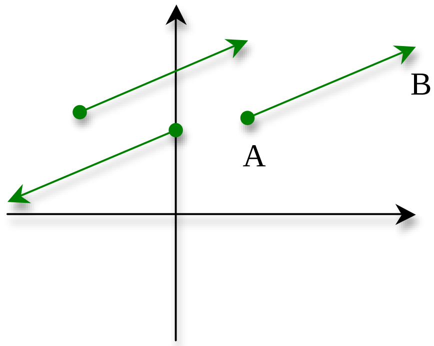
CAPITOLO 5
LA RETTA NEL PIANO CARTESIANO

5.1 Vettori del piano cartesiano

Un vettore è un ente matematico caratterizzato da una *direzione*, un *modulo*, e un *verso*. Si rappresenta mediante *segmenti orientati* del piano euclideo, oppure attraverso *punti*, come si può vedere nella seguente figura.

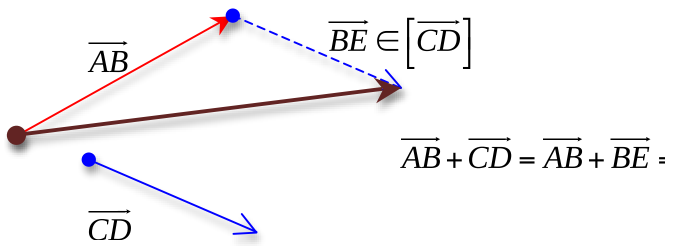


Il vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ è caratterizzato dai punti A, *coda*, e B, *punta*, del piano cartesiano. La direzione è quella della retta contenente il segmento $\overline{AB}$, il modulo è la lunghezza del medesimo segmento $\left|\overrightarrow{AB}\right| := \overline{AB}$, il verso è quello orientato dal punto A al punto B. La notazione $\overrightarrow{AB}$ riassume tutte queste informazioni.

La coda del vettore è chiamata in fisica *punto di applicazione*, e si parla di *vettori applicati* quando non si può prescindere dal punto di applicazione. Oltre ad $\overrightarrow{AB}$ sono rappresentati in figura altri vettori aventi la stessa direzione (ovvero situati su rette parallele, distinte o no da quella di $\overrightarrow{AB}$). Il *parallelismo* tra vettori è una *relazione di equivalenza*, di conseguenza l'insieme dei vettori del piano viene suddiviso in *classi di equivalenza* i cui elementi sono vettori paralleli. Si considera quindi un rappresentante per ciascuna classe, nell'esempio considerato possiamo prendere il vettore $\overrightarrow{AB}$.

Somma di vettori

La somma di vettori si basa fondamentalmente sull'idea di *traslazione*. Cerchiamo di capire perché.



Il vettore $\overrightarrow{CD}$ viene traslato "parallelamente" a se stesso nel vettore $\overrightarrow{BE}$, appartenente alla classe di equivalenza di $\overrightarrow{CD}$. La somma dei vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ viene quindi, di fatto, eseguita tra $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BE}$, e si può interpretare come lo spostamento da A a B, seguito da quello da B ad E: si tratta del cosiddetto *metodo punta-coda*, equivalente alla *regola del parallelogramma* spesso utilizzata in fisica.

L'opposto di un vettore

Dato il vettore $\overrightarrow{AB}$ si definisce *opposto* il vettore avente la stessa direzione, lo stesso modulo, ma verso opposto:

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

La somma tra un vettore ed il suo opposto è il vettore cosiddetto *nullo*, $\overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$. L'opposto di un vettore permette di ricondurre la *differenza* tra vettori alla somma tra un vettore e l'opposto dell'altro:

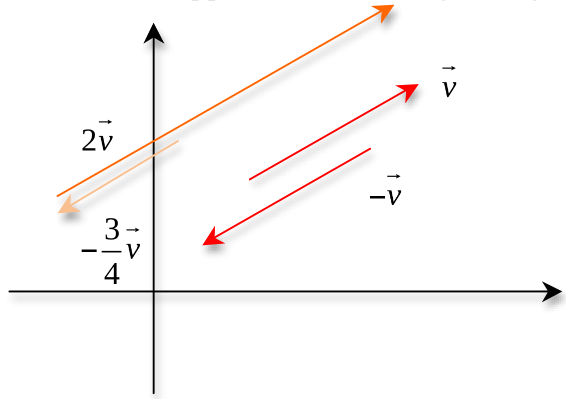
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}.$$

Il prodotto tra numeri e vettori
Si definisce il prodotto tra un numero reale λ, che chiameremo d'ora in poi *scalare*, ed un vettore $\overrightarrow{AB}$, come il vettore che ha la stessa direzione di $\overrightarrow{AB}$, lo stesso verso se $\lambda > 0$, verso opposto se $\lambda < 0$, e modulo uguale al prodotto tra $|\lambda|$ ed il modulo di $\overrightarrow{AB}$.

Quando non c'è bisogno di specificare il punto di applicazione si parla di *vettori liberi*, e vengono denotati con il simbolo $\vec{v}$. In questo modo il prodotto del vettore $\vec{v}$ per lo scalare λ è il vettore $\vec{w}$ tale che:

$$\vec{w} = \lambda \vec{v}, \text{ e } |\vec{w}| = |\lambda||\vec{v}|.$$

Quanto detto è rappresentato nella figura seguente.

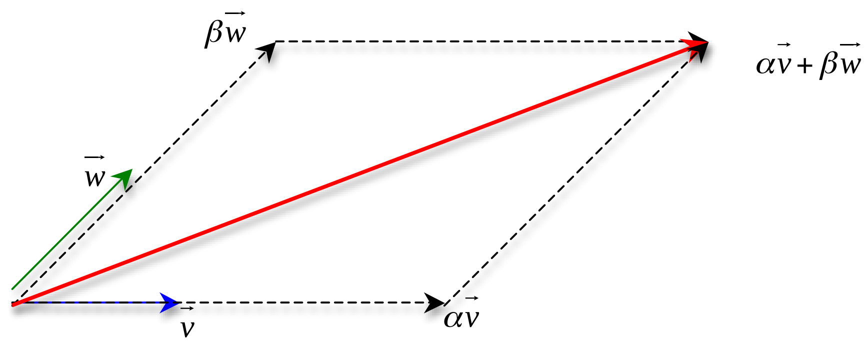


In base ai concetti presentati possiamo definire *allineati* due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ se hanno la stessa direzione, ovvero se esiste un numero reale λ tale che $\vec{w} = \lambda \vec{v}$.

Combinazioni lineari
La somma tra vettori e la moltiplicazione di un vettore per uno scalare, permettono di scomporre ogni vettore del piano nella somma di due vettori *non* paralleli.
Quest'osservazione può essere considerata alla base del concetto di *combinazione lineare*, ovvero un'espressione del tipo:

$$\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$$

per ogni $\vec{v}, \vec{w} \in V$, e $\alpha, \beta \in R$.



Sistemi lineari
Il concetto di combinazione lineare suggerisce un'ulteriore interessante interpretazione geometrica dei sistemi lineari. Consideriamo quindi il sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$, e ricordiamo la corrispondenza biunivoca tra punti del piano e vettori applicati nell'origine. Grazie quindi alla possibilità di rappresentare un vettore mediante "coordinate", il sistema lineare può essere visto come l'espressione del vettore dei termini noti (c, f), come la combinazione lineare dei vettori (a, d) e (b, e), di coefficienti x, y:

$$x(a,d) + y(b,e) = (c, f).$$

In altre parole, risolvere il sistema di cui sopra significa determinare i coefficienti x, y che permettono di scrivere il vettore (c, f) come combinazione lineare dei vettori (a, d) e (b, e). Quest'operazione è tuttavia possibile *se e soltanto se* i due vettori (a, d) e (b, e) *non* sono allineati. E' possibile così ricondurre la questione della risolubilità di un sistema lineare, alla condizione di non allineamento di vettori. E' quanto afferma la tesi del seguente teorema.

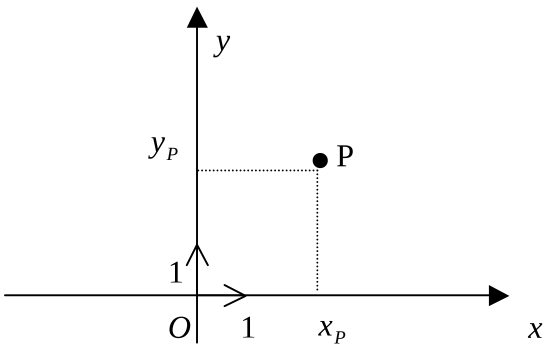
Teorema. Il sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ è sempre risolubile se $ae - bd \neq 0$, ed in tal caso risulta

$$x = \frac{ce - fb}{ae - bd} \quad y = \frac{af - dc}{ae - bd} \quad .$$

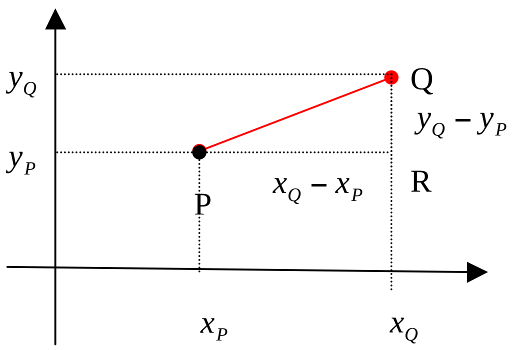
Dimostrazione. Per assurdo, se i vettori (a, d) e (b, e) fossero allineati, esisterebbe $\lambda \in R$ tale che $(b, e) = \lambda(a, d) \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{e}{d} \Rightarrow ae - bd = 0$. Non potremmo esprimere il vettore (c, f) come loro combinazione lineare $x(a, d) + y(b, e) = (c, f)$ e, quindi, il sistema equivalente si ridurrebbe ad un'equazione in due incognite e non sarebbe risolubile.

5.2 Il sistema delle coordinate nel piano. Distanza tra due punti

Consideriamo sul piano euclideo due rette perpendicolari, e fissiamo su ognuna di esse un'unità di misura e un verso (l'origine è il punto d'intersezione delle rette).



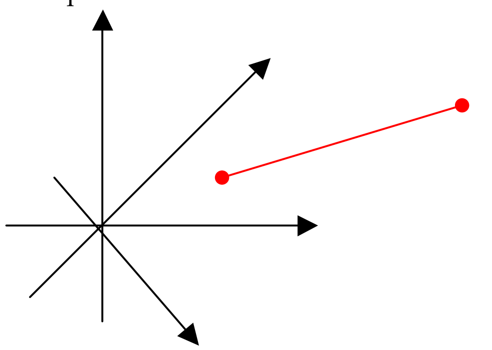
In questo modo, ogni punto del piano è caratterizzato da una *coppia ordinata* di numeri (x_P, y_P), che corrispondono alle *distanze con segno* delle proiezioni del punto sulle rette dall'origine, rispettivamente lungo l'asse *x* (detto asse delle *ascisse*) e lungo l'asse *y* (detto asse delle *ordinate*). Abbiamo così definito, in modo operativo, il *piano cartesiano*.
Possiamo quindi pensare al piano cartesiano come al piano euclideo dotato di una struttura (il *sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico)* come quella appena introdotta, mediante la quale, in sostanza, ogni punto è rappresentato da una coppia *ordinata* di numeri. Quest'*Aritmetizzazione* della geometria euclidea, introdotta da Cartesio e da Fermat nel diciassettesimo secolo, è da considerarsi, per le sue innumerevoli implicazioni, una delle tappe fondamentali nello sviluppo del pensiero scientifico.
Per esempio, è di rapido calcolo la distanza tra due punti del piano se osserviamo la seguente costruzione.



La distanza tra i punti P e Q viene definita in modo "naturale" come lunghezza del segmento che li congiunge. Se applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo PQR, otteniamo la relazione che costituisce la definizione di distanza tra i due punti:

$$d(P,Q)=\sqrt{\left(x_Q-x_P\right)^2-\left(y_Q-y_P\right)^2}\,.$$

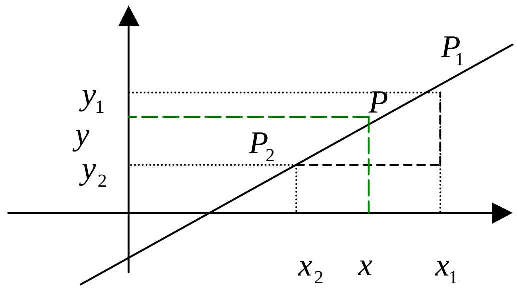
Il concetto di distanza è di importanza fondamentale. Si osservi che, al variare del sistema di riferimento, il valore numerico della distanza tra due punti non cambia. Cambiano le coordinate, ovvero la rappresentazione dei punti nel dato sistema di riferimento, ma non la misura del segmento che li congiunge!



Mediante il sistema delle coordinate è possibile stabilire una relazione tra i punti di una qualsiasi curva del piano, associandole un'*equazione*.

5.3 L'equazione della retta nel piano cartesiano

Rappresentiamo nel piano cartesiano la retta passante per i punti di coordinate $P_1=(x_1,y_1)$ e $P_2=(x_2,y_2)$, con $x_1\neq x_2$



Con semplici argomenti di similitudine si deduce la relazione che esprime l'appartenenza di un punto del piano alla retta passante per i punti $P_1=(x_1,y_1)$ e $P_2=(x_2,y_2)$, la cosiddetta *equazione della retta per due punti:*

$$\frac{y-y_2}{x-x_2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

Esercizio 1

Scrivere le equazioni delle rette passanti per le seguenti coppie di punti:

a) (1,2) e (3-1)
b) (2,4) e (2,8)
c) (0,0) e (2,-9).

Nel caso particolare di retta parallela all'asse y , espresso dalla condizione evidente $x_1=x_2$, otteniamo dalla $\frac{y-y_2}{x-x_2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ la relazione $0(y-y_2)=(x-x_2)(y_1-y_2)\Rightarrow x=x_2$ come equazione di una retta parallela all'asse y. Considerazioni analoghe portano alla conclusione che $y = k$ è l'equazione generica di una retta parallela all'asse x. Una retta non parallela all'asse y vede la propria *pendenza* espressa dal termine $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ detto *coefficiente angolare*. Tale termine è la *tangente* dell'angolo preso in senso antiorario dall'asse delle x alla retta. Il termine $q = y_2 - x_2 \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 - x_2}$ rappresenta il valore dell'ordinata del punto in cui la retta taglia l'asse y. Tale termine è detto *termine noto*. L'equazione della retta (non parallela all'asse y) espressa in termini di coefficiente angolare e termine noto è detta *equazione della retta in forma esplicita*

$$y = mx + q.$$

Esercizio 2

Scrivere in forma esplicita le equazioni delle rette di cui all'esercizio 1, evidenziando per ognuna di esse il coefficiente angolare ed il termine noto.

L'equazione che esprime *tutte* le rette del piano (anche quelle parallele all'asse y) si ottiene sempre a partire dall'equazione della retta passante per due punti mediante alcuni semplici passaggi algebrici:

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \Rightarrow y(x_1 - x_2) - y_2(x_1 - x_2) = x(y_1 - y_2) - x_2(y_1 - y_2) \Rightarrow$$

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

Introdotti i coefficienti $a = (y_1 - y_2); b = -(x_1 - x_2); c = x_1 y_2 - x_2 y_1$ si giunge alla cosiddetta *equazione generale della retta*

$$ax + by + c = 0.$$

Esercizio 3

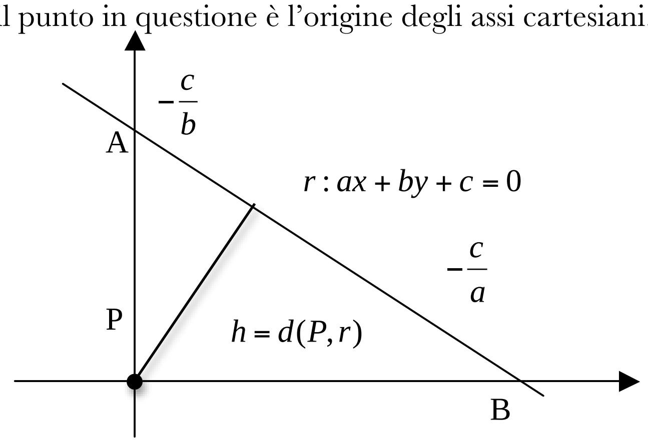
Sono date le seguenti rette: $2x - y = 1; \quad x - \frac{y}{3} + 3 = 0; \quad 4x + 5 = 0; \quad -3y + 1 = 0$. *Si tracci il grafico di ognuna di esse e se ne determini il coefficiente angolare.*

Talvolta può essere utile disporre di un'espressione che esprima tutte le rette (tranne quella parallela all'asse y) passanti per un punto di coordinate (x_0, y_0). Questa espressione dovrà necessariamente dipendere dal coefficiente angolare, che permette di distinguere le rette passanti per un punto. Dalla $y = mx + q$, imponendo l'appartenenza alla retta del punto (x_0, y_0) segue la cosiddetta *equazione del fascio proprio di rette passanti per il punto* (x_0, y_0):

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

La distanza punto-retta

Per definizione, la distanza di un punto da una retta è la lunghezza del segmento che congiunge il punto alla retta nella direzione perpendicolare ad essa. Vediamo come si calcola questa lunghezza, iniziando dal caso particolare in cui il punto in questione è l'origine degli assi cartesiani.



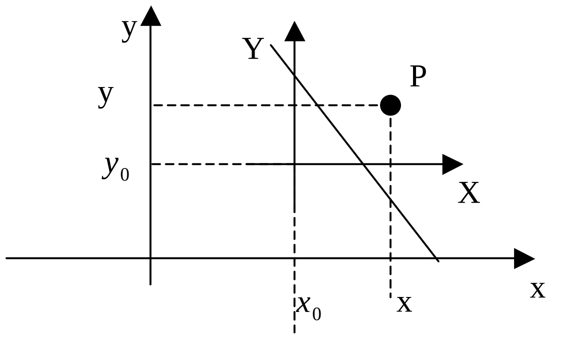
Si determina la distanza del punto (origine) dalla retta uguagliando le due espressioni con cui si può scrivere l'area del triangolo ABC:

$$\frac{AP\cdot PB}{2}=\frac{AB\cdot h}{2}\Rightarrow d(P,r)=h=\frac{AP\cdot PB}{AB}=\frac{\left|\frac{c^2}{ab}\right|}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Esercizio 4

Calcolare la distanza dell'origine da ognuna delle rette di cui all'esercizio 3.

Nel caso in cui il punto P non coincide con l'origine ci riconduciamo al vaso appena visto riferendo l'equazione della retta ad un sistema di riferimento con assi paralleli agli assi coordinati, ed origine coincidente con il punto $P(x_0,y_0)$:



La *trasformazione* operata (che utilizzeremo anche in seguito) è la cosiddetta **traslazione**: una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano espressa dalle seguenti equazioni (che legano le coordinate di un punto nei due sistemi di riferimento)

$$T_{(x_0,y_0)}:\begin{cases}x=X+x_0\\ y=Y+y_0\end{cases}$$

Per sfruttare il risultato precedente occorre scrivere l'equazione della retta (di equazione data nel SdR Oxy) nel sistema di riferimento PXY:

$$0=ax+by+c=a(X+x_0)+b(Y+y_0)+c=aX+bY+ax_0+by_0+c.$$

La formula della distanza punto-retta si ottiene osservando che, nella relazione trovata in precedenza, $d(P,r)=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, il termine noto *c* deve essere sostituito da quello dell'equazione della retta trasformata: ax_0+by_0+c:

$$d(P,r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Qualora l'equazione della retta fosse data in forma esplicita $y=mx+q$, si procede nel seguente modo: $mx-y+q=0$

$$d(P,r)=\frac{|mx_0-y_0+q|}{\sqrt{m^2+1}}.$$

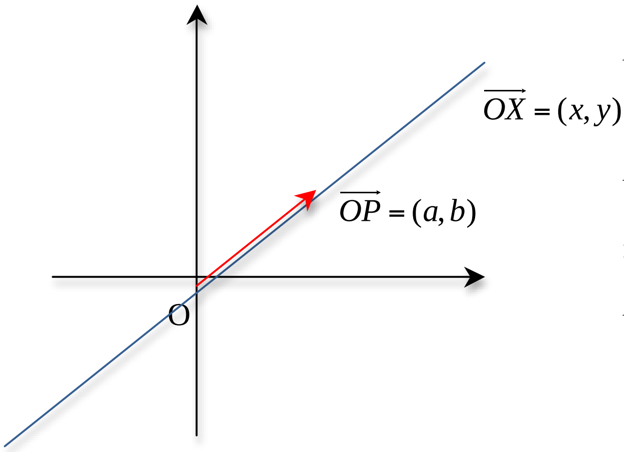
Un'applicazione della distanza punto-retta: la bisettrice di un angolo.

Sono date due rette del piano di equazione $ax+by+c=0$ e $a'x+b'y+c'=0$. La bisettrice dell'angolo (acuto) delimitato da queste due rette consiste dei punti del piano equidistanti dalle rette date. Questa condizione è espressa dall'equazione

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}.$$

I vettori e le rette del piano

Equazione vettoriale, parametrica, e cartesiana della retta del piano.

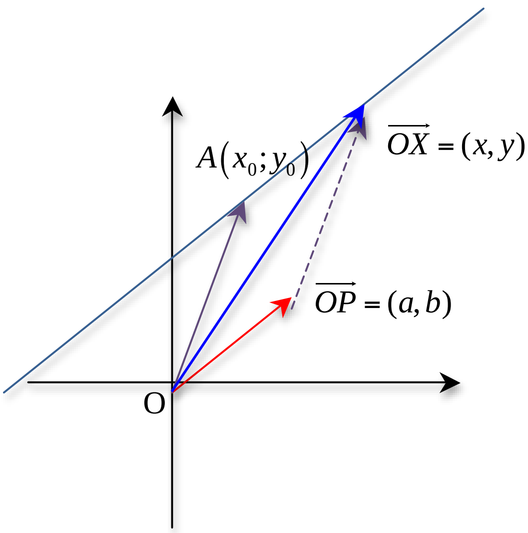


Equazione vettoriale: $\overrightarrow{OX}=\lambda\overrightarrow{OP}$. Da questa segue che $(x,y)=(\lambda a,\lambda b)$, e la cosiddetta

Equazione parametrica: $\begin{cases} x=\lambda a \\ y=\lambda b \end{cases}$. Dividendo membro a membro si perviene alla:

Equazione cartesiana: $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}\Rightarrow y=\frac{b}{a}x$, oppure $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\Rightarrow x=\frac{a}{b}y$ a seconda che uno tra *a* e *b* sia uguale a zero.

Se la retta non passa per l'origine, sia $A(x_0,y_0)$ un punto ad essa appartenente, ed $\overrightarrow{OP}=(a,b)$ il *vettore direzione*, ovvero un vettore applicato nell'origine la cui direzione è parallela a quella della retta.



Equazione vettoriale: $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OP}$. Da questa segue che $(x,y)=(x_0+\lambda a,y_0+\lambda b)$, e la cosiddetta

Equazione parametrica: $\begin{cases} x=x_0+\lambda a \\ y=y_0+\lambda b \end{cases}$. Dividendo membro a membro si giunge alla:

Equazione cartesiana: $\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{b}{a}\Rightarrow y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0)$, oppure $\frac{x-x_0}{y-y_0}=\frac{a}{b}\Rightarrow x-x_0=\frac{a}{b}(y-y_0)$, dove abbiamo supposto che *b* sia diverso da zero.

Esercizio 5

a) *Calcolare la distanza tra il punto P(-2,3) e le rette trovate nell'esercizio 1.*

b) *Determinare la bisettrice dell'angolo formato dalle rette* $\sqrt{3}x-y=0$ *e* $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

5.4 Mutua posizione di due rette nel piano cartesiano

Due rette possono incontrarsi in un punto (rette *incidenti*), in infiniti punti (rette *parallele coincidenti*), oppure in nessun punto (rette *parallele distinte*). Queste considerazioni di natura geometrica vengono concretizzate algebricamente attraverso la soluzione di un sistema formato dalle equazioni delle rette in questione. In generale, siano $ax+by+c=0, \quad a'x+b'y+c'=0$ le equazioni di due rette del piano. Mettendo a sistema le due equazioni notiamo che

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione se e soltanto se $ab'-a'b \neq 0$ (dimostrare questa affermazione). Geometricamente, questa condizione algebrica equivale alla richiesta che i coefficienti angolari delle due rette siano diversi:

$$ab'-a'b \neq 0 \Rightarrow -\frac{a}{b} \neq -\frac{a'}{b'} \Rightarrow m \neq m'.$$

Rette parallele

Per inciso, abbiamo trovato la cosiddetta *condizione di parallelismo tra due rette*:

$$m = m'.$$

Se poi, nell'ipotesi in cui $ab'-a'b=0$ risulta anche

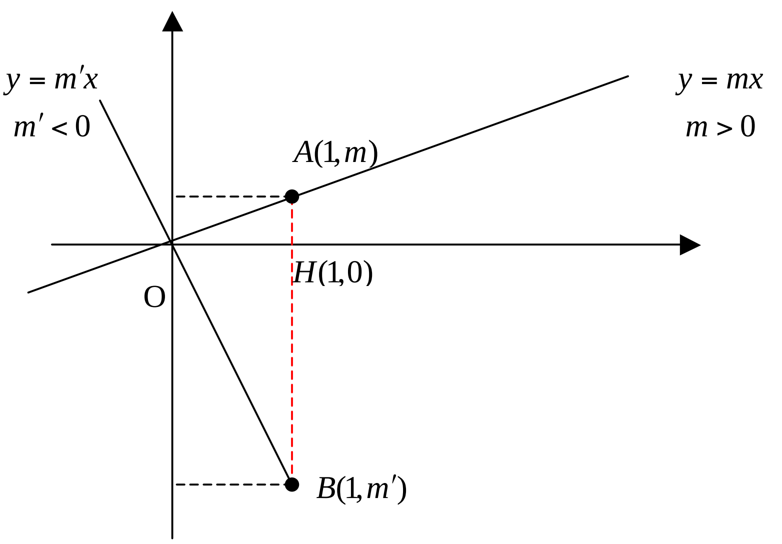
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\begin{cases} =\dfrac{c}{c'} & (\textit{coincidenti}) \\ \neq \dfrac{c}{c'} \end{cases}$$

Esercizio 6

Si dica per quali valori del parametro k le rette $r: \quad 3x-y+1=0, \quad s: \quad y=kx-2+k$ *sono incidenti e per quali valori parallele.*

Rette perpendicolari

Com'è noto, due rette si dicono perpendicolari quando dividono il piano in quattro angoli retti. Sempre nel caso di rette non parallele agli assi cartesiani cerchiamo una condizione che esprima la perpendicolarità di due rette del piano. Per semplicità consideriamo il caso di due rette passanti per l'origine, il caso generale segue dall'invarianza di quanto esporremo per traslazioni.



Il triangolo OAB è per costruzione un triangolo rettangolo, essendo le due rette perpendicolari. Applicando il secondo Teorema di Euclide troviamo la relazione $OH^2 = AH \cdot BH$. Da questa segue

$$1 = |m||m'| = m \cdot (-m') = -m \cdot m'.$$

In conclusione, *due rette sono perpendicolari se e soltanto se*

$$m' = -\frac{1}{m},$$

ovvero se il coefficiente angolare dell'una è *antireciproco* del coefficiente angolare dell'altra.

Un applicazione della condizione di perpendicolarità: l'asse di un segmento.

Il problema è: dato il segmento di estremi $A(x_A, y_A);\quad B(x_B, y_B)$, con $x_A \neq x_B$, scrivere l'equazione dell'**asse**. L'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento passante per il suo punto medio; per scriverne l'equazione dobbiamo conoscere le coordinate del **punto medio** del segmento

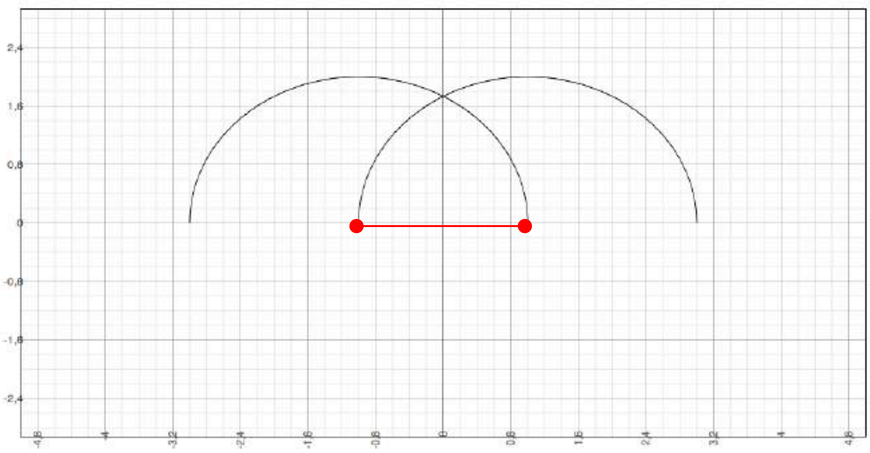
$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right),$$

ed il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il segmento dato:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}.$$

Con questi elementi **l'equazione dell'asse** risulta essere la seguente:

$$y - \frac{y_A + y_B}{2} = -\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B}\left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right).$$



Esercizio 7

Si scriva l'equazione della retta passante per il punto (5,1) e perpendicolare alla retta $3x - 2y + 1 = 0$.

Esercizio 8

Si determini l'equazione della perpendicolare alla retta $y = -\frac{1}{2}x + 4$*, che forma con questa e con l'asse delle ordinate un triangolo di area 4.*

Esercizio 9

E' data la retta di equazione $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. *Si trovino le rette che formano con questa*

a) *un triangolo rettangolo isoscele avente un vertice coincidente con l'origine, l'ipotenusa giacente sulla retta* $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$*, ed avente area 2.*

b) *Un quadrato avente un vertice coincidente con l'origine ed un lato giacente sulla retta* $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.

Esercizio 10

Scrivere l'equazione dell'asse del segmento di estremi (2,3) e (4,-1).

5.5 Fasci di rette

E' noto che per un punto P(x_0,y_0) del piano passano infinite rette; l'insieme di queste rette costituisce il cosiddetto *fascio proprio di rette*. Siano $ax+by+c=0$ e $a'x+b'y+c'=0$ due di queste.
Definiamo *combinazione lineare* l'espressione ottenuta dalle due rette così definita:

$$p(ax+by+c)+q(a'x+b'y+c')=0.$$

Poiché il punto P, detto *centro del fascio*, appartiene alle due rette date, dette *generatrici del fascio*, risulta che, al variare dei coefficienti p e q si ottengono tutte le rette del piano passanti per P.
Escludendo dalla combinazione lineare la retta di equazione $x=x_0$, parallela all'asse y, è possibile rappresentare il fascio di rette mediante l'equazione

$$y-y_0=m(x-x_0).$$

Questa forma ha il vantaggio di evidenziare il centro del fascio. Tuttavia, è possibile determinare il centro del fascio, data la sua equazione sotto forma di combinazione lineare
$p(ax+by+c)+q(a'x+b'y+c')=0$, assegnando due coppie di valori qualsiasi (con giudizio però!) ai coefficienti p e q e risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle rette che si determinano con la scelta delle due coppie di valori.
L'insieme delle rette *parallele* ad una qualsiasi retta del piano di equazione $ax+by+c=0$ costituisce il cosiddetto *fascio improprio di rette*.

5.6 Le simmetrie

Le simmetrie nel piano cartesiano sono un tipo particolare di "trasformazioni" dette **isometrie**, ovvero trasformazioni che conservano le distanze tra i punti (e non solo). Le altre isometrie, traslazioni e rotazioni, saranno oggetto di uno studio successivo.

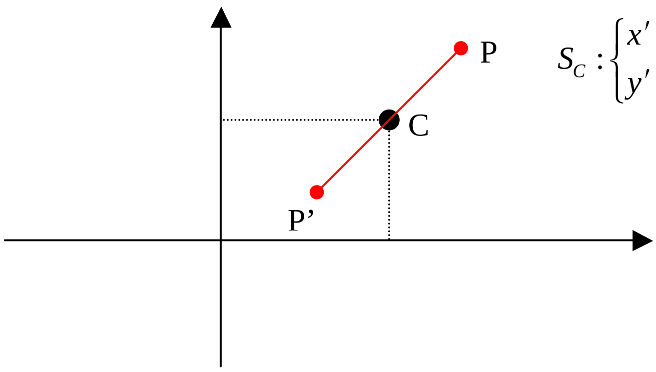
Simmetrie rispetto agli assi coordinati

Iniziamo col descrivere le simmetrie rispetto agli assi coordinati:

$$S_x:\begin{cases}X=x\\Y=-y\end{cases},\quad S_y:\begin{cases}X=-x\\Y=y\end{cases}$$

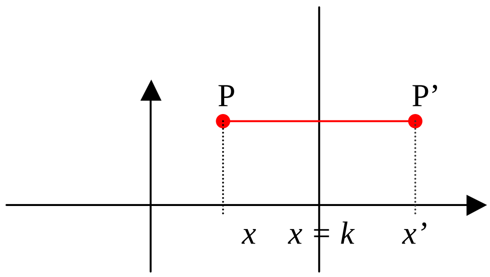
Simmetria rispetto ad un punto

Sia $C=(x_0,y_0)$ il centro della simmetria. Vogliamo scrivere le equazioni del simmetrico di un punto del piano rispetto a tale centro.



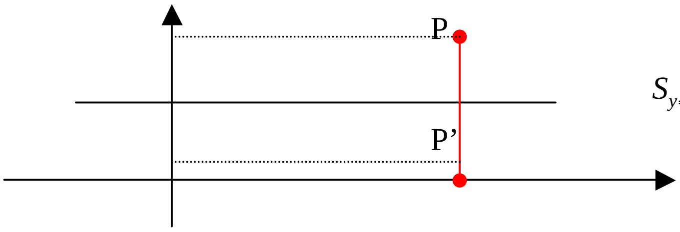
$$S_C:\begin{cases}x'=x-2(x-x_0)=2x_0-x\\y'=y-2(y-y_0)=2y_0-y\end{cases}$$

Simmetria rispetto ad un asse parallelo all'asse y



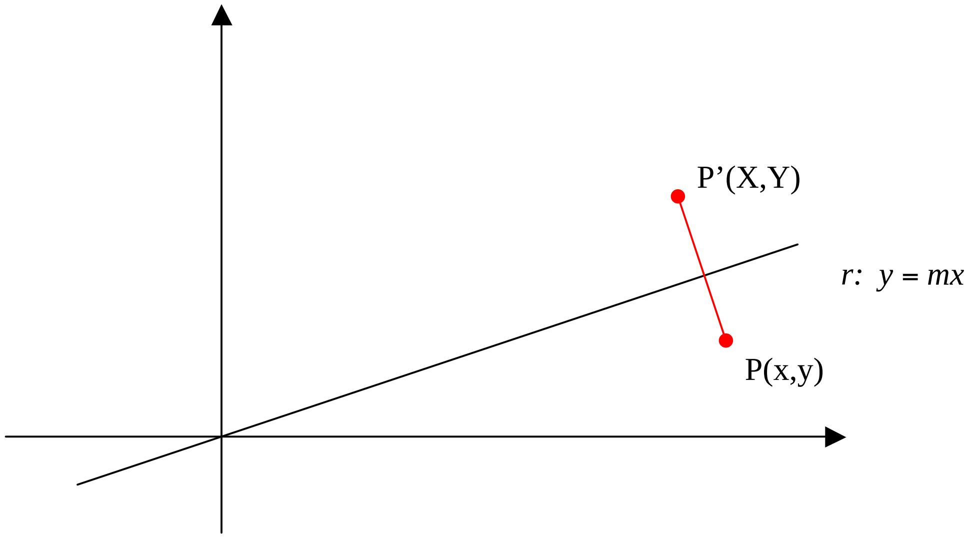
$$S_{x=k}:\begin{cases}x'=2k-x\\y'=y\end{cases}$$

Simmetria rispetto ad un asse parallelo all'asse x



$$S_{y=k}:\begin{cases} x' = x \\ y' = 2k - y \end{cases}$$

Simmetria rispetto ad una retta passante per l'origine
Le simmetrie rispetto ad una retta passante per l'origine (non coincidente con l'asse y) si ricavano osservando la seguente figura.



Il punto medio del segmento PP' appartiene alla retta *r*, quindi $\frac{y+Y}{2} = m\frac{x+X}{2}$. Inoltre, la distanza dei punti P e P' dall'origine deve coincidere: $x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$. Mettendo a sistema le equazioni trovate otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{y+Y}{2} = m\frac{x+X}{2} \\ x^2 + y^2 = X^2 + Y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + Y = m(x+X) \\ (y-Y)(y+Y) = (X-x)(X+x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + Y = m(x+X) \\ (y-Y)m = X - x \end{cases}$$

L'ultimo è un sistema di due equazioni in due incognite di primo grado, che risolto con uno dei qualsiasi metodi noti[1] porta alle equazioni generali della simmetria rispetto ad una retta passante per l'origine:

$$R_{y=mx}:\begin{cases} x = \frac{1-m^2}{m^2+1}X + \frac{2m}{m^2+1}Y \\ y = \frac{2m}{m^2+1}X - \frac{1-m^2}{m^2+1}Y \end{cases}, \quad R^{-1}_{y=mx}:\begin{cases} X = \frac{1-m^2}{m^2+1}x + \frac{2m}{m^2+1}y \\ Y = \frac{2m}{m^2+1}x - \frac{1-m^2}{m^2+1}y \end{cases}.$$

Esercizio: *Si assumano per il coefficiente angolare i valori a) 1; b)-1; c)0. A quali trasformazioni corrispondono le equazioni trovate?*

[1] Le condizioni di esistenza algebrica delle soluzioni hanno una immediata interpretazione geometrica…

Problemi svolti

1. Rappresenta graficamente la funzione di equazione $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + |x+1|$.
   a) Determina le coordinate dei punti A, B, C $(x_A < x_B < x_C)$ del grafico dato le cui ascisse sono soluzioni dell'equazione $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$.
   b) Individua il quarto vertice D del trapezio isoscele ABCD.
   c) Calcola il perimetro e l'area del trapezio isoscele ABCD.
   d) Dimostra che congiungendo i punti medi dei lati si ottiene un rombo che ha l'area uguale alla metà di quella del trapezio.

Soluzione

La funzione è $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + |x+1| = |x-2| + |x+1| = \begin{cases} y = -2x+1 & x \le -1 \\ y = 3 & -1 < x \le 2 \\ y = 2x-1 & x > 2 \end{cases}$

a) Applicando la regola di Ruffini (una soluzione è x = -1) otteniamo:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \Rightarrow x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x^2 + x - 6)(x+1) = (x-(-3))(x-(-1))(x-2).$$

$A(-3;7),\quad B(-1;3),\quad C(2;3)$

b) Il quarto vertice D si determina mediante l'intersezione tra la retta di equazione $y = 7$ e la retta di equazione $y = 2x - 1$: $D(4;7)$.

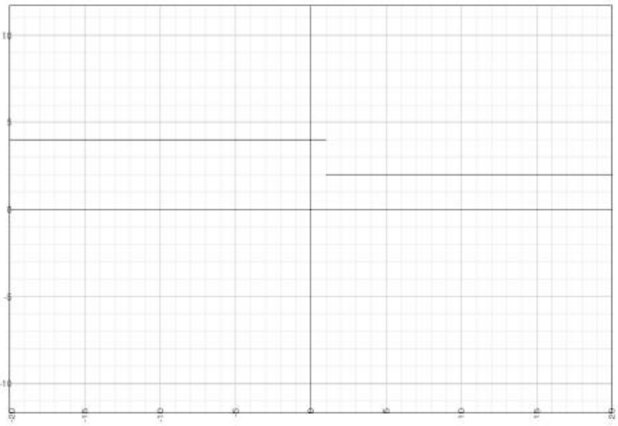
c) Il perimetro del trapezio ABCD misura:
$2p = |4-(-3)| + |2-(-1)| + 2\sqrt{(4-2)^2 + (7-3)^2} = 10 + 2\sqrt{20} = 2(5 + 2\sqrt{5})$, mentre l'area risulta: $area = \frac{1}{2}(7+3)|7-3| = 20$.

d) $M_{AB}(-2;5), M_{BC}(\frac{1}{2};3),\quad M_{CD}(3;5),\quad M_{DA}(\frac{1}{2};7)$. L'area del rombo è:
$area = \frac{1}{2} M_{AB}M_{DC} \cdot M_{BC}M_{AD} = \frac{1}{2} 5 \cdot 4 = 10$.

2. Considera la funzione di equazione $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{1-x} + 3$.
   a) Rappresentala graficamente.
   b) Sia A l'intersezione della curva data con l'asse delle ordinate. Determina la retta *r* passante per A che forma un angolo di 45° con l'asse delle ascisse.
   c) Sia B l'intersezione di *r* con l'asse *x*. Scrivi le equazioni dei lati del triangolo isoscele ABC, di base AB, e con il vertice C situato nel quarto quadrante, la cui area vale 24.
   d) Stabilisci per quali valori del parametro *m* le rette del fascio di equazione $mx + y - 2 - m = 0$ intersecano il lato BC.

Soluzione

a) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{1-x} + 3 = \frac{|x-1|}{1-x} + 3 \Rightarrow \begin{cases} y = 2, & x \ge 1 \\ y = 4, & x < 1 \end{cases}$



b) $A = \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(0;4)$. Una retta che forma un angolo di 45° con l'asse delle ascisse è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante, quindi il suo coefficiente angolare è $m = 1$. Dovendo passare per il punto A, sarà la retta di equazione $y = x + 4$.

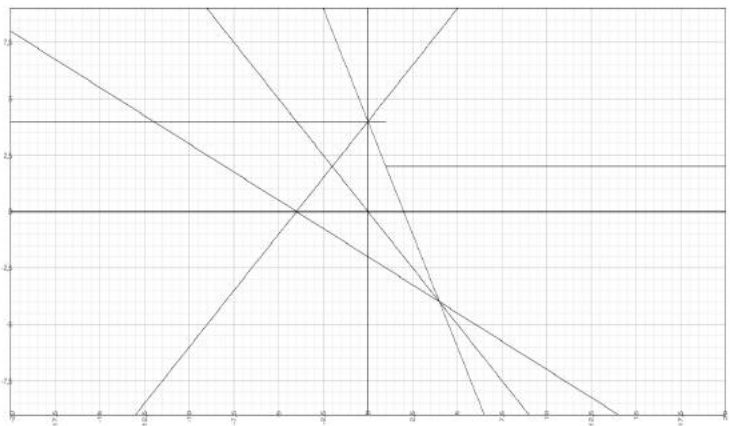
c) $B = \begin{cases} y = 0 \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow B(-4;0)$. Il vertice C è situato sull'asse del segmento AB:

$$y - \frac{y_A + y_B}{2} = -\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B}\left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)$$
$$y - 2 = -(x + 2) \Rightarrow y = -x$$

Di conseguenza il vertice C ha coordinate $C(x;-x)$ e, detta *h* la sua distanza dalla retta *r*, risulta $h = \frac{|x + x + 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|x + 2|$. Sfruttando l'ipotesi sull'area:

$24 = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}|x + 2|}{2} \Rightarrow |x + 2| = 6 \Rightarrow x = 4$. Quindi $C(4;-4)$ e le rette contenenti i lati del triangolo isoscele hanno equazione

$BC: \frac{y - 0}{-4 - 0} = \frac{x + 4}{8} \Rightarrow x + 2y + 4 = 0;\quad AC: \frac{y - 4}{-4 - 4} = \frac{x - 0}{4 - 0} \Rightarrow 2x + y - 4 = 0$.



d) Il centro del fascio di rette si ottiene assegnando due valori qualsiasi al parametro e mettendo a sistema le rette ottenute: $\begin{cases} y = 2 & (m = 0) \\ y = -x + 3 & (m = 1) \end{cases} \Rightarrow D(1;2) \Rightarrow y - 2 = m(x - 1)$. La retta congiungente

D con B ha coefficiente angolare $m = \frac{2-0}{1+4} = \frac{2}{5}$, mentre la retta congiungente D con C ha coefficiente angolare $m = \frac{2+4}{1-4} = -2$.

Esercizi

1. Tra le rette passanti per il punto di coordinate (1,2), determinare:
   a) La parallela alla retta di equazione $3x-2y=10$; $[3x-2y+1=0]$
   b) La perpendicolare alla retta di equazione $x+2y=0$. $[2x-y=0]$

2. Tra tutte le rette del fascio $kx+(1-k)y+3k-2=0$ determinare:
   a) la parallela all'asse y; $[x+1=0]$
   b) la perpendicolare alla retta $y=x-1$; $[x+y-1=0]$

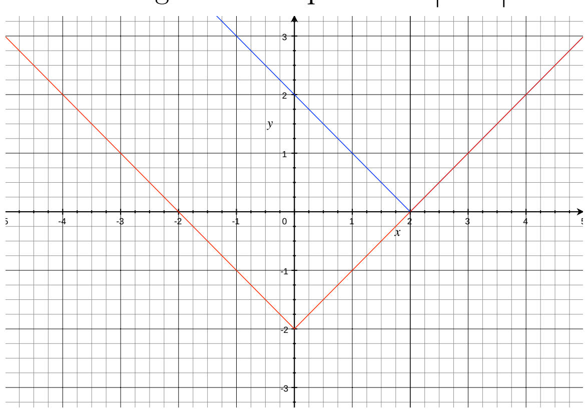
3. Scrivere l'equazione dell'asse del segmento A(-2,2) B(2,-1). Determinare sull'asse un punto C tale che il triangolo ABC abbia area 4.
   $$\left[\quad 8x-6y+3=0 \quad C_1\left(\frac{24}{25},\frac{89}{50}\right), C_2\left(-\frac{24}{25},-\frac{39}{25}\right)\quad\right]$$

4. Sono dati i punti A(-1;-2) e B(3;-1). L'asse di AB interseca in E l'asse y e la retta a cui appartiene il segmento AB interseca in D l'asse x. Detto M il punto medio di AB, determinare:
   a) il punto medio M, $\left[M\left(1,-\frac{3}{2}\right)\right]$
   b) la retta a cui appartiene il segmento AB, $[x-4y-7=0]$
   c) l'asse del segmento AB, $[8x+2y-5=0]$
   d) i punti E e D, $\left[\quad E\left(0,\frac{5}{2}\right) \quad D(7,0)\quad\right]$

5. Siano A e B i punti intersezione della retta $x+y-4=0$ con gli assi cartesiani. Si individui sull'asse del segmento AB il punto C nel primo quadrante, in modo tale che il triangolo di vertici A, B, C abbia area $8\sqrt{3}$. $\left[C\left(2+2\sqrt{3},2+2\sqrt{3}\right)\right]$

6. E' dato il fascio di rette $(2-k)x+y-1+k=0$.
   a) Si determini il centro del fascio. $[C(1,-1)]$
   b) Si determini la parallela alla bisettrice II-IV quadrante. $[x+y=0]$

7. Risolvere graficamente la seguente disequazione: $|x-2| \le -2+|x|$. $[x \ge 2]$



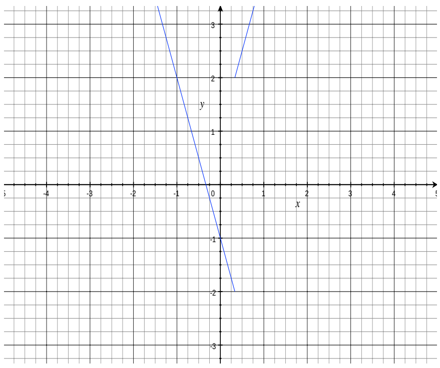
8. Tra le rette del fascio $kx + y - 2 = 0$ si determinino quelle distanti $\sqrt{2}$ dall'origine.
$\left[\; x + y - 2 = 0; \quad x - y + 2 = 0 \;\right]$

9. Dato il fascio di rette di equazione $kx + 3(2-k)y + 1 - k = 0$ determinare:
   a) Il centro del fascio; $\left[C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)\right]$
   b) I valori di k per cui le rette del fascio formano un angolo ottuso con l'asse delle ascisse. $\left[0 < k < 2\right]$

10. Un motociclista parte e si muove alla velocità costante di 10 m/s, contemporaneamente ad un'automobilista, che si trova 100 metri più avanti rispetto al motociclista, e che parte con velocità costante di 5 m/s nella stessa direzione e verso del motociclista. Dopo quanto tempo si troveranno nello stesso punto? $\left[t = 20s\right]$

11. Si tracci il grafico della seguente funzione: $f(x) = \sqrt{9x^2 - 6x + 1} + \frac{|2-6x|}{3x-1}$.

$$\left[f(x) = \begin{cases} 3x+1; & x > \frac{1}{3} \\ -3x-1; & x \le \frac{1}{3} \end{cases} \right]$$



12. Nel fascio di rette di equazione $2x + 5y + k = 0$ individuare:
   a) Le rette *r*, *s* che passano per i punti dell'asse y, le cui ordinate sono soluzioni dell'equazione $t^2 - 2t - 8 = 0$; $\left[\; r: 2x + 5y + 10 = 0; \quad s: 2x + 5y - 20 = 0 \;\right]$
   b) Determinare i punti A e B intersezione della retta $8x + 5y + 10 = 0$ rispettivamente con le rette *s* e *r*; $\left[\; A(-5,6) \quad B(0,-2) \;\right]$
   c) Determinare il punto C di ascissa positiva situato sulla bisettrice del I e III quadrante, tale che il segmento AB, sia la base di un triangolo ABC di area 8; $\left[C(2,2)\right]$
   d) Individuare, per costruzione geometrica, le coordinate del punto D in modo tale che il quadrilatero ACBD sia un parallelogramma. $\left[D(-7,2)\right]$