CAPITOLO 4
LE FUNZIONI

4.1 Definizione. Insieme di definizione e immagine

Si dice *funzione* una legge che ad *ogni* elemento *x* appartenente all'insieme *A* associa *un solo* elemento *y* appartenente all'insieme *B*.
In simboli

$$f: \quad A \to B$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Gli insiemi *A* e *B* sono detti rispettivamente *Dominio* e *Codominio.* Ci occuperemo soltanto di funzioni *reali di variabile reale*, cioè di quelle funzioni in cui il dominio ed il codominio sono sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali.

Dopo queste definizioni preliminari si pongono due questioni di rilievo per lo studio di una funzione: la determinazione del cosiddetto *insieme di definizione*, e la sua *rappresentazione grafica* su un diagramma cartesiano. Definiamo quindi l'insieme di definizione come *il più grande sottoinsieme* del dominio in cui la funzione è definita, e che scegliamo di denotare con *A*. Il grafico di una funzione è l'insieme dei punti del piano di coordinate $(x; f(x))$, dove *x* appartiene all'insieme di definizione e $f(x)$ è un elemento della cosiddetta *immagine di A* tramite la funzione *f*, che è definita come l'insieme $f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$; in questo modo è definito l'insieme detto *controimmagine di B* costituito dagli elementi $f^{-1}(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$.

La funzione inversa

Di particolare importanza sono le funzioni *iniettive*, quelle tali che $\forall x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \in B$. Se una funzione è iniettiva è anche *invertibile*, ovvero tale che esiste una funzione

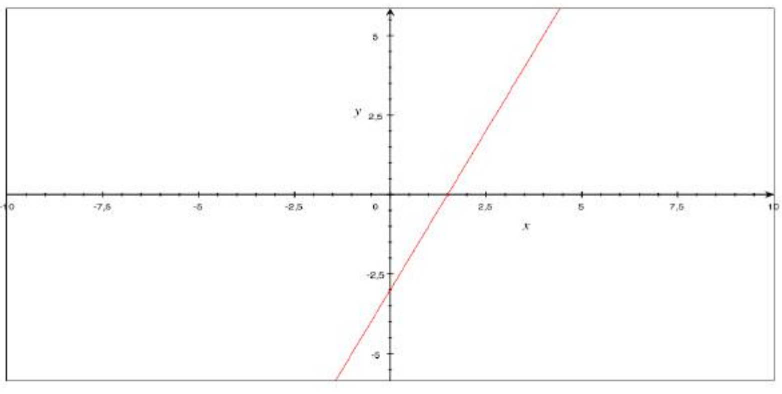
$$g: \quad B \to A$$
$$y \mapsto x = g(y)$$

per ogni $y = f(x) \in B$. La funzione *g* si dice *funzione inversa di f* e si indica con f^{-1}.

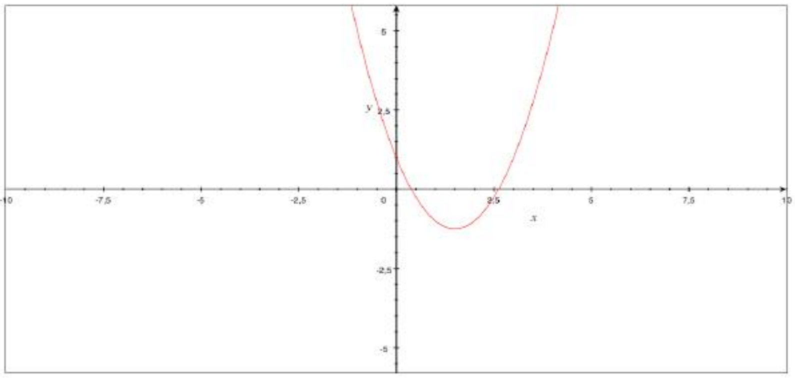
4.2 Alcuni esempi di funzioni reali di variabile reale

Le funzioni polinomiali di primo e secondo grado

Rientrano in questa categoria le funzioni del tipo $f(x) = ax + b$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$. Queste funzioni hanno come insieme di definizione l'insieme dei numeri reali. La loro rappresentazione grafica è data rispettivamente dalla *retta* e dalla *parabola*:



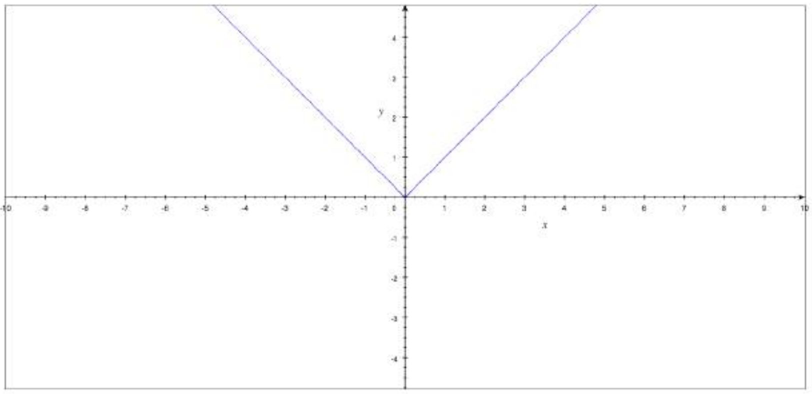
E' evidente dal grafico che l'immagine della retta coincide con l'insieme dei numeri reali.
Nel caso della funzione polinomiale di secondo grado invece,



l'immagine è costituita da tutti i numeri reali non inferiori all'ordinata del vertice.

La funzione valore assoluto

Al valore assoluto di un numero reale è possibile associare la funzione $f(x) = |x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$. Una funzione di questo tipo si dice *definita per casi*. Il grafico della funzione valore assoluto è il seguente:



4.3 L'operazione di composizione tra funzioni

Oltre alle usuali operazioni algebriche è possibile definire anche l'operazione di *composizione* tra funzioni.

Siano *A*, *B*, *C* tre insiemi e siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni. Ad ogni $x \in A$, la funzione f associa l'elemento $f(x) \in B$. A quest'ultimo elemento, la funzione g associa un elemento $g(f(x)) \in C$. E' così definita una funzione da *A* in *C* che ad ogni $x \in A$ associa un elemento $g(f(x)) \in C$.

Attraverso la composizione di funzioni è possibile verificare la relazione che lega una funzione invertibile con la propria inversa:

$$\begin{array}{ll} f^{-1}(f(x)) = x, & \forall x \in A \\ f(f^{-1}(x)) = x, & \forall f(x) \in f(A) \end{array}.$$

4.4 Funzioni pari e dispari. Simmetrie

Questa proprietà ha permesso di costruire il grafico della funzione inversa, a partire da quello della funzione per *simmetria* rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

La simmetria è una proprietà che permette di sveltire le operazioni connesse alla rappresentazione grafica di una funzione. I concetti di funzione *pari* e di funzione *dispari*, permettono di caratterizzare due classi di funzioni.

La *parità* e la *disparità* di una funzione sono proprietà molto importanti, in quanto semplificano la rappresentazione grafica di una funzione riducendola a sottoinsiemi dell'insieme di definizione, per poi estenderla *per simmetria* ai restanti sottoinsiemi. Diamo le seguenti definizioni.

Una funzione $f : A \to B$ si dice *pari* se $f(x) = f(-x), \quad \forall x \in A$.

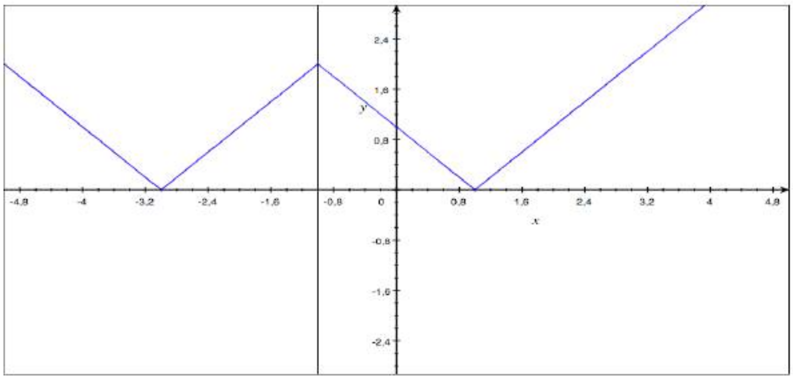
Esempi di funzioni pari sono la funzione valore assoluto e la funzione quadratica il cui grafico è una parabola con asse coincidente con l'asse delle ordinate. Le funzioni pari sono *simmetriche rispetto all'asse y*. La verifica di questo fatto si basa sull'applicazione delle equazioni della simmetria rispetto all'asse *y* $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$, al punto di coordinate $(-x, f(-x)) \to (x, f(-x)) = (x, f(x))$.

Una funzione $f: A \to B$ si dice *dispari* se $f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in A$.

Esempi di funzioni dispari sono la funzione lineare (la retta) e la funzione cubica, senza termini di secondo grado, e con termine noto uguale a zero. Le funzioni dispari sono *simmetriche rispetto all'origine*. La verifica di questo fatto si basa sull'applicazione delle equazioni della simmetria rispetto all'origine: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$, al punto di coordinate $(-x, f(-x)) \to (x, -f(-x)) = (x, f(x))$.

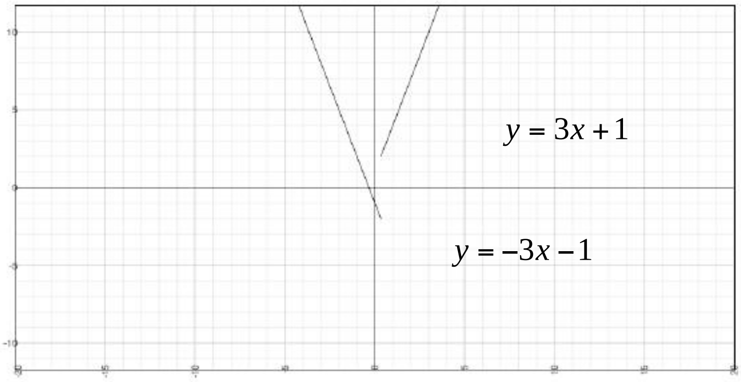
La composizione con il valore assoluto di alcune funzioni

1. Si rappresenti graficamente la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5 - |4 + 4x|}$.
   - Dalla discussione del valore assoluto emerge che la funzione data può essere scomposta nelle due funzioni
     $$f_1(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 5 - 4 - 4x} \\ 4 + 4x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} |x-1| \\ x \geq -1 \end{cases}$$
     $$f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 5 + 4 + 4x} \\ 4 + 4x < 0 \end{cases} = \begin{cases} |x+3| \\ x < -1 \end{cases}.$$
   - Il grafico della funzione è quindi:

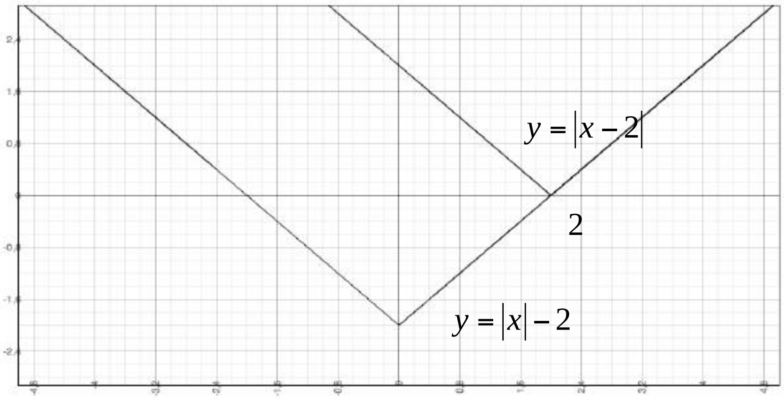


2. Si tracci il grafico della seguente funzione:
   $$f(x) = \sqrt{9x^2 - 6x + 1} + \frac{|2 - 6x|}{3x - 1}.$$
   - $C.E. = \left\{ x \in R \mid x \neq \frac{1}{3} \right\}$. La funzione si può scrivere nella forma
     $$f(x) = \sqrt{9x^2 - 6x + 1} + \frac{|2 - 6x|}{3x - 1} = \sqrt{(3x-1)^2} + \frac{2|1 - 3x|}{3x - 1} = \begin{cases} y = |3x - 1| + 2 & x > \frac{1}{3} \\ y = |3x - 1| - 2 & x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

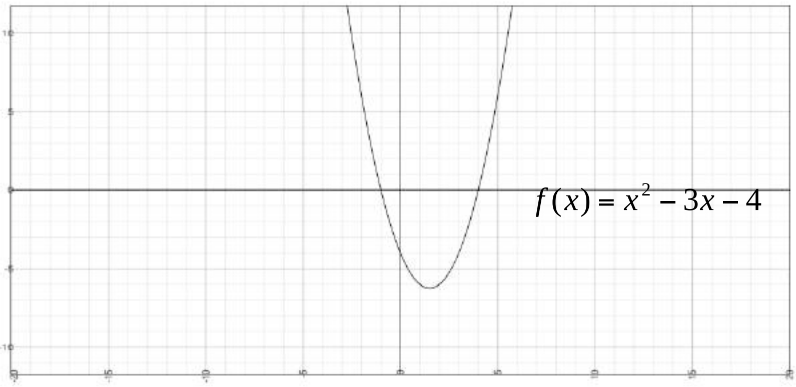
- $f(x) = \begin{cases} y = 3x + 1 & x > \frac{1}{3} \\ y = -3x - 1 & x < \frac{1}{3} \end{cases}$

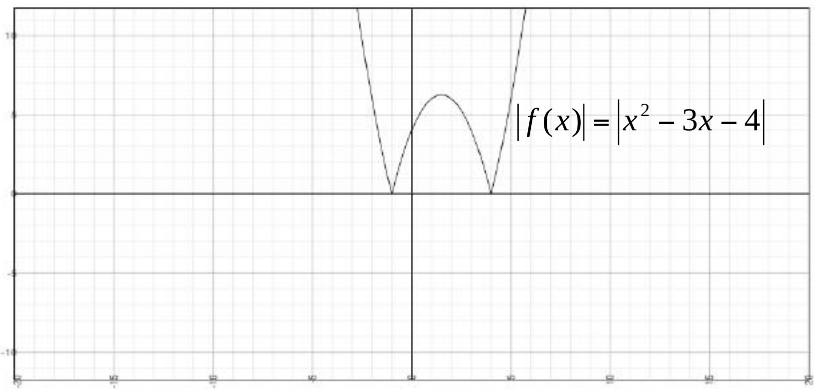


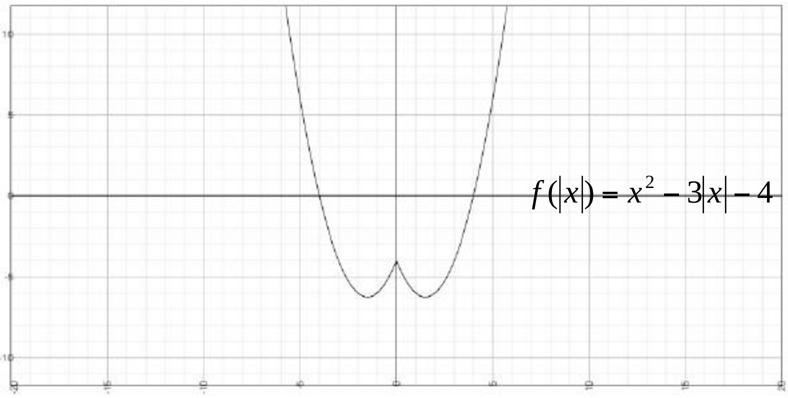
3. Risolvere graficamente la seguente disequazione: $|x-2| \le -2 + |x|$.
    - Consideriamo le rette $y = |x-2|$ e $y = |x| - 2$.
    - Dal grafico risulta evidente che la soluzione della disequazione è $\forall x \ge 2$.

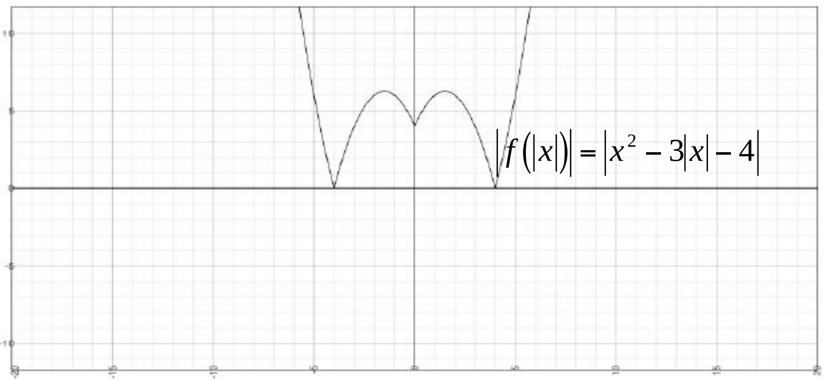


5. Si rappresenti graficamente la funzione $f(x) = x^2 - 3x - 4$, e le funzioni da essa ottenibili per composizione con la funzione valore assoluto:









Esercizi

1. $\dfrac{x-1-\sqrt{x^2-2x-1}}{x-2} > 0$ $\qquad\left[x > 1+\sqrt{2}\right]$

2. $\sqrt{|x-1|} + \sqrt{x^2 - x} \le 0$ $\qquad\left[x = 1\right]$

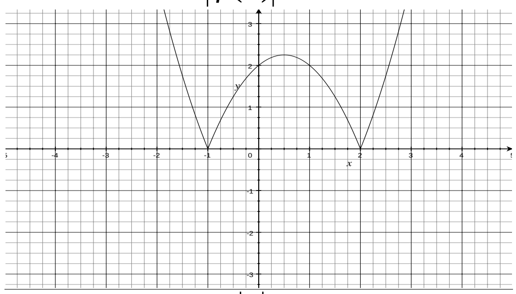
3. $\sqrt{\left|\dfrac{1}{x} - 2\right|} \le \dfrac{1}{|x|}$ $\qquad\left[x = 1\right]$

4. $1 - |x^2 - 2x| < 0$ $\qquad\left[x < 1-\sqrt{2} \vee x > 1+\sqrt{2}\right]$

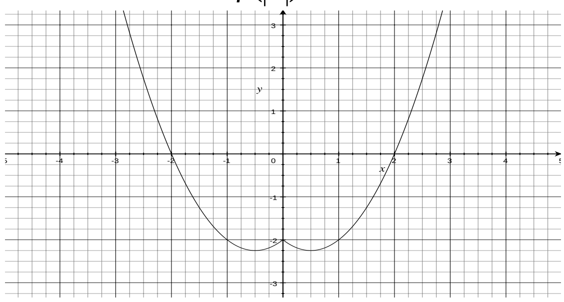
5. $\sqrt{x^2 + |x-2|} > x + |x|$ $\left[0 \leq x \leq \dfrac{2}{3}\right]$

6. $|x| - 2|x+3| > 2$ $\left[-4 < x < -\dfrac{8}{3}\right]$

7. Data la funzione $f(x) = x^2 - x - 2$
   a. Tracciare il grafico della funzione $|f(x)|$.



   b. Tracciare il grafico della funzione $f(|x|)$.



8. $\left|\dfrac{x^2-1}{2x+1}\right| < 1.$ $\left[-2 < x < 1-\sqrt{3} \vee 0 < x < 1+\sqrt{3}\right]$

9. $\dfrac{3x-4x^2}{|x-2|} < 1.$ $[x < 2]$

10. $2x+1 < \sqrt{4x^2-4x-15}\,.$ $\left[x \leq -\dfrac{3}{2}\right]$

11. $\dfrac{\sqrt{x^2-1} - |x+1|}{x^2-2x-3} \leq 0.$ $[x > 3]$

12. $\dfrac{|x| + \sqrt{1-x^2}}{|x| - \sqrt{1-x^2}} < 0.$ $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$