ESERCIZI INTEGRALI

1. Sia *f* una funzione continua sull'intervallo $\left[a;b\right]$ con $f(x) \leq 0$ e $\int_a^b f(x)dx = 0$. Allora *f* è identicamente nulla.

2. Trovare le primitive delle seguenti funzioni:
   a) $f(x) = 3x^2 - x^{-2/3}$; $\left[F\left(x\right) = x^3 - 3x^{1/3} + c\right]$
   b) $f(x) = \dfrac{6x}{(1+3x^2)^2}$; $\left[F\left(x\right) = -\left(1+3x^2\right)^{-1} + c\right]$
   c) $f(x) = -\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}$; $\left[F\left(x\right) = -\cos\dfrac{1}{x} + c\right]$
   d) $f(x) = \dfrac{x^{-1/2}}{2(1+x)}$. $\left[F\left(x\right) = \arctan\sqrt{x} + c\right]$

3. Calcolare i seguenti integrali:
   a) $\int_0^{\pi} \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$; $\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
   b) $\int_0^1 xe^{x^2}dx$; $\left[\dfrac{e-1}{2}\right]$
   c) $\int_0^{\sqrt{3}/2} \dfrac{1}{9+4x^2}dx$; $\left[\dfrac{\pi}{36}\right]$
   d) $\int_0^1 \dfrac{1-x^9}{1-x}dx$. $\left[\sum_{k=1}^{9} k^{-1}\right]$

4. Dimostrare che $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$.

$$\left[x = a - t \Rightarrow dx = -dt \Rightarrow \int_0^a f\left(a-x\right)dx = -\int_a^0 f\left(t\right)dt = \int_0^a f\left(t\right)dt\right]$$

5. L'immissione di rifiuti in una discarica viene sospesa quando viene raggiunta la quantità di 50 mila tonnellate. Da quel momento inizia il trasferimento dei rifiuti verso un'altra discarica al tasso di $P'(t) = -1{,}8t - 0{,}08t^2$, dove *t* è il tempo trascorso espresso in mesi. Si calcoli la quantità di rifiuti presente nella discarica dopo 3 mesi dal raggiungimento della quantità massima di rifiuti. $\left[P\left(3\right) = 41{,}18 \cdot 10^6 kg\right]$

Esercizi

1. $\int x\left(2x+5\right)^{10}dx$ $\left[2x+5 = t \Rightarrow F\left(x\right) = \dfrac{\left(2x+5\right)^{12}}{24} - \dfrac{\left(2x+5\right)^{11}}{22} + C\right]$

2. $\int \dfrac{1-x}{1+\sqrt{x}}dx$ $\left[\sqrt{x} = t \Rightarrow F\left(x\right) = x - \dfrac{2}{3}x^{3/2} + C\right]$

3. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$ $\left[2x+1 = t^2 \Rightarrow F\left(x\right) = \ln\left|\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right| + C\right]$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ $\left[e^x-1=t^2 \Rightarrow F(x)=2\arctan\sqrt{e^x-1}+C\right]$

5. $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx$ $\left[u=\ln x \Rightarrow du=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{u+\ln 2}{u+\ln 4}du \Rightarrow F(x)=\ln x-\left[\ln(\ln 4x)\right]\ln 2+C\right]$

6. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\left[u=\arcsin x \Rightarrow du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow F(x)=\frac{(\arcsin x)^3}{3}+C\right]$

7. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$ $\left[e^x+1=t^2 \Rightarrow F(x)=2\left(\frac{(e^x+1)^{3/2}}{3}-\sqrt{e^x+1}\right)+C\right]$

8. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$ $\left[u=\cos x \Rightarrow du=-\sin x dx \Rightarrow -\int \frac{1-u^2}{\sqrt{u}}du \Rightarrow F(x)=-2\sqrt{\cos x}+\frac{2}{5}(\cos x)^{5/2}+C\right]$

9. $^{*}\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ $\left[1+x^2=t^2 \Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)+C\right]$

Esercizi

1. $\int \ln x\, dx$ $\left[x\ln x-x+C\right]$
2. $\int \arcsin x\, dx$ $\left[x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C\right]$
3. $\int x\sin x\, dx$ $\left[-x\cos x+\sin x+C\right]$
4. $\int x\cos 3x\, dx$ $\left[\frac{x\sin 3x}{3}+\cos 3x+C\right]$
5. $\int xe^{-x}\, dx$ $\left[-e^{-x}(x+1)+C\right]$
6. $^{**}\int x^2e^{3x}\, dx$ $\left[\left(\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{9}+\frac{2}{27}\right)e^{3x}+C\right]$
7. $\int x^\alpha \ln x\, dx$ $\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x-\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}+C\right]$
8. $\int x\arctan x\, dx$ $\left[\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+\frac{\arctan x}{2}+C\right]$
9. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ $\left[x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C\right]$
10. $\int e^{ax}\sin bx\, dx$ $\left[\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C\right]$
11. $\int \sin(\ln x)dx$ $\left[\frac{x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))}{2}+C\right]$
12. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$ $\left[\ln x=u \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{du}{dx} \Rightarrow \ln x\left[\ln(\ln x)-1\right]+C\right]$
13. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$ $\left[x=t^2 \Rightarrow dx=2tdt \Rightarrow 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C\right]$

14. $\int (\arcsin x)^2\, dx$ $\left[x(\arcsin x)^2 + 2(\arcsin x)\sqrt{1-x^2} - 2x + C\right]$

15. $\int \frac{x^2 dx}{\left(1+x^2\right)^2}$ $\left[\int \frac{x^2 dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \int \frac{x \cdot x dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \ldots \Rightarrow -\frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{\arctan x}{2} + C\right]$

16. $\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}$ $\left[\int \frac{x^2+a^2-x^2}{a^2\left(x^2+a^2\right)^2} dx = \ldots \Rightarrow \frac{1}{2a^3}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)} + C\right]$

17. $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$ $\left[x = \sinh t \Rightarrow dx = \cosh t dt \Rightarrow \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right) + C\right]$

18. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$ $\left[\frac{x}{a} = \sin t \Rightarrow dx = a\cos t dt \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + \arcsin\frac{x}{a}\right) + C\right]$

** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}$ $\left[x+1 = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt \Rightarrow \ldots \ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2\left(1+x^2\right)}}{1+x}\right| + C\right]$