

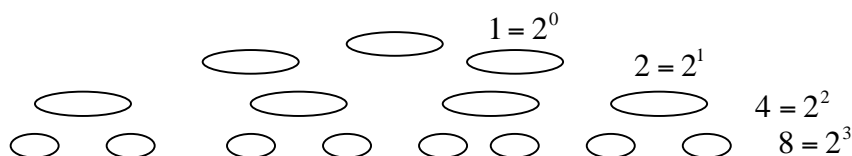
CAPITOLO 9

ESPONENZIALI E LOGARITMI

9.1 La legge esponenziale

Crescita di una popolazione: il caso dei batteri

Vogliamo capire con quale legge cresce una popolazione di batteri. Ricordiamo innanzitutto che i batteri sono organismi unicellulari della lunghezza media di un micron ($1\mu = 10^{-6}m$). Durante il processo di riproduzione ogni batterio ne genera due nuovi, e così via. Si verifica una scissione ogni mezz'ora:

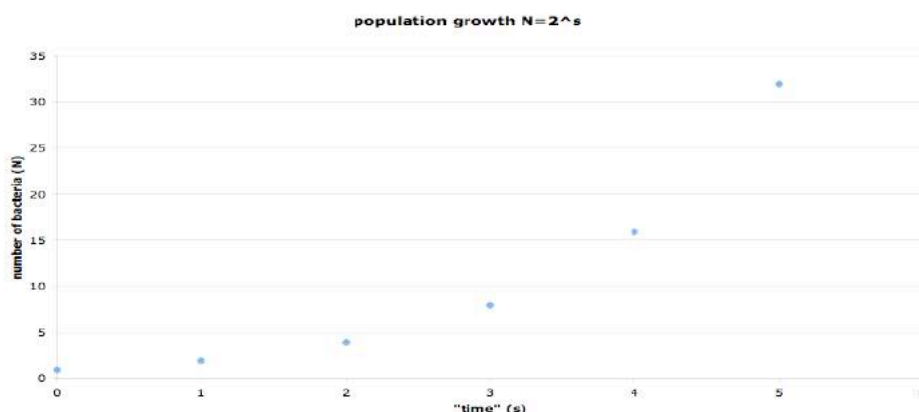


Dall'osservazione dello schema di cui sopra possiamo dedurre che il numero di batteri N è legato al numero di scissioni dalla relazione:

$$N = 2^s.$$

Una legge di questo tipo si dice **legge esponenziale**.

Di seguito riportiamo su un diagramma il numero di batteri ad intervalli di tempo di mezz'ora:



La capitalizzazione dell'interesse composto

Un capitale di dieci milioni di euro è depositato in banca al tasso d'interesse composto annuo del 10%(!). Questo significa che gli interessi vengono calcolati sul totale progressivo al termine di ogni anno secondo lo schema proposto nella seguente tabella.

ANNI

0

TOTALE (MILIONI)

$$C_0 = 10$$

1

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot \frac{10}{100} = C_0(1 + 0,1)$$

2

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot \frac{10}{100} = C_0(1 + 0,1)^2$$

3

$$C_3 = C_2 + C_2 \cdot \frac{10}{100} = C_0(1 + 0,1)^3$$

n

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-1} \cdot \frac{10}{100} = C_0(1 + 0,1)^n$$

Possiamo formalizzare la legge di capitalizzazione dell'interesse composto mediante la formula:

$$C_n = C_0(1+r)^n.$$

Verso le equazioni esponenziali: calcolo del tempo necessario per raddoppiare il capitale iniziale

Vogliamo sapere dopo quanti anni il capitale è diventato doppio di quello di partenza. Per questo scopo dobbiamo porre $C_n = 2C_0$ nella relazione $C_n = C_0(1+r)^n$ ottenendo la relazione (indipendente dall'entità del capitale iniziale):

$$2C_0 = C_n = C_0(1+r)^n \Rightarrow (1+r)^n = 2.$$

Il valore di n tale che

$$(1+r)^n = 2,$$

è la soluzione del nostro problema. In generale, si chiama **equazione esponenziale** un'espressione come $(1+r)^n = 2$, in cui l'incognita si trova all'esponente di una potenza.

La "capitalizzazione continua" ed il numero di Nepero

Consideriamo i casi in cui gli interessi vengono capitalizzati a periodi inferiori all'anno (mesi, settimane, giorni...). La regola generale si ottiene a partire dalla relazione $C_n = C_0(1+r)^n$ dividendo il tasso di interesse annuo per il numero di periodi contenuti nell'anno, e moltiplicando l'esponente per lo stesso numero di periodi. Si hanno le seguenti situazioni con capitalizzazione:

- 1) Mensile: $C_{n \cdot 12} = C_0(1 + \frac{r}{12})^{n \cdot 12}$;
- 2) Settimanale: $C_{n \cdot 52} = C_0(1 + \frac{r}{52})^{n \cdot 52}$;
- 3) Giornaliera: $C_{n \cdot 365} = C_0(1 + \frac{r}{365})^{n \cdot 365}$

Si possono analizzare i dati relativi ai vari modi di capitalizzazione degli interessi utilizzando, per esempio, il foglio elettronico excel e redigendo una tabella come segue.

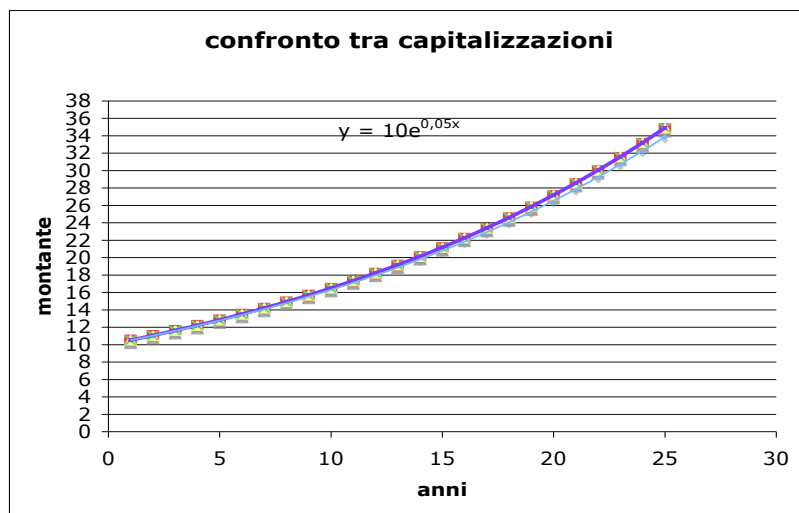
r tasso annuo 0,05

C_0

capitale iniziale 10

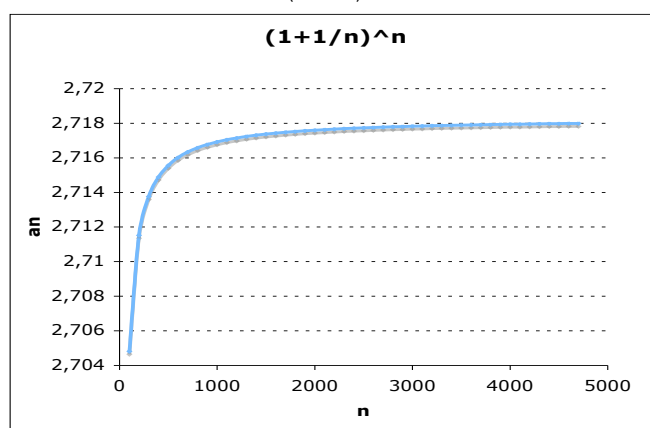
CAPITALIZZAZIONE

	annuale	mensile	settimanale	giornaliera	oraria	ISTANTANEA
1	10,5	10,51161898	10,51245842	10,51267496	10,51270946	10,51271096
2	11,025	11,04941336	11,0511782	11,05163349	11,05170603	11,05170918
3	11,57625	11,61472231	11,61750513	11,61822307	11,61833745	11,61834243
4	12,1550625	12,20895355	12,21285396	12,21386028	12,21402061	12,21402758
5	12,76281563	12,83358679	12,83871195	12,84003432	12,84024501	12,84025417
6	13,40095641	13,49017744	13,49664255	13,49831074	13,49857652	13,49858808
7	14,07100423	14,18036052	14,18828936	14,19033533	14,19066131	14,19067549
8	14,77455444	14,90585468	14,9153802	14,9178383	14,91822995	14,91824698
9	15,51328216	15,66846649	15,67973141	15,68263852	15,68310171	15,68312185
10	16,28894627	16,47009498	16,48325245	16,48664814	16,48718918	16,48721271
11	17,10339358	17,31273629	17,3279506	17,33187731	17,33250297	17,33253018
12	17,95856326	18,19848874	18,21593602	18,22043927	18,2211568	18,221188
13	18,85649142	19,12955796	19,14942699	19,15455558	19,15537276	19,15540829
14	19,79931599	20,10826245	20,1307555	20,13656169	20,13748685	20,13752707
15	20,78928179	21,13703932	21,16237302	21,16891279	21,16995485	21,17000017
16	21,82874588	22,21845037	22,24685664	22,25418996	22,25535847	22,25540928
17	22,92018318	23,35518846	23,38691554	23,39510656	23,39641176	23,39646852
18	24,06619234	24,55008423	24,58539771	24,5945151	24,59596794	24,59603111
19	25,26950195	25,80611313	25,84529712	25,85541432	25,85702649	25,85709659
20	26,53297705	27,12640285	27,16976113	27,18095668	27,18274071	27,18281828



Si osserva dal grafico (e soprattutto dalla “linea di tendenza” determinata dal foglio elettronico), che se gli interessi fossero capitalizzati “con continuità” (ovvero in ogni istante di tempo), la legge di crescita del montante sarebbe una legge esponenziale con una base particolare: il cosiddetto **numero di Nepero**, che rappresenta il valore (numero irrazionale) **e = 2,71828...** a cui tende (senza mai raggiungerlo) la successione:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$



all’aumentare indefinito di t , dove, nel nostro caso, tale valore rappresenta il numero di periodi in un anno (12 mesi, 52 settimane, 365 giorni, ecc.) nella relazione

$$C_{nt} = C_0 \left(1 + \frac{r}{t}\right)^{nt} = C_0 \left[\left(1 + \frac{r}{t}\right)^{\frac{t}{r}}\right]^{nr} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} C_0 e^{nr}.$$

9.2 Le potenze ad esponente reale

Iniziamo ponendoci una domanda: qual è il significato di $3^{\sqrt{2}}$? E’ possibile moltiplicare 3 per se stesso $\sqrt{2}$ volte? E’ chiaro che si tratta di una provocazione. Per dare un significato a questo numero è doveroso introdurre il concetto di **potenza ad esponente razionale**:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a \geq 0, \quad \frac{m}{n} > 0$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}, \quad a > 0, \quad \frac{m}{n} > 0$$

L’idea di base per dare un significato al numero $3^{\sqrt{2}}$ è sostanzialmente quella su cui poggia la “definizione costruttiva di un numero reale”, secondo cui ogni numero reale *può essere approssimato con*

una successione di numeri razionali. Per esempio, $\sqrt{2}$ può essere “racchiuso” da due successioni di numeri razionali i cui termini differiscono sempre meno da esso. Nella tabella sono rappresentati alcuni termini di queste successioni, ottenuti con il cosiddetto metodo di bisezione.

$a_n < \sqrt{2}$	$b_n > \sqrt{2}$	Valore medio
1	2	1,5
1	1,5	1,25
1,25	1,5	1,375
1,375	1,5	1,4375
1,375	1,4375	1,40625
1,40625	1,4375	1,421875
1,40625	1,421875	1,4140625
1,4140625	1,421875	1,41796875
1,4140625	1,41796875	1,416015625
1,4140625	1,416015625	1,415039063
1,4140625	1,415039063	1,414550781
1,4140625	1,414550781	1,414306641
1,4140625	1,414306641	1,41418457
1,41418457	1,414306641	1,414245605
1,41418457	1,414245605	1,414215088
1,41418457	1,414215088	1,414199829
1,414199829	1,414215088	1,414207458
1,414207458	1,414215088	1,414211273
1,414211273	1,414215088	1,414213181
1,414213181	1,414215088	1,414214134
1,414213181	1,414214134	1,414213657
1,414213181	1,414213657	1,414213419

Rimandiamo ad una trattazione più estesa del “sistema dei numeri reali” per i dettagli con cui queste successioni approssimanti vengono scelte; per adesso definiamo la **potenza**

$$a^x$$

di un numero reale $0 < a < 1$, $a > 1$ con esponente reale $x > 0$, con le seguenti regole:

1. $1^x = 1 \quad \forall x \in R$
2. $0^x = 0 \quad \forall x > 0, x \in R$
3. $a^0 = 1 \quad \forall a > 0, a \in R$

NON DEFINIAMO:

$$0^x, \quad x \leq 0$$

$$a^x, \quad a < 0$$

Infatti:

$$-125 = -5^3 = (-5)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-5)^6} = \sqrt{5^6} = 125$$

9.3 La funzione esponenziale

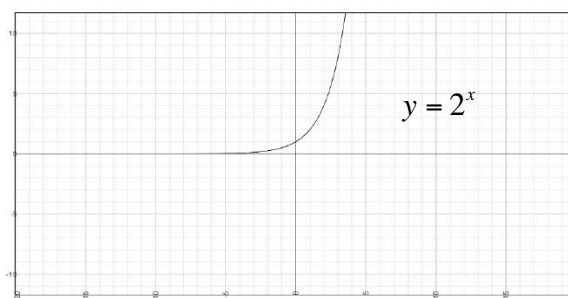
Si chiama *esponenziale* ogni funzione del tipo $y = f(x) = a^x$ con $a \in R^+$.

$$f: R \rightarrow R^+$$

$$x \mapsto a^x$$

La funzione esponenziale è definita su tutto l'insieme dei numeri reali ed ha come immagine l'insieme $0 < y < +\infty$. Ci sono due possibili andamenti grafici della funzione esponenziale, a seconda che la base sia compresa tra 0 e 1, oppure maggiore di 1. I grafici seguenti evidenziano queste due possibilità.

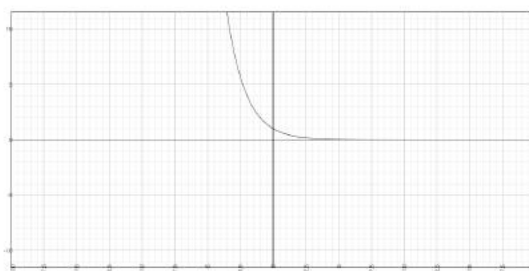
1. $a > 1$



Si osserva immediatamente che la funzione esponenziale con base maggiore di 1 è **monotona crescente**:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2}$$

2. $0 < a < 1$



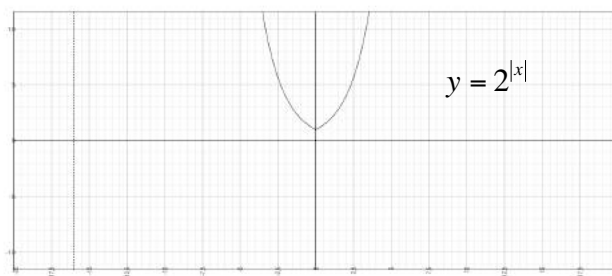
In questo caso la funzione esponenziale è **monotona decrescente**:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}.$$

Esercizio

Si tracci il grafico della funzione $f(x) = 2^{|x|}$

In generale: $f(x) = a^{|x|} = \begin{cases} a^x & x > 0 \\ \frac{1}{a^x} & x < 0 \end{cases}$



Esercizio

Si tracci il grafico della funzione $f(x) = k + a^{x+h}$, al variare dei valori di k e h .

Esercizio Si trovi il campo di esistenza della funzione $f(x) = (\sqrt{2+x})^{\frac{1}{|x|-1}}$.

- La funzione data è del tipo $f(x)^{g(x)}$, quindi occorre che

$$\begin{cases} 2+x > 0 \\ |x|-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < -1 \vee -1 < x < 1 \vee x > 1.$$

9.4 Le equazioni esponenziali

Un'equazione del tipo

$$a^x = b, \quad a > 0,$$

dove l'incognita x si trova all'esponente di una potenza, è detta **equazione esponenziale**.

Per esempio, risolvere l'equazione $3^x = 729$ significa trovare il valore di x tale che $3^x = 729 \Rightarrow x = 6$.

Un'equazione esponenziale può essere:

1. Impossibile

$$a) \quad b \leq 0$$

$$b) \quad a = 1 \wedge b \neq 1$$

2. Indeterminata

$$a = 1 \wedge b = 1$$

3. Determinata

$$a > 0 \wedge b > 0 \wedge a \neq 1$$

Nell'ultimo caso la funzione esponenziale ammette **una sola soluzione**. Le equazioni esponenziali si risolvono, quando è possibile, **scrivendo a e b come potenze della stessa base ed uguagliando gli esponenti**. La giustificazione di questo passaggio sta nella proprietà di monotonia della funzione esponenziale.

Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni:

$$1. \quad 3^x - 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}} = 0, \quad 3^x - 3^2 \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{2}{5}}} = 0 \Rightarrow 3^x = 3^2 \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{2}{5}}} = 3^{2 + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}} = 3^{\frac{20+5-4}{10}} = 3^{\frac{21}{10}} \Rightarrow 3^x = 3^{\frac{21}{10}} \Rightarrow x = \frac{21}{10}$$

$$2. \quad 8^{x-1} = \sqrt[3]{2^{x-3}} \quad x = \frac{3}{4},$$

$$3. \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \frac{12}{2^x} + 32 = 0 \quad x = -3; \quad x = -2,$$

$$4. \quad \frac{\sqrt{3 \cdot \sqrt{9^x}}}{81^{x-1}} = 9^{1+2x} \quad x = \frac{1}{3}$$

$$5. \quad \frac{5^x}{5^x + 1} - \frac{1}{25^x - 1} = 1 \quad \emptyset,$$

$$6. \quad \begin{cases} 36 \cdot 6^{x-y} = 6^{2x} \\ 49^x \cdot \sqrt{7^y} = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{8}{3} \end{matrix},$$

$$7. \quad a) 3^{x+1} - \frac{3^x}{9} + 3^x = 35 \quad x = 2,$$

$$b) 9^x + 2 \cdot 3^{x+1} - 27 \geq 0 \quad x \geq 1$$

$$8. \quad (4^{x-1})^{x+1} = 8^{x^2-2} \quad x = 2; \quad x = -2,$$

$$9. \quad a) 2 \cdot 3^x - 9^x = 1 \quad x = 0,$$

$$4^x + 3 \cdot 2^x + 2 > 0 \quad \forall x,$$

$$10. \frac{2^{2x}}{1+2^x} = 1 - \frac{2^x}{2^x+1} \quad x=0.$$

$$11. |3^x - 3| > 6 \quad x > 2$$

$$12. 2^{2x+2} - 3 \cdot 2^x - 1 = 0 \quad x = 0$$

$$13. 7^{\frac{x}{2}} \cdot 7^{-\frac{1}{2}} \cdot 7^3 = \sqrt{7^3 \sqrt{7}} \quad x = -\frac{11}{3}$$

$$14. (3^{2x-1})^x = 81^{\frac{1-x}{2}} \quad x=1; \quad x=-2$$

La legge esponenziale è alla base di molti modelli matematici. Vediamone qualcuno.

La legge del decadimento radioattivo

E' noto dalla fisica che la maggior parte dei nuclei è instabile: essi decadono spontaneamente emettendo delle radiazioni, e trasformandosi in altre sostanze (per esempio l'uranio dopo un certo numero di decadimenti radioattivi si trasforma in piombo). Il decadimento radioattivo è un processo casuale regolato dalle leggi della meccanica quantistica, la cui complessità ci suggerisce di spostare lo studio sul piano statistico, attraverso la *legge del decadimento radioattivo*. Secondo questa legge, se un campione contiene N nuclei, il tasso al quale questi decadono (rapidità di variazione...) $-\frac{\Delta N}{\Delta t}$, è proporzionale ad N , dove il segno meno è rappresentativo del decremento:

$$-\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N.$$

Il numero λ rappresenta la cosiddetta *costante di disintegrazione* ed è caratteristica del tipo di nucleo considerato. Si chiama *tempo di dimezzamento* $T_{\frac{1}{2}}$, quello impiegato dalla metà di un nucleo iniziale

per decadere, cioè $N = \frac{1}{2} N_0$ quando $t = T_{\frac{1}{2}}$. Con la seguente tabella mettiamo in relazione il numero di nuclei con il tempo secondo l'unità di misura del tempo di dimezzamento:

TEMPO (in "tempi di dimezzamento")	NUMERO DI NUCLEI (in N_0)
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
...	...
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Per esempio, se vogliamo conoscere quanti "tempi di dimezzamento" occorrono per ridurre il numero di nuclei ad $1/64$ di quello iniziale, è sufficiente risolvere l'equazione esponenziale

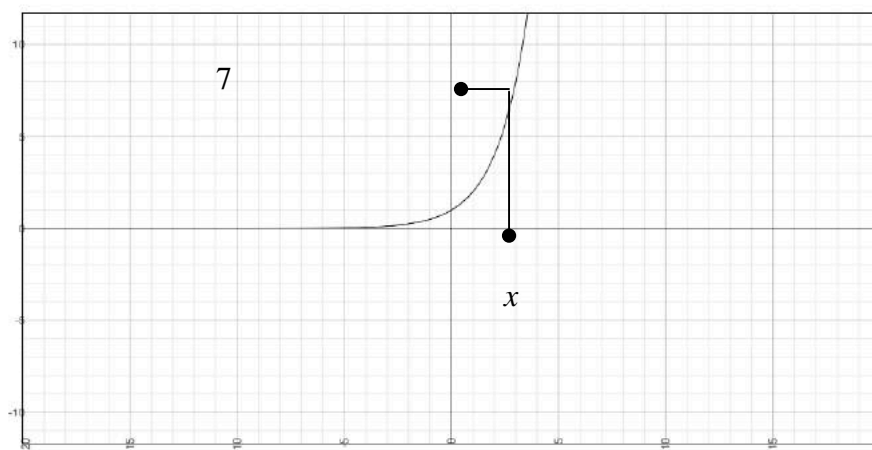
$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{64} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow n = 6.$$

9.5 Verso il concetto di logaritmo

Resta aperto il problema di come si risolve un'equazione esponenziale quando **non** è possibile scrivere tutti i termini come potenze aventi la stessa base; per esempio

$$2^x = 7.$$

Se osserviamo il grafico della funzione ci accorgiamo dell'esistenza della soluzione dell'equazione come **controimmagine di 7 della funzione** $f(x) = 2^x$!



Questo valore x , soluzione dell'equazione $a^x = b$, si chiama il **logaritmo in base a di b** :
 $a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$.

Il logaritmo naturale

Si definisce **logaritmo naturale** il logaritmo in base “ e ”.

Se consideriamo la funzione $y = a^x$, in virtù della sua **crescenza (o decrescenza)** è immediatamente definita la funzione inversa, la cosiddetta **funzione logaritmica**:

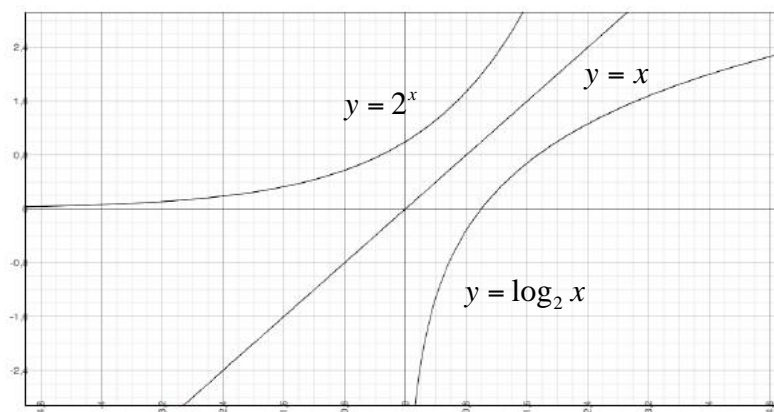
$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$$

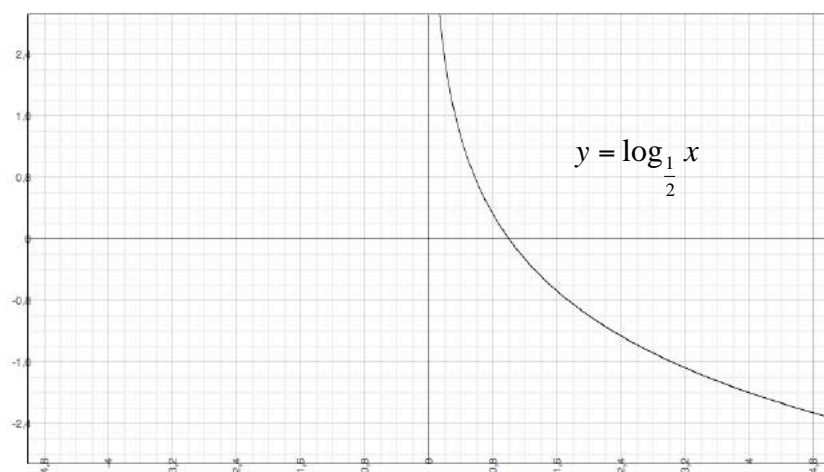
$$y = \log_a x.$$

Il campo di esistenza della funzione logaritmica è R^+ , mentre l'immagine coincide con tutto l'insieme dei numeri reali. In definitiva:

$$\begin{aligned} f: R^+ &\rightarrow R \\ x &\mapsto \log_a x \end{aligned} \quad 0 < a < 1 \vee a > 1$$

I grafici seguenti illustrano quanto detto.





Il logaritmo e la crescita della popolazione degli Stati Uniti d'America

Assumendo come modello di crescita della popolazione la legge esponenziale, otteniamo la cosiddetta **legge malthusiana**:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N.$$

L'espressione della legge esponenziale deve tener conto che all'istante iniziale negli Stati Uniti d'America (1790) ci sono 3.929.000 abitanti:

$$N(t) = 3.929.000 e^{\lambda t}.$$

La determinazione del valore del coefficiente “di crescita” λ avviene osservando che nel 1800 gli abitanti sono 5.308.000, e dunque

$$5.308.000 = 3.929.000 e^{\lambda \cdot 1}.$$

Per calcolare il valore del coefficiente dobbiamo risolvere l'equazione esponenziale

$$e^{\lambda} = \frac{5.308.000}{3.929.000} = 1,350979.$$

Una comune calcolatrice scientifica restituisce il valore (approssimato) $\lambda = \ln(1,350979) = 0,301$. La legge malthusiana di crescita è quindi:

$$N(t) = 3.929.000 e^{0,301t}.$$

Possiamo osservare un sostanziale accordo tra i dati reali e quelli calcolati con la legge trovata fino a prima del 1950. Dopo quella data i valori calcolati si discostano sensibilmente dai dati reali. Per esempio, il valore calcolato della popolazione nel 1950 è

$$N(16) = 3.929.000 e^{0,301 \cdot 16} \approx 485.114.000$$

valore che differisce da quello reale (150.697.000) per più del doppio!

In conclusione, nel caso della popolazione umana la legge esponenziale costituisce un buon modello di crescita solo per (relativamente) brevi intervalli di tempo. Poi non va più bene. Questo fatto, a pensarci bene, ce lo potevamo aspettare: ci sono troppe cause, la storia insegna, che costituiscono un freno alla crescita (guerre, epidemie, eventi di distruzione di massa, ecc.), per non pensare poi alla limitatezza delle risorse su scala planetaria.

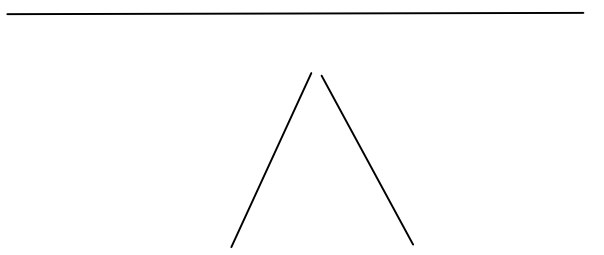
Un'applicazione del concetto di logaritmo alla dimensione dei “frattali”

Dimensioni frazionarie

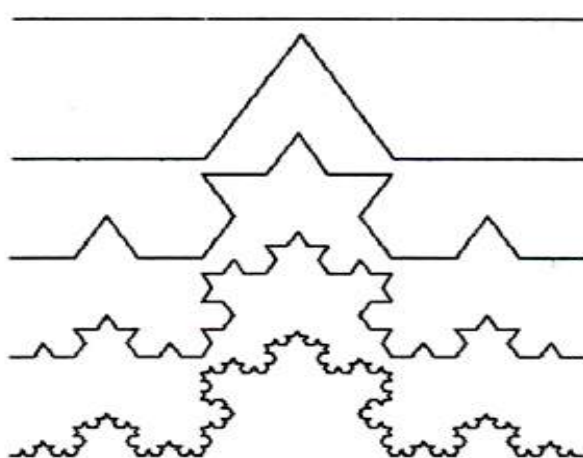
E' possibile dividere un quadrato in t^2 copie congruenti di un quadrato minore, ed un cubo in t^3 copie congruenti di un cubo minore. In generale, la potenza di t ci dà la *dimensione* della figura: una figura si dice *d-dimensionale* se, contratta di un fattore $\frac{1}{t}$, la sua “capacità” si riduce di t^d volte.

Questa è solo una delle molte definizioni di dimensione; la sua utilità è rappresentata dall'idea di individuare una proprietà (la composizione di una figura mediante copie congruenti più piccole) in situazioni standard (quadrato, cubo,...) e di generalizzarla a situazioni particolari come, per esempio, la ricerca della dimensione della curva di *Von Koch*, il cosiddetto “fiocco di neve di Koch”.

Questa curva si ottiene a partire da un segmento di lunghezza unitaria, dividendolo in tre parti ($t = 3$) e costruendo un triangolo equilatero con base il segmento centrale, che viene eliminato. Si parte con un segmento



La seconda figura contiene 4 copie contratte di un fattore 3 del segmento di partenza. Nella figura seguente sono riportati i primi 5 passaggi del processo di costruzione della curva di Von Koch.



In base alla definizione di dimensione data in precedenza, la dimensione della curva di Von Koch è data dalla relazione:

$$3^d = 4,$$

da cui segue

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3}.$$

In senso “operativo” possiamo definire il logaritmo $y = \log_a x$ come *l'esponente da dare alla base (a) per ottenere il numero dato (x)*:

$$y = \log_a x \Rightarrow a^y = x.$$

9.6 I logaritmi: proprietà e regole

1. $y = a^x, \quad x = \log_a y \Rightarrow y = a^{\log_a y} \Rightarrow a = a^{\log_a a} \Rightarrow \log_a a = 1$
2. $\log_a (x \cdot z) = \log_a (a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a z}) = \log_a a^{\log_a x + \log_a z} = \log_a x + \log_a z$
3. $\log_a (x \div z) = \log_a (a^{\log_a x} \div a^{\log_a z}) = \log_a a^{\log_a x - \log_a z} = \log_a x - \log_a z$
4. $\log_a x^n = \log_a (x \cdot \dots \cdot x) = \log_a x + \dots + \log_a x = n \log_a x$
5. $\log_a 1 = \log_a x^0 = 0 \log_a x = 0$

Cambiamento di base di un logaritmo

$$a^x = b \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \log_a b \\ \log_c a^x = \log_c b \Rightarrow x \cdot \log_c a = \log_c b \Rightarrow x = \frac{\log_c b}{\log_c a} \end{cases}$$

Confrontando i termini all'interno della parentesi otteniamo la regola (molto utile!)

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Per esempio,

$$\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2}, \quad \log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}$$

e la funzione $y = \log_a x$ è equivalente alla funzione $y = \frac{\ln x}{\ln a}$

9.7 Le equazioni logaritmiche

Si dice *logaritmica* un'equazione del tipo $\log_a x = b$ in cui l'incognita compare nell'*argomento del logaritmo*. Le equazioni logaritmiche si risolvono **scrivendo tutti i termini come logaritmi aventi la stessa base**, utilizzando le regole di cui sopra.

Per esempio:

$$\log_2 x = 3 \Rightarrow \log_2 x = \log_2 2^3 \Rightarrow x = 2^3.$$

Esponenziali e logaritmi: esercizi vari

Risolvere le seguenti equazioni esponenziali e logaritmiche:

1. $2^{x+3} - \sqrt{2^{4+2x}} = 4 + 2 \cdot 4^{\frac{x}{2}}$
 - $2^x := t \Rightarrow 8t - \sqrt{16t^2} = 4 + 2t \Rightarrow 2t = 4 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x = 1$
2. $\sqrt{\log_3 x} - 6 \log_3 \sqrt{x} = 0$
 - $x > 0; \log_3 x := t \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ \sqrt{t} - 6 \cdot \frac{1}{2}t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ t - 9t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ t = 0 \vee t = \frac{1}{9} \end{cases}$
 $\Rightarrow \log_3 x = \frac{1}{9} \Rightarrow x = 3^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{3} \vee \log_3 x = 0 \Rightarrow x = 1$
3. $2^{x+1} - 2^x + 2^{x-2} = 5$
 - $2^x := t \Rightarrow 2t - t + \frac{t}{4} = 5 \Rightarrow \frac{5}{4}t = 5 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$
4. $\log_2(x+1) + \log_2(x+2) = 2 + \log_2 3$
 - C.E. $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -1$
 - $\log_2[(x+1)(x+2)] = \log_2 12 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 12 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$
 $x = \frac{-3 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x = -5 \text{ non accettabile} \\ x = 2 \text{ accettabile} \end{matrix}$

6. Risolvere la seguente disequazione: $\log_2 x > -\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x}$.

- Scriviamo il logaritmo in base un mezzo nel corrispondente logaritmo in base due:
 $-\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x} = -\frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 \frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{x}$. Di conseguenza la disequazione diventa
 $\log_2 x > \log_2 \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \vee x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1.$

7. Si risolvano le seguenti disequazioni

a) $\log_2 \log_{\frac{1}{2}}(x-6) < 0$;

- $0 < \log_{\frac{1}{2}}(x-6) < 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x-6) > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x-6) < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x-6 < 1 \\ x-6 > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < x-6 < 1 \Rightarrow \frac{13}{2} < x < 7$

$$b) 2^x - 1 > \sqrt{3 \cdot 2^x - 3}. \text{ Si ricordi che } \sqrt{A(x)} < B(x) \Rightarrow \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}.$$

$$\bullet \begin{cases} 2^x - 1 \geq 0 \\ 3 \cdot 2^x - 3 \geq 0 \\ 3 \cdot 2^x - 3 < (2^x - 1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x \geq 1 \\ 2^x \geq 1 \\ (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2^x < 1 \vee 2^x > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \vee x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

La popolazione di expolandia decresce con modello esponenziale da 550.000 a 450.000 dal 2008 al 2010. Quanti abitanti avrà expolandia nel 2012? Si scriva la legge esponenziale nella forma $N(t) = N_0 e^{kt}$, dove t è il numero di anni dal 2008 (cioè, $t = 0$ nel 2008, $t = 1$ nel 2009 etc.).

$$2008 : N_0 = N(0) = 550.000$$

$$\bullet \quad 2010 : N_2 = N(2) = 450.000 = 550.000 e^{k \cdot 2} \Rightarrow 2k = \ln \frac{450.000}{550.000} \Rightarrow k = -0,1$$

$$2012 : N_4 = N(4) = 550.000 e^{-0,1 \cdot 4} = 368676 \approx 370.000$$

Esercizi

$$1. \log_5(x+1) + \log_5 4 = \log_5 6x \quad x = 2$$

$$2. \log_2^2 x^2 + 4 \log_2 \sqrt{x} - 2 = 0 \quad x = \sqrt{2}; \quad x = \frac{1}{2}$$

$$3. \sqrt{\log_2^2 x + \log_2 x - 2} = \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \quad x = \frac{1}{4}$$

$$4. \log \sqrt{|x-2|+2x} - \frac{1}{2} \log(3x+7) = 0 \quad x = -\frac{5}{6}$$

$$5. \frac{\log_{\frac{1}{3}}(2x+4) + \log_3 x + \log_3(x-1)}{\log_3 \frac{x}{2}} = 0 \quad x = 4$$

$$6. \text{ Risolvere il seguente sistema: } \begin{cases} \log_{xy} 12 = 1 \\ 2^{x-4} \cdot 3^{x-1} = \frac{6^y}{8} \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 4 & y = 3 \\ x = -3 & y = -4 \end{matrix}$$

$$7. a) \frac{2^{x-1} \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt{10}} = 5^{x+1} \quad x = \frac{\frac{7}{6} \ln 5 + \frac{3}{2} \ln 2}{\ln 2 - \ln 5}.$$

$$b) \frac{1}{2} \log(7+3x) = \log(1-\sqrt{x+2}) \quad x = -2$$

$$8. a) \sqrt{2\sqrt{2}} = 4^{1-x} \quad x = \frac{5}{8}$$

$$b) \text{Log} 5 - \text{Log}(3+\sqrt{x}) = \text{Log}(3-\sqrt{x}) \quad x = 4$$

$$9. a) \frac{1}{4\sqrt{2}} = 8^x \quad x = -\frac{5}{6}.$$

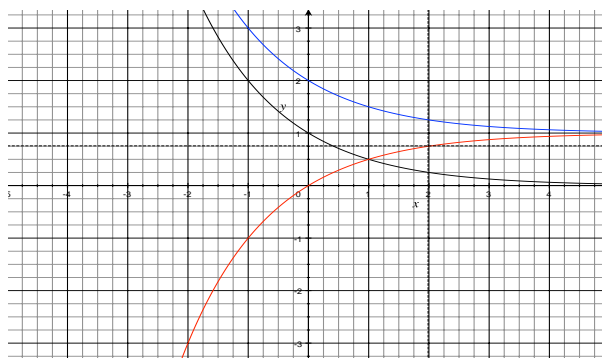
$$b) \log_3(x^2+x) - \log_3(x^2-x) = 1 \quad x = 2$$

$$10. \log_{\frac{1}{y}}(\log_y x) > \log_y(\log_y x) \quad \begin{cases} 0 < x < y \vee 1 < x < \frac{1}{y}; & 0 < y < 1 \\ 0 < x < \frac{1}{y} \vee 1 < x < y; & y > 1 \end{cases}$$

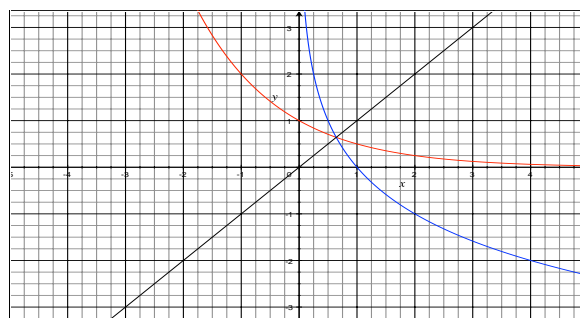
$$a) y = 2^{-x}$$

11. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni: $b) y = 2^{-x} + 1$.

$$c) y = 1 - 2^{-x}$$

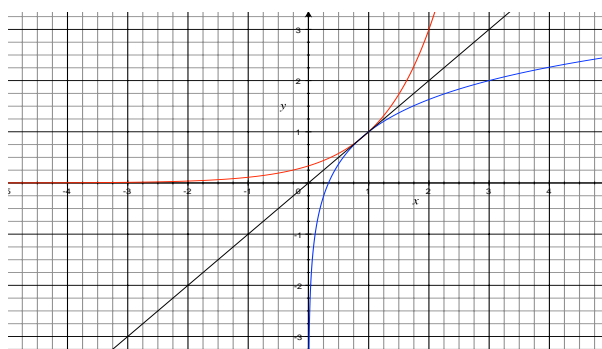


12. Tracciare il grafico della funzione $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, a partire da quello della funzione $y = \frac{1}{2^x}$. Che relazione sussiste tra le due funzioni?



13. Data la funzione $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$ determinare la funzione inversa $f^{-1}(x)$, tracciare i grafici delle due funzioni sullo stesso diagramma cartesiano, e risolvere la disequazione $f^{-1}(x) \leq 1$.

$$\bullet \quad f^{-1}(x) = 1 + \log_3 x \quad 0 < x \leq 1 \quad .$$



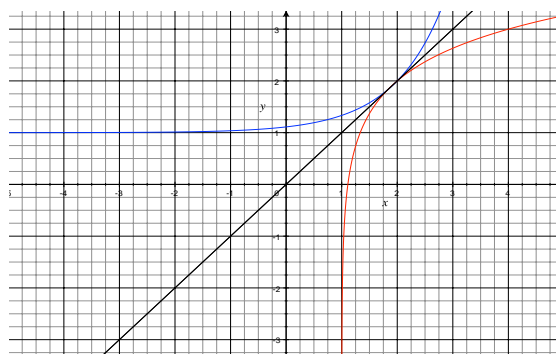
14. Determinare l'equazione cartesiana del luogo geometrico le cui equazioni parametriche

sono: $\begin{cases} x = \log_2(1+k) \\ y = k-1 \end{cases}$ per valori di $k > -1$.

• $y = 2^x - 2$

15. Data la funzione $f(x) = 1 + 3^{x-2}$ determinare l'insieme di definizione, l'immagine, la funzione inversa e tracciare i grafici della funzione e dell'inversa.

• $D \equiv \mathbb{R} \quad I \equiv \{y \in \mathbb{R} | y > 1\} \quad y = 2 + \log_3(x-1)$



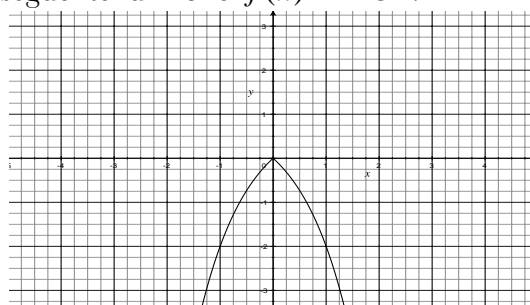
16. Date le funzioni $f(x) = |2x|$ e $g(x) = \log_2(x-1)$, determinare la funzione composta $f(g(x))$ e risolvere la disequazione $g(f(x)) > 1$.

• $f(g(x)) = |2\log_2(x-1)| \quad x < -\frac{3}{2} \vee x > \frac{3}{2}$

17. Risolvere la seguente disequazione: $25^x - 13 \cdot 5^x + 30 \geq 0$.

• $x \leq \log_5 3 \vee x \geq \log_5 10$

18. Tracciare il grafico della seguente funzione $f(x) = 1 - 3^{|x|}$.



19. Il numero di nuclei presenti al tempo t , in una massa radioattiva, è determinato dalla legge $n(t) = n_0 e^{-\alpha t}$. Dopo quanto tempo la massa non decaduta è un decimo della massa iniziale?

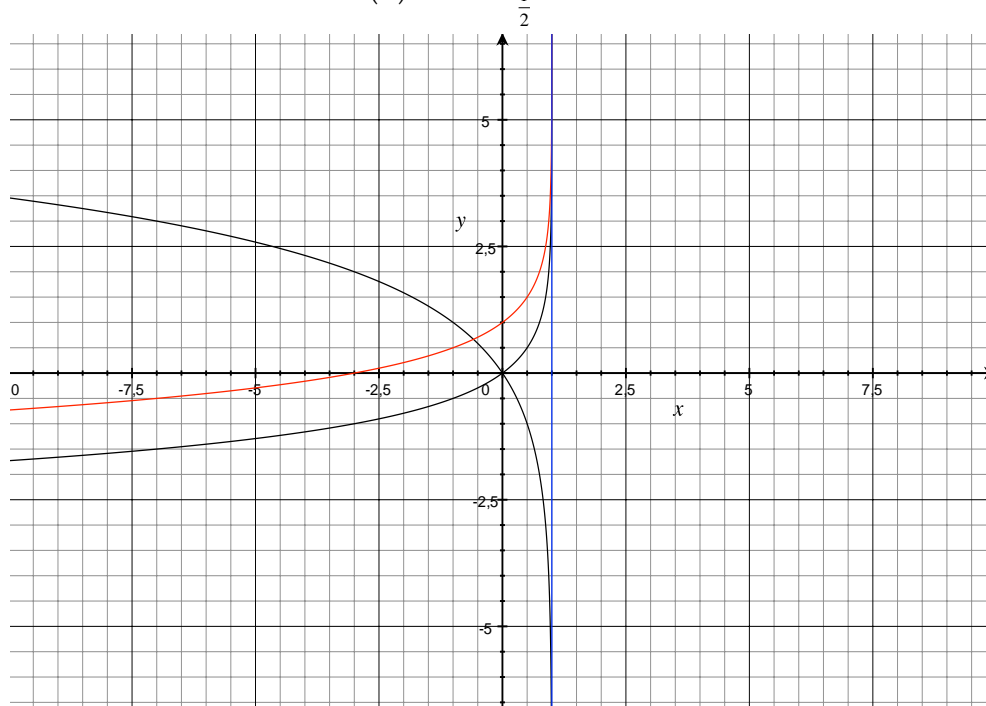
Si assuma per α il valore $\alpha = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.

• $n(t) = \frac{1}{10} n(0) \Rightarrow n_0 e^{-\alpha t} = n_0 10^{-1} \Rightarrow t = 10^3 \ln 10 = 2303 \text{ s} = 38'22''$

20. Risolvere la seguente disequazione logaritmica: $\log_{\frac{1}{x-1}}(x^2 - 1) \leq \log_{x-1} x^2$.

• $1 < x < \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \vee x > 2$

21. Si tracci il grafico della funzione $f(x) = 1 + \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x}$.



9.8 Alcune applicazioni della legge esponenziale in Fisica

Un modello per esprimere la pressione in funzione della quota

Come sappiamo dalla fisica, la distribuzione delle molecole nell'atmosfera varia considerevolmente con l'altezza rispetto alla superficie terrestre per effetto della forza di gravità. Oltre alla variazione della pressione con la quota h , consideriamo l'atmosfera un gas ideale, e la temperatura approssimativamente costante tra la quota h e $h + \Delta h$. Possiamo scrivere l'equazione di stato per i gas ideali:

$$P(h) = \frac{N(h)}{V} kT = \frac{m \cdot N(h)}{V \cdot m} kT = \frac{\rho(h)}{m} kT$$

dove m è la massa di una molecola, N è il numero di molecole alla quota h , $\rho(h)$ è la densità alla quota h , e T è la temperatura dell'atmosfera, sempre alla quota h .

La differenza di pressione tra h e $h + \Delta h$ può essere dedotta dalla legge di Stevino

$$P(h + \Delta h) - P(h) = -\rho g \Delta h.$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione di stato dei gas ideali otteniamo la relazione

$$\Delta P = -\rho(h) g \Delta h = -\frac{mg \Delta h \cdot P(h)}{kT} \Rightarrow \frac{\Delta P}{P} = -\frac{mg}{kT} \Delta h.$$

Considerando, come detto, la temperatura costante, giungiamo al modello che esprime la dipendenza della pressione dalla quota

$$P(h) = P_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}.$$

La datazione dei reperti con il metodo del ^{14}C

Al momento della morte di un essere vivente, l'isotopo radioattivo ^{14}C presente nel suo organismo, comincia a decadere, con un tempo di dimezzamento di circa 5730 anni. Supponendo che il ^{14}C contenuto in un frammento osseo della massa di 2g faccia registrare 22 decadimenti al minuto, si

stabilisca l'età del frammento, sapendo che un uomo in vita produce 15 decadimenti al minuto per grammo di massa corporea.

- Indicato con n_0 il numero di particelle presenti nell'organismo al momento del decesso, si ha

$$\begin{cases} n(0) - n(1) = 2 \cdot 15 = 30 \Rightarrow n_0 - n_0 e^{-\lambda} = 30 \\ n(t) - n(t+1) = 22 \Rightarrow n_0 e^{-\lambda t} - n_0 e^{-\lambda(t+1)} = 22 \end{cases}, \text{dove con } t \text{ abbiamo indicato il tempo}$$

trascorso dalla morte al momento della registrazione dei 22 decadimenti, e con $t+1$ un minuto dopo (così come $n(1)$ indica il numero di particelle presenti un minuto dopo il

decesso). Quindi
$$\begin{cases} n_0 - n_0 e^{-\lambda} = 30 \\ n_0 e^{-\lambda t} - n_0 e^{-\lambda(t+1)} = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_0 (1 - e^{-\lambda}) = 30 \\ n_0 e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda}) = 22 \end{cases} \Rightarrow e^{-\lambda t} = \frac{11}{15}. \text{ Il tempo}$$

di dimezzamento permette di determinare il parametro λ : $\frac{1}{2} = e^{-\lambda 5730} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{5730} a^{-1}$.

Infine,
$$e^{-\frac{\ln 2}{5730} a^{-1} t} = \frac{11}{15} \Rightarrow t = 5730 \frac{\ln\left(\frac{15}{11}\right)}{\ln 2} a = 2564 a.$$

Il livello d'intensità sonora

L'intensità di un'onda sonora è data dal rapporto tra la potenza emessa e la superficie attraversata dal passaggio dell'onda, e si misura in Wm^{-2} . L'orecchio umano percepisce suoni con un'intensità variabile da $I_0 = 10^{-12} Wm^{-2}$, a $I = 1 Wm^{-2}$, sufficiente per provocare lesioni serie all'apparato uditivo. L'estensione dell'intensità per parecchi ordini di grandezza, suggerisce l'adozione di una scala logaritmica. Per questo si definisce *livello di intensità sonora*, e si misura in *bel*, la quantità

$$I_{bel} = \log_{10} \frac{I}{I_0}.$$

Esempio. Ogni componente di un coro di 30 persone può cantare con un livello di intensità sonora di $70dB$, dove $1dB = 0,1bel$. Si determini il livello d'intensità del coro.

- Ragionando sul concetto di potenza, possiamo affermare che l'intensità totale è la somma delle singole intensità (non dei livelli di intensità!). Quindi, il livello d'intensità del coro è

$$I_{coro} = \log_{10} \left(30 \frac{I}{I_0} \right) = \log_{10} 30 + \log_{10} \frac{I}{I_0} = \log_{10} 30 + 7 = 8,47bel = 85dB.$$

Magnitudine e luminosità apparente di una stella

Osservazioni che risalgono ai tempi di Ipparco di Nicea hanno portato alla seguente relazione: l'intensità luminosa apparente di una stella di *magnitudine* M , è k volte quella di una stella di *magnitudine* $M+1$. Inoltre, l'intensità luminosa apparente di una stella di *magnitudine* 1 è 100 volte quella di una stella di *magnitudine* 6. Indicata con i_1 l'intensità luminosa apparente di una stella di *magnitudine* 6, si ha la seguente relazione:

M	i_n	$\log_k i_n$	
6	$k^0 i_1$	$0 + \log_k i_1$	
5	$k^1 i_1$	$1 + \log_k i_1$	
4	$k^2 i_1$	$2 + \log_k i_1$	$\Rightarrow k^5 i_1 = 100 i_1 \Rightarrow k = \sqrt[5]{100} \approx 2,512 \Rightarrow 6 - M = \log_k i_n - \log_k i_1$
3	$k^3 i_1$	$3 + \log_k i_1$	
2	$k^4 i_1$	$4 + \log_k i_1$	
1	$k^5 i_1$	$5 + \log_k i_1$	

Ad esempio, in corrispondenza di $M = 4$ risulta $\log_k i_4 = 2 + \log_k i_1 = 6 - 4 + \log_k i_1$. In generale quindi $\frac{i_n}{i_1} = k^{6-M}$.

Esempio. Si calcoli il rapporto tra le intensità luminose apparenti del Sole, $M = -26,8$ e di Sirio, $M = -1,6$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \text{Sole : } \frac{i_{\text{sole}}}{i_1} &= k^{6+26,8} \\ \text{Sirio : } \frac{i_{\text{sirio}}}{i_1} &= k^{6+1,6} \end{aligned} \Rightarrow \frac{i_{\text{sole}}}{i_{\text{sirio}}} = k^{25,2} \approx 1,2 \cdot 10^{10}.$$

Esempio. Le stelle che compongono un certo sistema binario hanno magnitudine, rispettivamente 5,4 e 6,2. La grande vicinanza, fa apparire il sistema binario come un'unica stella. Si calcoli la magnitudine di questa.

- Si sommano le luminosità apparenti $i', i'' : i = i' + i''$. Dalla $\frac{i_n}{i_1} = k^{6-M}$ segue

$$\frac{i}{i_1} = \frac{i' + i''}{i_1} = k^{6-5,4} + k^{6-6,2} \Rightarrow 6 - M = \log_k (k^{0,6} + k^{-0,2}) \Rightarrow M = 6 - \frac{\ln(k^{0,6} + k^{-0,2})}{\ln k} = 5,0.$$

9.9 Approfondimento: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ e questioni collegate

Studiamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Risulta $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n > 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{n-1}$ da 3 in poi. Sembra proprio che $n! > 2^{n-1}$ per $n \geq 3$. Infatti:

Esercizio

Dimostrare per induzione la disuguaglianza $n! > 2^n$ per $n \geq 4$.

In conseguenza della disuguaglianza si ha che $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}$, quindi

$$2 = 1 + 1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3,$$

da cui segue che $2 < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 3$. La somma della serie esponenziale è quindi un numero compreso tra

2 e 3 e viene indicata con e , una quantità di importanza fondamentale in matematica, che rappresenta la base dei *logaritmi naturali o neperiani* ed è un numero *irrazionale e trascendente* (non è, cioè, soluzione di alcuna equazione algebrica a coefficienti interi).

Un valore approssimato di e è dunque fornito dalla successione delle somme parziali $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Calcoliamo il valore delle somme parziali per alcuni valori di n .

n	sn
0	1
1	2
2	2,5
3	2,666666667
4	2,708333333
5	2,716666667
6	2,718055556
7	2,718253968
8	2,71827877
9	2,718281526
10	2,718281801

Come in tutti i processi di approssimazione è importante controllare la precisione. Per questo scopo osserviamo che

$$E_n = e - s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots \right] < \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

Con il valore $n = 10$ come riportato nel foglio elettronico, risulta $E_{10} < \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{10^3}$. Si

conclude che la somma parziale $s_{10} = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!}$ approssima e con un errore minore di $\frac{1}{1000}$.

E' possibile ottenere un'approssimazione migliore osservando che

$$\begin{aligned} E_n = e - s_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{k!} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{(n+1)!}{(n+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n+2)!} + \frac{(n+1)!}{(n+3)!} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+3)(n+2)} + \dots \right] < \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+1)} + \dots \right] = \\ &\frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{(n+1)}} \right] = \frac{(n+1)}{(n+1)!n} = \frac{1}{n \cdot n!}. \end{aligned}$$

Questa stima più accurata ci permette di valutare il resto

$$E_n = e - s_n < \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Grazie a questa stima è possibile dimostrare la *irrazionalità* di e .

Infatti, supponiamo per assurdo che e sia razionale; posto $e = \frac{p}{q}$ con p, q interi primi tra loro, risulta

$$0 < \frac{p}{q} - s_q < \frac{1}{q \cdot q!} \Rightarrow q! \left(\frac{p}{q} - s_q \right) < \frac{1}{q},$$

ma

$$q! \left(\frac{p}{q} - s_q \right) = p(q-1)! - q! s_q$$

è un numero intero, quindi non può essere minore di $\frac{1}{q}$. Di conseguenza e è irrazionale.

La disuguaglianza delle medie

Prendiamo in considerazione due risultati molto utili:

Proposizione. Siano a_1, \dots, a_n numeri positivi con prodotto $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Allora $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.

Dimostrazione. Siano $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1} = 1$. Supponiamo che $a_n \leq 1$ e $a_{n+1} \geq 1$: essendo $a_n - 1 \leq 0$ e $a_{n+1} - 1 \geq 0$, allora $(a_n - 1)(a_{n+1} - 1) \leq 0 \Rightarrow a_n a_{n+1} + 1 \leq a_n + a_{n+1}$. Consideriamo adesso $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot (a_n \cdot a_{n+1}) = 1$. Avendo accorpato gli ultimi due termini, abbiamo a che fare con n termini ai quali possiamo applicare l'ipotesi induttiva ed ottenere: $a_1 + a_2 + \dots + (a_n \cdot a_{n+1}) \geq n$. Applicando la $a_n a_{n+1} + 1 \leq a_n + a_{n+1}$ otteniamo infine $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} \geq a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n \cdot a_{n+1} + 1 \geq n + 1$.

Proposizione. Siano a_1, \dots, a_n numeri positivi con $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$. Allora $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \leq 1$.

Dimostrazione. Consideriamo $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = n + 1$. Siano $a_n \leq 1$ e $a_{n+1} \geq 1$. Per quanto visto sopra, $a_n a_{n+1} + 1 \leq a_n + a_{n+1}$. Poiché $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + (a_n + a_{n+1} - 1) = n$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva ed ottenere: $a_1 a_2 \dots a_{n-1} (a_n + a_{n+1} - 1) \leq 1$. In conclusione: $a_1 a_2 \dots a_{n-1} (a_n a_{n+1}) \leq a_1 a_2 \dots a_{n-1} (a_n + a_{n+1} - 1) \leq 1$.

Dalla seconda proposizione segue un'utile disuguaglianza, la cosiddetta **disuguaglianza delle medie**: $\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ (media geometrica minore o uguale della media aritmetica).

Abbiamo visto che il modello dell'interesse composto con capitalizzazione "istantanea", è legato al limite notevole:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

Dimostrazione. Dallo sviluppo del binomio di Newton risulta

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left[n \cdot n \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \dots \cdot n \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) \right] \frac{1}{n^k} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (1 \cdot \dots \cdot 1) < e. \end{aligned}$$

Quindi la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ è limitata. Con la disuguaglianza delle medie, ad esempio, è

possibile dimostrare che la successione è pure crescente: si considerano n termini del tipo $\left(1 + \frac{1}{n} \right)$ e un termine uguale a 1, in modo tale che la loro somma risulti uguale a $(n+1) + 1$, per cui

da $\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ segue $\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot 1} \leq \frac{n \left(1 + \frac{1}{n} \right) + 1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$. A questo punto si elevano i

membri della disuguaglianza alla $n+1$ e la dimostrazione è completa: $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}$. Ora,

poiché una successione monotona e limitata è convergente, il valore del limite sarà $L \leq e$.

Dimostriamo che effettivamente $L = e$. Per ogni valore $n > m$ risulta

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} > \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^m \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!}.$$

Passando al limite avremo

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \sum_{k=0}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k (1 - \frac{1}{n}) \dots (1 - \frac{k-1}{n})}{n^k} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}.$$

Questa relazione, $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}$ vale per qualsiasi valore di m , in particolare quando

$m \rightarrow \infty$ avremo $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$. Per il teorema del confronto, $e < L \leq e \Rightarrow L = e$

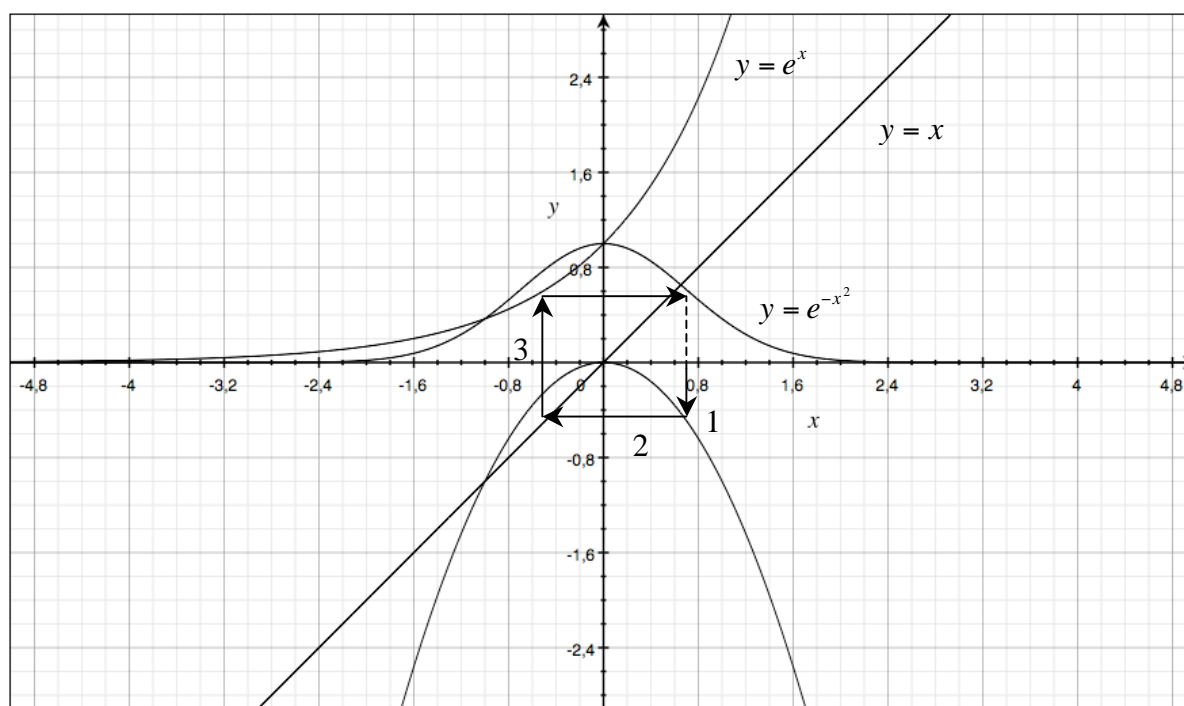
Il limite notevole trovato si generalizza in modo naturale al caso:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \text{ se } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

9.10 Approfondimento: La funzione composta $y = e^{f(x)}$: un metodo grafico per la sua rappresentazione

$$C.E.(f) \rightarrow R \rightarrow R \rightarrow R^+$$

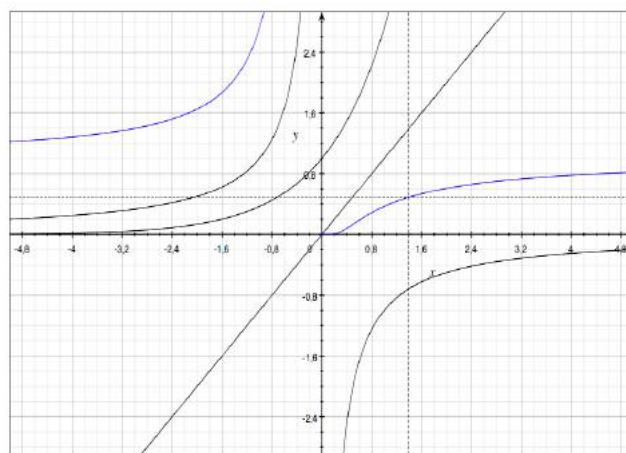
$$x \rightarrow f(x) \rightarrow f(x) \rightarrow e^{f(x)}$$



Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

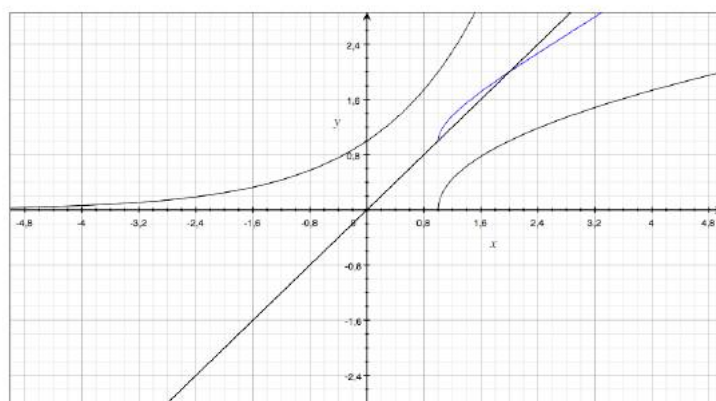
1. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

- $h(x) = e^x; \quad g(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = h(g(x))$



$$2. f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{x-1}}$$

$$\bullet \quad h(x) = 2^x; \quad g(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x = y^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = h(g(x))$$



3. E' data la funzione $f(x) = 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$.

a) Si studi il segno della funzione;

• Iniziamo con l'osservare che la funzione può essere scritta nella forma

$$f(x) = 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{x} - 2} = 1 + \ln(\sqrt{x} - 2) \text{ e che, quindi, il campo di esistenza è dato}$$

$$\text{dalle soluzioni del sistema di disequazioni } \begin{cases} \sqrt{x} - 2 > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 4. \text{ Per quanto}$$

riguarda il segno della funzione risulta

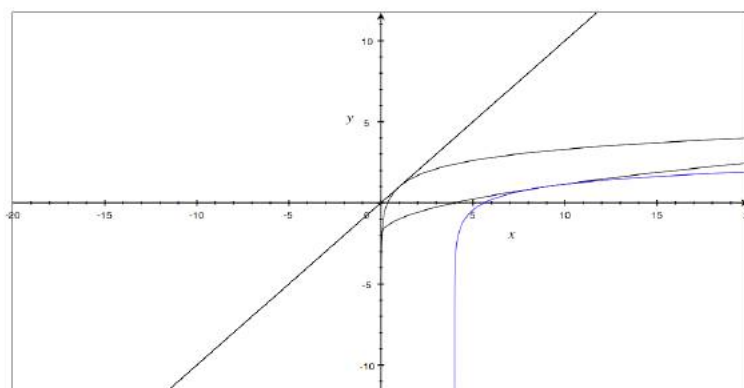
$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(\sqrt{x} - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(\sqrt{x} - 2) \geq -1 = \ln e^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x} - 2 \geq e^{-1} \Leftrightarrow x \geq \left(2 + \frac{1}{e}\right)^2$$

b) Si tracci un grafico approssimativo della funzione;

• Componiamo le funzioni $h(x) = 1 + \ln x$ e $g(x) = \sqrt{x} - 2$, in modo tale che risulti $f(x) = h(g(x))$. Ora, la prima funzione ha per grafico quello della funzione

logaritmo naturale, traslato di uno verso l'alto, mentre la seconda ha per grafico quello della parabola $x = (y + 2)^2$ limitato alla parte di piano $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -2 \end{cases}$:



c) Si determini la funzione inversa $f^{-1}(x)$ e se ne tracci il grafico.

- La funzione $f(x)$ è monotona crescente nel suo intero campo di esistenza, quindi è invertibile. La funzione inversa si determina risolvendo l'equazione data dall'espressione analitica della funzione $y = f(x)$, rispetto alla variabile x , cioè

$$y = 1 + \ln(\sqrt{x} - 2) \Rightarrow \ln(\sqrt{x} - 2) = y - 1 \Rightarrow \ln(\sqrt{x} - 2) = \ln e^{y-1} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x} - 2 = e^{y-1} \Rightarrow x = (2 + e^{y-1})^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (2 + e^{x-1})^2$$
- Il grafico della funzione inversa si ottiene da quello della funzione originaria per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante:

