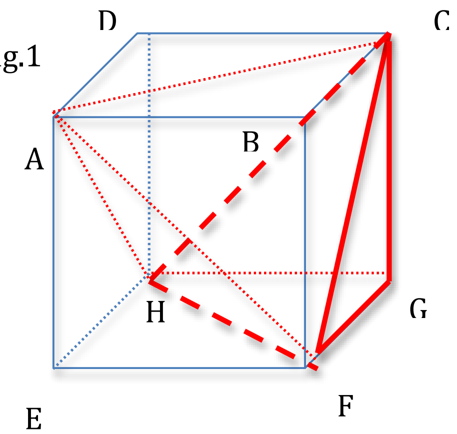
CAPITOLO 4
GEOMETRIA EUCLIDEA NELLO SPAZIO

4.1 Il modello del cubo come strumento d'indagine dello spazio

Un cubo costituisce un modello attraverso il quale è possibile introdurre alcuni tra gli enti ed i concetti fondamentali della geometria dello spazio.
Per prima cosa definiamo il cubo come un particolare **poliedro**, ovvero un solido limitato da poligoni. Si tratta nella fattispecie, di un poliedro **regolare**: le **facce** sono poligoni regolari, e in ogni **vertice** insiste lo stesso numero di **spigoli**. Dalla figura sotto è possibile osservare, per inciso, che il cubo è *scomponibile* in quattro *piramidi* del tipo CHFG e nel *tetraedro* CHAF.

Fig.1



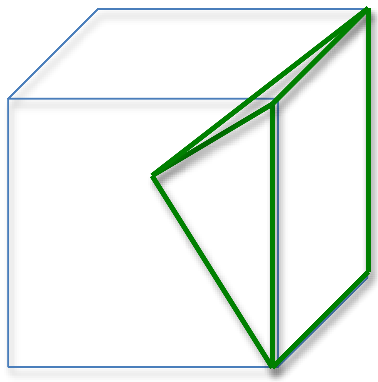


Fig. 2

Esercizio 1. Osservare che il tetraedro CHAF è regolare.

4.2 Volumi: il principio di Cavalieri

Una proprietà importante che caratterizza i poliedri (ed i solidi in generale) è il *volume*. Ci occuperemo del calcolo del volume di alcuni poliedri. Enunciamo il principio che sta alla base del ragionamento.
Principio di Cavalieri: se un piano parallelo a quello di riferimento su cui poggiano due solidi, aventi la stessa altezza, stacca su questi delle sezioni aventi la stessa area, allora i due solidi hanno ugual volume.
Si suppone noto il volume del cubo di lato l ($V = l^3$).

Il volume della piramide a base quadrata

E' ragionevole supporre che il volume di una **piramide retta** (il piede dell'altezza coincide con il centro della circonferenza inscritta nel poligono di base) sia funzione dell'area di base e dell'altezza. In particolare, immaginando di scomporre la piramide in tanti piccoli parallelepipedi, se raddoppiamo l'altezza di questi, anche il volume raddoppia. Possiamo quindi ipotizzare una dipendenza del volume della piramide dall'altezza del tipo $f(h) = h$. Dunque il volume della piramide può essere espresso nella forma $V = g(A)h$. Ora, considerazioni di natura dimensionale vincolano la funzione $g(A)$ ad un'espressione del tipo $g(A) = kA$, dove k è una costante che vogliamo determinare.
Per questo scopo decomponiamo un cubo in 6 piramidi a base quadrata ed altezza $h = l/2$, aventi vertice comune nel centro del cubo (vedi figura sopra). Il volume di ognuna di queste è un sesto di quello del cubo: $V = \frac{l^3}{6} = \frac{l^2}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{3} A \cdot h$. L'ultima relazione, che fornisce la regola per il calcolo del volume di una piramide retta qualsiasi, è garantita dal Principio di Cavalieri.

4.3 Rette e piani dello spazio

Il cubo permette di presentare anche i concetti di *rette e piani* dello spazio. Cominciamo con l'osservazione di due fatti evidenti:

- *Due* punti distinti individuano una retta;
- *Tre* punti distinti non allineati individuano un piano.

Due rette si dicono **incidenti** se hanno un punto in comune: $r \cap s = \{D\}$.

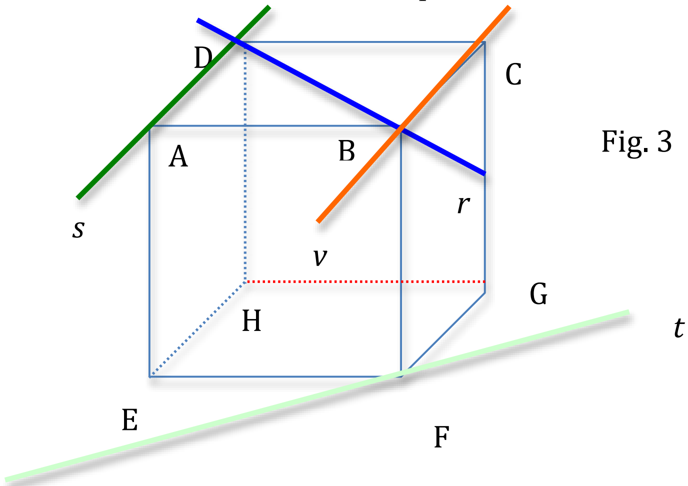


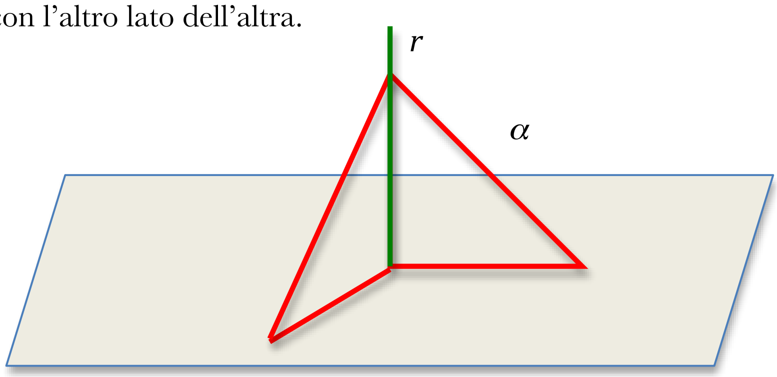
Fig. 3

Due rette giacenti su piani distinti e non paralleli si dicono **sghembe**: le coppie s,t e r,t.
Due rette complanari senza punti in comune si dicono **parallele**: la coppia s,v.
Proposizione. Due rette incidenti individuano un piano a cui appartengono.
Dimostrazione. In riferimento alla figura sopra, sia $r \cap s = \{D\}$ e si considerino i punti A e B. I tre punti individuati sono distinti e non allineati, quindi danno origine ad un piano, contenente le rette *r* (passante per D e B) e *s* (passante per A e D).

Perpendicolarità retta-piano

Si dice che una retta *r* è **perpendicolare** ad un piano α se lo incontra in un punto O, ed è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per quel punto.
In realtà è sufficiente che sia perpendicolare a due rette passanti per O, come si può vedere "sperimentalmente" prendendo due squadre, appoggiandole per un lato sul piano, e facendo coincidere l'altro lato dell'una con l'altro lato dell'altra.

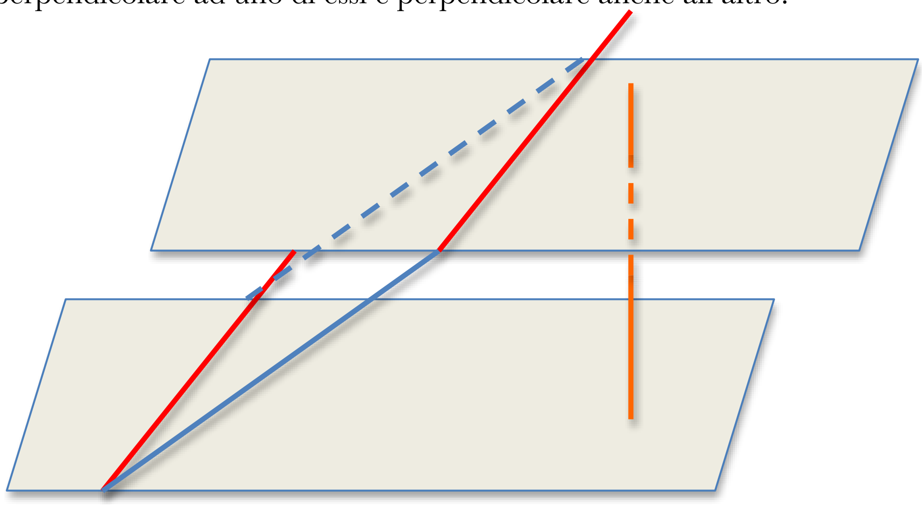
Fig. 4



Due piani distinti che hanno una retta in comune si dicono **incidenti**, mentre due piani che non hanno punti in comune si dicono **paralleli**.

Le rette ottenute secando due piani paralleli con un terzo piano sono parallele, e se due piani sono paralleli, ogni retta perpendicolare ad uno di essi è perpendicolare anche all'altro.

Fig. 5



Un **prisma** è una figura solida ottenibile a partire da due piani paralleli sui quali sono situate le facce uguali dette *basi*, mentre le *facce laterali* sono delimitate da rette parallele congiungenti i vertici corrispondenti delle basi.

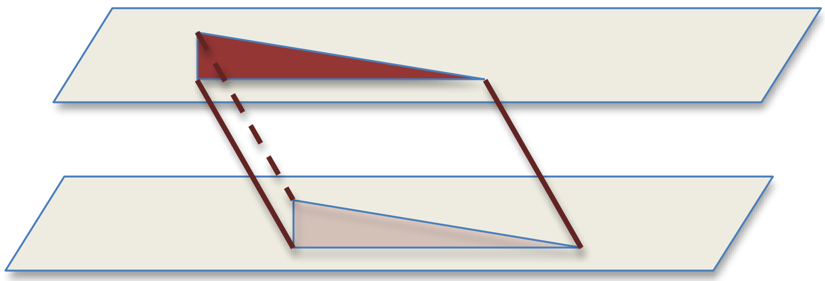


Fig. 6

4.4 Assiomi fondamentali della geometria euclidea dello spazio

Dopo aver introdotto in maniera informale alcuni enti della geometria dello spazio, è venuto il momento di procedere ad una prima *sistemazione assiomatica*.

A1. *Dati due punti distinti P, Q, esiste un'unica retta r che li contiene.*

Conseguenza: due rette distinte hanno al più un punto in comune.

A2. *Dati tre punti non allineati A, B, C, esiste un unico piano* α *che li contiene.*

A3. *Se una retta ha due punti in comune con un piano, allora giace tutta su questo piano.*

A4. *Esistono almeno quattro punti non complanari.*

Conseguenza: dato un piano nello spazio, esiste almeno un punto che non gli appartiene.

A5. *Se due piani distinti hanno un punto P in comune, allora hanno in comune tutta una retta r passante per P.*

Conseguenza: i due piani sono incidenti.

A6. *Dato un piano* α *ed un punto P fuori di esso, esiste ed è unico il piano parallelo ad* α *e contenente P.*

Proprietà: il parallelismo tra piani è una *relazione di equivalenza*. E' quindi possibile suddividere l'insieme dei piani dello spazio in *classi di equivalenza* che si dicono **giaciture**. Due piani sono quindi paralleli se hanno la stessa giacitura.

4.5 Relazioni metriche

Due rette *complanari* si dicono **parallele** se coincidono, oppure non hanno punti in comune.

<u>Conseguenza</u>: data una retta *r* ed un punto *P* esterno ad *r*, esiste un'unica retta passante per *P* e parallela a *r*. Infatti, la retta ed il punto individuano un piano; l'assioma delle parallele del piano euclideo fa il resto.
<u>Proprietà</u>: il parallelismo tra rette è una *relazione di equivalenza* che suddivide l'insieme delle rette dello spazio in *classi di equivalenza* dette **direzioni**.

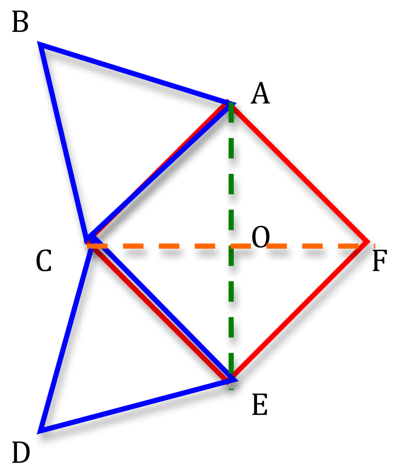
Distanza, proprietà metriche della retta, semispazi
La distanza tra due punti *P* e *Q*, indicata con $d(P,Q)$ è un numero reale tale che

1. $d(P,Q) \geq 0$ e $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P \equiv Q$;
2. $d(P,Q) = d(Q,P)$;
3. $d(PQ) \leq d(P,R) + d(Q,R)$ (*disuguaglianza triangolare*).

La distanza di un punto da un piano è data dalla lunghezza del segmento perpendicolare condotto dal punto al piano.
Il concetto di distanza permette di definire il luogo geometrico dei punti che hanno uguale distanza *r* da un punto fissato *O*: la **superficie sferica:** $\{P \mid d(P,O) = r\}$, mentre si definisce **sfera** l'insieme dei punti che hanno distanza da *O* minore od uguale a *r*: $\{P \mid d(P,O) \leq r\}$.

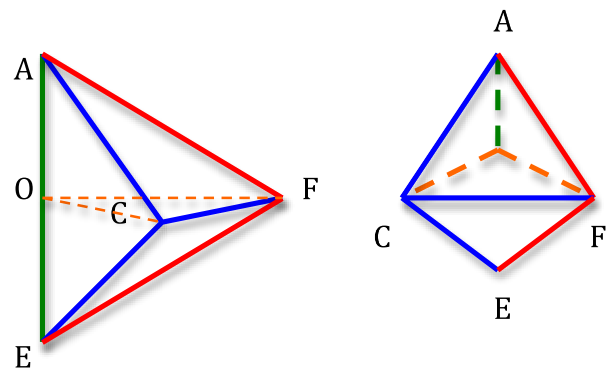
4.6 L'ottaedro regolare
Vogliamo introdurre un nuovo poliedro regolare: l'**ottaedro**. Per questo scopo consideriamo il seguente modello rappresentativo dello sviluppo di un tetraedro, in cui al quadrato vengono aggiunti due triangoli equilateri uniti per un lato al quadrato ACEF.

Fig. 7



Si ottiene un tetraedro a partire dal modello sopra unendo i punti D, F, B, e congiungendo quindi i segmenti BC e CD, FA e AB, infine FE e ED.

Fig. 8



Per costruire il tetraedro, i semipiani contenenti le facce ACE e AFE sono stati "piegati" in modo tale che il segmento CF misuri quanto gli altri spigoli.

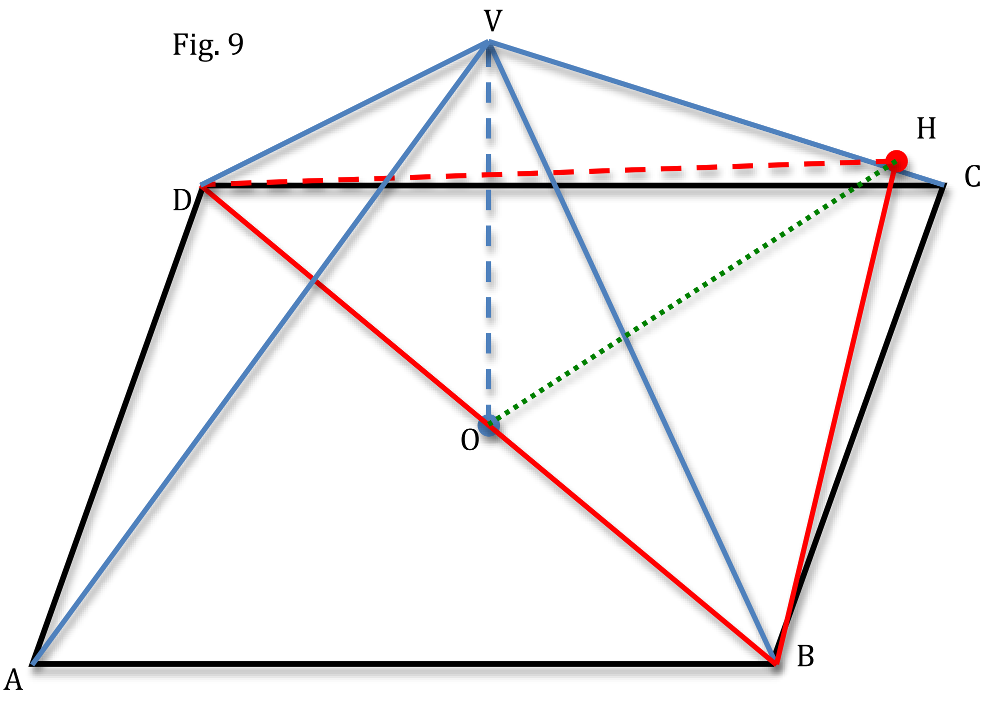
4.7 Il diedro e la sua sezione normale

In generale, la figura geometrica formata dai semipiani aventi una retta *r* come bordo si dice **diedro**, che costituisce l'analogo dell'angolo nel piano.
L'ampiezza di un diedro può essere valutata mediante la *sezione normale del diedro*, ottenuta sezionandolo con uno degli infiniti piani perpendicolari al *bordo r*.
Con riferimento alla figura sopra, l'ampiezza del diedro è quella dell'angolo $\alpha = C\hat{O}F$: se lo spigolo misura *a*, il segmento $\overline{OC}$, cioè la metà della diagonale del quadrato ACEF, misura $\overline{OC} = a\sqrt{2}/2$.
L'ampiezza dell'angolo può quindi essere determinata applicando il teorema di Carnot al triangolo OCF: $\overline{CF}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OF}^2 - 2\overline{OC}\cdot\overline{OF}\cos\alpha \Rightarrow a^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} - 2\frac{a^2}{2}\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Problema (calcolo della sezione normale di un diedro)

Sia VABCD una piramide che ha per base il quadrato ABCD e tale che la proiezione del vertice V sulla base coincida con il centro O del quadrato (*piramide retta*). L'altezza misura metà del lato della base. Determiniamo l'ampiezza della sezione normale del diedro formato da due facce laterali che hanno uno spigolo in comune.

Fig. 9



Consideriamo la sezione normale al bordo VC contenente la diagonale DB del quadrato di base. La misura del diedro è quindi quella dell'angolo $D\hat{H}B := \alpha$, e la possiamo determinare, ad esempio, dalla relazione $\overline{BD} = 2\overline{BH}\sin\frac{\alpha}{2}$. Il problema, quindi, consiste nel determinare la lunghezza di BH.
Per questo consideriamo il triangolo VBC, isoscele con i lati

$\overline{VB} = \overline{VC} = \sqrt{\overline{OV}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Per il teorema di Carnot applicato al triangolo

VBC: $a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2\frac{3}{4}a^2 \cos B\hat{V}C \Rightarrow \cos B\hat{V}C = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin B\hat{V}C = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Di conseguenza $\overline{BH} = \overline{VB} \sin B\hat{V}C = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, quindi $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{BD}}{2\overline{BH}} = \frac{a\sqrt{2}}{a2\sqrt{2}/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$. Il diedro misura quindi 120°.

Torniamo alla costruzione dell'ottaedro. Se uniamo in un certo modo quattro dei tetraedri ACEF, ovvero facendo coincidere lo spigolo AE, otteniamo un poliedro regolare costituito da otto triangoli equilateri come facce, ed in ognuno dei sei vertici concorrono quattro spigoli. E' questo, l'ottaedro regolare.

Esercizio 2. Verificare che, per un ottaedro:

- Ogni vertice ha un opposto (rispetto al centro O);
- Dati due vertici opposti, gli altri quattro sono complanari ed individuano un quadrato;
- I tre segmenti che uniscono i vertici opposti passano per uno stesso punto (il centro O), e sono a due a due perpendicolari.
- Il volume può essere dedotto dal modello del cubo, considerando le due piramidi a base quadrata da cui è composto (vedi figura 2 e descrizione del calcolo del volume di una piramide).

4.8 Rette orientate, semirette, triedri

Formalizziamo alcuni concetti chiave della geometria dello spazio.

Una retta si dice **orientata** se è stato fissato un *verso* (ordinamento), mentre una **semiretta** è un insieme di punti che, in una retta, seguono/precedono un punto "O" detto *origine*. Possiamo dire che $\forall x \in R^+$, esiste un punto P appartenente ad una semiretta orientata tale che $\overline{OP} = x$ (misura del segmento OP). Si definisce **diedro** una coppia di semipiani aventi lo stesso bordo, e **triedro** una terna di semirette non complanari aventi la stessa origine.

4.9 Isometrie: simmetria rispetto ad un piano. Perpendicolarità

Si trae spunto dal fenomeno fisico della *riflessione* in uno specchio piano. Il modello matematico che descrive questo fenomeno è la **simmetria rispetto ad un piano** α, secondo cui due punti A e B sono uno simmetrico dell'altro se il segmento che li congiunge è perpendicolare al piano α, ed il suo punto medio $H \in \alpha$, ovvero $\overline{AH} = \overline{BH}$.

Sfruttiamo la simmetria rispetto ad un piano per costruire un tetraedro a partire da un triangolo equilatero.

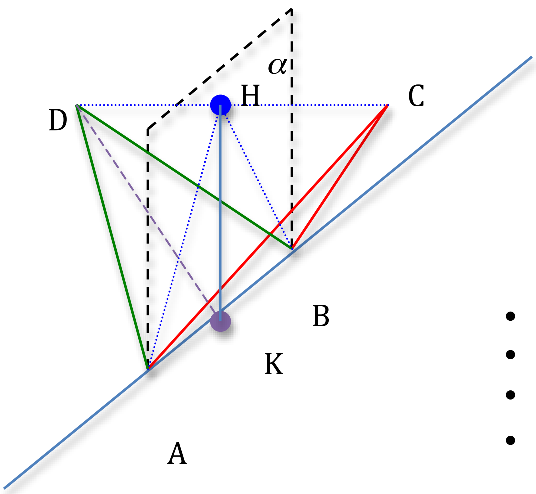


Fig. 10

- ABC equilatero,
- α piano contenente AB,
- D simmetrico di C rispetto al piano α,
- $H = DC \cap \alpha \Rightarrow \overline{DH} = \overline{CH} := x$

Indicata con *a* la lunghezza del lato del triangolo equilatero, studiamo il poliedro ABCD: si tratta di un tetraedro che ha per facce due triangoli equilateri ABC e ABD, e due triangoli isosceli ACD e

BCD. Indicato con β il diedro individuato dai piani contenenti i triangoli equilateri, analizziamo i due "casi limite", $\beta = 0$ e $\beta = \pi$.
Nel primo caso $C \equiv D$, $x = 0$ ed il tetraedro si riduce al triangolo equilatero di partenza.
Nel secondo caso $x = a\sqrt{3}/2$ ed il tetraedro si riduce al rombo ABCD.
Notiamo anche che il tetraedro è regolare quando tutti gli spigoli misurano la stessa lunghezza, ovvero quando $2x = a$.

Problema (calcolo del volume e della superficie di un tetraedro)

Vogliamo determinare il **volume** e la **superficie** del tetraedro costruito in precedenza. Suddividiamolo in due piramidi, DHAB e CHAB, aventi in comune il triangolo ABH assunto come base, ed altezza rispettivamente DH e CH.

L'area di base è $S = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{HK} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{DK}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cos\frac{\beta}{2}$, l'altezza $h = \overline{DK}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\beta}{2}$.

Di conseguenza il volume del tetraedro è $V = 2\cdot\frac{Sh}{3} = 2\cdot\frac{3a^3}{8}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{3a^3}{8}\sin\beta$. Il volume massimo è $V_{\max} = \frac{3a^3}{8} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$, a cui corrisponde un'altezza $h = x = \frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$: il volume è massimo quando il diedro individuato dai piani su cui giacciono il triangolo di partenza ed il suo simmetrico è retto.

Esercizio 3. Scrivere l'espressione del volume del tetraedro di cui sopra in funzione di *x* invece che del diedro β.

Veniamo al calcolo della misura della superficie del tetraedro. L'area dei triangoli equilateri è $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, mentre quella dei triangoli isosceli è $\overline{S} = \frac{2x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} = x\sqrt{a^2 - x^2}$. La superficie del tetraedro è quindi $A = 2S + 2\overline{S} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 2x\sqrt{a^2 - x^2}$. Il valore è massimo quando l'espressione $x\sqrt{a^2 - x^2}$ è massima. Il valore di *x* che massimizza $x\sqrt{a^2 - x^2}$ si ottiene applicando la *disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica*: se a, b sono due numeri positivi, allora $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$.

La prova di questa diseguaglianza può essere condotta sviluppando il quadrato del binomio $0 \le \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a + b - 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$. L'uguaglianza si ha soltanto quando $a = b$, ed in questo caso il valore di $\sqrt{ab}$ è *massimo*.

Ora, se facciamo giocare il ruolo di *a* al termine $x = \sqrt{x^2}$ e quello di *b* al termine $\sqrt{a^2 - x^2}$ nella diseguaglianza, otteniamo che il massimo valore di $x\sqrt{a^2 - x^2}$ si ha quando $x^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, ed il corrispondente calore della superficie è $A = 2S + 2\overline{S} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 2x\sqrt{a^2 - x^2} = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$.

Esercizio 4. Interpretare geometricamente la disuguaglianza $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ (*suggerimento*: se *a* e *b* sono le proiezioni sul diametro dei cateti di un triangolo inscritto in una semicirconferenza, ed *h* l'altezza del triangolo riferita all'ipotenusa, per il secondo teorema di Euclide si ha $h^2 = ab$ …)[1].

---

[1] Poiché $h \le r = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ e l'altezza è massima quando coincide con il raggio.

Esercizio 5. Saremmo giunti ugualmente al risultato ottenuto se avessimo considerato l'espressione $2x\sqrt{a^2 - x^2}$ invece che $x\sqrt{a^2 - x^2}$? Motivare la risposta (*i fattori devono essere a somma in quadratura costante…)*

Esercizio 6. Due quadrati ABCD e ABC'D' hanno in comune il lato $l = \overline{AB}$. Si esprima in funzione di $x := \overline{CC'}$ il volume del poliedro ABCDC'D' e si dica per quale valore di *x* è massimo.

4.10 Rette sghembe, tetraedri e teorema delle tre perpendicolari

Consideriamo due asticelle PQ e RS collegate con fili elastici PS, PR, QR, QS, di uguale lunghezza *a*. Muovendo gli elastici otteniamo infinite configurazioni, le più interessanti delle quali sono quelle in cui le asticelle appartengono a rette non complanari, o sghembe. In questo caso infatti, si forma sempre un tetraedro PQRS.
Diamo a questo punto la nozione di **angolo di due rette sghembe**: è l'angolo che una delle due rette forma con la parallela all'altra condotta per uno qualsiasi dei suoi punti. Se l'angolo è retto, le due rette si dicono **ortogonali**.
Oltre all'angolo si definisce la **distanza tra due rette sghembe** come la minima distanza tra due punti appartenenti alle rette.

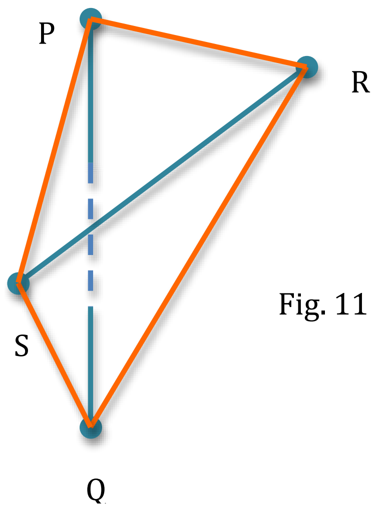


Fig. 11

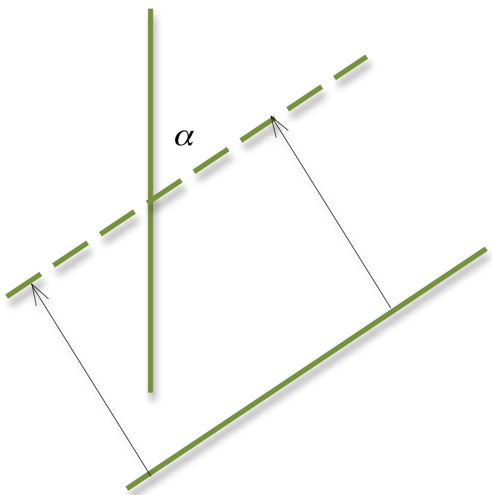


Fig. 12

Per rendere il concetto di distanza tra due rette sghembe nel caso in cui queste sono ortogonali, utilizziamo il modello del parallelepipedo, in cui le diagonali appartenenti a facce opposte giacciono sulle rette in questione.

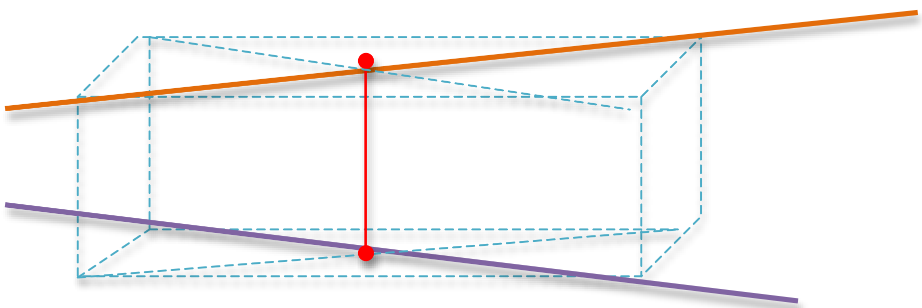


Fig. 13

La distanza è data dalla lunghezza del segmento congiungente i punti intersezione delle diagonali delle facce opposte. Notiamo anche che le sei diagonali del parallelepipedo sono gli spigoli di un tetraedro.

Il tetraedro di area *minima*

Sempre nel caso in cui le asticelle sono perpendicolari, vogliamo determinare il *tetraedro di area minima*.

Facciamo riferimento alla figura seguente, in cui $M \in \gamma$, il piano bisettore di PQ contenente RS.
I triangoli PSR e QSR sono uguali, e l'asticella RS può scorrere lungo la retta *r*. Sia *m* la retta di *minima distanza* condotta da M, e sia $N = m \cap r$. Le facce che costituiscono il tetraedro sono i triangoli PQR, PQS, QRS e PRS. Poniamo $\overline{RS} := a$ e $\overline{MN} := a/2$.

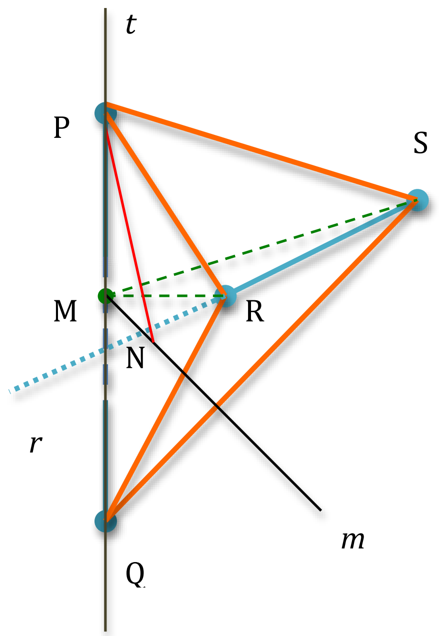
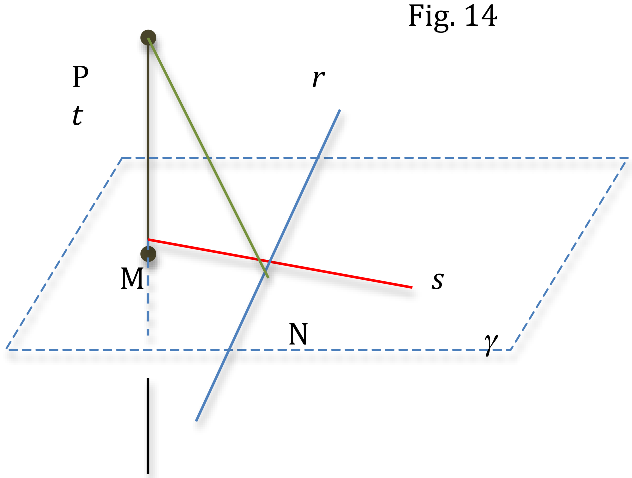


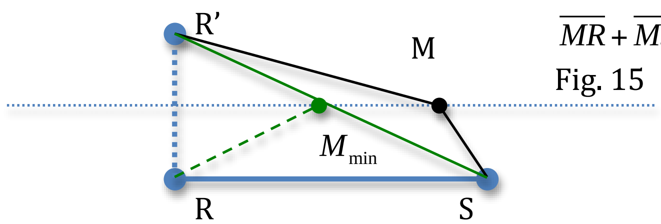
Fig. 14



Immaginando di far scorrere RS lungo la retta *r*, l'altezza del triangolo PRS coincide con il segmento PN, essendo la retta *m* perpendicolare alla retta *r* ed all'asticella PQ. Governiamo lo scorrimento dell'asticella ponendo $\overline{NR} := x$.

L'area del tetraedro è quindi $A = \frac{\overline{RS} \cdot \overline{PN}}{2} + \frac{\overline{RS} \cdot \overline{QN}}{2} + \frac{\overline{PQ} \cdot \overline{MR}}{2} + \frac{\overline{PQ} \cdot \overline{MS}}{2}$. Ora, $\overline{PN} = \overline{QN}$, di conseguenza $A = \overline{RS} \cdot \overline{PN} + \frac{\overline{PQ}(\overline{MR} + \overline{MS})}{2}$. Se consideriamo fissata la lunghezza dell'asticella PQ, possiamo concludere che l'area del tetraedro dipende esclusivamente dal termine $\overline{MR} + \overline{MS}$.

Il tetraedro di area minima si ottiene minimizzando la quantità $\overline{MR} + \overline{MS}$. Quest'operazione può essere condotta considerando il triangolo MRS avente base e altezza fissate. Tra tutti questi triangoli, quello di *perimetro minimo* è quello isoscele:



$$\overline{MR} + \overline{MS} = \overline{MR'} + \overline{MS} \geq \overline{M_{\min}R'} + \overline{M_{\min}S} = \overline{R'S}$$

Fig. 15

Il tetraedro di area minima è quello in cui N è il *punto medio* del segmento RS, ovvero $\overline{NR} := x = \frac{a}{2}$.

Un'ultima osservazione: per individuare il tetraedro di area minima abbiamo utilizzato un triangolo di perimetro minimo!

Esercizio 7. Si calcoli il volume del tetraedro di cui sopra.

Dalla figura 14 appare evidente che la perpendicolarità di PN rispetto alla retta *r*, non dipende dalla posizione di P sulla retta *t* contenente PQ. Questo fatto si può effettivamente dimostrare mediante il cosiddetto:

Il teorema delle tre perpendicolari. Se *a* è una retta perpendicolare in P ad un piano γ, *c* una retta per P, e *r* una retta di γ perpendicolare a *c* in M, allora una generica retta congiungente M con un punto $Q \in a$ è perpendicolare a *r*.

Dimostrazione.

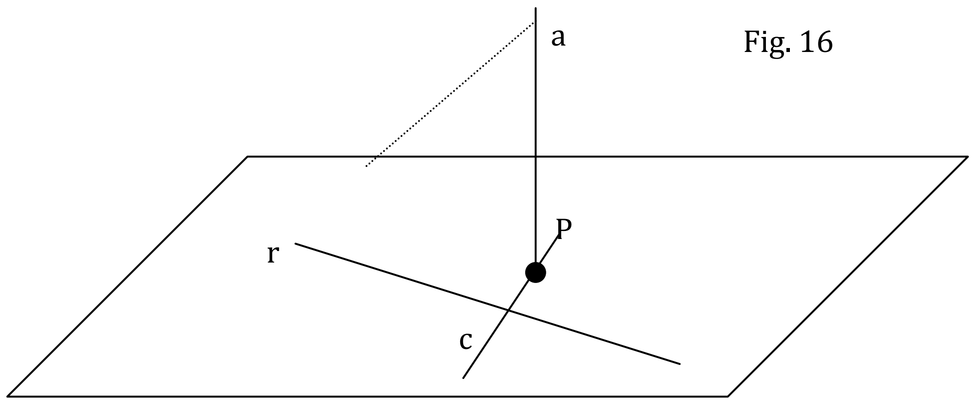


Fig. 16

Consideriamo i punti A e A' simmetrici rispetto al punto M intersezione delle rette r e c:

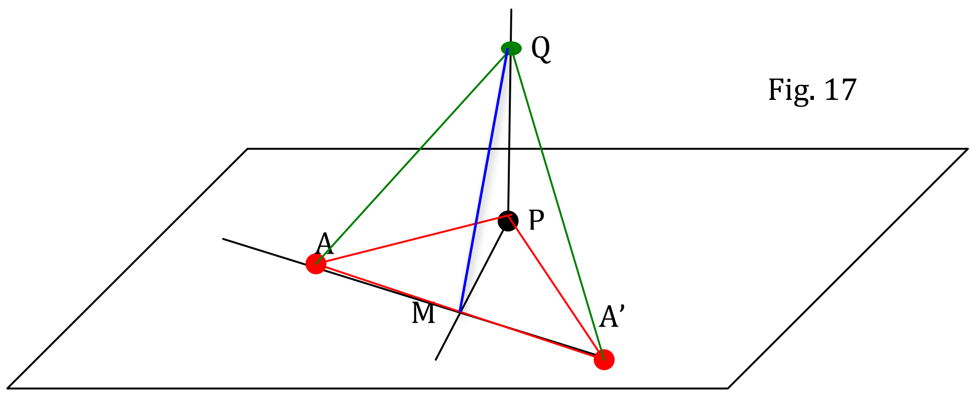


Fig. 17

Per costruzione, il triangolo APA' è isoscele e, sempre per costruzione, preso un punto $Q \in a$ diverso da P, i triangoli QAP e $QA'P$, sono congruenti. Di conseguenza $\overline{QA} = \overline{QA'}$ e MQ è altezza del triangolo isoscele AQA', contenuta nel piano γ contenente le rette *a* e *c*, e quindi perpendicolare al segmento AA'AA', come volevasi dimostrare.

4.11 Simmetria e perpendicolarità

Formalizziamo il concetto di mutua perpendicolarità tra rette e/o piani mediante quello di simmetria rispetto ad un piano, di cui diamo la definizione.

Si definisce **simmetria** (o *riflessione*) rispetto ad un piano γ, S_γ, un'isometria che lascia fissi tutti i punti di γ, e porta ciascuno dei due semispazi generati da γ nell'altro.

Esercizio 8. Si caratterizzi la **simmetria centrale** in termini di punti fissi, e si faccia vedere che questa può essere ottenuta componendo tre simmetrie rispetto a piani perpendicolari tra loro, che si intersecano nel centro di simmetria.
Una retta è **perpendicolare** ad un piano se e solo se non giace su di esso, ed è unita nella simmetria rispetto al piano.
Un piano è **perpendicolare** ad un altro piano γ se è distinto da questo, ed è unito nella simmetria rispetto a γ.
Due rette sono **perpendicolari** se sono incidenti, ed il loro punto comune si trova alla minima distanza da ciascun punto dell'altra.
Una definizione molto utile è quella di **angolo formato da una retta con un piano**: è l'angolo acuto formato dalla proiezione della retta sul piano.

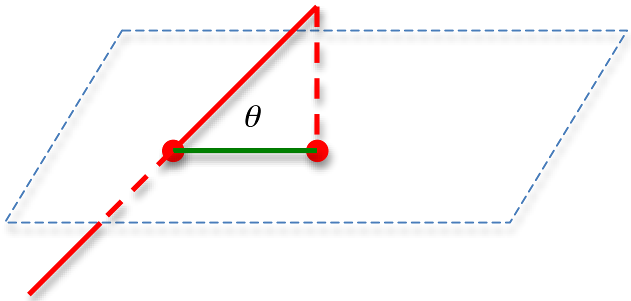
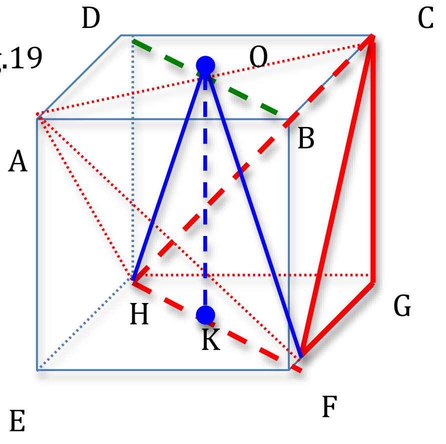


Fig. 18

Problema (diedro e distanza tra rette sghembe). In un tetraedro regolare le rette delle coppie di spigoli non incidenti sono sghembe: perché? Quale angolo formano? Se la misura dello spigolo di un tetraedro è *a*, qual è la distanza tra tali coppie di rette?
Soluzione. Tra i possibili modi di risoluzione dei vari punti del problema, utilizziamo quello che si rifà al modello del cubo dal quale può essere ottenuto il tetraedro. Serviamoci quindi della figura 1.

Fig.19



Sezioniamo il tetraedro con un piano perpendicolare allo spigolo AC, che lo taglia nel punto intersezione con la diagonale AC, e che contiene lo spigolo HF. Il triangolo OHF è isoscele e l'angolo $H\hat{O}F := \alpha$ è la sezione che utilizziamo per la misura del diedro. Poiché $\overline{HF} = a$, $\overline{OF} = \overline{OH} = \left(a\sqrt{3}\right)/2$ (AFC è equilatero), allora
$\overline{HF} = 2\overline{OF}\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}\frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Le rette delle coppie di spigoli non incidenti sono sghembe perché appartengono a facce opposte del cubo, quindi non sono complanari, e non hanno punti in comune. Infine, sempre grazie al modello del cubo, è possibile determinare la distanza, ad esempio, tra la retta contenente lo spigolo AC e la retta contenente lo spigolo HF: $\overline{OK} = a/\sqrt{2}$ (ovvero lo spigolo del cubo).

4.12 Un modello per la costruzione dell'ottaedro

Consideriamo il seguente modello, utile anche per la rappresentazione di altri poliedri regolari. Sovrapponiamo il triangolo equilatero ABC al triangolo equilatero PQR, in modo che risultino concentrici, ruotati di 60°, e con i vertici collegati da un elastico.

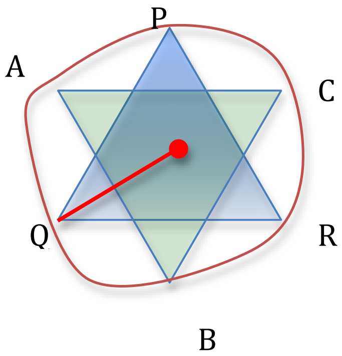


Fig. 20

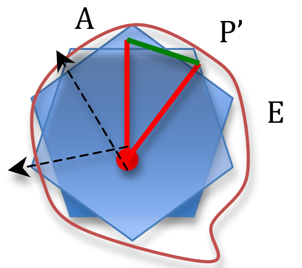
$$\overline{QC} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Sollevando il triangolo ABC otteniamo un *ottaedro*, le cui facce sono, oltre ai triangoli equilateri ABC e PQR, PAQ, AQB, QBR, BRC, RCP, CPA. Indicata con a la lunghezza del lato dei triangoli equilateri, sia x la distanza tra i centri dei triangoli (che giacciono su piani paralleli).
Calcoliamo la lunghezza degli spigoli dell'ottaedro: AP, AQ, BQ, BR, CP, CR.
Ad esempio, sia A' la proiezione di A sul piano del triangolo PQR. Risulta $\overline{AA'} = x$,
$\overline{A'P} = 2\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\sin\frac{\pi}{6} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ e, quindi, $\overline{AP} = \sqrt{\overline{A'P}^2 + \overline{AA'}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + x^2}$.
Affinché l'ottaedro sia regolare occorre che le lunghezze di tutti gli spigoli siano uguali (il numero di spigoli uscenti da ciascun vertice è quattro), quindi $\sqrt{\frac{a^2}{3} + x^2} = a \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.
Esercizio 9. Si determini il valore di x affinché i triangoli isosceli che costituiscono le facce laterali siano rettangoli (ad esempio, $\overline{QB} = \overline{AQ} = a/\sqrt{2}$ …).
Esercizio 10. Nella situazione dell'esercizio precedente, si completi l'ottaedro in modo da formare un cubo (*suggerimento: si "appoggi" opportunamente una piramide con una faccia coincidente con il triangolo rettangolo* QBR).

4.13 Dall'icosaedro al dodecaedro
Consideriamo stavolta due pentagoni regolari uguali, di lato a, concentrici, e ruotati di 180°.
Esercizio 11. Si verifichi che tale configurazione può essere ottenuta componendo due rotazioni di 72° con una di 36°.

Come prima, si congiungano con un elastico i vertici dei pentagoni (vedi fig. 21), e si sollevi un pentagono mantenendo la retta congiungente i centri nella direzione perpendicolare ai piani paralleli su cui giacciono i pentagoni.
Il poliedro così ottenuto ha dieci facce laterali costituite da triangoli isosceli di base a, e lati obliqui di lunghezza che dipende dalla distanza tra i centri dei pentagoni.

Fig. 21



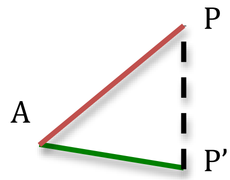


Fig. 22

Siano ABCDE il pentagono "di base", e PQRST quello sovrapposto e ruotato di 180°. Indicata con P' la proiezione di P sul piano di ABCDE, possiamo notare che AP' coincide con il lato del decagono regolare, la cui misura è legata a quella del lato del pentagono dalla relazione

$\overline{AP'} = a\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}$. La misura dello spigolo del poliedro così ottenuto si deduce dal teorema di Pitagora (vedi fig. 22) $\overline{AP}^2 = \overline{AP'}^2 + \overline{PP'}^2 = a^2\,\dfrac{5-\sqrt{5}}{10} + x^2$.

Esercizio 12. Si determini il valore del seno dell'angolo di 36° sapendo che quello dell'angolo di 18° è $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, e si sfrutti questo fatto per dimostrare la relazione $\overline{AP'} = a\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}$.

Ora, se sormontiamo ognuno dei pentagoni con una piramide retta a base pentagonale, le cui facce sono triangoli equilateri, otteniamo un poliedro con venti facce: l'**icosaedro**. In particolare, se gli spigoli delle facce laterali dell'icosaedro misurano *a*, allora questo è **regolare**. Questo accade se $\overline{AP} = a$, ovvero se $a^2\,\dfrac{5-\sqrt{5}}{10} + x^2 = a^2 \Rightarrow x = a\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}$.

Problema.

E' data una piramide retta a base quadrata i cui spigoli ed i lati della base misurano *a*. Indicata con *x* l'altezza del parallelepipedo inscritto nella piramide, si dimostri che il volume di questo è dato dalla relazione $V(x) = x\left(a-\sqrt{2}x\right)^2$. Posto $a=1$, si determini per quale valore di *x* il volume del parallelepipedo è $\dfrac{3}{8}$ di quello della piramide.

- L'altezza della piramide è $h = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. Il parallelepipedo inscritto è a base quadrata; la misura del lato segue dalla proporzione $\dfrac{a}{\sqrt{2}} : \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} - x : \dfrac{l}{2} \Rightarrow l = \left(a-\sqrt{2}x\right) \Rightarrow V = x\left(a-\sqrt{2}x\right)^2$.
- Il volume della piramide è $V' = \dfrac{a^3}{3\sqrt{2}} \Rightarrow x\left(1-\sqrt{2}x\right)^2 = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \dfrac{3}{8}$, da cui segue l'equazione $16\sqrt{2}x^3 - 32x^2 + 8\sqrt{2}x - 1 = 0$. Questa ammette come soluzione $x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, e, per il teorema di Ruffini, può essere scritta come il prodotto tra i polinomi $2\left(8\sqrt{2}x^2 - 12x + \sqrt{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 0$. Il polinomio di secondo grado è a sua volta riducibile, con radici $x = \dfrac{6+\sqrt{20}}{8\sqrt{2}} > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ non accettabile per vincoli geometrici, e $x = \dfrac{6-\sqrt{20}}{8\sqrt{2}} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ che invece è accettabile.

A partire dall'icosaedro regolare si ottiene un altro poliedro regolare congiungendo i centri delle facce; si tratta del **dodecaedro regolare**, costituito da dodici facce pentagonali.

Esercizio 13. Si costruisca un modello di dodecaedro regolare.

Esercizio 14. Si calcoli la misura del diedro formato da due facce di un icosaedro aventi uno spigolo in comune.

Volendo riepilogare la situazione, abbiamo visto fino ad ora cinque poliedri regolari:

1. Tetraedro (4 triangoli equilateri)
2. Esaedro (o cubo, 6 quadrati)
3. Ottaedro (8 triangoli equilateri)
4. Dodecaedro (12 pentagoni regolari)
5. Icosaedro (20 triangoli equilateri).

Sappiamo che nel piano esistono *infiniti* poligoni regolari. Nello spazio, quanti sono i poliedri regolari? Al contrario del caso piano, faremo vedere che sono in numero finito; in particolare vedremo che sono solo cinque, proprio tutti e soli quelli elencati sopra.

4.14 La formula di Eulero per i poliedri

Lo studio dei poliedri risale all'antica Grecia. Tuttavia, soltanto nel 1640, grazie a Cartesio, e nel 1752, grazie ad Eulero, fu scoperta la seguente relazione tra spigoli, vertici e facce di un poliedro:

$$V - E + F = 2.$$

Per dimostrare questa relazione, immaginiamo di togliere una faccia al poliedro e di "distenderlo" sul piano, ottenendo il cosiddetto *diagramma di Schleghel* del poliedro. Ovviamente, il poliedro privato di una faccia ha lo stesso numero di spigoli e di vertici di quello di partenza. Quindi, se dimostriamo che per il poliedro senza una faccia vale la relazione $V - E + F = 1$, la tesi seguirà automaticamente aumentando di uno il numero delle facce (e, conseguentemente, aumentando di uno il membro di destra dell'uguaglianza).

Il primo passo della dimostrazione consiste nel <u>rendere triangolare</u> il reticolato ottenuto distendendo sul piano il poliedro senza una faccia:

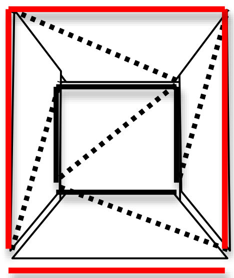


Fig. 23

La figura di riferimento rappresenta il reticolato relativo ad un poliedro con:

$$\begin{array}{l} V = 8 \\ E = 12 \\ F = 6 \Rightarrow 5 \end{array}.$$

L'effetto di quest'operazione sulle facce del reticolato è quello di raddoppiarne il numero e di aumentare di cinque il numero degli spigoli, mentre il numero di vertici resta inalterato:

$$\begin{array}{l} V' = 8 \\ E' = 17 \Rightarrow V' - E' + F' = 1 = V - E + F. \\ F' = 10 \end{array}$$

Il secondo passaggio consiste nel togliere a tutti i triangoli che hanno un lato sul contorno, quel lato (si tolgono i lati colorati in rosso nella figura 23); il reticolato così ottenuto vede:

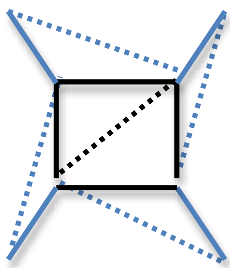


Fig. 24

$$\begin{aligned} &V'' = 8 \\ &E'' = 13 \Rightarrow V'' - E'' + F'' = 1. \\ &F'' = 6 \end{aligned}$$

Il terzo passaggio vede l'eliminazione di tutti i triangoli che hanno due lati sul contorno (si tolgono i lati colorati in blu, sempre nella figura sopra); si ottiene un reticolato in cui:

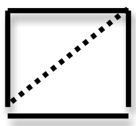


Fig. 25

$$\begin{aligned} &V''' = 4 \\ &E''' = 5 \quad \Rightarrow V''' - E''' + F''' = 1. \\ &F''' = 2 \end{aligned}$$

In generale, operazioni di questo tipo vengono iterate finché non restiamo con un triangolo, per il quale vale la relazione.

$$V - E + F = 3 - 3 + 1 = 1.$$

La dimostrazione della formula di Eulero è completata: basta aggiungere 1 ai due membri dell'ultima uguaglianza:

$$V - E + (F + 1) = 1 + 1 \Rightarrow V - E + F = 2.$$

Il procedimento d'iterazione seguito nello schema della dimostrazione della formula di Eulero, si generalizza con il principio d'induzione.

4.15 I poliedri regolari sono tutti, e soli, i 5 *solidi platonici*

Dimostriamo adesso che i soli **poliedri regolari** sono i cosiddetti "5 solidi platonici" (*Timeo*, opera scritta da Platone, filosofo greco vissuto tra il V e il IV secolo a.C.). La prova di questo fatto poggia sulla formula di Eulero, preceduta da alcune considerazioni preliminari. Denotiamo con n il numero di facce (e quindi di spigoli) che si incontrano in un vertice del poliedro. Poiché ogni spigolo congiunge due vertici, il numero di spigoli che partono da ciascun vertice sarà:

1 vertice n spigoli, allora V vertici uguale $\frac{nV}{2}$ spigoli, quindi $2S = nV \Rightarrow V = \frac{2S}{n}$.

D'altro canto, ogni faccia del poliedro è delimitata da r spigoli (il numero dei lati dei poligoni regolari che costituiscono le facce del poliedro), quindi il numero di spigoli che delimitano le facce è uguale al numero di spigoli del poliedro, anche questi contati due volte, perché ogni spigolo è comune a due facce:

1 faccia uguale r spigoli, allora F facce uguale $\frac{rF}{2}$ spigoli, quindi $2S = rF \Rightarrow F = \frac{2S}{r}$.

Si sostituiscono queste relazioni nella formula di Eulero, e si divide per $2S$, ottenendo l'espressione:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{S}.$$

Dalle definizioni di poligono e di poliedro, tanto r quanto n non possono essere inferiori a 3. Tuttavia non possono essere entrambi maggiori di 3, perché se così fosse, per esempio se fossero ambedue uguali a 4, l'ultima relazione trovata porterebbe alla conclusione che

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{S} \Rightarrow \frac{1}{S} = 0$ e questo è assurdo. Analizziamo quindi i casi $n = 3$ e $r = 3$ separatamente.

$$n=3\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{S}>0\Rightarrow r<6\Rightarrow & \begin{array}{c} r=3\Rightarrow S_3=6\Rightarrow V_3=4\Rightarrow F_3=4\Rightarrow \mathit{tetraedro}\\ r=4\Rightarrow S_4=12\Rightarrow V_4=8\Rightarrow F_4=6\Rightarrow \mathit{cubo}\\ r=5\Rightarrow S_5=30\Rightarrow V_5=20\Rightarrow F_5=12\Rightarrow \mathit{dodecaedro}\end{array}\\ & S=\dfrac{6r}{6-r}\end{cases}$$

$$r=3\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{S}>0\Rightarrow n<6\Rightarrow & \begin{array}{c} n=3\Rightarrow S_3=6\Rightarrow V_3=4\Rightarrow F_3=4\Rightarrow \mathit{tetraedro}\\ n=4\Rightarrow S_3=12\Rightarrow V_3=6\Rightarrow F_3=8\Rightarrow \mathit{ottaedro}\\ n=5\Rightarrow S_3=30\Rightarrow V_3=12\Rightarrow F_3=20\Rightarrow i\cos aedro\end{array}\\ & S=\dfrac{6n}{6-n}\end{cases}$$

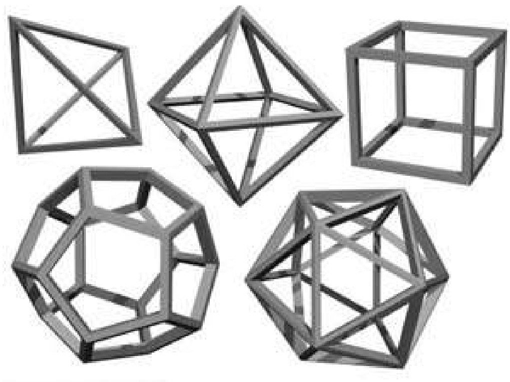


Fig. 26

4.16 Corpi rotondi

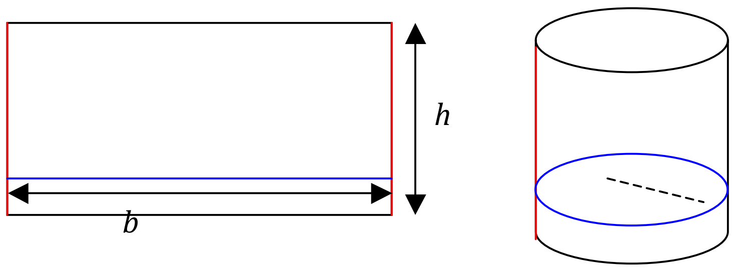
Si definisce *superficie sferica*, o più semplicemente ***sfera***, l'insieme dei punti dello spazio a distanza *r* (*raggio*) da un punto fisso *O*, (*centro*).
E' data una circonferenza *C* appartenente ad un piano α, ed una retta dello spazio incidente α. Si definisce ***cilindro*** (*indefinito*) l'insieme delle rette (*generatrici*) parallele ad *r*, ed intersecanti α nella circonferenza *C*. La parallela a *r* passante per il centro della circonferenza si dice *asse* del cilindro. Se tale retta è ortogonale al piano α, il cilindro si dice *retto*. La porzione di cilindro compresa tra due piani *paralleli* si dice *cilindro definito*, mentre la sezione ottenuta tagliando il cilindro con un piano ortogonale all'asse, si dice *sezione normale*. Se il cilindro è retto la sezione normale è una circonferenza ed il suo raggio si dice *raggio del cilindro*.
Data una circonferenza *C* su un piano α, ed un punto $P\notin\alpha$, si dice ***cono*** (*indefinito*) l'insieme delle rette per *P* che intersecano i punti della circonferenza *C*. Tali rette si dicono *generatrici*, il punto *P* si dice *vertice* del cono, mentre la retta che congiunge *P* con il centro della circonferenza è detta *asse* del cono. Se l'asse è perpendicolare al piano della circonferenza il cono si dice *retto*.

4.17 Sviluppi

Abbiamo già avuto modo di considerare lo sviluppo di particolari superfici poliedriche su un piano. Si tratta, sostanzialmente, di una trasformazione tale che, dopo un certo numero di tagli che non

separino del tutto una faccia dall'altra, una superficie poliedrica può essere distesa su un piano.
Occupiamoci adesso dello sviluppo del cilindro e del cono.
Definiamo lo sviluppo in modo più "operativo". Una superficie *S* è sviluppabile su una superficie piana *S'*, quando è possibile stabilire una corrispondenza tra *S'* e *S* tale che le curve tracciate su *S* sono rappresentate da curve su *S'* aventi la stessa lunghezza.

Sviluppo della superficie del cilindro e di quella del cono



$$S_l = bh = 2\pi rh$$

$$r = b/2\pi$$

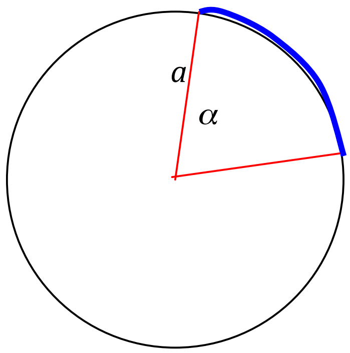
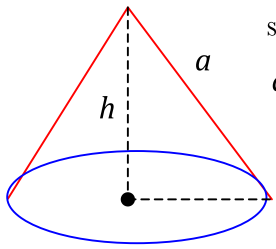


Fig. 27



Relazione tra la semi-apertura del cono, *x*, e l'angolo del settore circolare equivalente alla superficie laterale del cono.

$$a\sin x = r = \frac{a\alpha}{2\pi} \Rightarrow x = \arcsin\frac{\alpha}{2\pi}$$

$$S_l = \frac{a^2\alpha}{2} = \frac{a^2 2\pi r}{2a} = \pi ar \qquad r = a\alpha/2\pi$$

Problema (giochi di Archimede 2013)

Il Mago Merlino posa a terra il suo cappello, un cono retto di altezza h = 20 2 cm e di base una circonferenza di raggio r = 10 cm. Una formica, partendo da un punto P sul bordo del cappello, vuole raggiungere il punto Q situato nel punto medio dell'apotema dalla parte opposta (vedi figura). Quanto misura il cammino più breve che la formica dovrà percorrere sulla superficie del cappello per raggiungere Q?

(A)15 3cm (B)15+10 2cm (C)15+5πcm (D) 15 + 10π cm (E) nessuna delle precedenti

Fig. 28

La sfera non è sviluppabile
Si dimostra per assurdo facendo vedere che esiste una curva sulla sfera (di raggio R), la cui lunghezza non si conserva. Consideriamo una sezione della sfera con un piano parallelo al piano equatoriale: si tratta di una circonferenza di raggio $r = R\sin\alpha$, dove α è la semi-apertura del cono retto di vertice nel centro della sfera, e base coincidente con la circonferenza sezione. Indichiamo con P un punto sulla circonferenza, e con C il punto in cui l'asse del cono interseca la sfera dalla stessa parte della circonferenza. Se la sfera fosse sviluppabile, la trasformata della circonferenza dovrebbe avere la stessa lunghezza di quest'ultima, ma ciò non è possibile. Infatti, la circonferenza sezione ha lunghezza $L = 2\pi r = 2\pi R\sin\alpha$, mentre la trasformata è la circonferenza di centro C e raggio *della stessa lunghezza* (misurata sulla sfera) dell'arco PC, la cui lunghezza è $L' = 2\pi R\alpha \neq L$.

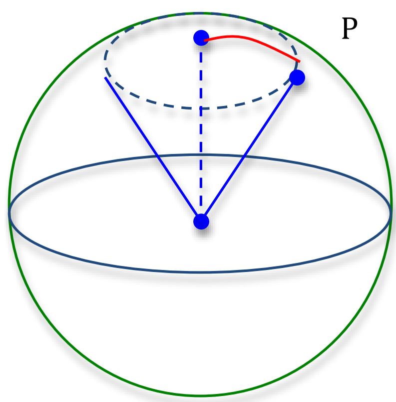


Fig. 29

Carte geografiche
L'impossibilità di sviluppare la sfera su un piano impedisce la rappresentazione della Terra su un foglio. Il problema è dato dal fatto che non si conservano contemporaneamente tutte le proprietà metriche (distanze, aree, angoli).
Le comuni carte geografiche vengono realizzate con il metodo cosiddetto delle *proiezioni*. La rappresentazione cartografica può essere ottenuta proiettando i punti della sfera in due modi: direttamente su un piano, (proiezione *prospettica*) oppure su un cilindro (o su un cono), e successivamente sviluppando su un piano tali superfici.
Per la navigazione, in particolare, si avverte la necessità di disporre di una rappresentazione conforme, ovvero tale da conservare gli angoli, in modo da non dover correggere continuamente la rotta.

4.18 Volume dei corpi rotondi
Principio di Cavalieri
Se un piano, parallelo al piano di riferimento su cui poggiano due solidi, stacca su questi sezioni equivalenti alla stessa quota rispetto al suolo, allora i due solidi sono equivalenti.
Si suppongono noti i volumi del cubo di lato l ($V = l^3$) e quello del cilindro a base circolare di raggio r ed altezza h ($V = \pi r^2 h$).

Il volume del cono circolare retto

Sempre dal Principio di Cavalieri è possibile dedurre il volume del cono circolare retto: $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$.

Infatti, se le sezioni del cono con piani paralleli al cerchio di base sono equivalenti a quelle di una piramide retta, avente la stessa altezza del cono, che si trovano alla stessa quota, i due solidi sono equivalenti.

Il volume della sfera
Si calcola il volume della sfera mostrando la sua equivalenza con l'*anti-clessidra*, il solido complementare al doppio cono di basi coincidenti con quelle del cilindro (equilatero) in cui è inscritto.
Indicato con R il raggio della sfera, con r il raggio della sezione della sfera, e con h la distanza della sezione della sfera (e quindi di quella del cono) dal centro della sfera, si ha: $h=\sqrt{R^2-r^2}$. Poiché la semi-apertura del cono è un angolo di 45° (essendo inscritto in un cilindro equilatero), il raggio della sezione del cono è congruente alla distanza di questa dal vertice (centro della sfera), ovvero $h=\sqrt{R^2-r^2}$. L'area della sezione della sfera è πr^2, quella della sezione del cono è $\pi h^2=\pi\left(R^2-r^2\right)$, di conseguenza l'area della sezione dell'anti-clessidra è $\pi R^2-\pi h^2=\pi r^2$, equivalente a quella della sfera. Per il principio di Cavalieri, il volume della sfera è equivalente a quello dell'anti-clessidra, ovvero a quello del cilindro $2\pi R^3$ privato di quello del doppio cono inscritto $\frac{2\pi R^3}{3}$, ovvero $V_{sfera}=\frac{4\pi R^3}{3}$.

Quesiti
1. Si sfrutti il modello del cubo per la costruzione di un tetraedro regolare, e per la rappresentazione di coppie di rette parallele, incidenti, e sghembe.
2. Si dimostri che due rette distinte possono avere al più un punto in comune.
3. Si dimostri che esiste almeno un punto nello spazio che non appartiene ad un piano dato.
4. Sono dati un quadrato e due triangoli equilateri costruiti su due lati consecutivi del quadrato. Si dica quale solido si ottiene congiungendo i vertici dei triangoli non appartenenti al quadrato, ed il vertice del quadrato non appartenente ai triangoli.
5. Si sfrutti il modello del cubo per la costruzione di un ottaedro regolare.
6. Si definisca il concetto di simmetria rispetto ad un piano.
7. Si dimostri che una simmetria centrale può essere ottenuta componendo tre simmetrie rispetto a piani ortogonali che si intersecano nel centro della simmetria.

Esercizi
1. In riferimento alla figura 1, si calcoli l'altezza del tetraedro ACHF.

$$\left[h=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right]$$

2. Se ABCD è un tetraedro regolare, si calcoli l'area della figura ottenuta sezionando il tetraedro con il piano passante per lo spigolo CD, di misura *a*, ed un punto sul lato AB, a distanza *x* dal vertice A.

   [$P\in AB\,|\,\overline{AP}:=x\Rightarrow\overline{PC}=\overline{PD}$. *Si applica il teorema di Carnot al triangolo isoscele* PCD*, da cui segue l'espressione dell'area* $S\left(x\right)=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{4}a^2+x^2-ax}$].

3. Un prisma retto ha come basi i triangoli ABC e DEF equilateri, e altezza uguale ai lati dei triangoli di base. Se i lati misurano 9 (cm), si calcolino: a) il volume del prisma, b) la superficie del prisma, c) l'area del triangolo AEC.

$$\left[\; a)V=\frac{243\sqrt{3}}{4}cm^3;\quad b)S=81\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)cm^2;\quad c)A=\frac{81\sqrt{7}}{4}cm^2\;\right]$$

4. Il volume del prisma ottenuto sezionando un cubo con un piano passante per due spigoli paralleli non appartenenti alla stessa faccia è $27cm^3/2$. Si calcoli l'area della superficie totale.

$$\left[S_t = \left(27+9\sqrt{2}\right)cm^2\right]$$

5. Sia VABCD una piramide che ha per base il quadrato ABCD, e tale che il vertice V abbia come proiezione sul piano di base il centro O del quadrato (piramide *retta*). Sapendo che $\overline{VO} = \left(\sqrt{3}/2\right)\overline{AB}$, si determini l'ampiezza della sezione normale del diedro formato a) dalle facce laterali con il piano di base; b) da due facce laterali aventi uno spigolo in comune.

$$\left[\ a)\frac{\pi}{3};\quad b)\cos\beta = -\frac{1}{4}\ \right]$$

6. In riferimento al modello di ottaedro in Fig.25, si dimostri che i triangoli BCE e ADF: a) si corrispondono nella simmetria centrale rispetto ad O, b) sono situati su piani paralleli.
7. Indicata con *x* la distanza tra i piani a cui appartengono i triangoli BCE e ADF, si calcoli il rapporto tra il volume del cilindro avente per basi le circonferenze inscritte nei suddetti triangoli, ed il cono avente per base la circonferenza circoscritta al rettangolo ABCD.
8. Si dica quanto vale il rapporto nel caso in cui il tetraedro è regolare.
9. Si stabilisca per quale valore di *x* il rapporto di cui al punto precedente è uguale a 1.

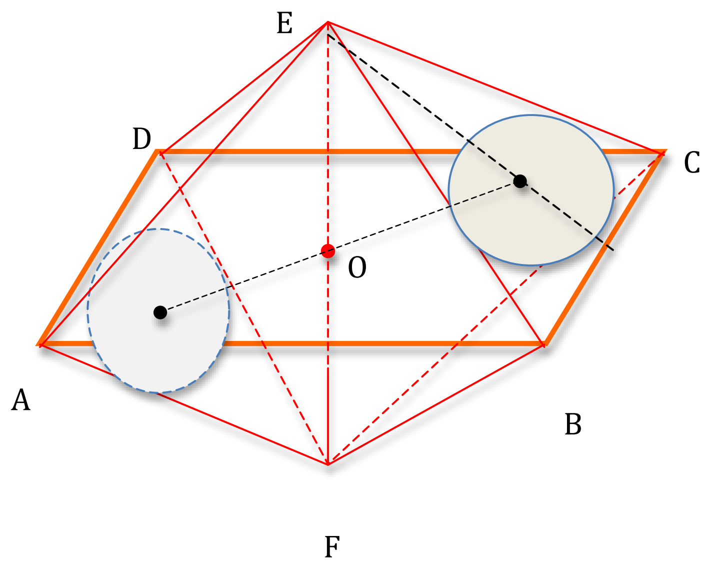


Fig. 30

4.19 Glossario generale

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

POSTULATI

1. Per tre punti dello spazio, non allineati, passa uno ed un solo piano.
2. Una retta passante per due punti di un piano giace interamente in quel piano.
3. Una retta giacente in un piano lo divide in due regioni tali che: ogni segmento congiungente due punti di una regione è contenuto nella regione, ogni segmento congiungente due punti appartenenti a regioni diverse incontra la retta in un punto.

TEOREMI

1. Due piani distinti, aventi in comune un punto, hanno in comune una e una sola retta che passa per quel punto.

2. Se una retta è perpendicolare in un suo punto a due rette che passano entrambe per quel punto, essa è pure perpendicolare a qualunque altra retta condotta per quello stesso punto e giacente nel piano delle prime due.

3. Il luogo delle rette perpendicolari ad una retta data in un suo punto è un piano.

4. Per un punto dato si può condurre uno ed uno solo piano perpendicolare ad una retta data.

5. TEOREMA DELLE TRE PERPENDICOLARI. Se dal piede di una perpendicolare *(a)* a un piano *(α)* si conduce la perpendicolare *(c)* a una qualunque retta *(r)* del piano, quest'ultima risulterà essere perpendicolare al piano formato da da *(a) e (c)*.

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO
Principali definizioni

1. Si dice **semispazio** avente per origine il piano α, la figura costituita dal piano α e da una delle due parti in cui esso divide lo spazio.
2. Due semispazi diversi aventi la stessa origine si dicono **opposti**.
3. Due piani che non hanno punti in comune si dicono **paralleli**.
4. Per una retta nello spazio passano infiniti piani, che costituiscono un **fascio di piani.**
5. Una retta si dice **perpendicolare** (o ortogonale o normale) ad un piano quando lo incontra ed è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il punto di intersezione, detto **piede della perpendicolare**.
6. La **proiezione di un punto** sopra un piano è il piede della perpendicolare condotta dal punto al piano.
7. La **distanza di un punto dal piano** è la lunghezza del segmento di perpendicolare condotto dal punto al piano.
8. Si chiama **angolo di una retta con un piano** l'angolo acuto che la retta forma con la sua proiezione sopra il piano.
9. Una retta ed un piano si dicono **paralleli** quando non hanno nessun punto in comune, due piani distinti si dicono **paralleli** quando non hanno alcun punto in comune.
10. Si dice **diedro** la figura costituita da due semipiani aventi la stessa origine e da una delle due parti di spazio da essi limitata. I semipiani si dicono **facce** del diedro, la retta origine si dice **spigolo**. Se le facce sono una il prolungamento dell'altra il diedro si dice **piatto**. Un diedro si dice **retto** quando è la metà di un angolo piatto.
11. Si dice **convesso** il diedro che non contiene al proprio interno il prolungamento delle sue facce, quello che invece le contiene si dice **concavo**.
12. Due diedri si dicono **congruenti** se si possono pensare come posizioni diverse dello stesso diedro in movimento *rigido*.
13. Due diedri si dicono **consecutivi** quando sono disposti in modo da avere in comune soltanto uno spigolo ed una faccia. Se le facce non comuni sono una il prolungamento dell'altra, i diedri si dicono **adiacenti**.
14. Due diedri consecutivi individuano un terzo diedro detto **somma** dei primi due. Se tale somma è un diedro piatto, i diedri si dicono **supplementari**, se è un diedro retto, **complementari**.
15. La **sezione normale di un diedro** è l'angolo ottenuto intersecando il diedro stesso con un piano perpendicolare allo spigolo.
16. Due piani che intersecandosi formano quattro diedri congruenti si dicono **perpendicolari**.
17. Due rette si dicono **sghembe** se non esiste un piano che le contiene entrambe.

ANGOLOIDI E SOLIDI NOTEVOLI

Principali definizioni

1. Si dice **superficie piramidale** la figura formata dagli angoli delle coppie di un numero qualsiasi di semirette aventi la stessa origine e tali che il piano determinato da due di queste semirette consecutive lasci le restanti semirette dalla stessa parte.
2. L'origine comune delle semirette si dice **vertice** della superficie, le semirette si dicono **spigoli** e gli angoli si dicono **facce**.
3. Si dice **angoloide** la figura formata da una superficie piramidale e dai suoi punti interni. Si dicono **diedri dell'angoloide** i diedri formati dai semipiani contenenti due facce consecutive. L'intersezione di un piano non passante per il vertice con un angoloide è un *poligono.*
4. Un angoloide si dice **triedro, tetraedro, pentaedro…** secondo che abbia tre, quattro, cinque…facce.
5. Si dice **superficie poliedrica** la figura formata da più poligoni convessi situati in piani diversi e disposti in modo che ciascun lato sia comune a due di essi e che il piano di ogni poligono lasci tutti gli altri dalla medesima parte. I poligoni, i loro vertici e i loro lati si dicono rispettivamente **facce, vertici e spigoli** della superficie poliedrica.
6. Si dice **poliedro** la figura formata da una superficie poliedrica e da tutti i suoi punti interni.
7. Si dicono **diedri del poliedro** i diedri formati da semipiani contenenti coppie di facce contigue.
8. Si dice **diagonale del poliedro** il segmento che congiunge due vertici non situati sulla stessa faccia.
9. Un poliedro è una *parte limitata* dello spazio nel senso che non contiene né rette né semirette.
10. Si dice **superficie prismatica** l'insieme delle strisce di piano delimitate da rette parallele nello spazio, tali che ogni striscia lasci tutte le altre dalla stessa parte.
11. L'insieme dei punti di una superficie prismatica e dei suoi punti interni si dice **prisma indefinito**.
12. La parte di prisma indefinito compresa tra due sezioni (dette **basi**) parallele è un solido detto **prisma**. La distanza tra le basi è detta **altezza** del prisma. Se gli spigoli laterali del prisma sono perpendicolari alle basi il prisma si dice **retto**, si dice **regolare** se le basi sono poligoni regolari.
13. Si dice **parallelepipedo** un prisma le cui basi sono due parallelogrammi.
14. Consideriamo un angoloide e un piano non parallelo ad alcuno degli spigoli e non passante per il vertice. La figura che si ottiene e che contiene il vertice si dice **piramide**.

15. Una piramide si dice **retta** se ha per base un poligono circoscrivibile ad un cerchio, il cui centro coincide con la proiezione del vertice sul piano di base. Le facce laterali di una piramide retta hanno altezze congruenti tra loro. Tale altezza è detta **apotema** della piramide retta.
16. Una piramide si dice **regolare** se ha per base un poligono regolare.
17. Si dice **tronco di piramide** la parte di piramide compresa tra la base e la sezione ottenuta con un piano parallelo alla base non passante per il vertice.
18. Un **poliedro** si dice **regolare** quando le sue facce sono poligoni regolari tutti congruenti tra loro e i suoi angoloidi sono pure tutti congruenti tra loro.

TEOREMI

1. Ogni faccia di un triedro è minore della somma delle altre due e maggiore della differenza.
2. La somma delle facce di un triedro è minore di quattro angoli retti.

3. Le diagonali di un parallelepipedo si incontrano in un punto che le divide tutte per metà.

4. Se si taglia una piramide con un piano parallelo alla base:
   a) la base e la sezione sono poligoni simili;
   b) i lati e i perimetri di questi poligoni sono proporzionali alle distanze del loro piano dal vertice, e le aree ai quadrati di queste distanze.

5. TEOREMA DI EULERO $v - s + f = 2$

CORPI ROTONDI

1. Sia data una curva su un semipiano. La rotazione del semipiano attorno alla retta che lo delimita, detta **asse di rotazione**, fa sì che la predetta curva descriva una superficie detta **superficie di rotazione**. La curva si dice **generatrice** della superficie. Ogni punto della curva descrive durante la rotazione una circonferenza, detta **parallelo**, giacente in un piano perpendicolare all'asse di rotazione ed il cui centro sta sull'asse medesimo. L'intersezione della superficie di rotazione con un piano contenente l'asse di rotazione origina due curve, congruenti con la generatrice e simmetriche rispetto all'asse di rotazione, dette **meridiani**. La rotazione di una figura contenuta nel piano origina un solido, detto **solido di rotazione**.
2. Se la generatrice è una retta parallela all'asse di rotazione, la superficie si dice **superficie cilindrica indefinita**. Poiché i punti della generatrice sono equidistanti dall'asse di rotazione, la superficie cilindrica è il luogo dei punti dello spazio equidistanti da una retta fissa.
3. Il solido costituito dall'insieme dei punti di una superficie cilindrica e dai suoi punti interni si dice **cilindro indefinito.** I meridiani di un cilindro sono rette parallele complanari con l'asse di rotazione, mentre i paralleli sono circonferenze di raggio costante.
4. Un cilindro si dice **equilatero** se la sua altezza è uguale al diametro delle basi.
5. Un prisma retto si dice **inscritto (circoscritto) in un cilindro** se le sue basi sono inscritte (circoscritte) nelle basi del cilindro.
6. Se la generatrice è una semiretta avente origine O nell'asse di rotazione, la superficie si dice **superficie conica indefinita** di **vertice** O. Se l'angolo tra la generatrice e l'asse di rotazione è *acuto*, tale angolo si dice **semiapertura della superficie**.
7. La rotazione di una retta non parallela all'asse di rotazione, origina la cosiddetta **superficie conica a due falde**. L'intersezione di questa superficie con piani non contenenti il punto di intersezione tra la generatrice e l'asse di rotazione origina le cosiddette **sezioni coniche non degeneri**.
8. Il solido costituito dall'insieme di tutti i punti di una superficie conica indefinita e dai suoi punti interni è detto **cono indefinito**. Tagliando il cono indefinito con un piano perpendicolare all'asse di rotazione, si dice **cono** la parte contenente il vertice. Il raggio della base si dice **raggio del cono**, la distanza del vertice dalla base si dice **altezza del cono**.
9. La parte di superficie conica appartenente al cono si dice **superficie laterale**. Si dice **superficie totale** l'unione della superficie laterale con la base.
10. Si dice **apotema** il semento di generatrice compreso tra il vertice e la base.
11. Un cono si dice **equilatero** se l'apotema è congruente al diametro di base.
12. Una piramide retta si dice **inscritta o circoscritta a un cono** se il suo vertice coincide con il vertice del cono e la sua base è inscritta o circoscritta nella base del cono.
13. Si dice **tronco di cono** la parte di cono ottenuta tagliando il cono con un piano parallelo alla base e non contenente il vertice.

14. Si dice **sfera** la figura generata dalla rotazione di una semicirconferenza attorno alla retta del suo diametro. La **superficie sferica** è il luogo dei punti dello spazio equidistanti da un punto fisso detto centro.
15. Si dice **zona sferica** la parte di superficie sferica compresa tra due piani paralleli che tagliano la superficie, le circonferenze sezioni si dicono **basi della zona** e la loro distanza **altezza della zona**. Si chiama **calotta** ciascuna parte in cui viene suddivisa una superficie sferica da un piano secante.
16. La parte di sfera compresa tra due piani secanti paralleli si dice **segmento sferico a due basi**. Ciascuna delle parti in cui la sfera è divisa da un piano secante si dice **segmento sferico a una base**.
17. Si dice **settore sferico** quella parte di sferra generata dalla rotazione di un settore circolare attorno ad un diametro che giace nel piano del settore, ma non lo attraversa.
18. Si dice **fuso sferico** la parte di superficie sferica limitata da due semipiani diametrali.
19. Si dice **spicchio sferico** la parte di sfera limitata da un fuso e dai semicerchi massimi corrispondenti ai lati del fuso.

TEOREMI

1. Le sezioni di un cono indefinito con piani perpendicolari all'asse sono cerchi, le cui aree stanno tra loro come i quadrati delle rispettive distanze dal vertice.

2. Le semirette, uscenti da un punto A esterno ad una superficie sferica e tangenti ad essa, formano una superficie conica. Il luogo dei punti di contatto è una circonferenza minore, il cui piano è perpendicolare alla retta diametrale passante per A.

3. Le rette, parallele a una retta data e tangenti ad una superficie sferica, formano una superficie cilindrica; il luogo dei punti di contatto è la circonferenza massima il cui piano è perpendicolare alla retta data.