CAPITOLO 8
LIMITI DI SUCCESSIONI
8.1 L'andamento di una successione

Dagli esempi di successioni visti finora, si possono osservare sostanzialmente tre tipi di comportamento del termine generale, al crescere di *n* nell'insieme dei numeri naturali: di "crescita (o decrescita) illimitata", ad esempio le successioni $a_n = n^2$ oppure $a_n = \frac{1}{1+7^n}$, di "tendenza ad un valore finito" come nel caso di $a_n = \frac{n}{n+1}$, o di "oscillazione", come per la successione $a_n = \frac{n^2}{1+n}(-1)^n$.

Per descrivere il comportamento di queste successioni usiamo espressioni "poco formali", come ad esempio, nel caso della successione $a_n = n^2$, "cresce oltre ogni limite". Proviamo ad introdurre un formalismo che ci permetta di "quantificare" il comportamento di una successione che cresce indefinitamente.

Osservazione. Comunque fissiamo una limitazione al termine generale della successione $a_n = n^2$, ovvero se prendiamo $m \in N$ è sempre possibile trovare un intero *n* tale che $n^2 \geq m$: è sufficiente prendere $n \geq \sqrt{m}$. Ora, poiché la natura della successione ci porta a lavorare con i numeri naturali, e $\sqrt{m}$ non è, in generale, un numero naturale, siamo portati a considerare *il più piccolo intero maggiore di* $\sqrt{m}$. Si esprime questo intero attraverso il concetto di *parte intera* di un numero reale *a*: $[a] = \text{int}(a)$. Ad esempio, $[\sqrt{2}] = 1$. In questo modo, per ogni $n \geq [\sqrt{m}] + 1$ risulta $n^2 \geq m$.

Caratterizziamo ulteriormente le successioni mediante la seguente definizione.

Successioni limitate

Una successione a_n si dice

- *Limitata superiormente* se esiste un numero M tale che $a_n \leq M$ per ogni *n*,
- *Limitata inferiormente* se esiste un numero m tale che $a_n \geq m$ per ogni *n*,
- *Limitata* se esiste un numero K tale che $|a_n| \leq K$.

Vediamo alcuni esempi: $a_n = \frac{1}{n^2}$ è limitata inferiormente e superiormente, $\begin{cases} a_{2n-1} = \frac{1}{n} \\ a_{2n} = n^2 \end{cases}$ lo è inferiormente, ma non superiormente, $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^2-1}$ è limitata, $a_n = (-1)^n \frac{n^3+1}{n^2-1}$ non è limitata inferiormente, né superiormente.

In generale, come si stabilisce se una successione è limitata, inferiormente e/o superiormente, oppure no? Un buon metodo è rappresentato dalla scrittura dei primi termini della successione e dal valore di questi cercare di "intuire" l'andamento generale della successione.

Tuttavia, l'esame dei primi termini di una successione potrebbe essere fuorviante. Introduciamo un modo sintetico per indicare quelle proprietà che risultano vere da un certo indice in poi. Diremo che una proprietà P_n è vera *definitivamente* se vale uno dei seguenti fatti equivalenti:

1. Esiste un intero n_0 tale che P_n è vera per ogni $n > n_0$,
2. I numeri naturali che non verificano P_n sono in numero finito.

Esercizi

1. Verificare che la successione $a_n = (-\frac{1}{2})^n$ è limitata e dotata di minimo e massimo.
2. Dire se le seguenti successioni sono limitate (*n* intero e maggiore o uguale a 1):
   a) $\frac{n!}{n^n}$; b) $\frac{\sin(n)}{n}$; c) $n^2(\sin(\frac{\pi}{2}))^2$; d) $\sqrt{n^2+1} - n$; e) $(-1)^n(\frac{2}{3})^n$; f) $(-1)^n(\frac{3}{2})^n$

3. Verificare che le disuguaglianze seguenti sono definitivamente soddisfatte:
   a) $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{n-2}{n}$; b) $\sqrt[3]{n-2n^2} < -10$.
4. Verificare che per $a \in (0,1)$ tutti i termini della successione
   $a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n - a_n^3, \quad n = 2,3,..$ appartengono a (0,1).
5. Determinare per quale valore di α la successione $a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2, \quad n = 1,2,..$ è definitivamente uguale a 2.

8.2 Limiti di successioni

Definizione di limite infinito

La successione di numeri reali a_n tende a $+\infty$ se, qualunque sia il numero *m*, esiste un intero *r* tale che per ogni $n \geq r$ si abbia

$$a_n \geq m .$$

In questo caso si usa la notazione

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty .$$

Esempio. Se $b > 1$, allora $\lim_{n\to\infty} b^n = +\infty$.

Dimostrazione. Poniamo $b = 1 + x$ ed applichiamo la disuguaglianza di Bernoulli:

$b^n = (1+x)^n \geq 1 + nx \geq m$ non appena $n \geq \frac{m-1}{x}$. Più precisamente, non appena $n \geq \left[\frac{m-1}{x}\right] + 1$.

Una definizione che possiamo aspettarci è la seguente.

La successione di numeri reali a_n tende a $-\infty$ se, qualunque sia il numero *m*, esiste un intero *r* tale che per ogni $n \geq r$ si abbia

$$a_n \leq m .$$

In questo caso si usa la notazione

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty .$$

Esercizio

Applicare le definizioni di cui sopra ai seguenti limiti di successioni:

$$a)\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+2}, \quad b)\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n}+1}, \quad c)\lim_{n\to\infty}(n^2-n), \quad d)\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2-1}$$

Definizione di limite finito

Una successione si dice *convergente* a un numero *l* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero naturale r tale che

$$|a_n - l| < \varepsilon \text{ per ogni } n \geq r .$$

Il numero *l* si dice *limite* della successione a_n per $n \to \infty$ e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l .$$

In sostanza, questa definizione ci dice che da un certo punto in poi (r), tutti i termini della successione risultano compresi nell'intervallo $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$.

Esempio.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Dalla definizione di limite si ha che $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ non appena $n > \frac{1}{\varepsilon}$; prenderemo come r la parte intera di $\frac{1}{\varepsilon}$ più uno. Di conseguenza, per ogni $n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ i termini della successione cadranno tutti nell'intervallo $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$.

In generale, una successione a_n tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ si dice *infinitesima.*

Esercizio
Verificare con la definizione i seguenti limiti di successioni:

$$a)\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2}=1,\quad b)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1,\quad c)\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}=0,\quad d)\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^2+2}}=0\quad .$$

8.3 Teoremi fondamentali sui limiti di successioni

Teorema 2 (dell'unicità del limite). *Se esiste il* $\lim_{n\to\infty} a_n = L > 0$, *allora questo è unico.*
Dimostrazione. Per assurdo, siano $L_1 \neq L_2$ due possibili valori per il limite della successione. Nella definizione di limite è possibile, per l'arbitrarietà di scelta di $\varepsilon > 0$, considerare $0 < \varepsilon < \frac{|L_2 - L_1|}{2}$: da questo segue che da un certo *n* in poi, ogni termine della successione dovrebbe appartenere ad ognuno degli intervalli $(L_1 - \varepsilon; L_1 + \varepsilon)$ e $(L_2 - \varepsilon; L_2 + \varepsilon)$, disgiunti per la scelta di $0 < \varepsilon < \frac{|L_2 - L_1|}{2}$.
Teorema 3 (della permanenza del segno). *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = L > 0$, *allora definitivamente risulta* $a_n > 0$.
Dimostrazione. Dalla $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ prendendo $\varepsilon = \frac{L}{2}$ si ha $0 < \frac{L}{2} < a_n < L + \varepsilon$ c.v.d.
Si enunciano, infine, le seguenti regole per il calcolo dei limiti.

Teorema 4 (dei due carabinieri). *Se* $a_n \le b_n \le c_n$ *definitivamente, e se* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, *allora* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.
Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, dalle ipotesi di convergenza delle serie "carabiniere" si scrivono le seguenti disuguaglianze: $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon;\quad L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$ da cui segue

$$L - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < L + \varepsilon \Rightarrow \quad |b_n - L| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = L \text{ c.v.d.}$$

Teorema 5 (operazioni algebriche con i limiti) *Siano* $a_n; b_n$ *due successioni convergenti, rispettivamente ad a e b. Allora:*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$. In particolare $\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -a$.
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = a/b$ *se* $b \neq 0$. In particolare $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{a}$.
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$.

La dimostrazione di questi risultati è lasciata per esercizio.
Un confronto tra potenze ed esponenziali
Vogliamo confrontare la successione $a_n = n^2$, con la successione $a_n = 2^n$. Da un confronto dei primi termini, si osserva che quelli della seconda successione superano definitivamente quelli della prima. Esiste, infatti, un n_0 tale che $2^{n_0} > n_0^2$. Per induzione risulta

$2^n > n^2 \Rightarrow 2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > n^2 \cdot 2 = n^2 + n^2 > n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$, non appena $n^2 > 2n + 1$.

8.4 Calcolo per esteso di alcuni limiti di successioni

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=\begin{cases}+\infty & \alpha<0\\ 1 & \alpha=0\\ 0 & \alpha>0\end{cases}$$

2. $$\lim_{n\to\infty}a^{n}=\begin{cases}+\infty & se \quad a>1\\ 1 & se \quad a=1\\ 0 & se \quad 0<a<1\end{cases}$$

Dimostrazione.
Se $a>1\Rightarrow a=1+k,\quad k>0,\Rightarrow a^{n}=(1+k)^{n}\geq 1+nk\to\infty$.
Se $0<a<1\Rightarrow a=\dfrac{1}{1+k}\Rightarrow a^{n}=\dfrac{1}{(1+k)^{n}}\leq\dfrac{1}{1+nk}\leq\dfrac{1}{nk}\to 0$. C.v.d.
Esempio. Somma di una progressione geometrica di ragione $0<1<q$.
Dalla $S_n=\sum_{k=0}^{n}q^{n}=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}=\dfrac{1}{1-q}$.
La conoscenza della somma di una progressione geometrica permette di esprimere i numeri razionali in questione.
Esempio. Sia *x* il numero decimale periodico misto $x=6,34\overline{58}$. Si provi che
$x=6,34\overline{58}=\dfrac{63458-634}{9900}$. (*Suggerimento:* $6,34\overline{58}=\dfrac{634}{100}+58\times10^{-4}+58\times10^{-6}+58\times10^{-8}+\ldots$)

$$6,34\overline{58}=\frac{634}{100}+58\times10^{-4}+58\times10^{-6}+58\times10^{-8}+\ldots=$$

$$\frac{634}{100}+58\cdot\left(\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{2n}\right)=\frac{634}{100}+58\cdot\left(\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^{n}\right)=\frac{634}{100}+58\cdot\frac{1}{10}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}-1-\frac{1}{100}\right)=$$

$$\frac{634}{100}+58\cdot\left(\frac{100}{99}-\frac{101}{100}\right)=\frac{634\cdot 99+58}{9900}=\frac{63400-634+58}{9900}=\frac{63458-634}{9900}$$

3. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=0$

   Razionalizzando risulta $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\to 0$.

4. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{n}+3^{n}}=3$

   Risulta $3<3\sqrt[n]{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}}<3\sqrt[n]{2}$. La tesi segue per applicazione del teorema dei due carabinieri.

5. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} - 2n = -\infty$

Il passaggio al limite diretto conduce ad una forma di indecisione del tipo $\infty - \infty$.

Si procede raccogliendo il termine in *n* di grado massimo: $n(\frac{\sqrt{n}}{n} - 2) \to \infty(0-2) = -\infty$.

6. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n+3} = +\infty$.

Risulta $\frac{3n^2+1}{2n+3} = \frac{n^2(3+\frac{1}{n^2})}{n(2+\frac{3}{n})} \to \frac{+\infty(3+0)}{2+0} = +\infty$

7. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+9} - \sqrt{n^4+1}}{n^2+2} = -1$.

Razionalizzando otteniamo $\frac{\sqrt{n^3+9} - \sqrt{n^4+1}}{n^2+2} = \frac{-n^4+n^3+8}{(n^2+2)\left(\sqrt{n^3+9} + \sqrt{n^4-1}\right)}$. Ora,

raccogliendo i termini in *n* di grado massimo a numeratore e denominatore, facendo attenzione a quelli presenti sotto radice, si giunge all'espressione

$$\frac{\sqrt{n^3+9} - \sqrt{n^4+1}}{n^2+2} = \frac{-n^4+n^3+8}{(n^2+2)\left(\sqrt{n^3+9} + \sqrt{n^4-1}\right)} = \frac{n^4(-1+\frac{n^3}{n^4}+\frac{8}{n^4})}{(n^2+2)(\sqrt{n^3(1+\frac{9}{n^3})} + \sqrt{n^4(1-\frac{1}{n^4})})}.$$

$$\cong \frac{n^4(-1)}{n^2 \cdot (n^{\frac{3}{2}} + n^2)} = \frac{n^4(-1)}{n^2 \cdot n^2(\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2}+1)} \to -1$$

8. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!} = 0$

Semplicemente: $\frac{n!}{(n+1)!-n!} = \frac{n!}{(n+1)\cdot n! - n!} = \frac{n!}{n!((n+1)-1)} = \frac{1}{n} \to 0$.

9. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n\sin n}{n^2+1} = 1$

Applicando il teorema dei due carabinieri si ha:

$$1 \leftarrow \frac{n^2-n}{n^2+1} \le \frac{n^2+n\sin n}{n^2+1} \le \frac{n^2+n}{n^2+1} \to 1$$

Esercizi

1. Verificare che la successione $a_n = (-\frac{1}{2})^n$ è limitata e dotata di minimo e massimo.
2. Dire se le seguenti successioni sono limitate (*n* intero e maggiore o uguale a 1):

   a) $\frac{n!}{n^n}$; b) $\frac{\sin(n)}{n}$; c) $\sqrt{n^2+1} - n$; d) $(-1)^n(\frac{2}{3})^n$; e) $(-1)^n(\frac{3}{2})^n$

3. Verificare che le disuguaglianze seguenti sono definitivamente soddisfatte:
   a) $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{n-2}{n}$; b) $\sqrt[3]{n-2n^2} < -10$.
4. Verificare che per $a \in (0,1)$ tutti i termini della successione
   $a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n - a_n^3, \quad n = 2,3,..$ appartengono a (0,1).
5. Determinare per quale valore di α la successione $a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2, \quad n = 1,2,..$ è definitivamente uguale a 2.

6. Calcolare il seguente limite di successione:
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n^2-1}}$$

7. Dimostrare, applicando la definizione di limite, che:
   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2}{3n^2+n+1} = -\frac{1}{3}$;
   b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^3-1} = 2$;
   c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{16n-2}{n}} = 4$.
8. Si dimostri che se una successione di numeri positivi è tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, allora $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 0$ e viceversa.
9. Un'urna contiene inizialmente palline rosse e bianche. Vengono aggiunte successivamente palline rosse e si indica con r_n e b_n la probabilità di estrarre rispettivamente una pallina rossa o una pallina bianca dopo aver aggiunto *n* palline rosse. Si studi il comportamento delle due successioni. E se aggiungessimo due palline rosse e una bianca ogni volta?

10. Calcolare il seguente limite: $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+4+...+2^{n+1}}{2^n}$.

11. Consideriamo il fascio di circonferenze $C_n : x^2 + y^2 - 2nx = 0$ e siano P_n i punti di ordinata negativa dati dall'intersezione della tangente a C_n nel punto di coordinate $(2n,0)$ con C_{n+1}.

    - Si determini l'equazione della curva a cui appartengono tutti i P_n;
    - esprimere l'ordinata y_{n+1} del punto P_{n+1} in funzione dell'ascissa y_n di P_n;
    - esprimere il termine generale della successione y_n;
    - calcolare il $\lim_{n\to\infty}(y_{n+1} - y_n)$.

12. Data la successione $a_n = \frac{1}{2n(n-1)}$ si determinino due numeri reali *r* e *s* in modo tale che risulti $a_n = \frac{r}{2n} + \frac{s}{n-1}$. Si trovi inoltre un'espressione per la somma $S_n = a_1 + ... + a_n$, e si calcoli il $\lim_{n\to\infty} S_n$.

13. Una successione x_n ha la proprietà che $x_{n+1} - x_n \geq 1$ per ogni valore dell'indice *n*. Si calcoli, se esiste, il $\lim_{n\to\infty} x_n$.

14. Indicata con a_n la *successione di Fibonacci* $\begin{cases} a_0 = 0; & a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}; & n > 1 \end{cases}$, si dimostri che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

15. Data la parabola di equazione $y = 4x - x^2$, sia $y = nx$, con *n* intero naturale, un fascio di rette che la intersecano nei punti P_n diversi dall'origine.

    - Si determinino in funzione di *n* le aree S_n dei triangoli OP_nP_{n+1};
    - Si calcoli il $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n}$.

16. Un parallelepipedo rettangolo ha dimensioni *a, b, c* rispetto ad una determinata unità di misura. Si operano successive modifiche al parallelepipedo: ogni volta il lato *a* viene dimezzato, mentre i lati *b e c* vengono aumentati di 10 unità. Se V_0 è il volume iniziale e V_n quello ottenuto dopo *n* modifiche:

    - a) Si calcoli il $\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{V_0}$;
    - b) Si calcoli il $\lim_{n\to\infty} \frac{V_{n+1}}{V_n}$.

17. In un'azienda, se un certo dipendente è presente al lavoro, la probabilità che il giorno successivo sia presente è ½, mentre se è assente la probabilità che il giorno successivo sia presente è ¾. Nell'ipotesi che il primo giorno (giorno "0") sia presente, indicata con p_n la probabilità che sia presente il giorno *n*-esimo, si studi il comportamento della successione p_n.

18. Calcolare i seguenti limiti di successioni.

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \quad b)\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \quad c)\lim_{n\to\infty} \binom{n}{2}\Big/ n^2 \quad d)\lim_{n\to\infty} \binom{n}{2}\Big/ n \quad e)\lim_{n\to\infty} \binom{n}{3}\Big/ n^3$$

19. Si scriva in forma compatta la somma 1+11+111+1.111+11.111. (*suggerimento:111=1+10+100…).*

20. Calcolare il valore della seguente somma parziale: $\sum_{k=1}^{n} (2k+1)^2$.

21. Dopo aver dimostrato che la lunghezza del lato del poligono regolare di 2^{n+1} lati è legata a quella del poligono di 2^n lati, inscritto nella medesima circonferenza di raggio unitario, dalla relazione $l_{2^{n+1}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(l_{2^n}\right)^2}}$, si calcoli il $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-2}$. (*Suggerimento: il perimetro del poligono regolare di* 2^{n+1} *al crescere del numero dei lati tende alla misura della circonferenza...)*

22. Una pallina viene lasciata cadere dalla quota di un metro. Ad ogni impatto col suolo dissipa una quantità di energia che la fa rimbalzare ad una quota pari a $\frac{7}{8}$ di quella precedente. Si calcoli la distanza complessiva percorsa dalla pallina quando avrà terminato di rimbalzare.

23. Si calcoli il $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2^n+n}$ evidenziando i passaggi che permettono di applicare i teoremi noti e/o i limiti notevoli.

24. Calcolare i seguenti limiti di successioni: $a)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1};\quad b)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2-1}$.

25. Una pallina cade da un'altezza *h* su di un piano orizzontale e rimbalza fino a raggiungere un'altezza qh, dove $0<q<1$ ed è indipendente da *h*. Supponiamo che la pallina compia "infiniti" rimbalzi raggiungendo ogni volta una quota pari al prodotto di *q* per la quota precedente. La pallina finirà di rimbalzare in un tempo finito?

26. Un quadrato unitario è suddiviso in 9 quadrati uguali e il quadrato centrale viene colorato (il mio colore preferito è il verde, fate voi). I rimanenti 8 quadrati sono similmente divisi (ognuno, cioè, viene a sua volta diviso in 9 quadrati) e viene colorato il quadrato centrale di ciascuno di essi. Il procedimento viene iterato infinite volte. Calcolare l'area complessiva della superficie colorata.

27. Dimostrare che una successione convergente è limitata.

28. All'interno del quadrato di lato 1 è inscritta una circonferenza, all'interno della quale è inscritto un quadrato, all'interno del quale è inscritta una circonferenza, e così via. Si trovi il termine generico della successione delle misure dei lati dei quadrati così ottenuti. Indicata con $d_n=l_n^2-\pi r_n^2$ la differenza tra l'area del quadrato e quella della circonferenza inscritta, sia $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}d_k$, con $d_0=1-\frac{\pi}{4}$. Si calcoli il $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

29. Calcolare i seguenti limiti di successioni: $a)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n};\quad b)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{n-1}$.

30. Verificare con la definizione il seguente limite infinito: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n}-1}$.

31. Dimostrare che, se a_n è *definitivamente* maggiore di b_n, e se $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, allora $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

32. Una successione che tende a più infinito non è limitata superiormente. E' vero il viceversa, cioè che se una successione non è limitata superiormente, allora tende a più infinito?

33. Calcolare i seguenti limiti di successioni:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^4-2n^3+3}{n^4-n^5+1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{n}+1}$

34. Si verifichino con la definizione i seguenti limiti di successioni:

$a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0; b)\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2}\right)=0$.

35. Dimostrare che la successione definita per ricorrenza: $\begin{cases} a_0=2 \\ a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n} \end{cases}$ non ha limite.

36. E' data la famiglia di parabole $y=x^2-nx$. Dopo aver tracciato sullo stesso piano cartesiano i grafici corrispondenti ai valori $n=1,2$:
   a) Si scriva l'equazione della retta t_n, tangente al grafico della parabola corrispondente nel punto A_n di coordinate $(n,0)$.
   b) Si determini l'equazione del luogo geometrico dei punti a cui appartengono i vertici V_n della parabola.
   c) Si indichi con P_n il punto di intersezione della retta t_n con la parabola $y=-x^2$, con A_n il punto di coordinate $(n,0)$, e con H_n la proiezione di P_n sull'asse delle ascisse. Si calcoli il rapporto q tra l'area del triangolo $V_nP_nA_n$, e quella del triangolo $H_nP_nA_n$.
   d) Si calcoli il $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(q)^k$.

37. E' Data la famiglia di parabole $\wp_n$ $y=nx^2-x$. Dopo aver tracciato sullo stesso piano cartesiano i grafici corrispondenti ai valori $n=1,2$:
   a) Per $n>1$, Si determinino i punti P_n,Q_n in cui la retta t_n, tangente al grafico della parabola $y=nx^2-x$ nel vertice V_n, incontra la parabola $y=(n-1)x^2-x$.
   b) Si trovi il punto H_n intersezione delle tangenti alla parabola $y=(n-1)x^2-x$, condotte dai punti P_n,Q_n.
   c) Si calcoli l'area S_n del triangolo $V_{n-1}P_nQ_n$, e l'area S'_n del triangolo $H_nP_nQ_n$.
   d) Si calcoli il $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S'_n}$.

38. In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, è data la famiglia $\wp$ di parabole di equazione $y=nx^2-n^2x$, $n\in N$.
   a) Si determini l'equazione della retta tangente *t* alla parabola della famiglia nel punto di coordinate (0,0), e si indichi con A l'altro punto in cui la generica parabola della famiglia $\wp$ incontra l'asse *x*.
   b) Si determini il punto H, intersezione della parallela *s* a *t* condotta da A, con la perpendicolare *p* a *t* condotta da O. Detta S_T l'area del triangolo OAH, calcolare il $\lim_{n\to+\infty}S_T$.

39. In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, sono date la famiglia $\wp$ di parabole di equazione $y=\frac{4}{n}x^2-\frac{3}{n}$, $n\in N$, e la famiglia $\Im$ di iperboli $y=\frac{1}{nx}$, $n\in N$.
   a) Si determinino i punti d'intersezione tra le curve rappresentanti delle due famiglie.
   b) Si traccino i grafici delle parabole e delle iperboli corrispondenti ai valori $n=1$ e $n=2$.

c) Si dimostri che, al variare di $n \in N$, le rette per $P_n\left(-\frac{1}{2},-\frac{2}{n}\right)$ e $Q_n\left(1,\frac{1}{n}\right)$ intersecano l'asse delle ascisse nello stesso punto, $R\left(\frac{1}{2},0\right)$.

d) Si determini l'area del triangolo $P_{n+1}Q_nR$, e si calcoli il $\lim_{n\to\infty}\frac{Area(P_{n+1}Q_nR)}{Area(P_{n+1}Q_{n+1}Q_n)}$.

Soluzioni

1. Limitata: $-\frac{1}{2} \le a_n \le 1$.
2. $a)0 \le a_n \le 1; \quad b)-1 < a_n < 1; \quad c)a_n \le 1; \quad -\frac{2}{3} \le a_n \le 1; \quad e)a_n \le -\frac{3}{2} \vee a_n \ge 1$.
3. $a = n > 4; \quad b)n > 46$.
4. *Si dimostra che la successione è a termini positivi ed è decrescente.*
5. $\alpha = 2 \vee \alpha = -1$.
6. 1.
9. $r_n = \frac{n+R}{n+R+B} \to 1 \quad b_n = \frac{B}{n+R+B} \to 0$, $r_n = \frac{2n+R}{3n+R+B} \to \frac{2}{3} \quad b_n = \frac{n+B}{3n+R+B} \to \frac{1}{3}$.
10. 4.
11. $P_n = \left(2n;-2\sqrt{n}\right)$; $y = -\sqrt{2x}$; $y_{n+1} = -\sqrt{1+y_n^2}$; $y_n = -2\sqrt{n}$; 0.
12. $a_n = \frac{-1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)}$; $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$.
13. *Scrivere le prime n diseguaglianze e sommare membro a membro* $x_n \ge x_0 + n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
14. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = +\infty$.
15. $S_n = \frac{|n-3|\sqrt{n^4-8n^3+17n^2-8n+16}}{2\sqrt{n^2+1}}; \quad 1$.
16. $V_n = \frac{a}{2^n}(b+10n)(c+10n) \quad a)0; \quad b)\frac{1}{2}$.
17. $\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{3}{4}(1-p_n) = -\frac{p_n}{4} + \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow p_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{5} = 0,6$.
18. $a)\ 0 \quad b)\frac{1}{2} \quad c)\frac{1}{2} \quad d)+\infty \quad e)\frac{1}{6}$.
19. $\sum_{k=1}^{5}[6-k]10^{k-1}$.
20. $\frac{n}{3}\left[4n^2+12n+1\right]$.

21. $l_{2^n}=\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-2}}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-2}=\lim_{n\to\infty}\left(2-l_{2^n}^2\right)=2$.

22. $15m$.

23. $0\leftarrow \frac{n^2}{2\cdot 2^n}\le \frac{n^2+1}{2^n+n}\le \frac{2n^2}{2^n}\to 0$.

24.
$$a)\lim_{n\to\infty}\frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cos(n\pi)}{n^2\left(1+n^{-2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n\left(1+n^{-2}\right)}=0;$$
$$b)\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(1+n^{-1}\right)}+1=+\infty$$

25. Utilizziamo la legge oraria del moto uniformemente accelerato $s=h-\frac{1}{2}gt^2$ per calcolare il "tempo di volo" relativo ad ogni rimbalzo. La pallina impiega inizialmente un tempo $t_0=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ per giungere a terra. A questo punto rimbalza (urto perfettamente elastico…) , raggiunge la quota *qh* e ricade di nuovo a terra in un tempo $t_1=2\sqrt{\frac{2qh}{g}}$. Rimbalza nuovamente e raggiunge la nuova quota *q(qh)* e ritorna a terra in un tempo $t_2=2\sqrt{\frac{2q^2h}{g}}$. Iterando il procedimento si ha che il tempo tra un rimbalzo ed il successivo è $t_n=2\sqrt{\frac{2q^nh}{g}}=2\sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\left(\sqrt{q}\right)^n=2t_0\left(\sqrt{q}\right)^n$. Il tempo complessivo sarà quindi $T=t_0+\sum_{n=1}^{\infty}t_n=t_0+\sum_{n=1}^{\infty}2t_0\left(\sqrt{q}\right)^n=t_0\left(1+2\left(\frac{1}{1-\sqrt{q}}-1\right)\right)=t_0\left(1+2\frac{\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}\right)=t_0\left(\frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}\right)$.
Conclusione: pur effettuando infiniti rimbalzi la pallina cessa di rimbalzare dopo un tempo finito.

26. Innanzitutto, indichiamo con S_n l'area colorata al passo *n*-esimo:
$S_1=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $S_2=S_1+8\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{3^2}+\frac{2^3}{3^4}$, $S_3=S_2+64\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^2=\frac{1}{3^2}+\frac{2^3}{3^4}+\frac{2^6}{3^6}$, in generale
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{3(k-1)}}{3^{2k}}=S_n=\frac{1}{8}\left(\frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{8}{9}}-1\right)\Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

27. Sia $L=\lim_{n\to\infty}a_n$. Posto, ad esempio, $\varepsilon=1$, esiste in corrispondenza un n_0 tale che $|a_n-L|<1$ per ogni $n>n_0$. Quindi $|a_n|=|a_n-L+L|<|a_n-L|+|L|<1+|L|$. C.v.d.

28. $r_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n; l_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\Rightarrow d_n=l_n^2-\pi r_n^2=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{2^n}; S_n=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{1-2^{-(n+1)}}{1-2^{-1}}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_n=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

29. $a)\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n}\Rightarrow 0\le\frac{1-\cos n\pi}{n}\le\frac{1}{n}\to 0;\quad b)\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{n-1}=\lim_{n\to\infty}-\frac{(1-n)(1+n)}{1-n}=-\infty$

30. $\dfrac{n}{\sqrt{n}-1} \geq m \Rightarrow \dfrac{n-m\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} \geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} \sqrt{n} \geq \dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2} \\ \sqrt{n} \leq \dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{2} \end{matrix} \Rightarrow n_0 = \left[\left(\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}\right)^2\right]+1$

31. a_n è *definitivamente* maggiore di b_n: $\exists n_1 \mid \forall n \geq n_1 \Rightarrow a_n \geq b_n$, inoltre $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty : \forall m > 0 \exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \Rightarrow b_m \geq m$. Quindi, se $n \geq \max\{n_1, n_0\} \Rightarrow a_n \geq b_n \geq m \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

32. No. Ad esempio, la successione $a_n = (-1)^n n$ non è limitata superiormente, tuttavia non esiste il limite per *n* tendente a infinito.

33. a) $a)0; b)0$

34.

$a): \dfrac{1}{\ln n} > 0 \forall n \geq 2 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{\ln n}\right| = \dfrac{1}{\ln n} \Rightarrow \dfrac{1}{\ln n} < \varepsilon \Rightarrow \dfrac{1-\varepsilon \ln n}{\ln n} < 0 \Rightarrow \ln n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > n_0 := \left[e^{\frac{1}{\varepsilon}}\right]+1$

$b): (n+3) > (n-2) \forall n \Rightarrow \left|\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2}\right| < \varepsilon = \sqrt{n+3}-\sqrt{n-2} < \varepsilon \Rightarrow n+3 < n-2+2\varepsilon\sqrt{n-2}+\varepsilon^2 \Rightarrow$

$2\varepsilon\sqrt{n-2} > 5-\varepsilon^2 \Rightarrow n > n_0 := \left[\left(\dfrac{5-\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^2+2\right]+1$

35. Scriviamo alcuni termini della successione: $a_0 = 2;\quad a_1 = -1;\quad a_2 = \dfrac{1}{2};\quad a_3 = 2;\ ....$ Dall'esame dei primi 4 termini si evince un carattere di *periodicità* della successione: per esempio i termini di indice 3*n* sono tutti uguali a due. Dimostriamo questa affermazione con il principio di induzione:

$a_0 = 2$

$a_{3n} = 2 \Rightarrow a_{3n+1} = \dfrac{1}{1-2} = -1 \Rightarrow a_{3n+2} = \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a_{3n+3} = a_{3(n+1)} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. Di conseguenza infiniti termini sono uguali a due e, con procedimento analogo, si dimostra che infiniti termini sono uguali a -1 e a ½. Non è quindi possibile che infiniti termini della successione, tranne al più un numero finito, si possano "addensare" arbitrariamente vicino ad uno qualsiasi dei tre valori della successione.

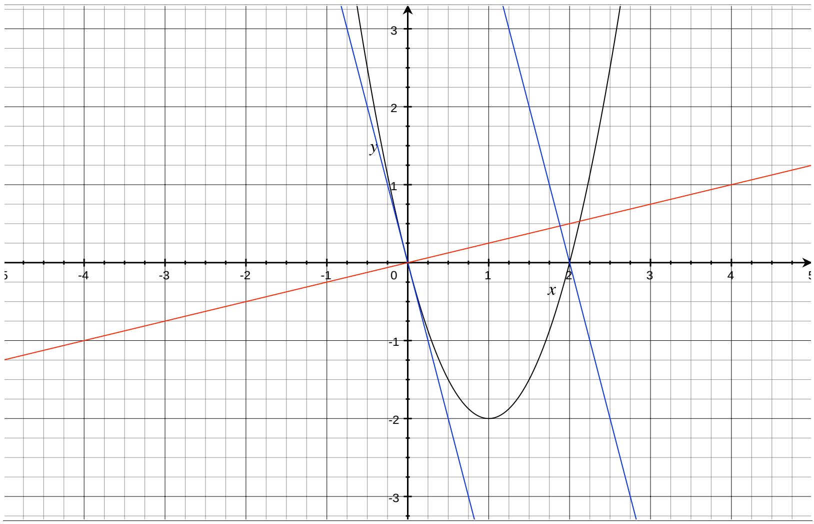
36. a) $y = n(x-n)$; b) $y = -x^2$; c) $q = \dfrac{1}{6-2\sqrt{5}} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}\right)^k = \dfrac{1}{1-\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}} = \dfrac{8}{5-\sqrt{5}}$.

37. a) $P_n\left(\dfrac{\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}(n-1)}, -\dfrac{1}{4n}\right); Q_n\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}(n-1)}, -\dfrac{1}{4n}\right)$ b) $H_n\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}(n-1)}, -\dfrac{n^2+2\sqrt{n}+1}{4n(n-1)^2}\right)$

c) $S_n = \dfrac{1}{8n\sqrt{n}(n-1)^2}$, $S'_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{4n(n-1)^3}$, d) $\dfrac{1}{2}$.

38. $t: y = -n^2 x$. $A(n;0)$

$$s: y=-n^2x+n^3 \quad p: y=\frac{x}{n^2} \quad H\left(\frac{n^5}{1+n^4};\frac{n^3}{1+n^4}\right) \quad S_T=\frac{n^4}{2\left(1+n^4\right)} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_T=\frac{1}{2}$$



39. a) $\begin{cases} y=\dfrac{4}{n}x^2-\dfrac{3}{n} \\ nxy=1 \end{cases} \Rightarrow 0=4x^3-3x-1=(x-1)(2x+1)^2 \Rightarrow \begin{matrix} x_1=1\Rightarrow\left(1,\dfrac{1}{n}\right) \\ x_2=x_3=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{2}{n}\right)\end{matrix}$ c)

$y-\dfrac{1}{n}=\dfrac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{2}}(x-1)\Rightarrow y=\dfrac{2}{n}x-\dfrac{1}{n}\Rightarrow 0=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}\,\forall n$; d)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Area\left(P_{n+1}Q_nR\right)}{Area\left(P_{n+1}Q_{n+1}Q_n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{(3n+1)^2}{9n^2(n+1)^2}}}{2n(n+1)\sqrt{1+\frac{4(3n+1)^2}{9n^2(n+1)^2}}}\cdot\frac{2n(n+1)^2}{3+n}=1.$$

8.5 Approfondimento: alcuni limiti "utili"

Iniziamo con:

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

Dimostrazione. Partiamo dal fatto che $\sqrt[n]{n}\geq 1$ per ogni $n\in IN$ (dimostrare per induzione).
Possiamo porre $\sqrt[n]{n}=1+h_n$ e scrivere $n=(1+h_n)^n\geq 1+nh_n+\dfrac{n(n-1)}{2}h_n^2$ (la disuguaglianza è stata ottenuta sviluppando i primi tre termini del binomio di Newton). Da questa si ricava

$\frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + nh_n + 1 - n \le 0$. Per esercizio calcolare h_n e concludere che è una quantità infinitesima. Quindi $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

$$2.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty$$

Dimostrazione.

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{n(n-1)...(n-k+1)k!} > \sqrt[n]{(n-k+1)^{n-k}k!} = \frac{\sqrt[n]{(n-k+1)^n}}{\sqrt[n]{(n-k+1)^k}}\sqrt[n]{k!} =$$

$$\frac{(n-k+1)\sqrt[n]{k!}}{\sqrt[n]{(n-k+1)^k}} > \frac{(n-k+1)\sqrt[n]{k!}}{\sqrt[n]{n^k}} \to \frac{+\infty\cdot 1}{1} = \infty$$

$$3.\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$$

Dimostrazione.

$$0 \le \frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)k!}{n\cdot n\cdot ...\cdot n} \le \frac{n\cdot n(1-\frac{1}{n})...n(1-\frac{k-1}{n})k!}{n^{n-k}\cdot n^k} =$$

$$= \frac{n^{n-k}(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{k-1}{n})k!}{n^{n-k}\cdot n^k} \le \frac{1\cdot k!}{n^k} \to 0$$

$$3.\ \lim_{n\to\infty}\frac{p^n}{n} = \infty \qquad p > 1$$

Dimostrazione.

$$\frac{p^n}{n} \ge \frac{(1+h)^n}{n} \ge \frac{\binom{n}{0}h^0 + \binom{n}{1}h^1 + \binom{n}{2}h^2}{n} = \frac{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2}{n} =$$

$$\frac{1}{n} + h + \frac{n-1}{2}h^2 \to \infty$$

$$4.\ \lim_{n\to\infty}\frac{p^n}{n!} = 0 \qquad p \ge 0$$

Dimostrazione.

$$\frac{p^n}{n!} = \frac{p\cdot p\cdot ...\cdot p}{1\cdot 2\cdot ...\cdot p\cdot(p+1)\cdot ...\cdot n} = \frac{p^p\cdot p^{n-p}}{p!\cdot(p+1)\cdot ...\cdot n} \le$$

$$\frac{p^p\cdot p^{n-p}}{p!\cdot(p+1)^{n-p}} = \frac{p^p}{p!}\cdot\left(\frac{p}{p+1}\right)^{n-p} = \frac{p^p}{p!}\left(\frac{p+1}{p}\right)^p\cdot\left(\frac{p}{p+1}\right)^n \to 0$$

8.6 Approfondimento: determinazione "grafica" del limite di particolari successioni definite per ricorrenza

E' data la seguente successione definita per ricorrenza: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 1 \end{cases}$.

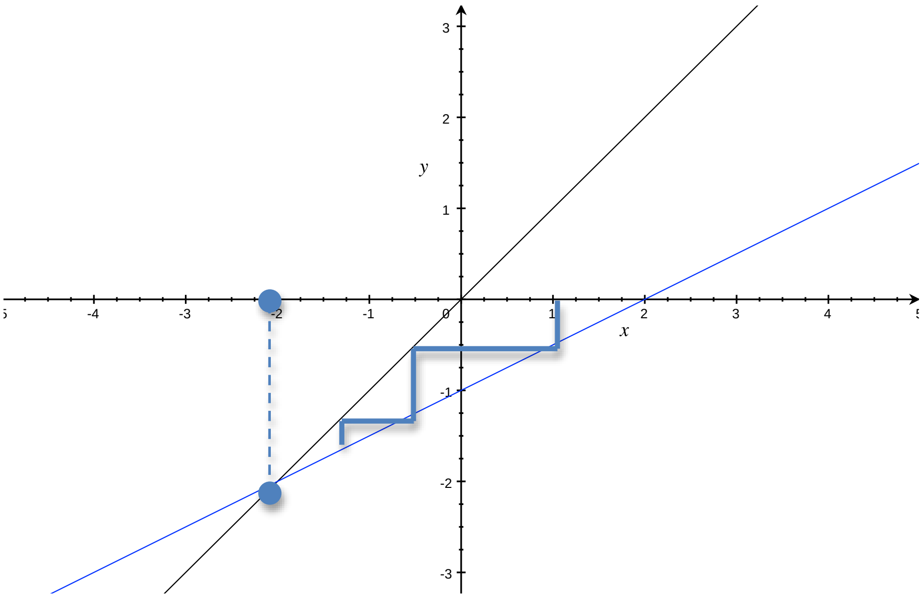
a) Dimostrare, per induzione, che $a_n > -2$;
   - La richiesta nasce dall'esame dei primi termini della successione:
     $a_0 = 1 > -2$
     $a_n > -2 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 1 > -1 - 1 = -2.$

b) Dimostrare che la successione è decrescente (*sfruttare il risultato di cui al punto precedente*);
   - $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}a_n - 1 - a_n = -\frac{1}{2}a_n - 1 < -\frac{1}{2}(-2) - 1 = 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

c) Calcolare il $\lim_{n\to\infty} a_n$. Il limite esiste poiché la successione è monotona.

   Necessariamente sarà: $L = \frac{L}{2} - 1 \Rightarrow L = -2$.

   In virtù di quanto dimostrato ai punti precedenti, è possibile calcolare il limite della successione per via grafica, intendendo la legge di ricorrenza come una "funzione del termine precedente": $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 1$.



d) Determinare il termine generico della successione.

- Esaminando i primi termini della successione osserviamo che il numeratore è somma parziale di una progressione geometrica di ragione 2:
  $\frac{1(\to -2)}{2^0}; \frac{-1(\to -4)}{2}; \frac{-5(\to -8)}{4}; \frac{-13(\to -16)}{8}; \frac{-29(\to -32)}{16}; \ldots\ldots$, per cui

$$a_n = \frac{1 - \sum_{k=1}^{n} 2^k}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - 1\right)}{2^n} = \frac{1 + 1 - 2^{n+1} + 1}{2^n} = -2 + \frac{3}{2^n} \to -2 \text{ per } n \to \infty.$$

8.7 Approfondimento: il numero di Nepero "e"

Studiamo il seguente modello di crescita di una popolazione che, al tempo *t*, conta $p(t)$ individui:

$$p(t_2)-p(t_1)=(t_2-t_1)\,p(t_1).$$

Con questo modello si rappresenta una crescita $\Delta p = p(t_2)-p(t_1)$ *proporzionale* al numero d'individui della popolazione all'istante t_1. Per convenzione, si pone uguale a 1 la costante di proporzionalità, e si prendono per gli estremi dell'intervallo di tempo i valori $t_1=0$ e $t_2=1$. Al fine di rendere il modello più attinente alle rilevazioni sperimentali, si suddivide l'intervallo di tempo in *n* parti, e si applica il modello di crescita ai vari "piccoli intervalli di tempo" $t_{i+1}-t_i=\frac{1}{n}$. In questo modo si ha:

$$p\left(\frac{1}{n}\right)-p(0)=\frac{1}{n}p(0)\Rightarrow p\left(\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)p(0);$$

$$p\left(\frac{2}{n}\right)-p\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}p(1)\Rightarrow p\left(\frac{2}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 p(0);$$

...

$$p(1)-p\left(\frac{n-1}{n}\right)=p\left(\frac{n}{n}\right)-p\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n}p\left(\frac{n-1}{n}\right)\Rightarrow p(1)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n p(0)$$

Con l'obiettivo di prendere intervalli di tempo molto piccoli, è naturale far tendere n a infinito:

$$p(1)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n p(0):=e\cdot p(0).$$

Abbiamo denotato con *e* il limite, per *n* che tende a infinito, della successione $a_n:=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Il *numero di Nepero e* è un numero irrazionale, il cui valore viene approssimato in base alla precisione di calcolo richiesta. Un'approssimazione alla nona cifra decimale è la seguente:

$$e=2,718281828\ldots.$$

E' interessante notare come la successione a_n combini tra loro due tendenze, quella della base a 1, e quella dell'esponente a infinito. Poiché il valore del limite si colloca ad un livello intermedio, dobbiamo considerare 1^∞ come una *forma di indecisione*. Dimostriamo adesso due proprietà della successione in questione.

Proposizione. La successione $a_n:=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è monotòna crescente.

Dimostrazione. Si tratta di dimostrare che $a_n-a_{n-1}>0$, ovvero che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$.

$$a_n - a_{n-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left[\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n - \left(\frac{n-1}{n}\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n - \left(1-\frac{1}{n}\right)\right] > \left[1+n\left(-\frac{1}{n^2}\right) - \left(1-\frac{1}{n}\right)\right] = 0$$

. L'ultima disuguaglianza segue dall'applicazione della disuguaglianza di Bernoulli[1] con $x = -\frac{1}{n^2}$, essendo $-\frac{1}{n^2} > -1$.

Proposizione. La successione $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è limitata.

Dimostrazione. Introduciamo la successione $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Si ha, $\forall n \in N$, $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n$. Se dimostriamo che b_n è una successione strettamente decrescente abbiamo dimostrato la proposizione. Infatti, avremo $2 = a_1 \le a_n < b_n < b_1 = 4$. La prova della decrescenza di b_n è svolta con l'obiettivo di applicare la disuguaglianza di Bernoulli, proprio come nella proposizione precedente:

$$b_{n-1} - b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left[\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n - \frac{n+1}{n}\right] = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left[\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n - \frac{n+1}{n}\right] > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left[1+n\left(\frac{1}{n^2-1}\right) - \frac{n+1}{n}\right].$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left[\frac{1}{n\left(n^2-1\right)}\right] > 0$$

Osservazione. La stima contenuta nella dimostrazione della proposizione precedente, $2 = a_1 \le a_n < b_n < b_1 = 4$, può essere migliorata notando che, posto $h := \max\{n, m\}$, si ha $a_n \le a_h < b_h < b_m$, ovvero $a_n < b_m \quad \forall n, m$. In particolare, per $m = 5$ si ha la stima "dall'alto" $a_n < b_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^6 \approx 2,98... < 3$.

In forza di un risultato generale per le successioni, che dimostreremo in seguito, e che afferma *l'esistenza del limite (finito) per ogni successione monotòna (limitata)*, alla luce delle due proposizioni dimostrate, possiamo considerare accettabile il $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

---

1 $(1+nx)^n > 1+nx \quad \forall x > -1$.