Abstract

U radu se obradjuje specijalna klasa konacnih diskretnih modela pod nazivom ‘celijski automati’ (eng. cellular automata) koji se baziraju na cisto lokalnoj interakciji ali proizvode uzorke koji se mogu promatrati na globalnijoj skali, te vecem nivou apstrakcije. Upravo ova cisto lokalna interakcija omogucava da se pomocu navedenih entiteta omoguci modeliranje sirokog spektra realnih pojava s obzirom da veliki broj stvari koje se pokusavaju modelirati spada upravo u ovu kategoriju.
Kroz rad se navodi nekoliko klasa, primjera i primjena celijskih automata, te se uz pomoc grafickog simulatora pokusavaju prikazati najbitniji koncepti potrebni za shvatanje nacina funkcionisanja te potencijalne primjene ovih modela. Rad sluzi kao uvod u siroku tematiku i primjene ove vrste modela.
Takodjer, ponudjen je i formalni matematicki tretman iz raznih aspekta koji ukljucuju teoriju haosa i teoriju igara, te aspekt na koji je stavljen najveci fokus – teorija kompjutacije s obzirom da se celijski automati, tacnije odredjene instance istih, mogu koristiti kao univerzalna Turingova masina sto otvara siroke primjene ove vrste sistema.

Okvir rada

// pregled poglavlja i strukture etc.

1. Uvod

U uvodnom dijelu pokusacemo razmotriti pozadinska razmatranja koja vode do izucavanja klase konacnih diskretnih modela nazvanih celijski automati.

Prvo cemo dati pregled kroz specifican primjer da se uoce neke od osnovnih karakteristika ovih sistema.

Nakon cemo pregledati histroijski koja matematicka pitanja su navela da se razmotre neke specijalne klase, te ce se nako toga obratiti paznja na unificarnje specijalni klasa, te posebno historijski pregled rada Stephena Wolframa za kojeg se moze reci da je dao jedna od najvecih doprinosa samom polju.

Bice dat i pregled potencijalnih primjena te motivacija za izucavanje oblasti celijskih automata, te se ovaj dio moze smatrati neformalnim uvodom u cjelokupnu oblast koji moze dati osnovnu ideju bilo kome ko zeli da se zainteresuje u oblast.

1.1 Osnovni pregled

Pocnimo prvo od pokusaja shvatanja kakve vrste modela predstavljaju celijski automati. Zato cemo prvo krenuti od konkretnog specificnog primjera kroz koji je moguce shvatiti osnovne odlike celijskih automata na koje cemo se kasnije nadograditi kako budemo gradili formalnu apstrakciju ovog konkretnog primjera.

Najjednostavniji takav je primjer je beskonacna dvodimenzionalna ravna ploca prekrivena kvadratima koje cemo nazvati ***celije***. Kvadrati se medjusobno dodiruju stranicama, te tako svaki kvadrat ima punu vezu preko stranice sa tacno cetiri susjedne celije. Za svaku celiju kazemo da moze biti u dva stanja - on i off. Kako cemo za prikaz automata pretezno koristiti graficke interpretacije, ova dva stanja mozemo “zakodirati” bojom same celije, pa cemo tako uspostaviti konvenciju da crna prestavlja on, dok bijela prestavlja off stanje. Sva trenutna razmatranja bice formalno definisana kasnije u radu te ovaj dio razmatranja sluzi samo za intuitivni prikaz osnovnih ideja iza ovakvih vrsta modela.

// slika 1 – celija sa susjedstvom (4x4 grid)

Na slici 1 imamo prikazanu dosad opisanu celiju sa svojim susjednim celijama, te svaka od njih ima svoje definisano stanje. Celije su oznacene brojevima 1-16 radi njihovog referiranja unutar teksta, te ovi brojevi ne predstavljaju dio modela.

// slika 2 – 2D grid sa pocetnom konfiguracijom

Na slici 2 prikazan je skupe celija koje zajedno cine 2d ***grid***. Primijetimo da je nemoguce simulirati beskonacni grid konacnim kompjutacionim metodama, pa se u praksi gotovo uvijek ogranicavamo na konacne dimenzije. Ovdje nastaje problem sta raditi sa rubnim celijama, te ce ta tematika biti detaljnije kasnije obradjena.

Ovakav raspored nazvacemo ***konfiguracija***. U konfiguraciji, svaka celija ima svoje pocetno stanje, pa je tako za svaku celiju definisano da li je ona inicijalno on ili off – crna ili bijela. Stanje je na pocetku izabrano proizvoljno i moze se mijenjati u zavisnosti od potreba, te ce razlicita pocetna stanja dati nekada i drasticno razlicita ponasanja. Na slici 2 prikazan je primjer jednog takvog pocetnog stanja. Skup ovako organizovanih celija sa svojim pocetnim stanjima u konacnom gridu nazivamo ***inicijalna konfiguracija grida***.

Naravno, dosadasnja definicija celijski automata ne bi imala nikakvog smisla, s obzirom da imamo samo pocetnu konfiguraciju i grid. Medjutim, ono sto cini celijske automate pravim modelima koji se mogu koristiti u razne svrhe je takozvana ***evolucija celijskih automata***. Nakon sto se uspostavi inicijalna konfiguracija grida, ovaj sistem moze da se stavi u evoluciju. To znaci da ce svaka od celija da mijenja svoje stanje prema nekim pravilima, te ce cijelokupan sistem da se mijenja prema tim pravilima u diskretnim vremenskim intervalima.

// slika 3 – tipovi susjedstva (moore, von Neumann, custom)

Sljedece stanje svake individualne celije zavisi od njenog trenutnog stanja, kao i okolnih celija, te se prema ovim parametrima i formiraju pravila. Susjedne koje okruzuju datu celiju a uzimaju se u obzir prilikom rancunanja sljedeceg stanja kolektivno se nazivaju ***susjedstvo (eng. neighborhood)***. Evidentno je da izbor susjedstva nije jedinstven. Na slici 3 prikazano je nekoliko nacina izbora susjedstva. Najpoznatija dva ovakva tipa su Moore-ovo i von Neumann-ovo susjedstvo prikazano na slici, ali nije iskljuceno i kreiranje proizvoljnog susjedstva.

// slika 4 – ruleset picker za jednostavno 4-von nemannovo susjedstvo

Nakon sto se izabere koje celije ucestvuju u formiranju susjsedsva, formira se i skup pravila koji govori o tome kako celija evoluira na osnovu svog stanja i stanja svojih susjeda. Na slici 4 je u gornjem dijelu naveden i nacin specifikacije pravila za von Neumannovo-ovo sujedstvo gdje se za svaku pojedinacnu kombinaciju susjedstva na osnovu trenutnog stanja celija bira iduce stanje iste. Tako sa slike mozemo uociti npr. ukoliko je celija okruzena sa tri bijele celije iznad, lijevo i desno, te crnom celijom ispod, ukoliko je trenutno stanje off prelazi u on, dok ukoliko je trenutno stanje on prelazi u off.

// slika 5 - tri koraka game of life-a

Kako su stanja binarna, ukoliko n predstavlja broj susjeda koji formiraju susjedstvo, tada je moguce $2^{2^{n+1}}$ mogucih pravila evolucije. Tako za jednostavno Moore-ovo susjedstvood 8 susjednih celija postoji $2^{2^{8+1}} = 2^{2^9} = 1.34 \times 10^{154}$ mogucih pravila evolucije. Ovo opazanje ce biti kasnije detaljnije objasnjeno.

Na slici 5 data su 3 koraka evolucije sistema sa jednim od specificnih pravila, te je ovo dobro poznata konfiguracija nazvana Game of Life.

Vidimo da opisana cisto lokalna interakcija moze da kreira poprilicno kompleksne oblike, te ce se dalje ispitati kolika je ta kompleksnost i na koji nacin se mogu koristiti ova zapazanja za neke generalnije kompjutacije.

// slike 6 i 7 – selekcija 1d pravila – kompleksne strukture [3]

Na slikama 6 i 7 prikazana je kompleksnost koja moze da proizidje iz jednostavnih pravila prezentovanih iznad.

// TODO: dodati iz uvod iz [3] radi upoznavanja zanimljivih osobina

1.2 Historija

Da bismo dobili opstu sliku oblasti, te razloga nastanka i razvoja iste, potrebno je istraziti kako je doslo do pitanja i problema koja su dovela do toga da se naucna javnost zainteresira.

Kao i sve ostale oblasti nauke i matematike, tako su i celijski automati nastali pokusajem odgovaranja na specifican skup pitanja koji se kasnije prosirio u cijelu oblast nakon sto se uvidjela njihova moguca generalnost i opstija primjena.

Pioniri ove konkretne oblasti bili 1940-ih su istrazivaci u Los Alamos Nacionalnoj Laboratorji ***Stanislaw Ulam*** i ***John von Neumann***. Zanimljiva je cinjenica da su se bavili ovom oblasti sa strane u vidu hobija. Oni su se, posebno von Neumann, inicijalno zanimali pokusajem da naprave sistem u kojem bi bilo moguce da entitet unutar samog sistema vrsi ***samoreplikaciju***. Ovo bi znacilo da odredjeni objekat pravi identicnu kopiju samoga sebe, te bi ta kopija takodjer pravila svoju kopiju ad infimum.

Prvobitno je von Neumann zelio da kreira robota koji bi vrsio samoreplikaciju (sto danas nazivamo kinematskim – realnim modelom samoreplikacije), medjutim nakon teskoca pri nalazenju ogromnog broja dijelova koje bi robot morao da ima na raspolaganju da bi izvrsio ovaj zadatak, te nakon prijedloga Ulama, odlucio je da iskoristi apstraktni diskretni model za ovaj zadatak. Model koji je koristio moze se smatrati prvim primjerom koristenja celijskih automata.

Ovo predstavlja pocetak oblasti diskretnih sistema celijskih automata. Rezultat je bio ono sto danas nazivamo von Neumann-ov univerzalni konstruktor. On se sastoji od celijskih automata koji imaju 29 stanja i potrebno je ~200.000 celija da bi se izgradio univerzalni konstruktor. Von Neumann je dao okvirni dizajn i dokaz postojanja, ali nikada nije implementirao ovaj sistem. [1] Tek 1990-ih godina je grupa predvodjena italijanskim naucnikom ***Pasaventom*** uspjela da napravi pravu implementaciju ovoga sistema, iako je ideja konceptualno zaceta gotovo 50 godina prije prve implementacije.

Nesto kasnije, 1950-ih, ista dvojica naucnika iz Los Alamos laboratorija iskoristili su celijske automate u prvom pokusaju modeliranja realnosti koristeci iste. Kreirali su model koji ***predvidja kretanje fluida*** na nacin da smatraju fluid sastavljenim od diskretnih jedinica – celijskih automata, cije kretanje zavisi od susjednih jedinica. Na ovaj nacin moguce je aproksimirati kretanje cjelokupnog fluida modeliranjem samo lokalne interakcije susjednih cestica. Ovim modelom pokazano je da celijski automati imaju i siru primjenu van cisto teoretskih razmatranja za koja su ranije koristeni, te ovo predstavlja svojevrsni pocetak generalne primjene ove vrste modela u nauci.

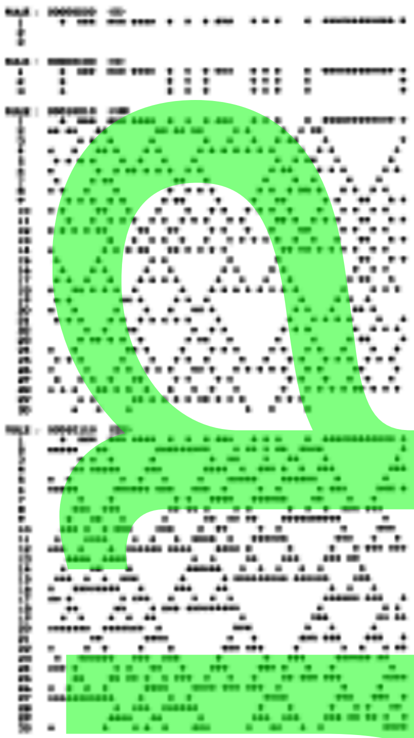
Trebalo bi napomenuti i da je neke od ranih istrazivanja u ovom polju vrsio i pionir u oblasti vjestackog zivota, norvesko-italijanski naucnik ***Nils Aall Baricelli*** koji je jedan od prvih prepoznao potencijalnu univerzalnost celijskih automata kao modela koji mogu predstavljati realne pojave.

Jos neku od ranih primjena celijski automati nasli su u modeliranju ***propagacije talasa u medijima***. Rani ovakav model celijskih automata konstruisan je 1940-ih. Medjutim kako je taj model koristio kontinualnu funkciju kao signal, ne moze se smatrati diskretnim modelom celijskih automata, tako da su prvi pravi ovakav model koristen u svrhe modeliranja impulsa kardio sistema u covjecijem tijelu konstrukisali ***J. M. Greenberg*** i ***S. P. Hastings*** 1978-e. Ovaj model je i dalje cesto koristen i referenciran u istrazivackim radovima.

Prvih dvadeset godina od pojavljivanja modela celijskih automata, gotovo niko nije izvrsavao rigorozno naucno i matematicko ispitivanje osobina ovih sistema. Jedan od pionirskih radova u polju bio je rad americkog matematicara ***Gustava A. Hedlunda***, koji je kroz matematicku oblastu dinamika simbola (koju je sam i osnovao, eng. *symbolic dynamics*) posmatrao celijske automate kao mijenjajuce nizove simbola uz odredjena pravila prelaza. Ovime je dosao do nekih od najkorisnih rezultata u ovom polju. Njegov rad iz 1969-e zajedno sa Curtis-Hedlund-Lyndon teoremom za koju snosi djelomicne zasluge, koja klasificira globalni prostor pravila automata, i dalje predstavlja jednu od osnova za bilo koga ko planira da se upusti u ozbiljnije ispitivanje ove vrste sistema.

Pravu popularizaciju oblast je dozivjela pametno konstruisanim primjerom od strane britanskog matematicara i fizicara ***John Conway***-a 1970-e godine. On je svoj specifican model baziran na dvodimenzionalnim celijskim automatima prikladno nazvao ***Igra zivota*** (eng. *Game of Life*). Ovaj model je standardni dvodimenzionalni sistem celijskih automata sa dva stanja, medjutim uprkos jednostavnim pravilima, nakon sto se sistem pusti u rad, pocinju da se pojavljuju visoko kompleksne strukture koje ispoljavaju osobine koje bi mogli pripisati i nekim zivim bicima, krecu se, jedu jedni druge, razmnozavaju se i slicno – zbog ovoga je model i dobio svoje ime. Upravo zbog ovih osobina gdje se visoka kompleksnost javlja iz poprilicno jednostavnih pravila, Igra a samim tim i oblast celijskih automata dozivjela je veliku popularizaciju, te vecina ljudi za celijske automate sazna upravo iz ovog primjera. Iako se ovaj model smatrao pretezno dijelom rekreativne matematike te sredstvom popularizacije ideje celijskih automata za siru javnost, nesto kasnije je Berlekamp u saradnji sa jos nekoliko matematicara dokazao univerzalnost Igre zivota, tj. da sistem moze ekvivalentno da se koristi u svrhu univerzalne kompjutacije kao i bilo koji drugi racunar prema Turingovoj tezi.

Mozemo napomenuti da je i njemacki racunarski pionir ***Konrad Zuse*** 1969-e u svojoj knjizi *Racunajuci svemir* raspravljao neke od sirih filozofskih implikacija sistema celijskih automata. On je naveo da je moguce da cijelokupan univerzum zapravo jedan veliki celijski automat koji se sinhrono update-a u vremenskim koracima, te je ova ideja otvorila prostor za potpuno novu oblast nazvanu digitalna fizika.



Slika 8. Preuzeto iz [2]

Najdetalnjije i rigoroznije ispitivanje osobina celijskih automata izvrsio je u svojim radovima tokom dvadeset godina istrazivanja britanski matematicar i fizicar ***Stephen Wolfram***, koji se smatra jednom od najbitnijih figura za ovu oblast. Poceo je sa svojim istrazivanjima 1981-e u pokusajima da razmotri kako se kompleksni uzorci u prirodi formiraju naizgled narusavajuci drugi zakon termodinamike. Tada je izvrsavao simulacije na ranim racunarima, te nekon sto je u simulacije unio odredjene klase celijskih automata, bio je zapanjen kolika kompleksnost proizilazi iz jednostavnih pravila koje je postavio(slika 8). Ovo naizgled kontraintuitivno ponasanje koje ga je zapanjilo navelo ga je da u iducim decenijama prebaci svoju sferu rada sa fizike na matematiku i kompjutersku nauku. U seriji od preko dvadeset radova Wolfram je izvrsio klasifikaciju i opisao osobine pretezno jednodimenzionalnih celijskih automata, te predlozio mnoge njihove primjene kao alternativu trenutno koristenim modelima poput parcijalnih diferencijalnih jednacina. Takodjer je doprinio dokazivanju univerzalnosti jednog od pravila jednodimenzionalnih celijskih automata. Svoje pronalaske, stavove i historiju istrazivanja kompajlirao je 2002. u knjizi ***Nova vrsta nauke*** (eng. *A New Kind of Science*), gdje se zalaze za celijske automate kao buducnost modeliranja prirodnih pojava te bilo kakve vrste apstraktnih sistema [2]. Dotice se i filozofskih implikacija celijskih automata. Wofram i dalje nastavlja da popularizira ovu temu kroz serije govora, te je poznat kao i kreator

Wolfram Alpha i *Mathematica* softverskih sistema.

1.3 Motivacija

Ljudska nauka stoljecima pokusava da koristeci klasicne metode matematike u priminjenim disciplinama poput fizike objasni i razjasni svijet oko nas, kao i da iz datih pocetnih uslova nekog sistema da predvidjanja za buducnost istog, tj. da predvidi ponasanje bez potrebe da se sam sistem pusti u izvrsavanje ili simulaciju. Medjutim, i nakon toliko vremena izucavanja, i dalje postoje neka fundamentalna pitanja koja su ostala neodgovorena i cini se kao da ih je nauka zaobilazila te odgovarala samo na pitanja koja su se uklapala u stereotipni nacin dotadasnjeg razmisljanja da se stvari modeliraju kontinualnim alatima parcijalnih diferencijalnih jednacina. Treba uzeti u razmatranje mogucnost da mozda postoji fundamentalno ogranicenje ovakvog pristupa te da treba razmotriti neke nove metode koje bi mozda dale bolje rezultate [2]. Wolfram, fizicar po struci i jedna od ikonskih figura polja celijskih automata, u svojim radovima i knjigama daje primjere novih sistema i njihovih primjena na mjestima gdje tradicionalni naucni pristup ne uspijeva dati zadovoljavajuci odgovor (pogledati npr. [4] i [2]).

Ukoliko osmotrimo prirodne konstrukte oko nas, mozemo primijetiti da postoji nekoliko osnovnih karakteristika koje mozemo uociti. Za pocetak, koncept lokalne interakcije siroko je rasprostranjen s obzirom da u toku razmatranja necega uzimamo u obzir uticaje samo onih elemenata koji su vremenski i prostorno dovoljno blizu da bi mogli proizvesti znacajne efekte na ishod ponasanja. Naravno da je moguce da neki dalji objekat ima uticaj. Medjutim, kako vecina posmatranih pojava zadovoljava svojstvo linearnosti gdje mala promjena u pocetnim uslovima izaziva i malu promjenu u rezultatima (za razliku od kaoticnih sistema koji se rjedje srecu), to je posmatranje svakodnevnih sistema kroz pretezno lokalnu interakciju poprilicno opravdano. Na primjer, prilikom razmtranja hemijske reakcije na molekularnom nivou, nije potrebno uzimati u obzir Jupiterovu gravitacionu silu, iako je istina da ona vrsi uticaj na sistem, ma koliko on malen bio (iz ovih razloga potpuno izoliran sistem je cisto teoretski konstrukt).

Nadalje, uprkos pretezno cisto lokalnoj interakciji, sistemi ispoljavaju poprilicno kompleksna svojstva kao cjeline. Tako da iz cisto lokalnih svojstava nastaju globalna svojstva u kojima ucestvuju svi dijelovi. Ovo mozemo najbolje shvatiti kroz primjer ljudskog ponasanja kao vrste, gdje ljudi vrse razmjenu informacija i interakciju jedni medju drugima lokalno, medjutim i ljudsko drustvo u cjelini mozemo okarakterizirati nekim globalnim osobinama viseg nivoa. Ili npr. sistemi idealizovanih gasova sastavljeni od cestica koje vrse medjusobno mali prostorni uticaj, ali alatima statisticke mehanike i sl. mozemo okarakterizirati osobine cijelog volumena gasa [5].

Enormna kompleksnost nedvojbeno je dio sistema koji se uzimaju u naucna razmatranja i vecine naseg okruzenja. Ovo ide toliko daleko da su neke kompleksnosti i dalje ostale nerazjasnjene i uz koristenje najmodernijih tehnika i metoda naucnih disciplina. Svakodnevno se susrecu kompleksne strukture koje je danas tesko precizno modelirati, npr. propagacija toplote, modeli kretanja fluida ili pak nesto sto se na prvi pogled cini kao jednostavna stvar poput formiranje oblika snjeznih pahulja ili oblici formirani na morskim skoljkama [2]. Jedan od osnovnih ciljeva naucnih istrazivanja upravo “pripitomljavanje” ovih kompleksnosti i pokusaja objasnjenja istih kroz skup jednostavnijih principa. Postavlja se pitanje da li kompleksnost obavezno zahtijeva i kompleksnost na nizim nivoima i strukturama sistema, ili je nekako moguce, iako kontraituitivno, da poprilicno jednostavna pravila mogu da proizvedu ogromnu slozenost koja se moze uociti.

Postavlja se pitanje kako spojiti ove naizgled kontradiktorne osobine koje uvidjamo. Kako to da s jednog strana spektra postoji cisto lokalna interakcija, ali nakon sto pogledamo sistem sa viseg nivoa apstrakcije uvidjamo da se i sam sistem ponasa kao cjelina koja vrsi nesto globalniju interakciju sa sistemima istog nivoa? Takodjer, kako je moguce da ogromnu kompleksnost koju posmatramo pokusavamo svesti na jednostavna pravila koja ce je opisati i iz kojih ova kompleksnost moze da se izrodi?

Necemo ici toliko daleko da kazemo, kao sto Wolfram tvrdi u svojoj knjizi, da celijski automati mogu da posluze da modeliraju cijeli univerzum [2], medjutim ocigledno je da celijski automati i njihovo razumijevanje moze dovesti bar na pravi put razjasnjenja nekih od navedenih pitanja. Celijski automati po svojoj definiciji se baziraju na cisto lokalnoj interakciji, medjutim kada se pusti nekoliko koraka simulacije odredjenih pravila cak i jednodimenzionalnih instanci, uocavaju se globalne osobine. Tako da bi iz tog razumijevanja mogli doci blize razumijevanju nastajanja globalnog ponasanja iz lokalno ogranicenog. S druge strane, pravila celijskih automata poprilicno su jednostavna, pa su cak i anticki narodi mogli doci do istih [2]. Medjutim iako su pravila jednostavna, nivo kompleksnosti koji se javlja uopste nije niskog nivoa. Tako da i s te strane, celijski automati i njihovo razumijevanje moze da nas pribilizi odgovoru poveznice izmedju nastanka kompleksnosti iz malobrojnog skupa jednostavnih pravila.

1.4 Primjeri

Da bi se formirala kompletnija opsta slika celijskih automata kao modela kompleksnosti, prikladno bi bilo dati nekoliko primjera kompleksnosti i vrsta struktura generisanih celijskim automatima. Ovo moze dati jasniju sliku i nekome ko nije toliko zainteresovan u mateimaticke detalje samog modela na nacin da moze prikazati raznovrstnost struktura koje celijski automati mogu proizvesti.

Rule 30 ~ sea shells
rule 110
game of life + game of life life forms

2. Formalni matematicki tretman

Nakon neformalnog uvoda, potrebno je i rigorozno matematicki definisati sta se misli kada se koristi pojam celijskih automata. Zbog raznovrstnosti modela koji se mogu smatrati celijskim automatima, u literaturi ne postoji opsteprihvacena generalna definicija, vec autori strogo matematicki definisu samo konkretan model kojim se bave, npr. jednodimenzinalni binarni celijski automati u slucaju Stephena Wolframa (vidjeti npr. [2], [3], [4]).

Na pocetku bice data generalna definicija koja pokusava sto opstije da pokrije sve diskretne modele koji se mogu smatrati celijskim automatima, mada su moguce neke iznimke zbog sirine diskretnih modela i mogucnosti prosirenja osnovnog modela po raznim parametrima.

Nakon toga ce se redom proci kroz specificne instance poput jednodimenzionalnih i dvodimenzionalnih binarnih automata koje su najvise izucavane tokom godina. Obratice se paznja i na njihovu formalnu definiciju, tretman i matematicke osobine.

Takodjer, definicije i teoreme – osobine automata bice popracene primjerima i grafickim simulacijama iz implementacijskog dijela rada koji ce sam po sebi biti kasnije pokriven.

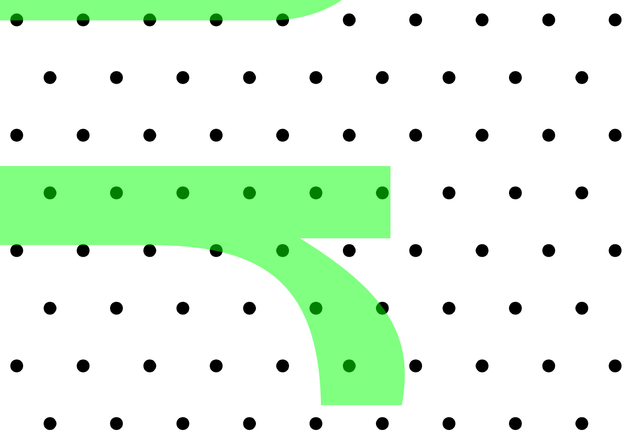
2.1 Generalna definicija

Pokusajmo prvo kroz nekoliko zapazanja iz konkretnih primjera uociti koje su to generalne osobine i koncepti koje bi definicija morala da pokrije, a nakon toga pokusacemo to da uklopimo u neki matematicki model.

Prvo idu neke preliminarne matematicke definicije kroz primjere koje su neophodne za razumijevanje krajnje definicije celijskih automata u generalnom slucaju. Pokusacemo kroz te definicije postepno proci kroz osobine apstraktnih pojmova za koje vezemo instance celijskih automata.

Prvo, sva desavanja modela moraju da se odvijaju na nekom apstraktnom prostoru, koji treba da zadovoljava odredjena svojstva. Dakle prvi koncept koji definicija treba da pokrije je prostor odvijanja modela. Prostor odvijanja modela celijskih automata je u pravilu diskretan, sto mozemo da uocimo iz nekoliko dosad razmotrenih primjera s obzirom da se uvijek radilo u pravougaonoj matrici kvadratnih mjesta ili jednodimenzionalnom ekvivalentu istih. Takodjer prostor mora da bude definisan na takav nacin da se na njemu mogu definisati i ostali bitni koncepti poput susjedstva.

Prvo onda definisimo prostor. Matematicki objekat koji moze da uhvati sve navede osobine je latica ili resetka (eng. lattice). Intuitivno resetka je skup tacaka sa ravnomjernim i homogenim rasporedom kao sto je prikazano npr. na slici 9. Naravno tu je i dosad poznati primjer na slici 1 u prethodnom poglavlju.



Slika 9.

Da bismo formalno predstavili sta je to ravnomjerno rasporedjenje, resetku mozemo definisati kao skup tacaka kod kojih je udaljenost izmedju bilo koje dvije od njih cjelobrojna linearna kombinacija unaprijed odredjenih vektora u prostoru gdje su tacke definisane (pretezno se radi sa skupom/prostorom R^n). Kljucan detalj je cjelobrojnost jer time zadrzavamo osobinu diskretnosti samog skupa, sto je kljucno za celijske automate kao diskretne modele kompjutacije.

Definicija 3.1 Latica ili resetka se definise kao $\Lambda := \left\{ \sum_i \mathrm{a}_i \; v_i \, : \, a_i \in \mathbb{Z} \right\}$ gdje je $v_i \in \{v_1, v_2, v_3, ...\}$ baza vektorskog prostora V nad skupom skupa gdje je resetka definisana.

Ovo samo znaci da izaberemo fiksan skup vektora udaljenosti od tacke i na tacku nadodjemo cjelobrojne umnoske vektora da bismo tako odrzali regularnost koja je zahtijevana za definiciju celijskih automata.

Kako su celijski automati prostorno i vremenski diskretni sistemi, to moramo moci definisati i diskretan koncept vremena u kojem automati evoluiraju kao dodatnu dimenziju pored prostorne koju smo vec obradili.

Upravo iz diskretnosti dimenzije vremena za sisteme celijskih automata, javlja se i najjednostavniji nacin njegove definicije. Dovoljno je samo da se vrijeme moze staviti u jedan-na-jedan (bijektivno) mapiranje sa skupom prirodnih brojeva, sto se i uklapa u trazenu diskretnost.

Definicija 3.2 Neka je dat skup T takav da neka postoji funkcija $b : T \to \mathbb{N}$ koja je bijektivna. Tada skup T nazivamo diskretnim vremenskim skupom.

Da bi se izbjegle zabune, zbog postojanja bijektivnosti moguce je u daljnjim razmatranjima umjesto apstraktnog skupa T koristiti skup prirodnih brojeva.

Sada kada smo definisali prostorne i vremenske dimenzije u kojima ce celijski automati biti smjesteni, jos jedan osnovni koncept je stanje svakog automata koji se nalazi u prostor-vremenu. Svaka celija mora biti u jednom od konacnog broja stanja, sto je i jedino ogranicenje na ovaj skup, da mu je kardinalnost konacna, tj. odgovara nekom prirodnom broju.

Definicija 3.3 Skup Q nazivamo skupom stanja ukoliko $\mid Q \mid = n$, gdje $n \in \mathbb{N}$.

Nakon otklanjanja nejasnoca u vezi osnovnih pojmova koji su potrebni za generalnu definiciju celijskih automata, mozemo je i navesti.

Definicija 3.4 Celijski automat mozemo definisati kao uredjenu sestorku $C := (\Lambda, Q, T, \sigma, \eta, \phi)$, pri cemu je Λ resetka nad nekim skupom, Q skup stanja, T diskretni vremenski skup, dok su σ, η, ϕ funkcije $\sigma : \Lambda \times T \to Q$, $\eta : \Lambda \to \Lambda^c$ i $\phi : Q^{c+1} \to Q$ ($c \in \mathbb{N} \wedge c \geqslant 1$) koje se nazivaju funkcije konfiguracije, susjedstva i prelaza respektivno. Prirodni broj c se naziva velicina ili kardinalnost susjedstva. Funkcija σ je rekurzivno definisana pomocu funkcije η kao
$\sigma(\lambda, n) = \phi(\sigma(\eta(\lambda), n-1), \sigma(\lambda, n-1))$
($\lambda \in \Lambda, n \in T$, ali mozemo uz prije navedenu diskretnost skupa T smatrati da $n \in \mathbb{N}$).

Reference

[1] Schiff, Intro CA
[2] Wolfram, A New Kind of Science
[3] Cellular Automata »Wolfram, S. Los Alamos Science 9 (1983): 2–21.
[4] Universality and Complexity in Cellular Automata »Wolfram, S. Physica D: Nonlinear Phenomena10, no. 1–2 (1984): 1–35.
[5] Cellular Automaton Supercomputing »Wolfram, S. In High-Speed Computing: Scientific Applications and Algorithm Design[Wilhelmson, R. B. (Ed.)]. University of Illinois Press, 40–48, 1988.