

ESERCIZI POLINOMI

1. Scrivere il polinomio $x^{12} + x^6 + 1$ come prodotto di fattori (*fattorizzare*, cioè, il polinomio).
2. Dimostrare che in Z_n vale l'uguaglianza $x^2 - ax + k = x^2 - (a - n)x + n + k$.
3. Si determinino a , e b in modo tale che i polinomi $x^3 - 2ax^2 + bx + 1$ e $x^3 + 2bx^2 + (a - 1)x + 1$ siano identici.
4. Eseguire nell'insieme dei polinomi $Z_7[x]$ il prodotto $(x^2 - 5x + 1)(x + 4) - (3 - x^2)(6 + x^3)$. A cosa corrisponde questo prodotto in $Z_5[x]$? Ed in $Z_3[x]$?
5. Si trovi un insieme in cui il polinomio $x^2 + 9$ è riducibile.
6. Dato il polinomio $A(x) = ax^2 + bx + c$, determinare a, b, c affinché $A(x+1) - A(x) = x$.
Supponiamo inoltre che la variabile x possa assumere soltanto i valori "naturali" $1, 2, 3, \dots$. Si dimostri che dalle differenze $A(n+1) - A(n)$ è possibile ottenere la formula della *somma dei primi N numeri naturali*.
7. Si sfruttino le considerazioni dell'esercizio precedente per calcolare, a partire dal polinomio $A(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, la somma dei quadrati dei primi N numeri naturali.
8. Si dica per quale valore di h il polinomio $x^3 - 4x^2 + 4x + h$ è divisibile per $x + 1$.
9. Si sviluppino i seguenti prodotti notevoli: $(a^3 + b^3x^3), (x+1)^7$.
10. Determinare il resto, senza eseguire la divisione, tra i polinomi $A(x) = 3x^3 + 5x^2 - x + 2$ e $B(x) = x + 2$.
11. Determinare a, b in modo tale che il polinomio $2x^4 + ax^3 + x^2 + 4x + b$ sia divisibile per $x^2 + x$.
12. Trovare tutte le radici, intere o razionali, del polinomio $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 32$.
13. Tra i polinomi di secondo grado che divisi per $(x-1), (x-2)$ danno per resto 4, determinare quello che ha come radice $\alpha = 0$.
14. E' dato il polinomio $P_n(x) = x^n + 1$ sull'insieme degli interi. Per quali valori di n è riducibile? In tal caso, si dica quant'è il valore dei coefficienti del polinomio di grado massimo che si viene a determinare nella divisione.
15. Dividere il polinomio $x^{16} - 1$ per $x - 1$, e determinare i coefficienti del polinomio quoziente.
16. Si trovino le intersezioni tra la parabola di vertice $V(2, 2)$ passante per l'origine, e l'iperbole $xy = 12$.
17. Per quali valori di k la parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 1$ interseca l'iperbole $xy = k$ in punti ad ascissa intera?
18. Sia $P(x)$ un polinomio e $Q(x) = P(x) + 1$. Dimostrare che $P(x)^{2n} + Q(x)^n - 1$ è divisibile per il prodotto $P(x) \cdot Q(x)$.
19. Dimostrare che un polinomio è divisibile per $(x-1)$ se la somma dei suoi coefficienti è zero.
20. Trovare tutte le radici di $x^3 - 3x^2 + 2x$ in Z_6 .

Soluzioni

1. $x^{12} + x^6 + 1 = (x^6 + 1)^2 - x^6 = [(x^6 + 1) - x^3][(x^6 + 1) + x^3]$
2. $Z_n : \begin{cases} -a = -a + n = -(a - n) \\ k = k + n \end{cases}$.

3. $\begin{cases} -2a = 2b \\ b = a - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \end{cases}.$
4. $x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 19x - 14 = \begin{cases} x^5 - 2x^3 + 5x^2 + 2x & (Z_7) \\ x^5 - 2x^3 + x + 1 & (Z_5) \\ x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 & (Z_3) \end{cases}.$
5. $\begin{cases} a + b = 0 \\ ab = 9 \end{cases}$ in Z_{10} risulta, ad esempio, $\begin{cases} 1 + 9 = 0 \\ 1 \cdot 9 = 9 \end{cases}.$
6. $x = A(x+1) - A(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2ax + a + b \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \end{cases}$

Dalla somma delle $A(n+1) - A(n) = n$, otteniamo il valore della somma dei primi n numeri

naturali: $A(n+1) - A(1) = \frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n+1}{2} + c - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - c = \frac{n(n+1)}{2}.$

7. $x^2 = A(x+1) - A(x) = 3ax^2 + (3a+2b)x + a+b+c \Rightarrow \begin{cases} 3a = 1 \Rightarrow a = 1/3 \\ 3a+2b = 0 \Rightarrow b = -1/2 \\ a+b+c = 0 \Rightarrow c = 1/6 \end{cases}.$ Da questo

segue $A(n+1) - A(1) = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} + d - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - d = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

8. Posto $x^3 - 4x^2 + 4x + h = (x+1)(ax^2 + bx + c) \Rightarrow h = 9.$

9. $(a^3 + b^3x^3) = (a+bx)(a^2 - abx + b^2x^2),$

$$(x+1)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} x^k 1^{7-k} = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7$$

$$\frac{3x^3}{x} = 3x^2 \Rightarrow A(x) - 3x^2B(x) = -x^2 - x + 2 := R_1(x);$$

10. Si ha $\frac{-x^2}{x} = -x \Rightarrow R_1(x) - (-x)B(x) = x + 2 := R_2(x);$

$$\frac{x}{x} = 1 \Rightarrow R_2(x) - (1)B(x) = 0 \Rightarrow A(x) = (3x^2 - x + 1)(x + 2) \Rightarrow R(x) = 0$$

11. Si determina il resto: $R_3(x) = (a+1)x + b \Rightarrow R_3(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}.$

12. Si osserva che $x = 4$ e $x = -2$ sono radici del polinomio, quindi questo può essere scritto nella forma $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 32 = (x-4)(x+2)(x^2 - x + 4)$, con l'ultimo fattore irriducibile in \mathbb{R} .

$$13. \quad \begin{aligned} ax^2 + bx + c &= (ax + a + b)(x - 1) + a + b + c \\ ax^2 + bx + c &= (ax + 2a + b) + 4a + 2b + c \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ c = 4 + 2a \end{cases} . \text{ Il}$$

polinomio può quindi essere scritto nella forma $P(x) = ax^2 - 3ax + 4 + 2a$. Imponendo

$$P(0) = 0 \text{ otteniamo il polinomio: } P(0) = 0 \Rightarrow 4 + 2a = 0 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow P(x) = -2x^2 + 6x.$$

14. Il polinomio è riducibile se n è dispari. In tal caso $x = -1$ è una radice, quindi può essere diviso per il polinomio $x + 1$; di conseguenza $P_n(x) = x^n + 1 = (a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1})(x + 1)$. I

coefficienti del polinomio quoziente di grado $n - 1$ si determinano eseguendo la moltiplicazione dei fattori presenti al membro di destra, ed imponendo l'unicità della forma canonica: $x^n + 1 = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_1 + a_2)x^2 + \dots + (a_{n-2} + a_{n-1})x^{n-1} + a_{n-1}x^n$ da cui seguono le

uguaglianze $a_0 = 1, a_{n-1} = 1 \Rightarrow a_{n-2} = -1 \Rightarrow a_{n-3} = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 = -1$, ottenute ponendo

uguale a zero tutte le somme tra parentesi. Il quoziente è quindi $Q_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k$.

15. $x^{16} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)$. Poiché $x = 1$ è una radice del polinomio, non c'è in realtà bisogno di fare grandi calcoli: si procede, con qualche adattamento, come nell'esercizio precedente:

$$x^{16} - 1 = (a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1})(x - 1) = -a_0 + (a_0 - a_1)x + (a_1 - a_2)x^2 + \dots + (a_{n-2} - a_{n-1})x^{n-1} + a_{n-1}x^n$$

$$a_0 = 1 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 1$$

16. Si mette a sistema l'equazione della parabola $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 \Rightarrow y = -\frac{x^2}{2} + 2x$, con quella

dell'iperbole, ottenendo l'equazione risolvente $x^3 - 4x^2 + 24 = 0$. Le soluzioni dell'equazione sono radici del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 24$; poiché una di queste è $x = -2$, il polinomio può essere fattorizzato nel prodotto $x^3 - 4x^2 + 24 = (x + 2)(x^2 - 6x + 12)$. Essendo il

polinomio di secondo grado irriducibile nell'insieme dei numeri reali, l'unica intersezione tra la parabola e l'iperbole è rappresentata dal punto $(-2; -6)$.

17. Dall'equazione risolvente $x^3 - 2x^2 - x - k = 0$ e dalla divisibilità per $x = n \in \mathbb{Z}$ otteniamo la fattorizzazione $x^3 - 2x^2 - x - k = (x - n)(x^2 + (n - 2)x + n^2 - 2n - 1)$, con resto zero

$n[n(n - 2) - 1] - k = 0 \Rightarrow k = n[n(n - 2) - 1]$. Il valore (o i valori) di k dipendono da quelli di n che forniscono radici intere del polinomio di secondo grado nella fattorizzazione. Questi valori si ottengono imponendo che il discriminante dell'equazione associata al fattore di

secondo grado sia non negativo: $-3n^2 + 4n + 8 \geq 0 \Rightarrow \frac{2 - 2\sqrt{7}}{3} \leq n \leq \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \Rightarrow n = 0, 1$. Per

$n = 1$ otteniamo $k = -2$ e $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$. Per

$n = 0$ otteniamo $k = 0$ e l'iperbole non esiste.

18. Posto $P(x) = Q(x) - 1$, poiché $Q(x)^n - 1$ è divisibile per $Q(x) - 1$ si ha

$$P(x)^{2n} + Q(x)^n - 1 = P(x)^{2n} + Q(x)^n + P(x) - Q(x) = P(x)(P(x)^{2n-1} + 1) + Q(x)(Q(x)^{n-1} - 1).$$

Ora, poiché nel caso in cui n è dispari $x^n + 1$ è divisibile per $x + 1$, essendo $2n - 1$ dispari, allora $P(x)^{2n-1} + 1$ è divisibile per $P(x) + 1$, ovvero per $Q(x)$. In definitiva,

$$\begin{aligned} P(x)^{2n} + Q(x)^n - 1 &= P(x)(P(x)^{2n-1} + 1) + Q(x)(Q(x)^{n-1} - 1) = \\ &= P(x)A(x)Q(x) + Q(x)B(x)P(x) = Q(x)P(x)(A(x) + B(x)) \end{aligned}$$

19. Per il teorema di Ruffini, la divisibilità per $(x-1)$ equivale a dire che $x=1$ è una radice del polinomio, quindi $0 = P(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_n$.
20. $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2)$. Una radice è evidentemente $x=0$. Le altre possono essere individuate, per la proprietà conseguente al teorema di Ruffini, tra i divisori del termine noto, che sono in Z_6 , oltre a $x=1$ e $x=2$, anche $x=4$ e $x=5$, dal momento che $5 \cdot 4 = 20 \equiv 2_6$. Sostituendo questi valori nel polinomio di secondo grado e svolgendo i calcoli con le classi di resto modulo 6, si trova che le soluzioni sono 0, 1, 2, 4, 5.