

Εργασία Μαθήματος 2023-2024

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου III

Μπίλλας Θωμάς Αχιλλέας
ΑΕΜ: -
tmpillas@ece.auth.gr

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών ΑΠΘ
Ιανουάριος 2024

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου III

Μπίλιας Θωμάς Αχιλλέας
ΑΕΜ: -

Ιανουάριος 2024

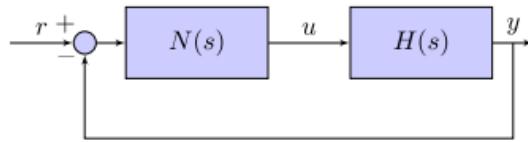
Περιεχόμενα

1 Ερώτημα 1	2
1.1 Ζητούμενο i - Θεωρητική ανάλυση	2
1.2 Ζητούμενο ii - Εύρεση σημείων ισορροπίας	3
1.2.1 Βηματική είσοδος πλάτους A	3
1.2.2 Είσοδος ράμπας κλίσης B	3
1.2.3 Σχολιασμός	4
1.3 Ζητούμενο iii - Προσομοίωση συστήματος	4
1.3.1 Σχολιασμός	10
2 Ερώτημα 2	11
2.1 Ζητούμενο i - Θεωρητική ανάλυση	11
2.2 Ζητούμενο ii - Εύρεση σημείων ισορροπίας	11
2.2.1 Βηματική είσοδος πλάτους A	11
2.2.2 Είσοδος ράμπας κλίσης B	12
2.3 Ζητούμενο iii - Προσομοίωση συστήματος	13
2.3.1 Βηματική είσοδο $r_u(t) = 2$	13
2.3.2 Είσοδος ράμπας $r_{r1}(t) = t$	16
2.3.3 Είσοδος ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$	20
2.3.4 Είσοδος ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$	25
2.3.5 Σχολιασμός αποτελεσμάτων και σύγκριση	28

Τμήμα A

Σκοπός του τμήματος Α της εργασίας είναι η μελετούμε το παρακάτω συστήματος για 2 διαφορετικά $N(s)$. Παρουσιάζονται θεωρητικές αναλύσεις για τα ζητούμενα καθώς επίσης και τα διάγραμματα των προσομοιώσεων, που έχουν πραγματοποιηθεί για τις δοσμένες αρχικές συνθήκες και επιβεβαιώνουν τα θεωρητικά συμπεράσματα. Στον υποβληθέντα φάκελο υπάρχουν και οι κώδικες του MATLAB που οδήγησαν στα διαγράμματα που παρουσιάζονται στο μήκος της αναφοράς και αποτελούν τη βάση για ορισμένα συμπεράσματα και παρατηρήσεις που προέκυψαν.

Δίνεται το σύστημα ελέγχου του σχήματος:



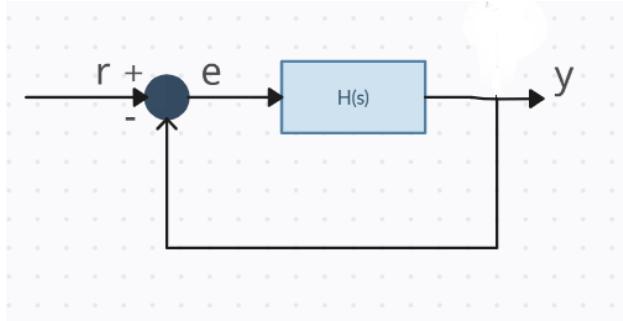
όπου

$$H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}, \quad K, T > 0$$

Σχήμα 1: Σύστημα ελέγχου της εργασίας

1 Ερώτημα 1

Μας δίνεται ότι: $N(s) = 1$ άρα το το μπλοκ διάγραμμα μπορεί να σχεδιαστεί και ως εξής



Σχήμα 2: Ισοδύναμο μπλοκ διάγραμμα για $N(s) = 1$

1.1 Ζητούμενο i - Θεωρητική ανάλυση

Γνωρίζουμε πως για τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόγχου ισχύει:

$$H_c(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)} = \frac{\frac{K}{s \cdot (T \cdot s + 1)}}{1 + \frac{K}{s \cdot (T \cdot s + 1)}} = \frac{\frac{K}{T}}{s^2 + \frac{1}{T} \cdot s + \frac{K}{T}}$$

Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση (X.E.) είναι η:

$$s^2 + \frac{1}{T} \cdot s + \frac{K}{T} = 0 \quad (1)$$

Από θεωρία γνωρίζουμε πως η X.E. γράφεται στη μορφή:

$$s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 = 0 \quad (2)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των (1), (2) προκύπτει ότι:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} \text{ και } \zeta = \frac{\sqrt{T}}{2 \cdot \sqrt{K}}$$

Από το μπλοκ διάγραμμα έχουμε:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = H(s) \Leftrightarrow \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\frac{K}{T}}{s^2 + \frac{1}{T} \cdot s} \Leftrightarrow Y(s) \cdot (s^2 + \frac{1}{T} \cdot s) = E(s) \cdot \frac{K}{T}$$

και παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace προκύπτει:

$$\ddot{y} + \frac{1}{T} \cdot \dot{y} = \frac{K}{T} \cdot e$$

και αντικαθιστώντας για το y εφόσον ξέρουμε ότι: $e = r - y \Leftrightarrow y = r - e$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - \ddot{e} + \frac{1}{T} \cdot \dot{r} - \frac{1}{T} \cdot \dot{e} &= \frac{K}{T} \cdot e \Leftrightarrow \\ \ddot{e} + \frac{1}{T} \cdot \dot{e} + \frac{K}{T} \cdot e &= \ddot{r} + \frac{1}{T} \cdot \dot{r} \end{aligned}$$

η οποία σχέση είναι και η διαφορική εξίσωση του σφάλματος.

Για τις εξισώσεις κατάστασης του συστήματος, θεωρούμε φασικές μεταβλητές $e = x_1$ και $\dot{e} = x_2$ και προκύπτει:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{r} + \frac{1}{T} \cdot \dot{r} - \frac{1}{T} \cdot x_2 - \frac{K}{T} \cdot x_1 \end{aligned}$$

1.2 Ζητούμενο ii - Εύρεση σημείων ισορροπίας

1.2.1 Βηματική είσοδος πλάτους A

Για είσοδο: $r(t) = A \cdot u(t)$, όπου $u(t)$ βηματική, ισχύει ότι $\ddot{r} = \dot{r} = 0$, άρα το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T} \cdot x_2 - \frac{K}{T} \cdot x_1 \end{aligned}$$

Για τα σημεία ισορροπίας:

$$\dot{x}_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

και

$$\dot{x}_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

Άρα μοναδικό σημείο ισορροπίας το $x_e = (0, 0)$

1.2.2 Είσοδος ράμπας κλίσης B

Για είσοδο: $r(t) = B \cdot t \cdot u(t)$, όπου $u(t)$ βηματική, ισχύει ότι $\dot{r} = B$ και $\ddot{r} = 0$, άρα το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{B}{T} - \frac{1}{T} \cdot x_2 - \frac{K}{T} \cdot x_1 \\ \dot{x}_1 = 0 &\Leftrightarrow x_2 = 0 \end{aligned}$$

και

$$\dot{x}_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{B}{K}$$

Άρα μοναδικό σημείο ισορροπίας το $x_e = (\frac{B}{K}, 0)$

1.2.3 Σχολιασμός

Οι παράμετροι K , T δεν επιδρούν στη σύγκλιση (το σύστημα θα συγκλίνει αφού οι ρίζες της X.E. έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος για K, T θετικά). Για βηματική είσοδο δεν υπάρχει καμία επίδραση των παραμέτρων στα σημεία ισορροπίας. Για είσοδο ράμπας μόνο η παράμετρος K παίζει ρόλο στην τιμή της x_1 συνιστώσας του σημείου ισορροπίας. Η παράμετρος T δεν επιδρά σε καμία από τις δύο περιπτώσεις στα σημεία ισορροπίας τους συστήματος.

1.3 Ζητούμενο iii - Προσομοίωση συστήματος

Για $T = 0.5$ και $K = 10$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{r} + 2 \cdot \dot{r} - 2 \cdot x_2 - 20 \cdot x_1\end{aligned}$$

Για τη βηματική είσοδο $r_u(t) = 2$ γίνεται:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2 \cdot x_2 - 20 \cdot x_1\end{aligned}$$

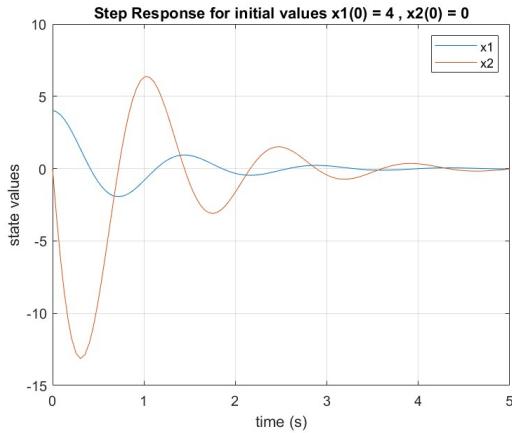
με σημείο ισορροπίας το $(0, 0)$.

Για είσοδο ράμπας $r_r(t) = t$ γίνεται:

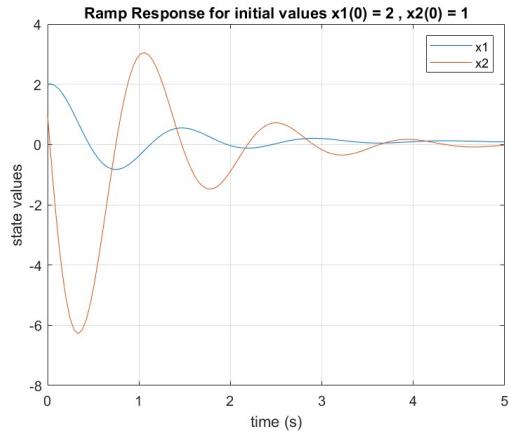
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2 - 2 \cdot x_2 - 20 \cdot x_1\end{aligned}$$

με σημείο ισορροπίας το $(0.1, 0)$.

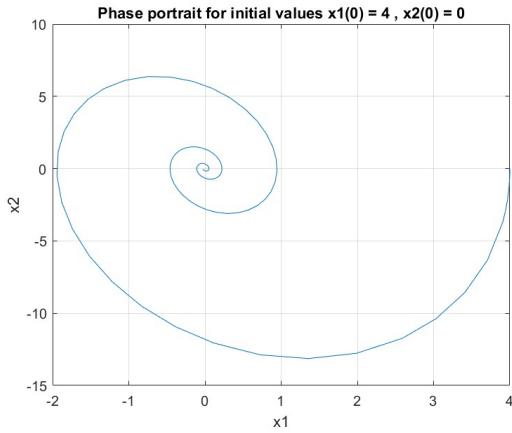
Θα παρουσιαστούν τα διαγράμματα που ζητούνται με βάση τον αριθμό της προσομοίωσης όπως δίνεται από την εκφώνηση.



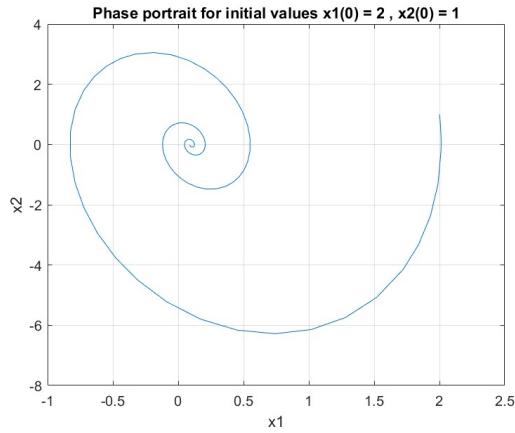
(α') Απόκριση καταστάσεων για βηματική είσοδο



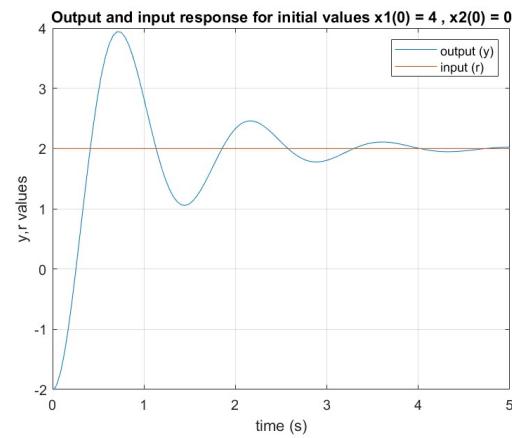
(β') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας



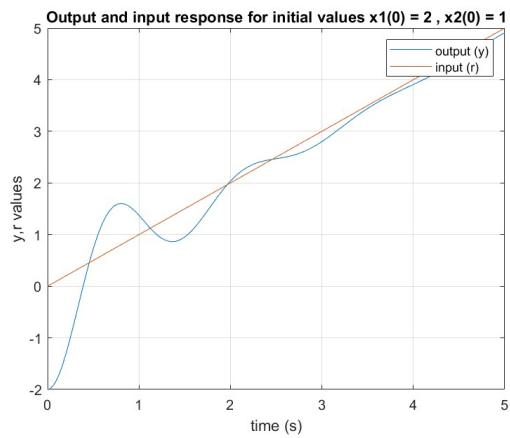
(γ') Φασικό πορτραίτο για βηματική είσοδο



(δ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας

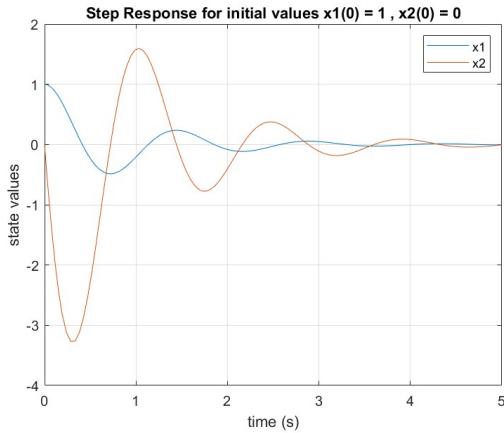


(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για βηματική είσοδο

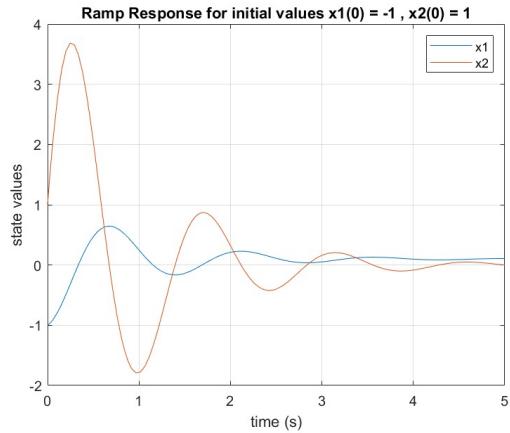


(ζ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας

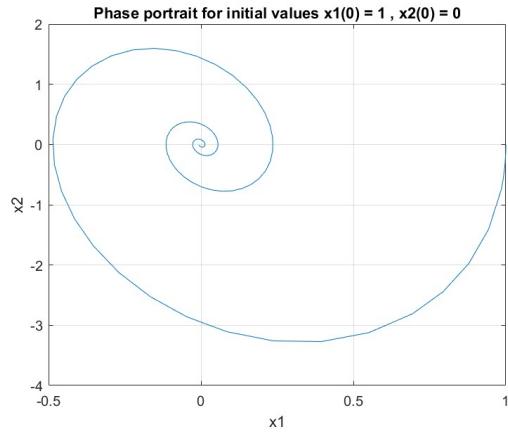
Σχήμα 3: Προσομοίωση 1



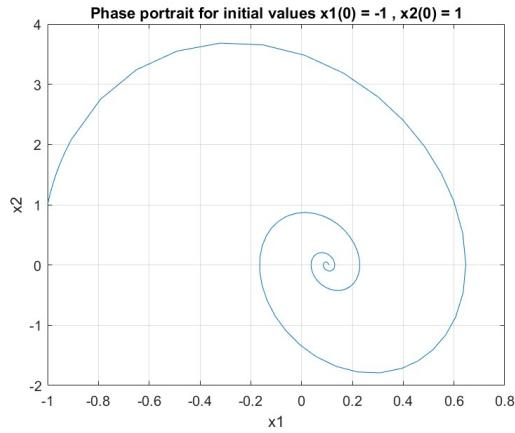
(α') Απόκριση καταστάσεων για βηματική είσοδο



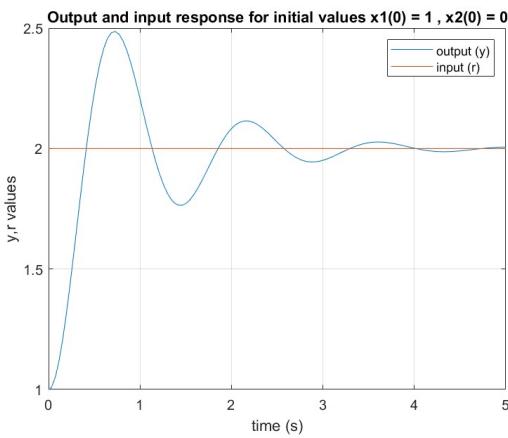
(β') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας



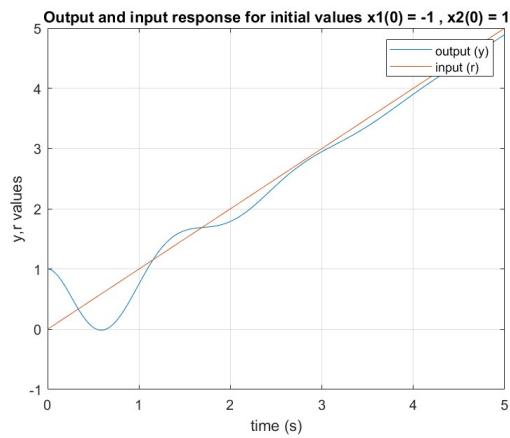
(γ') Φασικό πορτραίτο για βηματική είσοδο



(δ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας

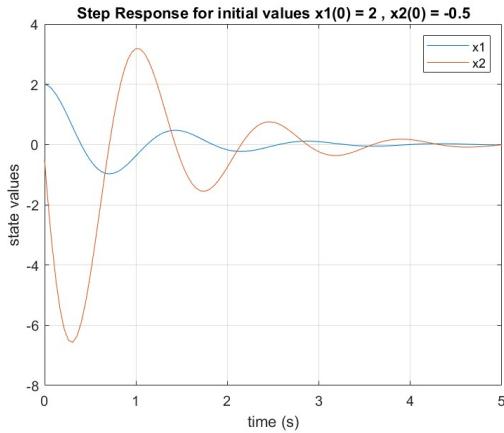


(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για βηματική είσοδο

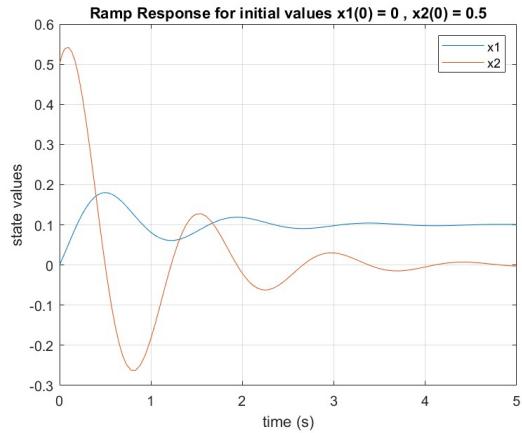


(ζ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας

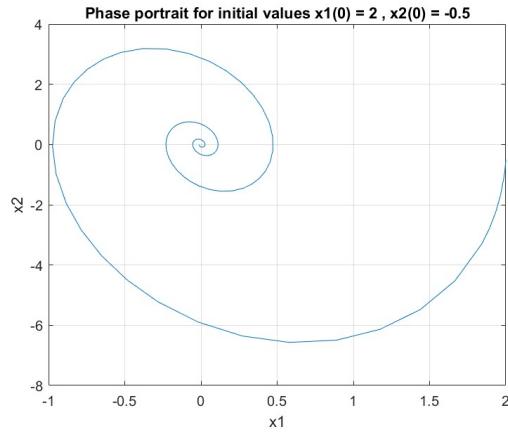
Σχήμα 4: Προσομοίωση 2



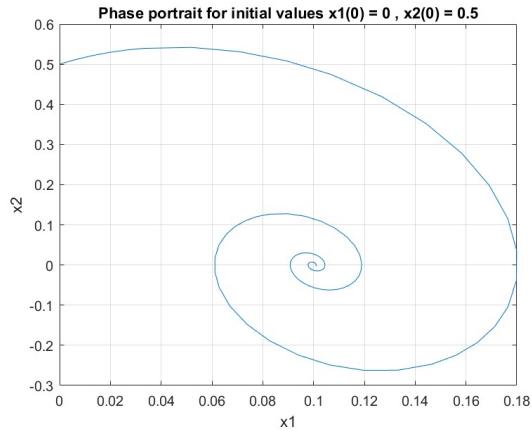
(α') Απόκριση καταστάσεων για βηματική είσοδο



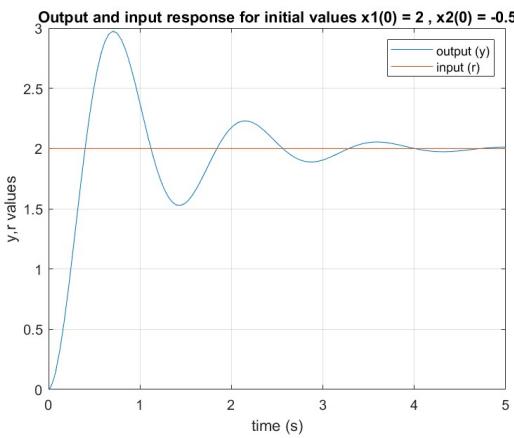
(β') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας



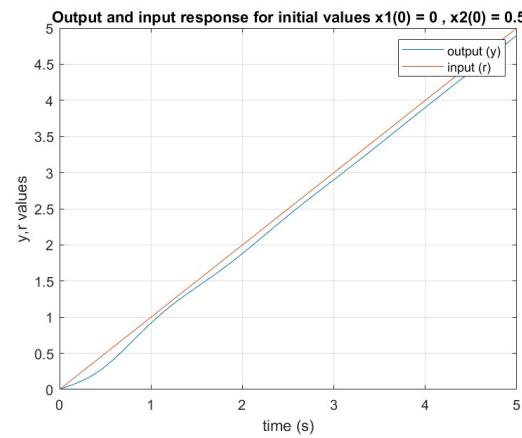
(γ') Φασικό πορτραίτο για βηματική είσοδο



(δ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας

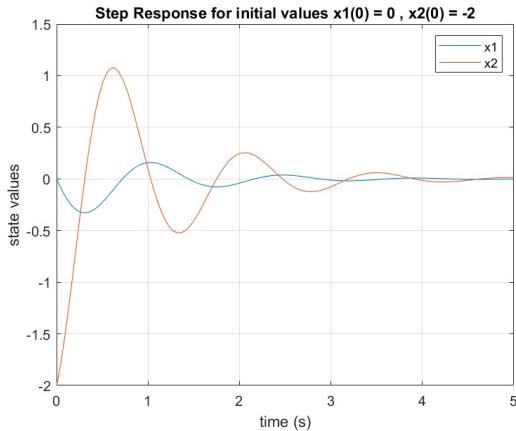


(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για βηματική είσοδο

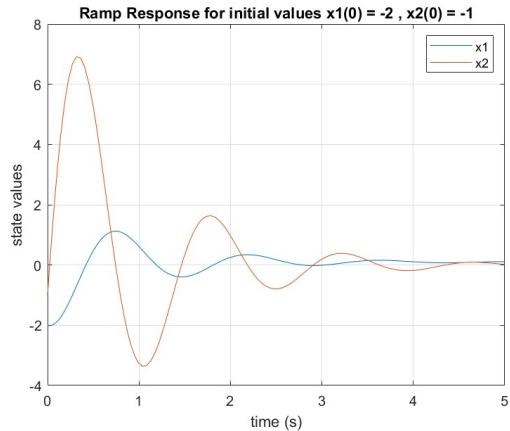


(ζ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας

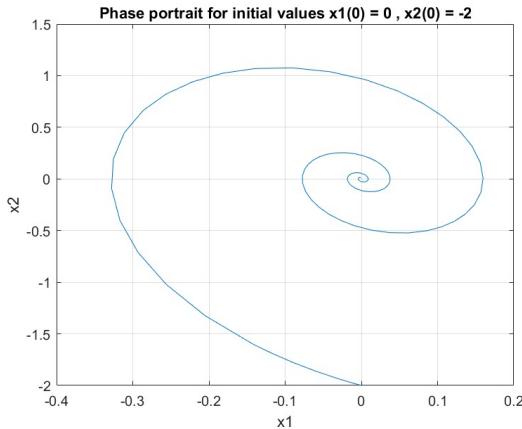
Σχήμα 5: Προσομοίωση 3



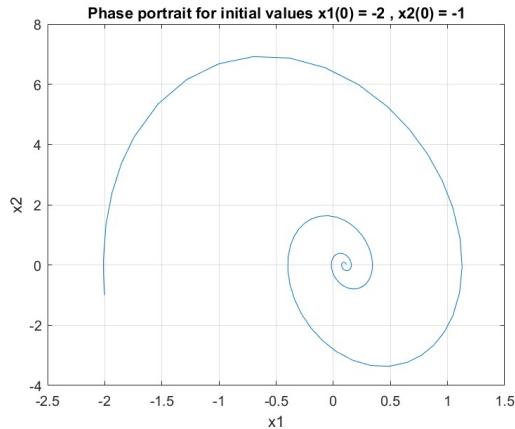
(α') Απόκριση καταστάσεων για βηματική είσοδο



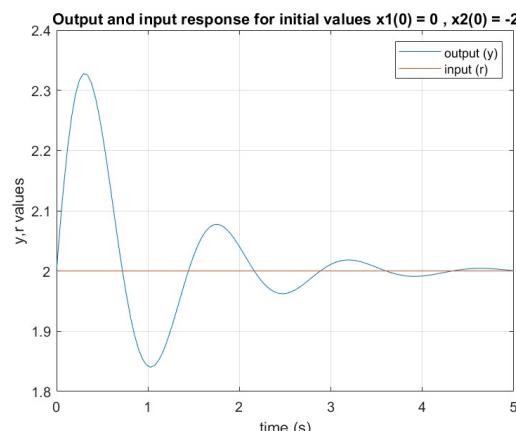
(β') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας



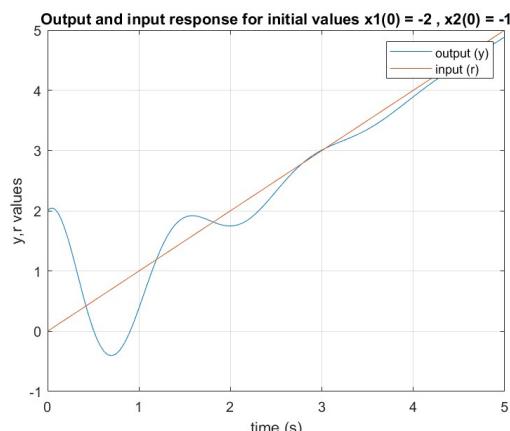
(γ') Φασικό πορτραίτο για βηματική είσοδο



(δ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας

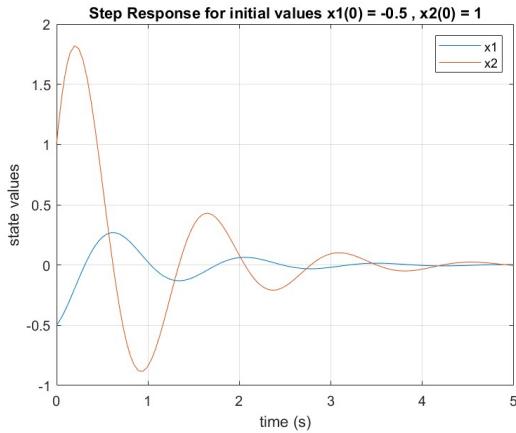


(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για βηματική είσοδο

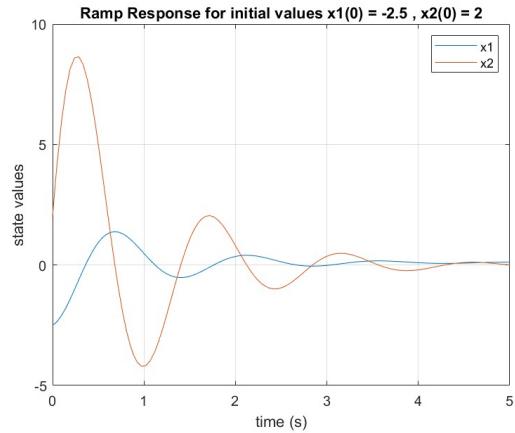


(ζ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας

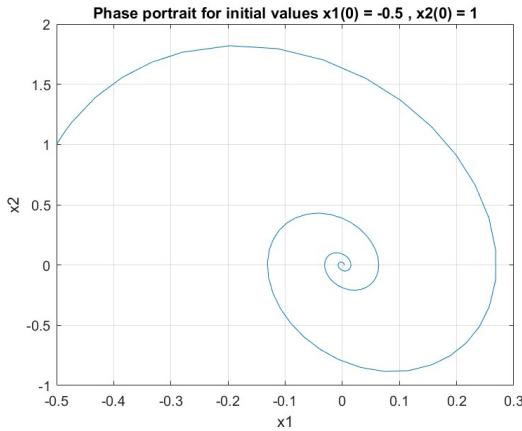
Σχήμα 6: Προσομοίωση 4



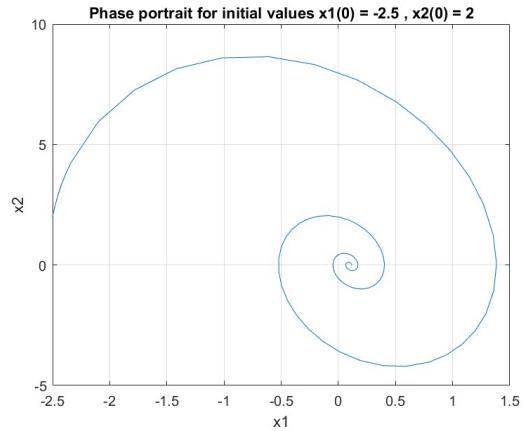
(α') Απόκριση καταστάσεων για βηματική είσοδο



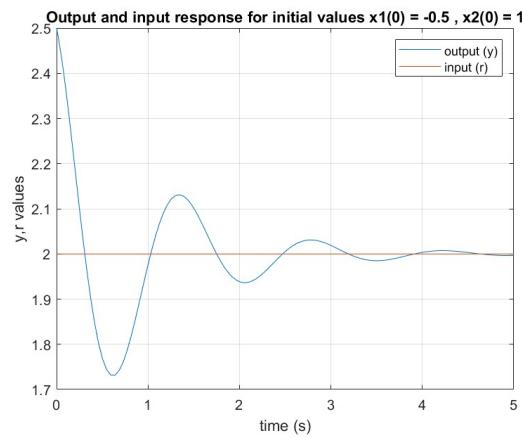
(β') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας



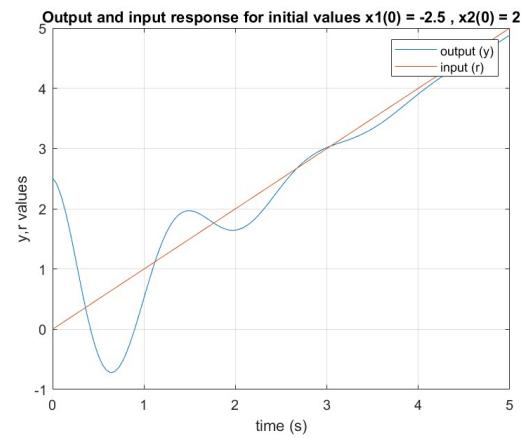
(γ') Φασικό πορτραίτο για βηματική είσοδο



(δ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας

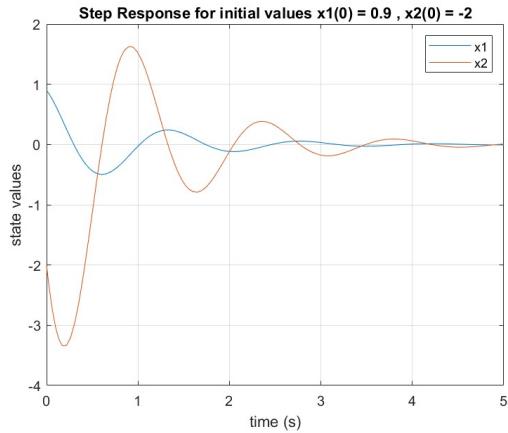


(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για βηματική είσοδο

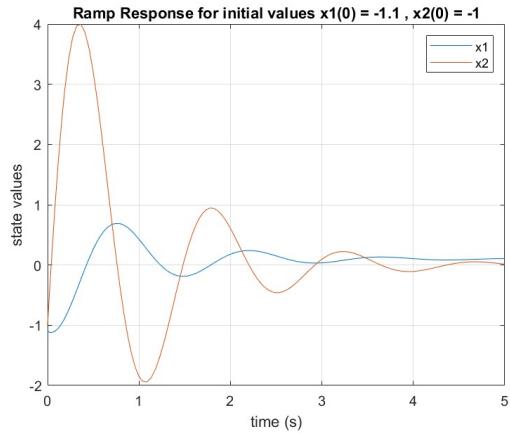


(ζ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας

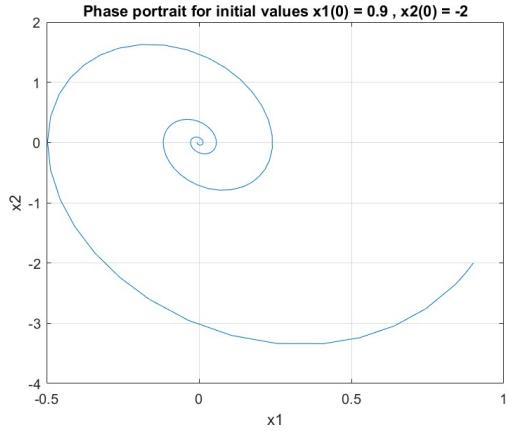
Σχήμα 7: Προσομοίωση 5



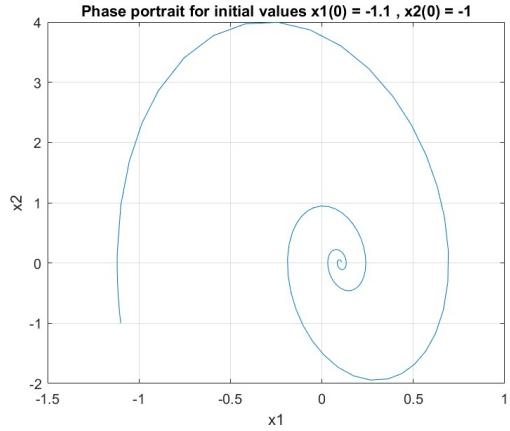
(α') Απόκριση καταστάσεων για βηματική είσοδο



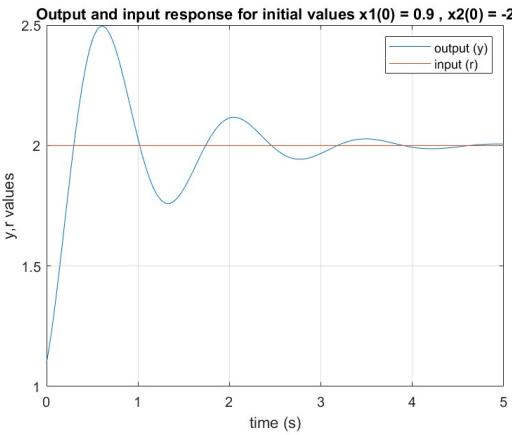
(β') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας



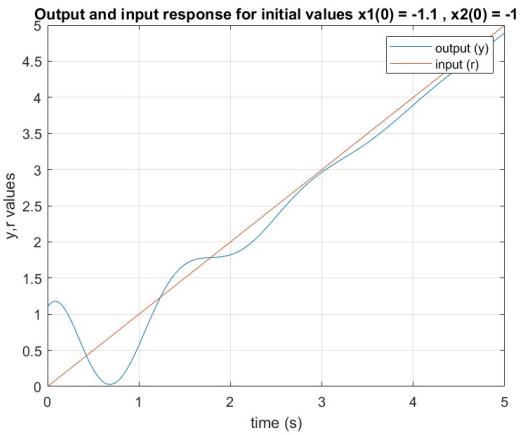
(γ') Φασικό πορτραίτο για βηματική είσοδο



(δ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας



(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για βηματική είσοδο



(ζ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας

Σχήμα 8: Προσομοίωση 6

1.3.1 Σχολιασμός

Τα αποτελέσματα είναι τα αναμένομα, υπάρχει σύγκλιση στο $(0, 0)$ για βηματική είσοδο και στο $(0.1, 0)$ για είσοδο ράμπας ανεξάρτητα από τις αρχικές τιμές.

2 Ερώτημα 2

Μας δίνεται ότι η $N(s)$ αποτελεί πλέον μια συνάρτηση κορεσμού συνεπώς δε μπορούμε να κινηθούμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και απαιτείται περαιτέρω θεωρητική ανάλυση.

2.1 Ζητούμενο i - Θεωρητική ανάλυση

Με βάση το μπλοκ διάγραμμα και τη δοσμένη συνάρτηση κορεσμού έχουμε για το u :

$$u = \begin{cases} u_0 & e > e_0 \\ \frac{u_0}{e_0} \cdot e & e_0 \leq e \leq e_0 \\ -u_0 & e < -e_0 \end{cases}$$

Από το μπλοκ διάγραμμα έχουμε:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s) \Leftrightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K}{T}}{s^2 + \frac{1}{T} \cdot s} \Leftrightarrow Y(s) \cdot (s^2 + \frac{1}{T} \cdot s) = U(s) \cdot \frac{K}{T}$$

και παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace προκύπτει:

$$\ddot{y} + \frac{1}{T} \cdot \dot{y} = \frac{K}{T} \cdot u$$

και αντικαθιστώντας για το y εφόσον ξέρουμε ότι: $e = r - y \Leftrightarrow y = r - e$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - \ddot{e} + \frac{1}{T} \cdot \dot{r} - \frac{1}{T} \cdot \dot{e} &= \frac{K}{T} \cdot u \Leftrightarrow \\ \ddot{e} + \frac{1}{T} \cdot \dot{e} + \frac{K}{T} \cdot u &= \ddot{r} + \frac{1}{T} \cdot \dot{r} \end{aligned}$$

η οποία σχέση είναι και η διαφορική εξίσωση του σφάλματος.

Για τις εξισώσεις κατάστασης του μη γραμμικού συστήματος σφάλματος, θεωρούμε φασικές μεταβλητές $e = x_1$ και $\dot{e} = x_2$ και προκύπτει:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{r} + \frac{1}{T} \cdot \dot{r} - \frac{1}{T} \cdot x_2 - \frac{K}{T} \cdot u \end{aligned}$$

όπου,

$$u = \begin{cases} u_0 & x_1 > e_0 \\ \frac{u_0}{e_0} \cdot x_1 & e_0 \leq x_1 \leq e_0 \\ -u_0 & x_1 < -e_0 \end{cases}$$

2.2 Ζητούμενο ii - Εύρεση σημείων ισορροπίας

2.2.1 Βηματική είσοδος πλάτους A

Για είσοδο: $r(t) = A \cdot u(t)$, όπου $u(t)$ βηματική, ισχύει ότι $\ddot{r} = \dot{r} = 0$, άρα το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T} \cdot x_2 - \frac{K}{T} \cdot u \end{aligned}$$

όπου,

$$u = \begin{cases} u_0 & x_1 > e_0 \\ \frac{u_0}{e_0} \cdot x_1 & e_0 \leq x_1 \leq e_0 \\ -u_0 & x_1 < -e_0 \end{cases}$$

Για τα σημεία ισορροπίας όταν γίνει διερεύνηση σε κάθε κλάδο ξεχωριστά:

Για $x_1 > e_0$ το σύστημα είναι:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T} \cdot x_2 - \frac{K}{T} \cdot u_0\end{aligned}$$

Από $\dot{x}_1 = 0$ και $\dot{x}_2 = 0$ είναι εμφανές ότι δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας.

Για $x_1 < -e_0$ το σύστημα είναι:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T} \cdot x_2 + \frac{K}{T} \cdot u_0\end{aligned}$$

Από $\dot{x}_1 = 0$ και $\dot{x}_2 = 0$ είναι εμφανές ότι δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας.

Για $-e_0 \leq x_1 \leq e_0$ το σύστημα είναι:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T} \cdot x_2 - \frac{K}{T} \cdot \frac{u_0}{e_0} \cdot x_1\end{aligned}$$

Από $\dot{x}_1 = 0$ και $\dot{x}_2 = 0$ προκύπτει $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$, άρα μοναδικό σημείο ισορροπίας το $x_e = (0, 0)$.

2.2.2 Είσοδος ράμπας κλίσης B

Για είσοδο: $r(t) = B \cdot t \cdot u(t)$, όπου $u(t)$ βηματική, ισχύει ότι $\dot{r} = B$ και $\ddot{r} = 0$, άρα το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{B}{T} - \frac{1}{T} \cdot x_2 - \frac{K}{T} \cdot u\end{aligned}$$

όπου,

$$u = \begin{cases} u_0 & x_1 > e_0 \\ \frac{u_0}{e_0} \cdot x_1 & e_0 \leq x_1 \leq e_0 \\ -u_0 & x_1 < -e_0 \end{cases}$$

Για τα σημεία ισορροπίας όταν γίνει και πάλι διερεύνηση σε κάθε κλάδο ξεχωριστά:

Για $x_1 > e_0$ το σύστημα είναι:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{B}{T} - \frac{1}{T} \cdot x_2 - \frac{K}{T} \cdot u_0\end{aligned}$$

Ισχύει $\dot{x}_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$ και $\dot{x}_2 = 0$ όταν ισχύει για κάθε $x_1 > e_0$ και $x_2 \in \mathbb{R}$ μόνο αν για τις παραμέτρους ισχύει $B = K \cdot e_0$.

Για $x_1 < -e_0$ το σύστημα είναι:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{B}{T} - \frac{1}{T} \cdot x_2 + \frac{K}{T} \cdot u_0\end{aligned}$$

Ισχύει $\dot{x}_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$ και $\dot{x}_2 = 0$ όταν ισχύει για κάθε $x_1 < -e_0$ και $x_2 \in \mathbb{R}$ αν για τις παραμέτρους ισχύει $-B = K \cdot e_0$ το οποίο είναι αδύνατο αφού οι πάραμετροι $B, K, e_0 > 0$. Άρα δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας.

Για $-e_0 \leq x_1 \leq e_0$ το σύστημα είναι:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{B}{T} - \frac{1}{T} \cdot x_2 - \frac{K}{T} \cdot \frac{u_0}{e_0} \cdot x_1\end{aligned}$$

Ισχύει $\dot{x}_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$ και $\dot{x}_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{B \cdot e_0}{K \cdot u_0}$.

Άρα αν $-e_0 \leq \frac{B \cdot e_0}{K \cdot u_0} \leq e_0$ τότε $x_e = (\frac{B \cdot e_0}{K \cdot u_0}, 0)$. Συνεπώς η ύπαρξη και ο αριθμός των σημείων ισορροπίας εξαρτάται από τις παραμέτρους του συστήματος, και άρα στο επόμενο ερώτημα δεν περιμένουμε την ίδια συμπεριφορά και για τις 3 εισόδους ράμπας. Για αυτό τον λόγο θα γίνει ανάλυση της κάθε περίπτωσης.

2.3 Ζητούμενο iii - Προσομοίωση συστήματος

Για $T = 0.5$, $K = 10$, $e_0 = 0.1$ και $u_0 = 0.15$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{r} + 2 \cdot \dot{r} - 2 \cdot x_2 - 20 \cdot u\end{aligned}$$

όπου,

$$u = \begin{cases} 0.15 & x_1 > 0.1 \\ 1.5 \cdot x_1 & 0.1 \leq x_1 \leq 0.1 \\ -0.15 & x_1 < -0.1 \end{cases}$$

2.3.1 Βηματική είσοδο $r_u(t) = 2$

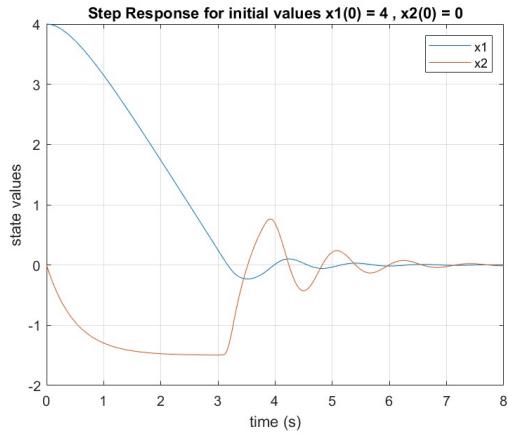
Για βηματική είσοδο $r_u(t) = 2$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2 \cdot x_2 - 20 \cdot u\end{aligned}$$

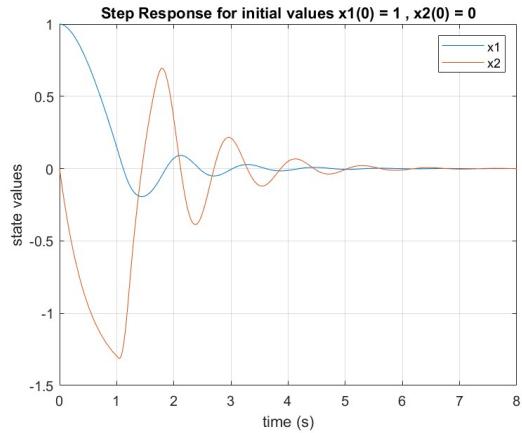
όπου,

$$u = \begin{cases} 0.15 & x_1 > 0.1 \\ 1.5 \cdot x_1 & 0.1 \leq x_1 \leq 0.1 \\ -0.15 & x_1 < -0.1 \end{cases}$$

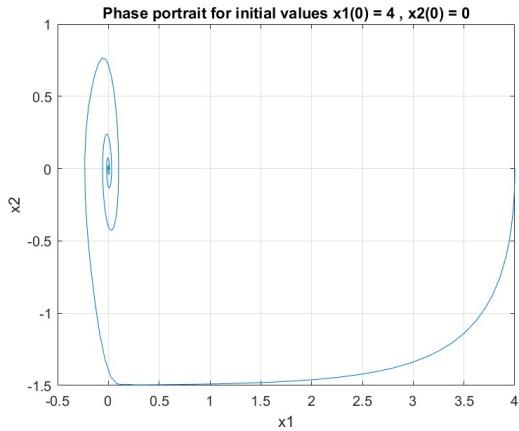
Είναι εμφανές ότι μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $(0, 0)$.



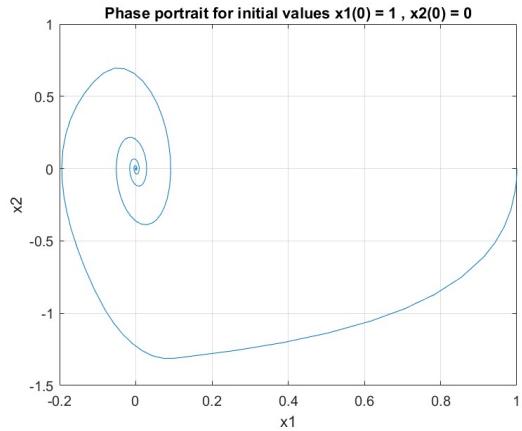
(α') Απόκριση καταστάσεων για βηματική είσοδο



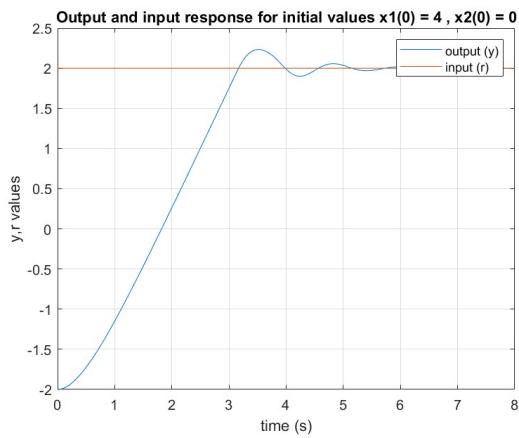
(β') Απόκριση καταστάσεων για βηματική είσοδο



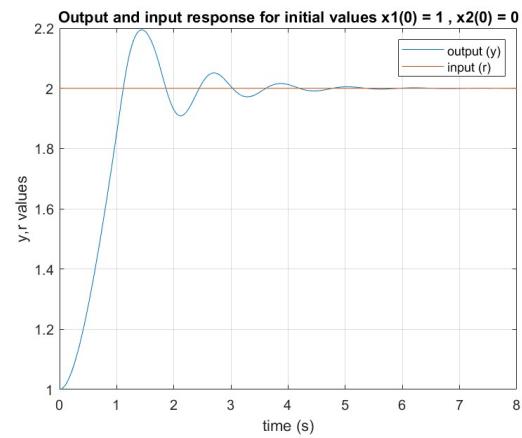
(γ') Φασικό πορτραίτο για βηματική είσοδο



(δ') Φασικό πορτραίτο για βηματική είσοδο

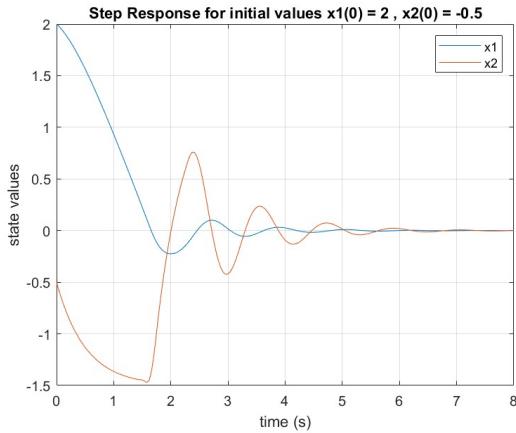


(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για βηματική είσοδο

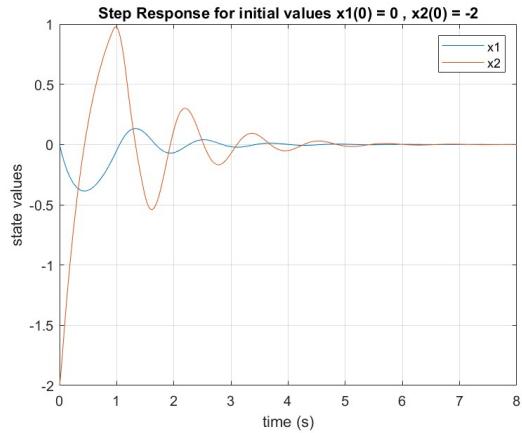


(τ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για βηματική είσοδο

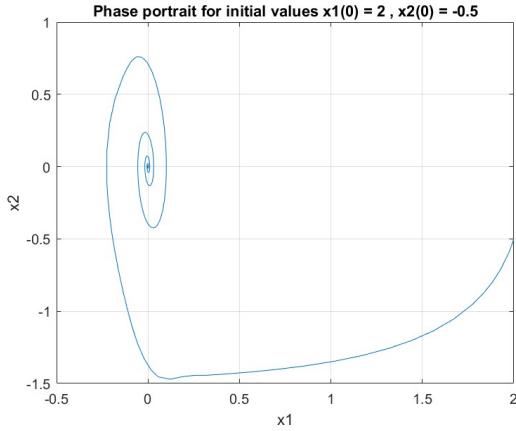
Σχήμα 9: Προσομοίωση 1(αριστερά), Προσομοίωση 2(δεξιά)



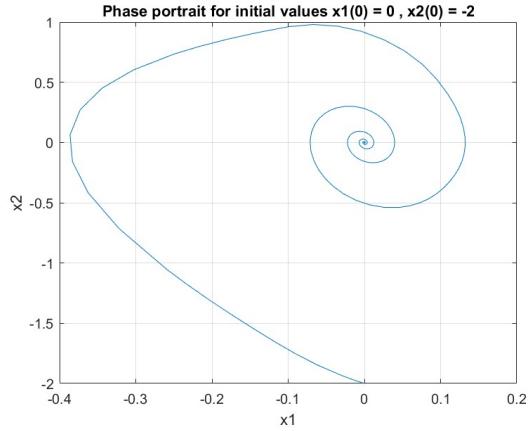
(α') Απόκριση καταστάσεων για βηματική είσοδο



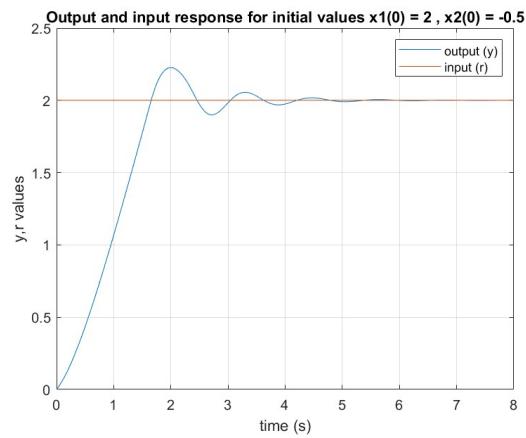
(β') Απόκριση καταστάσεων για βηματική είσοδο



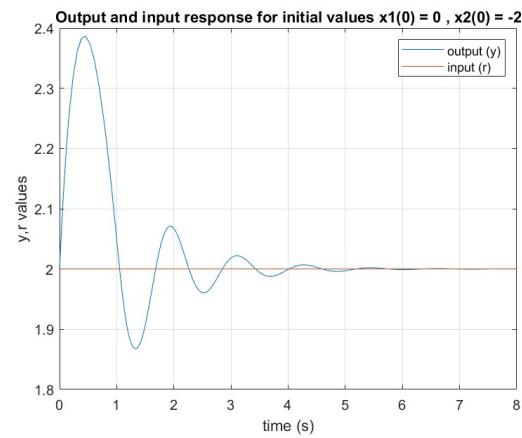
(γ') Φασικό πορτραίτο για βηματική είσοδο



(δ') Φασικό πορτραίτο για βηματική είσοδο

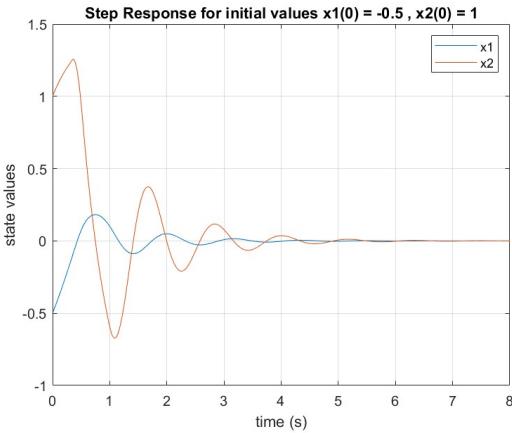


(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για βηματική είσοδο

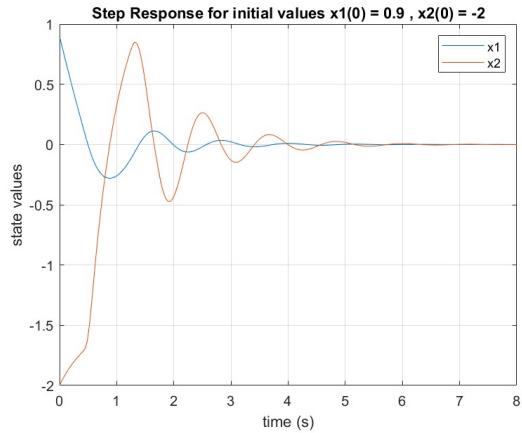


(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για βηματική είσοδο

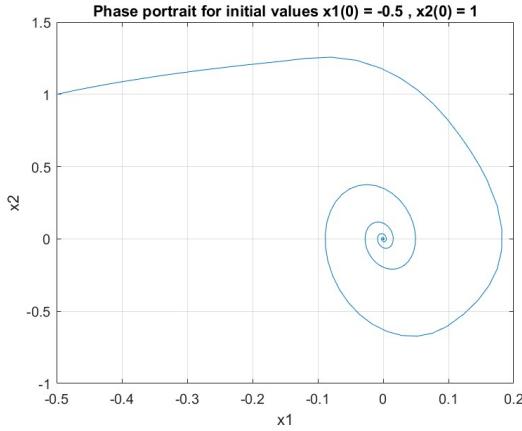
Σχήμα 10: Προσομοίωση 3(αριστερά), Προσομοίωση 4(δεξιά)



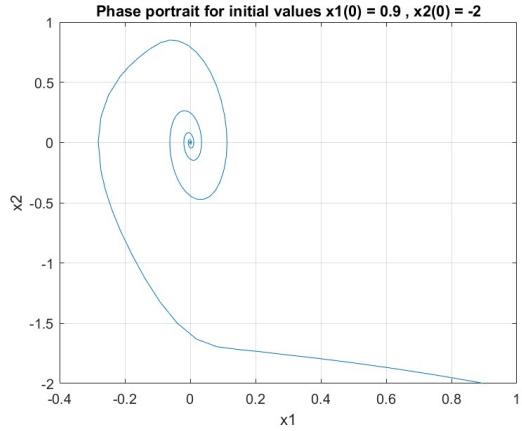
(α') Απόκριση καταστάσεων για βηματική είσοδο



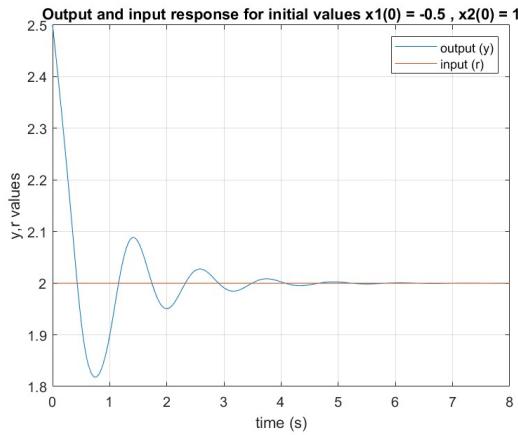
(β') Απόκριση καταστάσεων για βηματική είσοδο



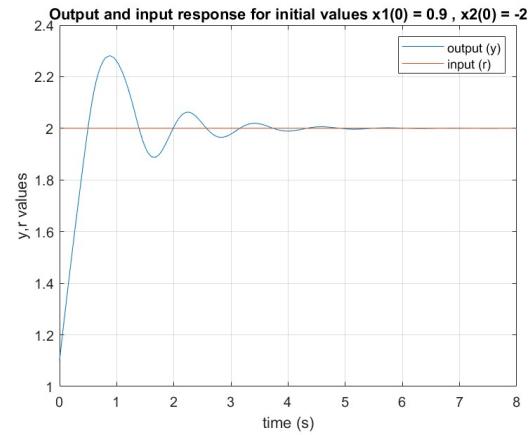
(γ') Φασικό πορτραίτο για βηματική είσοδο



(δ') Φασικό πορτραίτο για βηματική είσοδο



(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για βηματική είσοδο



(ζ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για βηματική είσοδο

Σχήμα 11: Προσομοίωση 5(αριστερά), Προσομοίωση 6(δεξιά)

2.3.2 Είσοδος ράμπας $r_{r1}(t) = t$

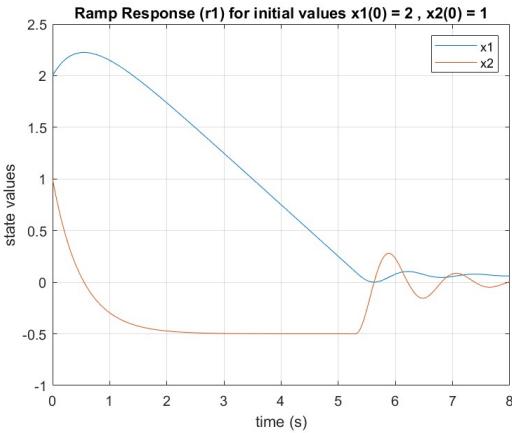
Για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2 - 2 \cdot x_2 - 20 \cdot u \end{aligned}$$

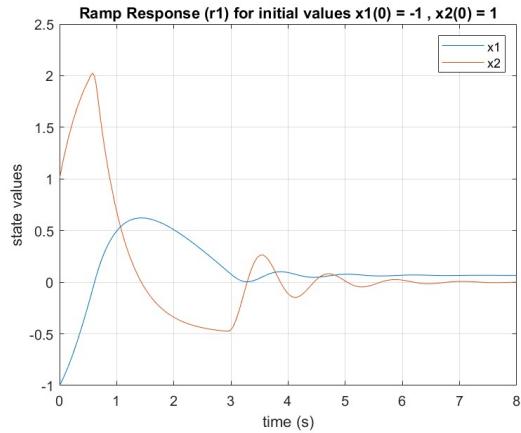
όπου,

$$u = \begin{cases} 0.15 & x_1 > 0.1 \\ 1.5 \cdot x_1 & 0.1 \leq x_1 \leq 0.1 \\ -0.15 & x_1 < -0.1 \end{cases}$$

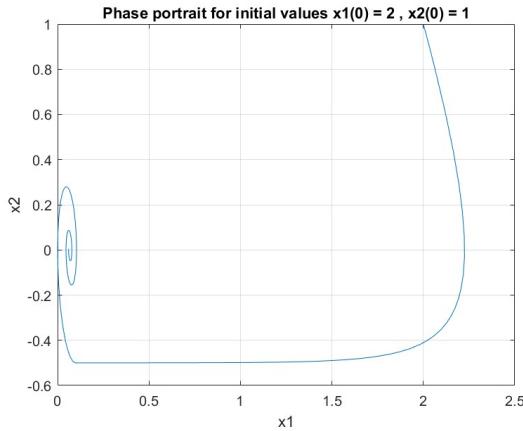
Για $x_1 \in [-0.1, 0.1]$ προκύπτει το μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος το $(\frac{1}{15}, 0)$.



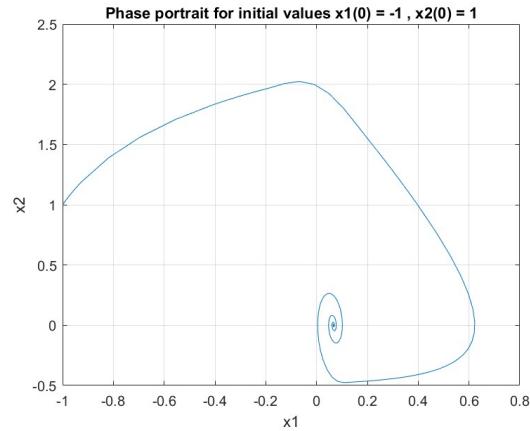
(α') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$



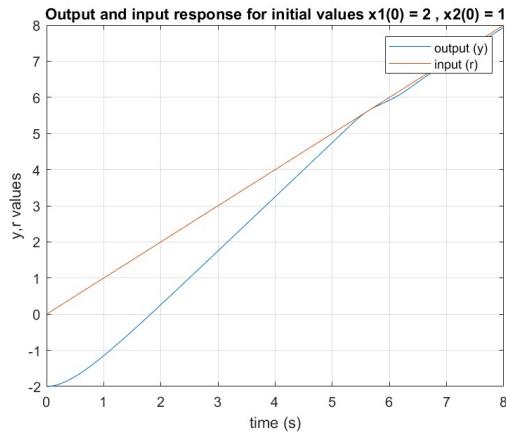
(β') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$



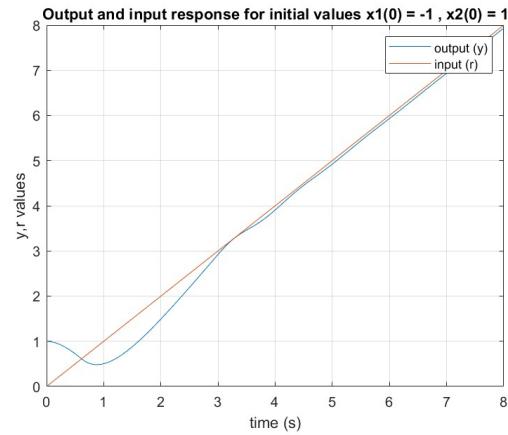
(γ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$



(δ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$

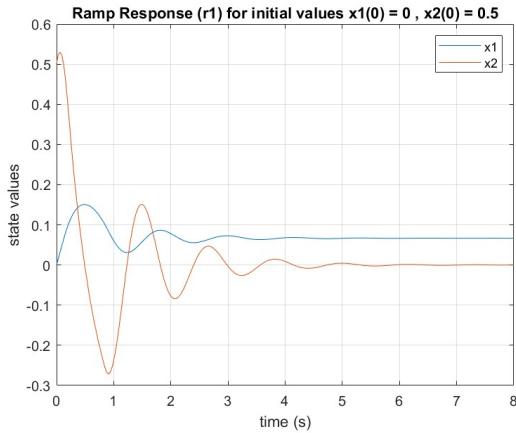


(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$

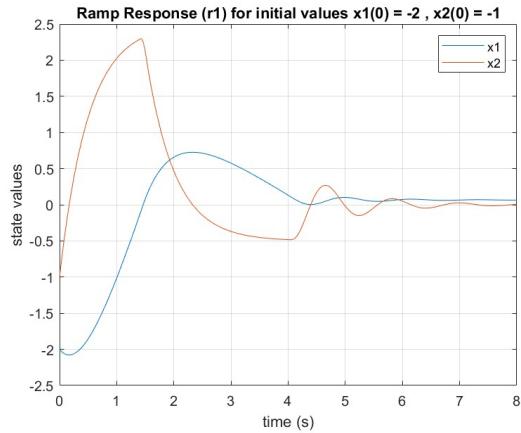


(ζ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$

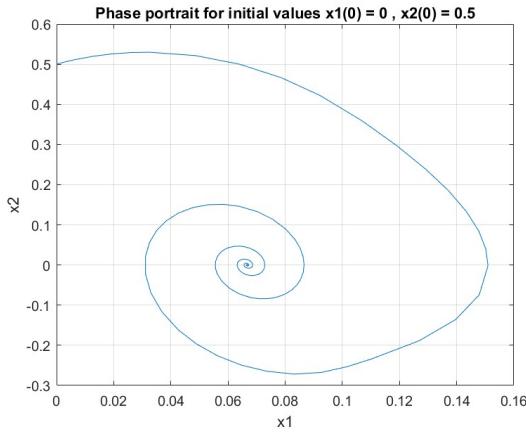
Σχήμα 12: Προσομοίωση 1(αριστερά), Προσομοίωση 2(δεξιά)



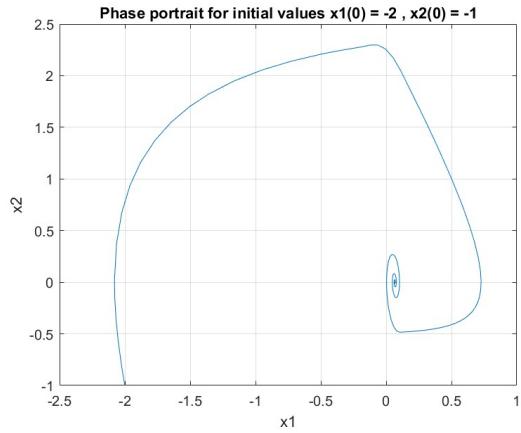
(α') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$



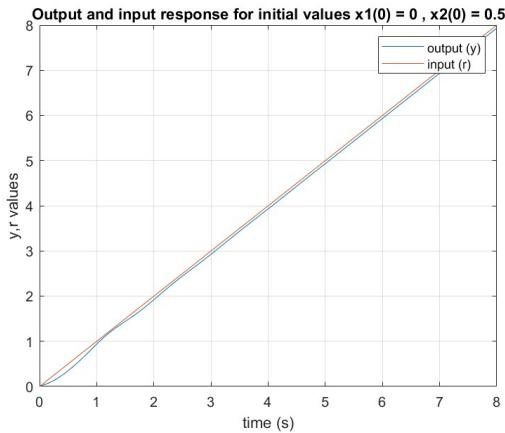
(β') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$



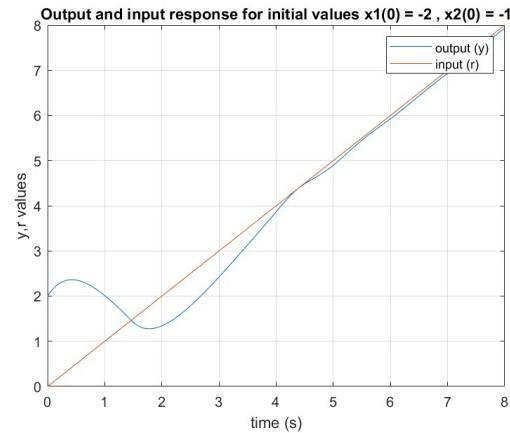
(γ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$



(δ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$

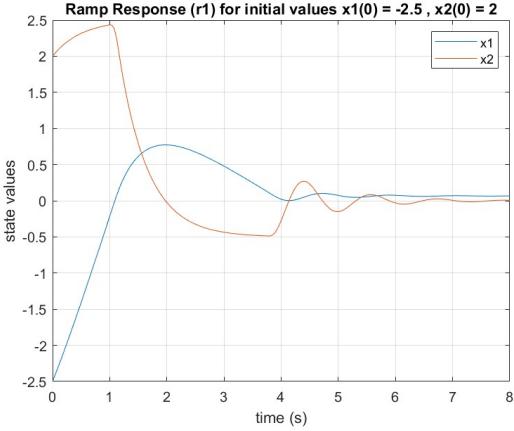


(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$

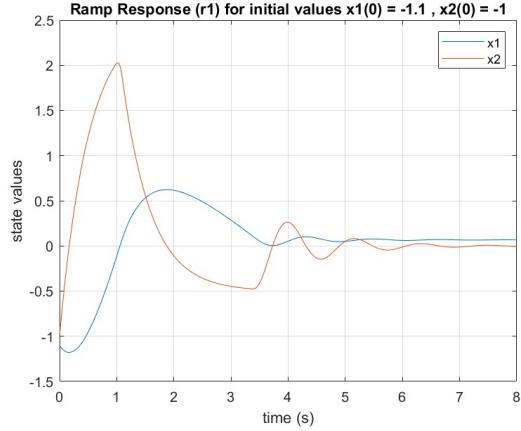


(ζ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$

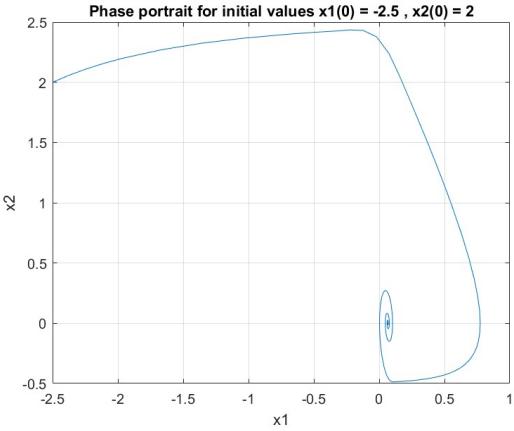
Σχήμα 13: Προσομοίωση 3(αριστερά), Προσομοίωση 4(δεξιά)



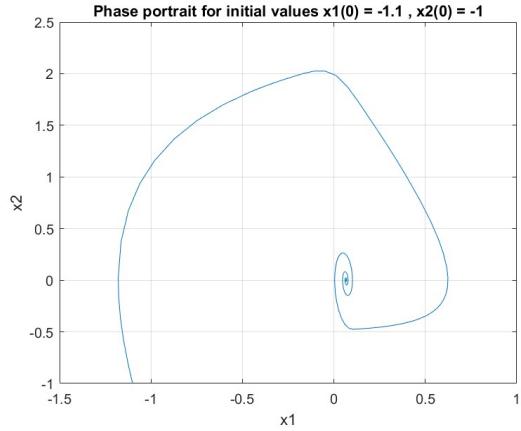
(α') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$



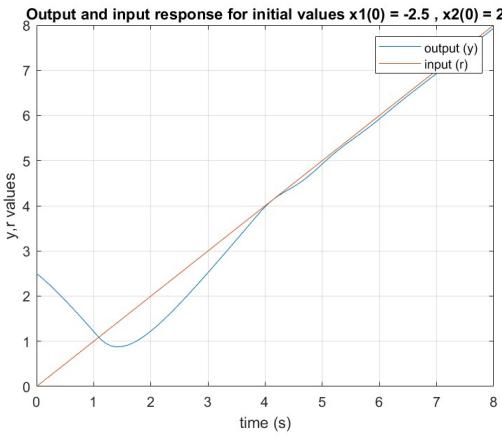
(β') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$



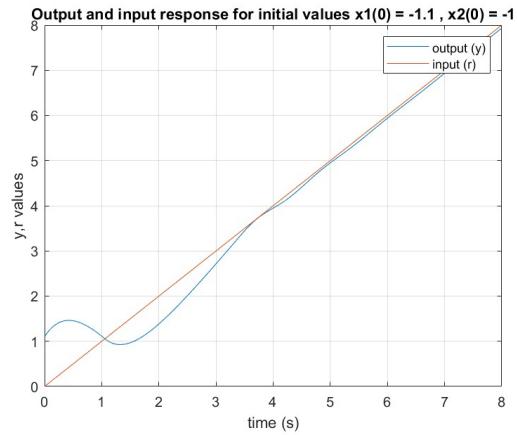
(γ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$



(δ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$



(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$



(ζ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r1}(t) = t$

Σχήμα 14: Προσομοίωση 5(αριστερά), Προσομοίωση 6(δεξιά)

2.3.3 Είσοδος ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$

Για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 3 - 2 \cdot x_2 - 20 \cdot u \end{aligned}$$

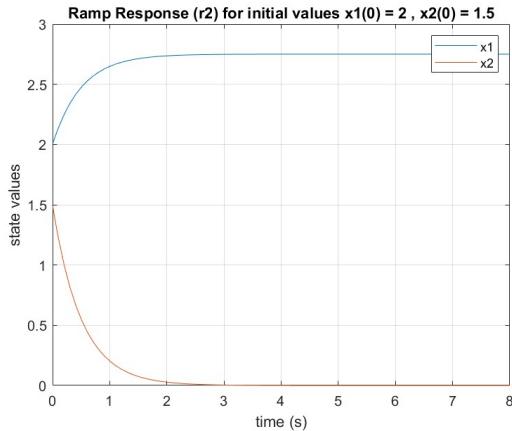
όπου,

$$u = \begin{cases} 0.15 & x_1 > 0.1 \\ 1.5 \cdot x_1 & 0.1 \leq x_1 \leq 0.1 \\ -0.15 & x_1 < -0.1 \end{cases}$$

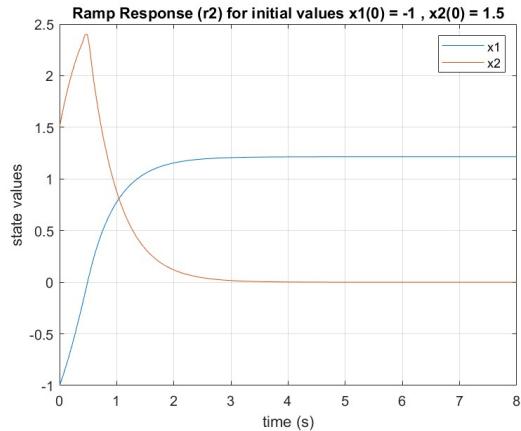
Για τα σημεία ισορροπίας, για $x_1 < -0.1$ δεν υπάρχει κάποιο σημείο ισορροπίας, για $-0.1 \leq x_1 \leq 0.1$ προκύπτει $x_{1e} = 0.1$.

Για $x_1 > 0.1$ προκύπτει πως για $x_2 = 0$ ισχύει $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ άρα σημεία ισορροπίας είναι όλα τα σημεία της μορφής $(\alpha, 0)$ με $\alpha \in (0.1, \infty)$.

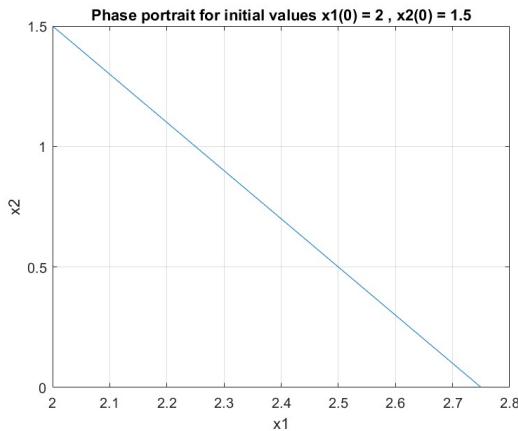
Άρα συνοψίζοντας σημεία ισορροπίας είναι τα σημεία με μορφή $(\alpha, 0)$ με $\alpha \in [0.1, \infty)$.



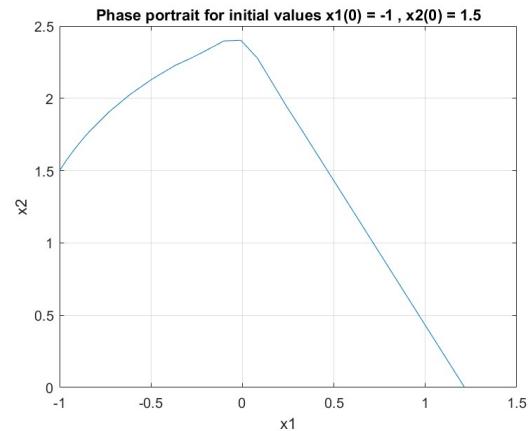
(α') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$



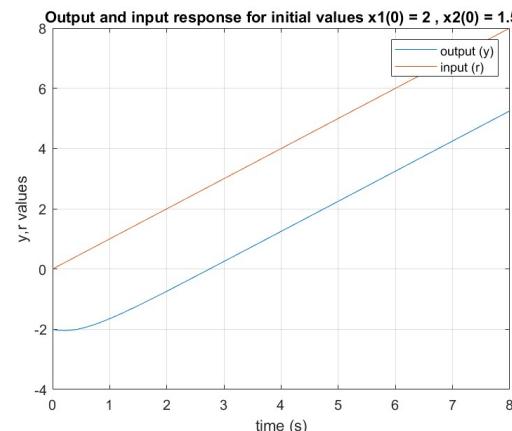
(β') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$



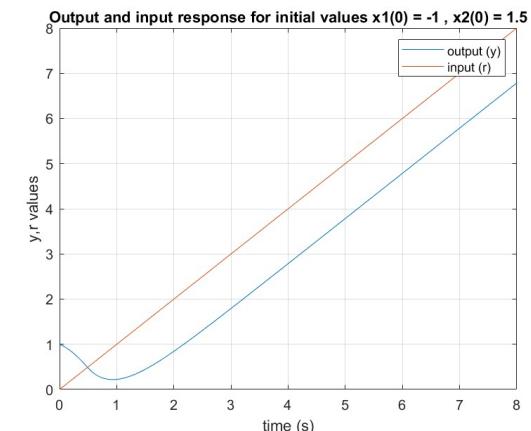
(γ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$



(δ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$

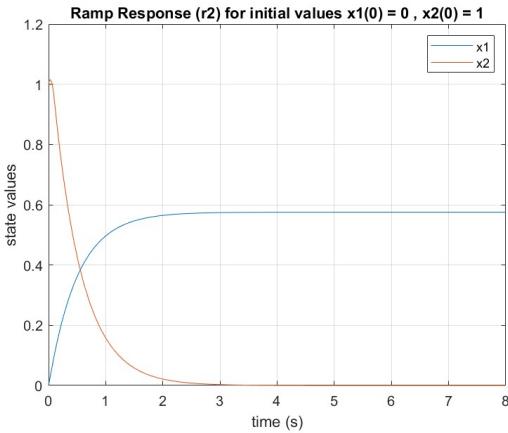


(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$

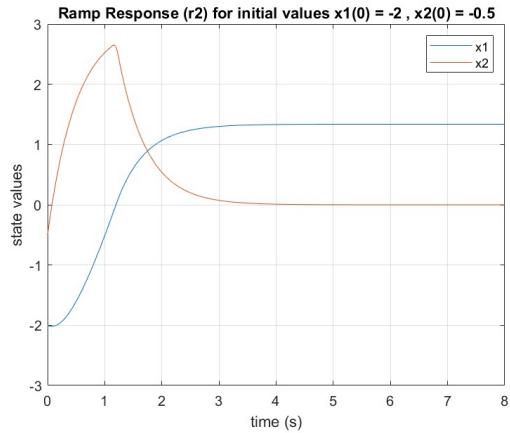


(ζ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$

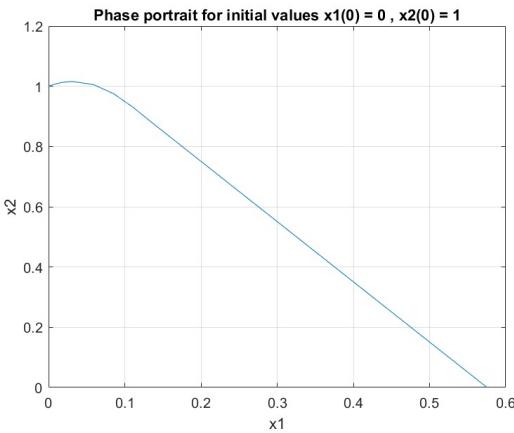
Σχήμα 15: Προσομοίωση 1(αριστερά), Προσομοίωση 2(δεξιά)



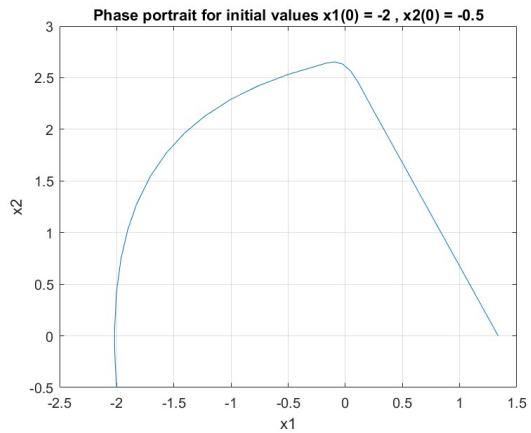
(α') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$



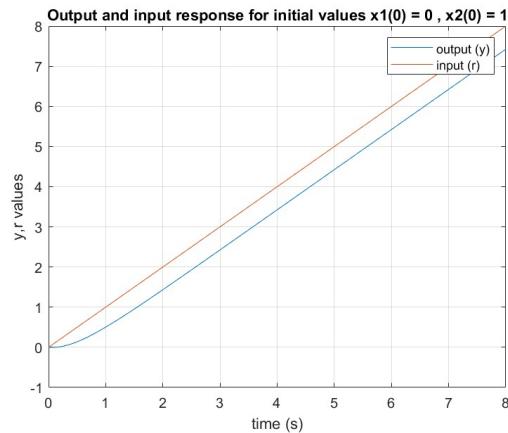
(β') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$



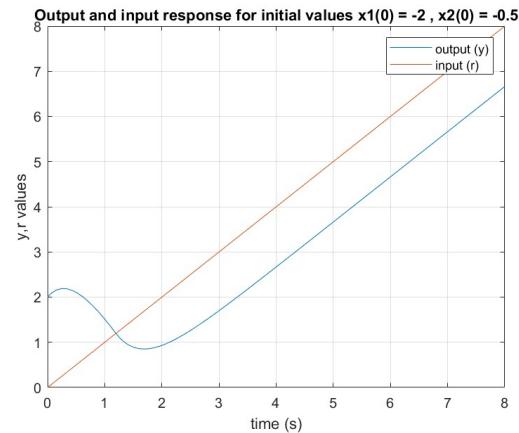
(γ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$



(δ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$

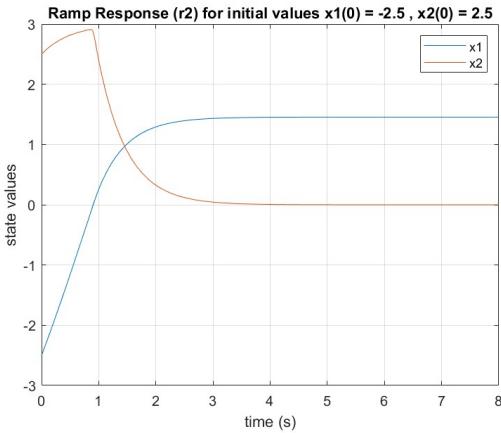


(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$

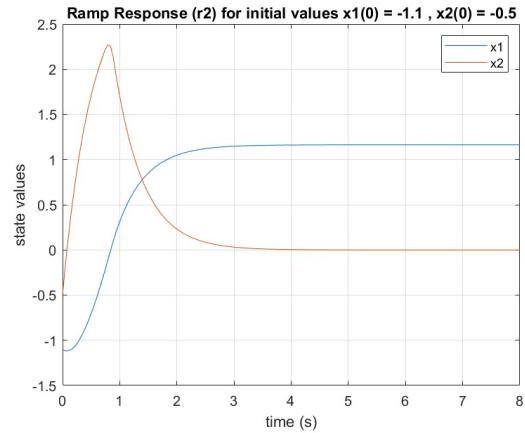


(ζ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$

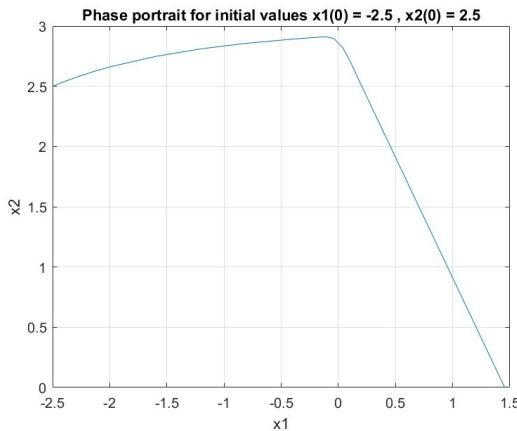
Σχήμα 16: Προσομοίωση 3(αριστερά), Προσομοίωση 4(δεξιά)



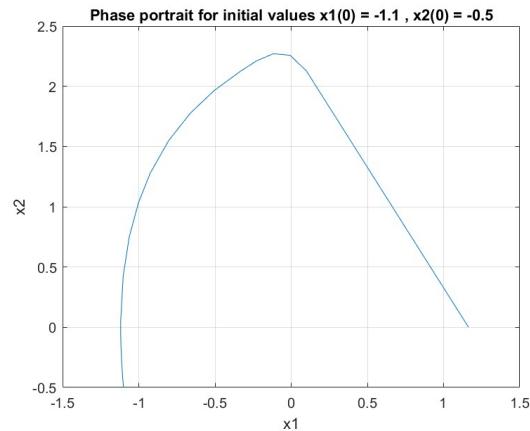
(α') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$



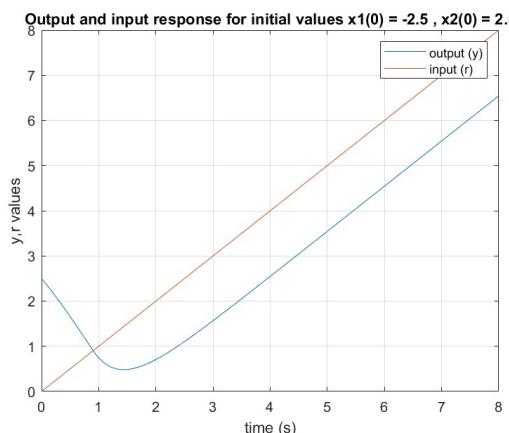
(β') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$



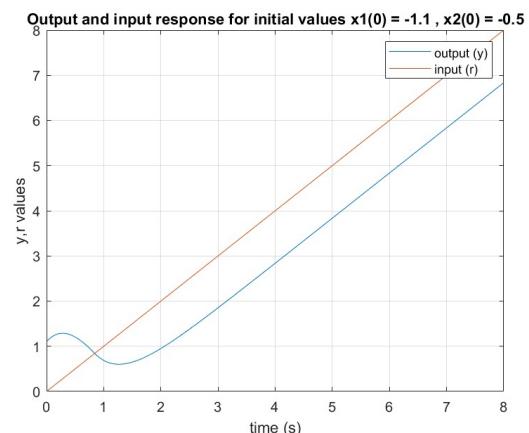
(γ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$



(δ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$



(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$



(ζ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r2}(t) = 1.5 \cdot t$

Σχήμα 17: Προσομοίωση 5(αριστερά), Προσομοίωση 6(δεξιά)

2.3.4 Είσοδος ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$

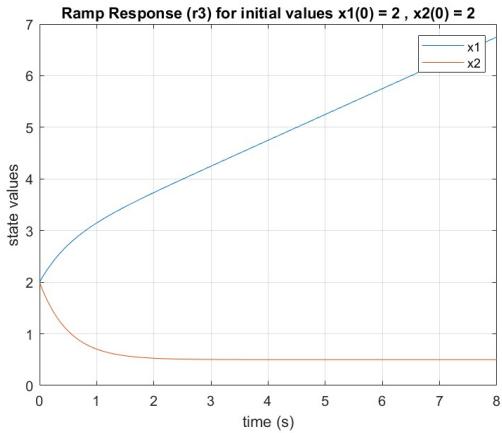
Για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 4 - 2 \cdot x_2 - 20 \cdot u\end{aligned}$$

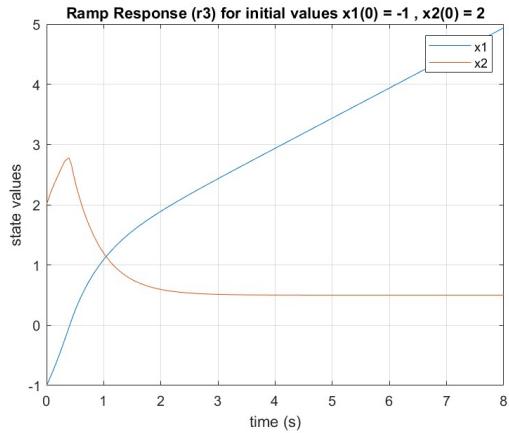
όπου,

$$u = \begin{cases} 0.15 & x_1 > 0.1 \\ 1.5 \cdot x_1 & 0.1 \leq x_1 \leq 0.1 \\ -0.15 & x_1 < -0.1 \end{cases}$$

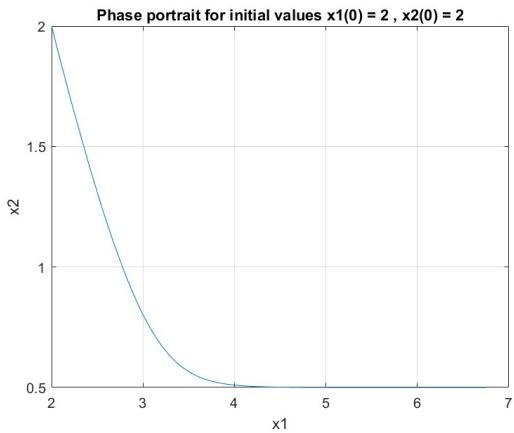
Για τα σημεία ισορροπίας, για $x_1 < -0.1$ και για $x_1 > 0.1$ δεν υπάρχει κάποιο σημείο ισορροπίας, για $-0.1 \leq x_1 \leq 0.1$ προκύπτει $x_{1e} = \frac{2}{15}$ που δεν ανήκει στο παραπάνω διάστημα, άρα δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας.



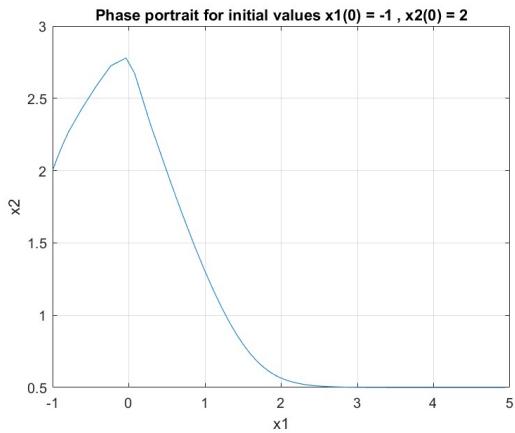
(α') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$



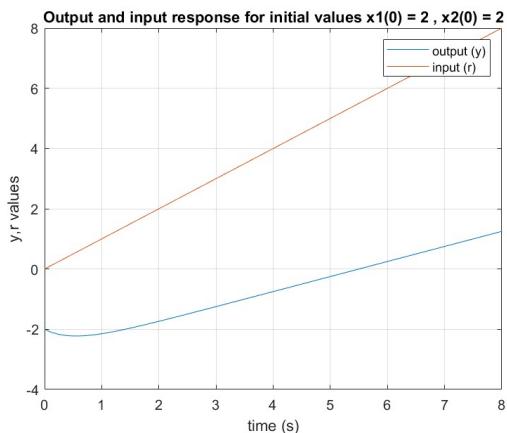
(β') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$



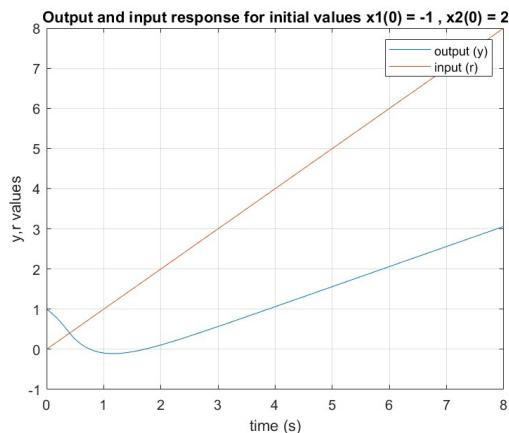
(γ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$



(δ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$

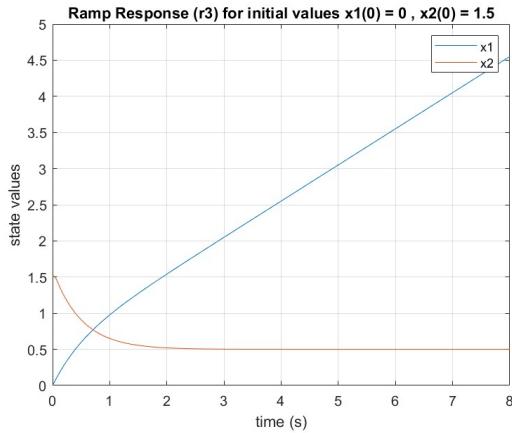


(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$

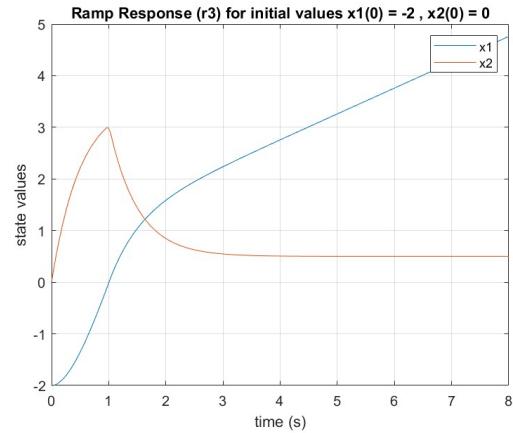


(ζ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$

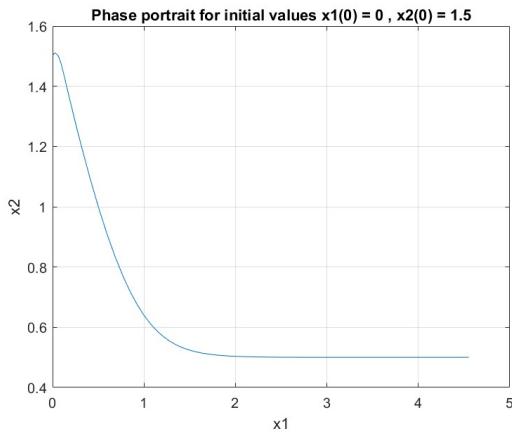
Σχήμα 18: Προσομοίωση 1(αριστερά), Προσομοίωση 2(δεξιά)



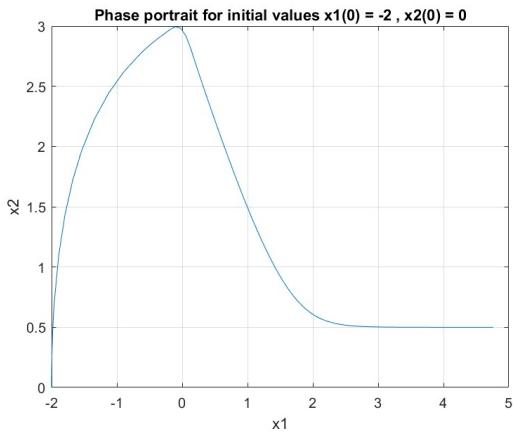
(α') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$



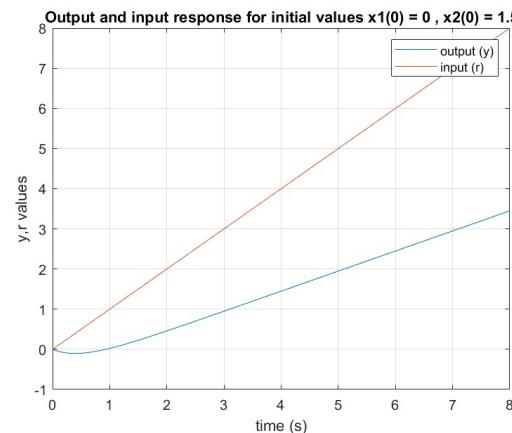
(β') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$



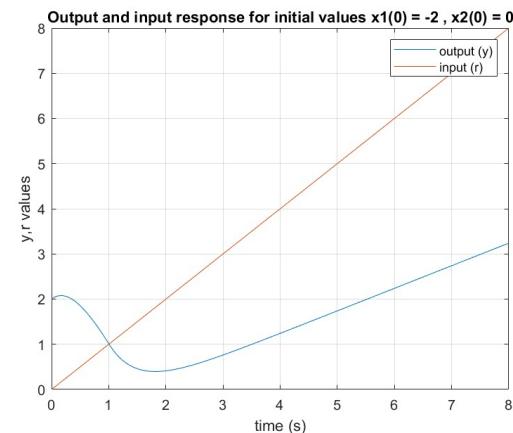
(γ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$



(δ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$

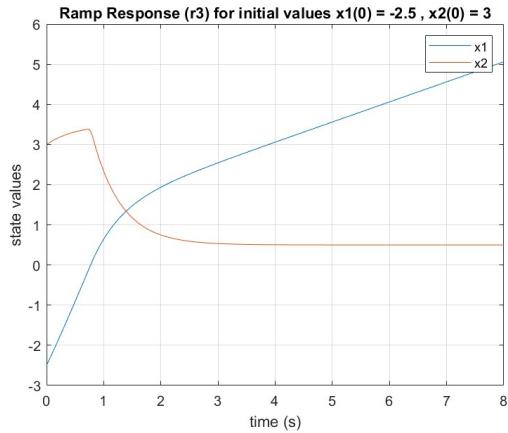


(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$

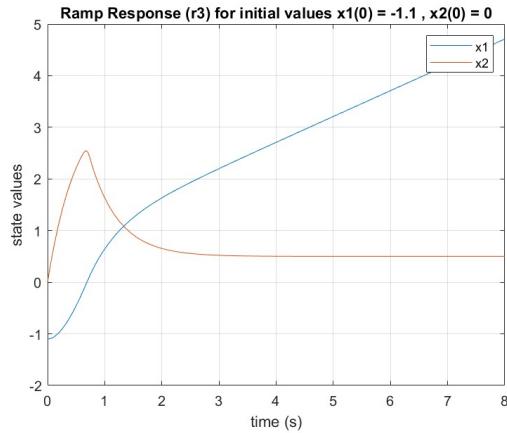


(ζ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$

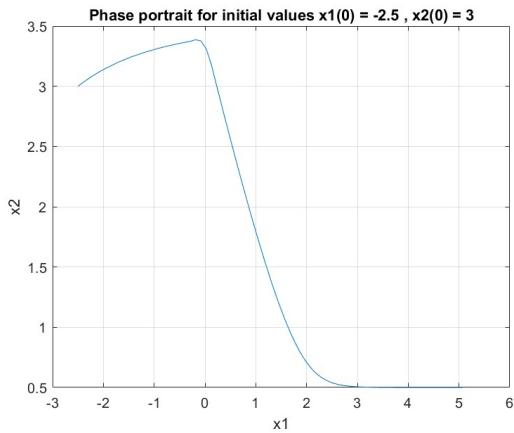
Σχήμα 19: Προσομοίωση 3(αριστερά), Προσομοίωση 4(δεξιά)



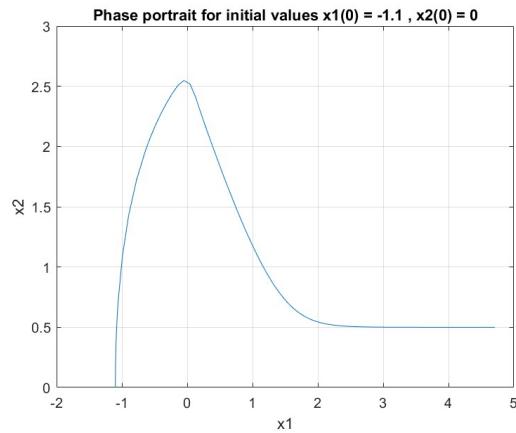
(α') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$



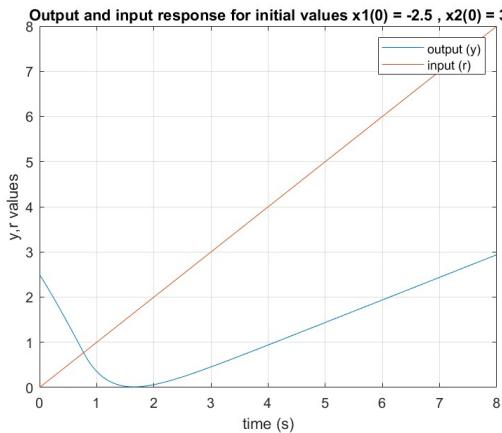
(β') Απόκριση καταστάσεων για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$



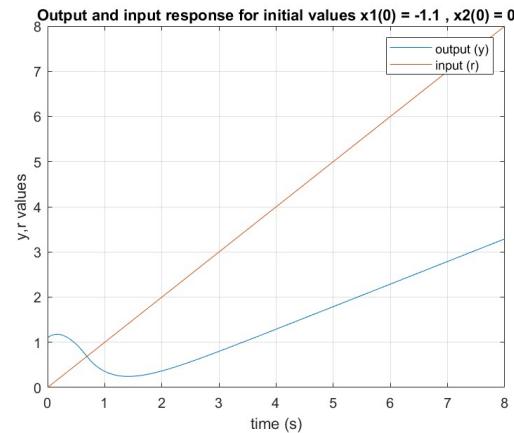
(γ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$



(δ') Φασικό πορτραίτο για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$



(ε') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$



(ζ') Απόκριση εισόδου, εξόδου για είσοδο ράμπας $r_{r3}(t) = 2 \cdot t$

Σχήμα 20: Προσομοίωση 5(αριστερά), Προσομοίωση 6(δεξιά)

2.3.5 Σχολιασμός αποτελεσμάτων και σύγκριση

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης επαληθεύουν τη θεωρητική ανάλυση. Ότι διαπιστώθηκε στη θεωρητική ανάλυση αναφορικά με την ύπαρξη ή μη και τον αριθμό των σημείων ισορροπίας σε κάθε περίπτωση ανάλογα με την είσοδο r είναι εμφανές και στην προσομοίωση, ενώ ακόμα επιβεβαιώνεται σε ένα βαθμό η εξάρτηση του

συστήματος από τις παραμέτρους και τις αρχικές συνθήκες. Μερικά σημεία που αξίζουν σχολιασμό είναι τα εξής:

- Για βηματική είσοδο τα αποτελέσματα είναι αναμενόμενα με σύγκλιση στο μοναδικό σημείο ισορροπίας το $(0, 0)$.
- Για είσοδο ράμπας r_1 τα αποτελέσματα είναι αναμενόμενα με σύγκλιση στο μοναδικό σημείο ισορροπίας το $(\frac{1}{15}, 0)$.
- Για είσοδο ράμπας r_2 παρατηρούμε αυτό που διαπιστώθηκε και στη θεωρία δηλαδή την ύπαρξη των σημείων ισορροπίας με μορφή $(\alpha, 0)$ με $\alpha \in [0.1, \infty)$. Στα φασικά πορτραίτα άλλα και στην απόχριση των καταστάσεων είναι εμφανής η ισορροπία που επέρχεται στο σύστημα όταν το x_2 μηδενιστεί εφόσον το $x_1 \geq 0.1$.
- Για είσοδο ράμπας r_3 παρατηρούμε την αστάθεια του συστήματος, ενώ ακόμα αξίζει να αναφέρουμε ότι για $x_1 > 0.1$ το \dot{x}_2 μηδενίζεται όταν $x_2 = 0.5$ και για αυτό τόσο στα φασικά πορτραίτα όσο και στην απόχριση των καταστάσεων παρατηρούμε τη μεταβλητή x_2 να σταθεροποιείται σε αυτή την τιμή εφόσον $x_1 > 0.1$.

Τέλος συγχριτικά για τα δύο συστήματα, παρατηρούμε πως για βηματική είσοδο στο γραμμικό σύστημα επέρχεται σχετικά πιο γρήγορα ισορροπία ενώ η υπερύψωση στην παρακολούθηση της εισόδου από την έξοδο είναι μικρότερη στο μη γραμμικό σύστημα. Για κάποιες εισόδους ράμπας παρατηρούμε ότι το μη γραμμικό σύστημα ακολουθά με μεγαλύτερο σφάλμα την έξοδο, ενώ η φύση των φασικών πορτραίτων είναι διαφορετική λόγω των απειρων σημείων ισορροπίας σε κάποιες περιπτώσεις για το μη γραμμικό σύστημα. Επιπλέον, παρατηρείται πιο γρήγορη απόκλιση για είσοδο ράμπας μεγαλύτερης κλίσης. Τέλος, στο μη γραμμικό σύστημα παρατηρούμε πιο ανώμαλη σύγκλιση σε σχέση με το γραμμικό.