ESERCIZI VETTORI

Negli esercizi proposti si assuma $\vec{i}(1;0)$, $\vec{j}=(0;1)$.

1. Dati i vettori $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$ e $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$, si trovino, in termini di $\vec{i}$ e $\vec{j}$, (a) $\vec{a}+\vec{b}$; (b) $\vec{a}-\vec{b}$; (c) $3\vec{a}$; (d) $-4\vec{a}+\vec{b}$.
2. Si trovi l'intensità di ognuno dei vettori precedentemente trovati, e l'angolo che ognuno di essi forma con il versore $\vec{i}$.
3. Si dica se i punti del piano, aventi come vettori posizione $2\vec{j}$, $-4\vec{j}$, $4\vec{i}+2\vec{j}$ e $4\vec{i}+\vec{j}$, possono essere vertici di un trapezio.

4. I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ di modulo $|\vec{a}|=15$ e $|\vec{b}|=8$ formano un angolo di 90°. Determinare: (a) $|\vec{a}-\vec{b}|$, (b) $|2\vec{a}+5\vec{b}|$.
5. Ripetere l'esercizio precedente nel caso in cui l'angolo formato dai due vettori è 60°.
6. Dati i vettori $\vec{v_1}=(1;2)$ e $\vec{v_2}=(2;-3)$, si determinino le coordinate del vettore $\vec{w}=\vec{v_1}-\frac{1}{2}\vec{v_2}$, ed esprimere il vettore $\vec{w'}=(3;5)$ come combinazione lineare dei vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$. E' possibile esprimere ogni vettore del piano come combinazione lineare di $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$?
7. Dati i vettori $\vec{v_1}=(1;2;0)$ e $\vec{v_2}=(2;-3;1)$, si determinino le coordinate del vettore $\vec{w}=\vec{v_1}-\frac{1}{2}\vec{v_2}$, ed esprimere il vettore $\vec{w'}=(3;5;-2)$ come combinazione lineare dei vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$. E' possibile esprimere ogni vettore dello spazio come combinazione lineare di $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$?
8. Si dica per quali valori del parametro *k* il vettore $\vec{w}=(1;1;2k)$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $\vec{v_1}=(-3;4;-1)$ e $\vec{v_2}=(0;-5;0)$.
9. Dato il vettore $\vec{w}=(3;5)$, quali sono le coordinate di un vettore $\vec{v}$ ottenuto dalla rotazione di $\vec{w}$ in senso antiorario di un angolo retto? Si generalizzi il risultato considerando la rotazione di un generico vettore $\vec{w}=(a;b)$ di un angolo θ, sempre in senso antiorario.
10. Si calcolino le coordinate del punto intersezione, se esiste, tra le rette $\overrightarrow{OX}=(4,-6,0)+\lambda(2,10,4)$ e $\overrightarrow{OY}=(4,-6,-2)+\mu(10,2,2)$. Tali rette sono parallele? Quali condizioni potrebbero descrivere rette nello spazio che non sono né parallele né incidenti?
11. Si trovi la distanza dal punto $P=(2,1)$ alla retta $\overrightarrow{OX}=(0,1)+\lambda(2,3)$.
12. Si dica per quali valori di *a* la retta $\{\ x=8+4t,\quad y=10+5t,\quad z=2a+at,$ è contenuta nel piano generato dai vettori $\overrightarrow{OA}=(1;1;3)$ e $\overrightarrow{OB}=(2;-1;-3)$.

Soluzioni

1. (a) $\vec{a}+\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}$; (b) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$; (c) $3\vec{a}=6\vec{i}+2\vec{j}$; (d) $-4\vec{a}+\vec{b}=-7\vec{i}-13\vec{j}$.
2. (a) $\vec{a}+\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13};\tan\theta=\frac{2}{3}\ldots$
3. In coordinate: $(0;2),(0;-4),(4;2),(4,1)$. Poiché la differenza tra i primi due vettori è parallela alla differenza tra i restanti due (in senso vettoriale), allora i punti possono essere vertici di un trapezio.

4. Possiamo applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo che si forma con i vettori nei singoli casi: $\begin{array}{l}(a)\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2 \Rightarrow \left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{225+64}=17 \\ (b)\left|2\vec{a}+5\vec{b}\right|=\sqrt{4\cdot 225+25\cdot 64}=50\end{array}$.
5. Possiamo applicare il teorema di Carnot al triangolo che si forma con i vettori nei singoli casi: $\begin{array}{l}(a)\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 60°=289-120 \Rightarrow \left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{169}=13 \\ (b)\left|2\vec{a}+5\vec{b}\right|=\sqrt{4\cdot 225+25\cdot 64-2\cdot 2\cdot 15\cdot 5\cdot 8}=10\end{array}$.
6. $\vec{w}=\vec{v_1}-\frac{1}{2}\vec{v_2}=(1;2)-\frac{1}{2}(2;-3)=\left(0;\frac{7}{2}\right)$. $\vec{w'}=(3;5)=\alpha(1;2)+\beta(2;-3)=(\alpha+2\beta;2\alpha-3\beta)$, da cui segue $\begin{cases}\alpha+2\beta=2\\ 2\alpha-3\beta=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\end{cases}$. Sia $(x;y)$ il generico vettore del piano; imponiamo $\begin{cases}\alpha+2\beta=x\\ 2\alpha-3\beta=y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=\dfrac{3x+2y}{7}\\ \beta=\dfrac{2x-y}{7}\end{cases}$, quindi ogni vettore del piano può essere espresso come combinazione lineare dei vettori $\vec{v_1}=(1;2)$ e $\vec{v_2}=(2;-3)$.
7. $\vec{w}=\vec{v_1}-\frac{1}{2}\vec{v_2}=(1;2;0)-\frac{1}{2}(2;-3;1)=\left(0;\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$.
   $\vec{w'}=(3;5;-2)=\alpha(1;2;0)+\beta(2;-3;1)=(\alpha+2\beta;2\alpha-3\beta;\beta)$, da cui segue
   $\begin{cases}\alpha+2\beta=3\\ 2\alpha-3\beta=5\\ \beta=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-1\\ \alpha=-\dfrac{1}{2}\\ \beta=-2\end{cases}$, risultato evidentemente non accettabile.
8. $\begin{cases}1=-3\alpha+0\beta\\ 1=4\alpha-5\beta\\ 2k=-\alpha+0\beta\end{cases} \Rightarrow 2k=\frac{1}{3} \Rightarrow k=\frac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-\dfrac{1}{3}\\ \beta=-\dfrac{7}{15}\end{cases}$.
9. $\begin{cases}x'=-y=-5\\ y'=x=3\end{cases} \Rightarrow \vec{v'}=(-5;3)$. In generale,
   $\begin{cases}x'=x\cos\theta-y\sin\theta\\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases} \Rightarrow \vec{v'}=(x\cos\theta-y\sin\theta;x\sin\theta+y\cos\theta)$.
10. **Errore. Non si possono creare oggetti dalla modifica di codici di campo.**Il sistema è chiaramente impossibile. Poiché i vettori direzione non sono paralleli, le rette appartengono a piani diversi.
11. Si scrive l'equazione cartesiana della retta: $r:\begin{cases}x=0+2\lambda\\ y=1+3\lambda\end{cases} \Rightarrow \frac{y-1}{3}=\frac{x}{2} \Rightarrow 3x-2y+2=0$.
    La distanza è quindi $d(P,r)=\frac{|6-2+2|}{\sqrt{9+4}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$.

12. Il problema è risolto una volta che abbiamo espresso il vettore direzione della retta come combinazione lineare dei vettori del piano: $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 4 \\ \alpha - \beta = 5 \\ 3\alpha - 3\beta = a \end{cases} \Rightarrow a = 15$.