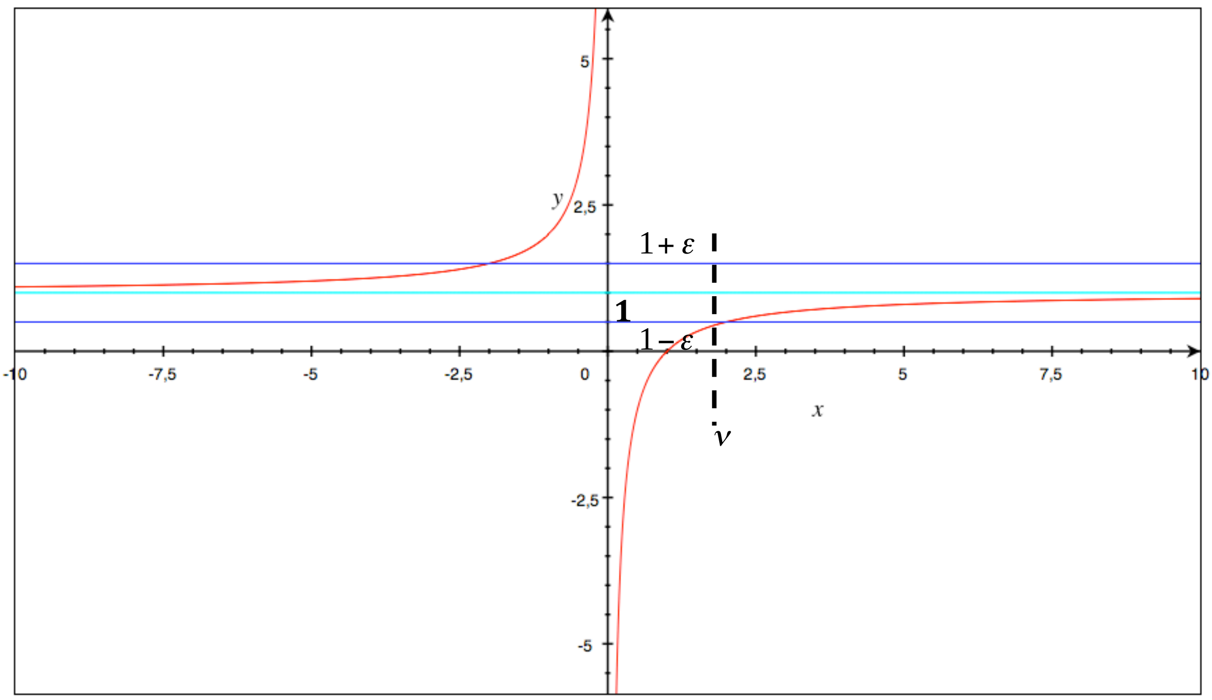
2.9 Limite finito di una funzione per *x* che tende all'infinito

Questa tipologia di limiti è quella che studia il comportamento delle funzioni, definite su sottoinsiemi illimitati della retta reale, quando la variabile indipendente assume valori molto grandi.

Consideriamo la funzione $f(x)=\frac{x-1}{x}$. Il suo insieme di definizione è $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ e vogliamo calcolare il $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}$. Sostituendo al posto di *x* alcuni valori "grandi", ci accorgiamo che l'immagine si avvicina al valore 1. Anche questa volta ci aiutiamo con il grafico della funzione, dal quale è possibile osservare che, *comunque si fissi un intorno circolare di 1,* $(1-\varepsilon;1+\varepsilon)$, *è possibile determinare un intorno di infinito, limitato inferiormente da un valore* ν *(evidenziato dal tratteggio in figura),* $(\nu;+\infty)$, *tale che per ogni x ad esso appartenente risulta* $f(x)\in(1-\varepsilon;1+\varepsilon)$.



Definizione: sia *f* una funzione definita in un intorno di infinito, e sia $l\in R$. Si dice che

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=l$$

se $\forall\varepsilon>0$ *esiste un intorno di infinito U tale che, per ogni* $x\in U$, *risulta* $|f(x)-l|<\varepsilon$.

La determinazione dell'intorno di infinito avviene di conseguenza a quella del valore ν visto in precedenza. Nel caso della funzione $f(x)=\frac{x-1}{x}$ un modo di procedere, analogo a quanto visto nello studio delle successioni numeriche, può essere il seguente:

$|f(x)-l|=\left|\frac{x-1}{x}-1\right|=\left|-\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon$, e da ciò segue che se $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$, allora $|f(x)-1|<\varepsilon$. Se prendiamo come valore $\nu:=\frac{1}{\varepsilon}$, l'intorno *U* di infinito è $\left(-\infty;-\frac{1}{\varepsilon}\right)\cup\left(\frac{1}{\varepsilon};+\infty\right)$.

Questo tipo di limiti è legato il concetto di *asintoto orizzontale* di una funzione. Nel caso precedente l'asintoto orizzontale (già noto dallo studio delle funzioni omografiche) è dato dalla retta di equazione $y=1$.

In generale si definisce asintoto orizzontale della funzione $y=f(x)$, la retta di equazione $y=l$, quando il $\lim_{x\to\infty}f(x)=l$ esiste finito.

I limiti di funzione per *x* che tende all'infinito, hanno *metodi di calcolo* sostanzialmente analoghi a quelli validi per i limiti di successioni. Per comodità viene riportata di seguito la definizione di successione convergente:

Definizione. Una successione si dice convergente a un numero L se per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste un numero naturale* n_0 *tale che*

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ per ogni } n \geq n_0.$$

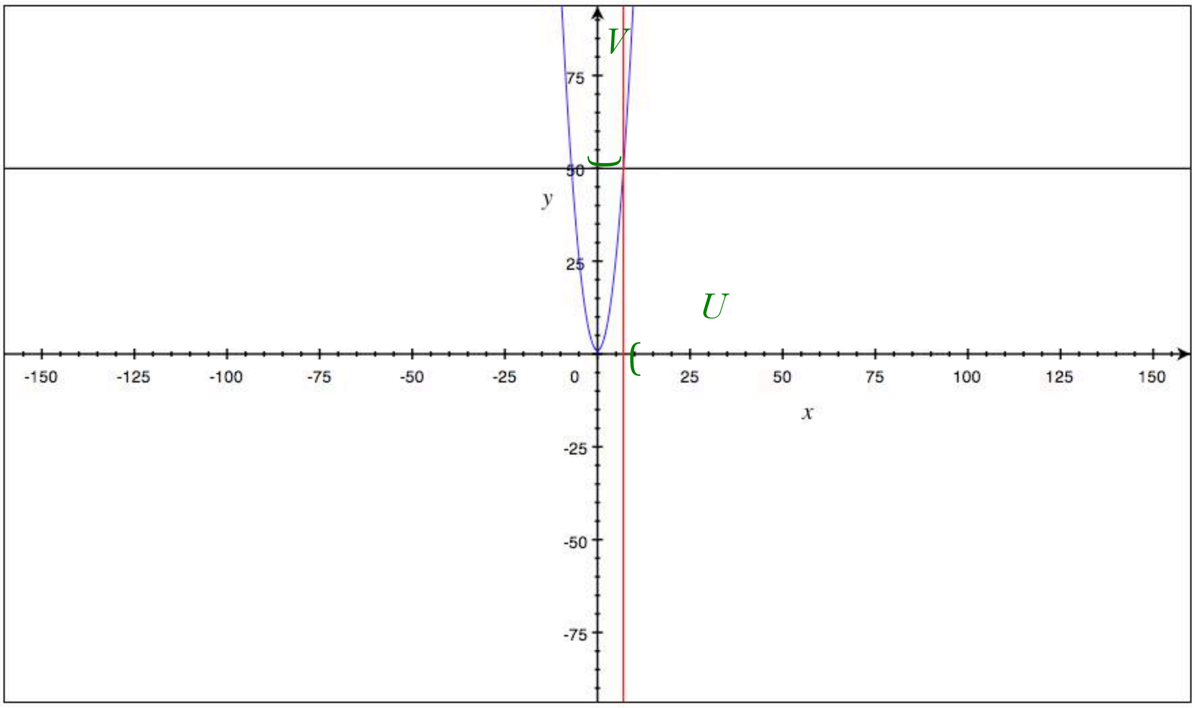
Esercizi

Verificare con la definizione i seguenti limiti di funzioni:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1 \qquad U = \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, +\infty\right)$;
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^{x^2}} = 0 \qquad U = \left(-\infty, -\sqrt{-\log_2 \varepsilon}\right) \cup \left(\sqrt{-\log_2 \varepsilon}, +\infty\right)$;
3. $* \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0 \qquad U = \left(-\infty, -\frac{1}{1-e^{-\varepsilon}}\right) \cup \left(\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}, +\infty\right)$;
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \qquad U = \left(\ln\left(1+\varepsilon^{-1}\right), +\infty\right)$;
5. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1 \qquad U = \left(-\infty, \ln\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$;
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1 \qquad U = \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2, +\infty\right)$;
7. $* \lim_{x\to+\infty} e^{-x} \sin x = 0$; (*ricordare che* $\sin x < 1$...) $\qquad U = (-\ln\varepsilon, +\infty)$

2.10 Limite infinito di una funzione per *x* che tende all'infinito

Consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = x^2 + 1$. Il grafico di questa funzione, come è noto, è rappresentato da una parabola, che sappiamo essere *illimitata*. Con questa tipologia di limiti abbiamo la possibilità di "formalizzare" questa proprietà delle funzioni nel caso generale.



Dal grafico si osserva che *comunque si fissi un intorno di infinito V sull'asse y, è possibile trovare un intorno di infinito U sull'asse x, tale che* $f(x) \in V \quad \forall x \in U$.

Definizione: sia *f* una funzione definita in un intorno di infinito. Si dice che

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

se $\forall K > 0$ *esiste un intorno di infinito U tale che, per ogni* $x \in U$, *risulta* $|f(x)| > K$.

Per mostrare un esempio di come si procede nella verifica di un limite di questo tipo, consideriamo il seguente: $\lim_{x \to \infty} \ln(1 + x^2) = \infty$.
Dobbiamo, in sostanza, far vedere che $\forall K > 0 \quad \exists U : \forall x \in U \Rightarrow \quad |f(x)| > K$. Valutiamo quindi la quantità:
$|\ln(1 + x^2)| > K \Rightarrow \ln(1 + x^2) > K \vee \ln(1 + x^2) < -K$.
$\ln(1 + x^2) > K \Rightarrow 1 + x^2 > e^K \Rightarrow |x| > \sqrt{e^K - 1}$, verificata $\forall K > 0$,
$\ln(1 + x^2) < -K \Rightarrow 1 + x^2 < e^{-K} \Rightarrow |x| < \sqrt{e^{-K} - 1}$, mai verificata se $K > 0$.
L'intorno d'infinito richiesto è $\left(-\infty; -\sqrt{e^K - 1}\right) \cup \left(\sqrt{e^K - 1}; +\infty\right)$, brevemente: $|x| > \sqrt{e^K - 1}$.

Esercizi

Verificare con la definizione i seguenti limiti di funzioni:

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{3 - x}{10} = \infty$ $\qquad U = (-\infty, 3 - 10K) \cup (3 + 10K, +\infty)$;
2. $\lim_{x \to \infty} (2x^3 - 1) = \infty$ $\qquad U = \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{1-K}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1+K}{2}}\right)$;
3. $\lim_{x \to +\infty} (1 + e^{2x}) = \infty$ $\qquad U = \left(\ln \frac{K-1}{2}, +\infty\right)$;

4. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x}=\infty$ $\qquad U=\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{9+4\log_2 K}}{2},\frac{3+\sqrt{9+4\log_2 K}}{2},+\infty\right)$;

5. $\lim_{x\to+\infty}\ln(\sqrt{x}-1)=\infty$ $\qquad U=\left(\left(e^K+1\right)^2,+\infty\right)$;

6. $\lim_{x\to\infty}x\sqrt{\frac{1}{x}+2}=\infty$ $\qquad U=\left(-\infty,\frac{2K}{1-\sqrt{1+8K^2}},\frac{2K}{1+\sqrt{1+8K^2}},+\infty\right)$

Limiti "che non esistono"

Se la definizione di limite non è verificata, il limite in questione non esiste: questo vuol dire, ad esempio, che *esiste un K>0 tale che per ogni intorno di infinito U, esiste almeno un* $x\in U$ *tale che* $|f(x)|<K$.

Cerchiamo di capire con i seguenti esempi il significato "vero" di quest'affermazione.

1. $\lim_{x\to\infty}x\sin x$;
   - Poiché $|\sin x|\le 1$, quando *x* tende a infinito, la quantità $x\sin x$ oscilla tra più e meno infinito. In particolare, $\forall x=\frac{4k+1}{2}\pi,\quad f(x)=\frac{4k+1}{2}\pi$, che tende ad infinito quando $k\in Z$ tende a più infinito, mentre $\forall x=\frac{4k-1}{2}\pi,\quad f(x)=-\frac{4k-1}{2}\pi$, che tende a meno infinito quando $k\in Z$ tende a più infinito.
2. $\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$;
   - In questo caso risulta $\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$ e $\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$. Poiché limite destro e limite sinistro non sono uguali, non esiste $\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$.

2.11 Alcuni risultati generali sui limiti

Ci proponiamo adesso di enunciare e dimostrare alcuni fatti di per sé piuttosto intuitivi, che trovano una giustificazione grazie al concetto di limite. Cominciamo osservando che:

1. Se $\lim_{x\to x_0}f(x)=l$, allora $\lim_{x\to x_0}\left[-f(x)\right]=-l$.
   - Infatti, dalla $|f(x)-l|<\varepsilon$ segue $l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon\Rightarrow -l-\varepsilon<-f(x)<-l+\varepsilon\Rightarrow|-f(x)-(-l)|<\varepsilon$ e quindi $\lim_{x\to x_0}\left[-f(x)\right]=-l$.
2. Se $\lim_{x\to x_0}f(x)=l$, allora $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-k\right]=l-k$.
   - Sempre dalla $|f(x)-l|<\varepsilon$ risulta $|f(x)-l|=|f(x)-k-l+k|=|(f(x)-k)-(l-k)|<\varepsilon$, di conseguenza $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-k\right]=l-k$.

Elenchiamo quindi i teoremi sui limiti, enunciandoli nel caso in cui *x* tende a valore finito, lasciando a chi legge lo sforzo di enunciare (e dimostrare!) gli analoghi risultati nel caso in cui *x* tende a infinito.

Teorema 1. Se $\lim_{x\to x_0}f(x)=m<\infty$, e $\lim_{x\to x_0}g(x)=n<\infty$, allora $\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=m\pm n$.

- *Osservazione 1.* Talvolta può accadere che $\lim_{x\to\infty}(f(x)\pm g(x))=m\pm n$, senza che esistano i limiti delle funzioni prese singolarmente, come accade nel caso di $\lim_{x\to\infty}(\sin^2 x+\cos^2 x)=1$.

Corollario 1.1. La somma e la differenza di funzioni continue è una funzione continua.

Teorema 2. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = m < \infty$ e $k \in R$, allora $\lim_{x\to x_0} k\cdot f(x) = k\cdot m$.

Teorema 3. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = m < \infty$, e $\lim_{x\to x_0} g(x) = n < \infty$, allora $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = m\cdot n$.
Corollario 3.1. Il prodotto di funzioni continue è una funzione continua.
Corollario 3.2. Se *f* e *g* sono funzioni continue, allora la funzione f^g è una funzione continua nei punti in cui *f* è positiva e *g* è definita.
Dimostrazione. Si scrive la funzione nella forma $\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$, si applica il teorema della continuità della funzione composta, e si sfrutta la continuità del prodotto di funzioni continue.
Osservazione. Un esempio in cui il teorema 3 non si può invertire è dato da $f(x) = x; g(x) = \frac{1}{x}$.
Teorema 4. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = m < \infty$ con $m > 0$ e $k \in R$, allora $\lim_{x\to x_0}(f(x))^k = m^k$.
Corollario 4.1. Le funzioni polinomiali sono funzioni continue.
Corollario 4.2. Le funzioni seno e coseno sono funzioni continue (*si applichi la definizione* $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ *e le formule di addizione...*).
Teorema 5. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = m < \infty$ con $m \neq 0$, allora $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{m}$.
Teorema 6. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = m < \infty$, e $\lim_{x\to x_0} g(x) = n < \infty$ con $n \neq 0$, allora $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{m}{n}$.
Esercizio. Dimostrare che la tangente e la cotangente dell'angolo sono funzioni continue.
Meritano una particolare attenzione le cosiddette *forme di indecisione*, ovvero quelle espressioni del tipo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty\cdot 0, \infty - \infty$, per le quali *non esiste* una regola universale che permette di *scioglierle*, cioè di determinarne il valore; occorre analizzare il singolo caso in cui queste si presentano. Per esempio

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|} = \frac{0}{0} \Rightarrow \begin{matrix} \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \\ \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} -x = 0 \end{matrix} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|} = 0.$$

Finora abbiamo sempre visto che, quando esiste, il limite è "unico": la funzione non può assumere più di un valore limite quando la variabile indipendente tende ad un certo valore della retta reale *estesa* (comprendente, cioè, anche infinito). In realtà questo succede sempre nel contesto topologico in cui stiamo lavorando. La formalizzazione dell'unicità del limite avviene tramite il seguente:

Teorema dell'unicità del limite. Se esiste finito il $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, con la funzione definita in un intorno di x_0, escluso al più x_0, allora questo è unico.
Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due valori limite $l \neq l'$. L'arbitrarietà di scelta di ε nella definizione di limite ci permette di prenderlo tale che $|l - l'| > \varepsilon$. Poiché $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = l'$, per tale ε esistono un intorno $I(x_0)$ ed un intorno $I'(x_0)$ tali che

$|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in I(x_0)$ e $|f(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in I'(x_0)$, escluso al più x_0. Tuttavia, per la scelta di ε, e per la *disuguaglianza triangolare*($|a + b| < |a| + |b|$), risulta che

$\varepsilon < |l - l'| = |(f(x) - l') - (f(x) - l)| < |f(x) - l'| + |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Siamo giunti così ad una conclusione assurda, quindi il limite, se esiste, è unico.

Teorema della permanenza del segno. Se esiste finito il $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, con la funzione definita in un intorno di x_0, escluso al più x_0, allora esiste un intorno $U(x_0)$, con esclusione eventuale di x_0, tale che per ogni $x\in U(x_0)$, $f(x)$ ha lo tesso segno di *l*.

Dimostrazione. Nella definizione di limite si prende $\varepsilon=\frac{|l|}{2}$ e risulta $l-\frac{|l|}{2}<f(x)<l+\frac{|l|}{2}$. Si hanno quindi due casi: $l>0 \quad \Rightarrow f(x)>\frac{l}{2}>0$ e $l<0 \quad \Rightarrow f(x)<\frac{l}{2}<0$.

Teorema del confronto. In un intorno di x_0, escluso al più x_0, siano definite $g(x)\le f(x)\le h(x)$, e sia $\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=l<\infty$. Allora $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$.

Dimostrazione. Sia $I(x_0)$ l'intorno in cui $g(x)\le f(x)\le h(x)$. Per ipotesi risulta che $\forall\varepsilon>0$ esistono $U(x_0)\,|\,l-\varepsilon<g(x)<l+\varepsilon, \quad \forall x\in U(x_0)$ e $V(x_0)\,|\,l-\varepsilon<h(x)<l+\varepsilon, \quad \forall x\in V(x_0)$, escluso al più x_0. Ora, definito l'intorno $W=I\cap U\cap V$, si ha $l-\varepsilon<g(x)\le f(x)\le h(x)<l+\varepsilon \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$ per ogni $x\in W$ da cui segue $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$.

Come applicazione del teorema del confronto possiamo dimostrare il seguente *limite notevole*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Dimostrazione. Dalla circonferenza goniometrica risulta che l'area del settore circolare *OAP* è compresa tra quella del triangolo *OPH* e quella del triangolo *OAT*:

$$\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x.$$

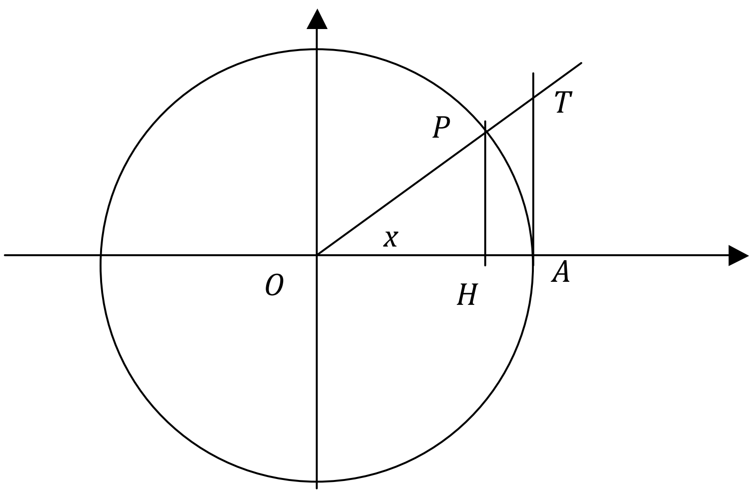
Quando l'angolo si avvicina a zero, il seno si mantiene vicino al valore zero senza mai raggiungerlo, se non quando l'angolo è proprio zero. Scartando questa eventualità (che nei teoremi appena analizzati era riassunta dall'ipotesi "escluso al più x_0") è possibile dividere per la quantità $\sin x$ (l'angolo si considera vicino a zero per valori maggiori di zero) ed ottenere:

$$\cos x<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

Le grandezze in questione sono tutte positive per la scelta dell'angolo *x*, quindi

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x}.$$

Poiché risulta $\lim_{x\to 0^+}\cos x=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos x}=1$, per il teorema del confronto si ha quindi $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$.



La dimostrazione si completa con la verifica che anche $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1.$

2.12 LIMITI NOTEVOLI

Il calcolo dei limiti (non la verifica mediante la definizione!) si fonda essenzialmente sull'applicazione diretta (o dopo qualche "arrangiamento") dei teoremi appena visti, e su alcuni "casi particolari" (che nel caso in cui *x* tende ad infinito si possono desumere da casi analoghi definiti per *successioni*, operazione garantita dal cosiddetto *teorema di collegamento*) che, per la frequenza con cui si presentano nella pratica, possono essere considerati dei veri e propri punti di riferimento, da qui il nome di *limiti notevoli*.
Un risultato molto importante che lega il concetto di limite di funzione a quello di limite di successione è rappresentato dal seguente teorema.

*Teorema (**di collegamento**)* Si ha

$$L=\lim_{x\to x_0} f(x),$$

se e solo se *per ogni* successione x_n convergente a x_0, ma con $x_n \neq x_0$ (e x_n appartenente all'insieme di definizione di *f*) abbiamo

$$L=\lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Dimostrazione. Si supponga che $L=\lim_{x\to x_0} f(x)$ e sia x_n una successione convergente a x_0 (con $x_n \neq x_0$). Dalla definizione di limite, dato $\varepsilon>0,\exists\delta>0 \mid \forall 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$ Di conseguenza, dalla convergenza di x_n segue che definitivamente $0<|x_n-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x_n)-L|<\varepsilon,$ da cui $L=\lim_{n\to\infty} f(x_n).$

Viceversa, supponiamo falsa la tesi $L=\lim_{x\to x_0} f(x)$ e facciamo vedere che esiste (almeno) una successione x_n convergente a x_0 per la quale non si ha $L=\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ (negazione dell'ipotesi vera).
Negare che $L=\lim_{x\to x_0} f(x)$ significa affermare che *esiste un* $\varepsilon_0>0$ tale che, *comunque* si prenda $\delta>0$ è possibile trovare un *x* con $0<|x-x|<\delta$ e $|f(x)-L|\geq\varepsilon_0$. Scelto progressivamente $\delta=1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ si trovano x_n, termini di una successione, con $0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$ e $|f(x_n)-L|\geq\varepsilon_0$ e ciò contraddice $L=\lim_{n\to\infty} f(x_n),$ essendo la successione x_n formata convergente a x_0 (c.v.d.).

Con questo teorema è dunque lecito sfruttare i limiti di successioni per il calcolo di quelli di funzioni, ma anche per verificare che una data funzione non ha limite, come per esempio la funzione $f(x)=\sin^2\frac{1}{x}$ definita per $x\neq 0$: le successioni $x_n=\frac{2}{(2n+1)\pi}$ e $z_n=\frac{1}{n\pi}$ sono ambedue convergenti a 0, ma $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\sin^2(2n+1)\frac{\pi}{2}=1\neq\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\sin^2 n\pi=0.$

Suddividiamo l'analisi dei limiti notevoli per tipologia di funzioni.

Limiti di funzioni goniometriche

Abbiamo già dimostrato il limite notevole:

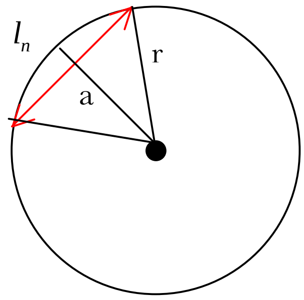
$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Da questo segue un altro limite notevole:

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Dimostrazione. Scriviamo il limite nella forma $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}$; quando $x\to 0$ il primo fattore tende a 1, mentre il secondo tende ad $\frac{1}{2}$.

Un'interessante applicazione di questo limite notevole è rappresentata dal valore a cui tende la misura del perimetro di un poligono regolare inscritto in una circonferenza, quando il numero dei lati cresce indefinitamente:



Indicato con P_n il perimetro del poligono di *n* lati inscritto nella circonferenza, con *a* l'apotema di uno degli *n* triangoli in cui è possibile scomporre il poligono, risulta dal teorema di Pitagora e da quello di collegamento:

$$P_n=n\cdot l_n=n\cdot 2\sqrt{r^2-a^2}=n\cdot 2\sqrt{r^2-\left(r\cos\frac{2\pi}{2n}\right)^2}=n\cdot 2r\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{n}}=n\cdot 2r\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{n}}\cdot\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Moltiplicando e dividendo l'ultimo termine per la quantità $\frac{\pi}{n}$, è possibile ricondurre il calcolo del perimetro a quello del limite notevole 2:

$$P_n=n\cdot 2r\cdot\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}}\cdot\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}$$ da cui segue

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\cancel{n}\cdot 2r\cdot\frac{\pi}{\cancel{n}}\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}}\cdot\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}=2\pi r\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2}=2\pi r.$$

Esercizio. Si scriva l'espressione del perimetro del poligono regolare di *n* lati circoscritto ad una circonferenza, e si calcoli il valore a cui tende al crescere del numero dei lati. $P_n=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}}$.

Altri due limiti notevoli che derivano dal primo sono i seguenti:

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ e 4. $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$ (*Si ponga* $x=\tan z$...).

In generale risulta (per la continuità della funzione composta) che se $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$, allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos f(x)}{[f(x)]^2}=\frac{1}{2};\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan f(x)}{f(x)}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\arctan f(x)}{f(x)}=1$$

Le implicazioni di questi risultati sono varie, tuttavia è importante intravedere in questi limiti la possibilità di *approssimare*, nelle vicinanze di zero, alcune funzioni con funzioni polinomiali: la funzione seno, la funzione tangente e la funzione arcotangente si possono approssimare con la funzione $f(x)=x$, mentre la funzione coseno con la funzione $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$.

Esercizi

Calcolare i seguenti limiti di funzioni

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ $\quad 0$;
2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\tan 2x}$ $\quad \frac{1}{4}$;
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x-1}$ $\quad -1$;
4. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{2\sin^2\frac{x}{2}}$ (*sviluppo della differenza di cubi al numeratore ed applicazione delle formule di bisezione al denominatore...*); $\quad 3$
5. $\lim_{x\to \alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$; (*sostituzione* $x-\alpha=t$, *di conseguenza t tende a zero...*). $\quad \cos\alpha$.

Limiti di funzioni razionali

Funzioni razionali intere

L'espressione analitica di una funzione razionale intera è un polinomio di grado *n*:

$$f(x):=P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

Si tratta di una funzione continua su tutto l'insieme dei numeri reali ed il suo comportamento quando *x* tende ad infinito è "governato" dal monomio di grado massimo. Per convincersi di ciò è sufficiente scrivere il polinomio così:

$$f(x)=x^n\left(a_n+a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{x^n}+\cdots+a_1\frac{x}{x^n}+a_0\frac{1}{x^n}\right),$$

di conseguenza

$$\lim_{x\to\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=\lim_{x\to\infty}a_nx^n.$$

Funzioni razionali fratte

L'espressione analitica di una funzione razionale fratta è data da un rapporto di polinomi:

$$f(x):=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_mx+b_0}.$$

Si osserva immediatamente che una funzione razionale intera è definita (continua) in tutti i punti in cui *non si annulla* il polinomio a denominatore; dove questo si annulla è possibile distinguere due casi:

5. $P_n(x_0)\neq 0\wedge Q_m(x_0)=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\infty$;
6. $P_n(x_0)=0\wedge Q_m(x_0)=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{0}{0}=?$.

Per il calcolo del limite per *x* che tende ad infinto, in base al grado dei polinomi al numeratore ed al denominatore, si hanno le seguenti 3 possibilità:

7. $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_m x + b_0} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^{n-m}}{b_m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & n = m \\ 0 & n < m \\ \infty & n > m \end{cases}.$$

Esercizi

1. $\lim_{x\to-\infty} 3x^2 - 4x^3 + 1$ $\quad +\infty$;
2. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ $\quad -2$;
3. $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ $\quad \frac{1}{4}$;
4. $\lim_{x\to3}\frac{x^2}{x-3}$ $\quad \pm\infty$;
5. $\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$ $\quad \frac{3a}{2}$;
6. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-x}{1+4x}$ $\quad +\infty$;
7. $*\lim_{x\to\infty}\arcsin\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)$ $\quad -\frac{\pi}{2}$;

Limiti di funzioni irrazionali

Consideriamo inizialmente le funzioni la cui espressione analitica è un radicale con argomento una funzione razionale; quando avremo fatto "un po' di pratica" ci occuperemo anche del caso generale.

Per quanto riguarda il calcolo di limiti di funzioni del tipo

$$f(x) := \sqrt[k]{P_n(x)},$$

oppure

$$f(x) := \sqrt[k]{\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}},$$

si possono fare considerazioni del tutto analoghe al caso delle funzioni razionali. Per il calcolo di limiti come

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2}-x),$$

che portano ad una forma di indecisione del tipo $\infty-\infty$, la *razionalizzazione ed i prodotti notevoli* sono gli strumenti da utilizzare per sciogliere la forma di indecisione ottenuta. Nel caso del limite sopra si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2}-x)(\sqrt{x^2-2}+x)}{(\sqrt{x^2-2}+x)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2-x^2}{(\sqrt{x^2-2}+x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+1\right)} = \frac{-2}{+\infty\left(\sqrt{1-0}+1\right)} = 0.$$

Esercizi

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ $\qquad 0$;
2. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-x-1}$ $\qquad \frac{1}{2\sqrt{2}}$;
3. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x^2+x+1}-2}$ $\qquad \frac{2}{5}$;
4. $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$ $\qquad 2$.

Limiti di funzioni esponenziali e logaritmiche

Come sappiamo, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Se passiamo dalle successioni alle funzioni (utilizzando il teorema di collegamento) risulta:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Sempre grazie al teorema di collegamento, ed alla sostituzione $t=\frac{1}{x}$, si ha il seguente limite notevole:

$$8.\ \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

La continuità della funzione composta permette di concludere che, se $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, allora

$$\lim_{x\to0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e,$$

e che, se $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, allora

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e.$$

Il limite 8 e le proprietà dei logaritmi, oltre alla solita continuità della funzione composta, permettono di dimostrare il seguente limite:

$$9.\ \lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

Dimostrazione. Si ha $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left[\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e$.

Nel caso dei logaritmi naturali il limite 9 diventa:

$$10.\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Un altro limite interessante è il seguente:

$$11.\ \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a.$$

Dimostrazione. Con la sostituzione $a^x-1=t \Rightarrow x=\log_a(t+1)$ il limite si scrive nella forma $\lim_{t\to0}\frac{t}{\log_a(1+t)}$, da cui segue $\lim_{t\to0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$.

Esercizio. Giustificare i passaggi della dimostrazione precedente, utilizzando i risultati teorici visti fin qui.

Quando la base dell'esponenziale è *e* il limite di cui sopra diventa:

$$12.\ \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

L'ultimo limite che prendiamo in considerazione è il seguente:

$$13.\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k.$$

Dimostrazione. Poniamo $(1+x)^k-1=t \Rightarrow k\ln(1+x)=\ln(t+1)$, di conseguenza $x\to 0 \Leftrightarrow t\to 0$.
Questa osservazione ci porta a scrivere

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ t\to 0}}\frac{t}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ t\to 0}}\frac{t\cdot\ln(1+t)}{x\cdot\ln(1+t)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ t\to 0}}\frac{t\cdot k\ln(x+1)}{x\cdot\ln(1+t)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ t\to 0}}\frac{k\ln(x+1)}{x}\cdot\frac{t}{\ln(t+1)}=k.$$

Esercizio. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}x^x.$$

Soluzione. Si osserva subito che, essendo una potenza ad esponente reale, l'insieme di definizione è $\{x\in R \mid x>0\}$, quindi ci limitiamo a calcolare il limite destro. La successione $x_n=\frac{1}{n}$ converge a zero: per il teorema di collegamento, il limite richiesto vale, essendo $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,

$$\lim_{x\to 0}x^x=\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{1}=1.$$

Osservazione. In realtà, il procedimento seguito non è corretto. Infatti, il teorema di collegamento ci assicura il risultato se questo è ottenuto *per ogni* successione $x_n\to x_0$, cosa impossibile da realizzare. Tuttavia, come avremo modo di dimostrare in seguito, il risultato del limite è effettivamente quello ottenuto. Alla luce di questa considerazione, possiamo affermare che il teorema di collegamento è uno strumento efficace per dimostrare che un determinato limite *non* esiste; infatti, è sufficiente trovare due successioni $x_n\to x_0$, $y_n\to x_0$, tali che $\lim_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim_{n\to\infty}f(y_n)$.

Esercizi riepilogativi
Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

1. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$ $\qquad \frac{1}{2}$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{(1+x)^2}}{3x}$ $\qquad -\frac{2}{9}$

3. Determinare, in base al parametro α, il $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^\alpha\right)}{x^2}$ $\qquad \begin{matrix} +\infty & 0<\alpha<2\\ 1 & \alpha=2\\ 0 & \alpha>2\end{matrix}$.

4. Determinare al variare del parametro α il valore del limite $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x^\alpha+1}\right)$

   • $\begin{matrix} 0 & \alpha<1\\ -\frac{1}{2} & \alpha=1\\ -\infty & \alpha>1\end{matrix}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-\cos x}{x\sin x}$ $\qquad \frac{1}{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2\sqrt{x}}-1}{1-5^{\sqrt{x}}}$ $\qquad -\dfrac{\ln 9}{\ln 5}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\log(1+4x)}$ $\qquad \dfrac{1}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x+1}$ $\qquad e^2$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1+3\log(1+2x)}{3x}$ $\qquad \dfrac{8}{3}$

10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x+1\right)^{\frac{1}{\log x}}$ $\qquad e$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin x\tan x}{x\sin 2x}$ $\qquad \dfrac{5}{2}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^4-1}{2x}$ $\qquad 6$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2^x}-1}{4^x-1}$ $\qquad \dfrac{1}{4}$

14.
$a)$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x\cos 5x}{\sin 5x}\right)$ $\qquad \dfrac{4}{5}$

$b)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-1}{\sqrt{3^x}-1}$ $\qquad 4$

15. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{-\frac{3}{x}}$ $\qquad e^{-6}$

16. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(2x-\pi\right)^2}{2\cos^2 x+\sin x-1}$ $\qquad \dfrac{8}{3}$

17. $\lim\limits_{x\to \infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x+\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x\right]$ $\qquad e+e^2$

18. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ $\qquad e^{-1}$

19. $\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x-2}-1}{x^2+2x-3}$ $\qquad \frac{1}{2}$

20. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x}\right)^{\frac{1}{2+\log x}}$ $\qquad e^{-1}$

21. $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 2x\tan x}{2x\sin x}$ $\qquad 3$

22. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+2x)^2}-1}{x}$ $\qquad \frac{4}{3}$

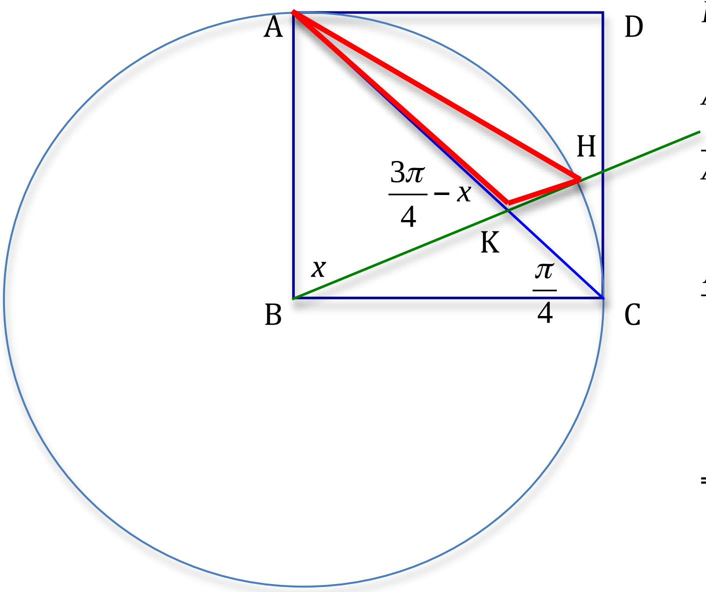
23. $\lim_{x\to 0}\frac{5^{\sqrt{x}}-1}{1-2^{\sqrt{x}}}$ $\qquad -\frac{\ln 5}{\ln 2}$

24. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{\log(1+x)}$ $\qquad -1$

25. Calcolare il valore del $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^\alpha)\tan x}{2x^{1-\alpha}\sin x}$ al variare del parametro positivo $\alpha\in R$.

$$\begin{cases} +\infty & 0<\alpha<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha=\frac{1}{2} \\ 0 & \alpha>\frac{1}{2} \end{cases}$$

26. Si costruisca la diagonale AC sul quadrato ABCD, e si consideri l'arco di cerchio con centro in B, e raggio uguale al lato del quadrato. Indicati rispettivamente con H e K i punti in cui una semiretta condotta da B incontra l'arco di cerchio e la diagonale, si calcoli il $\lim_{H\to A}\frac{Area(AHK)}{Area(BKA)}$.



Posto $H\hat{B}C := x$ si ha:

$B\hat{A}H = K\hat{H}A = \frac{\pi-x}{2}$, $K\hat{A}H = \frac{\pi-2x}{4}$,

$A\hat{K}H = \frac{\pi}{4}+x$.

$\overline{AH}^2 = 2l^2(1-\cos x)$,

$$\frac{Area(AHK)}{Area(BKA)} = \frac{\dfrac{\overline{AH}\cdot\overline{AK}\sin(K\hat{A}H)}{2}}{\dfrac{\overline{AK}\cdot\overline{AB}\sin(B\hat{A}C)}{2}} = \frac{2l\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\xrightarrow[x\to 0]{}0$$