

PROPRIETA' FOCALI DELL'ASSE MP:

L'asse MP forma angoli uguali con i fuochi:

- $\widehat{QPF}_1 = \widehat{APM}$ perché angoli opposti al vertice P;
- $\widehat{F_2PM} = \widehat{APM}$ perché MP è asse del segmento AF_2 .

Di conseguenza, $\widehat{QPF}_1 = \widehat{F_2PM}$, come volevasi dimostrare.

Si osserva dalla figura che le rette tangenti condotte da Q, sono assi dei segmenti AF_2 e $A'F_2$.

Infatti, il segmento QF_2 è lato comune ai triangoli isosceli AQF_2 e $A'QF_2$ risulta $QA = QA'$ e, di conseguenza, il triangolo AQA' è isoscele di altezza QF_1 . Si ha quindi

$(QF_1)^2 = (QA)^2 - (F_1A)^2 = (QF_2)^2 - (2a)^2$ e, nel sistema di riferimento introdotto, indicate con (x, y) le coordinate di Q, $(x+c)^2 + (y-0)^2 = (x-c)^2 + (y-0)^2 + 4a^2$ da cui segue l'equazione della retta (*direttrice*) $x = -\frac{a^2}{c}$, a cui appartiene il punto Q da cui vengono condotte le tangenti all'ellisse.

Da questa costruzione notiamo che, se la distanza focale è nulla, cioè se i fuochi coincidono, l'ellisse si riduce ad una *circonferenza*. Possiamo quindi affermare che la circonferenza è una particolare ellisse.

8.2 L'equazione dell'ellisse

Per associare all'ellisse un'equazione, consideriamo come sistema di riferimento quello con l'asse x contenente i fuochi, e l'asse y passante per il punto medio del segmento avente come estremi i fuochi. Detta $F_1F_2 = 2c$ la distanza focale e $2a$ la somma delle distanze dai fuochi risulta

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

A questo punto è possibile elevare al quadrato poiché $PF_2 < 2a$ ed ottenere:

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$x^2c^2 + a^4 - 2a^2xc = a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2xc + a^2y^2.$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

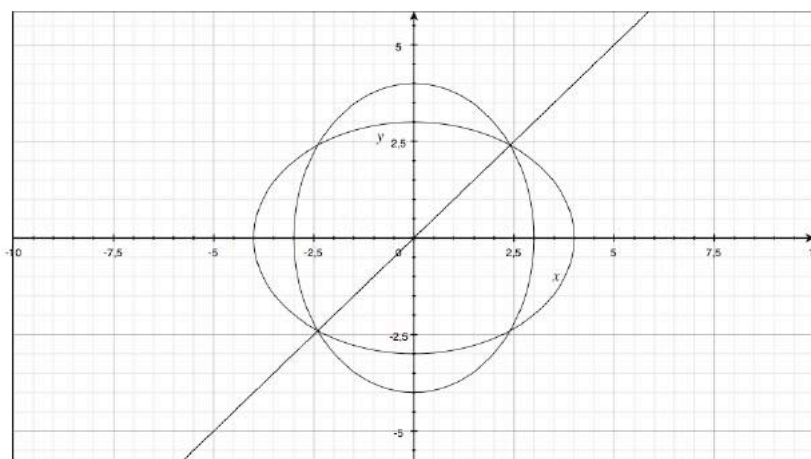
Abbiamo potuto elevare al quadrato senza ulteriori discussioni poiché, essendo $-a \leq x \leq a$ (quando $P \in$ asse x la sua ascissa è a) e $c < a$, risulta $a^2 - xc \geq 0$. Ora, quando l'ellisse incontra l'asse y, il punto intersezione è equidistante dai due fuochi, per cui $PF_1 = PF_2 = a$ e, posto $b^2 := a^2 - c^2$, si giunge all'equazione (detta *in forma canonica*) dell'ellisse centrata nell'origine con i fuochi sull'asse x:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se i fuochi si trovano sull'asse y l'equazione dell'ellisse cambia per effetto della simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \Rightarrow \frac{y'^2}{a^2} + \frac{x'^2}{b^2} = 1. \text{ Dall'equazione dell'ellisse in forma canonica è possibile riconoscere l'asse}$$

focale: è quello corrispondente al semiasse maggiore.



8.3 Le simmetrie dell'ellisse

Un'ellisse è simmetrica rispetto al centro e rispetto ai *semiassi inferiore e superiore*. Per provare la prima simmetria si osserva che il simmetrico di un punto $P(x;y)$ rispetto all'origine appartiene ancora all'ellisse:

$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}$. Si procede in modo analogo per la verifica delle altre due simmetrie. Se l'ellisse è una circonferenza, è simmetrica rispetto a qualsiasi diametro.

8.4 L'eccentricità dell'ellisse

Si definisce *eccentricità* di un'ellisse il rapporto tra la misura della semidistanza focale e quella del semiasse maggiore. Nel caso di un'ellisse con i fuochi sull'asse x , l'eccentricità è data da

$$e = \frac{c}{a}.$$

Il significato geometrico dell'eccentricità è legato allo “schiacciamento” dell'ellisse, nel senso che maggiore è l'eccentricità, più schiacciata sull'asse focale è l'ellisse. Per le caratteristiche geometriche dell'ellisse l'eccentricità varia da zero (circonferenza) a uno:

$$0 \leq e < 1.$$

Notiamo che l'eccentricità non può essere uguale a uno, in quanto l'ellisse non esiste se la distanza focale coincide con la misura dell'asse maggiore ($c = a$).

8.5 Determinazione dell'equazione dell'ellisse: alcuni casi

1) Si determini l'equazione dell'ellisse con un fuoco nel punto $(0; 2\sqrt{2})$ e passante per il punto $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}; 2\right)$.

$$\bullet \quad \begin{cases} c^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow 8 = b^2 - a^2 \\ \frac{5}{9a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + a^2 = b^2 \\ 40 + 5a^2 + 36a^2 = 9a^4 + 72a^2 \end{cases}$$

$$9a^4 + 31a^2 - 40 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{-31 + 49}{18} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$$

2) Si determini l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x , di eccentricità $e = \sqrt{\frac{2}{3}}$, sapendo che passa per il punto $(-\sqrt{3}; -\sqrt{2})$.

- Le condizioni poste vengono riassunte dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} c^2 = a^2 - b^2 \\ \frac{2}{3} = \frac{c^2}{a^2} \\ \frac{3}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{1}{3}a^2 \Rightarrow \frac{3}{a^2} = \frac{1}{b^2} \\ \frac{1}{b^2} + \frac{2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$$

8.6 La tangente all'ellisse in un punto: la formula di sdoppiamento

Sia $P(x_0; y_0)$ un punto appartenente all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Vogliamo determinare

l'equazione della retta tangente all'ellisse in quel punto. Non avendo le "buone proprietà geometriche" della circonferenza, dobbiamo percorrere la via algebrica. Si parte quindi dal sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}. \text{ Sostituendo otteniamo}$$

$$b^2x^2 + a^2(y_0 + m(x - x_0))^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2(y_0^2 + m^2x^2 + m^2x_0^2 - 2m^2xx_0 + 2my_0x - 2my_0x_0) = a^2b^2$$

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2ma^2(y_0 - mx_0)x + a^2y_0^2 + a^2m^2x_0^2 - 2ma^2y_0x_0 = a^2b^2$$

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2ma^2(y_0 - mx_0)x + a^2(y_0 - mx_0)^2 - a^2b^2 = 0$$

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2ma^2(y_0 - mx_0)x - a^2b^2 + a^2(y_0 - mx_0)^2 = 0$$

Arrivati a scrivere l'equazione risolvente imponiamo la condizione di tangenza uguagliando a zero il discriminante dell'equazione:

$$m^2a^4(y_0 - mx_0)^2 - (b^2 + a^2m^2)[-b^2a^2 + a^2(y_0 - mx_0)^2] = 0$$

$$b^4a^2 + a^4m^2b^2 - b^2a^2(y_0 - mx_0)^2 = 0$$

$$b^4a^2 + a^2b^2(m^2a^2 - y_0^2 - m^2x_0^2 + 2mx_0y_0) = 0$$

$$b^4a^2 + a^2b^2(m^2(a^2 - x_0^2) - y_0^2 + 2mx_0y_0) = 0$$

$$m^2(a^2 - x_0^2) + 2mx_0y_0 - y_0^2 + b^2 = 0$$

$$m = \frac{-x_0y_0 \pm \sqrt{(x_0y_0)^2 - (a^2 - x_0^2)(-y_0^2 + b^2)}}{(a^2 - x_0^2)} = \frac{-x_0y_0}{(a^2 - x_0^2)}$$

L'equazione diventa quindi

$$y - y_0 = \frac{-x_0y_0}{(a^2 - x_0^2)}(x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{-x_0y_0}{a^2 \frac{y_0^2}{b^2}}(x - x_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

La forma standard in cui si trova l'equazione della retta tangente all'ellisse in un suo punto è data dalla cosiddetta "formula di sdoppiamento":

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Nel caso di ellisse con il centro $(x_c; y_c)$ non coincidente con l'origine degli assi, l'equazione sopra si modifica facilmente mediante il cambiamento del sistema di riferimento in uno con l'origine coincidente con il centro. Ricordiamo che tale operazione non modifica i parametri dell'ellisse (ne

lascia inalterata la forma). Quindi, $\begin{cases} x = X + x_c \\ y = Y + y_c \end{cases} \Rightarrow \frac{XX_0}{a^2} + \frac{YY_0}{b^2} = 1$, dove $\begin{cases} X_0 = x_0 - x_c \\ Y_0 = y_0 - y_c \end{cases}$ sono le coordinate del punto di tangenza nel nuovo sistema di riferimento. L'equazione della tangente nel vecchio sistema di riferimento si ottiene "contro-sostituendo" l'espressione delle nuove coordinate in funzione delle vecchie nell'equazione della tangente trovata:

$$\frac{(x - x_c)(x_0 - x_c)}{a^2} + \frac{(y - y_c)(y_0 - y_c)}{b^2} = 1$$

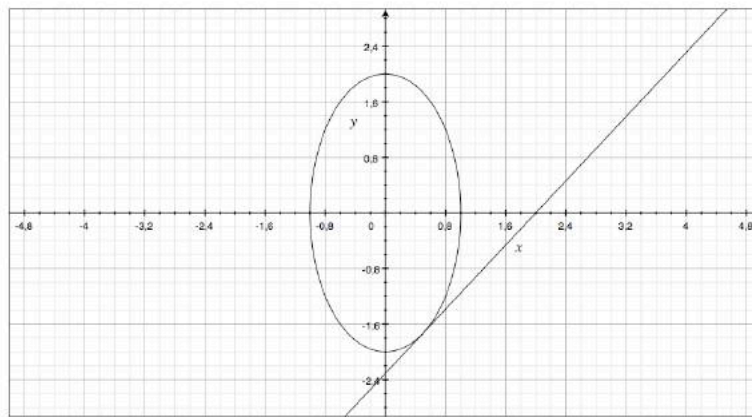
Esercizi svolti

1. Scrivere l'equazione della tangente all'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 = 4$ nel punto di ascissa $\frac{1}{2}$, situato nel quarto quadrante.

- Scriviamo innanzitutto l'ellisse nella forma standard: $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Il punto di tangenza, trovandosi nel quarto quadrante, ha ordinata negativa: $4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = -\sqrt{3}$.

Applichiamo la formula di sdoppiamento ed otteniamo

$$\frac{x \frac{1}{2}}{1} + \frac{y(-\sqrt{3})}{4} = 1 \Rightarrow 2x - y\sqrt{3} - 4 = 0.$$



2. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti all'ellisse $x^2 + 4y^2 = 9$ condotte dal punto di coordinate $P(6; -\frac{3}{2})$.

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9 \\ y + \frac{3}{2} = m(x - 6) \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4(m^2x^2 + 36m^2 - 12m^2x + \frac{9}{4} - 3mx + 18m) = 9 \Rightarrow$$

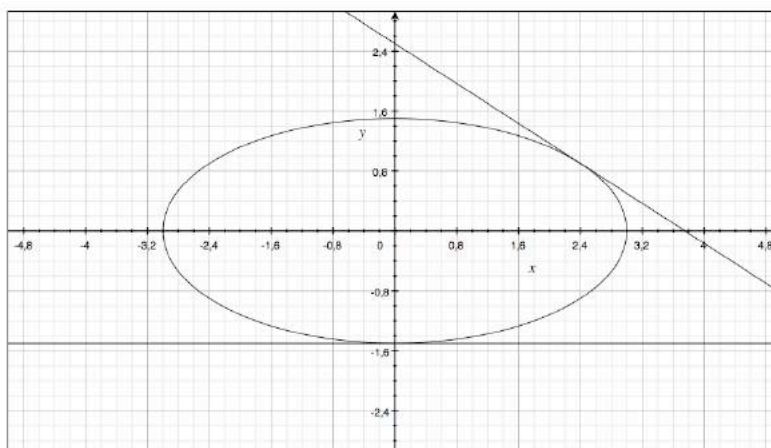
$$(1 + 4m^2)x^2 - 12m(4m + 1)x + 4\left(6m + \frac{3}{2}\right)^2 + 9 = 9 \Rightarrow$$

$$\bullet \quad 0 = \frac{\Delta}{4} = 36m^2(1 + 16m^2 + 8m) - 4(1 + 4m^2)\left(6m + \frac{3}{2}\right)^2 =$$

$$36m^2 + 576m^4 + 288m^3 - 144m^2 - 72m - 576m^4 - 288m^3 =$$

$$m = 0 \Rightarrow 2y + 3 = 0$$

$$-108m^2 - 72m \Rightarrow m = -\frac{2}{3} \Rightarrow 4x + 6y - 15 = 0$$



3. Un'ellisse ha un vertice nel punto di coordinate $(\sqrt{10}; 0)$ ed è tangente alla retta di equazione $y = 6x - 20$. Qual è l'equazione dell'ellisse?

- Il dato relativo al vertice afferma che il semiasse lungo la direzione delle ascisse è $a = \sqrt{10}$. La tangenza alla retta data porta all'equazione risolvente $\frac{x^2}{10} + \frac{(6x - 20)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 x^2 + 360x^2 - 2400x + 4000 - 10b^2 = 0$. Imponendo che il discriminante sia uguale a zero otteniamo

$$1200^2 - 4000b^2 + 10b^4 - 360 \cdot 4000 + 3600b^2 = 10b^2(b^2 - 40) \Rightarrow b^2 = 40 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{40} = 1$$

4. Si determinino le equazioni delle rette tangenti all'ellisse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ condotte dal punto $P\left(\frac{4}{\sqrt{3}}; 0\right)$.

- Osserviamo che $\frac{a^2}{c} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, quindi il punto $P\left(\frac{4}{\sqrt{3}}; 0\right)$ appartiene alla direttrice dell'ellisse $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Per la proprietà delle tangenti condotte da un punto sulla direttrice, e per la simmetria dell'ellisse rispetto all'asse focale, i punti di tangenza hanno coordinate $\left(\sqrt{3}, \pm \frac{1}{2}\right)$, di conseguenza l'equazione delle tangenti è

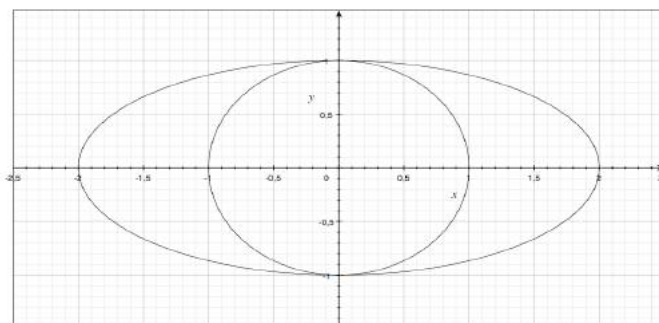
$$\frac{\sqrt{3}x}{4} \pm y \frac{1}{2} = 1.$$

8.7 Come ottenere un'ellisse a partire da una circonferenza

Immaginiamo di aver tracciato la circonferenza di raggio unitario e centro nell'origine di un sistema di riferimento, su un "foglio di gomma". Se lo tiriamo in direzione orizzontale, l'unità di misura relativa viene "dilatata" di un fattore a , mentre quella riferita alla direzione verticale rimane invariata. Formalmente, abbiamo operato quella trasformazione geometrica nota come

"dilatazione" di equazioni $\begin{cases} x' = ax \\ y' = y \end{cases}$. L'equazione della circonferenza unitaria $x^2 + y^2 = 1$ viene

quindi mutata nell'equazione $\frac{x'^2}{a^2} + y'^2 = 1$, che è quella di un'ellisse.



In generale, quindi, l'equazione di un'ellisse può essere dedotta da quella della circonferenza di centro l'origine e raggio unitario, mediante dilatazione di equazioni $\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$, ovvero $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$.

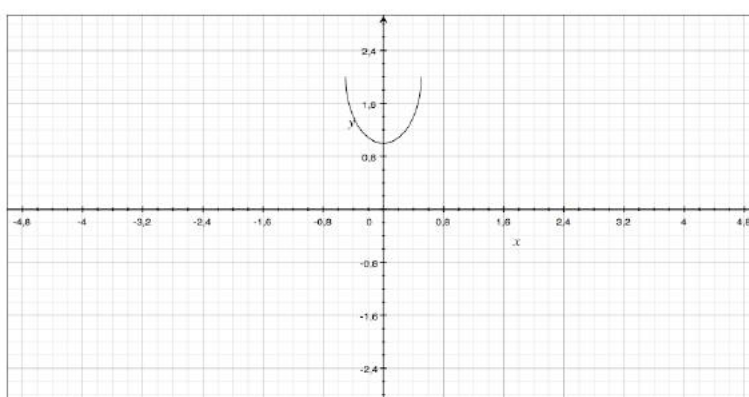
Una conseguenza molto importante di questa costruzione è che l'unità di misura della superficie, il “quadretto di lato uno” viene mutato in un rettangolo di lati a e b . L'area dell'ellisse sarà quindi uguale a quella della circonferenza unitaria, moltiplicata per un fattore ab : πab . Questi argomenti verranno trattati più in dettaglio nel seguito del corso.

8.8 L'ellisse e le funzioni irrazionali

Come nel caso della parabola, anche l'ellisse può essere utilizzata per tracciare il grafico di funzioni irrazionali, aventi per radicando un trinomio di secondo grado. Consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = 2 - \sqrt{1 - 4x^2}$. Dalle condizioni di esistenza segue innanzitutto che

$$y = 2 - \sqrt{1 - 4x^2} \Rightarrow \sqrt{1 - 4x^2} = 2 - y \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ y \leq 2 \end{cases}. \text{ Elevando al quadrato ambo i membri}$$

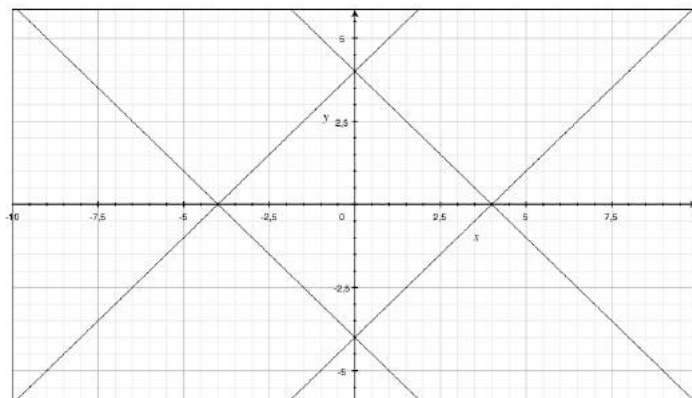
dell'espressione $\sqrt{1 - 4x^2} = 2 - y$, otteniamo l'equazione $4x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$. Si tratta dell'equazione di un'ellisse $4x^2 + (y - 2)^2 = 1$ con centro nel punto di coordinate $(0;2)$. Tenendo conto delle restrizioni poste dalle condizioni relative alla funzione, otteniamo per quest'ultima il grafico:



8.9 Ellissi inscritte in un quadrato

Vogliamo vedere se, e quindi sotto quali condizioni, un'ellisse può essere inscritta in un quadrato. Cominciamo con la descrizione analitica del quadrato come parte di piano delimitata da quattro rette perpendicolari, con i vertici sugli assi cartesiani:

$x + y = k$; $x + y = -k$; $x - y = k$; $x - y = -k$. Per esempio, per $k = 4$ otteniamo il quadrato in figura.



Per trovare l'equazione di un'ellisse inscritta nel quadrato, scegliamo un punto di ascissa x_0 come punto di tangenza: allora questo dovrà avere coordinate $(x_0; k - x_0)$, in quanto appartenente anche, per esempio, alla retta di equazione $x + y = k$. Quest'ultima, in quanto retta tangente nel punto scelto, dovrà coincidere con l'equazione della retta tangente nel punto $(x_0; k - x_0)$ ottenuta con la

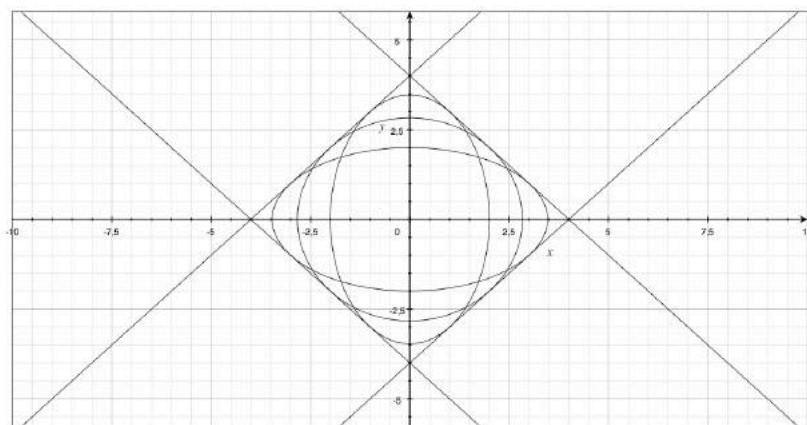
formula di sdoppiamento: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. Di conseguenza il sistema $\begin{cases} \frac{xx_0}{a^2} + \frac{y(k-x_0)}{b^2} = 1 \\ \frac{x}{k} + \frac{y}{k} = 1 \end{cases}$ dovrà

ammettere infinite soluzioni, quindi $\begin{cases} \frac{x_0}{a^2} = \frac{1}{k} \\ \frac{k-x_0}{b^2} = \frac{1}{k} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{kx_0} \quad \frac{1}{b^2} = \frac{1}{k(k-x_0)}$. L'equazione dell'ellisse inscritta

è dunque: $\frac{x^2}{kx_0} + \frac{y^2}{k(k-x_0)} = 1$. Semplici osservazioni consentono di affermare che:

- affinché si tratti effettivamente di un'ellisse occorre che, posto $k > 0$, $\begin{cases} kx_0 > 0 \\ k(k-x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x_0 < k$ (e questa condizione era ragionevole aspettarcela, osservando il grafico).
- Affinché si tratti di una circonferenza occorre che, oltre che essere positivi, i denominatori devono essere anche coincidenti: $kx_0 = k(k-x_0) \Rightarrow x_0 = \frac{k}{2}$.

Per esempio, con valori di $x_0 = 3$, $x_0 = 1$ e $x_0 = 2$ otteniamo le seguenti 3 ellissi (di cui una circonferenza) inscritte nel quadrato definito dalle rette di cui sopra con $k = 4$:



Possiamo dimostrare che l'ellisse di area massima inscritta nel quadrato delimitato dalle rette $x + y = k$; $x + y = -k$; $x - y = k$; $x - y = -k$ è la circonferenza. Infatti, dalla formula dell'area

dell'ellisse applicata all'equazione $\frac{x^2}{kx_0} + \frac{y^2}{k(k-x_0)} = 1$, risulta

$A(x_0) = \pi\sqrt{kx_0}\sqrt{k(k-x_0)} = \pi k\sqrt{kx_0 - kx_0^2}$. Questa espressione risulterà massima quando sarà tale il radicando, ma questo al variare di x_0 rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso il basso; di conseguenza il valore di x_0 corrispondente all'ascissa del vertice sarà relativo all'ellisse di area massima. Poiché tale valore è $x_0 = \frac{k}{2}$ (dalla $y = -x_0^2 + kx_0 = -\left(x_0 - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k}{2}$), l'ellisse cercata è una circonferenza: $x^2 + y^2 = \frac{k^2}{2}$.

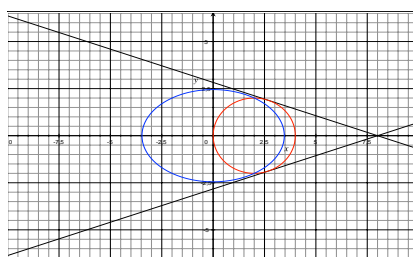
Esercizi

1. Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C(2,0)$ e raggio 2. Determinare le equazioni delle tangenti alla circonferenza condotte dal punto $(8,0)$. Scrivere l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine e fuochi sull'asse x , passante per il punto di intersezione della circonferenza con la bisettrice del primo e terzo quadrante ed avente eccentricità $1/\sqrt{2}$. Rappresentare tutto sul piano cartesiano.
2. Determinare l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x , eccentricità $\frac{4}{5}$ e passante per il punto $P(1, \frac{6\sqrt{6}}{5})$.
3. Trova l'equazione della tangente all'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 = 4$, nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$, che si trova nel quarto quadrante. Rappresentare graficamente l'ellisse e la retta tangente.
4. Scrivi l'equazione della retta tangente all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{36} = 1$, nel suo punto di ordinata $3\sqrt{3}$ che si trova nel secondo quadrante.
5. Scrivere l'equazione dell'ellisse avente eccentricità uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e gli estremi dell'asse maggiore nei punti $(4;0)$ e $(-4;0)$, e si determini l'equazione della retta ad essa tangente nel punto di coordinate $(2;\sqrt{3})$.
6. Scrivere l'equazione dell'ellisse passante per il punto $P(3,2)$ e ivi tangente alla retta di coefficiente angolare $-\frac{3}{8}$.

7. Sono dati la circonferenza di equazione $(x-2)^2 + y^2 = 4$, ed il punto di coordinate $P(2;k)$, con $k > 0$, da cui vengono condotte le tangenti s, t alla circonferenza nei punti A e B. Si determini il valore di k per il quale il triangolo APB è equilatero. Per $k = 4$, si trovino le equazioni delle rette tangenti e le coordinate dei punti A e B. Si scriva l'equazione dell'ellisse i cui fuochi sono le proiezioni dei punti A e B sull'asse delle ascisse, il cui semiasse maggiore misura 2. Infine, si scriva l'equazione della famiglia di parabole che intersecano l'asse delle ascisse nei punti di coordinate $O(0;0)$ e $(4;0)$, e tra queste s'individui quella tangente alle rette s, t . Si rappresenti tutto su un piano cartesiano.
8. Si scriva l'equazione della parabola con il fuoco nell'origine degli assi, e direttrice la retta $y = 2$. E' possibile scrivere con un'unica espressione l'equazione della parabola e della sua simmetrica rispetto all'asse y ? Si determinino le equazioni delle rette r, s tangenti alla parabola nei punti in cui questa taglia l'asse delle ascisse, e l'equazione dell'ellisse tangente alle rette r, s , con i fuochi sulla retta $y = \frac{1}{2}$, e passante per il vertice V della parabola. Si trovino, infine, le equazioni delle quattro circonferenze tangenti alle rette r, s , ed aventi raggio uguale all'eccentricità dell'ellisse. Si rappresentino tutti i luoghi geometrici sul piano cartesiano, e si scrivano le equazioni di tutte le simmetrie presenti.

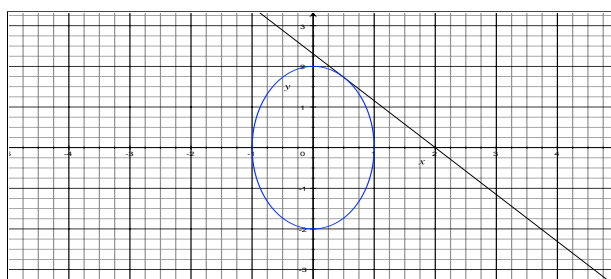
Soluzioni

1. $y = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-8), \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1.$



2. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

3. $2x + \sqrt{3}y = 4.$



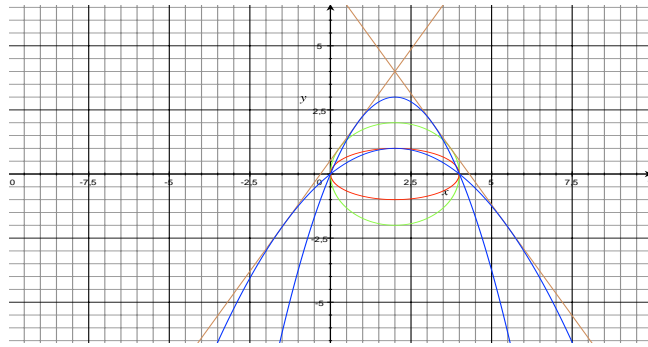
4. $3\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}y + 24 = 0.$

5. $x^2 + 4y^2 = 16, 2x + 4\sqrt{3}y = 16.$

6. $x^2 + 4y^2 = 25.$

7. $k = 4, \pm\sqrt{3}x - y + 4 \mp 2\sqrt{3} = 0, A(2 - \sqrt{3}; 1), B(2 + \sqrt{3}; 1), \frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1, y = ax^2 - 4ax,$

$y = -\frac{1}{4}x^2 + x, y = -\frac{3}{4}x^2 + 3x.$



8. $y = -\frac{x^2}{4} + 1$; $y = ax^2 + b|x| + c$; $A(2;0), B(-2;0), r: y = -x + 2, s: y = x + 2$; $\frac{x^2}{2} + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$;

$$C_{1,2} = \left(\pm\sqrt{\frac{7}{4}}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(x \mp \sqrt{\frac{7}{4}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{8}; C_{3,4} = x^2 + \left(y - 2 \mp \sqrt{\frac{7}{4}}\right)^2 = \frac{7}{8}.$$

