ESERCIZI GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO

1. Si scriva l'equazione parametrica della retta passante per l'origine dello spazio $Oxyz$ parallela alla retta intersezione dei piani $x - y + z + 1 = 0$ e $2x - y - z = 0$.

2. Si discutano al variare del parametro k le mutue posizioni dei seguenti piani:
$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ kx + ky + z = 0 \end{cases}$. Per quali valori di k sono perpendicolari?

3. Si scriva l'equazione della retta dello spazio passante per l'origine e per il punto $P(-1;1;2)$.
4. Discutere la risolubilità del seguente sistema al variare del parametro $k \in R$:
$$\begin{cases} x - 2y - z = 3k \\ 4y + 3z = 0 \\ x + ky = -5 \end{cases}.$$
5. Date le rette $r\begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \end{cases}, s_k : \begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ z - k = 0 \end{cases}$ si dica per quali valori del parametro sono complanari, e se ne determini l'equazione del piano.
6. Si determini il piano contenente la retta $r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$, parallelo alla retta $s : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = -2 \end{cases}$.
7. Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i punti dello spazio $A(0,1,0), B(-1,0,0), C(0,0,1)$.
8. Dati il piano $\pi : 2x + 3y - z = 4$ e la retta $r : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$ si dica se sono paralleli o incidenti, e si trovi l'eventuale punto di intersezione.
9. Trovare l'equazione del piano passante per il punto $P(1,0,1)$ e contenente la retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$.

SOLUZIONI

1. Scriviamo l'equazione della retta intersezione dei due piani in forma parametrica al fine di evidenziarne il vettore direzione:

$$\begin{cases} x-y+1=-t \\ y-2x=-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-1-t \\ y-2y+2+2t=-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=2t \\ y-2=3t \\ z-0=t \end{cases} \Rightarrow v(2;3;1)$$. L'equazione della retta cercata, in forma parametrica, è quindi: $\begin{cases} x-0=2t \\ y-0=3t \\ z-0=t \end{cases}$.

2. Vediamo se, ed eventualmente per quali, valori del parametro i piani sono paralleli (e, in tal caso, coincidenti, visto che ambedue passano per l'origine, essendo zero il termine noto delle rispettive equazioni): $\frac{k}{k}=\frac{1}{k}=\frac{1}{1}$ se e soltanto se $k=1$. In questo caso i piani sono paralleli (e coincidenti). Per tutti gli altri valori del parametro si intersecheranno nella retta (passante per l'origine) di equazione $\begin{cases} kx-k^2x-kt=-t \\ y=-kx-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{(k-1)t}{k(1-k)}=-\frac{1}{k}t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$. Per $k=0$ il sistema si riduce a $\begin{cases} y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ e questa è l'equazione dell'asse x.

Per vedere se possono essere perpendicolari, applicando la condizione di perpendicolarità tra piani nello spazio otteniamo $k^2+k+1=0$. Poiché $\Delta=-3<0$, l'equazione non ammette soluzioni reali: i due piani non possono quindi essere perpendicolari per alcun valore del parametro.

3. Scriviamo l'equazione parametrica della retta passante per l'origine $\begin{cases} x=lt \\ y=mt \\ z=nt \end{cases}$ ed imponiamo il passaggio per il punto $P(-1;1;2)$: $\begin{cases} -1=lt \\ 1=mt \\ 2=nt \end{cases} \Rightarrow t=\frac{-1}{l}=\frac{1}{m}=\frac{2}{n} \Rightarrow \begin{cases} l=-1 \\ m=1 \\ n=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=2t \end{cases}$.

4.
$$\begin{cases} x-2y-z=3k \\ 4y+3z=0 \\ x+ky=-5 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3k \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & k & 0 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3k \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -2-k & -1 & 3k+5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3k \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2+3k}{4} & 3k+5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x-2y-z=3k \\ 4y+3z=0 \\ \frac{2+3k}{4}z=3k+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k\neq-\frac{2}{3} \Rightarrow & 1 soluzione \\ k=-\frac{2}{3} \Rightarrow & \varnothing \end{matrix}$$.

5. $s_k:\begin{cases} x=t+\frac{k}{2} \\ y=t \\ z=k \end{cases} \in p:\lambda(2x-y-2z)+\mu(2x+2y-3z)=0 \Leftrightarrow (\lambda+4\mu)t-k(\lambda+2\mu)=0$. Di conseguenza $\begin{matrix} \lambda=-4\mu \\ k=0 \end{matrix} \Rightarrow p:6x-6y-5z=0$.

6. Si osserva subito che la retta $s\subset p:x-z=-2$, che a sua volta è parallelo al piano $x-z=0$ contenente la retta *r*. Di conseguenza, quest'ultimo è il piano cercato. Oppure, se non avessimo notato questo fatto, avremmo dovuto procedere così: tra tutti i piani a cui appartiene la retta *r*, rappresentati dall'equazione $\lambda(2x-y)+\mu(x-z)=0 \Rightarrow (2\lambda+\mu)x-\lambda y-\mu z=0$, si seleziona quello parallelo alla retta $s:\begin{cases} x+2=t \\ y-3=-t \\ z-0=t \end{cases}$ applicando la condizione di parallelismo $1(2\lambda+\mu)-1(-\lambda)+1(-\mu)=0 \Rightarrow 3\lambda=0 \Rightarrow x-z=0$.

7. $\begin{cases} b+d=0 \\ -a+d=0 \\ c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=d \\ b=-d \\ c=-d \end{cases} \Rightarrow dx-dy-dz+d=0 \Rightarrow x-y-z+1=0$.

8. $r:\begin{cases} x+y=0 \\ x-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t+1 \\ y=-t-1 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}(1,-1,1) \Rightarrow \vec{v}\cdot(2,3,-1)=2-3-1=-2\neq 0$. Retta e piano sono incidenti nel punto $2(t+1)+3(-t-1)-t=4 \Rightarrow -2t=5 \Rightarrow t=-\frac{5}{2} \Rightarrow P\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$.

9. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=t \\ z=-t+\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}a+bt-ct+\frac{3}{2}c+d=0\,\forall t \Rightarrow \begin{cases} b-c=0 \\ \frac{3}{2}a+\frac{3}{2}c+d=0 \end{cases}$. Si mettono a sistema le ultime due equazioni trovate con la condizione di appartenenza del punto al piano: $\begin{cases} b-c=0 \\ 3a+3c+2d=0 \\ a+c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ a=-c \\ b=c \end{cases} \Rightarrow x-y-z=0$.

PROBLEMI

1. Dopo aver determinato l'equazione del piano π parallelo all'asse *x* e passante per i punti $P(0;\sqrt{2};0)$ e $Q(0;0;\sqrt{2})$, si determini l'equazione della superficie conica avente semi-apertura di ampiezza $\pi/3$, per asse la retta *r* perpendicolare al piano π e passante per l'origine, e per vertice il punto *V* di intersezione del piano π con la retta *r*.
2. Si studino, al variare del parametro *k*, le mutue posizioni dei piani $\begin{cases} k^2x + y + z = 1 \\ (2k-1)x + y + kz = -1 \end{cases}$.
   Si scriva l'equazione parametrica della retta intersezione dei piani nel caso $k = 1/2$, e l'equazione, sempre in forma parametrica, della retta ad essa perpendicolare passante per il punto $P(0;0;1)$.
3. E' data la superficie conica di equazione $x^2 - y^2 + z^2 = 0$. Si studino le intersezioni con i piani $z = 1 + ky$ al variare del parametro *k*.
4. Si determini l'equazione della superficie sferica con centro nell'origine e tangente al piano α di equazione $2x - y + 2z - 3 = 0$.

SOLUZIONI

1. Scritta l'equazione generica del piano $ax + by + cz + d = 0$ si impone il passaggio per i punti dati: $\begin{cases} b\sqrt{2} + d = 0 \\ c\sqrt{2} + d = 0 \end{cases} \Rightarrow ax - \frac{d}{\sqrt{2}}y - \frac{d}{\sqrt{2}}z + d = 0$. La condizione di parallelismo con l'asse *x*, che in forma parametrica è rappresentato dal vettore direzione $(1;0;0)$, porta alla determinazione del coefficiente *a*, in quanto $a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0 \Rightarrow a = 0$. L'equazione del piano è $y + z - \sqrt{2} = 0$. Ricaviamo l'equazione della retta *r*, asse del cono, imponendo la condizione di parallelismo con la direzione perpendicolare al piano, individuata dai coefficienti del piano stesso $(0;1;1)$: $r: \begin{cases} x = 0 + 0t \\ y = 0 + 1t \\ z = 0 + 1t \end{cases}$. Si determina il vertice del cono imponendo la condizione $t + t - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. L'equazione del cono si trova infine applicando la
   $$\left(k^2l^2 - n^2 - m^2\right)(x - x_V)^2 + \left(k^2m^2 - n^2 - l^2\right)(y - y_V)^2 + \left(k^2n^2 - l^2 - m^2\right)(z - z_V)^2 +$$
   $$2mn\left(k^2 + 1\right)(z - z_V)(y - y_V) + 2nl\left(k^2 + 1\right)(x - x_V)(z - z_V) + 2ml\left(k^2 + 1\right)(x - x_V)(y - y_V) = 0$$
   con $(l;m;n) = (0;1;1)$ e $k^2 = \tan^2\frac{\pi}{3} = 3$:
   $$\begin{aligned} &-2x^2 + 2(y - \sqrt{2}/2)^2 + 2(z - \sqrt{2}/2)^2 + 8(z - \sqrt{2}/2)(y - \sqrt{2}/2) = 0 \\ &x^2 - y^2 - z^2 - 4yz + 3\sqrt{2}y + 3\sqrt{2}z - 3 = 0 \end{aligned}.$$

2. Vediamo in quali casi i due piani possono risultare paralleli:

$$\frac{k^2}{2k-1}=\frac{1}{1}=\frac{1}{k}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{k^2}{2k-1}=1\\ \dfrac{1}{k}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{k^2-2k+1}{2k-1}=0\\ k=1\end{cases}\Rightarrow k=1.$$ Per $k=1$ i piani sono paralleli.

Poiché $\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-1}$ i due piani sono paralleli distinti.

Nel caso $k=1/2$ le equazioni dei piani sono $\begin{cases}\dfrac{x}{4}+y+z=1\\ y+\dfrac{z}{2}=-1\end{cases}$. Posto ad esempio $z=t$ otteniamo

$$\begin{cases}x=4\left(\dfrac{t}{2}+1-t+1\right)\\ y=-\dfrac{t}{2}-1\\ z=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=8-2t\\ y=-1-\dfrac{t}{2}\\ z=0+t\end{cases}$$. La direzione della retta è data dal vettore $(-2;-1/2;1)$. La retta cercata appartiene al piano perpendicolare alla retta trovata, passante per il punto $P(0;0;1)$. Tale piano ha equazione $-2x-\frac{y}{2}+z+d=0$, e il coefficiente d si ottiene imponendo il passaggio del piano per il punto $P(0;0;1)$: $-2\cdot 0-\frac{0}{2}+1+d=0\Rightarrow d=-1$, di conseguenza l'equazione del piano è $-2x-\frac{y}{2}+z-1=0$. Questo piano interseca la retta nel punto

$$-2(8-2t)-\frac{-1-t/2}{2}+t-1=0\Rightarrow -32+8t+1+\frac{t}{2}+2t-2=0\Rightarrow 21t/2=33\Rightarrow t=\frac{22}{7}\Rightarrow\left(\frac{12}{7};-\frac{18}{7};\frac{22}{7}\right)$$

L'equazione della retta è quindi: $$\begin{cases}x=0+\left(\dfrac{12}{7}-0\right)t\\ y=0+\left(-\dfrac{18}{7}-0\right)t\\ z=1+\left(\dfrac{22}{7}-1\right)t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{12}{7}t\\ y=-\dfrac{18}{7}t\\ z=1+\dfrac{15}{7}t\end{cases}.$$

3. Si studiano le soluzioni del sistema $\begin{cases}x^2-y^2+z^2=0\\ z=1+ky\end{cases}\Rightarrow x^2+(k^2-1)y^2+2ky+1=0$. Si tratta di ellissi se $k^2-1>0\Leftrightarrow |k|>1$, di iperboli se $k^2-1<0\Leftrightarrow |k|<1$, di una parabole se $k^2-1=0\Leftrightarrow |k|=1$.
4. La misura del raggio della sfera è uguale alla distanza del centro dal piano tangente. Il punto di tangenza si ottiene intersecando il piano tangente con la retta passante per il centro e perpendicolare al piano, la cui direzione è data dal vettore $\vec{v}(2;-1;2)$. L'equazione della retta è quindi $r:\begin{cases}x=2t\\ y=-t\\ z=2t\end{cases}$, ed il punto d'intersezione si ottiene sostituendo le coordinate del generico punto della retta nell'equazione del piano:

$2\left(2t\right)-(-t)+2(2t)-3=0 \Rightarrow t=\dfrac{1}{3} \Rightarrow P\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. Da questo segue $r^2 = PH^2 = 1$ e l'equazione della sfera è quindi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.