Abstract

U radu se obradjuje specijalna klasa konacnih diskretnih modela pod nazivom ‘celijski automati’ (eng. cellular automata) koji se baziraju na cisto lokalnoj interakciji ali proizvode uzorke koji se mogu promatrati na globalnijoj skali, te vecem nivou apstrakcije. Upravo ova cisto lokalna interakcija omogucava da se pomocu navedenih entiteta omoguci modeliranje sirokog spektra realnih pojava s obzirom da veliki broj stvari koje se pokusavaju modelirati spada upravo u ovu kategoriju.
Kroz rad se navodi nekoliko klasa, primjera i primjena celijskih automata, te se uz pomoc grafickog simulatora pokusavaju prikazati najbitniji koncepti potrebni za shvatanje nacina funkcionisanja te potencijalne primjene ovih modela. Rad sluzi kao uvod u siroku tematiku i primjene ove vrste modela.
Takodjer, ponudjen je i formalni matematicki tretman iz raznih aspekta koji ukljucuju teoriju haosa i teoriju igara, te aspekt na koji je stavljen najveci fokus – teorija kompjutacije s obzirom da se celijski automati, tacnije odredjene instance istih, mogu koristiti kao univerzalna Turingova masina sto otvara siroke primjene ove vrste sistema.

Okvir rada

// pregled poglavlja i strukture etc.

Pregled oznaka i nacini enumeracije

Slike su numerisane redom i enumeracije slike nema posebno znacenje.

Definicije su numerisane sa x.y.z gdje x.y predstavlja podpoglavlje u kojem se definicija nalazi, dok z predstavlja redni broj definicije u tom podpoglavlju. Numercija podpoglavlja ide do dva nivoa dubine.

1. Uvod

U uvodnom dijelu pokusacemo razmotriti pozadinska razmatranja koja vode do izucavanja klase konacnih diskretnih modela nazvanih celijski automati.

Prvo cemo dati pregled kroz specifican primjer da se uoce neke od osnovnih karakteristika ovih sistema.

Nakon cemo pregledati histroijski koja matematicka pitanja su navela da se razmotre neke specijalne klase, te ce se nako toga obratiti paznja na unificarnje specijalni klasa, te posebno historijski pregled rada Stephena Wolframa za kojeg se moze reci da je dao jedna od najvecih doprinosa samom polju.

Bice dat i pregled potencijalnih primjena te motivacija za izucavanje oblasti celijskih automata, te se ovaj dio moze smatrati neformalnim uvodom u cjelokupnu oblast koji moze dati osnovnu ideju bilo kome ko zeli da se zainteresuje u oblast.

1.1 Osnovni pregled

Pocnimo prvo od pokusaja shvatanja kakve vrste modela predstavljaju celijski automati. Zato cemo prvo krenuti od konkretnog specificnog primjera kroz koji je moguce shvatiti osnovne odlike celijskih automata na koje cemo se kasnije nadograditi kako budemo gradili formalnu apstrakciju ovog konkretnog primjera.

Najjednostavniji takav je primjer je beskonacna dvodimenzionalna ravna ploca prekrivena kvadratima koje cemo nazvati ***celije***. Kvadrati se medjusobno dodiruju stranicama, te tako svaki kvadrat ima punu vezu preko stranice sa tacno cetiri susjedne celije. Za svaku celiju kazemo da moze biti u dva stanja - on i off. Kako cemo za prikaz automata pretezno koristiti graficke interpretacije, ova dva stanja mozemo “zakodirati” bojom same celije, pa cemo tako uspostaviti konvenciju da crna prestavlja on, dok bijela prestavlja off stanje. Sva trenutna razmatranja bice formalno definisana kasnije u radu te ovaj dio razmatranja sluzi samo za intuitivni prikaz osnovnih ideja iza ovakvih vrsta modela.

// slika 1 – celija sa susjedstvom (4x4 grid)

Na slici 1 imamo prikazanu dosad opisanu celiju sa svojim susjednim celijama, te svaka od njih ima svoje definisano stanje. Celije su oznacene brojevima 1-16 radi njihovog referiranja unutar teksta, te ovi brojevi ne predstavljaju dio modela.

// slika 2 – 2D grid sa pocetnom konfiguracijom

Na slici 2 prikazan je skupe celija koje zajedno cine 2d ***grid***. Primijetimo da je nemoguce simulirati beskonacni grid konacnim kompjutacionim metodama, pa se u praksi gotovo uvijek ogranicavamo na konacne dimenzije. Ovdje nastaje problem sta raditi sa rubnim celijama, te ce ta tematika biti detaljnije kasnije obradjena.

Ovakav raspored nazvacemo ***konfiguracija***. U konfiguraciji, svaka celija ima svoje pocetno stanje, pa je tako za svaku celiju definisano da li je ona inicijalno on ili off – crna ili bijela. Stanje je na pocetku izabrano proizvoljno i moze se mijenjati u zavisnosti od potreba, te ce razlicita pocetna stanja dati nekada i drasticno razlicita ponasanja. Na slici 2 prikazan je primjer jednog takvog pocetnog stanja. Skup ovako organizovanih celija sa svojim pocetnim stanjima u konacnom gridu nazivamo ***inicijalna konfiguracija grida***.

Naravno, dosadasnja definicija celijski automata ne bi imala nikakvog smisla, s obzirom da imamo samo pocetnu konfiguraciju i grid. Medjutim, ono sto cini celijske automate pravim modelima koji se mogu koristiti u razne svrhe je takozvana ***evolucija celijskih automata***. Nakon sto se uspostavi inicijalna konfiguracija grida, ovaj sistem moze da se stavi u evoluciju. To znaci da ce svaka od celija da mijenja svoje stanje prema nekim pravilima, te ce cijelokupan sistem da se mijenja prema tim pravilima u diskretnim vremenskim intervalima.

// slika 3 – tipovi susjedstva (moore, von Neumann, custom)

Sljedece stanje svake individualne celije zavisi od njenog trenutnog stanja, kao i okolnih celija, te se prema ovim parametrima i formiraju pravila. Susjedne koje okruzuju datu celiju a uzimaju se u obzir prilikom rancunanja sljedeceg stanja kolektivno se nazivaju ***susjedstvo (eng. neighborhood)***. Evidentno je da izbor susjedstva nije jedinstven. Na slici 3 prikazano je nekoliko nacina izbora susjedstva. Najpoznatija dva ovakva tipa su Moore-ovo i von Neumann-ovo susjedstvo prikazano na slici, ali nije iskljuceno i kreiranje proizvoljnog susjedstva.

// slika 4 – ruleset picker za jednostavno 4-von nemannovo susjedstvo

Nakon sto se izabere koje celije ucestvuju u formiranju susjsedsva, formira se i skup pravila koji govori o tome kako celija evoluira na osnovu svog stanja i stanja svojih susjeda. Na slici 4 je u gornjem dijelu naveden i nacin specifikacije pravila za von Neumannovo-ovo sujedstvo gdje se za svaku pojedinacnu kombinaciju susjedstva na osnovu trenutnog stanja celija bira iduce stanje iste. Tako sa slike mozemo uociti npr. ukoliko je celija okruzena sa tri bijele celije iznad, lijevo i desno, te crnom celijom ispod, ukoliko je trenutno stanje off prelazi u on, dok ukoliko je trenutno stanje on prelazi u off.

// slika 5 - tri koraka game of life-a

Kako su stanja binarna, ukoliko n predstavlja broj susjeda koji formiraju susjedstvo, tada je moguce $2^{2^{n+1}}$ mogucih pravila evolucije. Tako za jednostavno Moore-ovo susjedstvood 8 susjednih celija postoji $2^{2^{8+1}} = 2^{2^9} = 1.34 \times 10^{154}$ mogucih pravila evolucije. Ovo opazanje ce biti kasnije detaljnije objasnjeno.

Na slici 5 data su 3 koraka evolucije sistema sa jednim od specificnih pravila, te je ovo dobro poznata konfiguracija nazvana Game of Life.

Vidimo da opisana cisto lokalna interakcija moze da kreira poprilicno kompleksne oblike, te ce se dalje ispitati kolika je ta kompleksnost i na koji nacin se mogu koristiti ova zapazanja za neke generalnije kompjutacije.

// slike 6 i 7 – selekcija 1d pravila – kompleksne strukture [3]

Na slikama 6 i 7 prikazana je kompleksnost koja moze da proizidje iz jednostavnih pravila prezentovanih iznad.

// TODO: dodati iz uvod iz [3] radi upoznavanja zanimljivih osobina

1.2 Historija

Da bismo dobili opstu sliku oblasti, te razloga nastanka i razvoja iste, potrebno je istraziti kako je doslo do pitanja i problema koja su dovela do toga da se naucna javnost zainteresira.

Kao i sve ostale oblasti nauke i matematike, tako su i celijski automati nastali pokusajem odgovaranja na specifican skup pitanja koji se kasnije prosirio u cijelu oblast nakon sto se uvidjela njihova moguca generalnost i opstija primjena.

Pioniri ove konkretne oblasti bili 1940-ih su istrazivaci u Los Alamos Nacionalnoj Laboratorji ***Stanislaw Ulam*** i ***John von Neumann***. Zanimljiva je cinjenica da su se bavili ovom oblasti sa strane u vidu hobija. Oni su se, posebno von Neumann, inicijalno zanimali pokusajem da naprave sistem u kojem bi bilo moguce da entitet unutar samog sistema vrsi ***samoreplikaciju***. Ovo bi znacilo da odredjeni objekat pravi identicnu kopiju samoga sebe, te bi ta kopija takodjer pravila svoju kopiju ad infimum.

Prvobitno je von Neumann zelio da kreira robota koji bi vrsio samoreplikaciju (sto danas nazivamo kinematskim – realnim modelom samoreplikacije), medjutim nakon teskoca pri nalazenju ogromnog broja dijelova koje bi robot morao da ima na raspolaganju da bi izvrsio ovaj zadatak, te nakon prijedloga Ulama, odlucio je da iskoristi apstraktni diskretni model za ovaj zadatak. Model koji je koristio moze se smatrati prvim primjerom koristenja celijskih automata.

Ovo predstavlja pocetak oblasti diskretnih sistema celijskih automata. Rezultat je bio ono sto danas nazivamo von Neumann-ov univerzalni konstruktor. On se sastoji od celijskih automata koji imaju 29 stanja i potrebno je ~200.000 celija da bi se izgradio univerzalni konstruktor. Von Neumann je dao okvirni dizajn i dokaz postojanja, ali nikada nije implementirao ovaj sistem. [1] Tek 1990-ih godina je grupa predvodjena italijanskim naucnikom ***Pasaventom*** uspjela da napravi pravu implementaciju ovoga sistema, iako je ideja konceptualno zaceta gotovo 50 godina prije prve implementacije.

Nesto kasnije, 1950-ih, ista dvojica naucnika iz Los Alamos laboratorija iskoristili su celijske automate u prvom pokusaju modeliranja realnosti koristeci iste. Kreirali su model koji ***predvidja kretanje fluida*** na nacin da smatraju fluid sastavljenim od diskretnih jedinica – celijskih automata, cije kretanje zavisi od susjednih jedinica. Na ovaj nacin moguce je aproksimirati kretanje cjelokupnog fluida modeliranjem samo lokalne interakcije susjednih cestica. Ovim modelom pokazano je da celijski automati imaju i siru primjenu van cisto teoretskih razmatranja za koja su ranije koristeni, te ovo predstavlja svojevrsni pocetak generalne primjene ove vrste modela u nauci.

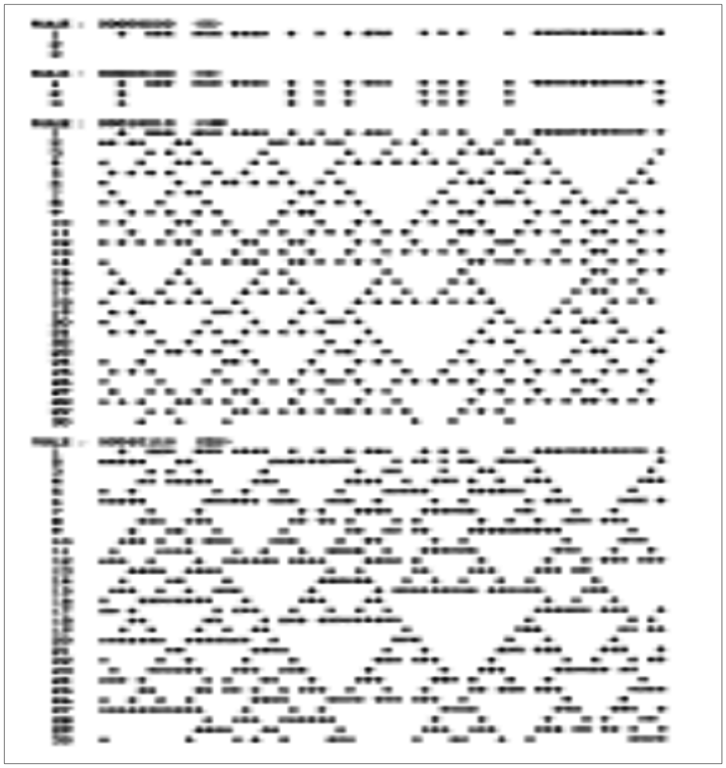
Trebalo bi napomenuti i da je neke od ranih istrazivanja u ovom polju vrsio i pionir u oblasti vjestackog zivota, norvesko-italijanski naucnik ***Nils Aall Baricelli*** koji je jedan od prvih prepoznao potencijalnu univerzalnost celijskih automata kao modela koji mogu predstavljati realne pojave.

Jos neku od ranih primjena celijski automati nasli su u modeliranju ***propagacije talasa u medijima***. Rani ovakav model celijskih automata konstruisan je 1940-ih. Medjutim kako je taj model koristio kontinualnu funkciju kao signal, ne moze se smatrati diskretnim modelom celijskih automata, tako da su prvi pravi ovakav model koristen u svrhe modeliranja impulsa kardio sistema u covjecijem tijelu konstrukisali ***J. M. Greenberg*** i ***S. P. Hastings*** 1978-e. Ovaj model je i dalje cesto koristen i referenciran u istrazivackim radovima.

Prvih dvadeset godina od pojavljivanja modela celijskih automata, gotovo niko nije izvrsavao rigorozno naucno i matematicko ispitivanje osobina ovih sistema. Jedan od pionirskih radova u polju bio je rad americkog matematicara ***Gustava A. Hedlunda***, koji je kroz matematicku oblastu dinamika simbola (koju je sam i osnovao, eng. *symbolic dynamics*) posmatrao celijske automate kao mijenjajuce nizove simbola uz odredjena pravila prelaza. Ovime je dosao do nekih od najkorisnih rezultata u ovom polju. Njegov rad iz 1969-e zajedno sa Curtis-Hedlund-Lyndon teoremom za koju snosi djelomicne zasluge, koja klasificira globalni prostor pravila automata, i dalje predstavlja jednu od osnova za bilo koga ko planira da se upusti u ozbiljnije ispitivanje ove vrste sistema.

Pravu popularizaciju oblast je dozivjela pametno konstruisanim primjerom od strane britanskog matematicara i fizicara ***John Conway***-a 1970-e godine. On je svoj specifican model baziran na dvodimenzionalnim celijskim automatima prikladno nazvao ***Igra zivota*** (eng. *Game of Life*). Ovaj model je standardni dvodimenzionalni sistem celijskih automata sa dva stanja, medjutim uprkos jednostavnim pravilima, nakon sto se sistem pusti u rad, pocinju da se pojavljuju visoko kompleksne strukture koje ispoljavaju osobine koje bi mogli pripisati i nekim zivim bicima, krecu se, jedu jedni druge, razmnozavaju se i slicno – zbog ovoga je model i dobio svoje ime. Upravo zbog ovih osobina gdje se visoka kompleksnost javlja iz poprilicno jednostavnih pravila, Igra a samim tim i oblast celijskih automata dozivjela je veliku popularizaciju, te vecina ljudi za celijske automate sazna upravo iz ovog primjera. Iako se ovaj model smatrao pretezno dijelom rekreativne matematike te sredstvom popularizacije ideje celijskih automata za siru javnost, nesto kasnije je Berlekamp u saradnji sa jos nekoliko matematicara dokazao univerzalnost Igre zivota, tj. da sistem moze ekvivalentno da se koristi u svrhu univerzalne kompjutacije kao i bilo koji drugi racunar prema Turingovoj tezi.

Mozemo napomenuti da je i njemacki racunarski pionir ***Konrad Zuse*** 1969-e u svojoj knjizi *Racunajuci svemir* raspravljao neke od sirih filozofskih implikacija sistema celijskih automata. On je naveo da je moguce da cijelokupan univerzum zapravo jedan veliki celijski automat koji se sinhrono update-a u vremenskim koracima, te je ova ideja otvorila prostor za potpuno novu oblast nazvanu digitalna fizika.



Slika 8. Preuzeto iz [2]

Najdetalnjije i rigoroznije ispitivanje osobina celijskih automata izvrsio je u svojim radovima tokom dvadeset godina istrazivanja britanski matematicar i fizicar ***Stephen Wolfram***, koji se smatra jednom od najbitnijih figura za ovu oblast. Poceo je sa svojim istrazivanjima 1981-e u pokusajima da razmotri kako se kompleksni uzorci u prirodi formiraju naizgled narusavajuci drugi zakon termodinamike. Tada je izvrsavao simulacije na ranim racunarima, te nekon sto je u simulacije unio odredjene klase celijskih automata, bio je zapanjen kolika kompleksnost proizilazi iz jednostavnih pravila koje je postavio(slika 8). Ovo naizgled kontraintuitivno ponasanje koje ga je zapanjilo navelo ga je da u iducim decenijama prebaci svoju sferu rada sa fizike na matematiku i kompjutersku nauku. U seriji od preko dvadeset radova Wolfram je izvrsio klasifikaciju i opisao osobine pretezno jednodimenzionalnih celijskih automata, te predlozio mnoge njihove primjene kao alternativu trenutno koristenim modelima poput parcijalnih diferencijalnih jednacina. Takodjer je doprinio dokazivanju univerzalnosti jednog od pravila jednodimenzionalnih celijskih automata. Svoje pronalaske, stavove i historiju istrazivanja kompajlirao je 2002. u knjizi ***Nova vrsta nauke*** (eng. *A New Kind of Science*), gdje se zalaze za celijske automate kao buducnost modeliranja prirodnih pojava te bilo kakve vrste apstraktnih sistema [2]. Dotice se i filozofskih implikacija celijskih automata. Wofram i dalje nastavlja da popularizira ovu temu kroz serije govora, te je poznat kao i kreator *Wolfram Alpha* i *Mathematica* softverskih sistema.

1.3 Motivacija

Ljudska nauka stoljecima pokusava da koristeci klasicne metode matematike u priminjenim disciplinama poput fizike objasni i razjasni svijet oko nas, kao i da iz datih pocetnih uslova nekog sistema da predvidjanja za buducnost istog, tj. da predvidi ponasanje bez potrebe da se sam sistem pusti u izvrsavanje ili simulaciju. Medjutim, i nakon toliko vremena izucavanja, i dalje postoje neka fundamentalna pitanja koja su ostala neodgovorena i cini se kao da ih je nauka zaobilazila te odgovarala samo na pitanja koja su se uklapala u stereotipni nacin dotadasnjeg razmisljanja da se stvari modeliraju kontinualnim alatima parcijalnih diferencijalnih jednacina. Treba uzeti u razmatranje mogucnost da mozda postoji fundamentalno ogranicenje ovakvog pristupa te da treba razmotriti neke nove metode koje bi mozda dale bolje rezultate [2]. Wolfram, fizicar po struci i jedna od ikonskih figura polja celijskih automata, u svojim radovima i knjigama daje primjere novih sistema i njihovih primjena na mjestima gdje tradicionalni naucni pristup ne uspijeva dati zadovoljavajuci odgovor (pogledati npr. [4] i [2]).

Ukoliko osmotrimo prirodne konstrukte oko nas, mozemo primijetiti da postoji nekoliko osnovnih karakteristika koje mozemo uociti. Za pocetak, koncept lokalne interakcije siroko je rasprostranjen s obzirom da u toku razmatranja necega uzimamo u obzir uticaje samo onih elemenata koji su vremenski i prostorno dovoljno blizu da bi mogli proizvesti znacajne efekte na ishod ponasanja. Naravno da je moguce da neki dalji objekat ima uticaj. Medjutim, kako vecina posmatranih pojava zadovoljava svojstvo linearnosti gdje mala promjena u pocetnim uslovima izaziva i malu promjenu u rezultatima (za razliku od kaoticnih sistema koji se rjedje srecu), to je posmatranje svakodnevnih sistema kroz pretezno lokalnu interakciju poprilicno opravdano. Na primjer, prilikom razmtranja hemijske reakcije na molekularnom nivou, nije potrebno uzimati u obzir Jupiterovu gravitacionu silu, iako je istina da ona vrsi uticaj na sistem, ma koliko on malen bio (iz ovih razloga potpuno izoliran sistem je cisto teoretski konstrukt).

Nadalje, uprkos pretezno cisto lokalnoj interakciji, sistemi ispoljavaju poprilicno kompleksna svojstva kao cjeline. Tako da iz cisto lokalnih svojstava nastaju globalna svojstva u kojima ucestvuju svi dijelovi. Ovo mozemo najbolje shvatiti kroz primjer ljudskog ponasanja kao vrste, gdje ljudi vrse razmjenu informacija i interakciju jedni medju drugima lokalno, medjutim i ljudsko drustvo u cjelini mozemo okarakterizirati nekim globalnim osobinama viseg nivoa. Ili npr. sistemi idealizovanih gasova sastavljeni od cestica koje vrse medjusobno mali prostorni uticaj, ali alatima statisticke mehanike i sl. mozemo okarakterizirati osobine cijelog volumena gasa [5].

Enormna kompleksnost nedvojbeno je dio sistema koji se uzimaju u naucna razmatranja i vecine naseg okruzenja. Ovo ide toliko daleko da su neke kompleksnosti i dalje ostale nerazjasnjene i uz koristenje najmodernijih tehnika i metoda naucnih disciplina. Svakodnevno se susrecu kompleksne strukture koje je danas tesko precizno modelirati, npr. propagacija toplote, modeli kretanja fluida ili pak nesto sto se na prvi pogled cini kao jednostavna stvar poput formiranje oblika snjeznih pahulja ili oblici formirani na morskim skoljkama [2]. Jedan od osnovnih ciljeva naucnih istrazivanja upravo “pripitomljavanje” ovih kompleksnosti i pokusaja objasnjenja istih kroz skup jednostavnijih principa. Postavlja se pitanje da li kompleksnost obavezno zahtijeva i kompleksnost na nizim nivoima i strukturama sistema, ili je nekako moguce, iako kontraituitivno, da poprilicno jednostavna pravila mogu da proizvedu ogromnu slozenost koja se moze uociti.

Postavlja se pitanje kako spojiti ove naizgled kontradiktorne osobine koje uvidjamo. Kako to da s jednog strana spektra postoji cisto lokalna interakcija, ali nakon sto pogledamo sistem sa viseg nivoa apstrakcije uvidjamo da se i sam sistem ponasa kao cjelina koja vrsi nesto globalniju interakciju sa sistemima istog nivoa? Takodjer, kako je moguce da ogromnu kompleksnost koju posmatramo pokusavamo svesti na jednostavna pravila koja ce je opisati i iz kojih ova kompleksnost moze da se izrodi?

Necemo ici toliko daleko da kazemo, kao sto Wolfram tvrdi u svojoj knjizi, da celijski automati mogu da posluze da modeliraju cijeli univerzum [2], medjutim ocigledno je da celijski automati i njihovo razumijevanje moze dovesti bar na pravi put razjasnjenja nekih od navedenih pitanja. Celijski automati po svojoj definiciji se baziraju na cisto lokalnoj interakciji, medjutim kada se pusti nekoliko koraka simulacije odredjenih pravila cak i jednodimenzionalnih instanci, uocavaju se globalne osobine. Tako da bi iz tog razumijevanja mogli doci blize razumijevanju nastajanja globalnog ponasanja iz lokalno ogranicenog. S druge strane, pravila celijskih automata poprilicno su jednostavna, pa su cak i anticki narodi mogli doci do istih [2]. Medjutim iako su pravila jednostavna, nivo kompleksnosti koji se javlja uopste nije niskog nivoa. Tako da i s te strane, celijski automati i njihovo razumijevanje moze da nas pribilizi odgovoru poveznice izmedju nastanka kompleksnosti iz malobrojnog skupa jednostavnih pravila.

1.4 Primjeri

Da bi se formirala kompletnija opsta slika celijskih automata kao modela kompleksnosti, prikladno bi bilo dati nekoliko primjera kompleksnosti i vrsta struktura generisanih celijskim automatima. Ovo moze dati jasniju sliku i nekome ko nije toliko zainteresovan u mateimaticke detalje samog modela na nacin da moze prikazati raznovrstnost struktura koje celijski automati mogu proizvesti.

Rule 30 ~ sea shells
rule 110
game of life + game of life life forms
snowflake formation

2. Formalni matematicki tretman

Nakon neformalnog uvoda, potrebno je i rigorozno matematicki definisati sta se misli kada se koristi pojam celijskih automata. Zbog raznovrstnosti modela koji se mogu smatrati celijskim automatima, u literaturi ne postoji opsteprihvacena generalna definicija, vec autori strogo matematicki definisu samo konkretan model kojim se bave, npr. jednodimenzinalni binarni celijski automati u slucaju Stephena Wolframa (vidjeti npr. [2], [3], [4]).

Na pocetku bice data generalna definicija koja pokusava sto opstije da pokrije sve diskretne modele koji se mogu smatrati celijskim automatima, mada su moguce neke iznimke zbog sirine diskretnih modela i mogucnosti prosirenja osnovnog modela po raznim parametrima.

Nakon toga ce se redom proci kroz specificne instance poput jednodimenzionalnih i dvodimenzionalnih binarnih automata koje su najvise izucavane tokom godina. Obratice se paznja i na njihovu formalnu definiciju, tretman i matematicke osobine.

Takodjer, definicije i teoreme – osobine automata bice popracene primjerima i grafickim simulacijama iz implementacijskog dijela rada koji ce sam po sebi biti kasnije pokriven.

2.0 Preliminarne matematicke definicije

U ovoj sekciji potrebno je definisati nekoliko preliminarnih matematickih pojmova koji ce kasnije biti iskoristeni u izucavanju osobina celijskih automata. Citatelj se trenutno ne treba zamarati ovim dijelom, vec se po potrebi vratiti na njega ukoliko bude koristen neki od pojmova ovdje definisan.

U informacionoj teoriji, potrebno je na neki nacin kvantificirati kolicinu informacija u nekom sistemu, te za to koristimo koncept entropije.

Definicija 2.0.1 Za sistem sa n mogucih dogadjaja sa vjerovatnocama desavanaj i-tog dogadjaja p_i, entropija se definise kao $= -\sum_{i}^{n} p_i log(\frac{1}{p_i})$.

Entropija ce nam biti korisna u razmatranjima celijskih automata i njihovih statistickih osobina sa aspekta teorija informacija i kodiranja.

Kako su celijski automati zapravo specijalna klasa automata iz teorije izracunljivosti, to je veoma korisno gledati njihove osobine i kroz ovu naucnu oblast, pa ce nadalje biti navedene neke od osnovnih definicija potrebne za daljnja razmatranja.

Definicija 2.0.2 Turingova masina definise se kao uredjena 7-orka $M = (Q, \Gamma, b, \Sigma, \delta, q_0, F)$

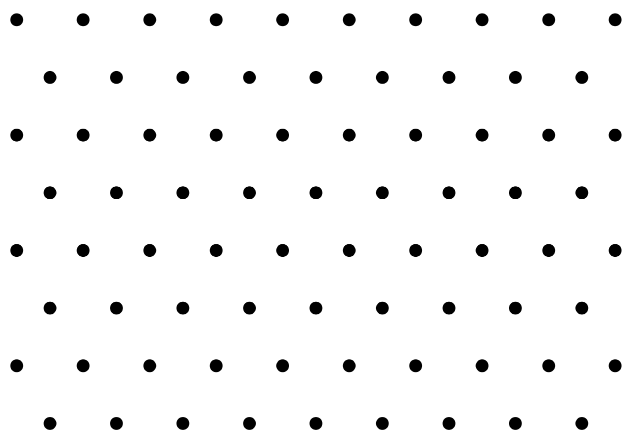
2.1 Generalna definicija celijskih automata

Pokusajmo prvo kroz nekoliko zapazanja iz konkretnih primjera uociti koje su to generalne osobine i koncepti koje bi definicija morala da pokrije, a nakon toga pokusacemo to da uklopimo u neki matematicki model.

Prvo idu neke preliminarne matematicke definicije kroz primjere koje su neophodne za razumijevanje krajnje definicije celijskih automata u generalnom slucaju. Pokusacemo kroz te definicije postepno proci kroz osobine apstraktnih pojmova za koje vezemo instance celijskih automata.

Sva desavanja modela moraju da se odvijaju na nekom apstraktnom prostoru, koji treba da zadovoljava odredjena svojstva. Dakle prvi koncept koji definicija treba da pokrije je prostor odvijanja modela. Prostor odvijanja modela celijskih automata je u pravilu diskretan, sto mozemo da uocimo iz nekoliko dosad razmotrenih primjera s obzirom da se uvijek radilo u pravougaonoj matrici kvadratnih mjesta ili jednodimenzionalnom ekvivalentu istih. Takodjer prostor mora da bude definisan na takav nacin da se na njemu mogu definisati i ostali bitni koncepti poput susjedstva.

Prvo onda definisimo prostor. Matematicki objekat koji moze da uhvati sve navede osobine je latica ili resetka (eng. lattice). Intuitivno resetka je skup tacaka sa ravnomjernim i homogenim rasporedom kao sto je prikazano npr. na slici 9. Naravno tu je i dosad poznati primjer na slici 1 u prethodnom poglavlju.



Slika 9.

Da bismo formalno predstavili sta je to ravnomjerno rasporedjenje, resetku mozemo definisati kao skup tacaka kod kojih je udaljenost izmedju bilo koje dvije od njih cjelobrojna linearna kombinacija unaprijed odredjenih vektora u prostoru gdje su tacke definisane (pretezno se radi sa skupom/prostorom R^n). Kljucan detalj je cjelobrojnost jer time zadrzavamo osobinu diskretnosti samog skupa, sto je kljucno za celijske automate kao diskretne modele kompjutacije.

Definicija 2.1.1 Latica ili resetka se definise kao $\Lambda := \left\{ \sum_i \mathrm{a}_i \; v_i \; : \; a_i \in \mathbb{Z} \right\}$ gdje je $v_i \in \{v_1, v_2, v_3, ...\}$ baza vektorskog prostora V nad skupom skupa gdje je resetka definisana.

Ovo samo znaci da izaberemo fiksan skup vektora udaljenosti od tacke i na tacku nadodjemo cjelobrojne umnoske vektora da bismo tako odrzali regularnost koja je zahtijevana za definiciju celijskih automata.

Celijski automati su kako prostorno tako i vremenski diskretni sistemi. U primjeru jednodimenzionalnih automata, vrijeme je bilo samo prirodan broj koji je govorio o kojoj se iteraciji automata radi, pa tako moramo moci definisati i diskretan koncept vremena u kojem automati evoluiraju kao dodatnu dimenziju pored prostorne koju smo vec obradili.

Upravo iz diskretnosti dimenzije vremena za sisteme celijskih automata, javlja se i najjednostavniji nacin njegove definicije. Dovoljno je samo da se vrijeme moze staviti u jedan-na-jedan (bijektivno) mapiranje sa skupom prirodnih brojeva, sto se i uklapa u trazenu diskretnost.

Definicija 2.1.2 Neka je dat skup T takav da neka postoji funkcija $b : T \to \mathbb{N}$ koja je bijektivna. Tada skup T nazivamo diskretnim vremenskim skupom.

Da bi se izbjegle zabune, zbog postojanja bijektivnosti moguce je u daljnjim razmatranjima umjesto apstraktnog skupa T koristiti skup prirodnih brojeva.

Nakon sto smo definisali prostorne i vremenske dimenzije u kojima ce celijski automati biti smjesteni, jos jedan osnovni koncept je stanje svakog automata koji se nalazi u prostor-vremenu.

Za jednodimenzionalni i dvodimenzionalni slucaj imali smo samo dva moguca stanja – 1 ili 0, crno ili bijelo u grafickoj reprezentaciji. Na osnovu ovoga, svaka celija mora biti u jednom od konacnog broja stanja, sto je i jedino ogranicenje na ovaj skup, da mu je kardinalnost konacna, tj. odgovara nekom prirodnom broju. Kasnije cemo vidjeti da su moguce i neke generalizacije samog skupa stanja gdje npr. imamo celijske automate cija stanja odgovaraju realnim brojevima u intervalu [0, 1] sto ocigledno nije konacan skup stanja.

Definicija 2.1.3 Skup Q nazivamo skupom stanja ukoliko $\mid Q \mid= n$, gdje $n \in \mathbb{N}$.

Potrebno je jos razmotriti sta bi bilo povoljno da se koristi u definiciji susjedstva te prelaza (evolucije) svake celije unutar automata. Ovi koncepti nista prostorne i vremenske transformacije konretne celije. Npr. susedstvo je samo mapiranje/dodjeljivanje nekoliko celija jednoj konretnoj celiji u resetki. Evolucija je samo dodjeljivanje iduceg stanja celiji na osnovu prije dodijeljenog susjedstva i prijasnjeg stanja. Tako da matematicke funkcije ili mapiranja savrseno odgovaraju opisu objekta koji bi mogao da se koristi, sto ce i biti slucaj.

Sada je potrebno dati definiciju celijskih automata cija se evolucija odvija na diskretnom prostoru i u diskretnom vremenu sa konacnim brojem stanja uz postojanje susjedstva svake celije i tranzicijskog pravila za istu. Vidimo da smo pokrili sve koncepte koje smo ranije vidjeli u specificnim instancama, tako da je moguce dati generalnu definiciju.

Definicija 2.1.4 Celijski automat mozemo definisati kao uredjenu sestorku $C := (\Lambda, Q, T, \sigma, \eta, \phi)$, pri cemu je Λ resetka nad nekim skupom, Q skup stanja, T diskretni vremenski skup, dok su σ, η, ϕ funkcije $\sigma : \Lambda \times T \to Q$, $\eta : \Lambda \to \Lambda^c$ i $\phi : Q^{c+1} \to Q$ $(c \in \mathbb{N} \wedge c \geqslant 1)$ koje se nazivaju funkcije konfiguracije, susjedstva i prelaza respektivno. Prirodni broj c se naziva velicina ili kardinalnost susjedstva. Funkcija σ je rekurzivno definisana pomocu funkcije η kao
$\sigma(\lambda, n) = \phi(\sigma(\eta(\lambda), n-1), \sigma(\lambda, n-1))$ gdje $\lambda \in \Lambda, n \in T$, ali mozemo uz prije navedenu diskretnost skupa T smatrati da $n \in \mathbb{N}$.

Potrebno je ukratko pojasniti detaljniju intuiciju iza funkcija σ, η, ϕ u Definiciji 3.4.

Funkcija σ predstavlja funkciju trenutne konfiguracije, sto znaci da pridruzuje stanje iz skupa stanja svakoj celiji u datoj vremenskoj instanci.

Funkcija η predstavlja funkciju susjedstva, te ona jednostavno pridruzuje svakoj celiji onoliko celija koliko je definisano velicinom susjedstva.

Na kraju, funkcija ϕ predstavlja funkciju prelaza celija celijskog automata, te ona definise u koje sljedece stanje prelazi celija celijskog automata uzimajuci u obzir stanja njenog susjdestva, te njeno trenutno stanje. Definisana je rekurzivno, jer svaka iteracija zavisi samo od prethodne, a veoma je moguce da je pojedina ili cak vecinu pravila prelaza nemoguce predstaviti elementarnim funkcijama na koje smo navilkli. Ovo se vec dalo zakljuciti iz kompleksnosti uzoraka koje ova vrsta sistema generise.

Moze se primijetiti da celijski automati posjeduju nekoliko osobina koje su zadovoljene za svaku instancu istih. To su homogenost, paralelizam i lokanost. Ovo je s obzirom da sve celije evoluiraju paralelno po istim proavilima koja su odredjena samo lokalnim susjedstvom i stanjem ostalih celija u njemu [1].

Ovim je zavrseno razmatranje generalne definicije celijskih automata, te ce nadalje biti izucavane najinteresantnije i najistrazenije instance istih koje cemo pojedinacno pokusati uklopiti u ovaj model, te detaljno razmotriti specificne matematicke osobine svake od tih instanci.

2.2 Binarni jednodimenzionalni (elementarni) celijski automati

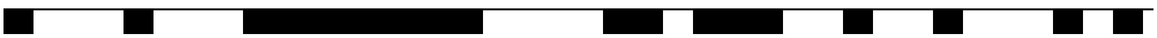
Najosnovniji tip sistema celijskih automata predstavljaju binarni jednodimenzionalni celijsi automati. Ovo znaci da svaka individualna celija posjeduje dva moguca stanja – binarni, te da svaka celija ima tacno dva susjeda, te da su celije medjusobno poredane u jednodimenzionalnoj resetki – jednodimenzionalni.

Medjutim, uprkos njihovoj jednostavnosti, upravo ova vrsta predstavlja najizucavaniji tip celijski automata. Ovo mozda mozemo pripisati cinjenici da se cjelokupna nauka vezana za ove vrste sistema i bazira na sto jednostavnijim gradivnim elementima koji produkuju kompleksne strukture, pa su tako najjednostavniji od njih vjerovatno i najzanimljivi za izuciti. Ovo nije slucaj za vecinu drugih oblasti sa drugim skroz drugim pogledom na kompleksnost.

Drugi naziv koji se koristi u literaturi za ovu vrstu celijskih automata je elementarni celijski automati, tako da ce ova dva termina u daljem tekstu biti koristena naizmjenicno.

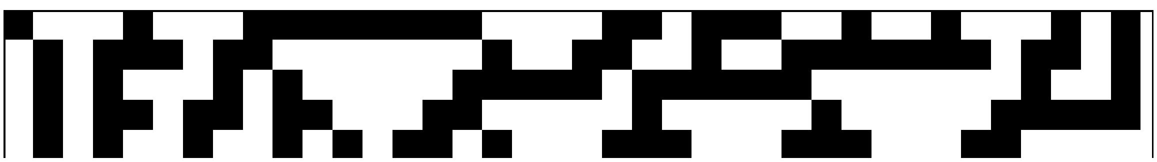
2.2.1 Definicija i nacin enumeracije pravila

Pokusajmo sada dati definiciju i prikazati kakvu vrstu sistema predstavljaju binarni jednodimenzionalni celijski automati. Najjednostavnije je shvatiti ove sisteme kao niz celija poredanih jedna do druge u liniji – zbog cega se i zovu jednodimenzionalni, prilikom cega svaka celija moze biti u jednom od dva stanja – on ili off, sto graficki predstvaljamo crno i bijelom bojom respektivno. Generalno, graficki prikaz je cesto koristen alat u izucavanju celijskih automata jer moze da da neke indikacije o osobinama izucavanih sistema.



Slika 10. jednodimenzionalni (generisano softverom)

Na slici 10 dat je prikaz jednog ovakvog niza celija u liniji gdje svaka celija ima slucajno dodijeljenu vrijednost. Ovakav skup celija sa odgovarajucim stanjima naziva se konfiguracija. Svaka celija evoluira, tj. mijenja svoje stanje u iducem koraku prema odredjenom pravilu koje zavisi od stanja te konkretne celije, kao i stanja nekih okolnih celija. Izmjena stanja svih celija vrsi se paralelno, tako da cjelokupan niz – sistem evoluira paralelno. Kasnije cemo vidjeti generalan nacin klasifikacije ovih pravila evolucije i njihovog definisanja. Upravo je i ovaj paralelizam cesto koristen argument u zagovaranju prakticnih primjena celijskih automata u sistemima paralelnih procesiranja (pogledati npr. [5]).



Slika 11. 5 koraka evolucije (pravilo 30) (generisano softverom)

Na slici 11 nadalje prikazo je 5 koraka evolucije sistema prema unaprije izabranom pravilu, gdje svaki red predstavlja sljedecu konfiguraciju sistema. Prvi red nazivamo pocetna konfiguracija, te svaki sljedeci red nastaje opisanim postupkom paralelne evolucije celija zasebno. Evolucija se moze nastaviti u nedogled, dok je ovdje postupak izvrsen tek pet puta. Primijecujemo da je evolucija sistema izvrsena u diskretnim vremenskih koracima, sto je jos jedna od navedenih kljucnih osobina celijskih automata.

Sada je potrebno doci do formalne definicije jednodimenzionalnih binarnih celijskih automata koja se javlja kao posebna instanca prije obradjene generalne definicije. Takodjer, potrebno je i naci nacin da se struktuirano navedu pravila izbora nacina evolucije ovih sistema.

Definicija 2.2.1 Jednodimenzionalni binarni celijski automat mozemo definisati kao uredjenu trojku (C, σ, ϕ), gdje C predstavlja skup celija koje su prebrojive, tj. moguce je izvrsiti enumeraciju istih. Radi jednostavnosti, moguce je umjesto C koristiti skup $\mathbb{Z}$. Funkcija σ predstavlja mapiranje $\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ i naziva se pravilo evolucije. Funkcija ϕ predstavlja mapiranje $\phi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, gdje se n naziva velicina susjetstva. Mapiranje σ definisano je rekurzivno kao: $\sigma(t{+}1, i) = \phi(\sigma(S_{j \in J(i)} \sigma(t,j)))$, gdje $J(i)$ predstavlja susjedstvo konkretne celije izabrano prema nekom pravilu, te $\phi(0,i) \in \{0,1\}$ nazivamo pocetnom konfiguracijom sistema.

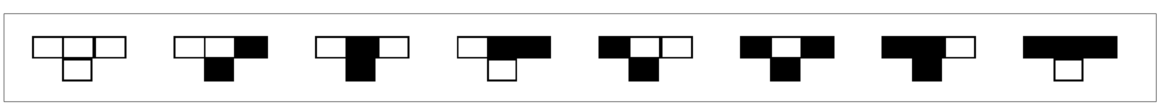
Ovu potpuno formalnu definiciju intuitivno mozemo shvatiti na nacin da se za svaku posebnu celiju, koja je oznacena cijelim brojem koji je jedinstveno identifikuje s obzirom na raspored celija, prema odredjenom pravilu prvo bira susjdestvo. Susjedstvo predstavlja skup celija od cijih stanja zavisi i iduce stanje izabrane celije. Susjedstvo se bira na identican nacin za svaku celiju. Nakon toga koristeci pravilo ϕ na osnovu stanja celije i stanja njenih susjeda dodjeljujemo joj stanje u iducoj diskretnoj vremenskoj instanci. Stanja celija kako je vec navedeno pripadaju skupu od dva moguca stanje, $\{0,\ 1\}$.

Sada je potrebno razmotriti na koji nacin birati susjedstva, te na osnovu toga definisati moguca pravila koja mogu biti primjenjena na evoluciju sistema.

U pravilu, moguce je koristit bilo koje pravilo za izbor susjedstva. Medjutim, u praksi izucavanja pokazalo se da je najjednostavnije pravilo koje uzima samo simetricno susjedstvo od 2n najblizih celija sasvim dovoljno da se pokazu i najkompleksnije osobine.

Prodiskutujmo sada broj mogucih pravila za svako izabrano susjedstvo. Cjelokupno susjedstvo ce imati $2\text{n} + 1$ celiju ukljucujuci i celiju u razmatranju. Za svaku od kombinacija stanja, tacnije 2^{2n+1} mogucih s obzirom na 2 moguca stanja, potrebno je definisati sljedece stanje u koje se prelazi ukoliko se naidje na tu situaciju. Svako od iducih stanja takodjer pripada skupu $\{0,\ 1\}$ tako da je ukupan broj pravila $2^{2^{2n+1}}$ za ovako izabrano susjedstvo.

Ispostavilo se da takodjer i ovdje najjednostavnija pravila daju najzanimljivije rezultate, sto smo vidjeli u vec dosta primjera u ovoj oblasti, te za najjednostavnije susjedstvo sa $\text{n} = 1$ daje poprilicno zanimljivu kompleksnost i moguca razmatranja. Najveci broj radova iz oblasti takodjer je pisan upravo za ovaj slucaj (pogledati npr. vecinu radova Stephena Wolframa ukljucujuci [2], [3], [4] i mnoge druge).



Slika 12. rule picker (iz simulatora)

Sada, prema gore dobijenoj formuli imamo da je ukupan broj mogucih pravila $2^{2^3} = 2^8 = 256$. Ovo moze graficki biti prikazano kao sto je dato na slici 12 gdje imamo sljedece stanje za svaku kombinaciju susjedstva.

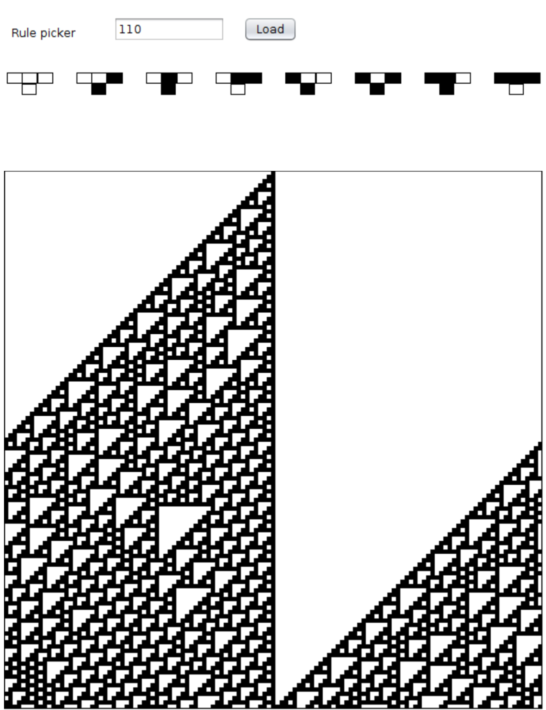
Primijetimo i da prosirenjem susjedstva na $\mathrm{n} = 2$ broj pravila raste na $2^{2^5} = 2^{32} = 4294967296$, tako da nesto kompleksniji sistemi imaju eksponencijalno veci broj pravila. I ovo je takodjer jedan od razloga izucavanja najjednostavnijeg slucaja zbog mogucnosti pregleda svih pravila, sto bi za slucaj $\mathrm{n} = 2$ bilo teze.

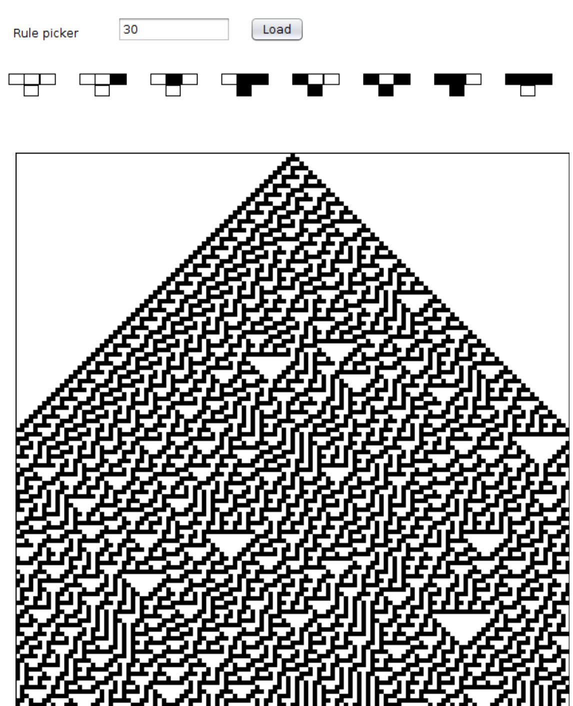
U daljem tekstu sva razmatranja odnosice se pretezno na slucaj susjedstva $\mathrm{n} = 1$ binarnih jednodimenzionalnih celijskih automata.

Nacin na koji definisemo koje pravilo se koristi pri evoluciji ovih sistema, a predlozio ga je Stephen Wolfram na pocetku izucavanja ove oblasti, temelji se na enumeraciji pravila na osnovu bita u koje prelaze leksikografski poredane kombinacije susdjedstva. To znaci da su susjedstva poredana kao na slici 12, dok redoslijed on/off stanja u koji ona prelaze predstavlja binarno zakodiran broj pravila. Tako na primjer pravilo na slici 12 je predstavljeno brojem $01101110_2 = 110_{10}$, gdje se nule i jedinice redom uzimaju kao off ili on stanja respektivno.

Ostaje jos i problem rubnih celija. Iako je u definiciji celijskog automata potencijalno beskonacna resetka, u realnim primjenama koristi se konacan broj celija u automatu, pa za jednodimenzionalni binarni slucaj koji ispitujemo postoje celije koje se nalaze na krajevima niza i koje nemaju lijeve i desne susjede. Tako da je potrebno na neki nacin definisati susjedstvo i za njih.

Za ovaj problem koristi se nekoliko mogucih rjesenja u zavisnosti od primjene i svrhe u koju se koristi celijski automat. Moguce je zamisliti da se kraj i pocetak niza spajaju u torusnu topologiju, tako da je niz neprekidan i prva i posljednja celija su susjedne. Ovo je najcesce koristen model u teoretskim izucavanjima. Takodjer moguce su i alternative, kao npr. imati fiksne vrijednosti rubnih celija sto je korisno u odredjenim simulacijama protoka toplote i slicnih fizikalnih pojava. Pokazuje se da izbor ovih rubnih uslova nema veci efekat na kvantitativnu i statisticku analizu (pogledati [6]).



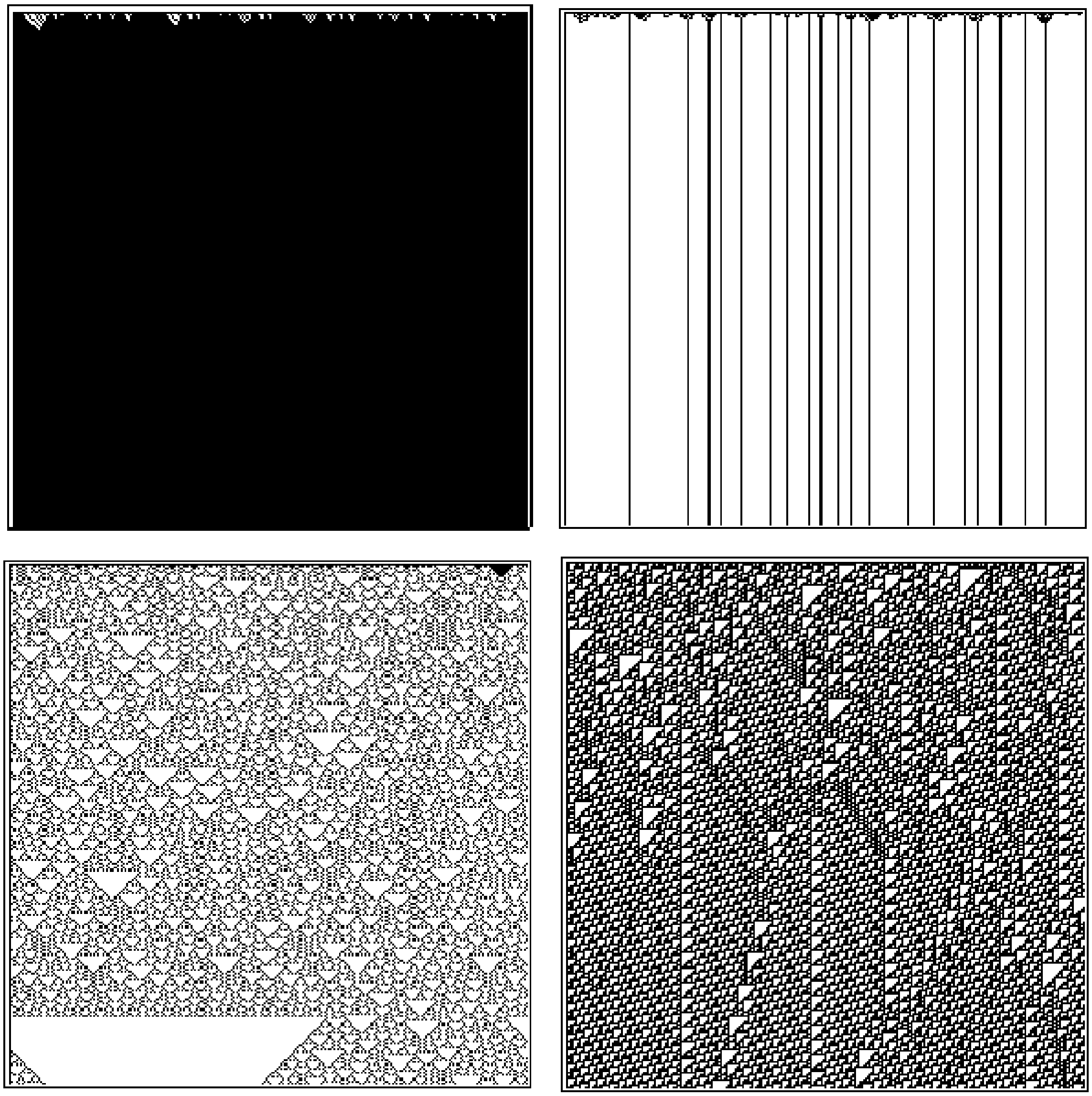


Slika 13. pravila 110 i 30 u evoluciji (simulator)

Na slici 13 prikazana je graficka evolucija od nekoliko stotina koraka pravila 110 i 30 sa torusnom topologijom niza respektivno da bismo poceli uocavati kompleknost koja proizilazi iz nekih od najjednostavniji sistema izracunavanja koji mogu da se smisle. Kasnije cemo vidjeti da je moguce i formalnim putem pokazati da su ovi sistemi poprilicno mocu sa strane mogucnosti izracunavanja generalnih funkcija – tj. simulacije ili ekvivalentnosti sa univerzalnom Turingovom masinom.

2.2.2 Pocetna statisticka zapazanja i klasifikacija ponasanja pravila celijskih automata

Elementarni celijski automati predstavljaju poprilicno jednostavne sisteme sa ne tako mnogobrojnim skupom pravila za evoluciju istih. Prije smo vidjeli da taj broj iznosi svega 256 sto omogucava cak i brute force pretrazivanje skupa pravila i ispitivanje osobina svakog pravila ponaosob. Cak i neka od prvih izucavanja bazirala su se upravo na ovom principu (pogledati [2]). Upravo ova jednostavnost koja ne umanjuje kompleksnost struktura koje se formiraju omogucava detaljno teoretsko izucavanje elementarnih celijskih automata za razliku od nekih drugih sistema sa podjednako kompleksnim formacijama.

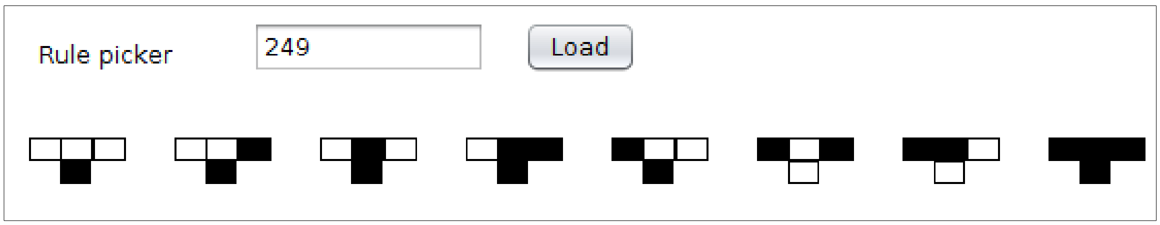


slika 14. evolucija pravila 249, 164, 146, 110 u klasama I, II, III i IV (simulator)

Ukoliko se izvrse simulacije sa slucajnim pocetnim uslovima svih mogucih pravila elementarnih celijskih automata (pogledati [2] za listu grafickih navedenih grafickih simulacija), moguce je uociti odredjene uzorke u ponasanju istih. Tako naizgled cisto empirijskim ispitivanjem moguce je uociti grube osobine nekih od pravila, sto se kasnije moze pokusati pretociti u formalnu klasifikaciju.

Klasifikacija sama po sebi je bitna jer predstavlja prvi korak u izucavanju neke vrste sistema. Ukoliko sve instance sistema posmatramo kao odvojene bez nekog nacina na koji bismo svrstali svaku od njih u odredjenu klasu ponasanja, zapravo se radi o ad-hoc izucavanjima specijalnih slucajeva. Sama klasifikacija predstavlja visi nivo za posmatranje sistema koji se nalaze u njoj, te kroz klasifikaciju mozemo da uocimo i neke kljucne osobine viseg reda, sto nas pomjera od pocetne tacke gdje smo samo definisali sistem i nacin njegovog funkcionisanja/evolucije.

Ukoliko pogledamo sliku 14, prikazana je vremenska evolucija cetiri karakteristicna pravila koja ujedno predstavljaju i osnovne uocljive klase ponasanja elementarnih automata koje cemo sada navesti i nesto kasnije i obraditi [1]. Formalna obrada tematike celijskih automata predstavlja nesto tezi zadatak s obzirom da se radi o nelinearnim sistemima za koje se vecinom ne moze naci eksplicitan matematicki model predvidjanja buducih stanja u zavisnosti od sadasnjeg. S obzirom na ovo u dosta slucajeva moguce je izvrsiti jedino statisticka i slicna globalna ispitivanja bez dolaska na konkretan model predvidjanja (pogledati npr. [6], [9] kao i vecinu radova iz oblasti celijskih automata i dinamike kompleksnih nelinearnih sistema).



Slika 15. graficki prikaz prelaza pravila 249 (simulator)

Prva (empirijski!) uocljiva klasa – Klasa I automata predstavljena je pravilima koja konvergiraju u homogene strukture bez obzira na pocetno stanje sistema. Takodjer, sve informacije kao i slucajnost (eng. randomness) u pocetnim uslovima gube se u narednim koracima. Tako da ova klasa automata ne predstavlja nikakvu korist sa strane kompjutacije s obzirom da bez obzira na ulaz koji bismo zakodirali kao pocetno stanje automata, uvijek cemo dobiti isti izlaz koji ne sadrzi nikakve korisne informacije. Primjer ovakvog pravila je pravilo 249 koje bez obzira na strukturu pocetnih uslova konvergira u niz celija u off stanju (crna boja na grafickom prikazu). Ovo mozemo pripisati cinjenici da vecina kombinacija susjedstva ovog pravila vrsi prelaz u off stanje, sto je evidentno sa slike 15.

Iducu klasu – Klasu II predstavljaju pravila koja ulaze u cikluse ponavljajucih struktura. Na slici 14 prikazano je medju ostalima i pravilo sa enumeracijom 164 koje konvergira u ponavljajuce strukture bez obzira na pocetno stanje. Razlika ove klase pravila sa Klasom I je to sto strukture nisu uvijek iste i nisu obavezno homogene, medjutim postoje ciklusi ponavljanja istih. Treba primijetiti da bilo koja konacna konfiguracija automata takodjer mora da ispolji ciklicno ponasanje s obzirom na ukupan broj mogucih stanja 2^N ukoliko N predstavlja broj celija u pocetnoj konfiguraciji. Iako ce se ciklus u najgorem mogucem slucaju javljati nakon upravo 2^N ponavljanja nakon sto su prodjena sva moguca stanja, sto bi znacilo da i za poprilicno male konfiguracije imamo ogromne cikluse, empirijski rezultati pokazuju da je taj broj manji. Pretezno je ogranicen je sa $2^{N/2}$ dok je u dosta slucajeva cak potrebno ne vise od N iteracija da bi se dovrsio ciklus [6].

Unutar Klase III nalazimo pravila poput 146 i 30 koja ispoljavaju naizgled nepredvidivo slucajno ponasanje sa ponavljajucim uzorcima pretezno ispoljenim u vidu trougaonih struktura. Ova klasa je poprilicno osjetljiva na pocetne uslove i predstvlja dobar alat za izucavanje slucajnosti (eng. Randomness) [1]. Kasnije cemo vidjeti nesto rigoroznije razmatranje kao i implikacije za prakticnu primjenu ovog fenomena (pogledati npr. [7]).

Klasa IV predstvlja najkompleksniju klasu ponasanja celijskih autoamta, ali isto tako i najslabije definisanu. Neformalno, u ovoj klasi automata gotovo svi pocetni uslovi proizvode kompleksne strukture koje vrse kompleksnu medjusobnu interakcije. Postulirano je da ova klasa omogucava skladistenje i prenos informacija, sto su osnove za univerzalnu kompjutaciju. Pravilo 110 iz ove klase cak je i pokazano kao univerzalno kompjutaciono, tj. Turing ekvivalentno (za vise informacija i dokaz pogledati [8]). I ovo ce biti kasnije nesto detaljnije razmotreno.

Sva gore zapazanja su empirijska i neformalna, ali lahko uocljiva smo pogledom na rezultate simulacije. Bilo je nekoliko pokusaja formalne klasifikacije elementarnih automata (i ostalih), od kojih nijedan nije bio potpuno uspjesan u smislu da daje predvidjanja ponasanja pravila u zavisnosti od neke njegove osobine, medjutim svi oni su dali neke rigorozne rezultate koji mogu biti od koristi. Takodjer kroz proces pokusaja pronalaska formalnog okvira za klasifikaciju doslo se i do mnogo zakljucaka o ovoj vrsti sistema koji prije nisu bili poznati.

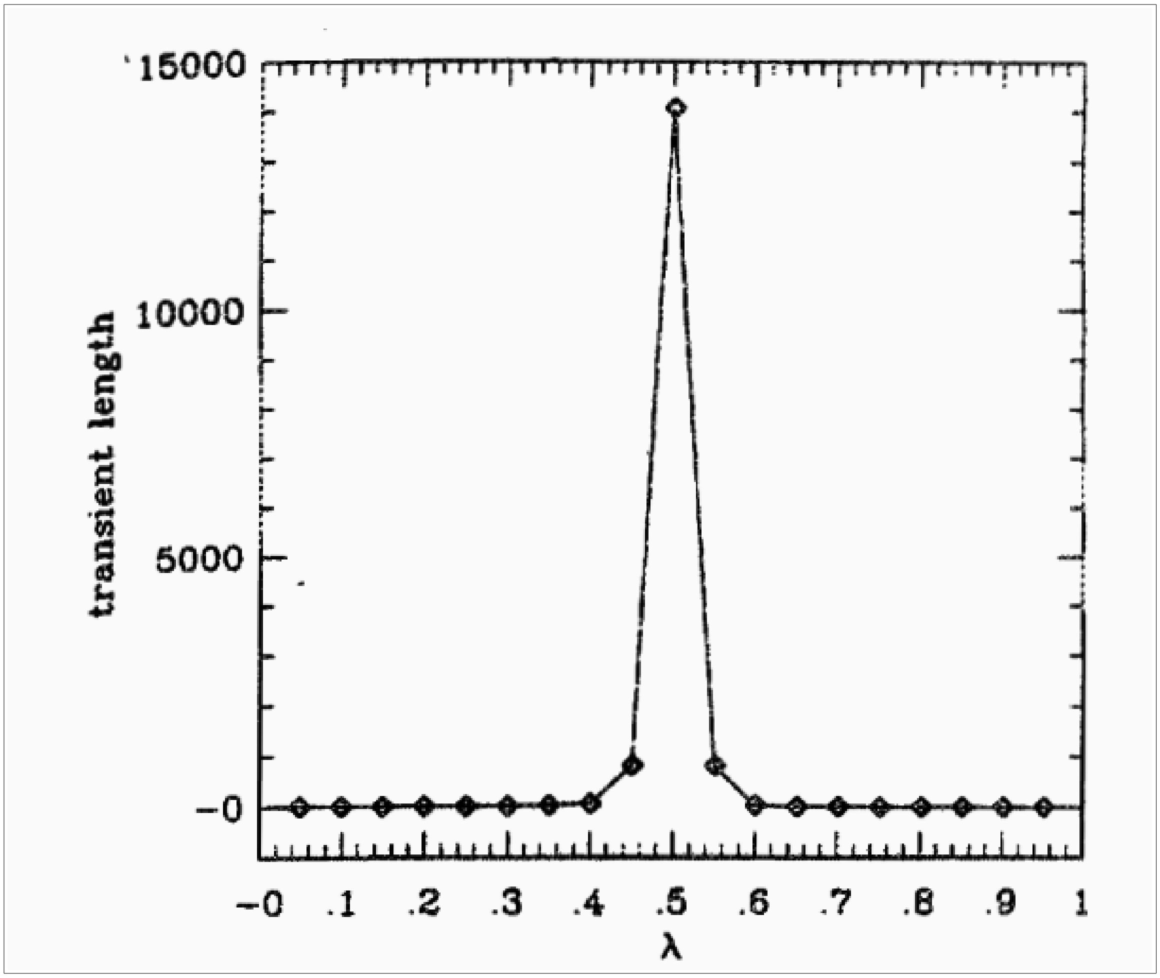
Obradicemo jedan takav pokusaj s obzirom da je dao poprilicno dobre rezultate, te otvorio neka nova pitanja i hipoteze ne samo u oblasti izucavanja celijskih automata, vec dinamike kompleksnih sistema generalno. Tako cemo i ovdje navesti neke od tih rezultata kroz pokusaj formalne klasifikacije. Klasifikator koji navodimo naziva se Langtonov parametar [9]. Prema rijecima Langtona koji je i kreator ovog nacina klasifikacije, *"ovaj parametar je agregatna statistika koje je povezana sa, ali ne i sasvim pouzdana u predvidjanju kompleksnosti ponasanja"* [1].

Definicija 2.2.2 Za jednodimenzionalni celijski automat sa k stanja i veličinom susjedstva n, Langtonov parametar λ definise se kao $\lambda = \frac{k^n - \#_q}{k^n}$, gdje je $\#_q$ broj celija u funkciji prelaza koje su u unaprijed izabranom specijalnom (eng. quiescent) stanju.

Intuitivno, definicija 3.6 samo definise Langtonov parametar kao udio stanja koja nisu off (koje je izabrano kao specijalno za nas slucaj elementarnih automata) u funkciji prelaza za elementarne automate. Tako na primjer za pravilo 110 cija je funkcija prelaza data na slici 12 Langtonov parametar iznosi $\lambda = \frac{2^3-3}{2^3} = \frac{8-3}{8} = \frac{5}{8} = 0.625$ s obzirom da su 3 stanja off u prelazu.

Zapazanja koja cemo navesti Langton u svom radu struktuirano obradjuje za automate sa $\mathrm{n} = 4$ i $\mathrm{k} = 5$ [9] koji predstavljaju znatno kompleksnije sisteme u odnosu na obradjivane elementarne celijske automate, medjutim dobijeni rezultati govore o generalnim osobinama jednostavnih sistema koji proizvode kompleksne uzorke, te su itekako primjenljivi na obradjivanu tematiku.

Ukoliko eksprimentalno diskretno u razmacima od po 0.01 variramo parametar λ te za svaku tu vrijednost konstruisemo niz slucajnih pravila koja zadovoljavaju tu vrijednost parametra, te pustimo simulaciju za iste nad slucajno generisanim pocetnim uslovima, dobijaju se poprilicno zanimljivi rezultati koji govore da postoji odredjena statisticka struktura u ponasanju ovih sistema u zavisnosti od parametra.

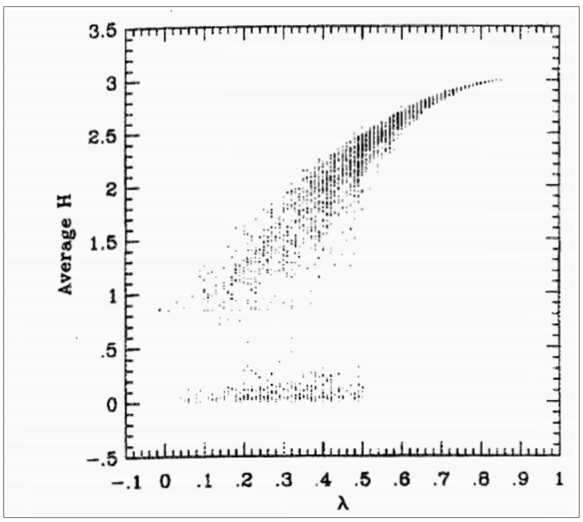


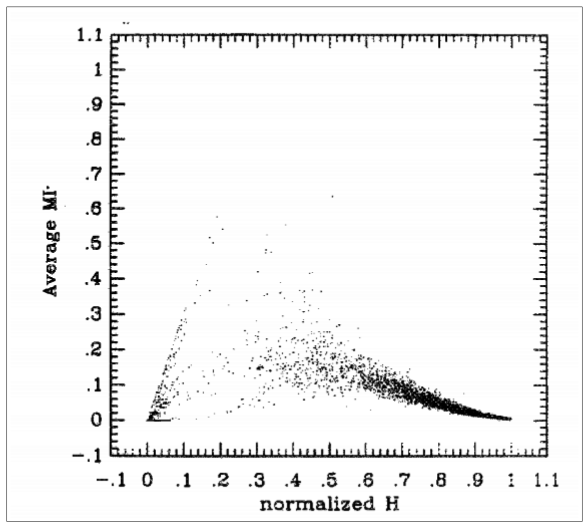
Slika 16. prosjecno vrijeme stabilizacije (preuzeto iz [9])

Langton postulira da unutar celijskih automata postoje klase ponasanja analogne agregatnim stanjima fizicke materije, gdje postoje i prelazne tacke agregatnih stanja koje su od posebne vaznosti. Ovo zapazenje bazira na cinjenici da je prelaz stanja u dinamickim sistemima (pa tako i agregatnim stanjima materije) ima direktno korelaciju sa vremenom stabilizacije sistema, sto predstavlja vrijeme koje je potrebno sistemu da udje u svoj “prirodni rezim rada”. Naime, sto je sistem blizi prelazu stanja, to je i duze vrijeme njegove stabilizacije.

Ako izuzmemo statistiku iz prethodno opisanog eksprimenta, te ucrtamo na grafik prosjecno vrijeme stabilizacije, dobijamo grafik kao na slici 16. Vidimo da oko kriticne vrijednosti $\lambda = 0.5$ koju cemo nazvati λ_c vrijeme stabilizacije naglo raste, sto bi mogao biti indikator postojanja stanja/rezima rada celijskih automata, kao i postojanja prelaza stanja za kriticnu vrijednost $\lambda = \lambda_c$.

Pozeljno bi bilo sada ispitati nivo kompleksnosti sistema u zavisnosti od λ te vidjeti da li postoji potencijalna poveznica izmedju rezima rada automata, te kolicine informacija koju sistem prenosi, s obzirom da smo vidjeli da za odredjene sisteme sve pocetne informacije bivaju izgubljene, dok za druge izgledaju kao potpuno nasumicno generisane. Distribucija nivoa prenosa informacija u odnosu na parametar mogla bi dati indikacije i o zavisnosti ove osobine od stanja u kojem se sistem nalazi ukoliko prihvatimo postojanje stanja i njihovih prelaza. Nesto kasnije ovo bi se moglo iskoristiti i za izucavanje kompjutacionog potencijala sistema, jer znamo da sistem ukoliko zelimo da ga iskoristimo za univerzalni tip izracunavanja mora da ima mogucnost skladistenja i propagacije informacija. Bitno je napomenuti da su ovo sve potencijalne korelacije, ali da ne moraju imati uzrocno-posljedicnu vezu. Neki su cak i opovrgnuli ova zapazanja kao netacna u kasnijim radovima, vidjeti npr [11].



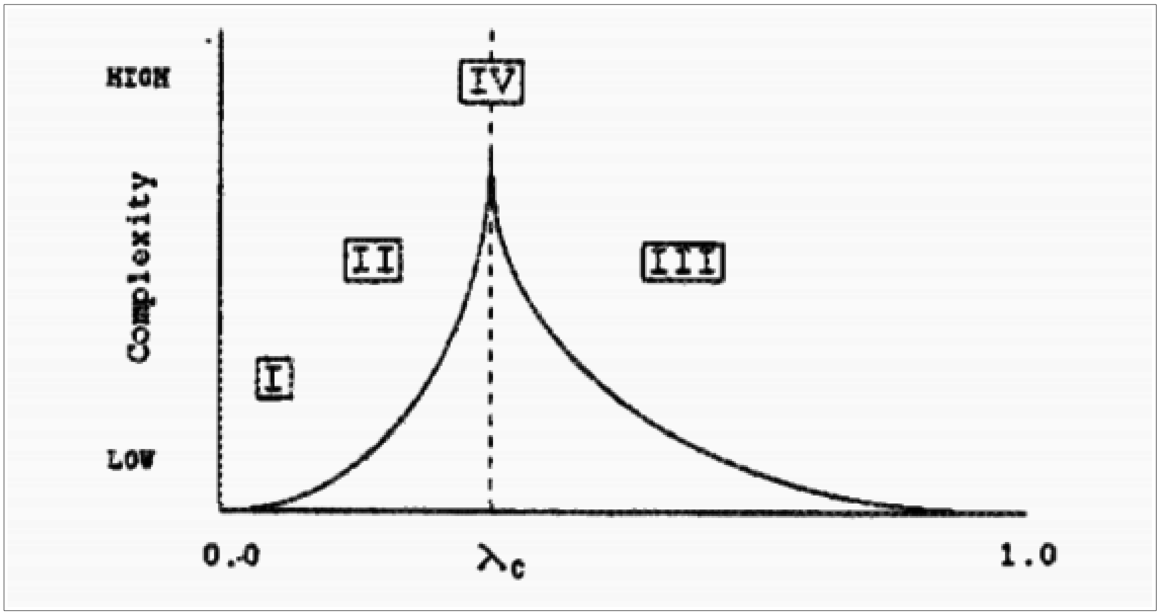


Slika 17. prosjecna entropija svake celije u zavisnosti od parametra (lijevo) prosjecna kolicina medjusobnih informacija celija za odredjenu entropiju (desno) (preuzeto iz [9])

Na slici 17 prikazana je na lijevoj strani prosjecna entropija (za definiciju pogledati preliminarne definicije u poglavlju 2.0 ili nesto strucniju literaturu, npr. [10]) svake celije u zavisnosti od parametra. Svaka tacka na grafu predstavlja odredjeno pravilo koje zadovoljava parametar. Mozemo uociti da sa porastom parametra sve se vise smanjuje razlika izmedju minimalne i maksimalne entropije za datu vrijednost parametra. Kljucno je i da je za vrijednost parametra 0.5 za koju je postulirano da predstavlja prelaz stanja, entropija varira u pojasu od priblizno 2.4 - 2.6.

Na desnoj strani na slici 17 nadalje je prikazan graf koji povezuje prosjecnu zajednicku dijeljenu kolicinu informacija (eng. mututal information) za odredjenu entropiju. Moze se uociti da postoji maksimalna vrijednost zajednicke kolicine povezanih informacija koje nose celije, te se ta vrijednost upravo poklapa sa vrijednoscu entropije u pojasu od priblizno 2.4 - 2.6, sto odgovara upravo postuliranoj vrijednosti parametra $\lambda = 0.5 = \lambda_c$.

Iz ovih vrijednosti moguce je zakljuciti (ne sa potpunom sigurnoscu) da u kriticnoj vrijednosti parametra gdje se desava prelaz stanja ujedno se dostize i maksimum zajednickih informacija celija, sto predstvalja osnovu za univerzalnu kompjutaciju. Langton ovo naziva “kompjutacija na rubu haosa”, te predstavlja koncept da postoji tanka linija izmedju neodredjenosti, uredjenosti i haosa na kojoj postoje plodni uslovi za univerzalnu kompjutaciju. Ovo bi imalo i velike filozofske implikacije na cijele oblasti kompjuterske nauke i dinamike kompleksnih sistema s obzirom da bi kompjutacija kakvu znamo predstavljala samo specijalan slucaj znatno sireg koncepta [9].



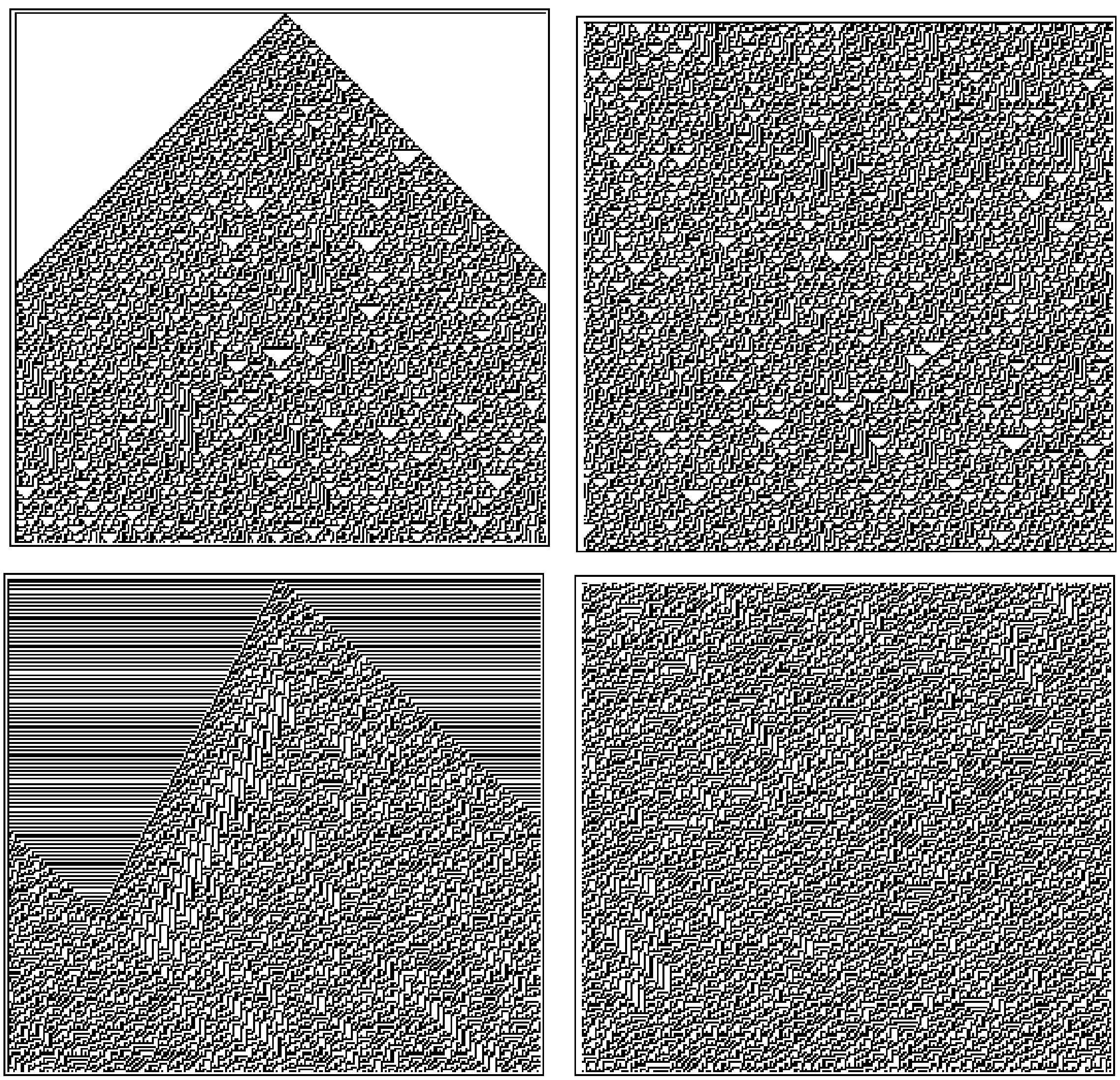
Slika 18. Wolframove intuitivne klase ponasanja celijskih automata u zavisnosti od Langtonovog parametra (preuzeto iz [9])

Ovo ima implikacije i na klasifikaciju ponasanja automata do koje smo zeljeli doci, jer bi prema tome automati Wolframove klase IV spadali upravo na rub prelaza, tj. u okolini kriticne vrijednosti $\lambda = \lambda_c$, dok bi klase I i II bile u vrijednostima manjim od kriticne s obzirom na nisku kolicinu informacije koje prenose, a klasa III bi bila locirana na vrijednostima vecima od kriticne s obzirom na kaoticno ponasanje iste. Ovaj raspored klasa prikazan je na slici 18.

Kako smo i rekli klasifikacija u vecini slucajeva moze biti prvi korak u daljnjem izucavanju nekog sistema, pa tako i ova navedena klasifikacija, bilo da se radi o intuitivnoj ili pokusajima formalne, daje naznake o zanimljivim osobinama elementarnih celijskih automata koje bi trebalo detaljnije ispitati. Tako klasifikacija predvidja automate koji imaju potpuno nepredvidivo ponasanje (eng. random), kao i automate “na rubu haosa” koji imaju moc univerzalne kompjutacije. Upravo ove klase koje odgovaraju Wolframovim klasama III i IV kao najzanimljivije i klase sa najvecim potencijalnim primjenama bice izucene u sljedecim razmatranjima.

2.2.3. Slucajnost (eng. randomness) elementarnih celijskih automata

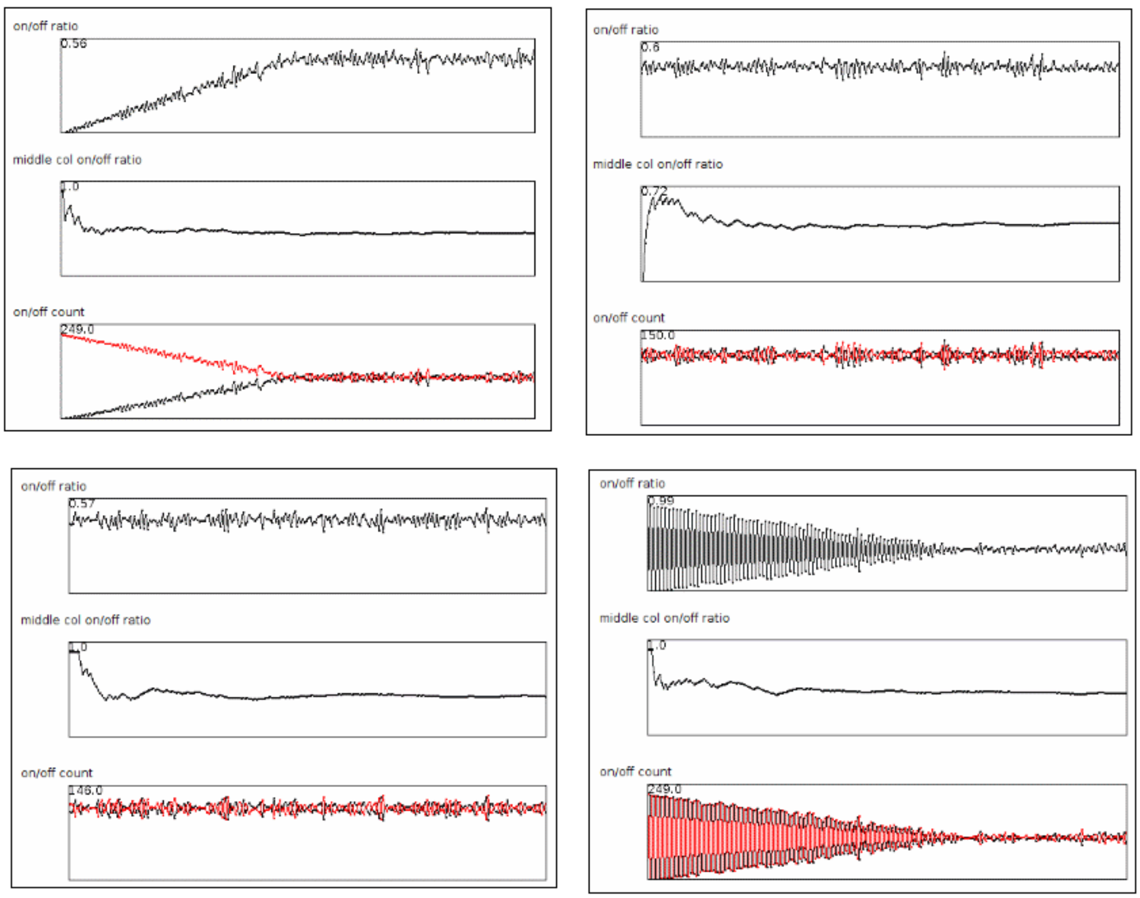
Izucavanje slucajnosti i slucajnih pojava kljucno je u raznim dijelovima kompjuterske i ostale nauke s obzirom da neke od kljucnih primjena danasnjice poput Monte-Carlo algoritamskih metoda i kriptografije su upravo bazirane na ovom konceptu. Odmah se postavlja pitanje da li bi se uocena slucajnost u klasi klasi III elementarnih celijskih automata mogla iskoristiti u ove svrhe, s obzirom da bi jednostavnost sistema koji generisu ovu slucajnost mogla biti presudna u izboru istih nad drugim metodama. Iz ovog razloga, korisno je izuciti nesto detaljnije i formalnije kolicinu slucajnosti koju mogu da proizvedu navedeni sistemi.



Slika 19. Strukture generisane pravilima 30 (prvi red) i 45 (drugi red) (generisano softwareom)

Ukoliko osmotrimo strukture generisane elementarnim pravilima 30 i 45 (i njihovim simetricnim ekvivalentima) kao sto je prikazano na slici 19, moze se uociti da nema nekog predvidivog uzorka u ovim strukturama sto bi mogao biti dobar indikator njihove potencijalne slucajne prirode [12].

Mnogi su testovi razvijeni da bi se testiralo koliko je zapravo neki sistem statisticki slucajan. Treba napomenuti da se koncept slucajnosti razlikuje od statisticke slucajnosti s obzirom da se statisticka slucajnost javlja u sistemima koji su u svojoj prirodi deterministicki, kao sto je primjer i sa trenutno izucavanim elementarnim automatima, medjutim ne postoji globalni uzorak ponasanja koji oni zadovoljavaju.



Slika 20. Statistika za simulacije na slici 19. (generisano softwareom)

Najprimitivnije formalno razmatranje koje bi moglo dati informacije o kolicini slucajnosti sistema je statistika odnosa on i off stanja celija u redu, s obzirom da ukoliko je sistem zaista slucajan taj bi odnos trebao da bude blizu $1/2 = 0.5$ s obzirom da sva stanja moraju biti podjednako moguca u potpuno slucajnom sistemu.

Razmotrimo sliku 20 koja daje po tri statistike za evoluciju pravila 30 i 45 sa uredjenim i slucajnim pocetnim uslovima (pogledati sliku 19) respektivno. Prva statistika za svaku konfiguraciju predstavlja odnos on celija u sistemu sa ukupnim brojem celija (nazvano on/off ratio) koji predstavlja procenat ili udio tih celija u svakom od redova. Apscisa predstavlja protok vremena automata, dok je na ordinati unijet ovaj odnos. Druga statistika predstavlja isti udio ali primjenjen ne na pojedinacne redove, vec na srednju kolonu jer je predlozeno da se upravo ovo koristi kao pseudoslucajni generator u kriptografskim primjenama [12][13]. Treca statistika je poprilicno redundatna ako nas zanima samo odnos, te predstavlja stvarni broj on i off celija u svakom redu u svakom vremenskom koraku.

Vidimo da se za izvrseni broj koraka u svakom od cetiri slucaja simulacije posmatrani odnos kako u svakom redu pojedinacno, tako i u specijalno posmatranoj srednjoj koloni blizi predvidjenoj vrijednosti 0.5 koja bi bila postignuta za pseudoslucajni generator, tako da ovo moze dati jake indikacije o slucajnosti navedenih pravila.

Wolfram je u [12] detaljnije i jacim matematickim aparatom – informacionom teorijom i na prednom statistikom a ne samo indikacijama iz simulacija formalno obradio slucajnost ovih sistema. Dosao je do zakljucaka da je pravilo 30 dovoljno slucajno za vecinu primjena uz dovoljno veliku pocetnu konfiguraciju, dok je pravilo 45 znatno manje statisticki slucajno, ali opet nepredvidivo u velikoj mjeri. Nesto kasnije u [14] pokazano je da za odredjene vrijednosti velicine inicijalne konfiguracije kriptoanaliza moze da obrne proces pseudoslucajne generacije.

Zakljucujemo da je jedna od osobina pojedinih klasa i pravila elementarnih celijska automata tako struktuirana da ispoljava statisticku slucajnost, sto ce kasnije biti izuceno s aspekta primjena ove vrste sistema.

2.2.4 Univerzalna kompjutacija elementarnim celijskim automatima

Nakon predstavljanja bilo kojeg sistema koji ispoljava bar neki nivo kompleksnog ponasanja, uvijek je zanimljivo upitati se kolika je zapravo ta kompleksnost te je pokusati na neki nacin kvantificirati. Ovo znaci ispitati da li je sistem sposoban simulirati bilo koji drugi sistem koji se smatra izracunljivim u matematickom smislu.

Unutar teorije izracunljivosti, kao osnovni model izracunljivog sistema uzima se bilo koji algoritam ili procedura za koji se moze konstruisati Turingova masina koja ga simulira. Ovo direktno slijedi iz rezultata poznatog kao Church-Turingova teza koji govori da je pitanje izracunljivsto ekvivalentno pitanju da li je moguce to ponasanje simulirati na nekoj konstruisanoj Turingovoj masini. Ovo razmatranje direktno uvodi Turingove masine kao osnovni model izracunljivih sistema sa kojim se ostali sistemi trebaju porediti ukoliko se zeli pokazati njihova racunarska moc. Moguce je koristiti i neke druge modele za izucavanje ovog polja poput Alan Churchovog $\lambda - kalkulusa$, medjutim pokazuje se da je razmatranje Turingovih masina dovoljno.

Pitanje univerzalnosti unutar ovih okvira se svodi na mogucnost simulacije Turingovih masina, tj. sistem se naziva univerzalno kompjutacion ili Turing ekvivalentan ukoliko je u mogucnosti simulirati svaku proizvoljnu Turingovu masinu, sto ima smisla ukoliko se razmotri zasto se Turingova masina smatra za osnovni model preko kojeg se definise izracunljivost.

Moguce je sada postaviti ovo pitanje i za elementarne celijske automate. Ocigledno je i trivijalno pokazati da neka pravila nisu Turing ekvivalentna. Razmotrimo na primjer pravila iz Wolframovih klasa I i II. Ona gotovo pri svakoj inicijalnoj konfiguraciji dovode do homogenih ili ponavljajucih krajnjih stanja sistema, te kao takvi evidentno nisu u mogucnosti mapirati proizvoljan ulaz na proizvoljan izlaz. Pravila iz klase III kako je vec pokazano pokazuju poprilicno slucajno ponasanje, te kao takva takodjer nisu dobar kandidat za Turing ekvivalentne sisteme s obzirom da nam za izracunljivost predvidivost igra kljucnu ulogu. Ostaje nam klasa IV za koju je i postulirano da predstavlja klasu u kojoj se nalaze pravila dovoljno kompleksna s jedne strane, ali dovoljno strukturirana s druge da bi se mogla iskoristiti u svrhu univerzalne izracunljivosti. Ova pravila takodjer spadaju u tanku liniju koju Langton [9] naziva “rub haosa” na kojoj bi mogle da se desavaju pojave sposobne za univerzalnu izracunljivost.

Reference

[1] Schiff, Intro CA
[2] Wolfram, A New Kind of Science
[3] Cellular Automata »Wolfram, S. Los Alamos Science 9 (1983): 2–21.
[4] Universality and Complexity in Cellular Automata »Wolfram, S. Physica D: Nonlinear Phenomena10, no. 1–2 (1984): 1–35.
[5] Cellular Automaton Supercomputing »Wolfram, S. In High-Speed Computing: Scientific Applications and Algorithm Design[Wilhelmson, R. B. (Ed.)]. University of Illinois Press, 40–48, 1988.
[6] Statistical Mechanics of Cellular Automata »Wolfram, S. Reviews of Modern Physics 55, no. 3 (1983): 601–644
[7] Cryptography with Cellular Automata »Wolfram, S. In "Advances in Cryptology: CRYPTO '85 Proceedings" [Williams, H. C. (Ed.)]. Lecture Notes in Computer Science 218. Springer-Verlag, 429–432, 1986.
[8] Cook, M. "Universality in Elementary Cellular Automata." Complex Systems 15, 1-40, 2004.
[9] Christopher G. Langton (1990). "Computation at the edge of chaos"
[10] Entropy and Information Theory First Edition, Corrected Robert M. Gray
[11] Dynamics, Computation, and the “Edge of Chaos”: A Re-Examination Melanie Mitchell1 , James P. Crutchfield2 , and Peter T. Hraber1, 1994
[12] Random Sequence Generation by Cellular Automata »Wolfram, S. Advances in Applied Mathematics 7, no. 2 (1986): 123–169.
[13] Cryptography with Cellular Automata »Wolfram, S. In "Advances in Cryptology:

CRYPTO '85 Proceedings" [Williams, H. C. (Ed.)]. Lecture Notes in Computer Science 218. Springer-Verlag, 429–432, 1986.
[14] Advances in Cryptology — EUROCRYPT '91 Volume 547 of the series Lecture Notes in Computer Science pp 186-199 Analysis of Pseudo Random Sequences Generated by Cellular Automata Willi Meier Othmar Staffelbach