

## **Abstract**

U radu se obrađuje specijalna klasa konacnih diskretnih modela pod nazivom 'celijski automati' (eng. cellular automata) koji se baziraju na cisto lokalnoj interakciji ali proizvode uzorke koji se mogu promatrati na globalnijoj skali, te vecem nivou apstrakcije. Upravo ova cisto lokalna interakcija omogucava da se pomocu navedenih entiteta omoguci modeliranje sirokog spektra realnih pojava s obzirom da veliki broj stvari koje se pokusavaju modelirati spada upravo u ovu kategoriju.

Kroz rad se navodi nekoliko klasa, primjera i primjena celijskih automata, te se uz pomoc grafickog simulatora pokusavaju prikazati najbitniji koncepti potrebni za shvatanje nacina funkcionisanja te potencijalne primjene ovih modela. Rad sluzi kao uvod u siroku tematiku i primjene ove vrste modela.

Takodjer, ponudjen je i formalni matematicki tretman iz raznih aspekta koji ukljucuju teoriju haosa i teoriju igara, te aspekt na koji je stavljen najveći fokus – teorija kompjutacije s obzirom da se celijski automati, tacnije odredjene instance istih, mogu koristiti kao univerzalna Turingova masina sto otvara siroke primjene ove vrste sistema.

## **Okvir rada**

// pregled poglavlja i strukture etc.

## **Pregled oznaka**

## **1. Uvod**

U uvodnom dijelu pokusacemo razmotriti pozadinska razmatranja koja vode do izucavanja klase konacnih diskretnih modela nazvanih celijski

automati.

Prvo cemo dati pregled kroz specifican primjer da se uoce neke od osnovnih karakteristika ovih sistema.

Nakon cemo pregledati historijski koja matematicka pitanja su navela da se razmotre neke specijalne klase, te ce se nako toga obratiti paznja na unificarnje specijalni klasa, te posebno historijski pregled rada Stephena Wolframa za kojeg se moze reci da je dao jedna od najvećih doprinosa samom polju.

Bice dat i pregled potencijalnih primjena te motivacija za izucavanje oblasti celijskih automata, te se ovaj dio moze smatrati neformalnim uvodom u cjelokupnu oblast koji moze dati osnovnu ideju bilo kome ko zeli da se zainteresuje u oblast.

## ***1.1 Osnovni pregled***

Pocnimo prvo od pokusaja shvatanja kakve vrste modela predstavljaju celijski automati. Zato cemo prvo krenuti od konkretnog specificnog primjera kroz koji je moguće shvatiti osnovne odlike celijskih automata na koje cemo se kasnije nadograditi kako budemo gradili formalnu apstrakciju ovog konkretnog primjera.

Najjednostavniji takav je primjer je beskonacna dvodimenzionalna ravna ploca prekrivena kvadratima koje cemo nazvati **celije**. Kvadrati se medjusobno dodiruju stranicama, te tako svaki kvadrat ima punu vezu preko stranice sa tacno cetiri susjedne celije. Za svaku celiju kazemo da moze biti u dva stanja - on i off. Kako cemo za prikaz automata pretežno koristiti graficke interpretacije, ova dva stanja mozemo "zakodirati" bojom same celije, pa cemo tako uspostaviti konvenciju da crna prestavlja on, dok bijela prestavlja off stanje. Sva trenutna razmatranja bice formalno definisana kasnije u radu te ovaj dio razmatranja služi samo za intuitivni prikaz osnovnih ideja iza ovakvih vrsta modela.

// slika 1 - celija sa susjedstvom (4x4 grid)

Na slici 1 imamo prikazanu dosad opisanu celiju sa svojim susjednim celijama, te svaka od njih ima svoje definisano stanje. Celije su oznacene brojevima 1-16 radi njihovog referiranja unutar teksta, te ovi brojevi ne predstavljaju dio modela.

// slika 2 - 2D grid sa pocetnom konfiguracijom

Na slici 2 prikazan je skupe celija koje zajedno cine 2d **grid**. Primijetimo da je nemoguće simulirati beskonacni grid konacnim kompjutacionim metodama, pa se u praksi gotovo uvijek ogranicavamo na konacne dimenzije. Ovdje nastaje problem sta raditi sa rubnim celijama, te ce ta tematika biti detaljnije kasnije obradjena.

Ovakav raspored nazvacemo **konfiguracija**. U konfiguraciji, svaka celija ima svoje pocetno stanje, pa je tako za svaku celiju definisano da li je ona inicijalno on ili off – crna ili bijela. Stanje je na pocetku izabrano proizvoljno i moze se mijenjati u zavisnosti od potreba, te ce razlicita pocetna stanja dati nekada i drastico razlicita ponasanja. Na slici 2 prikazan je primjer jednog takvog pocetnog stanja. Skup ovako organizovanih celija sa svojim pocetnim stanjima u konacnom gridu nazivamo **inicijalna konfiguracija grida**.

Naravno, dosadasnja definicija celijski automata ne bi imala nikakvog smisla, s obzirom da imamo samo pocetnu konfiguraciju i grid. Medjutim, ono sto cini celijske automate pravim modelima koji se mogu koristiti u razne svrhe je takozvana **evolucija celijskih automata**. Nakon sto se uspostavi inicijalna konfiguracija grida, ovaj sistem moze da se stavi u evoluciju. To znaci da ce svaka od celija da mijenja svoje stanje prema nekim pravilima, te ce cijelokupan sistem da se mijenja prema tim pravilima u diskretnim vremenskim intervalima.

// slika 3 – tipovi susjedstva (moore, von Neumann, custom)

Sljedece stanje svake individualne celije zavisi od njenog trenutnog stanja, kao i okolnih celija, te se prema ovim parametrima i formiraju pravila. Susjedne koje okružuju datu celiju a uzimaju se u obzir prilikom rancunanja sljedeceg stanja kolektivno se nazivaju **susjedstvo (eng. neighborhood)**. Evidentno je da izbor susjedstva nije jedinstven. Na slici 3 prikazano je nekoliko nacina izbora susjedstva. Najpoznatija dva ovakva tipa su Moore-ovo i von Neumann-ovo susjedstvo prikazano na slici, ali nije isključeno i kreiranje proizvoljnog susjedstva.

// slika 4 – ruleset picker za jednostavno 4-von nemannovo susjedstvo

Nakon sto se izabere koje celije ucestvuju u formiranju susjedsva, formira se i skup pravila koji govori o tome kako celija evoluiira na osnovu svog stanja i stanja svojih susjeda. Na slici 4 je u gornjem dijelu naveden i nacin specifikacije pravila za von Neumannovo-ovo sujedstvo gdje se za svaku pojedinačnu kombinaciju susjedstva na osnovu trenutnog stanja celija bira iduce stanje iste. Tako sa slike mozemo uociti npr. ukoliko je celija okružena sa tri bijele celije iznad, lijevo i desno, te crnom celijom ispod, ukoliko je trenutno stanje off

prelazi u on, dok ukoliko je trenutno stanje on prelazi u off.

// slika 5 - tri koraka game of life-a

Kako su stanja binarna, ukoliko  $n$  predstavlja broj susjeda koji formiraju susjedstvo, tada je moguće  $2^{n+1}$  mogućih pravila evolucije. Tako za jednostavno Moore-ovo susjedstvo od 8 susjednih ćelija postoji  $2^{8+1} = 2^{2^9} = 1.34 \times 10^{154}$  mogućih pravila evolucije. Ovo opazanje će biti kasnije detaljnije objašnjeno.

Na slici 5 data su 3 koraka evolucije sistema sa jednim od specifičnih pravila, te je ovo dobro poznata konfiguracija nazvana Game of Life.

Vidimo da opisana čisto lokalna interakcija može da kreira poprilično kompleksne oblike, te će se dalje ispitati kolika je ta kompleksnost i na koji način se mogu koristiti ova zapazanja za neke generalnije kompjutacije.

// slike 6 i 7 – selekcija 1d pravila – kompleksne strukture [3]

Na slikama 6 i 7 prikazana je kompleksnost koja može da proizidje iz jednostavnih pravila prezentovanih iznad.

// TODO: dodati iz uvod iz [3] radi upoznavanja zanimljivih osobina

## **1.2 Historija**

Da bismo dobili opštu sliku oblasti, te razloga nastanka i razvoja iste, potrebno je istražiti kako je došlo do pitanja i problema koja su dovela do toga da se naučna javnost zainteresira.

Kao i sve ostale oblasti nauke i matematike, tako su i ćelijski automati nastali pokušajem odgovaranja na specifičan skup pitanja koji se kasnije proširio u cijelu oblast nakon što se uvidjela njihova moguća generalnost i opstija primjena.

Pioniri ove konkretne oblasti bili 1940-ih su istraživači u Los Alamos Nacionalnoj Laboratoriji **Stanislaw Ulam** i **John von Neumann**. Zanimljiva je činjenica da su se bavili ovom oblasti sa strane u vidu hobija. Oni su se, posebno von Neumann, inicijalno zanimali pokušajem da naprave sistem u kojem bi bilo moguće da entitet unutar samog sistema vrši **samoreplikaciju**. Ovo bi značilo da određeni objekat pravi identičnu kopiju samoga sebe, te bi ta kopija također pravila svoju kopiju ad infimum.

Prvobitno je von Neumann želio da kreira robota koji bi vrsio samoreplikaciju (sto danas nazivamo kinematskim – realnim modelom samoreplikacije), međutim nakon teskoca pri nalazenju ogromnog broja dijelova koje bi robot morao da ima na raspolaganju da bi izvršio ovaj zadatak, te nakon prijedloga Ulama, odlucio je da iskoristi apstraktni diskretni model za ovaj zadatak. Model koji je koristio može se smatrati prvim primjerom korištenja celijskih automata.

Ovo predstavlja pocetak oblasti diskretnih sistema celijskih automata. Rezultat je bio ono sto danas nazivamo von Neumann-ov univerzalni konstruktor. On se sastoji od celijskih automata koji imaju 29 stanja i potrebno je ~200.000 celija da bi se izgradio univerzalni konstruktor. Von Neumann je dao okvirni dizajn i dokaz postojanja, ali nikada nije implementirao ovaj sistem. [1] Tek 1990-ih godina je grupa predvodjena italijanskim naucnikom **Pasaventom** uspjela da napravi pravu implementaciju ovoga sistema, iako je ideja konceptualno zaceta gotovo 50 godina prije prve implementacije.

Nesto kasnije, 1950-ih, ista dvojica naucnika iz Los Alamos laboratorija iskoristili su celijske automate u prvom pokusaju modeliranja realnosti koristeći iste. Kreirali su model koji **predvidja kretanje fluida** na nacin da smatraju fluid sastavljenim od diskretnih jedinica – celijskih automata, cije kretanje zavisi od susjednih jedinica. Na ovaj nacin moguće je aproksimirati kretanje cjelokupnog fluida modeliranjem samo lokalne interakcije susjednih cestica. Ovim modelom pokazano je da celijski automati imaju i siru primjenu van cisto teoretskih razmatranja za koja su ranije korišteni, te ovo predstavlja svojevrsni pocetak generalne primjene ove vrste modela u nauci.

Trebalo bi napomenuti i da je neke od ranih istrazivanja u ovom polju vrsio i pionir u oblasti vjestackog zivota, norvesko-italijanski naucnik **Nils Aall Baricelli** koji je jedan od prvih prepoznao potencijalnu univerzalnost celijskih automata kao modela koji mogu predstavljati realne pojave.

Jos neku od ranih primjena celijski automati nasli su u modeliranju **propagacije talasa u medijima**. Rani ovakav model celijskih automata konstruisan je 1940-ih. Međutim kako je taj model koristio kontinualnu funkciju kao signal, ne može se smatrati diskretnim modelom celijskih automata, tako da su prvi pravi ovakav model korišteni u svrhe modeliranja impulsa kardio sistema u covjecijem tijelu konstrukisali **J. M. Greenberg** i **S. P. Hastings** 1978-e. Ovaj model je i dalje cesto korišten i referenciran u istrazivackim radovima.

Prvih dvadeset godina od pojavljivanja modela celijskih automata, gotovo niko nije izvorsavao rigorozno naucno i matematicko ispitivanje



osobina ovih sistema. Jedan od pionirskih radova u polju bio je rad americkog matematicara **Gustava A. Hedlunda**, koji je kroz matematicku oblast dinamika simbola (koju je sam i osnovao, eng. *symbolic dynamics*) posmatrao celijske automate kao mijenjajuce nizove simbola uz odredjena pravila prelaza. Ovime je dosao do nekih od najkorisnih rezultata u ovom polju. Njegov rad iz 1969-e zajedno sa Curtis-Hedlund-Lyndon teoremom za koju snosi djelomicne zasluge, koja klasificira globalni prostor pravila automata, i dalje predstavlja jednu od osnova za bilo koga ko planira da se upusti u ozbiljnije ispitivanje ove vrste sistema.

Pravu popularizaciju oblast je dozivjela pametno konstruisanim primjerom od strane britanskog matematicara i fizicara **John Conway**-a 1970-e godine. On je svoj specifičan model baziran na dvodimenzionalnim celijskim automatima prikladno nazvao **Igra zivota** (eng. *Game of Life*). Ovaj model je standardni dvodimenzionalni sistem celijskih automata sa dva stanja, medjutim uprkos jednostavnim pravilima, nakon sto se sistem pusti u rad, pocinju da se pojavljuju visoko kompleksne strukture koje ispoljavaju osobine koje bi mogli pripisati i nekim zivim bicima, krecu se, jedu jedni druge, razmnozavaju se i slicno – zbog ovoga je model i dobio svoje ime. Upravo zbog ovih osobina gdje se visoka kompleksnost javlja iz poprilično jednostavnih pravila, Igra a samim tim i oblast celijskih automata dozivjela je veliku popularizaciju, te vecina ljudi za celijske automate sazna upravo iz ovog primjera. Iako se ovaj model smatrao pretežno dijelom rekreativne matematike te sredstvom popularizacije ideje celijskih automata za siru javnost, nesto kasnije je Berlekamp u saradnji sa jos nekoliko matematicara dokazao univerzalnost Igre zivota, tj. da sistem moze ekvivalentno da se koristi u svrhu univerzalne kompjutacije kao i bilo koji drugi racunar prema Turingovoj tezi.

Mozemo napomenuti da je i njemacki racunarski pionir **Konrad Zuse** 1969-e u svojoj knjizi *Racunajuci svemir* raspravljao neke od sirih filozofskih implikacija sistema celijskih automata. On je naveo da je moguće da cijelokupan univerzum zapravo jedan veliki celijski automat koji se sinhrono update-a u vremenskim koracima, te je ova ideja otvorila prostor za potpuno novu oblast nazvanu digitalna fizika.



Slika 8. Preuzeto iz [2]

Najdetaljnije i rigoroznije ispitivanje osobina celijskih automata izvršio je u svojim radovima tokom dvadeset godina istraživanja britanski matematičar i fizičar **Stephen Wolfram**, koji se smatra jednom od najbitnijih figura za ovu oblast. Počeo je sa svojim istraživanjima 1981-e u pokusajima da razmotri kako se kompleksni uzorci u prirodi formiraju naizgled narušavajući drugi zakon termodinamike. Tada je izvršavao simulacije na ranim racunarima, te neko što je u simulacije unio određene klase celijskih automata, bio je zapanjen kolika kompleksnost proizilazi iz jednostavnih pravila koje je postavio (slika 8). Ovo naizgled kontrapuntivno ponasanje koje ga je zapanjilo navelo ga je da u idućim decenijama prebaci svoju sferu rada sa fizike na matematiku i kompjutersku nauku. U seriji od preko dvadeset radova Wolfram je izvršio klasifikaciju i opisao osobine pretežno jednodimenzionalnih celijskih automata, te predložio mnoge njihove primjene kao alternativu trenutno korištenim modelima poput parcijalnih diferencijalnih jednačina. Također je doprinio dokazivanju univerzalnosti jednog od pravila jednodimenzionalnih celijskih automata. Svoje pronalaskе, stavove i historiju istraživanja kompajlirao je 2002. u knjizi **Nova vrsta nauke** (eng. *A New Kind of Science*), gdje se zalaze za celijske automate kao budućnost modeliranja prirodnih pojava te bilo kakve vrste apstraktnih sistema [2]. Dotiče se i filozofskih implikacija celijskih automata. Wolfram i dalje nastavlja da popularizira ovu temu kroz serije govora, te je poznat kao i kreator

*Wolfram Alpha* i *Mathematica* softverskih sistema.

### **1.3 Motivacija**

Ljudska nauka stoljećima pokušava da koristeći klasične metode matematike u primijenjenim disciplinama poput fizike objasni i razjasni svijet oko nas, kao i da iz datih početnih uslova nekog sistema da predviđanja za budućnost istog, tj. da predvidi ponasanje bez potrebe da se sam sistem pusti u izvršavanje ili simulaciju. Međutim, i nakon toliko vremena izučavanja, i dalje postoje neka fundamentalna pitanja koja su ostala neodgovorena i čini se kao da ih je nauka zaobilazila te odgovarala samo na pitanja koja su se uklapala u stereotipni način dotadašnjeg razmišljanja da se stvari modeliraju kontinualnim alatima parcijalnih diferencijalnih jednačina. Treba uzeti u razmatranje mogućnost da možda postoji fundamentalno ograničenje ovakvog pristupa te da treba razmotriti neke nove metode koje bi možda dale bolje rezultate [2]. Wolfram, fizičar po struci i jedna od ikonskih figura polja ćelijskih automata, u svojim radovima i knjigama daje primjere novih sistema i njihovih primjena na mjestima gdje tradicionalni naučni pristup ne uspijeva dati zadovoljavajući odgovor (pogledati npr. [4] i [2]).

Ukoliko osmotrimo prirodne konstrukte oko nas, možemo primijetiti da postoji nekoliko osnovnih karakteristika koje možemo uočiti. Za početak, koncept lokalne interakcije široko je rasprostranjen s obzirom da u toku razmatranja nečega uzimamo u obzir uticaje samo onih elemenata koji su vremenski i prostorno dovoljno blizu da bi mogli proizvesti značajne efekte na ishod ponašanja. Naravno da je moguće da neki dalji objekat ima uticaj. Međutim, kako većina posmatranih pojava zadovoljava svojstvo linearnosti gdje mala promjena u početnim uslovima izaziva i malu promjenu u rezultatima (za razliku od kaotičnih sistema koji se rjeđe sreću), to je posmatranje svakodnevnih sistema kroz pretežno lokalnu interakciju poprilično opravdano. Na primjer, prilikom razmatranja hemijske reakcije na molekularnom nivou, nije potrebno uzimati u obzir Jupiterovu gravitacionu silu, iako je istina da ona vrši uticaj na sistem, ma koliko on malen bio (iz ovih razloga potpuno izoliran sistem je čisto teoretski konstrukt).

Nadalje, uprkos pretežno čisto lokalnoj interakciji, sistemi ispoljavaju poprilično kompleksna svojstva kao cjeline. Tako da iz čisto lokalnih svojstava nastaju globalna svojstva u kojima učestvuju svi dijelovi. Ovo možemo najbolje shvatiti kroz primjer ljudskog ponašanja kao vrste, gdje ljudi vrše razmjenu informacija i interakciju jedni među drugima lokalno, međutim i ljudsko društvo u cjelini možemo okarakterizirati

nekim globalnim osobinama viseg nivoa. Ili npr. sistemi idealizovanih gasova sastavljeni od cestica koje vrse medjusobno mali prostorni uticaj, ali alatima statisticke mehanike i sl. mozemo okarakterizirati osobine cijelog volumena gasa [5].

Enormna kompleksnost nedvojbeno je dio sistema koji se uzimaju u naucna razmatranja i vecine naseg okruzenja. Ovo ide toliko daleko da su neke kompleksnosti i dalje ostale nerazjasnjene i uz korištenje najmodernijih tehnika i metoda naucnih disciplina. Svakodnevno se susrecu kompleksne strukture koje je danas tesko precizno modelirati, npr. propagacija toplote, modeli kretanja fluida ili pak nesto sto se na prvi pogled cini kao jednostavna stvar poput formiranje oblika snjeznih pahulja ili oblici formirani na morskim skoljkama [2]. Jedan od osnovnih ciljeva naucnih istrazivanja upravo "pripitomljavanje" ovih kompleksnosti i pokusaja objasnjenja istih kroz skup jednostavnijih principa. Postavlja se pitanje da li kompleksnost obavezno zahtijeva i kompleksnost na nizim nivoima i strukturama sistema, ili je nekako moguće, iako kontraintuitivno, da poprilično jednostavna pravila mogu da proizvedu ogromnu složenost koja se može uočiti.

Postavlja se pitanje kako spojiti ove naizgled kontradiktorne osobine koje uvidjamo. Kako to da s jednog strana spektra postoji čisto lokalna interakcija, ali nakon što pogledamo sistem sa viseg nivoa apstrakcije uvidjamo da se i sam sistem ponasa kao cjelina koja vrsi nesto globalniju interakciju sa sistemima istog nivoa? Također, kako je moguće da ogromnu kompleksnost koju posmatramo pokušavamo svesti na jednostavna pravila koja će je opisati i iz kojih ova kompleksnost može da se izrodi?

Necemo ici toliko daleko da kazemo, kao sto Wolfram tvrdi u svojoj knjizi, da celijski automati mogu da posluze da modeliraju cijeli univerzum [2], medjutim ocigledno je da celijski automati i njihovo razumijevanje može dovesti bar na pravi put razjasnjenja nekih od navedenih pitanja. Celijski automati po svojoj definiciji se baziraju na čisto lokalnoj interakciji, medjutim kada se pusti nekoliko koraka simulacije odredjenih pravila čak i jednodimenzionalnih instanci, uocavaju se globalne osobine. Tako da bi iz tog razumijevanja mogli doci blize razumijevanju nastajanja globalnog ponasanja iz lokalno ogranicenog. S druge strane, pravila celijskih automata poprilično su jednostavna, pa su čak i anticki narodi mogli doci do istih [2]. Medjutim iako su pravila jednostavna, nivo kompleksnosti koji se javlja uopste nije niskog nivoa. Tako da i s te strane, celijski automati i njihovo razumijevanje može da nas pribilizi odgovoru poveznice izmedju nastanka kompleksnosti iz malobrojnog skupa jednostavnih pravila.

## **1.4 Primjeri**

Da bi se formirala kompletnija opsta slika celijskih automata kao modela kompleksnosti, prikladno bi bilo dati nekoliko primjera kompleksnosti i vrsta struktura generisanih celijskim automatima. Ovo moze dati jasniju sliku i nekome ko nije toliko zainteresovan u mateimaticke detalje samog modela na nacin da moze prikazati raznovrstnost struktura koje celijski automati mogu proizvesti.

Rule 30 ~ sea shells

rule 110

game of life + game of life life forms

## 2. Formalni matematički tretman

Nakon neformalnog uvoda, potrebno je i rigorozno matematički definisati šta se misli kada se koristi pojam celijskih automata. Zbog raznovrstnosti modela koji se mogu smatrati celijskim automatima, u literaturi ne postoji opsteprihvacena generalna definicija, već autori strogo matematički definišu samo konkretan model kojim se bave, npr. jednodimenzionalni binarni celijski automati u slučaju Stephena Wolframa (vidjeti npr. [2], [3], [4]).

Na početku bice data generalna definicija koja pokušava što opstije da pokrije sve diskretne modele koji se mogu smatrati celijskim automatima, mada su moguće neke iznimke zbog širine diskretnih modela i mogućnosti proširenja osnovnog modela po raznim parametrima.

Nakon toga će se redom proći kroz specifične instance poput jednodimenzionalnih i dvodimenzionalnih binarnih automata koje su najviše izučavane tokom godina. Obratice se pažnja i na njihovu formalnu definiciju, tretman i matematičke osobine.

Takodjer, definicije i teoreme – osobine automata bice popracene primjerima i grafičkim simulacijama iz implementacijskog dijela rada koji će sam po sebi biti kasnije pokriven.

### 2.1 Generalna definicija

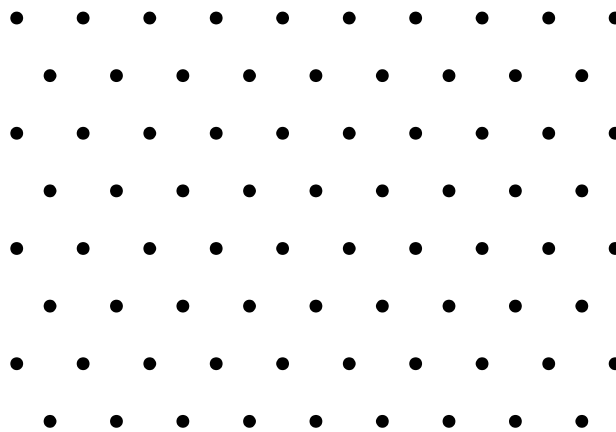
Pokusajmo prvo kroz nekoliko zapazanja iz konkretnih primjera uočiti koje su to generalne osobine i koncepti koje bi definicija morala da pokrije, a nakon toga pokušaćemo to da uklopimo u neki matematički model.

Prvo idu neke preliminarne matematičke definicije kroz primjere koje su neophodne za razumijevanje krajnje definicije celijskih automata u generalnom slučaju. Pokušaćemo kroz te definicije postepno proći kroz osobine apstraktnih pojmova za koje vezemo instance celijskih automata.

Sva dešavanja modela moraju da se odvijaju na nekom apstraktnom prostoru, koji treba da zadovoljava određena svojstva. Dakle prvi koncept koji definicija treba da pokrije je prostor odvijanja modela. Prostor odvijanja modela celijskih automata je u pravilu diskretan, što

mozemo da uocimo iz nekoliko dosad razmotrenih primjera s obzirom da se uvijek radilo u pravougaonoj matrici kvadratnih mjesta ili jednodimenzionalnom ekvivalentu istih. Takodjer prostor mora da bude definisan na takav nacin da se na njemu mogu definisati i ostali bitni koncepti poput susjedstva.

Prvo onda definisimo prostor. Matematicki objekat koji moze da uhvati sve navede osobine je latica ili resetka (eng. lattice). Intuitivno resetka je skup tacaka sa ravnomjernim i homogenim rasporedom kao sto je prikazano npr. na slici 9. Naravno tu je i dosad poznati primjer na slici 1 u prethodnom poglavlju.



Slika 9.

Da bismo formalno predstavili sta je to ravnomjerno rasporedjenje, resetku mozemo definisati kao skup tacaka kod kojih je udaljenost izmedju bilo koje dvije od njih cjelobrojna linearna kombinacija unaprijed odredjenih vektora u prostoru gdje su tacke definisane (pretežno se radi sa skupom/prostorom  $\mathbb{R}^n$ ). Kljucan detalj je cjelobrojnost jer time zadržavamo osobinu diskretnosti samog skupa, sto je kljucno za celijske automate kao diskretne modele kompjutacije.

**Definicija 3.1** Latica ili resetka se definise kao  $\Lambda := \left\{ \sum_i a_i v_i : a_i \in \mathbb{Z} \right\}$

gdje je  $v_i \in \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$  baza vektorskog prostora  $V$  nad skupom skupa gdje je resetka definisana.

Ovo samo znaci da izaberemo fiksni skup vektora udaljenosti od tacke i na tacku nadodjemo cjelobrojne umnoske vektora da bismo tako odrzali regularnost koja je zahtijevana za definiciju celijskih automata.

Celijski automati su kako prostorno tako i vremenski diskretni sistemi. U primjeru jednodimenzionalnih automata, vrijeme je bilo samo prirodan broj koji je govorio o kojoj se iteraciji automata radi, pa tako moramo moci definisati i diskretan koncept vremena u kojem automati evoluiraju kao dodatnu dimenziju pored prostorne koju smo vec obradili.

Upravo iz diskretnosti dimenzije vremena za sisteme celijskih automata, javlja se i najjednostavniji nacin njegove definicije. Dovoljno je samo da se vrijeme moze staviti u jedan-na-jedan (bijektivno) mapiranje sa skupom prirodnih brojeva, sto se i uklapa u trazenu diskretnost.

**Definicija 3.2** Neka je dat skup  $T$  takav da neka postoji funkcija  $b : T \rightarrow \mathbb{N}$  koja je bijektivna. Tada skup  $T$  nazivamo diskretnim vremenskim skupom.

Da bi se izbjegle zabune, zbog postojanja bijektivnosti moguće je u daljnjim razmatranjima umjesto apstraktnog skupa  $T$  koristiti skup prirodnih brojeva.

Nakon sto smo definisali prostorne i vremenske dimenzije u kojima ce celijski automati biti smjesteni, jos jedan osnovni koncept je stanje svakog automata koji se nalazi u prostor-vremenu.

Za jednodimenzionalni i dvodimenzionalni slucaj imali smo samo dva moguca stanja - 1 ili 0, crno ili bijelo u grafickoj reprezentaciji. Na osnovu ovoga, svaka celija mora biti u jednom od konacnog broja stanja, sto je i jedino ogranicenje na ovaj skup, da mu je kardinalnost konacna, tj. odgovara nekom prirodnom broju. Kasnije cemo vidjeti da su moguće i neke generalizacije samog skupa stanja gdje npr. imamo celijske automate cija stanja odgovaraju realnim brojevima u intervalu  $[0, 1]$  sto ocigledno nije konacan skup stanja.

**Definicija 3.3** Skup  $Q$  nazivamo skupom stanja ukoliko  $|Q| = n$ , gdje  $n \in \mathbb{N}$ .

Potrebno je jos razmotriti sta bi bilo povoljno da se koristi u definiciji susjedstva te prelaza (evolucije) svake celije unutar automata. Ovi koncepti nista prostorne i vremenske transformacije konkretne celije. Npr. susjedstvo je samo mapiranje/dodjeljivanje nekoliko celija jednoj konkretnoj celiji u resetki. Evolucija je samo dodjeljivanje iduceg stanja celiji na osnovu prije dodijeljenog susjedstva i prijasnjeg stanja. Tako da matematicke funkcije ili mapiranja savrseno odgovaraju opisu objekta koji bi mogao da se koristi, sto ce i biti slucaj.

Sada je potrebno dati definiciju celijskih automata cija se evolucija



odvija na diskretnom prostoru i u diskretnom vremenu sa konacnim brojem stanja uz postojanje susjedstva svake celije i tranzicijskog pravila za istu. Vidimo da smo pokrili sve koncepte koje smo ranije vidjeli u specficnim instancama, tako da je moguće dati generalnu definiciju.

**Definicija 3.4** Celijski automat mozemo definisati kao uredjenu sestorku  $C := (\Lambda, Q, T, \sigma, \eta, \phi)$ , pri cemu je  $\Lambda$  resetka nad nekim skupom,  $Q$  skup stanja,  $T$  diskretni vremenski skup, dok su  $\sigma, \eta, \phi$  funkcije  $\sigma : \Lambda \times T \rightarrow Q$ ,  $\eta : \Lambda \rightarrow \Lambda^c$  i  $\phi : Q^{c+1} \rightarrow Q$  ( $c \in \mathbb{N} \wedge c \geq 1$ ) koje se nazivaju funkcije konfiguracije, susjedstva i prelaza respektivno. Prirodni broj  $c$  se naziva velicina ili kardinalnost susjedstva. Funkcija  $\sigma$  je rekurzivno definisana pomocu funkcije  $\eta$  kao  $\sigma(\lambda, n) = \phi(\sigma(\eta(\lambda), n-1), \sigma(\lambda, n-1))$  gdje  $\lambda \in \Lambda, n \in T$ , ali mozemo uz prije navedenu diskretnost skupa  $T$  smatrati da  $n \in \mathbb{N}$ .

Potrebno je ukratko pojasniti detaljniju intuiciju iza funkcija  $\sigma, \eta, \phi$  u Definiciji 3.4.

Funkcija  $\sigma$  predstavlja funkciju trenutne konfiguracije, sto znaci da pridruzuje stanje iz skupa stanja svakoj celiji u datoj vremenskoj instanci.

Funkcija  $\eta$  predstavlja funkciju susjedstva, te ona jednostavno pridruzuje svakoj celiji onoliko celija koliko je definisano velicinom susjedstva.

Na kraju, funkcija  $\phi$  predstavlja funkciju prelaza celija celijskog automata, te ona definise u koje sljedece stanje prelazi celija celijskog automata uzimajuci u obzir stanja njenog susjedstva, te njeno trenutno stanje. Definisana je rekurzivno, jer svaka iteracija zavisi samo od prethodne, a veoma je moguće da je pojedina ili cak vecinu pravila prelaza nemoguće predstaviti elementarnim funkcijama na koje smo navikli. Ovo se vec dalo zakljuciti iz kompleksnosti uzoraka koje ova vrsta sistema generise.

Moze se primijetiti da celijski automati posjeduju nekoliko osobina koje su zadovoljene za svaku instancu istih. To su homogenost, paralelizam i lokanost. Ovo je s obzirom da sve celije evoluiraju paralelno po istim proavilima koja su odredjena samo lokalnim susjedstvom i stanjem ostalih celija u njemu [1].

Ovim je završeno razmatranje generalne definicije celijskih automata, te ce nadalje biti izucavane najinteresantnije i najistrazenije instance istih koje cemo pojedinačno pokusati uklopiti u ovaj model, te detaljno razmotriti specifice matematicke osobine svake od tih instanci.

## **2.2 Binarni jednodimenzionalni celijski automati**

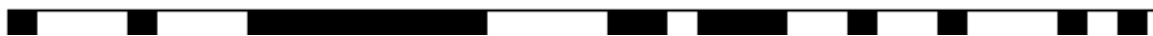
Najosnovniji tip sistema celijskih automata predstavljaju binarni jednodimenzionalni celijski automati. Ovo znaci da svaka individualna celija posjeduje dva moguca stanja – binarni, te da svaka celija ima tacno dva susjeda, te da su celije medjusobno poredane u jednodimenzionalnoj resetki – jednodimenzionalni.

Medjutim, uprkos njihovoj jednostavnosti, upravo ova vrsta predstavlja najizucavaniji tip celijski automata. Ovo mozda mozemo pripisati cinjenici da se cjelokupna nauka vezana za ove vrste sistema i bazira na sto jednostavnijim gradivnim elementima koji produkuju kompleksne strukture, pa su tako najjednostavniji od njih vjerovatno i najzanimljivi za izuciti. Ovo nije slucaj za vecinu drugih oblasti sa drugim skroz drugim pogledom na kompleksnost.

Drugi naziv koji se koristi u literaturi za ovu vrstu celijskih automata je elementarni celijski automati, tako da ce ova dva termina u daljem tekstu biti koristena naizmjenicno.

### **2.2.1 Definicija i nacin enumeracije pravila**

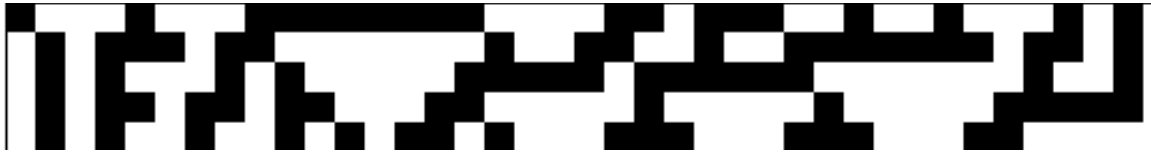
Pokusajmo sada dati definiciju i prikazati kakvu vrstu sistema predstavljaju binarni jednodimenzionalni celijski automati. Najjednostavnije je shvatiti ove sisteme kao niz celija poredanih jedna do druge u liniji – zbog cega se i zovu jednodimenzionalni, prilikom cega svaka celija moze biti u jednom od dva stanja – on ili off, sto graficki predstvaljamo crno i bijelom bojom respektivno. Generalno, graficki prikaz je cesto koristen alat u izucavanju celijskih automata jer moze da da neke indikacije o osobinama izucavanih sistema.



Slika 10. jednodimenzionalni (generisano softverom)

Na slici 10 dat je prikaz jednog ovakvog niza celija u liniji gdje svaka celija ima slucajno dodijeljenu vrijednost. Ovakav skup celija sa odgovarajucim stanjima naziva se konfiguracija. Svaka celija evoluira, tj. mijenja svoje stanje u iducem koraku prema odredjenom pravilu koje zavisi od stanja te konkretne celije, kao i stanja nekih okolnih celija. Izmjena stanja svih celija vrsi se paralelno, tako da cjelokupan niz – sistem evoluira paralelno. Kasnije cemo vidjeti generalan nacin

klasifikacije ovih pravila evolucije i njihovog definisanja. Upravo je i ovaj paralelizam cesto koristen argument u zagovaranju prakticnih primjena celijskih automata u sistemima paralelnih procesiranja (pogledati npr. [5]).



Slika 11. 5 koraka evolucije (pravilo 30) (generisano softverom)

Na slici 11 nadalje prikazano je 5 koraka evolucije sistema prema unaprije izabranom pravilu, gdje svaki red predstavlja sljedecu konfiguraciju sistema. Prvi red nazivamo pocetna konfiguracija, te svaki sljedeci red nastaje opisanim postupkom paralelne evolucije celija zasebno. Evolucija se moze nastaviti u nedogled, dok je ovdje postupak izvršen tek pet puta. Primijecujemo da je evolucija sistema izvršena u diskretnim vremenskim koracima, što je jos jedna od navedenih kljucnih osobina celijskih automata.

Sada je potrebno doci do formalne definicije jednodimenzionalnih binarnih celijskih automata koja se javlja kao posebna instanca prije obradjene generalne definicije. Takodjer, potrebno je i naci nacin da se struktuirano navedu pravila izbora nacina evolucije ovih sistema.

**Definicija 3.5** Jednodimenzionalni binarni celijski automat mozemo definisati kao uredjenu trojku  $(C, \sigma, \phi)$ , gdje  $C$  predstavlja skup celija koje su prebrojive, tj. moguće je izvršiti enumeraciju istih. Radi jednostavnosti, moguće je umjesto  $C$  koristiti skup  $\mathbb{Z}$ . Funkcija  $\sigma$  predstavlja mapiranje  $\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$  i naziva se pravilo evolucije. Funkcija  $\phi$  predstavlja mapiranje  $\phi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , gdje se  $n$  naziva velicina susjedstva. Mapiranje  $\sigma$  definisano je rekursivno kao:  $\sigma(t+1, i) = \phi(\sigma(S_{j \in J(i)} \sigma(t, j)))$ , gdje  $J(i)$  predstavlja susjedstvo konkretne celije izabrano prema nekom pravilu, te  $\phi(0, i) \in \{0, 1\}$  nazivamo pocetnom konfiguracijom sistema.

Ovu potpuno formalnu definiciju intuitivno mozemo shvatiti na nacin da se za svaku posebnu celiju, koja je oznacena cijelim brojem koji je jedinstveno identifikuje s obzirom na raspored celija, prema odredjenom pravilu prvo bira susjedstvo. Susjedstvo predstavlja skup celija od cijih stanja zavisi i iduce stanje izabrane celije. Susjedstvo se bira na identican nacin za svaku celiju. Nakon toga koristeći pravilo  $\phi$  na osnovu stanja celije i stanja njenih susjeda dodjeljujemo joj stanje u iducoj diskretnoj vremenskoj instanci. Stanja celija kako je vec navedeno pripadaju skupu od dva moguca stanje,  $\{0, 1\}$ .

Sada je potrebno razmotriti na koji način birati susjedstva, te na osnovu toga definisati moguća pravila koja mogu biti primjenjena na evoluciju sistema.

U pravilu, moguće je koristiti bilo koje pravilo za izbor susjedstva. Međutim, u praksi izučavanja pokazalo se da je najjednostavnije pravilo koje uzima samo simetrično susjedstvo od  $2n$  najbližih ćelija sasvim dovoljno da se pokazuju i najkompleksnije osobine.

Prodiskutujemo sada broj mogućih pravila za svako izabrano susjedstvo. Cjelokupno susjedstvo će imati  $2n + 1$  ćeliju uključujući i ćeliju u razmatranju. Za svaku od kombinacija stanja, tačnije  $2^{2n+1}$  mogućih s obzirom na 2 moguća stanja, potrebno je definisati sljedeće stanje u koje se prelazi ukoliko se nađje na tu situaciju. Svako od idućih stanja također pripada skupu  $\{0, 1\}$  tako da je ukupan broj pravila  $2^{2^{2n+1}}$  za ovako izabrano susjedstvo.

Ispostavilo se da također i ovdje najjednostavnija pravila daju najzanimljivije rezultate, što smo vidjeli u već dosta primjera u ovoj oblasti, te za najjednostavnije susjedstvo sa  $n = 1$  daje poprilično zanimljivu kompleksnost i moguća razmatranja. Najveći broj radova iz oblasti također je pisan upravo za ovaj slučaj (pogledati npr. većinu radova Stephena Wolframa uključujući [2], [3], [4] i mnoge druge).



Slika 12. rule picker (iz simulatora)

Sada, prema gore dobijenoj formuli imamo da je ukupan broj mogućih pravila  $2^{2^3} = 2^8 = 256$ . Ovo može grafički biti prikazano kao što je dato na slici 12 gdje imamo sljedeće stanje za svaku kombinaciju susjedstva.

Primijetimo i da proširenjem susjedstva na  $n = 2$  broj pravila raste na  $2^{2^5} = 2^{32} = 4294967296$ , tako da nešto kompleksniji sistemi imaju eksponencijalno veći broj pravila. I ovo je također jedan od razloga izučavanja najjednostavnijeg slučaja zbog mogućnosti pregleda svih pravila, što bi za slučaj  $n = 2$  bilo teže.

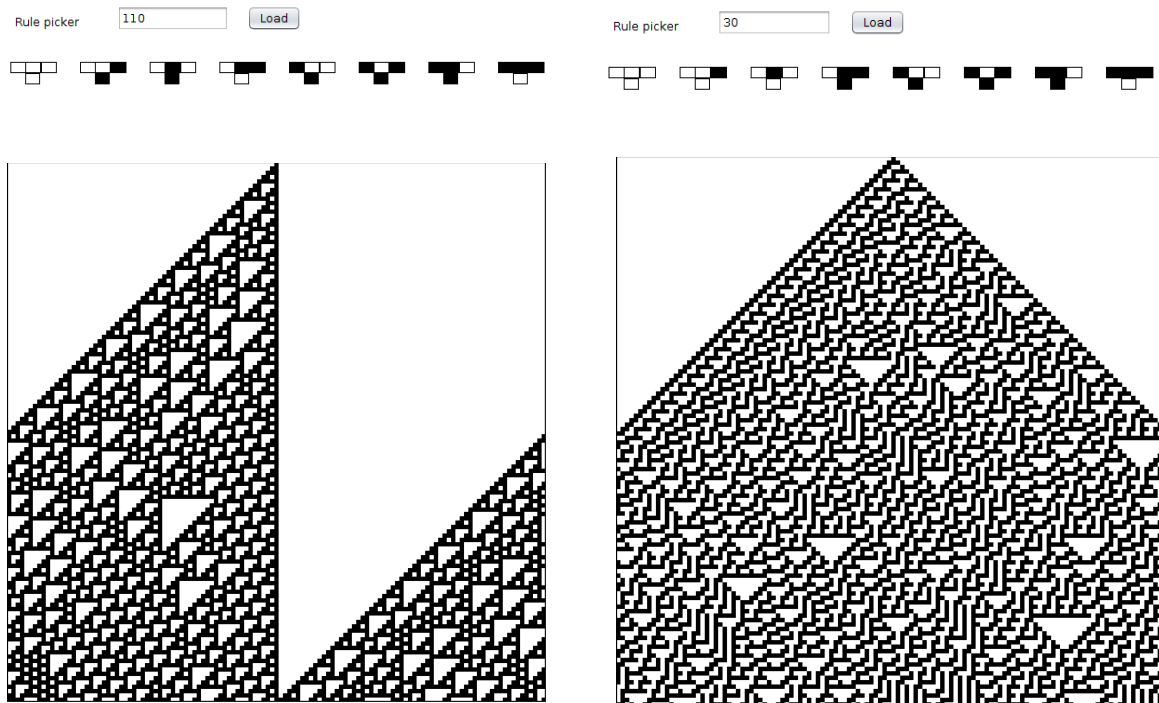
U daljem tekstu sva razmatranja odnose se pretežno na slučaj susjedstva  $n = 1$  binarnih jednodimenzionalnih ćelijskih automata.

Način na koji definisemo koje pravilo se koristi pri evoluciji ovih sistema, a predložio ga je Stephen Wolfram na početku izučavanja ove

oblasti, temelji se na enumeraciji pravila na osnovu bita u koje prelaze leksikografski poredane kombinacije susjedstva. To znaci da su susjedstva poredana kao na slici 12, dok redoslijed on/off stanja u koji ona prelaze predstavlja binarno zakodiran broj pravila. Tako na primjer pravilo na slici 12 je predstavljeno brojem  $01101110_2 = 110_{10}$ , gdje se nule i jedinice redom uzimaju kao off ili on stanja respektivno.

Ostaje jos i problem rubnih celija. Iako je u definiciji celijskog automata potencijalno beskonacna resetka, u realnim primjenama koristi se konacan broj celija u automatu, pa za jednodimenzionalni binarni slucaj koji ispitujuemo postoje celije koje se nalaze na krajevima niza i koje nemaju lijeve i desne susjede. Tako da je potrebno na neki nacin definisati susjedstvo i za njih.

Za ovaj problem koristi se nekoliko mogucih rjesenja u zavisnosti od primjene i svrhe u koju se koristi celijski automat. Moguce je zamisliti da se kraj i pocetak niza spajaju u torusnu topologiju, tako da je niz neprekidan i prva i posljednja celija su susjedne. Ovo je najcesce koristen model u teoretskim izucavanjima. Takodjer moguće su i alternative, kao npr. imati fiksne vrijednosti rubnih celija sto je korisno u odredjenim simulacijama protoka toplote i slicnih fizikalnih pojava. Pokazuje se da izbor ovih rubnih uslova nema veci efekat na kvantitativnu analizu (pogledati [6]).



Slika 13. pravila 110 i 30 u evoluciji (simulator)

Na slici 13 prikazana je graficka evolucija od nekoliko stotina koraka pravila 110 i 30 sa torusnom topologijom niza respektivno da bismo poceli uocavati komplektnost koja proizilazi iz nekih od najjednostavniji sistema izracunavanja koji mogu da se smisle. Kasnije cemo vidjeti da je moguće i formalnim putem pokazati da su ovi sistemi poprilično mocu sa strane mogucnosti izracunavanja generalnih funkcija – tj. simulacije ili ekvivalentnosti sa univerzalnom Turingovom masinom.

### **2.2.2 Pocetna zapazanja i klasifikacija pravila elementarnih celijskih automata**

Elementarni celijski automati predstavljaju poprilično jednostavne sisteme sa ne tako mnogobrojnim skupom pravila za evoluciju istih. Prije smo vidjeli da taj broj iznosi svega 256 sto omogucava cak i brute force pretrazivanje skupa pravila i ispitivanje osobina svakog pravila ponaosob. Cak i neka od prvih izucavanja bazirala su se upravo na ovom principu. Upravo ova jednostavnost koja ne umanjuje kompleksnost struktura koje se formiraju omogucava detaljno teoretsko izucavanje elementarnih celijskih automata za razliku od nekih drugih sistema sa podjednako kompleksnim formacijama.

## Reference

- [1] Schiff, Intro CA
- [2] Wolfram, A New Kind of Science
- [3] Cellular Automata »Wolfram, S. Los Alamos Science 9 (1983): 2-21.
- [4] Universality and Complexity in Cellular Automata »Wolfram, S. Physica D: Nonlinear Phenomena 10, no. 1-2 (1984): 1-35.
- [5] Cellular Automaton Supercomputing »Wolfram, S. In High-Speed Computing: Scientific Applications and Algorithm Design [Wilhelmson, R. B. (Ed.)]. University of Illinois Press, 40-48, 1988.
- [6] Statistical Mechanics of Cellular Automata »Wolfram, S. Reviews of Modern Physics 55, no. 3 (1983): 601-644