3.9 Grafici di funzioni

Per tracciare il grafico di una funzione reale di variabile reale si segue il seguente schema generale:

a. Dominio;
b. Simmetrie e periodicità;
c. Intersezioni con gli assi;
d. Segno;
e. Limiti agli estremi del dominio;
f. Crescenza (studio del segno della derivata prima);
g. Concavità (studio del segno della derivata seconda);
h. Asintoti: $\begin{cases} \textit{orizzontale}: & y = l & \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \\ \textit{verticale}: & x = c & \lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty \\ \textit{obliquo}: & y = mx + q & \begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ q = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - mx \right] \end{array} \end{cases}$

Vogliamo analizzare diversi casi allo scopo di coinvolgere tutte le funzioni "classiche" che abbiamo incontrato finora.

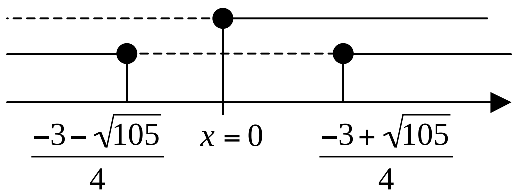
1. $y = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 12x}{6}$.

   a. Il dominio è dato da tutto l'insieme dei numeri reali;
   b. La funzione non risulta essere né simmetrica, né periodica;
   c. Intersezioni con l'asse x:

   $$\begin{cases} y = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 12x}{6} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x(2x^2 + 3x - 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{-3 + \sqrt{105}}{4} \\ x = \dfrac{-3 - \sqrt{105}}{4} \end{cases};$$

   intersezioni con l'asse y: $\begin{cases} y = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 12x}{6} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$ (il grafico della funzione passa per l'origine);

   d. $y = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 12x}{6} \geq 0 \Rightarrow x(2x^2 + 3x - 12) \geq 0$;

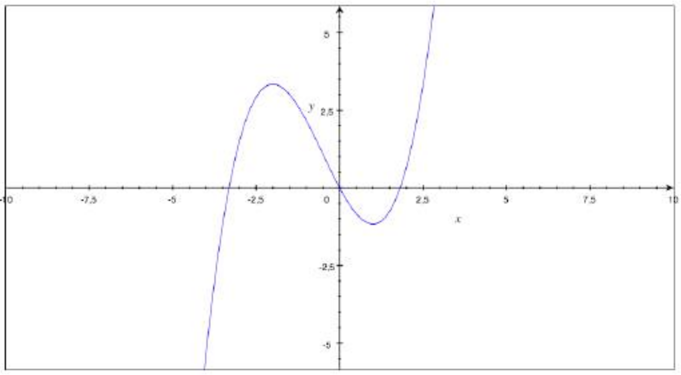
   

   e. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 12x}{6} = \pm\infty$;

   f. $y = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 12x}{6} \Rightarrow y' = \dfrac{6x^2 + 6x - 12}{6} = x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 1$;

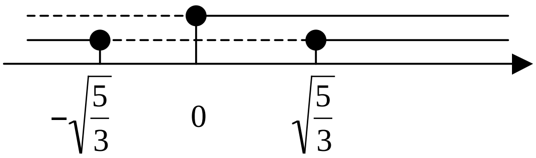
   g. $y' = x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow y'' = 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$;

   h. Poiché $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 12x}{6} = \pm\infty$ e $D \equiv R$, non esistono né asintoto orizzontale, né asintoto verticale. Essendo $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty\infty} \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 12x}{6x} = \infty$, non esiste neanche asintoto obliquo.

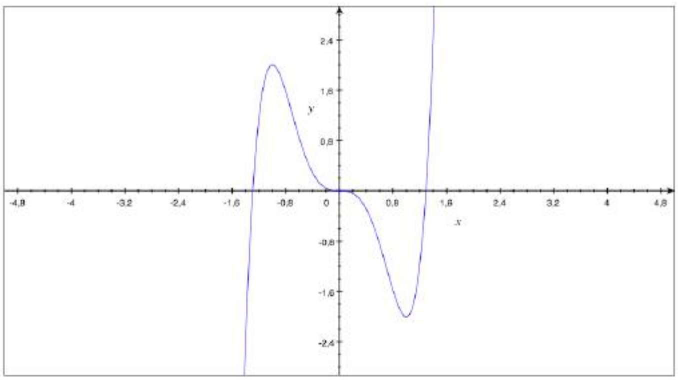


2. $y = 3x^5 - 5x^3$
   a. Si tratta di una funzione polinomiale, quindi è definita su tutto l'insieme dei numeri reali.
   b. $f(-x) = 3(-x)^5 - 5(-x)^3 = -3x^5 + 5x^3 = -f(x)$. La funzione è dispari, quindi simmetrica rispetto all'origine.
   c. Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = 3x^5 - 5x^3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x^5 - 5x^3 = 0 \Rightarrow x^3(3x^2 - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{5}{3}} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{\dfrac{5}{3}} \end{cases}$;

      intersezioni con l'asse y: $\begin{cases} y = 3x^5 - 5x^3 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$ (passa per l'origine, come tutte le funzioni dispari).
   d. $y = 3x^5 - 5x^3 \geq 0 \Rightarrow x^3(3x^2 - 5) \geq 0$
   e. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} 3x^5 - 5x^3 = \pm\infty$.

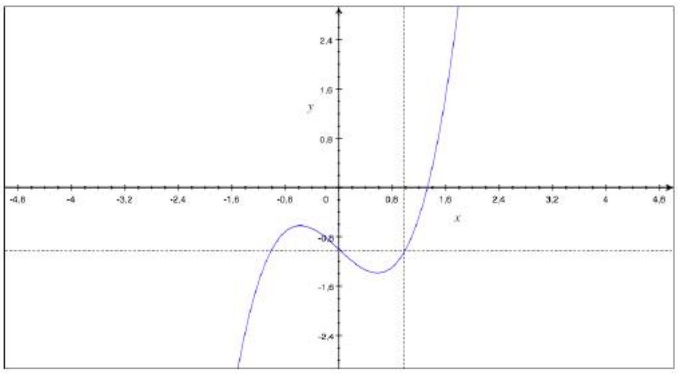


   f. $y = 3x^5 - 5x^3 \Rightarrow y' = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1$.
   g. $y' = 15x^2(x^2 - 1) \Rightarrow y'' = 15\left[2x(x^2 - 1) + x^2 2x\right] = 30x\left[2x^2 - 1\right] \geq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0 \vee x \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
   h. Poiché $\lim\limits_{x \to \pm\infty} 3x^5 - 5x^3 = \pm\infty$ e $D \equiv R$, non esistono né asintoto orizzontale, né asintoto verticale. Essendo $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^5 - 5x^3}{x} = \infty$, non esiste neanche asintoto obliquo.



3. $y = x^3 - x - 1$

a. Si tratta di una funzione polinomiale, quindi è definita su tutto l'insieme dei numeri reali.
b. La funzione non è né pari, né dispari.
c. Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = x^3 - x - 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 - x - 1 = 0$. L'equazione di terzo grado in questione non è di agevole soluzione senza formula risolutiva. Tuttavia, poiché $f(0)\cdot f(2) < 0$, sicuramente una radice si trova nell'intervallo $(0;2)$. Intersezioni con l'asse y: $\begin{cases} y = x^3 - x - 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -1$.
d. Anche lo studio del segno, al pari della ricerca degli zeri, non è una questione di facile risoluzione.
e. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3 - x - 1 = \pm\infty$.
f. $y = x^3 - x - 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$. In particolare il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ sarà di massimo relativo, mentre $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ sarà di minimo relativo (la conferma ci verrà data dallo studio del segno della derivata seconda). In particolare, essendo le immagini dei punti stazionari sono negative, l'equazione $x^3 - x - 1 = 0$ ammette una sola soluzione (quella compresa tra 0 e 2).
g. $y' = 3x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow y'' = 6x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$: la funzione sarà convessa per $x \geq 0$, concava altrimenti.
h. Poiché $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3 - x - 1 = \pm\infty$ e $D \equiv R$, non esistono né asintoto orizzontale, né asintoto verticale. Essendo $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3 - x - 1}{x} = \infty$, non esiste neanche asintoto obliquo.



4. $y = \frac{x}{x^2+1}$

a. La funzione è razionale fratta con denominatore sempre diverso da zero. Di conseguenza il dominio coincide con l'insieme ei numeri reali.
b. $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$: la funzione è dispari (simmetrica rispetto all'origine).
c. Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = \frac{x}{x^2+1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; intersezioni con l'asse y: $\begin{cases} y = \frac{x}{x^2+1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

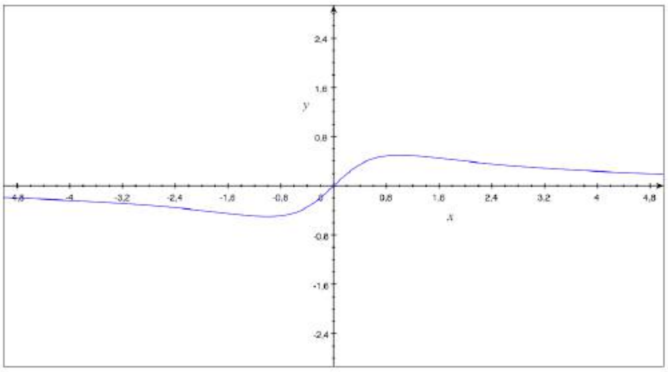
d. $\dfrac{x}{x^2+1} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$

e. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$. La funzione ha per asintoto orizzontale l'asse delle ascisse.

f. $y = \dfrac{x}{x^2+1} \Rightarrow y' = \dfrac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 1.$

g. $y' = \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{-2x\left(x^2+1\right)^2 - \left(1-x^2\right)2\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4} = \dfrac{2x(x^2-3)}{\left(x^2+1\right)^3} \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq 0 \vee x \geq \sqrt{3}$

h. La presenza dell'asintoto orizzontale esclude quella dell'asintoto obliquo.



5. $y = \dfrac{3x-x^2}{x-4}$

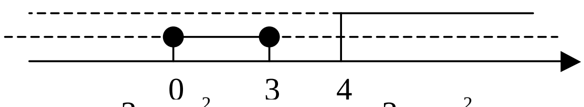
a. Il dominio è dato dall'insieme $D \equiv \{x \in R \mid x \neq 4\}$.

b. La funzione non è né pari né dispari.

c. Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = \dfrac{3x-x^2}{x-4} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{3x-x^2}{x-4} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 3$. Intersezioni con l'asse y:

$\begin{cases} y = \dfrac{3x-x^2}{x-4} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{3x-x^2}{x-4} = \dfrac{0}{-4} \Rightarrow y = 0.$

d. $\dfrac{3x-x^2}{x-4} \geq 0$



$x \leq 0 \vee 3 \leq x < 4$

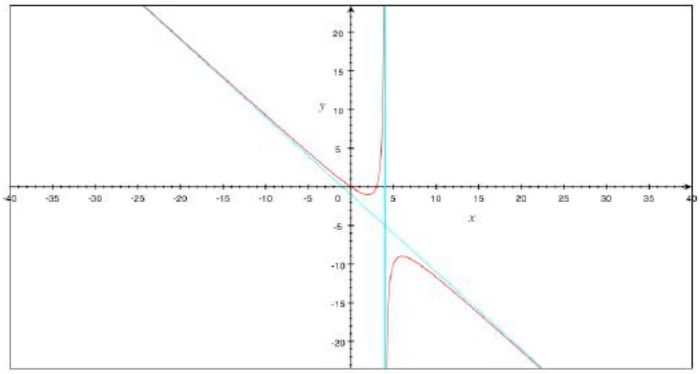
e. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-x^2}{x-4} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to4^-} \dfrac{3x-x^2}{x-4} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to4^+} \dfrac{3x-x^2}{x-4} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-x^2}{x-4} = -\infty$;

f. $y = \dfrac{3x-x^2}{x-4} \Rightarrow y' = \dfrac{(3-2x)(x-4)-3x+x^2}{(x-4)^2} = \dfrac{3x-12-2x^2+8x-3x+x^2}{(x-4)^2} =$

$-\dfrac{x^2-8x+12}{(x-4)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 6$

g. $y' = -\dfrac{x^2-8x+12}{(x-4)^2} \Rightarrow y'' = -\dfrac{2(x-4)^3 - 2(x-4)(x^2-8x+12)}{(x-4)^4} = \dfrac{-8}{(x-4)^3} \geq 0 \Leftrightarrow x < 4$.

h. La funzione ha un asintoto verticale nella retta $x = 4$. Si ha $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-x^2}{x^2-4x} = -1$ e $q = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-x^2}{x-4} + x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x - x^2 + x^2 - 4x}{x-4} = -1$: l'asintoto obliquo è la retta $y = -x-1$.



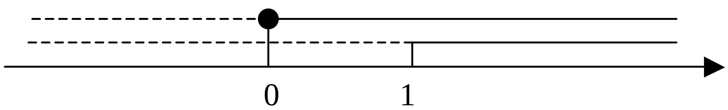
6. $y = \dfrac{x}{x^3-1}$

a. L'insieme di definizione della funzione è $D \equiv \{x \in R \mid x \neq 1\}$ (asintoto verticale $x = 1$).

b. La funzione non è né pari né dispari.

c. Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = \dfrac{x}{x^3-1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{x^3-1} = 0 \Rightarrow x = 0$. Intersezioni con l'asse y: $\begin{cases} y = \dfrac{x}{x^3-1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$.

d. $\dfrac{x}{x^3-1} \geq 0$



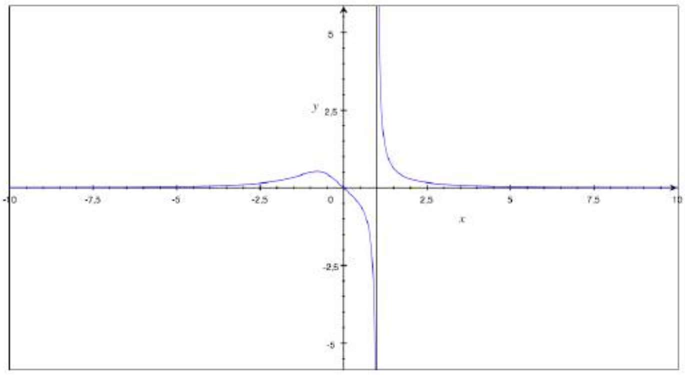
$y \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x > 1$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^3-1} = 0$; $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x}{x^3-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x}{x^3-1} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^3-1} = 0$; (asintoto orizzontale $y = 0$).

f. $y = \dfrac{x}{x^3-1} \Rightarrow y' = \dfrac{x^3-1-3x^3}{(x^3-1)^2} = -\dfrac{2x^3+1}{(x^3-1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

g. $y' = -\dfrac{2x^3+1}{(x^3-1)^2} \Rightarrow y'' = -\dfrac{6x^2(x^3-1)^2 - (2x^3+1)6x^2(x^3-1)}{(x^3-1)^4} = -\dfrac{6x^2\left[(x^3-1)-(2x^3+1)\right]}{(x^3-1)^3} = \dfrac{6x^2\left[x^3+1\right]}{(x^3-1)^3} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x > 1$.

h. La funzione non ha asintoti obliqui.



7. $y = \sqrt{x^2 - 3x}$

a. Il dominio è dato dai valori tali che $x^2 - 3x \geq 0 \Rightarrow D \equiv \{x \in R \mid x \leq 0 \vee x \geq 3\}$

b. La funzione non è né pari né dispari.

c. Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = \sqrt{x^2 - 3x} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$; intersezioni con l'asse y :

$\begin{cases} y = \sqrt{x^2 - 3x} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ (passa per l'origine degli assi).

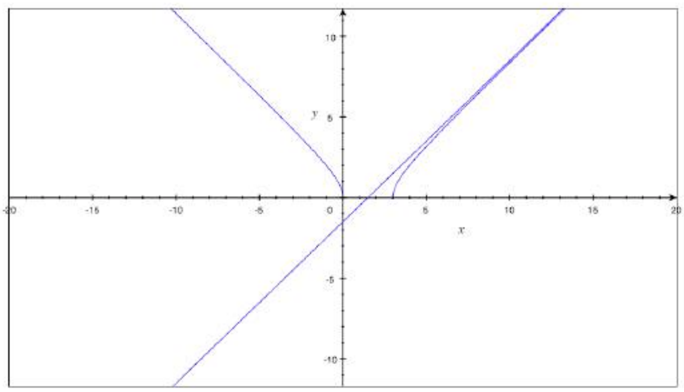
d. Laddove è definita la funzione irrazionale con indice pari ha immagine positiva.

e. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2 - 3x} = +\infty$.

f. $y = \sqrt{x^2 - 3x} \Rightarrow y' = \dfrac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{3}{2} \notin D$. La funzione è crescente per $x \geq 3$ e decrescente per $x \leq 0$.

g. $y' = \dfrac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}} \Rightarrow y'' = \dfrac{2\sqrt{x^2 - 3x} - \dfrac{(2x - 3)^2}{2\sqrt{x^2 - 3x}}}{2(x^2 - 3x)} = \dfrac{4(x^2 - 3x) - (2x - 3)^2}{2(x^2 - 3x)} = \dfrac{-9}{2(x^2 - 3x)}$. La funzione è concava nell'intero insieme di definizione.

h. $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x} = 1$; $q = \lim\limits_{x \to \infty} \left[\sqrt{x^2 - 3x} - x\right] = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 3x - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = -\dfrac{3}{2}$. Asintoto obliquo $y = x - \dfrac{3}{2}$.



8. $y = \sqrt[3]{x^2 + x}$

a. La radice ha indice dispari ed il radicando è un polinomio di secondo grado; l'insieme di definizione coincide con l'insieme dei numeri reali.
b. La funzione non è né pari né dispari.
c. Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = \sqrt[3]{x^2 + x} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+1) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0; \quad x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$. Intersezioni con l'asse y: la funzione passa per l'origine degli assi.
d. $y = \sqrt[3]{x^2 + x} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 0$.
e. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x^2 + x} = +\infty$.
f. $y = \sqrt[3]{x^2 + x} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}(x^2 + x)^{-\frac{2}{3}}(2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}, \lim\limits_{x \to -1} y' = +\infty \quad \lim\limits_{x \to 0} y' = +\infty$

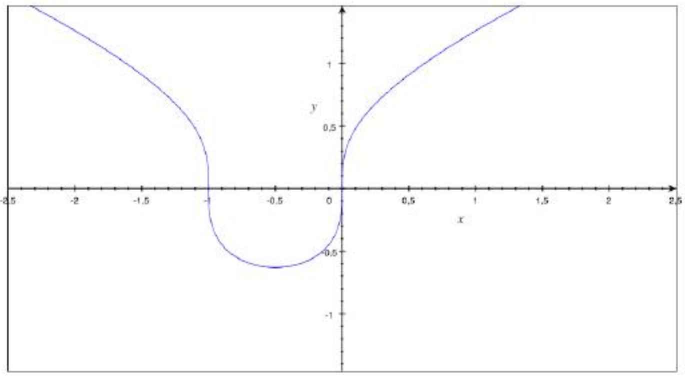
$$y' = \frac{1}{3}(x^2 + x)^{-\frac{2}{3}}(2x+1) \Rightarrow y'' = \frac{1}{3}\left[-\frac{2}{3}(x^2 + x)^{-\frac{5}{3}}(2x+1)^2 + 2(x^2 + x)^{-\frac{2}{3}}\right] =$$

g. $\frac{2}{3}(x^2 + x)^{-\frac{2}{3}}\left[-\frac{1}{3}(x^2 + x)^{-1}(2x+1)^2 + 1\right] = -\frac{2}{3}(x^2 + x)^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{x^2 + x + 1}{3(x^2 + x)}\right]$

$N \geq 0 \forall x \in R; \quad D > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 0;$

$y'' \geq 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$

h. Non ci sono asintoti obliqui: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + x}}{x} = 0; \quad \lim\limits_{x \to \infty}\left[\sqrt[3]{x^2 + x} - 0x\right] = +\infty$.



9. $y = 4\cos x + 2\cos 2x - 1$
a. Il Dominio della funzione goniometrica in esame coincide con l'insieme dei numeri reali.
b. La funzione è pari: $f(x) = f(-x); \quad f(0) = 5$.
c. Intersezioni con l'asse x:

$$\begin{cases} y = 4\cos x + 2\cos 2x - 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 4\cos x + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) - 1 = 0 \Rightarrow 4\cos x + 4\cos^2 x - 3 = 0$$

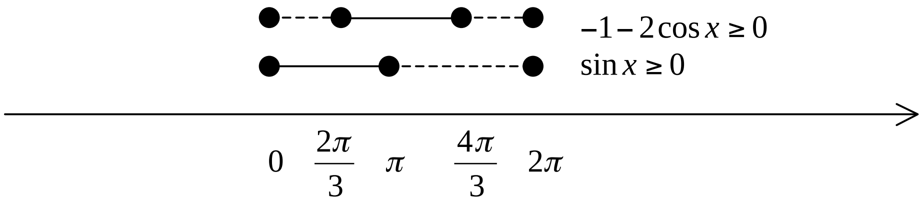
$$\cos x = \frac{-2 \pm 4}{4} = \begin{matrix} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{3}{2} (impossibile) \end{matrix} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad ;$$

intersezioni con l'asse y: $\begin{cases} y = 4\cos x + 2\cos 2x - 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 0 \end{cases}$.

d. $y = 4\cos x + 2\cos 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

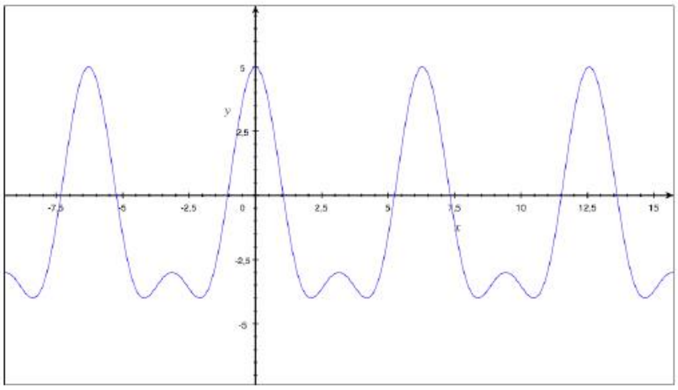
e. La funzione è periodica, non esistono di conseguenza i limiti agli estremi del dominio.
$y = 4\cos x + 2\cos 2x - 1 \Rightarrow y' = -4\sin x - 4\sin 2x = -4\sin x(1 + 2\cos x) \geq 0$

f. $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi \vee \frac{4\pi}{3} \leq x \leq 2\pi \Rightarrow f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -4; \quad f(\pi) = -3; \quad f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -4; \quad f(2\pi) = 5$



g. $y' = -4\sin x - 4\sin 2x \Rightarrow y'' = -4\cos x - 8\cos 2x = -4\cos x - 16\cos^2 x + 8 = -4\left(4\cos^2 x + x - 2\right) \geq 0$

h. non ci sono asintoti obliqui.



10. $y = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$

a. La funzione è periodica di periodo 2π ed è definita in $D \equiv \left\{ x \in [0; 2\pi] \mid x \neq \frac{\pi}{2} \right\}$.

b. La funzione non è né pari e né dispari.

c. Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = \frac{\cos x}{\sin x - 1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$; intersezioni con l'asse y:
$\begin{cases} y = \frac{\cos x}{\sin x - 1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -1.$

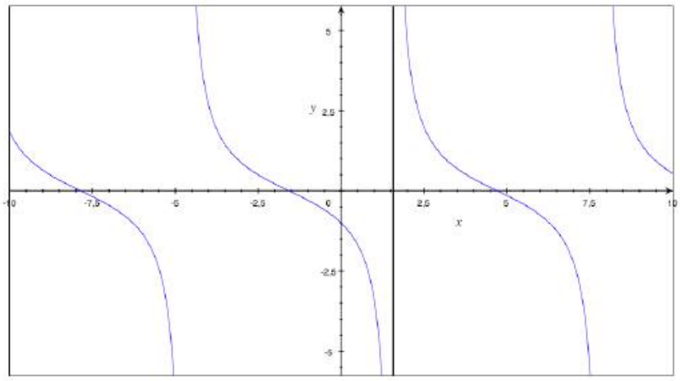
d. $y = \frac{\cos x}{\sin x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$.

e. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{\pm}} \frac{\cos x}{\sin x - 1} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{-}} \frac{\cos x(\sin x + 1)}{-\cos^2 x} = \pm\infty$.

f. $y = \frac{\cos x}{\sin x - 1} \Rightarrow y' = \frac{-\sin x(\sin x - 1) + \cos^2 x}{(\sin x - 1)^2} = \frac{-2\sin^2 x + \sin x + 1}{(\sin x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm 3}{-4} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{matrix}$
La funzione è crescente quindi per $x \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \right]$.

g.
$$y' = \frac{-2\sin^2 x + \sin x + 1}{(\sin x - 1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{(\cos x - 4\sin x\cos x)(\sin x - 1)^2 - 2\cos x(\sin x - 1)\left(-2\sin^2 x + \sin x + 1\right)}{(\sin x - 1)^4} =$$
$$y'' = \frac{\cos x(\sin x - 1)\left[(1 - 4\sin x)(\sin x - 1) + 4\sin^2 x - 2\sin x - 2\right]}{(\sin x - 1)^4} =$$
$$y'' = \frac{\cos x(\sin x - 1)\left[\sin x - 1 - 4\sin^2 x + 4\sin x + 4\sin^2 x - 2\sin x - 2\right]}{(\sin x - 1)^4} =$$
$$y'' = \frac{\cos x(\sin x - 1)\left[(1 - 4\sin x)(\sin x - 1) + 4\sin^2 x - 2\sin x - 2\right]}{(\sin x - 1)^4} = \frac{3\cos x(\sin x - 1)^2}{(\sin x - 1)^4} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$$

h. La funzione non presenta asintoti obliqui. L'asintoto verticale è dato dalla retta di equazione $x = \frac{\pi}{2}$.



11. $y = x^3 e^{-x}$

a. La funzione è definita su tutto l'insieme dei numeri reali in quanto prodotto di funzioni ivi definite.

b. La funzione non è né pari, né dispari.

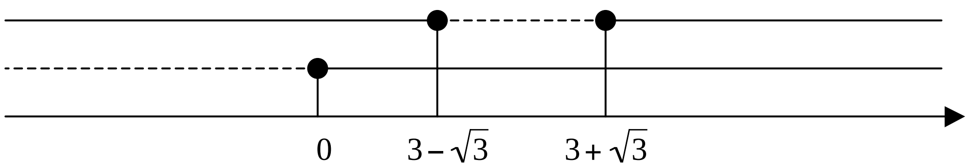
c. Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = x^3 e^{-x} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. La funzione passa per l'origine.

d. $y = x^3 e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

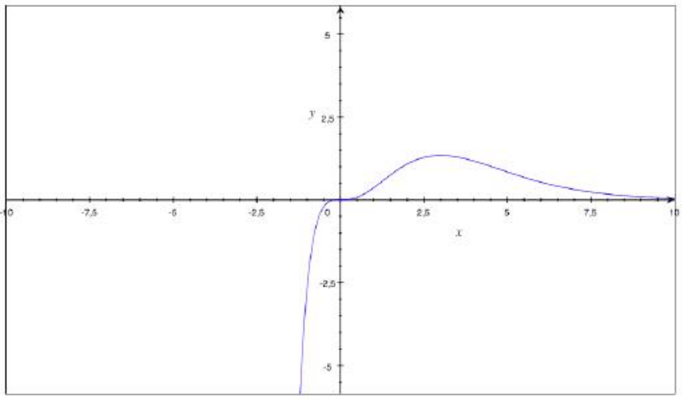
e. $\lim_{x \to +\infty} x^3 e^{-x} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} x^3 e^{-x} = -\infty$.

f. $y = x^3 e^{-x} \Rightarrow y' = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = x^2 e^{-x}(3 - x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$. Notiamo che nell'origine è presente un punto di *flesso a tangente orizzontale*.

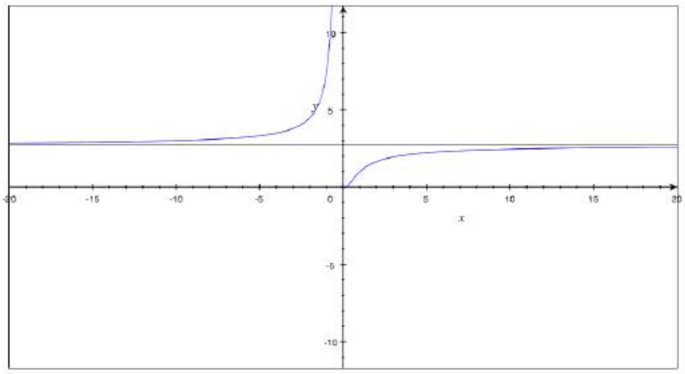
g. $y' = e^{-x}\left(3x^2 - x^3\right) \Rightarrow y'' = -e^{-x}\left(3x^2 - x^3\right) + e^{-x}\left(6x - 3x^2\right) = xe^{-x}\left(x^2 - 6x + 6\right) \geq 0 \Leftrightarrow$
$0 \leq x \leq 3 - \sqrt{3} \vee x \geq 3 + \sqrt{3}$



h. La funzione ha asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$.



12. $y = e^{\frac{x-1}{x}}$
a. $D \equiv \{x \in R \mid x \neq 0\}$.
b. La unzione non è né pari né dispari.
c. Intersezioni con l'asse x: nessuna, poiché una funzione esponenziale non può avere zeri.
   Intersezioni con l'asse y: nessuna perché $D \equiv \{x \in R \mid x \neq 0\}$.
d. $y = e^{\frac{x-1}{x}} \geq 0 \forall x \in D$.
e. $\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x-1}{x}} = e$; $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{x-1}{x}} = +\infty$; $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{x-1}{x}} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x-1}{x}} = e$.
f. $y = e^{\frac{x-1}{x}} \Rightarrow y' = e^{\frac{x-1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right) > 0 \forall x \in R$; $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$.
g. $y' = e^{\frac{x-1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow y'' = e^{\frac{x-1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right)^2\left(-2x^{-3}\right) > 0 \Leftrightarrow x < 0$.
h. La funzione presenta come asintoto orizzontale la retta $y = e$.



13. $y = (x-2)(e^x - 1)$
a. La funzione è definita su tutto l'insieme dei numeri reali.
b. La funzione non è né pari né dispari.
c. Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = (x-2)(e^x - 1) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; \quad x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; intersezioni con l'asse y:
   $\begin{cases} y = (x-2)(e^x - 1) \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.
d. $y = (x-2)(e^x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 2$.
e. $\lim_{x \to -\infty} (x-2)(e^x - 1) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} (x-2)(e^x - 1) = +\infty$.

f.
$y=(x-2)(e^x-1)\Rightarrow y'=e^x-1+xe^x-2e^x=e^x(x-1)-1\ge 0$

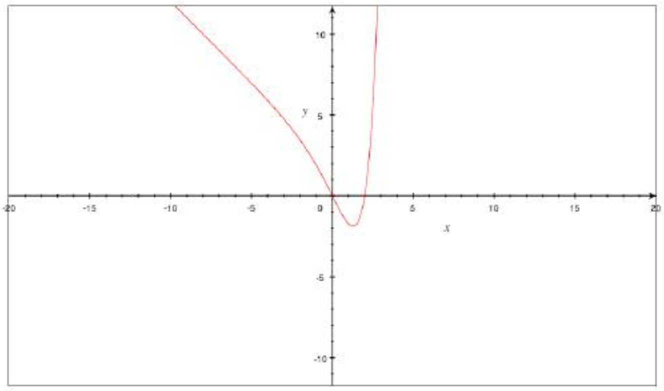
$e^x\ge\frac{1}{x-1};\quad x>1\Rightarrow y'\ge 0\Leftrightarrow x\ge x_0>1$

$e^x\le\frac{1}{x-1};\quad x<1\Rightarrow y'<0\forall x<1$

$y'(1)=-1<0$

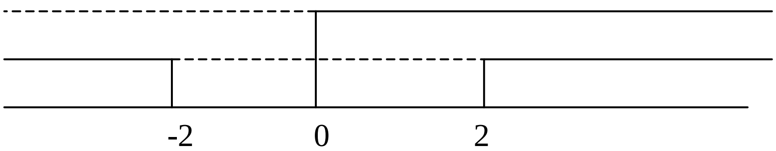
g. $y'=e^x(x-1)-1\Rightarrow y''=e^x(x-1)+e^x=xe^x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$.

h. La funzione non presenta asintoti obliqui.



14. $y=\ln\frac{x}{x^2-4}$

a. $\begin{cases}\frac{x}{x^2-4}>0\\ x^2-4\ne 0\end{cases}$,

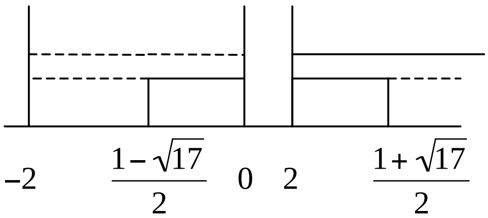


$D\equiv\{x\in R\,|\,-2<x<0 \vee x>2\}$

b. la funzione non è né pari né dispari.

c. Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases}y=\ln\frac{x}{x^2-4}\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x}{x^2-4}=1\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$; intersezioni con l'asse y: $\varnothing$

d. $y=\ln\frac{x}{x^2-4}\ge 0\Leftrightarrow\frac{x}{x^2-4}\ge 1\Leftrightarrow\frac{-x^2+x+4}{x^2-4}\ge 0$.



e. $\lim_{x\to-2^+}f(x)=+\infty;\quad\lim_{x\to-0^-}f(x)=-\infty;\quad\lim_{x\to 2^+}f(x)=+\infty;\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

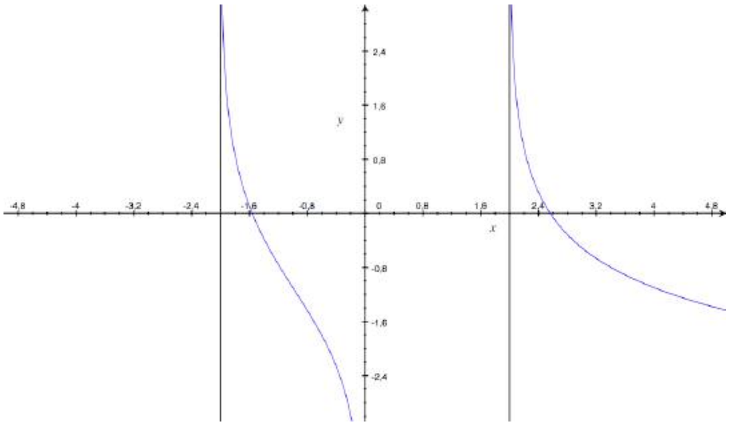
f. $y=\ln\frac{x}{x^2-4}\Rightarrow y'=\frac{x^2-4}{x}\frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2}=-\frac{4+x^2}{x(x^2-4)}$. La funzione è sempre decrescente.

$y'=-\frac{4+x^2}{x(x^2-4)}\Rightarrow y''=-\frac{2x^2(x^2-4)-(4+x^2)(3x^2-4)}{x^2(x^2-4)^2}=$

g. $y''=-\frac{2x^4-8x^2-12x^2+16-3x^4+4x^2}{x^2(x^2-4)^2}=\frac{x^4+16x^2-16}{x^2(x^2-4)^2}$.

$y''\ge 0\Leftrightarrow x^2\ge\sqrt{80}-8\Leftrightarrow -2<x<-\sqrt{\sqrt{80}-8}\vee x>2$.

h. Non ci sono asintoti obliqui.



15. $y = 2x + \ln x$

a. $D \equiv \{x \in R \mid x > 0\}$.

b. La funzione non è né pari né dispari.

c. Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = 2x + \ln x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + \ln x = 0$. Poiché la funzione $g(x) = 2x + \ln x$ è crescente e $f(e^{-2}) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow \exists z \in (e^{-2};1) \mid g(z) = 0$, di conseguenza il grafico della funzione $y = 2x + \ln x$ taglia l'asse delle x in un punto $z \in (e^{-2};1)$. Intersezioni con l'asse y: impossibile poiché $D \equiv \{x \in R \mid x > 0\}$.

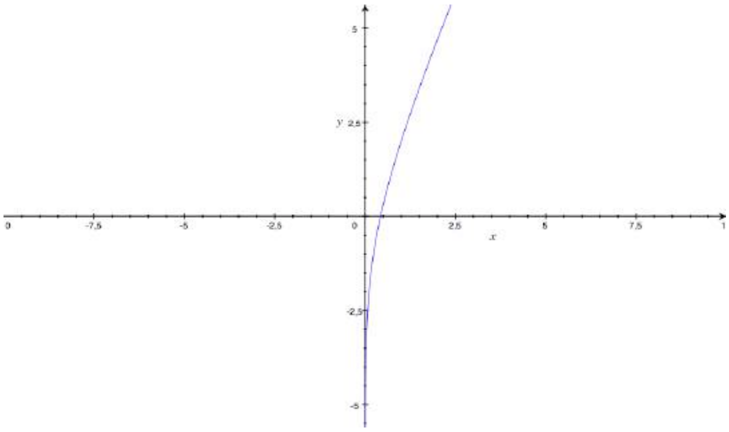
d. $y = 2x + \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq z$ di cui al punto precedente.

e. $\lim_{x \to 0^+} (2x + \ln x) = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} (2x + \ln x) = +\infty$.

f. $y = 2x + \ln x \Rightarrow y' = 2 + \frac{1}{x} > 0 \forall x \in D$: la funzione è sempre crescente nel dominio.;

g. $y' = 2 + \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \forall x \in D$: la funzione è concava.

h. $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 := m; \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = +\infty$: non esistono asintoti obliqui.



16. $y = \arctan \frac{1}{|x|}$

a. $D \equiv \{x \in R \mid x \neq 0\}$.

b. La funzione è pari.

c. Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = \arctan\dfrac{1}{|x|} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{|x|} = 0$: impossibile. Intersezioni con l'asse y:

$\begin{cases} y = \arctan\dfrac{1}{|x|} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$ impossibile poiché $D \equiv \{x \in R \mid x \neq 0\}$.

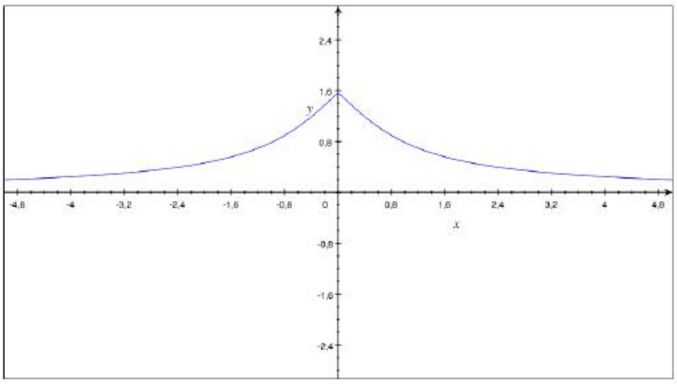
d. $y = \arctan\dfrac{1}{|x|} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|x|} \geq 0$ e ciò è sempre verificato in $D \equiv \{x \in R \mid x \neq 0\}$.

e. $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \arctan\dfrac{1}{|x|} = \dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan\dfrac{1}{|x|} = 0$.

f. $y = \arctan\dfrac{1}{|x|} \Rightarrow y' = \dfrac{x^2}{1+x^2}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) < 0 \forall x > 0$.

g. $y' = \dfrac{x^2}{1+x^2}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \Rightarrow y'' = \dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

h. Essendoci asintoto orizzontale, non possono esserci asintoti obliqui.



17. $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$

a. $\begin{cases} -1 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |x| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow D \equiv \{x \in R \mid x \in [-1;1]\}$.

b. La funzione è pari, $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

c. Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = \arcsin\sqrt{1-x^2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$; intersezione con l'asse y: $\begin{cases} y = \arcsin\sqrt{1-x^2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} = f(0) \\ x = 0 \end{cases}$.

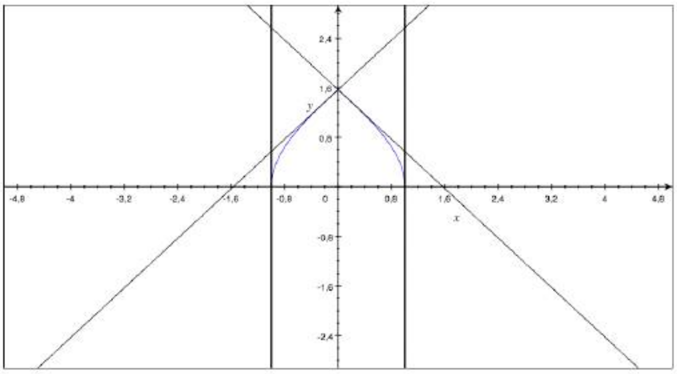
d. $y = \arcsin\sqrt{1-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1$.

e. La funzione è continua laddove è definita: $f(-1) = f(1) = 0$.

f. $y=\arcsin\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-1+x^2}}\left(-\dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; & 0<x<1\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; & -1<x<0\end{cases}$. Di conseguenza la funzione è crescente nell'intervallo $[-1;0]$ e decrescente nell'intervallo $[0;1]$. Inoltre risulta $\lim\limits_{x\to-1^+} f'(x)=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to0^-} f'(x)=+1;\quad \lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=-1;\quad \lim\limits_{x\to1^-} f'(x)=-\infty$.

g. $y'=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; & 0<x<1\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; & -1<x<0\end{cases} \Rightarrow y''=\begin{cases}-\dfrac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}; & 0<x<1\\ \dfrac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}; & -1<x<0\end{cases}$.

h. La funzione non presenta asintoti obliqui.



18. $y=2\arctan x-x$

a. La funzione è definita su tutto l'insieme dei numeri reali.

b. $f(-x)=2\arctan(-x)-(-x)=-2\arctan x+x=-(2\arctan x-x)=-f(x)$. La funzione è dispari.

c. Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases}y=2\arctan x-x\\ y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\arctan x-x=0\\ y=0\end{cases} \Rightarrow x=0$. L'esistenza di eventuali altre radici verrà dedotta con metodi differenziali successivamente. Intersezioni con l'asse y: la funzione passa per l'origine.

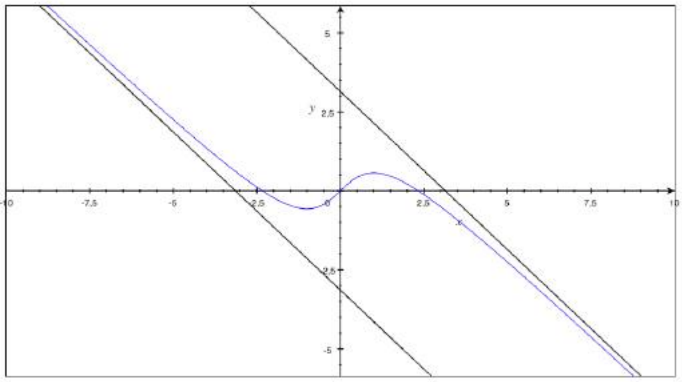
d. Anche lo studio del segno verrà determinato successivamente con metodi differenziali.

e. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\mp\infty$.

f. $y=2\arctan x-x \Rightarrow y'=\dfrac{2}{1+x^2}-1=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\geq 0 \Leftrightarrow |x|\leq 1$. $f(1)=\dfrac{\pi}{2}-1$, $f(-1)=1-\dfrac{\pi}{2}$. Oltre l'origine la funzione ha altri due zeri.

g. $y'=\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow y''=\dfrac{-2x\left(1+x^2\right)-2x\left(1-x^2\right)}{(1+x^2)^2}=\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}0 \Leftrightarrow x<0$.

h. Asintoti obliqui: $m:=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1;\quad q:=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\pm\pi \Rightarrow y=-x\pm\pi$.



19. $y=\sqrt{1-\left|e^{2x}-1\right|}$

a. $1-\left|e^{2x}-1\right|\geq 0 \Leftrightarrow \left|e^{2x}-1\right|\leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x}\leq 2 \\ e^{2x}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\leq \dfrac{\ln 2}{2}=\ln\sqrt{2} \Rightarrow D\equiv\left\{x\in R \mid x\leq \ln\sqrt{2}\right\}$.

b. La funzione non è né pari né dispari.

c. Intersezioni con l’asse x: $\begin{cases} y=\sqrt{1-\left|e^{2x}-1\right|} \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{1-\left|e^{2x}-1\right|}=0 \Leftrightarrow \left|e^{2x}-1\right|=1 \Leftrightarrow x=\ln\sqrt{2}$;

intersezioni con l’asse y: $\begin{cases} y=\sqrt{1-\left|e^{2x}-1\right|} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow y=1$.

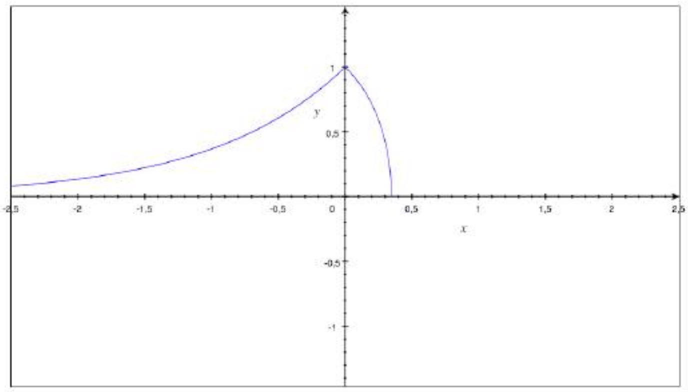
d. Laddove è definita la funzione è sempre non negativa.

e. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\left|e^{2x}-1\right|}=0$.

f. $y=\sqrt{1-\left|e^{2x}-1\right|} \Rightarrow y'=\begin{cases} \dfrac{-2e^{2x}}{2\sqrt{2-e^{2x}}}; & x\geq 0 \\ e^{x}; & x<0 \end{cases}$. La funzione è decrescente nell’intervallo $\left[0;\ln\sqrt{2}\right]$ e crescente nell’intervallo $(-\infty;0)$, inoltre $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} f'(x)=\mp 1$:la funzione non è derivabile nell’origine.

g. $y'=\begin{cases} \dfrac{-2e^{2x}}{2\sqrt{2-e^{2x}}}; & x\geq 0 \\ \dfrac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}}}; & x<0 \end{cases} \Rightarrow y''=\begin{cases} -4\dfrac{e^{2x}\left(1-e^{2x}\right)}{\left(2-e^{2x}\right)^{\frac{3}{2}}}; & x\geq 0 \\ e^{x}; & x<0 \end{cases}$. La funzione è convessa nell’intervallo $(-\infty;0)$ e concava nell’intervallo $\left[0;\ln\sqrt{2}\right]$.

h. L’asintoto orizzontale $y=0$ esclude la presenza di eventuali asintoti obliqui.



3.10 Esercizi e quesiti di riepilogo

1. E' data la funzione $f(x) = x^2 - 2x - \ln x$. Si determini:

   a) L'insieme di definizione; $\left[D \equiv \{x > 0\}\right]$

   b) L'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x = 1$. $\left[x + y = 0\right]$

   c) Si determini, con due cifre decimali, il valore dello zero di $f(x)$ in $[0,4;0,5]$. $\left[x_0 = 0,48\right]$

2. Si calcoli la derivata prima delle seguenti funzioni utilizzando la definizione:

   a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$; $\left[f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}\right]$

   b) $f(x) = e^{-x}$. $\left[f'(x) = -e^{-x}\right]$

3. Si descriva il procedimento che ci ha portato a definire il concetto di derivata di una funzione, evidenziandone il suo significato geometrico.
4. Si derivino le seguenti funzioni utilizzando il teorema di derivazione della funzione composta: *a*) $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x})$; *b*) $f(x) = \cos(x^3 - 4)$.

   $$\left[a) f'(x) = \frac{1}{2\left(x - \sqrt{x}\right)}; \quad b) f'(x) = -3x^2 \sin\left(x^3 - 4\right) \right]$$

5. Si dimostri che una funzione derivabile è continua.

6. Si consideri la funzione $y = x^2 - 4\ln(x + a)$.

   a) Si determini per quale valore del parametro a assume un minimo assoluto nel punto di ascissa $x = 1$. $\left[a = 1\right]$

   b) Si tracci il grafico della funzione $y = x^2 - 4\ln(x + 1)$ articolando lo studio nei seguenti punti:

   - Dominio; $\left[D \equiv \{x > 1\}\right]$
   - Calcolo dei limiti agli estremi del dominio;

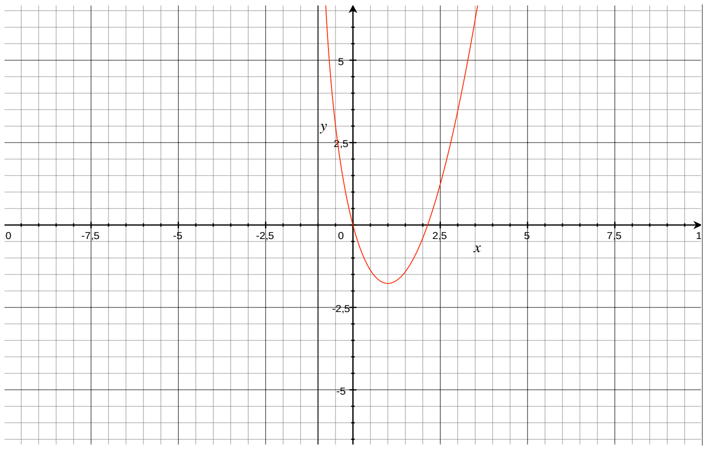
     $$\left[\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \right]$$

   - Crescenza e decrescenza;

     $$\left[f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1; \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \right]$$

   - Concavità e convessità.

     $$\left[f''(x) > 0 \forall x \in D \right]$$



7. Si determinino il raggio di base *R* e l'altezza *H* del cono di volume minimo circoscritto al cilindro di raggio di base *r* ed altezza *h*.

$$\left[\ H = 3h; \quad R = \frac{3r}{2}\ \right]$$

8. Calcolare il $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{x - \ln(1+e-x)}$.

$$\left[-\frac{e}{e-1}\right]$$

9. Si dica se esiste la derivata prima della funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$ e, in caso affermativo, si dica se questa è continua nell'origine.

$$\left[f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \right], \text{[no]}$$

10. Determinare i parametri *a* e *b* in modo che la funzione $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + 2x; & -1 \leq x \leq 0 \\ 2x - 3a - 2 & 0 < x \leq 2 \end{cases}$ verifichi le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1;2]$.

$$\left[\ a = -\frac{2}{3}; \quad b = \frac{16}{3}\ \right]$$

11. In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, è data la famiglia $\wp$ di parabole di equazione $y = ax^2 - a^2x \ , \quad a \in R$.
    - Si determini l'equazione della retta tangente *t* alla parabola nel punto di coordinate (0,0), e si indichi con A l'altro punto in cui la generica parabola della famiglia $\wp$ incontra l'asse *x*.

$$\left[\ t: y = -a^2x; \quad A(a,0)\ \right]$$

    - Si determini il punto H, intersezione della parallela *s* a *t* condotta da A, con la perpendicolare *p* a *t* condotta da O. Detta S_T l'area del triangolo OAH, calcolare il $\lim\limits_{a \to +\infty} S_T$.

$$\left[\quad p: y = xa^{-2}; \quad s; y = -a^2x + a^3; \quad H\left(\frac{a^5}{1+a^4}; \frac{a^3}{1+a^4}\right); \quad \frac{1}{2}\quad\right]$$

- Determinare il numero d'intersezioni della generica parabola della famiglia $\wp$ con l'iperbole $xy = a$, al variare del parametro *a*.

$$\left[\quad a > 0 : 1 sol.; \quad \begin{array}{ll} -\frac{4}{27}a^3 - 1 < 0 \Rightarrow a > -\frac{3}{\sqrt[4]{4}} & 1 sol. \\ -\frac{4}{27}a^3 - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{\sqrt[4]{4}} & 2 sol. \\ -\frac{4}{27}a^3 - 1 > 0 \Rightarrow a < -\frac{3}{\sqrt[4]{4}} & 3 sol. \end{array}\quad\right]$$

- Posto $a = 1$ nelle equazioni di cui al punto precedente, individuare l'ascissa del punto intersezione con arresto alla seconda cifra decimale.

$$\left[\left\{\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_x - \frac{x_n^3 - x_n^2 - 1}{3x_n^2 - 2x} \end{array}\right. \Rightarrow \quad x_1 = 1,625 \quad x_2 = 1,4858 \quad x_3 = 1,4660 \quad x_4 = 1,4666 \quad \Rightarrow \bar{x} = 1,46\right]$$

12. Enunciare il teorema degli zeri di funzioni continue. Su quale assioma caratterizzante l'insieme dei numeri reali è basato?

13. Si discuta, al variare del parametro α nell'insieme dei numeri reali, il seguente $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x^\alpha}$.

$$\left[\frac{e^{\alpha x} - 1}{x^\alpha} = \alpha \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha x} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Rightarrow \begin{array}{lll} 0 & se & \alpha < 1 \\ 1 & se & \alpha = 1 \\ +\infty & se & \alpha > 1 \end{array}\right]$$

14. Individuare l'estremo superiore ed inferiore della funzione $f(a) = \frac{a^4}{2(a^4 + 1)}$ nell'insieme $[0, +\infty)$. Sarebbe possibile utilizzare il teorema di Weierstrass per individuare il massimo e il minimo assoluto? Motivare la risposta.

$$\left[f(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\left(a^4 + 1\right)} < \frac{1}{2} \quad f(a) \geq 0 \quad \min = 0 : a = 0; \quad \sup = \frac{1}{2}\right]$$

15. Si dimostri che un'equazione polinomiale di grado dispari ammette almeno una soluzione. *Suggerimento: un polinomio di grado qualsiasi è una funzione continua…*

16. E' data la funzione $f(x) = x^\alpha \ln(1 + x)$.

- Stabilire per quali valori del parametro reale α la funzione risulta in $x = 0$:
  a) continua;

$$\left[\frac{\ln(x+1)}{x}x^{\alpha+1} \Rightarrow \begin{array}{lll} 0 & se & \alpha > -1 \\ 1 & se & \alpha = -1 \\ +\infty & se & \alpha < -1 \end{array}\right]$$

b) derivabile.

$$\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^{\alpha}\frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow derivabile \quad se \quad \alpha \ge 0\left(f'(0)=0\right) \vee \alpha = -1\left(f'(0) = -\frac{1}{2}\right)\right]$$

- Per $\alpha = 1$:

c) verificare che la funzione è crescente nella semiretta $x \ge 0$;

$$\left[f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \quad f'(0) = 0; \quad f'(x) > 0 \forall x > 0; \quad \Rightarrow crescente \right]$$

d) sempre sulla semiretta $x \ge 0$, detta *g* la funzione inversa, determinare $g(0)$.
E' derivabile in $x = 0$ la funzione inversa?

$$\left[g(0) = 0; \quad g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{0} \Rightarrow no \right]$$

d) Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione in $(0, f(0))$.

$$[y = 0]$$

17. E' data la funzione $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$. Si verifichi che il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Dopo aver enunciato e dimostrato il teorema di Rolle, si stabilisca se le ipotesi sono verificate nell'intervallo $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$ dalla funzione data.

$$\left[\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \nexists \Rightarrow \quad no \right]$$

18. Sia *f* continua in $[0,2]$ e derivabile in $(0,2)$. Siano $f(2) = 1$ e $1 \le f'(c) \le 2$ per ogni $x \in [0,2]$. Si dimostri che $f(0) < 0$.

$$[f(2) - f(0) = f'(c)(2-0) \Rightarrow -3 \le f'(0) \le -1]$$

19. Calcolare il $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3} - \cos x}{x\sin x}$.

$$\left[\frac{1}{2}\right]$$

20. Si spieghi perché nell'enunciato del Teorema di Cauchy non viene fatta l'ipotesi $g(b) - g(a) \ne 0$.

[Se fosse $g(b) - g(a) = 0$ avremmo, per il teorema di Rolle, $g'(c) = 0$, contro l'ipotesi]

21. Dimostrare che $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [-1,1]$.

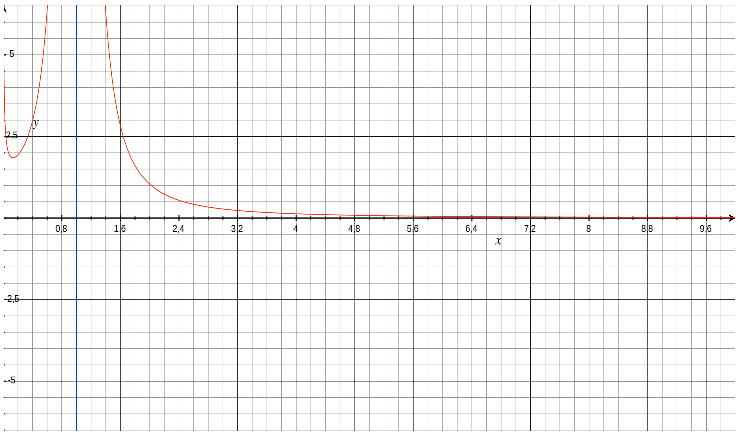
$$\left[f'(x) = 0 \forall x \in [-1;1] \quad f(0) = \frac{\pi}{2} \right]$$

22. E' data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}\ln^2 x}$.

- Si calcoli, al variare del parametro α il valore del $\lim_{x\to 0^+} f(x)$,

$$\begin{bmatrix} 0 & se & \alpha<0 \\ 0 & se & \alpha=0 \\ \infty & se & \alpha>0 \end{bmatrix}$$

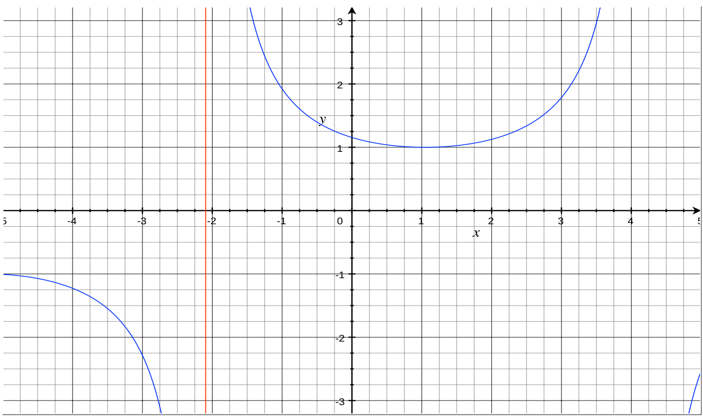
- Si studi la funzione $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^2 x}$.



23. Nel triangolo ABC il lato BC misura 1 e l'ampiezza dell'angolo in A è $\dfrac{\pi}{3}$. Condotte le bisettrici BM e CN, si determini per quale triangolo ABC risulta minima la somma dei raggi delle circonferenze circoscritte ai triangoli BNC e BMC.

[Si ponga $C\hat{B}A := x \Rightarrow B\hat{C}A = \dfrac{\pi}{3}-\dfrac{x}{2}$. Si applichi il teorema della corda ai triangoli BCM, dove $2r_1\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$, e BCN, dove $2r_2\sin\left(-\dfrac{x}{2}+\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Allora $r_1+r_2 := f(x)=\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{x}{2}\right)}$ è minima quando il denominatore assume il valore massimo, ovvero 1, $x=\dfrac{\pi}{3}$]

- Si studi la funzione $f(x)=\dfrac{1}{\sin(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{x}{2})}$.



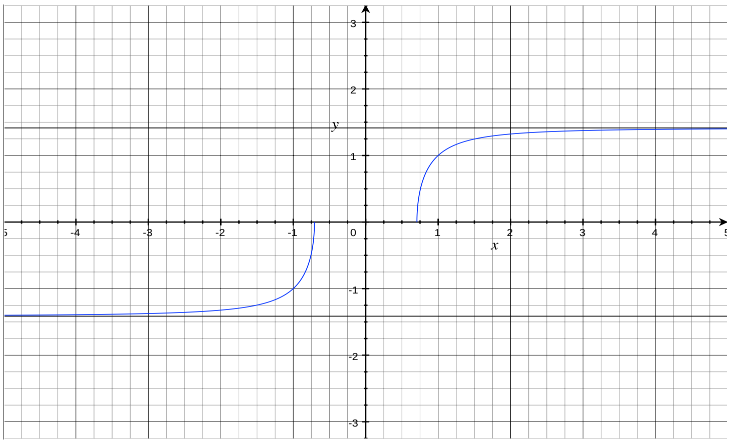
24. Classificare i punti discontinuità della derivata prima della funzione $f(x)=\dfrac{x\log x}{x^2-1}$.

$$\left[\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0\end{array}\right]$$

25. Si stabilisca se può esistere una funzione definita e derivabile due volte in IR che soddisfi le seguenti condizioni: $f'(0)=1, \quad f'(3)=7, \quad f''(x)<0 \quad \forall x \in IR$.

[No: si applichi il teorema di Lagrange a $f'(x)$ nell'intervallo $[0,3]$].

26. Si tracci il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{x}$.



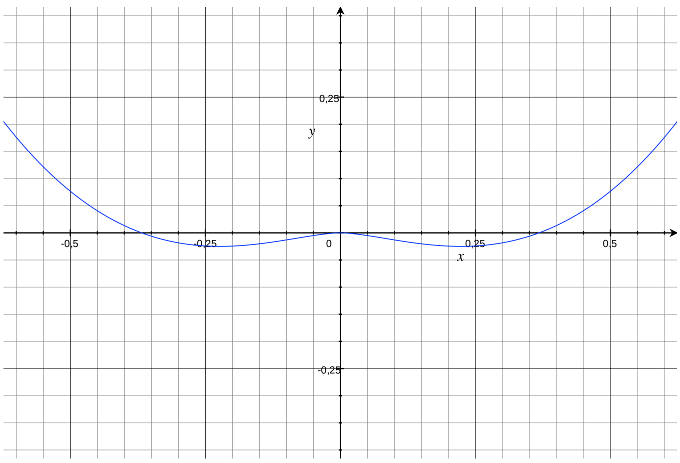
27.Si dica se è possibile determinare i parametri a,b,c affinché risulti possibile applicare il teorema di Rolle alla funzione $f(x)=\begin{cases} -ax^2+3x+c; & x\le 2 \\ \dfrac{b}{x^2}; & x>2 \end{cases}$ nell'intervallo $[-1;+4]$.

$$\left[\quad a=\frac{15}{8} \quad b=18 \quad c=6 \quad\right]$$

28. Dopo aver enunciato e dimostrato il teorema di Lagrange, si dica se è vero che, se $f'(x)\le 1$ per ogni $x\in(-2;3)$ e $f(3)=4$, allora $f(-2)\ge -1$.

[si]

29. Si tracci il grafico della funzione $f(x)=x^2\left(\ln|x|+1\right)$.



30. Si dica se la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & x\le 0 \\ (2x+1)e^{-x} & x>0 \end{cases}$ è derivabile in $x=0$.

[si]

31. Applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f(x)=\ln x$ nell'intervallo $\left[1;b\right]$ e dimostrare la disuguaglianza $1-\dfrac{1}{b}<\ln b<b-1$.

$$\left[\frac{1}{b}\le\frac{\ln b-\ln 1}{b-1}=\frac{1}{c}\le 1\ldots\right]$$

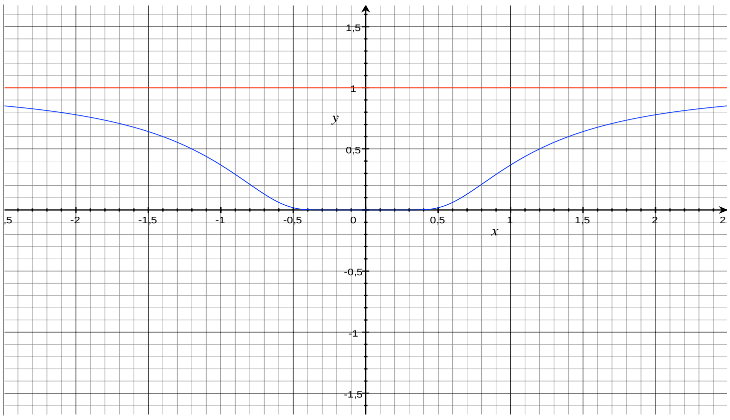
32. Determinare il valore del parametro *a* che rende minima la distanza tra i vertici delle parabole $y=ax^2-2x+2$ e $y=2ax^2-2x+1$.

$\left[a=1\right]$

33. E' data la funzione $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$.

a) Si descriva l'andamento del grafico della funzione (dominio, limiti agli estremi del dominio, eventuali simmetrie, studio del segno della derivata prima);
b) Calcolare il $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$;
c) Che tipo di punto è $(0;0)$, rispetto alla funzione data?

[a) $D\equiv R-\{0\}$; simmetria rispetto all'asse *y*; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0;\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1\quad f'(x)=2x^{-3}e^{-x^2}>0\Leftrightarrow x>0$. b) $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=0$. c) discontinuità eliminabile]



34. Dimostrare che il punto di ascissa $x=0$ è un minimo locale per la funzione $f(x)=x^4-x\cos x+\sin x+\cos x+x^2$.

$$\left[\ f(0)=1;\quad f'(0)=0;\quad f''(0)=1>0\ \right]$$

35. Dimostrare che, se una funzione ammette derivate prima e seconda in tutti i punti di un intervallo $\left[a,b\right]$, e si annulla in almeno tre punti di $\left[a,b\right]$, allora la derivata seconda si annulla in almeno un punto di (a,b). (*Suggerimento: applicare due volte il teorema di Rolle…)*

$$\left[f(c)=f(d)=f(e)=0\Rightarrow\exists x_1\in(c,d);x_2\in(d,e)\middle| f'(x_1)=f'(x_2)=0\Rightarrow 0=\frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}=f''(z)\right]$$

36. Scrivere il polinomio di secondo grado che approssima la funzione $f(x)=\cos^2 x-\cos x+1$ nel punto di ascissa $x_0=\pi/2$.

$$\left[P_2\left(x;\frac{\pi}{2}\right)=1+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$$

37. Tra tutti i cilindri di volume fissato $V = 25\pi$, determinare quello di superficie totale minima.

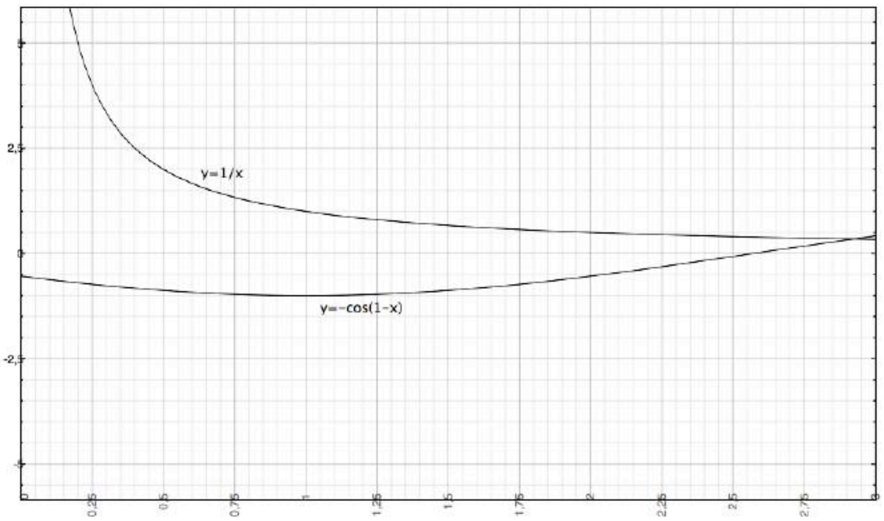
$$\left[r=\sqrt[3]{\frac{75}{2}}\right]$$

38. Una funzione derivabile $y = f(x)$ e la sua derivata prima sono legate dalla relazione $y^2 + y'^2 = 1$. Si determinino le possibili funzioni che verificano questa proprietà.

- Derivando ambo i membri della relazione data otteniamo: $2yy' + 2y'y'' = 0 \Rightarrow 2y'(y + y'') = 0$. Di conseguenza, le possibili soluzioni sono $y = 1$ e $y = -\cos x$, a meno di costanti.

39. Data la funzione $f(x) = \sin(1 - x) - \ln x$ ristretta all'intervallo $\left(0,1+\frac{\pi}{2}\right)$, sia $g(x)$ la sua inversa. Si calcoli il valore di $g'(0)$.

- Dallo studio per via grafica della derivata prima della funzione data $f(x) = \sin(1 - x) - \ln x$, si osserva che questa è invertibile nell'intervallo $\left(0,1+\frac{\pi}{2}\right)$:



$f'(x) = -\cos(1-x) - \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > -\cos(1-x)$. Ora, poiché nell'intervallo dato risulta $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, dalla regola di derivazione della funzione inversa otteniamo: $g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{-1-\frac{1}{1}} = -\frac{1}{2}$.