} \cdot \varphi$$

όπου $\tilde{\theta} = \hat{\theta}^T - \theta^{*T}$.

Για τη συνάρτηση κόστους έχουμε:

$$K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \frac{(x - \hat{\theta}^T \varphi)^2}{2}$$

Και με βάση τη μέθοδο κλίσης όταν πρέπει να την ελαχιστοποιήσουμε ως εξής:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \nabla K(\hat{\theta}) = -\gamma(x - \hat{\theta}^T \varphi)(-\varphi) \Leftrightarrow \dot{\tilde{\theta}} = \gamma e \varphi$$

Άρα προκύπτουν:

$$\dot{\theta}_1 = \gamma e \varphi_1 \quad (2)$$

$$\dot{\theta}_2 = \gamma e \varphi_2 \quad (3)$$

- Για τα φ , έχουμε υπολογίσει χρησιμοποιώντας τον Μετασχηματισμό Laplace ότι:

$$\Phi_1 = \frac{1}{s + \lambda}X \quad (4)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{s + \lambda}U \quad (5)$$

Παίρνοντας τον Αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace για τις (4) και (5) προκύπτουν:

$$\dot{\varphi}_1 = -\lambda \varphi_1 + x \quad (6)$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\lambda \varphi_2 + u \quad (7)$$

Τέλος για την εκτίμηση \hat{x} έχουμε:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{a}\hat{x} + \hat{b}u \quad (8)$$

όπου $\hat{a} = \lambda - \hat{\theta}_1$ και $\hat{b} = \hat{\theta}_2$

Συγκεντρώνοντας όλα τα παραπάνω προκύπτει για το σύστημα εκτίμησης:

$$\begin{cases} (8) & \dot{\hat{x}} = -\hat{a}\hat{x} + \hat{b}u = -(\lambda - \hat{\theta}_1)\hat{x} + \hat{\theta}_2 u \\ (6) & \dot{\varphi}_1 = -\lambda \varphi_1 + x \\ (7) & \dot{\varphi}_2 = -\lambda \varphi_2 + u \\ (2) & \dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma e \varphi_1 \\ (3) & \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \varphi_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Και άρα για τις εξισώσεις κατάστασης του συνολικού συστήματος έχουμε:

$$\begin{cases} x_1 = x & \dot{x}_1 = \dot{x} = -ax_1 + bu \\ x_2 = \hat{\theta}_1 & \dot{x}_2 = \dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma ex_4 \\ x_3 = \hat{\theta}_2 & \dot{x}_3 = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma ex_5 \\ x_4 = \varphi_1 & \dot{x}_4 = \dot{\varphi}_1 = -\lambda x_4 + x_1 \\ x_5 = \varphi_2 & \dot{x}_5 = \dot{\varphi}_2 = -\lambda x_5 + u \\ x_6 = \hat{x} & \dot{x}_6 = \dot{\hat{x}} = (x_2 - \lambda)x_6 + x_3u \end{cases} \Rightarrow$$

με $e = x - \hat{x} = x_1 - x_6$, άρα το συνολικό διαφορικό σύστημα εξισώσεων του συστήματος:

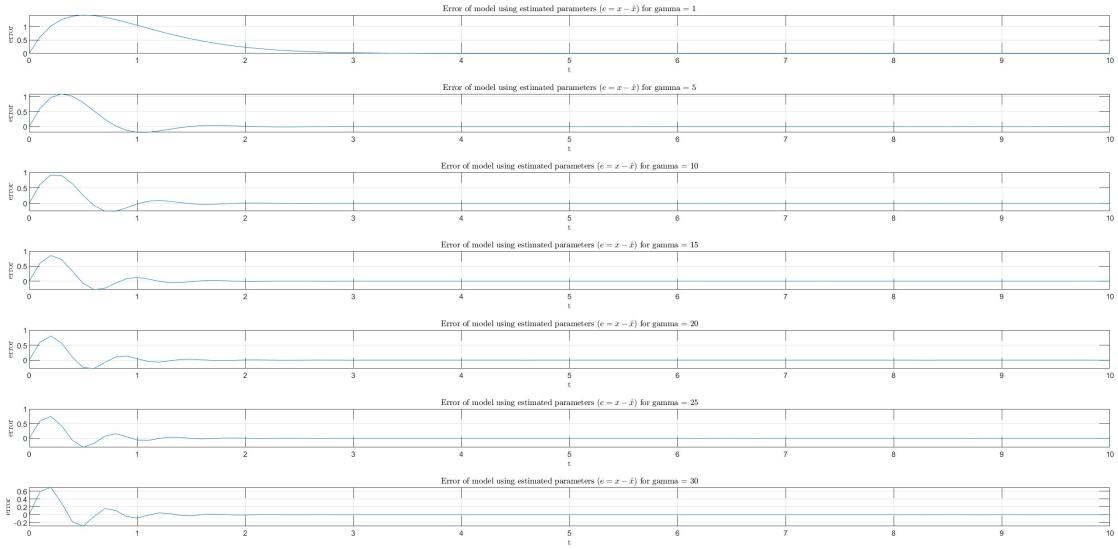
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + bu \\ \dot{x}_2 = \gamma(x_1 - x_6)x_4 \\ \dot{x}_3 = \gamma(x_1 - x_6)x_5 \\ \dot{x}_4 = -\lambda x_4 + x_1 \\ \dot{x}_5 = -\lambda x_5 + u \\ \dot{x}_6 = (x_2 - \lambda)x_6 + x_3u \end{cases}$$

1.2 Πειραματική Ανάλυση

1.2.1 Ερώτημα i) είσοδος $u(t) = 5$

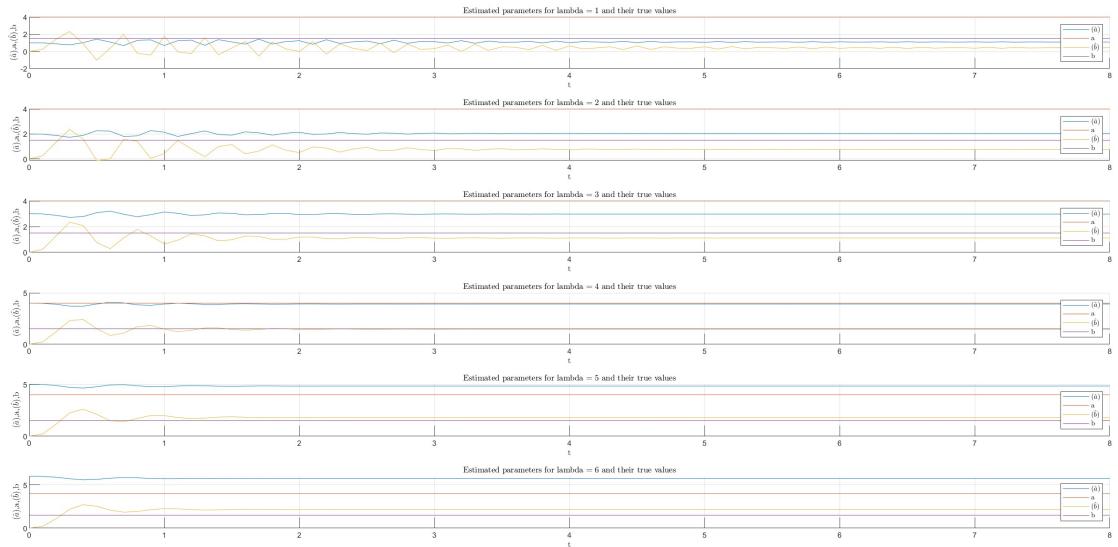
Προσομοιώνουμε το σύστημα στο MATLAB με $a = 4$ και $b = 1.5$ και πρέπει να επιλέξουμε τις τιμές των λ και γ . Για να βρούμε το καθένα από αυτά ως δοκιμάσουμε διάφορες τιμές σταθεροποιώντας την άλλη παράμετρο σε μια φανομενικά λογική τιμή και μετά το αντίστροφο.

Για το γ , χρατώντας σταθερό το $\lambda = 5$ προκύπτει:



Σχήμα 1: Το σφάλμα για διάφορες τιμές του γ με σταθεροποιημένο $\lambda = 5$.

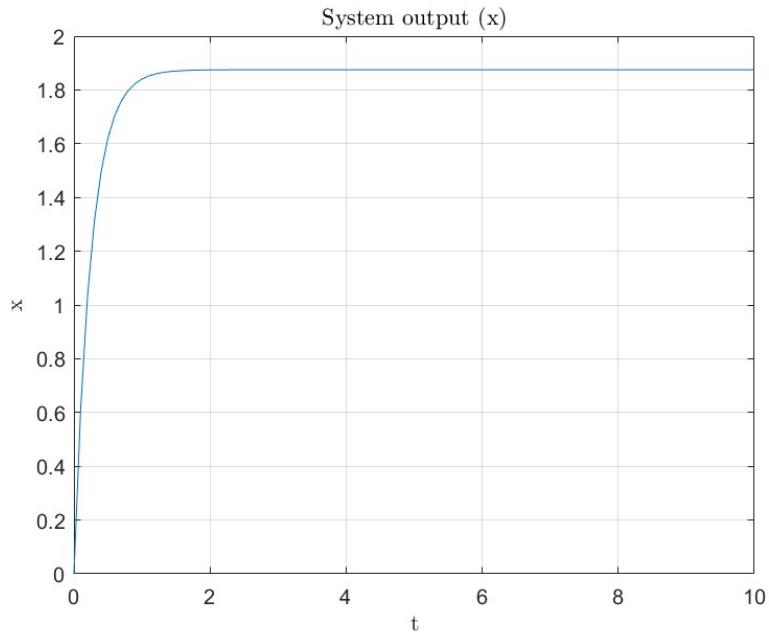
Παρατηρούμε πως την καλύτερη απόχριση την παίρνουμε για $\gamma = 25$. Για το λ , κρατώντας σταθερό το $\gamma = 25$ προκύπτει:



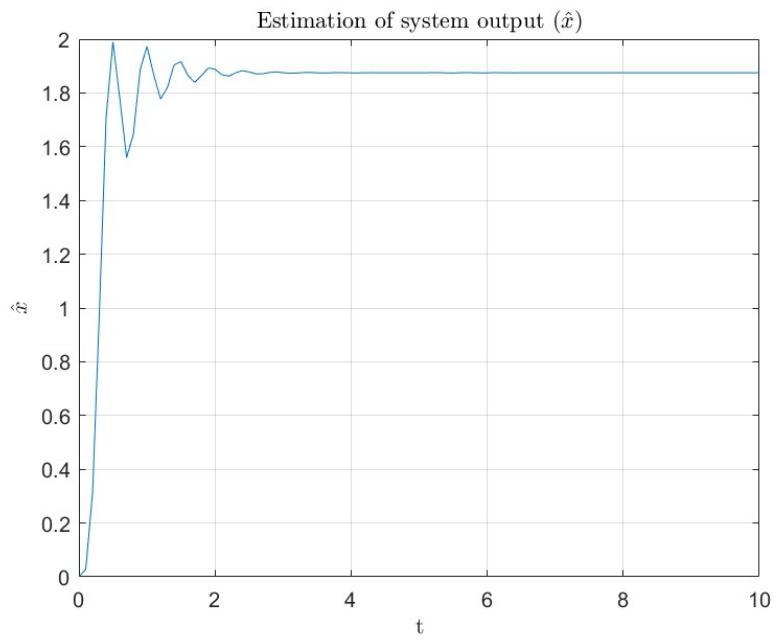
Σχήμα 2: Εκτιμήσεις των παραμέτρων a και b (\hat{a} , \hat{b}) για διάφορες τιμές του λ με σταθεροποιημένο $\gamma = 25$.

Παρατηρούμε πως την καλύτερη απόχριση την παίρνουμε για $\lambda = 4$.

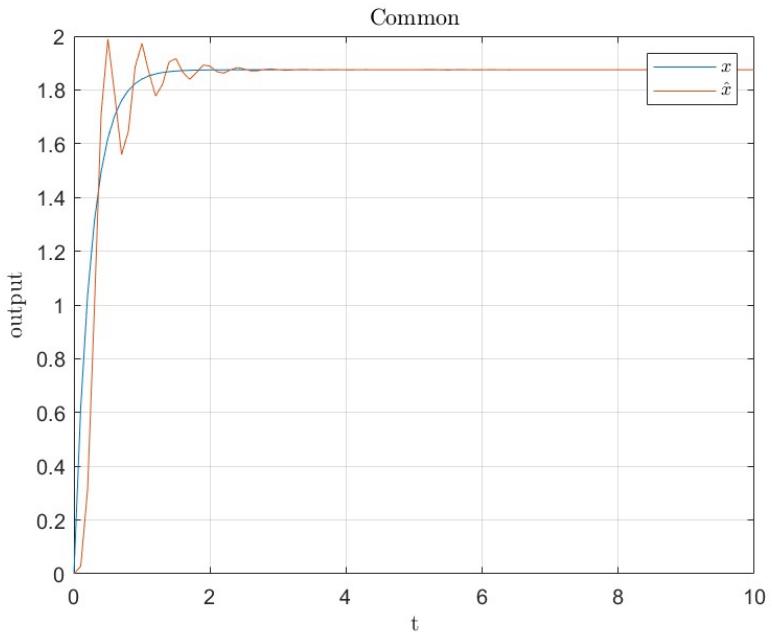
Συνεπώς θέτουμε στην προσομοίωση μας $\gamma = 25$ και $\lambda = 4$ και προκύπτουν τα εξής διαγράμματα:



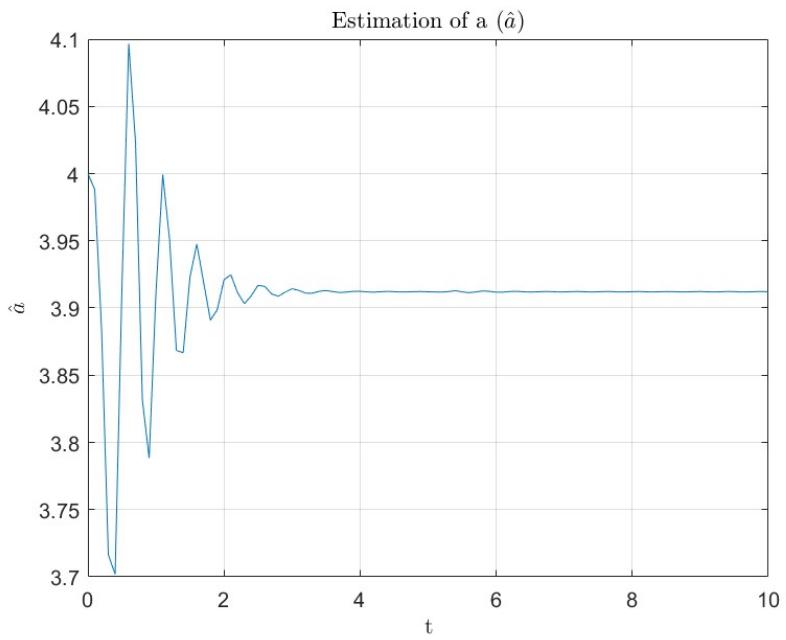
Σχήμα 3: Η έξοδος x του συστήματος.



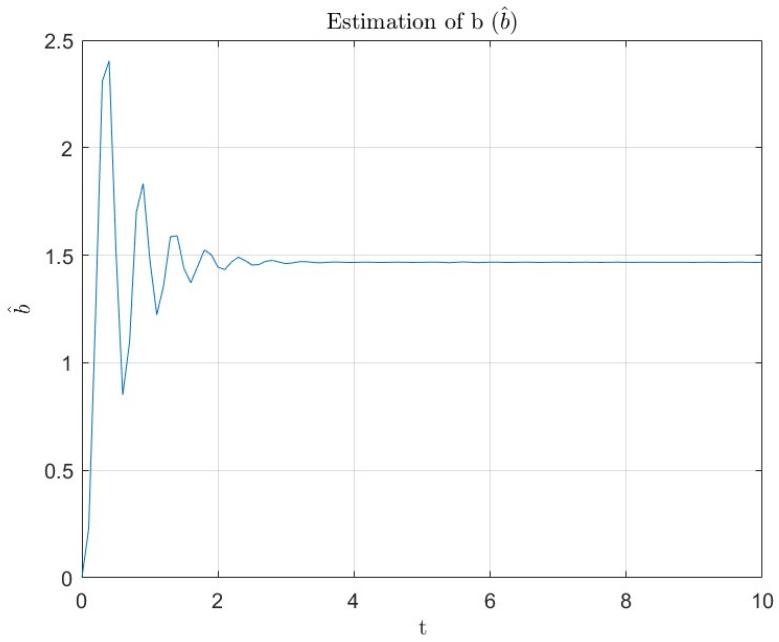
Σχήμα 4: Η εκτίμηση της έξοδου x του συστήματος (\hat{x}).



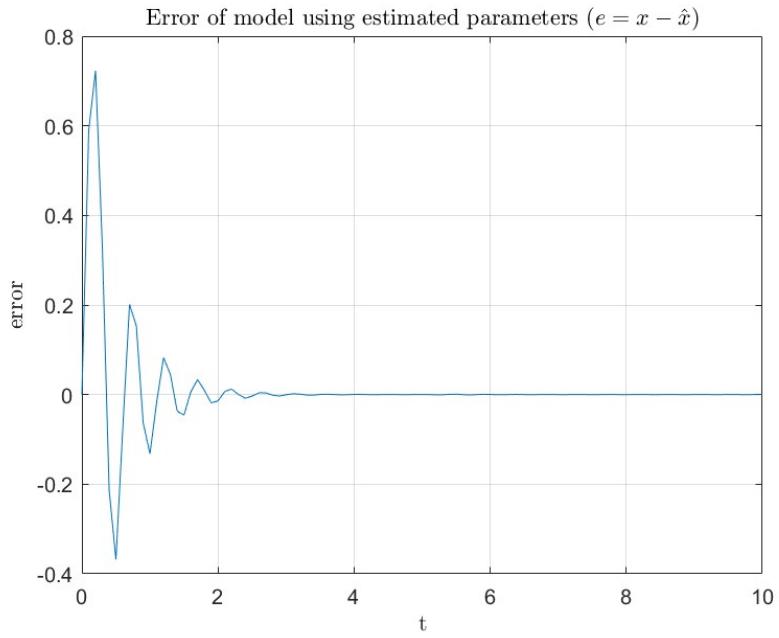
Σχήμα 5: Η έξοδος και η εκτίμηση της εξόδου σε κοινό διάγραμμα.



Σχήμα 6: Η εκτίμηση της παραμέτρου a (\hat{a}).



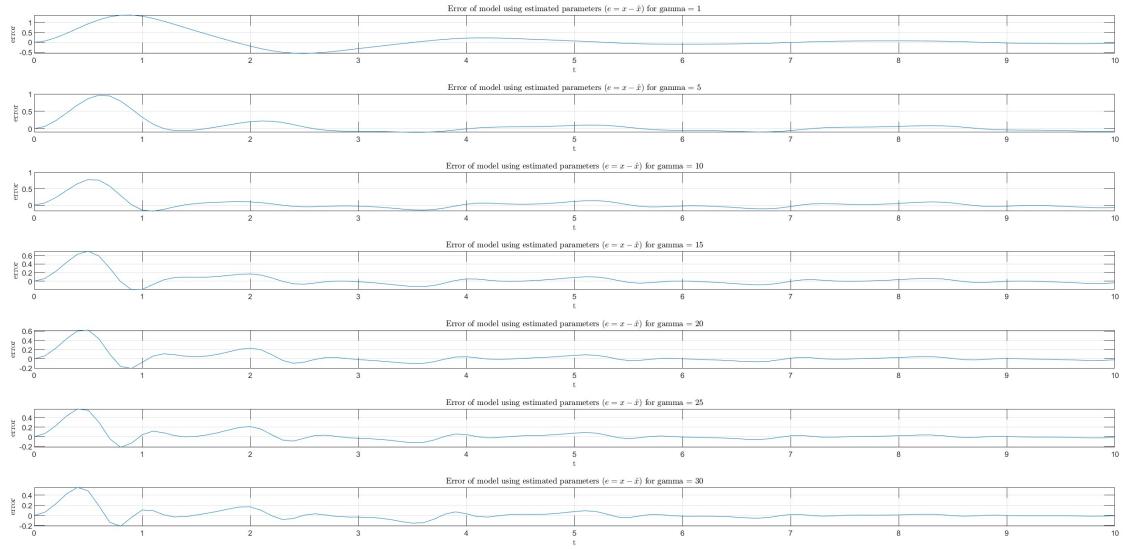
Σχήμα 7: Η εκτίμηση της παραμέτρου b (\hat{b}).



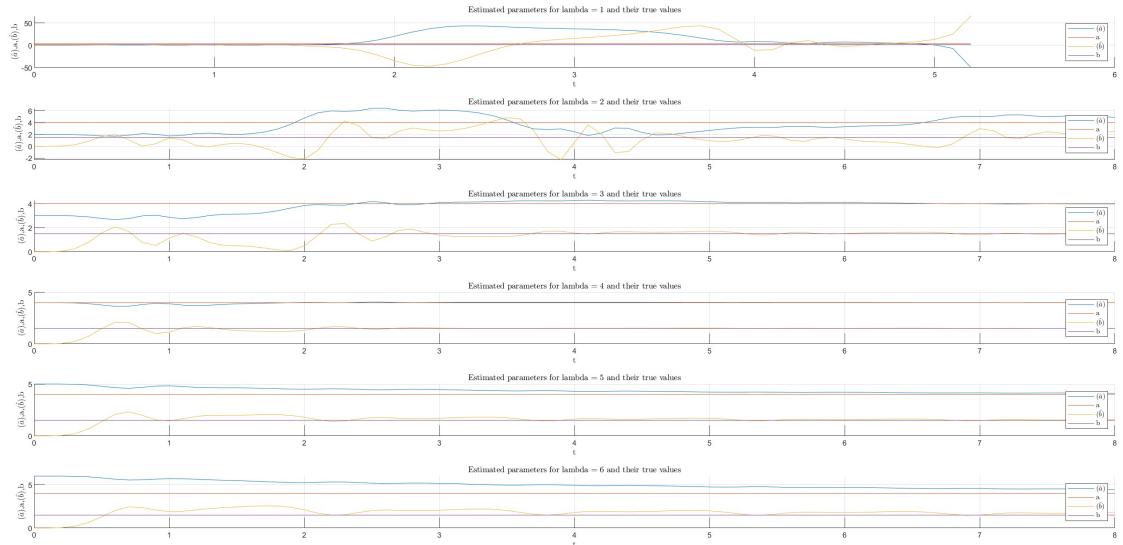
Σχήμα 8: Το σφάλμα ($e = x - \hat{x}$).

1.2.2 Ερώτημα ii) είσοδος $u(t) = 5\sin(2t)$

Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία για την ένυρεση των γ και λ παρατηρούμε πως οι επιλογές που έχουμε κάνει στο προήγουμενο ερώτημα δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα και για την είσοδο αυτή, συνεπώς τις διατηρούμε:

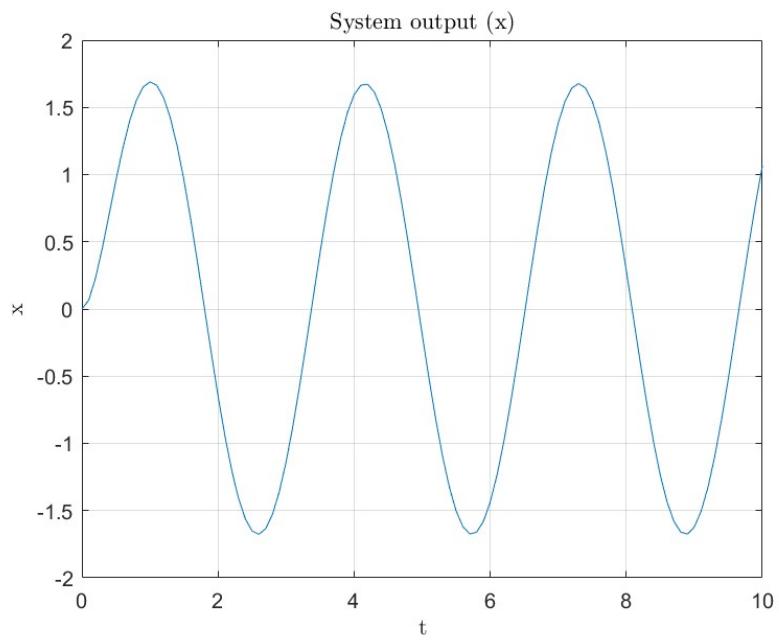


Σχήμα 9: Το σφάλμα για διάφορες τιμές του γ με σταθεροποιημένο $\lambda = 5$.

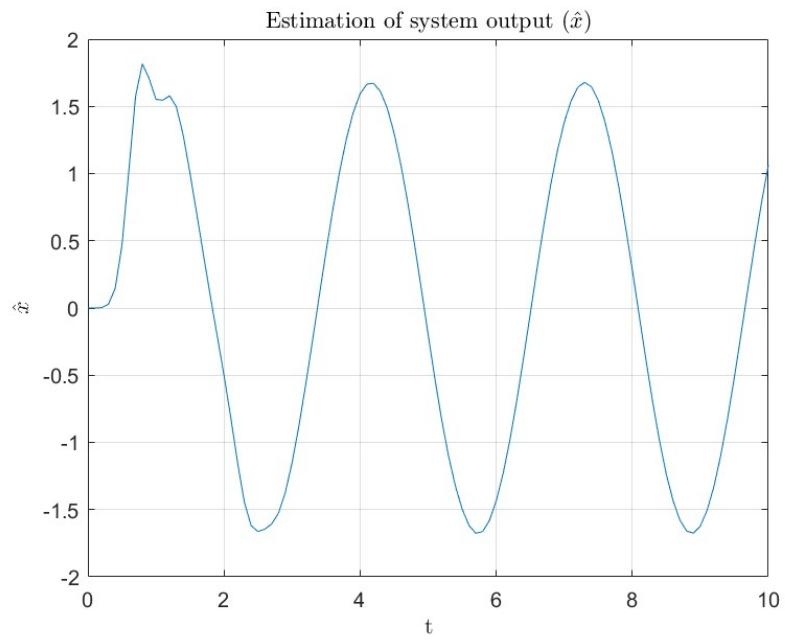


Σχήμα 10: Εκτιμήσεις των παραμέτρων a και b (\hat{a}, \hat{b}) για διάφορες τιμές του λ με σταθεροποιημένο $\gamma = 25$.

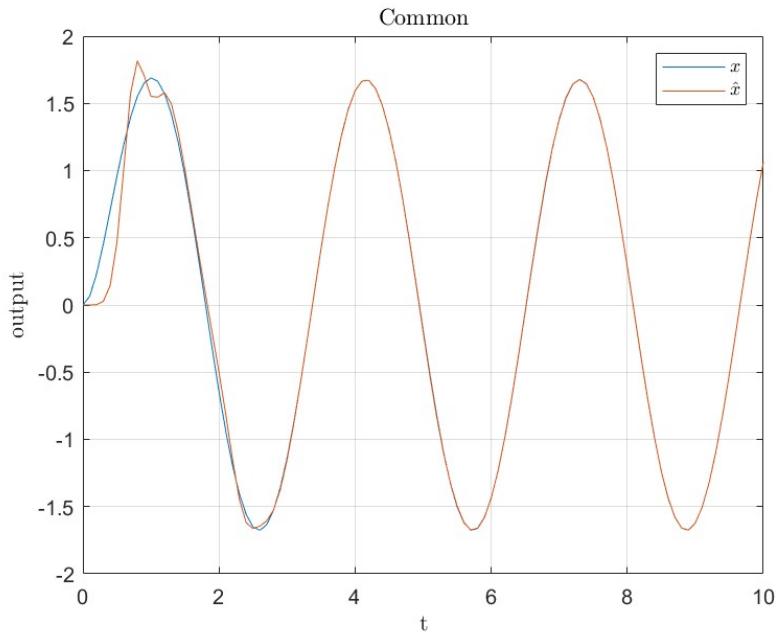
Συνεπώς θέτουμε και πάλι στην προσομοίωση μας $\gamma = 25$ και $\lambda = 4$ και για την νέα είσοδο προκύπτουν τα εξής διαγράμματα:



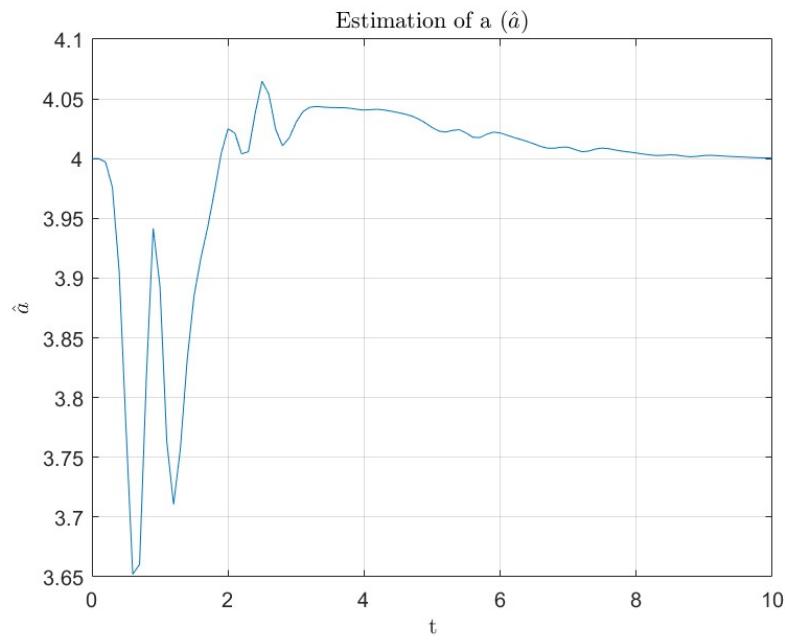
Σχήμα 11: Η έξοδος x του συστήματος.



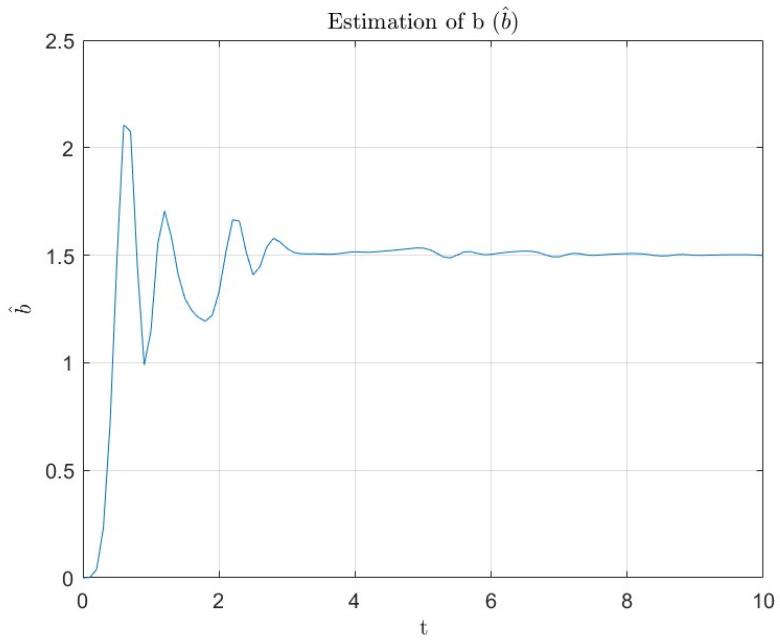
Σχήμα 12: Η εκτίμηση της έξοδου x του συστήματος (\hat{x}).



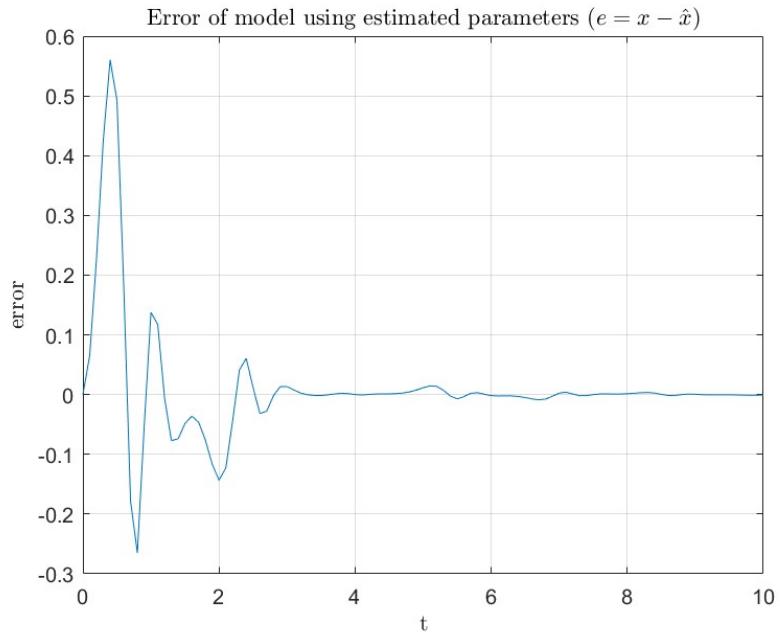
Σχήμα 13: Η έξοδος και η εκτίμηση της εξόδου σε κοινό διάγραμμα.



Σχήμα 14: Η εκτίμηση της παραμέτρου a (\hat{a}).



Σχήμα 15: Η εκτίμηση της παραμέτρου b (\hat{b}).



Σχήμα 16: Το σφάλμα ($e = x - \hat{x}$).

1.3 Σχόλια - Παρατηρήσεις

Ο εκτιμητής μας και για τις δύο εισόδους παρακαλούνθει αρκετά κάλα το σύστημα, το σφάλμα φτάνει σε περιοχή του μηδέν σχετικά γρήγορα και για τις δύο εισόδους ενώ οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι πάρα πολύ ακριβείς. Προφανώς υπάρχουν σημεία υπερύψωσης στην εκτίμηση της εξόδου όμως μετά από το μεταβατικό φανόμενο υπάρχει πάντα ιδιαίτερα σωστή εκτίμηση.

2 Θέμα 2

Δίνεται και πάλι το ίδιο σύστημα με αυτό στο θέμα 1, μόνο που στην συγκεκριμένη περίπτωση ζητείται να εφαρμοστεί η μέθοδος Lyapunov για παράλληλη και μεικτή τοπολογία, παρουσία ύφορύβου $\eta(t)$ στις μετρήσεις της εξόδου του συστήματος και εισόδου $u(t)$.

2.1 Μέθοδος Lyapunov για παράλληλη τοπολογία

2.1.1 Θεωρητική Ανάλυση

Αφού έχουμε σύστημα $\dot{x} = -ax + bu$ όπου τα a, b σταθερά αλλά άγνωστα με βάση τη θεωρία θα πάρουμε εκτιμητή της μορφής:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \theta_2 u, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 \cdot e_x \cdot \hat{x}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 \cdot e_x \cdot u$$

$$\hat{\theta}_i(0) = \theta_{i0} \text{ για } i = 1, 2$$

Και ειδικότερα στην περίπτωση μας θα έχουμε: $\hat{\theta}_1 = \hat{a}$ και $\hat{\theta}_2 = \hat{b}$ Επιπλέον για εφόσον γνωρίζουμε την ύπαρξη ύφορύβου στις μετρήσεις της εξόδου θα ισχύει:

$$e = y - \hat{x} = x + \eta - \hat{x}$$

Και άρα:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 \cdot (\eta + x) \cdot \hat{x} + \gamma_1 \cdot \hat{x}^2$$

και

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 \cdot u \cdot (x - \hat{x} + \eta)$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις κατάστασης του συστήματος:

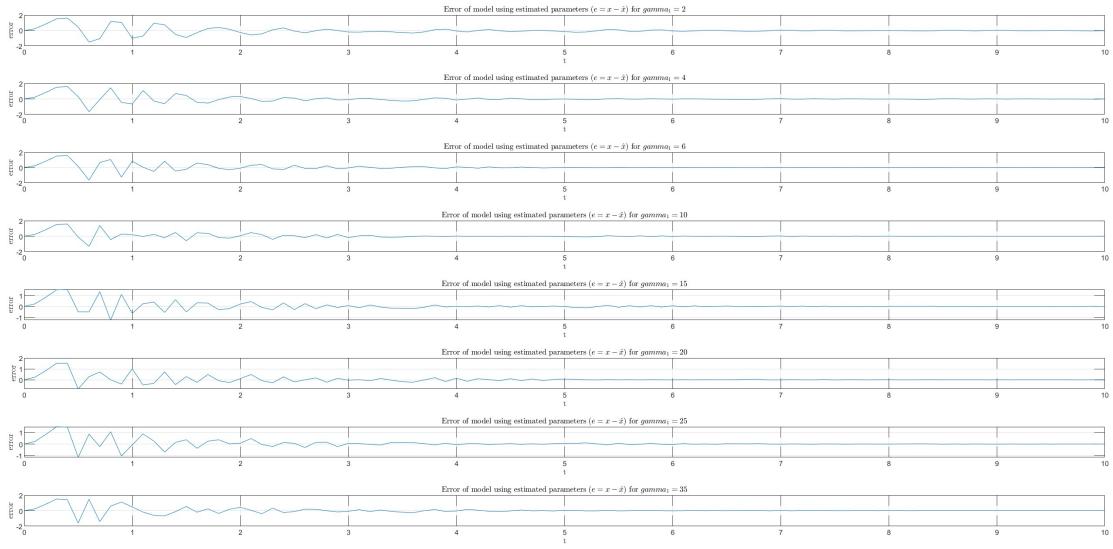
$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \hat{x} \\ x_3 = \hat{\theta}_1 \\ x_4 = \hat{\theta}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = -ax_1 + bu \\ \dot{x}_2 = \dot{\hat{x}} = -x_3 x_2 + x_4 u \\ \dot{x}_3 = \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1(\eta + x_1)x_2 + \gamma_1 x_2^2 \\ \dot{x}_4 = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2(x_1 - x_2 + \eta)u \end{cases}$$

με $e = x - \hat{x} = x_1 - x_2 + \eta$,

2.1.2 Πειραματική Ανάλυση

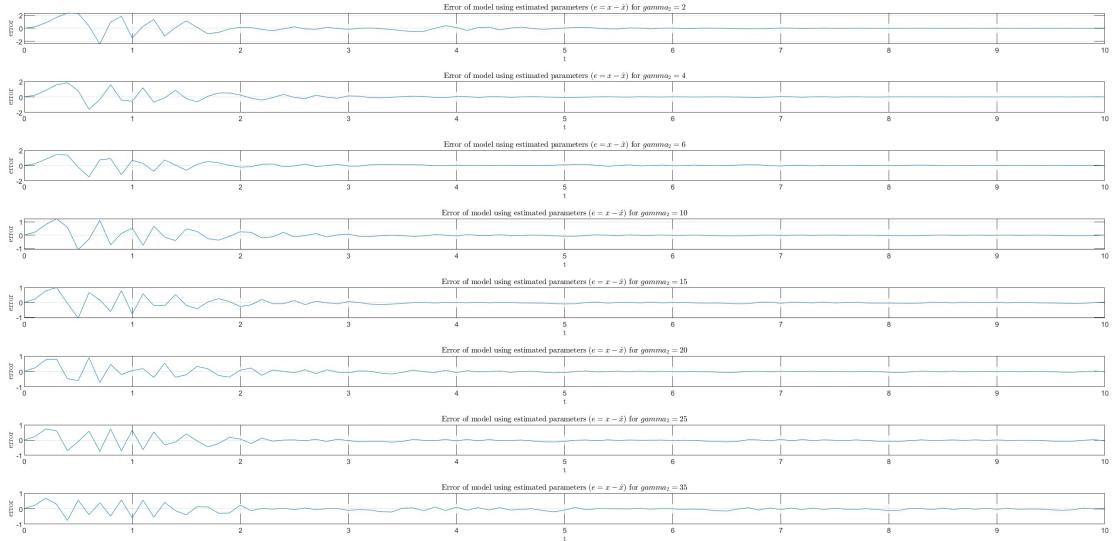
Μοντελοποιούμε το σύστημα στο MATLAB με $u(t) = 5\sin(2t)$, $\eta(t) = \eta_0 \sin(2\pi ft)$, $a = 2$, $b = 5$, $\eta_0 = 0.5$ και $f = 40$ πρέπει να επιλέξουμε τις τιμές των γ_1 και γ_2 . Για να βρούμε το καθένα από αυτά θα δοκιμάσουμε διάφορες τιμές σταθεροποιώντας την άλλη παράμετρο σε μια φαινομενικά λογική τιμή και μετά το αντίστροφο, ακολουθώντας δηλαδή παρόμοια μεθοδολογία με το Θέμα 1.

Για το γ_1 κρατώντας σταθερό το $\gamma_2 = 5$ και μελετώντας το διάγραμα για το σφάλμα προκύπτει:



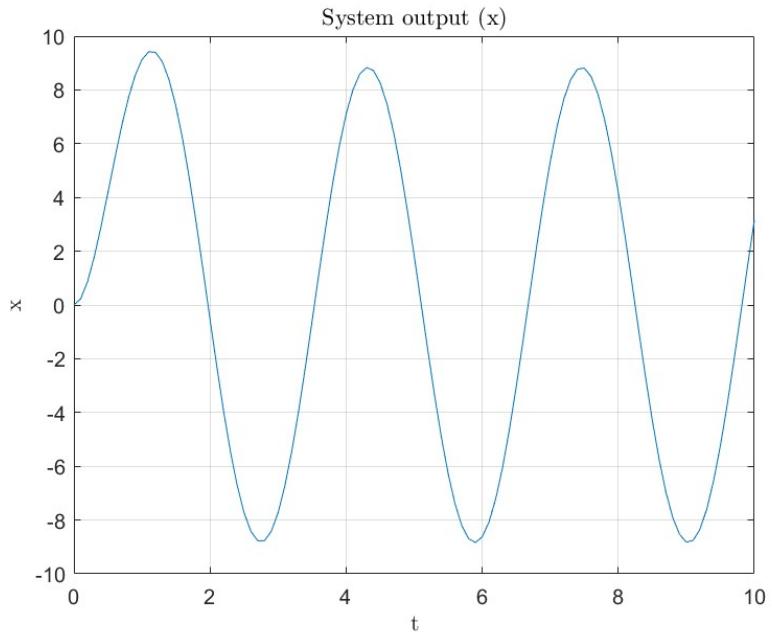
Σχήμα 17: Το σφάλμα για διάφορες τιμές του γ_1 με σταθεροποιημένο $\gamma_2 = 5$.

Και για το γ_2 αντίστοιχα:

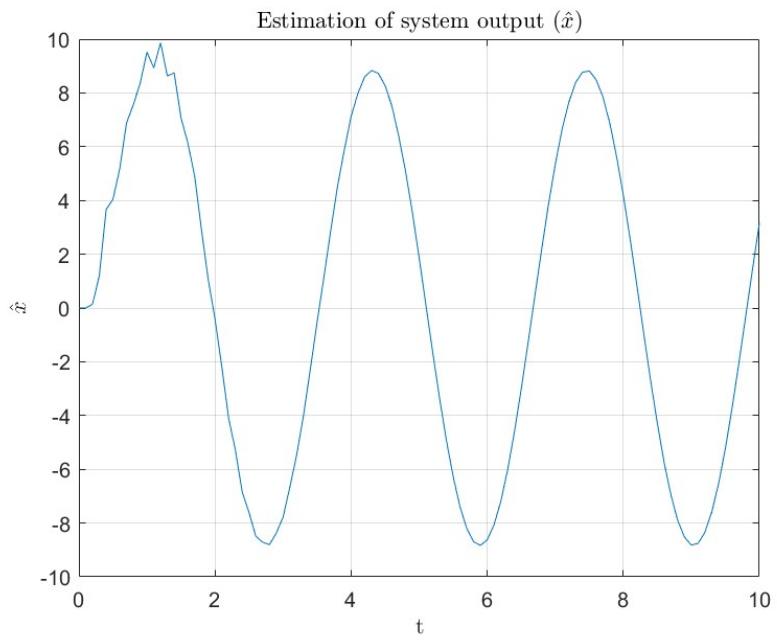


Σχήμα 18: Το σφάλμα για διάφορες τιμές του γ_2 με σταθεροποιημένο $\gamma_1 = 5$.

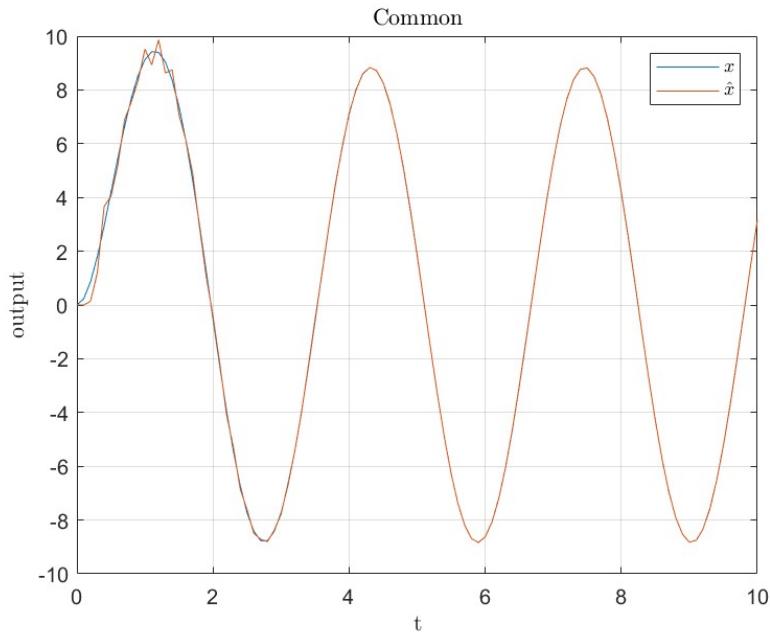
Καταλήγουμε πως οι καλύτερες τιμές για τα γ ως προς τη γραφική παράσταση του σφάλματος είναι οι $\gamma_1 = 10$ και $\gamma_2 = 25$. Συνεπώς θέτουμε στην προσομοίωση μας $\gamma_1 = 10$ και $\gamma_2 = 25$ και προκύπτουν τα εξής διαγράμματα:



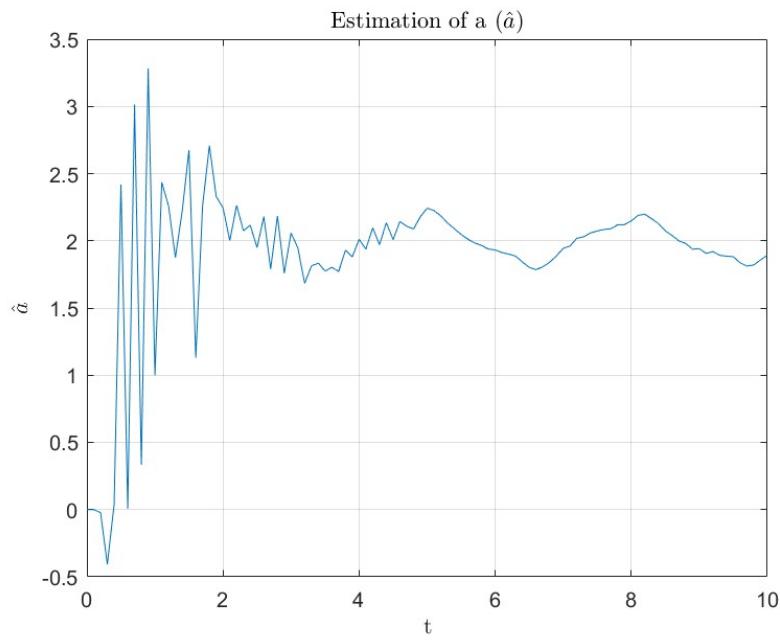
$\Sigma\chi\rho\mu\alpha\ 19:$ Η έξοδος x του συστήματος για $\gamma_1 = 10$ και $\gamma_2 = 25$.



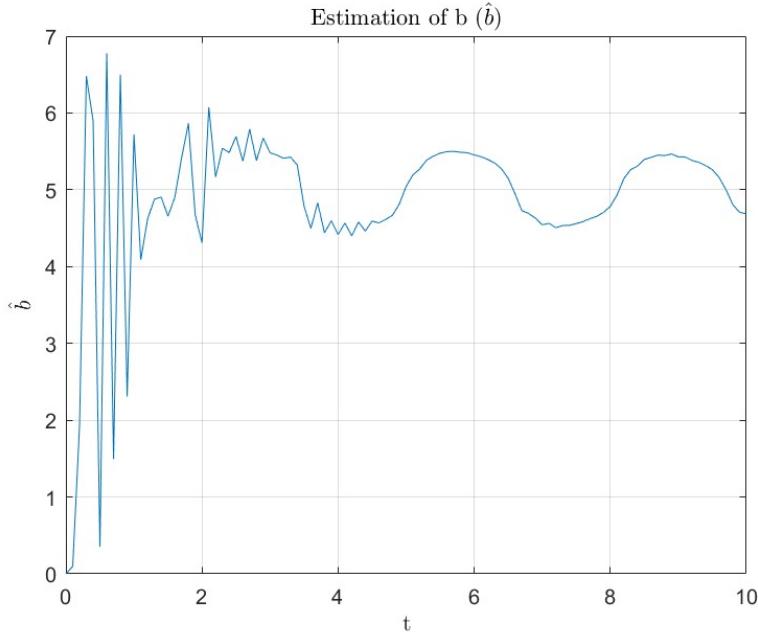
$\Sigma\chi\rho\mu\alpha\ 20:$ Η εκτίμηση της έξοδου x του συστήματος (\hat{x}) για $\gamma_1 = 10$ και $\gamma_2 = 25$.



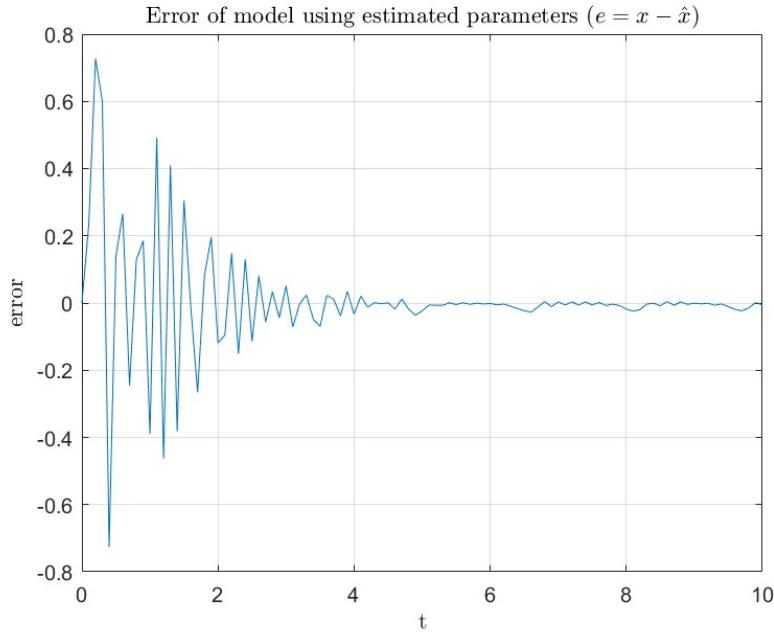
$\Sigma\chi\rho\mu\alpha$ 21: Η εξόδος και η εκτίμηση της εξόδου σε κοινό διάγραμμα για $\gamma_1 = 10$ και $\gamma_2 = 25$.



$\Sigma\chi\rho\mu\alpha$ 22: Η εκτίμηση της παραμέτρου a (\hat{a}) για $\gamma_1 = 10$ και $\gamma_2 = 25$.



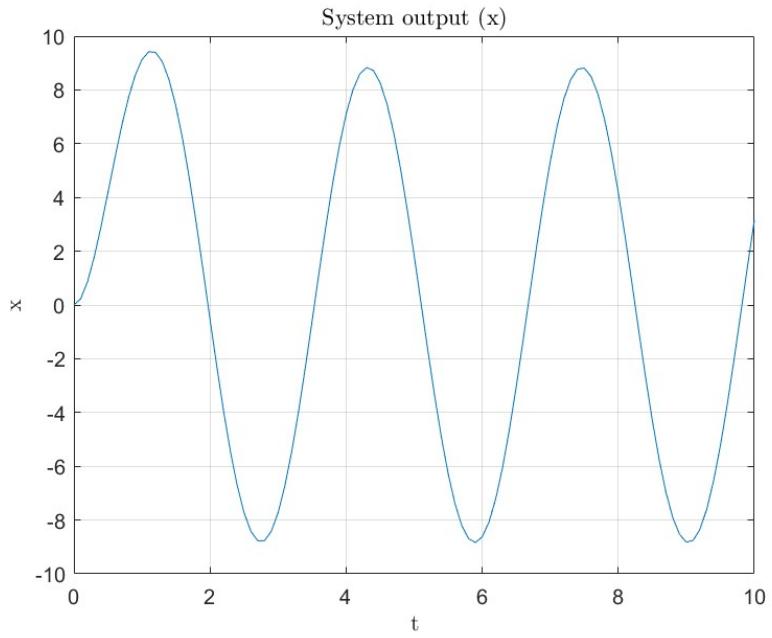
Σχήμα 23: Η εκτίμηση της παραμέτρου b (\hat{b}) για $\gamma_1 = 10$ και $\gamma_2 = 25$.



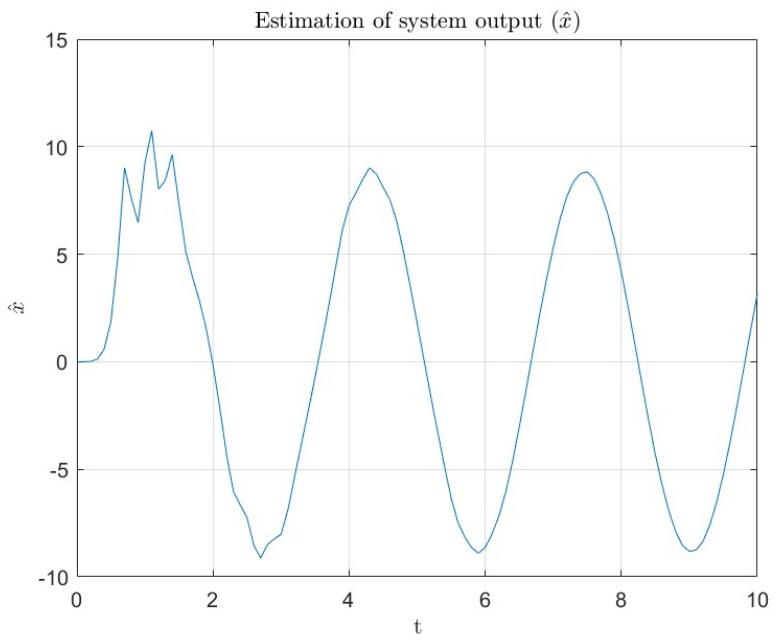
Σχήμα 24: Το σφάλμα ($e = x - \hat{x}$) για $\gamma_1 = 10$ και $\gamma_2 = 25$.

Παρατηρούμε πως ενώ το σφάλμα έχει σε όλο του μήκος μικρές τιμές, μηδενίζεται σχετικά γρήγορα και άρα η εκτιμήση ακολουθεί πολύ καλά το πραγματικό σύστημα, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων δεν είναι ιδιαίτερα καλές, αφού παρουσιάζουν ταλαντώσεις, μεγάλες και απότομες αυξομειώσεις, δηλαδή συμπεριφορά μη ικανοποιητική. Συνεχίζουμε την αναζήτηση για διαφορετικές τιμές των γ_1 και γ_2 που θα αποφέρουν καλύτερα αποτελέσματα για τις εκτιμήσεις και έπειτα από δοκιμές καταλήγουμε στις τιμές $\gamma_1 = 4$ και $\gamma_2 = 1$.

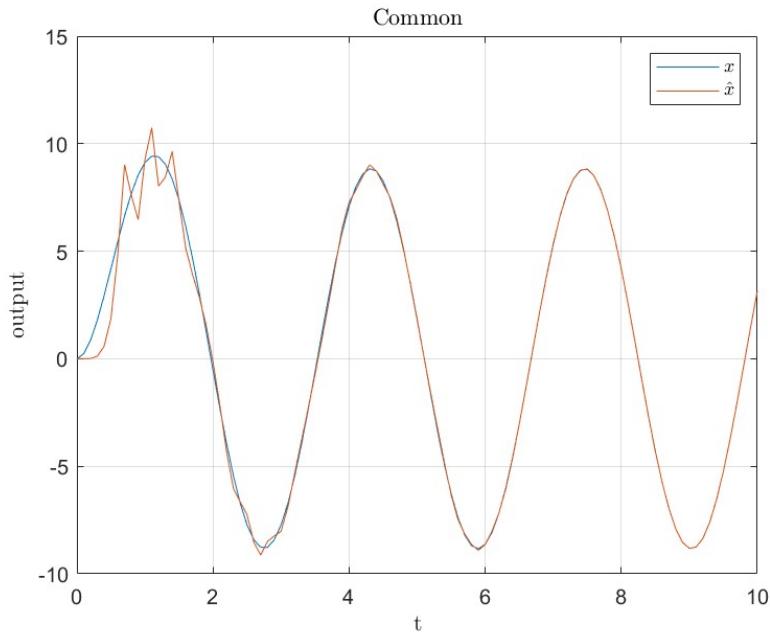
Λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:



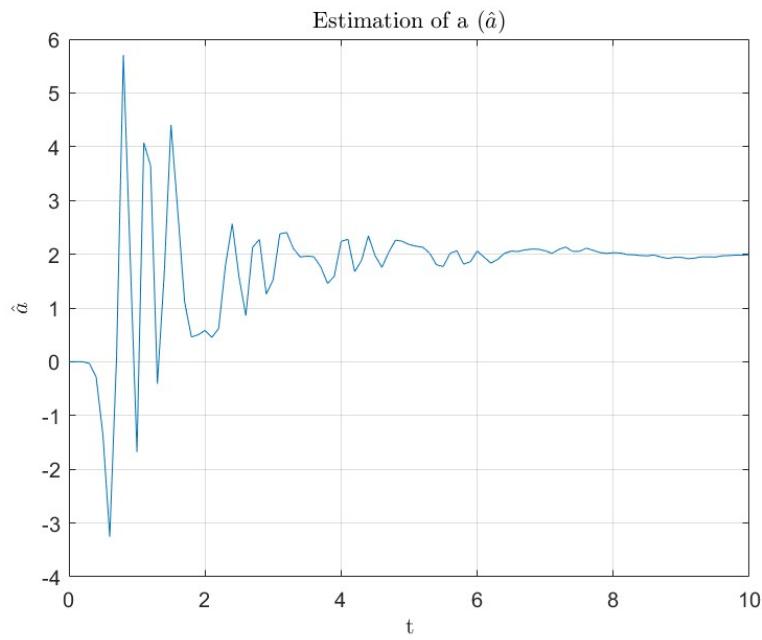
$\Sigma\chi\rho\mu\alpha\ 25:$ Η έξοδος x του συστήματος για $\gamma_1 = 4$ και $\gamma_2 = 2$.



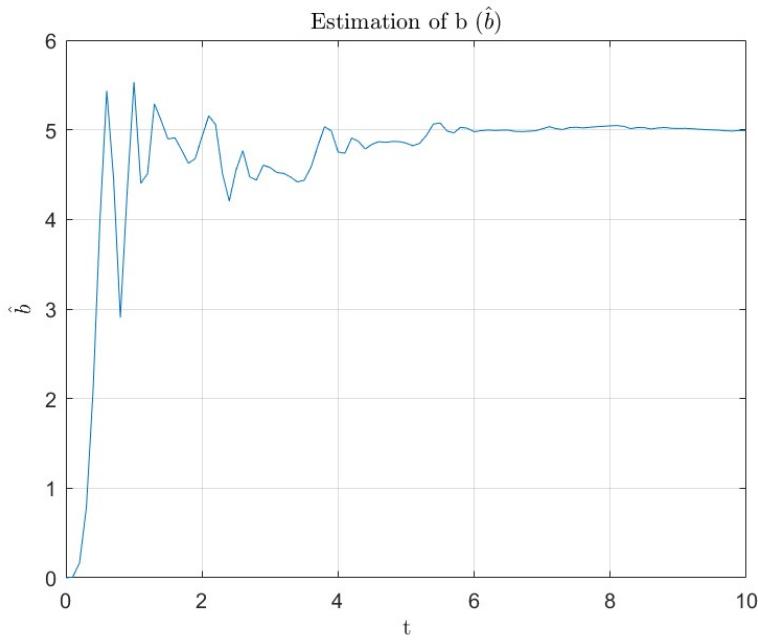
$\Sigma\chi\rho\mu\alpha\ 26:$ Η εκτίμηση της έξοδου x του συστήματος (\hat{x}) για $\gamma_1 = 4$ και $\gamma_2 = 2$.



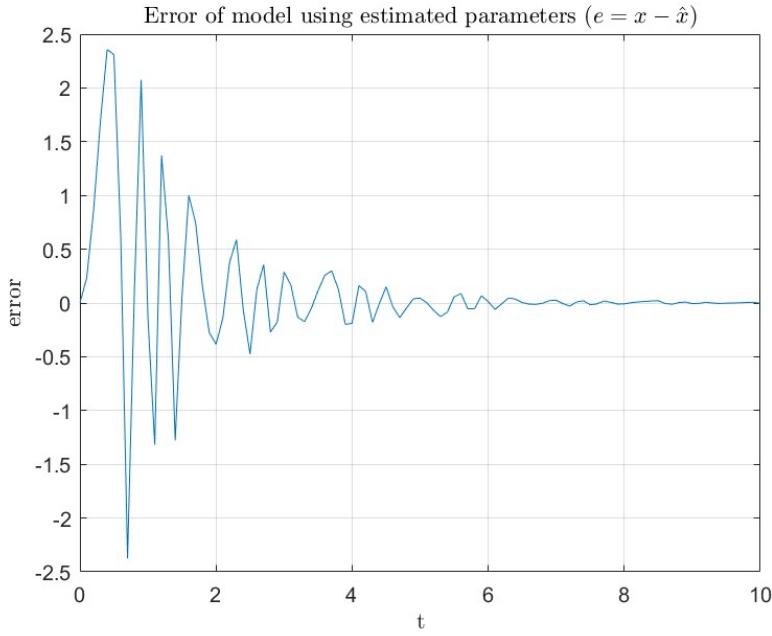
Σχήμα 27: Η έξοδος και η εκτίμηση της εξόδου σε κοινό διάγραμμα για $\gamma_1 = 4$ και $\gamma_2 = 2$.



Σχήμα 28: Η εκτίμηση της παραμέτρου a (\hat{a}) για $\gamma_1 = 4$ και $\gamma_2 = 2$.



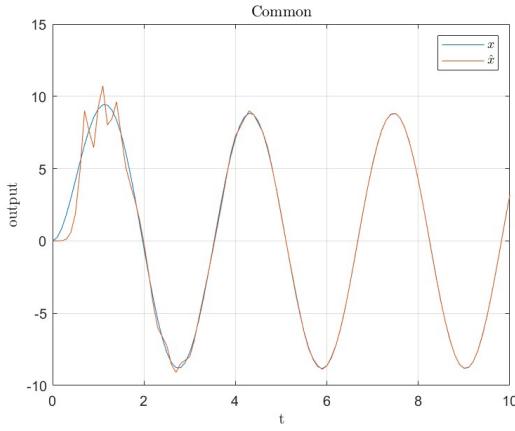
Σχήμα 29: Η εκτίμηση της παραμέτρου b (\hat{b}) για $\gamma_1 = 4$ και $\gamma_2 = 2$.



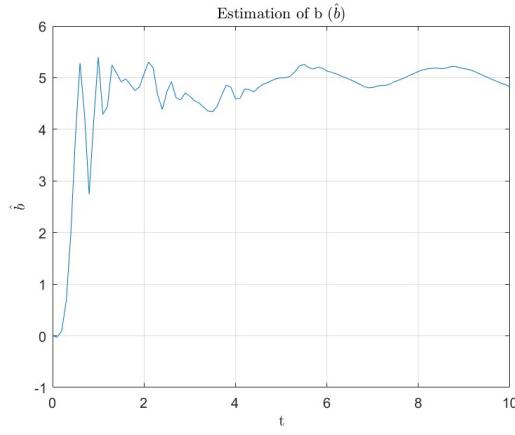
Σχήμα 30: Το σφάλμα ($e = x - \hat{x}$) για $\gamma_1 = 4$ και $\gamma_2 = 2$.

Παρατηρούμε πως οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι σημαντικά καλύτερες καθώς σταθεροποιούνται στις πραγματικές τιμές των παραμέτρων χωρίς πολύ μεγάλες αυξομειώσεις κατά τη διάρκεια του μεταβατικού, όμως το σφάλμα είναι σαφώς μεγαλύτερο και αποσβένει πιο αργά σε σχέση με την προηγούμενη επιλογή. Για να παρατηρήσουμε τι μεταβολές επιφέρει στο σύστημα η μεταβολή των η_0 και f θα κρατήσουμε αυτήν την επιλογή για να συνάγουμε ένα πιο ολοκληρώμενο συμπέρασμα ως προς όλα τα ζητούμενα.

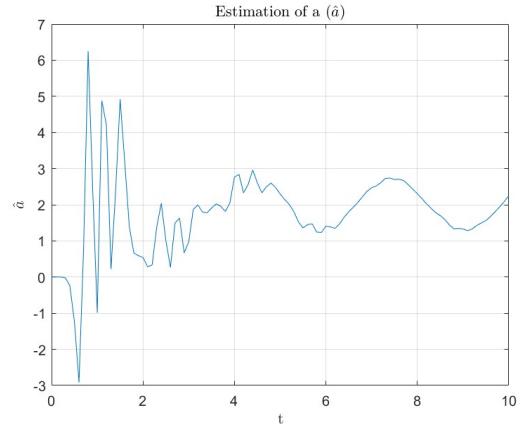
Ξεκινάμε με την αύξηση του η_0 :



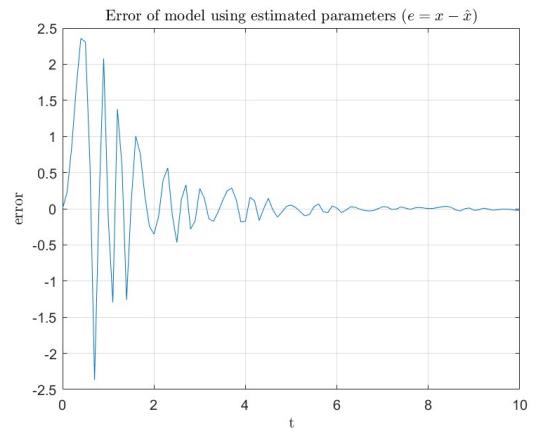
(α') Κοινό διάγραμμα για $\gamma_1 = 4$, $\gamma_2 = 2$



(γ') Εκτίμηση της παραμέτρου b (\hat{b}) για $\gamma_1 = 4$, $\gamma_2 = 2$

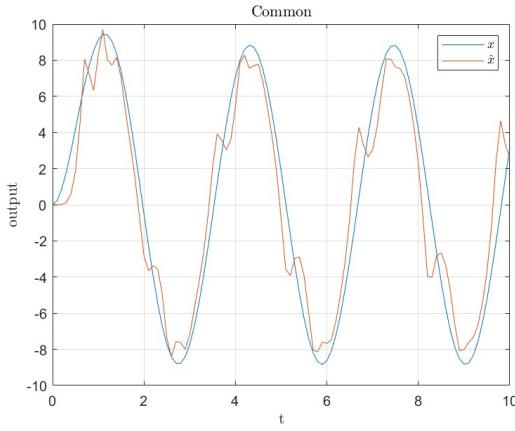


(β') Εκτίμηση της παραμέτρου a (\hat{a}) για $\gamma_1 = 4$, $\gamma_2 = 2$

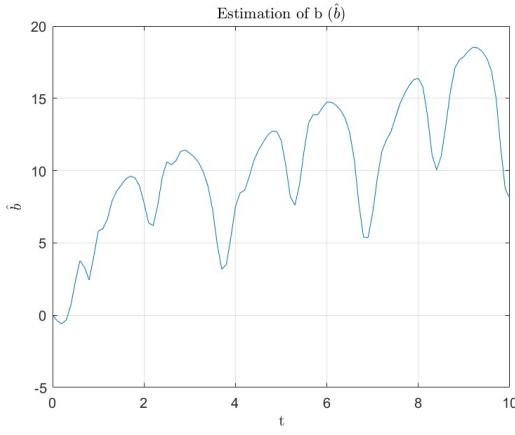


(δ') Σφάλμα για $\gamma_1 = 4$, $\gamma_2 = 2$

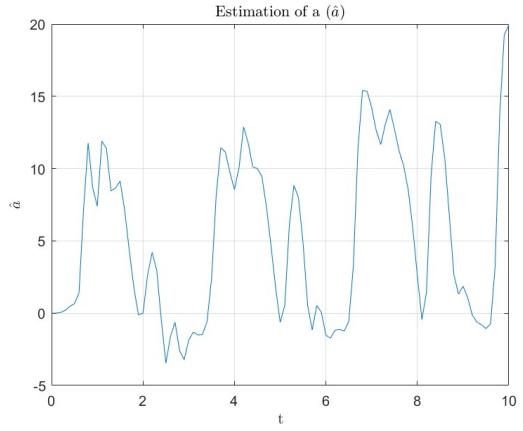
$\Sigma\chi'\mu\alpha$ 31: Για $\eta_0 = 5$



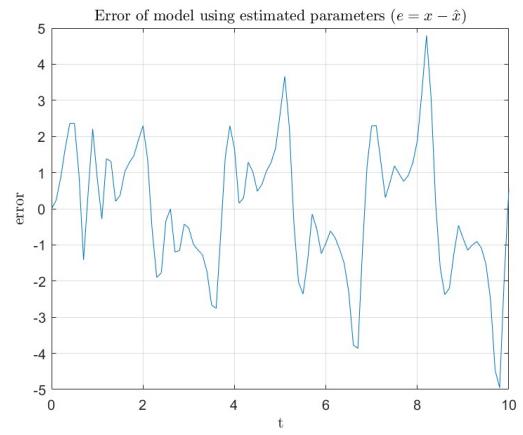
(α') Κοινό διάγραμμα για $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 2$



(β') Εκτίμηση της παραμέτρου a (\hat{a}) για $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 2$



(γ') Εκτίμηση της παραμέτρου b (\hat{b}) για $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 2$

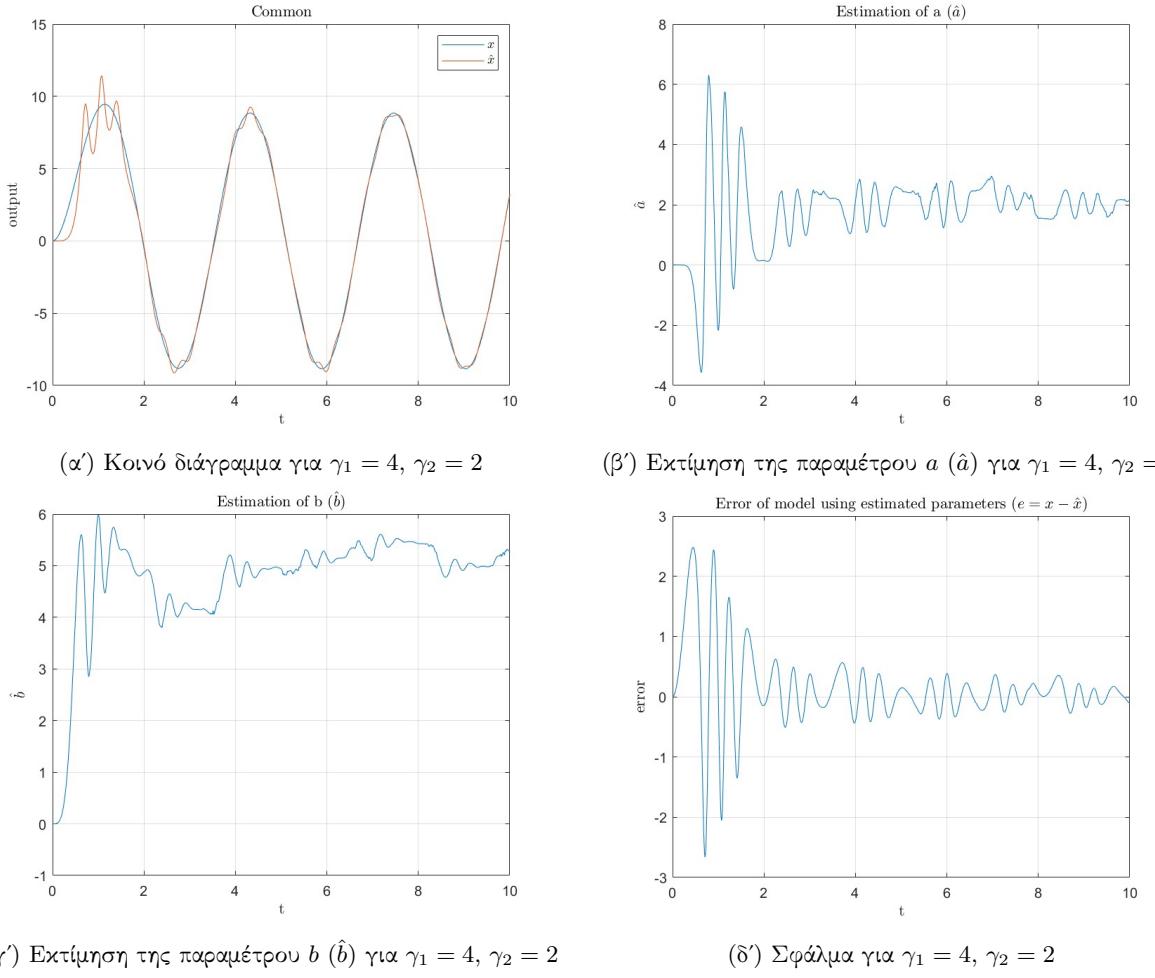


(δ') Σφάλμα για $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 2$

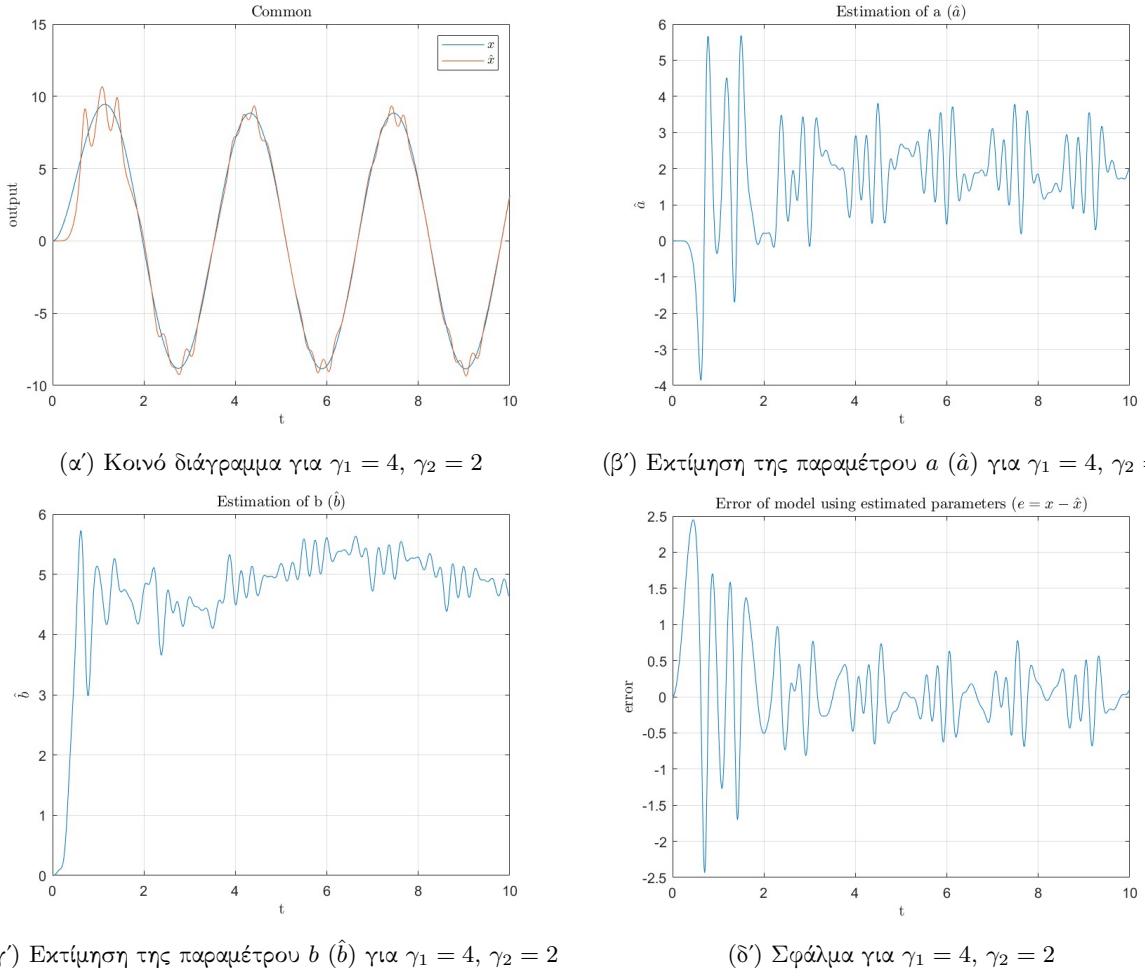
Σχήμα 32: Για $\eta_0 = 50$

Η αυξήση του πλάτους η παρατηρούμε πως δεν έχει σημαντική επιρροή στον εκτιμητή ως προς την εκτίμηση αυτή καιθ' αυτή (την εκτίμηση της εξόδου δηλαδή). Η έξοδος ακολουθείται σε αρκετά καλό βαθμό ακόμα και για πολύ μεγάλες αυξήσεις του πλάτους. Αντιθέτως οι εκτιμήσεις των παραμέτρων δε συγχλίνουν πλέον στις προγνωστικές τους τιμές για μεγάλες μεταβολές του η , ενώ για πιο μικρές μεταβολές παρατηρούμε ταλάντωση γύρω από τις πραγματικές τιμές.

Για τη συχνότητα f θα παρουσιάσουμε τα αποτέλεσματα για δεκαπλασιασμό και υποδεκαπλασιασμό της (θα αυξήσουμε στον κώδικα μας τη συχνότητα δειγματοληψίας για να έχουμε πιο ευχρινή αποτελέσματα).



$\Sigma\chi\text{ήμα 33: Για συχνότητα } f = 400$



Σχήμα 34: Για συχνότητα $f = 4$

Για δεκαπλασιασμό της συχνότητας παρατηρούμε πως η εκτίμηση της εξόδου παραμένει σχετικά κοντά στην πραγματική έξοδο, όμως όχι με απόλυτη ακρίβεια αφού το σφάλμα ταλαντώνει γύρω από το 0 με μεγάλη συχνότητα χωρίς όμως να ισορροπεί σε αυτό, αντίστοιχα για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων παρατηρούμε ταλάντωση με μεγάλη συχνότητα γύρω από τις πραγματικές τιμές χωρίς να επέρχεται ισορροπία.

Για υποδεκαπλασιασμό της συχνότητας παρατηρούμε πως η εκτίμηση της εξόδου αποκλίνει στις ακραίες τιμές του και γενικώς το σφάλμα είναι πιο αντιληπτό, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων ακολουθούν τροχιά που θυμίζει ταλαντώση γύρω από τις πραγματικές με συγκριτικά μεγάλο πλάτος σε σχέση με τα προηγούμενα διαγράμματα.

2.2 Μέθοδος Lyapunov για μεικτή τοπολογία

2.2.1 Θεωρητική Ανάλυση

Αφού έχουμε σύστημα $\dot{x} = -ax + bu$ όπου τα a , b σταθερά αλλά άγνωστα με βάση τη θεωρία θα πάρουμε εκτιμητή της μορφής:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \theta_2 u + \theta_m(x - \hat{x}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad \theta_m > 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 &= -\gamma_1 \cdot e_x \cdot x \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= \gamma_2 \cdot e_x \cdot u \\ \hat{\theta}_i(0) &= \hat{\theta}_{i0} \quad \text{για } i = 1, 2\end{aligned}$$

Και ειδικότερα στην περίπτωση μας θα έχουμε: $\hat{\theta}_1 = \hat{a}$ και $\hat{\theta}_2 = \hat{b}$. Επιπλέον για εφόσον γνωρίζουμε την ύπαρξη θορύβου στις μετρήσεις της εξόδου θα ισχύει:

$$e = y - \hat{x} = x + \eta - \hat{x}$$

Και άρα:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 \cdot (\eta + x - \hat{x}) \cdot (x + \eta) = -\gamma_1(x + \eta)^2 + \gamma_1\hat{x}(x + \eta)$$

και

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 \cdot u \cdot (x - \hat{x} + \eta)$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις κατάστασης του συστήματος:

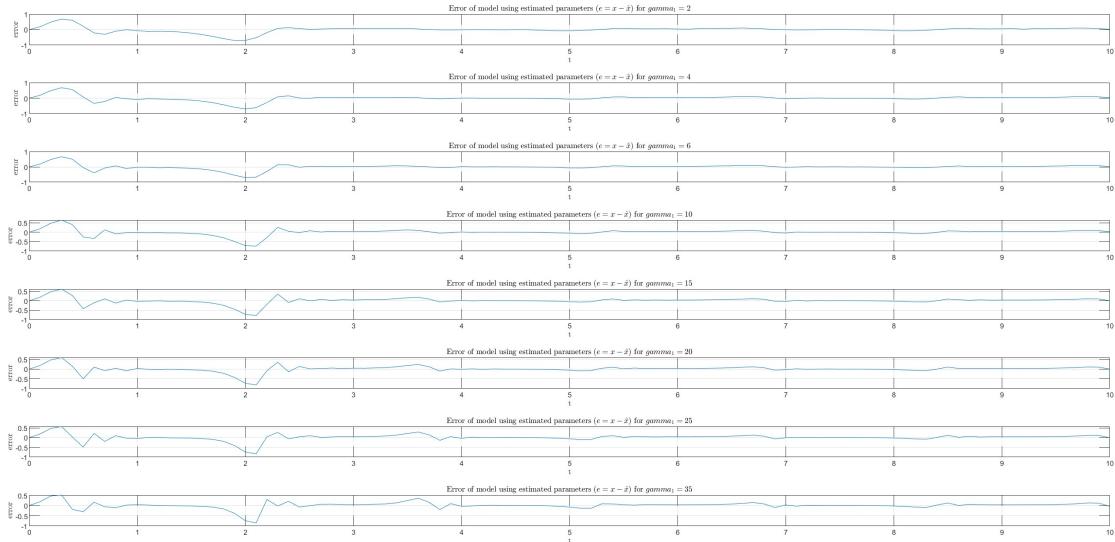
$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \hat{x} \\ x_3 = \hat{\theta}_1 \\ x_4 = \hat{\theta}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = -ax_1 + bu \\ \dot{x}_2 = \dot{\hat{x}} = -x_3x_2 + x_4u + \theta_m(x_1 - x_2 + \eta) \\ \dot{x}_3 = \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1(\eta + x_1)^2 + \gamma_1x_2(x_1 + \eta) \\ \dot{x}_4 = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2(x_1 - x_2 + \eta)u \end{cases}$$

με $e = x - \hat{x} = x_1 - x_2 + \eta$

2.2.2 Πειραματική Ανάλυση

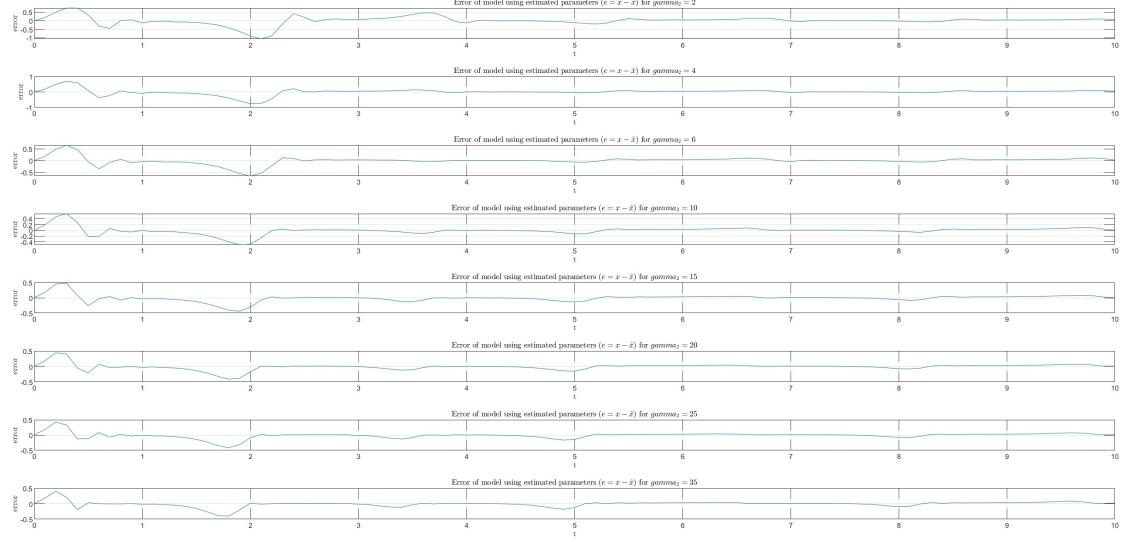
Μοντελοποιούμε το σύστημα στο MATLAB με $u(t) = 5\sin(2t)$, $\eta(t) = \eta_0\sin(2\pi ft)$, $a = 2$, $b = 5$, $\eta_0 = 0.5$ και $f = 40$ πρέπει να επιλέξουμε τις τιμές των θ_m, γ_1 και γ_2 . Για να βρούμε το καθένα από αυτά θα δοκιμάσουμε διάφορες τιμές σταθεροποιώντας την άλλη παράμετρο σε μια φαινομενικά λογική τιμή και μετά το αντίστροφο, ακολουθώντας δηλαδή παρόμοια μεθοδολογία με παραπάνω, ενώ για το θ_m με το ίδιο σκεπτικό και με δοκιμές καταλήγουμε στην τιμή $\theta_m = 5$.

Για το γ_1 κρατώντας σταθερό το $\gamma_2 = 5$ και μελετώντας το διάγραμα για το σφάλμα προκύπτει:



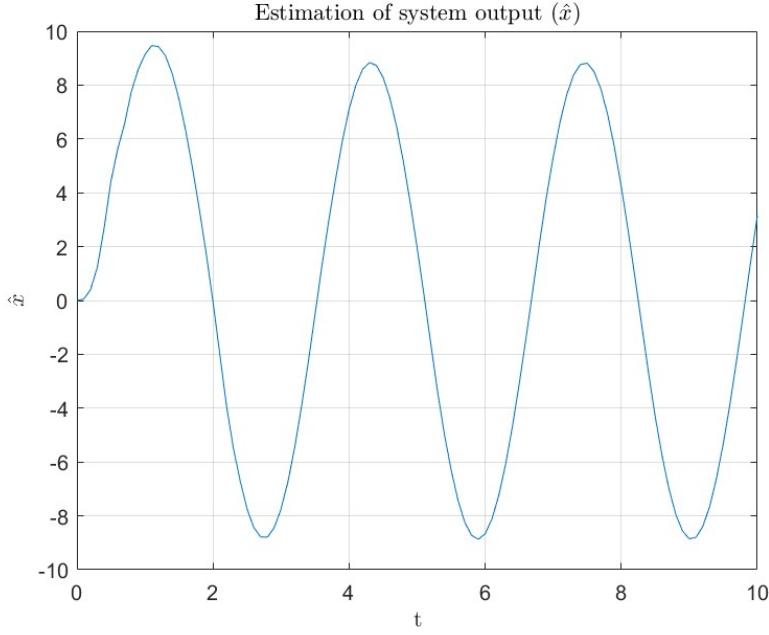
Σχήμα 35: Το σφάλμα για διάφορες τιμές του γ_1 με σταθεροποιημένο $\gamma_2 = 5$.

Και για το γ_2 αντίστοιχα:

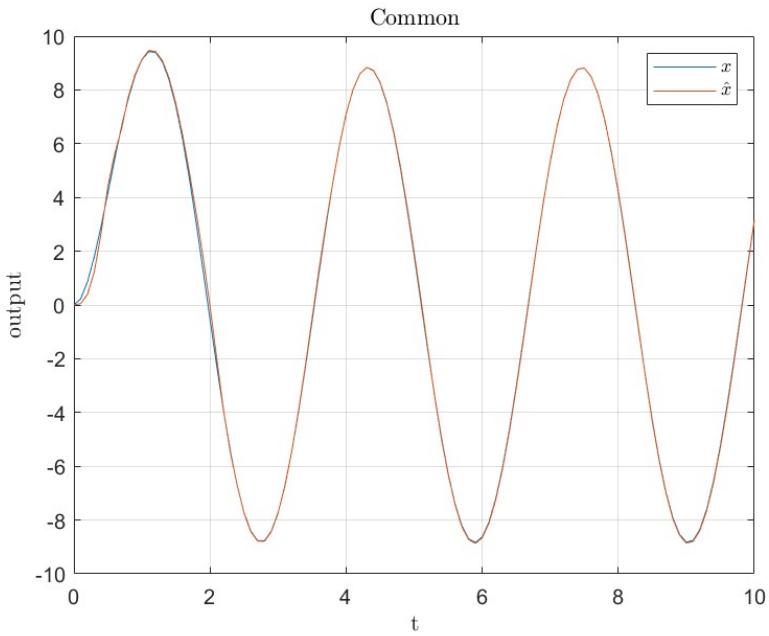


Σχήμα 36: Το σφάλμα για διάφορες τιμές του γ_2 με σταθεροποιημένο $\gamma_1 = 5$.

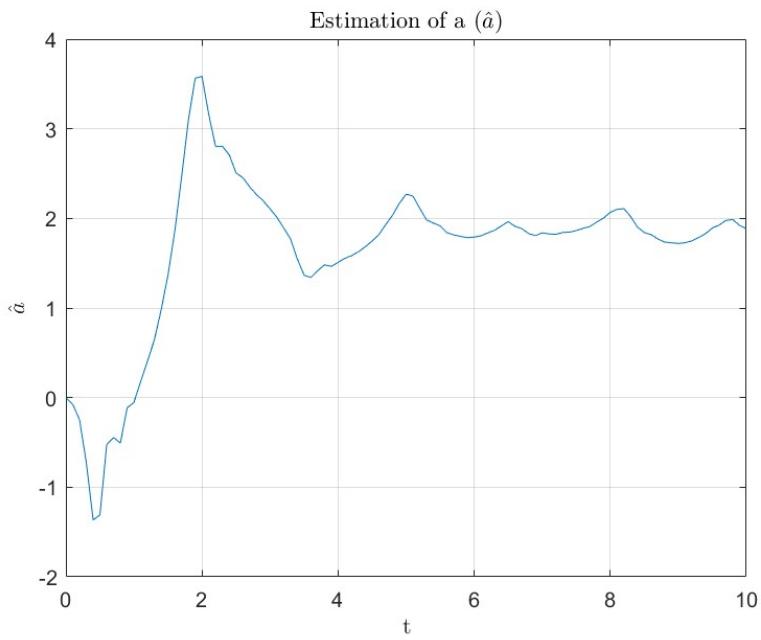
Καταλήγουμε πως οι καλύτερες τιμές για τα γ προς τη γραφική παράσταση του σφάλματος είναι οι $\gamma_1 = 6$ και $\gamma_2 = 10$. Συνεπώς θέτουμε στην προσομοίωση μας $\gamma_1 = 6$, $\gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$ και προκύπτουν τα εξής διαγράμματα:



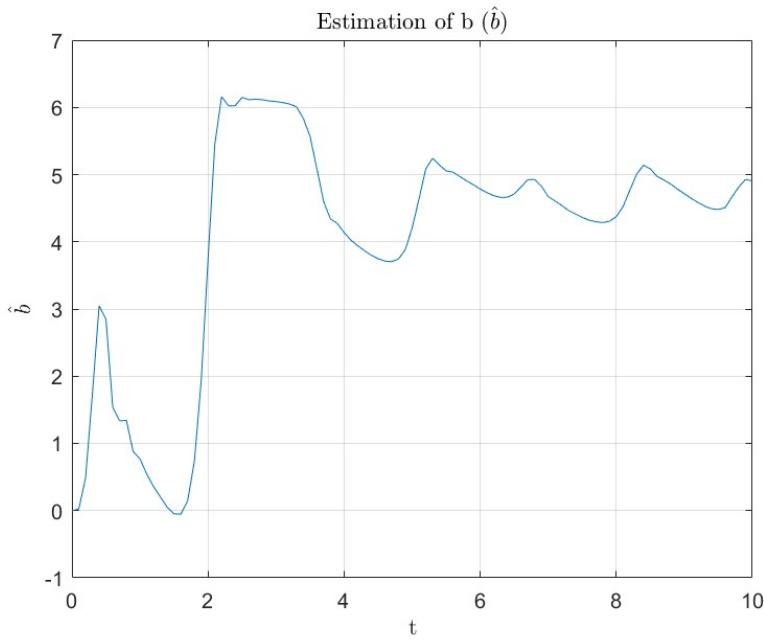
Σχήμα 37: Η εκτίμηση της έξοδου x του συστήματος (\hat{x}) για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$.



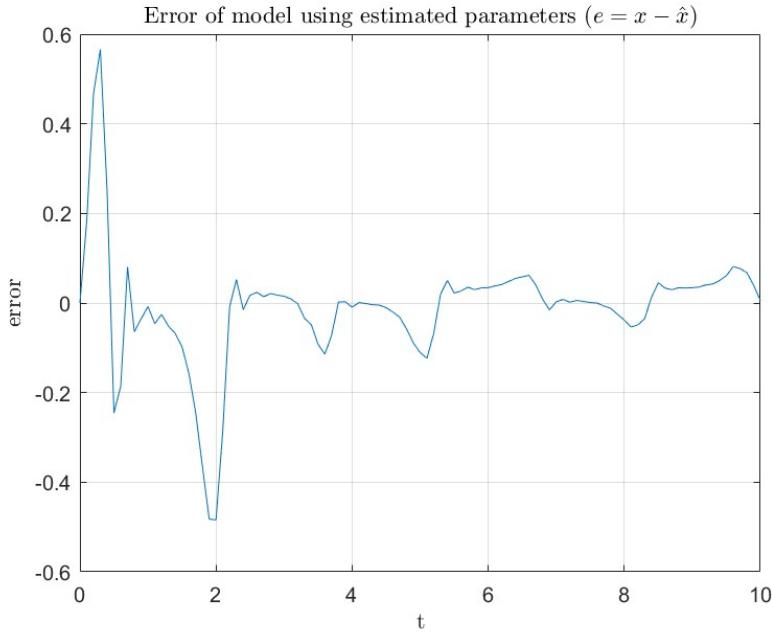
Σχήμα 38: Η έξοδος και η εκτίμηση της έξόδου σε κοινό διάγραμμα για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$.



Σχήμα 39: Η εκτίμηση της παραμέτρου a (\hat{a}) για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$.



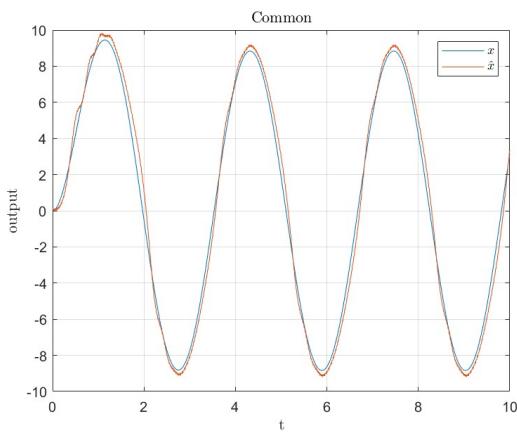
Σχήμα 40: Η εκτίμηση της παραμέτρου b (\hat{b}) για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$.



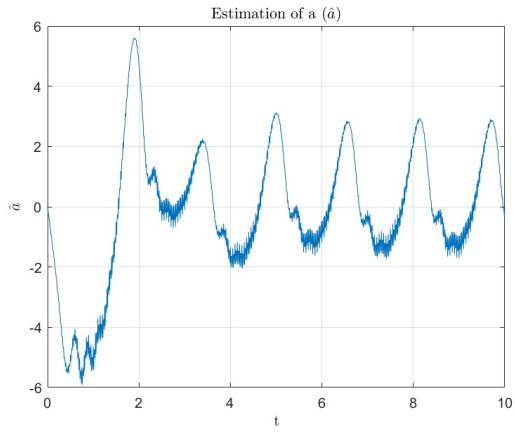
Σχήμα 41: Το σφάλμα ($e = x - \hat{x}$) για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$.

Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση της εξόδου είναι αρκετά ακριβής και το σφάλμα συγχλίνει και βρίσκεται σε περιοχή πολύ κοντά στο 0. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων βρίσκονται και αυτές σε περιοχές κοντά στις πραγματικές τιμές χωρίς όμως να συγχλίνουν ακριβώς πάνω σε αυτές.

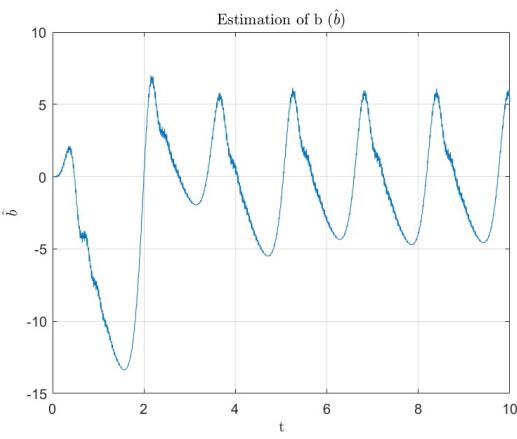
Στη συνέχεια μελετάμε την επίδραση που επιφέρει η μεταβολή των η_0 και f . Για αύξηση του πλάτους η_0 έχουμε:



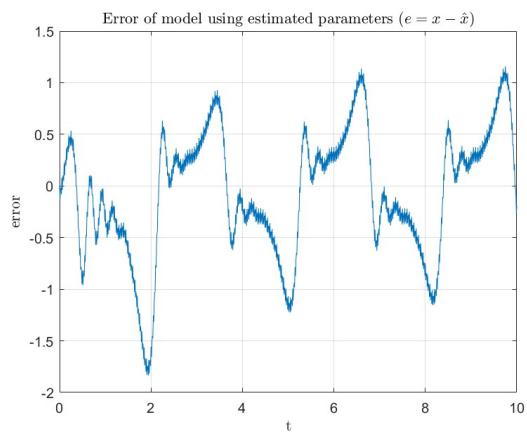
(α') Κοινό διάγραμμα για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$



(β') Εκτίμηση της παραμέτρου a (\hat{a}) για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$

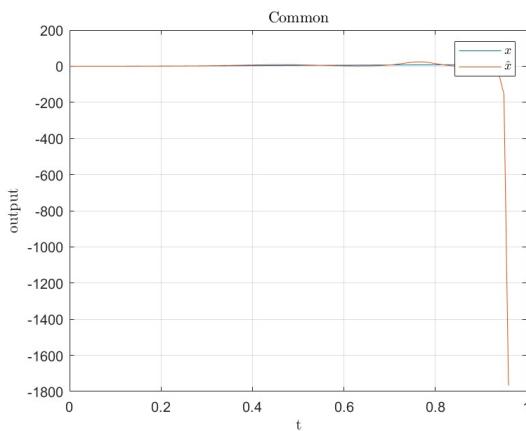


(γ') Εκτίμηση της παραμέτρου b (\hat{b}) για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$

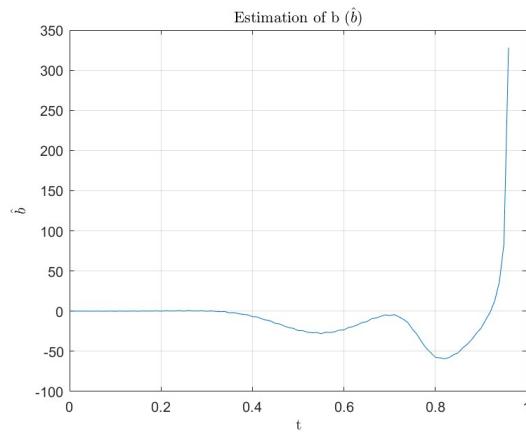


(δ') Σφάλμα για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$

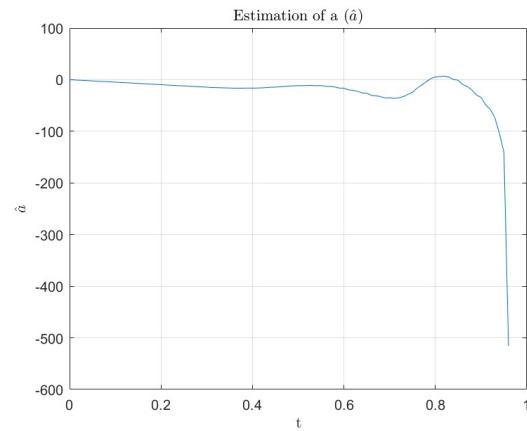
Σχήμα 42: Για $\eta_0 = 2$



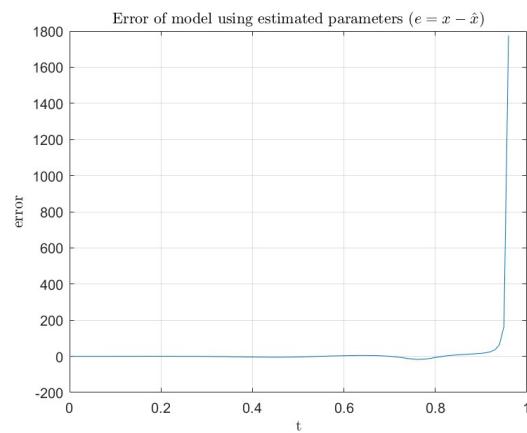
(α') Κοινό διάγραμμα για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$



(γ') Εκτίμηση της παραμέτρου b (\hat{b}) για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$



(β') Εκτίμηση της παραμέτρου a (\hat{a}) για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$

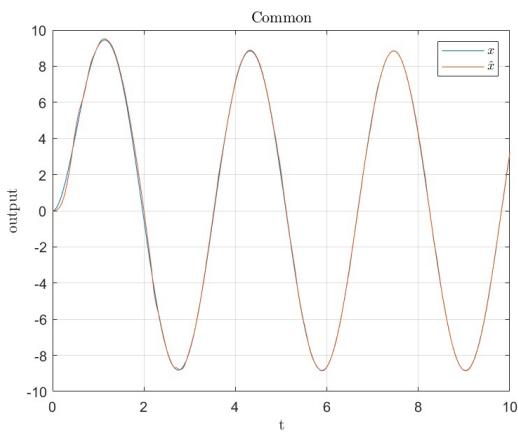


(δ') Σφάλμα για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$

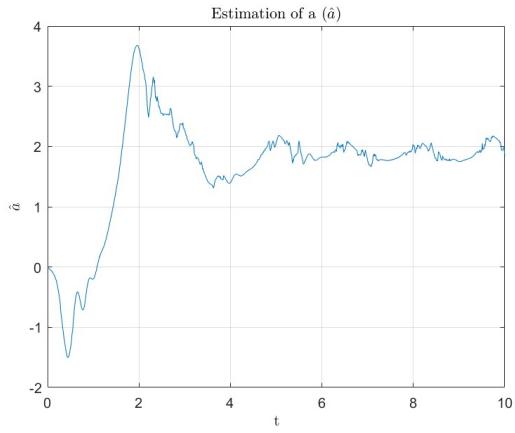
Σχήμα 43: Για $\eta_0 = 4$

Για τετραπλασιασμό του πλάτους παρατηρούμε ότι η εκτιμήση της εξόδου είναι ακόμα αποδεκτή, όμως το σφάλμα ακολουθεί μια τροχιά γύρω από το 0 με μεγάλο μη αποκετό εύρος όμως. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων ακολουθούν παρόμοια μη αποδεκτή συμπεριφορά. Για οκταπλασιασμό του πλάτους πολύ γρήγορα ο θόρυβος καταστρέφει το σύστημα αφού απειρίζονται εκτιμήσει παραμέτρων, εξόδου και το ίδιο το σφάλμα, μάλιστα το MATLAB τερματίζει την προσομοίωση δίστι δεν τηρούνται οι προϋποθέσεις της ανοχής για την ολοκλήρωση της ode45.

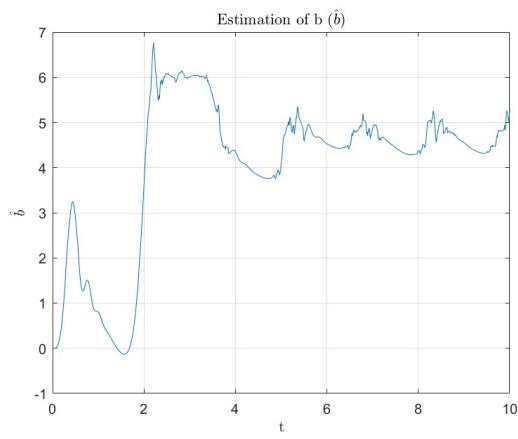
Για τη συχνότητα f :



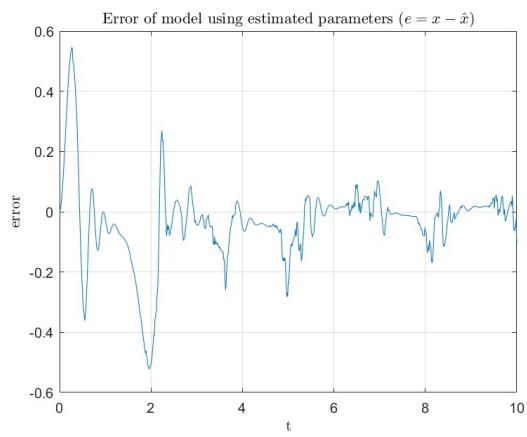
(α') Κοινό διάγραμμα για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$



(β') Εκτίμηση της παραμέτρου a (\hat{a}) για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$

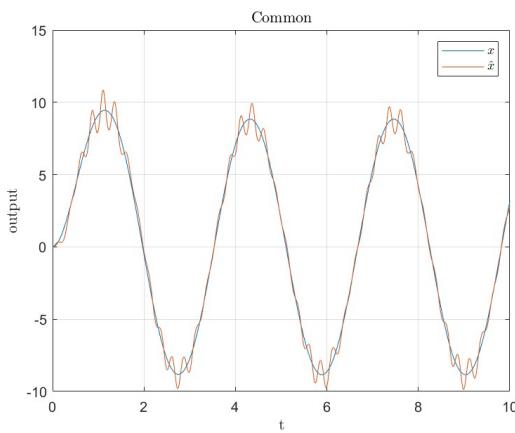


(γ') Εκτίμηση της παραμέτρου b (\hat{b}) για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$

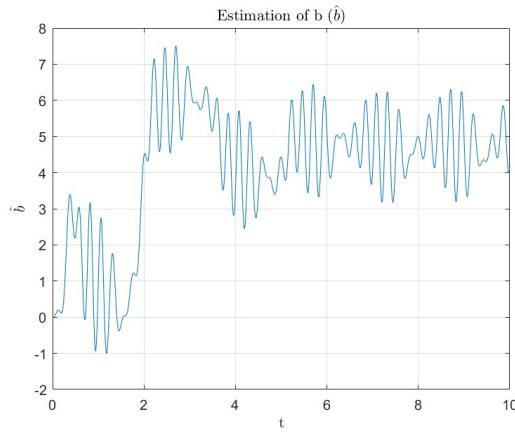


(δ') Σφάλμα για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$

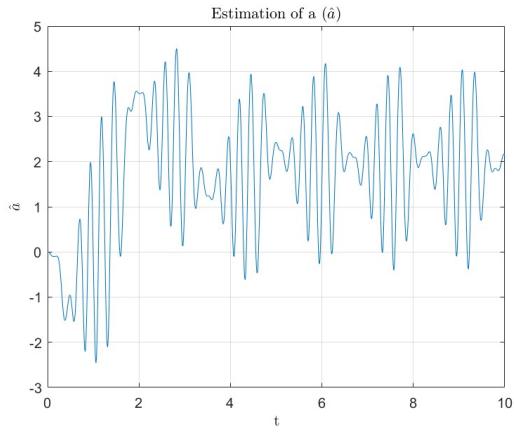
Σ χήμα 44: Για $f = 400$



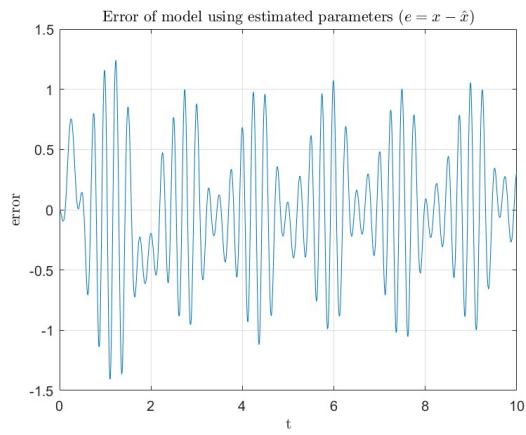
(α') Κοινό διάγραμμα για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$



(γ') Εκτίμηση της παραμέτρου b (\hat{b}) για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$



(β') Εκτίμηση της παραμέτρου a (\hat{a}) για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$



(δ') Σφάλμα για $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ και $\theta_m = 10$

Σχήμα 45: Για $f = 4$

Τα αποτέλεσμα για μεταβολή στη συχνότητα είναι παρόμοια με αυτά της παράλληλης τοπολογίας. Για δεκαπλασιασμό της συχνότητας παρατηρούμε πως η εκτίμηση της εξόδου παραμένει σχετικά κοντά στην πραγματική έξοδο, όμως όχι με απόλυτη ακρίβεια αφού το σφάλμα ταλαντώνει γύρω από το 0 με μεγάλη συχνότητα χωρίς όμως να ισορροπεί σε αυτό, αντίστοιχα για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων παρατηρούμε ταλάντωση με μεγάλη συχνότητα γύρω από τις πραγματικές τιμές χωρίς να επέρχεται ισορροπία.

Για υποδεκαπλασιασμό της συχνότητας παρατηρούμε πως η εκτίμηση της εξόδου αποκλίνει στις ακραίες τιμές του και γενικώς το σφάλμα είναι πιο αντιληπτό, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων ακολουθούν τροχιά που θυμίζει ταλαντώση γύρω από τις πραγματικές με συγχριτικά μεγάλο πλάτος σε σχέση με τα προηγούμενα διαγράμματα.

2.3 Σχόλιο

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις προσομοιώσεις στις οποίεις είναι υπαρκτός ο ύφορυβος είναι τα αναμενόμενα από τη θεωρία. Η μεικτή τοπολογία είναι πιο ευαίσθητη στη παρουσία του ύφορύβου στις μετρήσεις αφού στη διαφορική εξίσωση του $\dot{\theta}_1$ ορός του ύφορύβου είναι υψημένος στο τετράγωνο κάτι που δε συμβαίνει στην παράλληλη τοπολογία.

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma_1(x + \eta)^2 + \gamma_1\hat{x}(x + \eta) \quad (\text{μεικτή τοπολογία})$$

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma_1(x + \eta)\hat{x} + \gamma_1\hat{x}^2 \quad (\text{παράλληλη τοπολογία})$$

Συνεπώς αν έπρεπε να επιλέξουμε κάποια από τις δύο τοπολογίες για το συγκεκριμένο πρόβλημα θα διαλέγαμε την παράλληλη, που είναι πιο ανθεκτική στην ύπαρξη ύφορύβου.