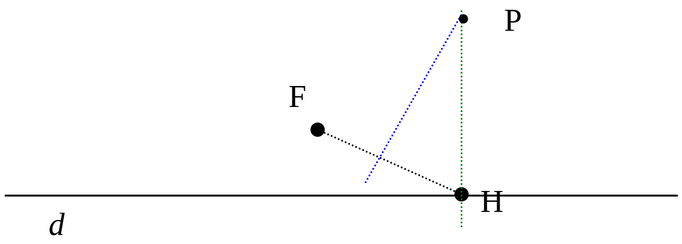
CAPITOLO 6
LA PARABOLA NEL PIANO CARTESIANO
6.1 Costruzione della parabola come luogo geometrico
La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto detto *fuoco*, e da una retta detta *direttrice*.



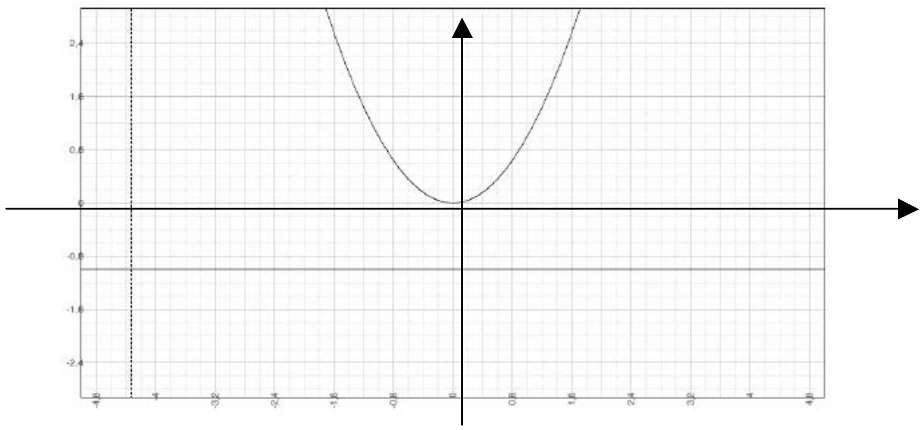
Fissati F e la direttrice *d*, segniamo il punto H su *d* e tracciamo l'asse di FH. Il punto P intersezione dell'asse di FH con la perpendicolare a *d* passante per H è un punto della parabola.

6.2 L'equazione della parabola con vertice nell'origine
Scegliamo come sistema di riferimento quello con l'asse y coincidente con la perpendicolare alla direttrice passante per il fuoco (*asse della parabola*), e con l'asse x parallelo alla direttrice e passante per il punto medio del segmento sull'asse che congiunge il fuoco con la direttrice. L'origine di questo sistema di riferimento è il *vertice* della parabola. Si denoti con *2p* la distanza del fuoco dalla direttrice.

L'equazione del luogo geometrico è quindi: $PF = PH \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = |y+p| \Rightarrow y = \frac{1}{4p}x^2$.

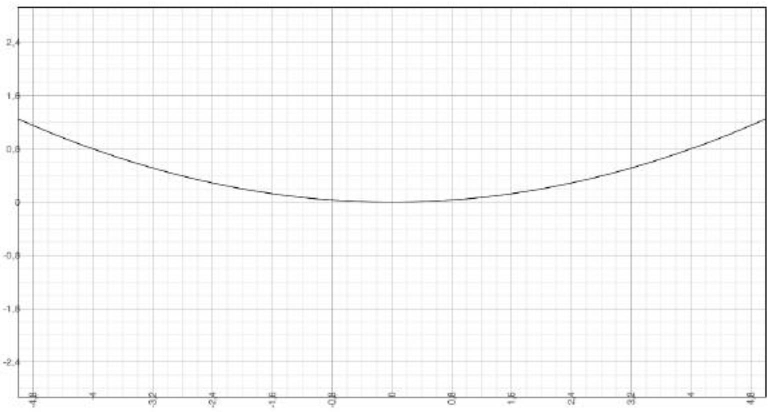
Se chiamiamo $a = \frac{1}{4p}$ otteniamo l'equazione della parabola con vertice coincidente con l'origine degli assi:

$$y = ax^2.$$

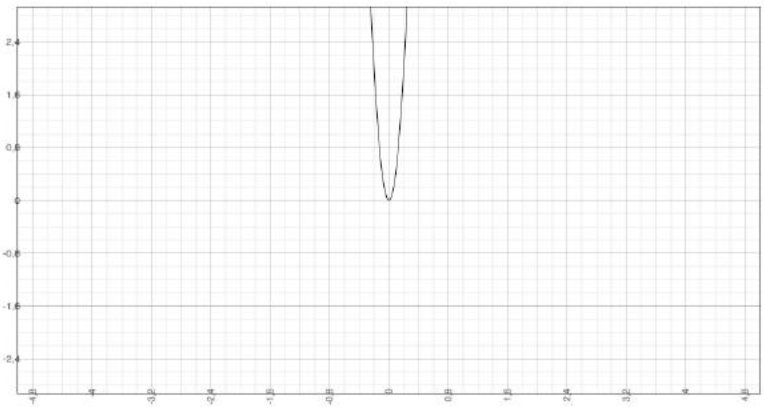


Osserviamo che:

a) Maggiore è p, minore è a ed il grafico è aperto sull'asse x.



b) Minore è *p*, maggiore è *a* ed il grafico è chiuso sull'asse y.



L'equazione generale della parabola

Vediamo come si scrive l'equazione di una parabola il cui vertice non coincide con l'origine. Si considera un nuovo sistema di riferimento con origine coincidente con il vertice della parabola, le cui coordinate sono legate alle vecchie dalle equazioni:

$$\begin{cases} X = x - x_V \\ Y = y - y_V \end{cases},$$

dove $V(x_V; y_V)$ è il vertice della parabola nel sistema di coordinate x-y. Nel nuovo sistema di riferimento l'equazione della parabola è

$$Y = aX^2.$$

Sostituendo in base alle equazioni di cui sopra otteniamo l'equazione:

$$y - y_V = a(x - x_V)^2.$$

Ovviamente il parametro *a* (che descrive la convessità della parabola) non cambia per effetto delle trasformazioni considerate. Sviluppando l'ultima espressione possiamo esprimere la parabola, con asse parallelo all'asse y, nella forma:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

dove i coefficienti *a*, *b*, e *c* sono legati alle coordinate del vertice dalla relazione

$$\begin{cases} x_V = -\dfrac{b}{2a} \\ y_V = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}.$$

Se la parabola è scritta nella forma $y = ax^2 + bx + c$, possiamo desumere l'equazione della direttrice

$$d\colon\ y = y_V - p = -\frac{1+\Delta}{4a},$$

e le coordinate del fuoco

$$\begin{cases} x_F = -\dfrac{b}{2a} \\ y_F = y_V + p = -\dfrac{1-\Delta}{4a} \end{cases}$$

e dell'asse della parabola.

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Esempio

Determinare le coordinate del vertice, del fuoco e della direttrice della parabola di equazione $3y - 12x^2 - 12x + 7 = 0$. Tracciare inoltre il grafico della parabola.

Soluzione

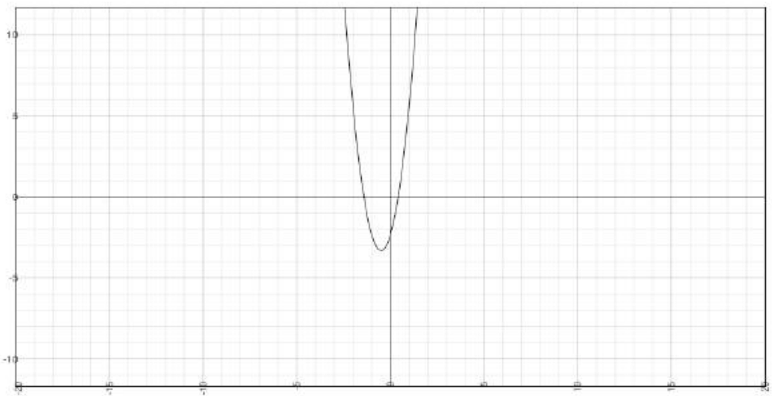
$3y + 7 = 12x^2 + 12x$

$y + \frac{7}{3} = 4x^2 + 4x + 1 - 1$

$y + \frac{10}{3} = 4(x + \frac{1}{2})^2 \Rightarrow a = 4;\quad V(-\frac{1}{2};-\frac{7}{3})\quad F(-\frac{1}{2};-\frac{7}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{25}{12})$

$x - \text{int}\quad \begin{cases} 3y - 12x^2 - 12x + 7 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{120}}{12}$

$y - \text{int}\quad \begin{cases} 3y - 12x^2 - 12x + 7 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{7}{3}$



Esercizi

1. Determinare vertice, fuoco, x-intersezioni, y-intersezione e tracciare il grafico delle seguenti parabole:

a) $y = -2x^2 + 8x$;

b) $6x^2 - 24x + 5 - y = 0$.

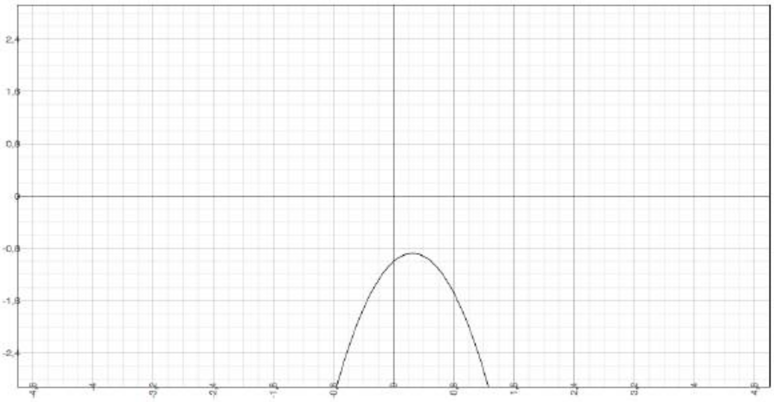
2. Determinare l'equazione della parabola:

a) Avente fuoco nel punto (1;2), asse parallelo all'asse y, e passante per il punto (9;0);

b) Che interseca l'asse x nei punti (1;0) e (5;0) e con $a = -2$.

Casi particolari

- Se il fuoco è situato "sotto" la direttrice *d*, la convessità della parabola cambia: il coefficiente *a* è infatti negativo. Per esempio la parabola di equazione



$y = -2x^2 + x - 1$

- Se la direttrice *d* è parallela all'asse y (l'asse della parabola è quindi parallelo all'asse x), si deduce l'equazione della parabola semplicemente scambiando tra loro le

$$x = ay^2 + by + c$$

variabili x e y: $V\left(-\frac{\Delta}{4a};-\frac{b}{2a}\right),\quad F\left(-\frac{1-\Delta}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$.

$$asse: \quad y = -\frac{\Delta}{4a}, d: \quad direttrice: \quad x = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

Il motivo di questo "scambio" è dettato da questioni di simmetria del problema.

6.3 Il problema della tangente alla parabola in un punto dato $P(x_0;y_0)$

Metodo algebrico

La geometria analitica riconduce la soluzione algebrica del problema allo studio del sistema di due equazioni di secondo grado

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}.$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima, otteniamo la cosiddetta "equazione risolvente"

$$ax^2 + (b-m)x + c - y_0 + mx_0 = 0.$$

La condizione algebrica per ottenere il valore del coefficiente angolare m è $\Delta = 0$.
In questo caso scriviamo:

$$(b-m)^2 - 4a(c - y_0 + mx_0) = 0 \Rightarrow (b-m)^2 - 4a\left(c - ax_0^2 - bx_0 - c + mx_0\right) = 0.$$

Riconoscendo il quadrato

$$\left[(b-m) + 2ax_0\right]^2 = 0,$$

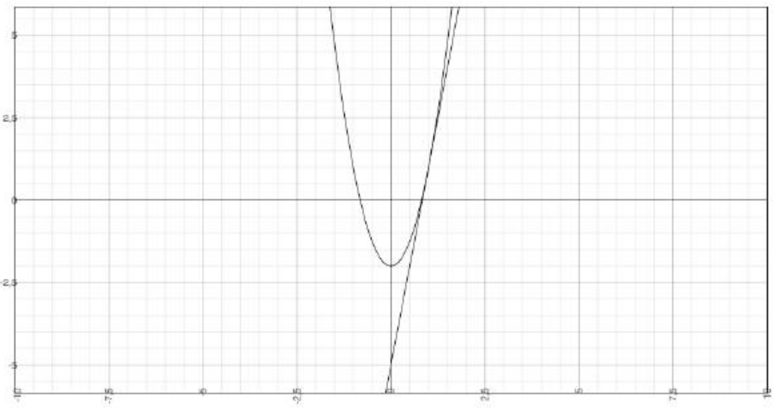
otteniamo come risultato $m = 2ax_0 + b$, e l'equazione della parabola è

$$y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0).$$

<u>Oppure</u>: si impone la condizione di tangenza $\Delta = 0$ nella soluzione dell'equazione risolvente, rappresentativa dell'ascissa del punto di tangenza. $x_0 = \frac{-(b-m) \pm \sqrt{0}}{2a} \Rightarrow m = 2ax_0 + b$.

- *Determinare l'equazione della tangente alla parabola* $y = 3x^2 - 2$ *nel punto di coordinate* $(1;1)$.
  Applicando l'ultima formula trovata otteniamo $m = 2ax_0 + b = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 0 = 6$
  E l'equazione della retta è

$$y - 1 = 6(x - 1) \Rightarrow y = 6x - 5.$$

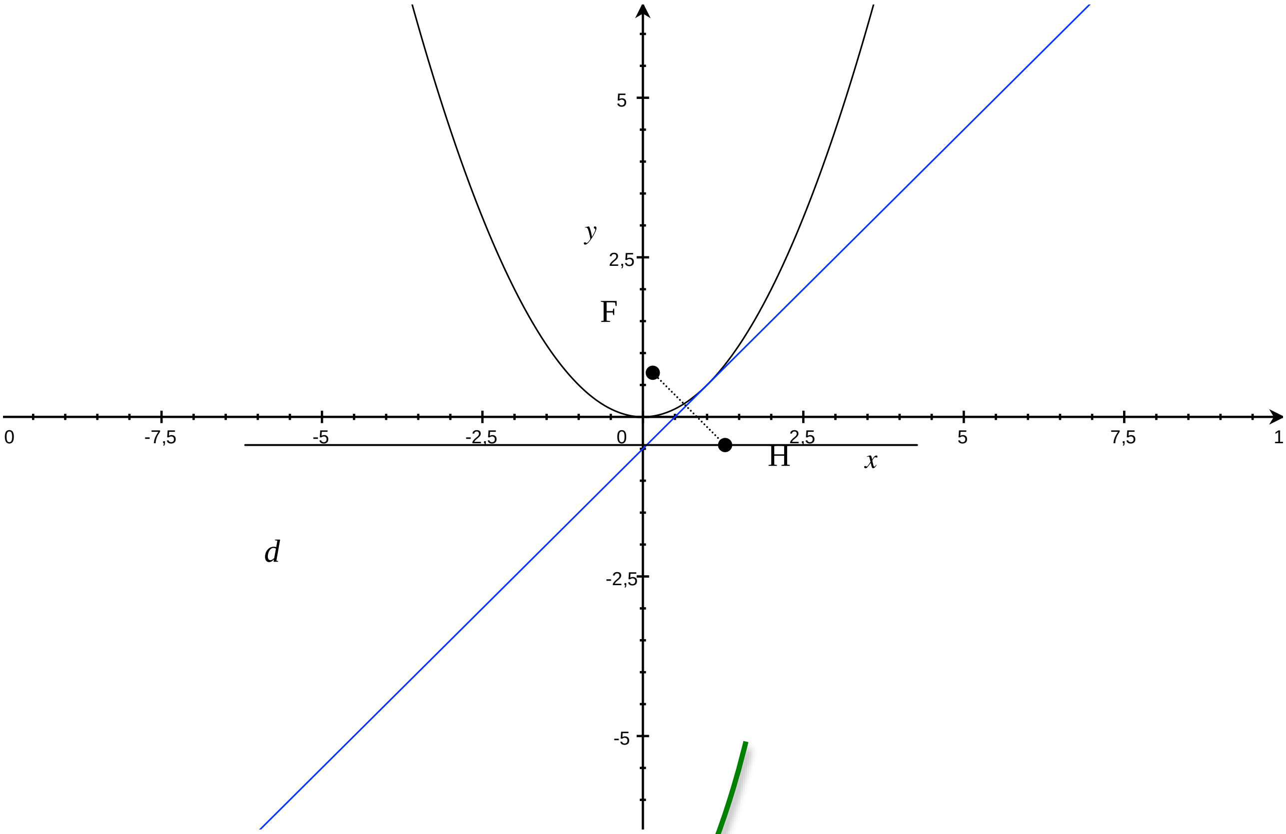


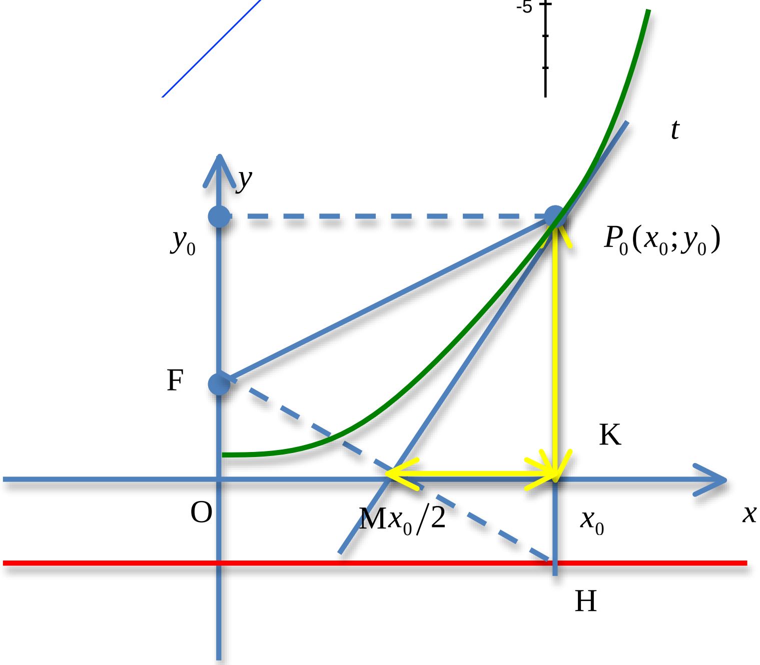
Nel caso in cui la parabola abbia l'asse parallelo all'asse x, i ragionamenti vengono modificati in base alle considerazioni fatte in precedenza, per cui:

$$\begin{cases} x = ay^2 + by + c \\ x - x_0 = m(y - y_0) \end{cases}.$$

Metodo geometrico

La tangente alla parabola in un punto ha la proprietà di lasciare il suo grafico tutto da una parte. Dimostriamo che l'asse del segmento FH usato per la costruzione della parabola gode di questa proprietà.





Dalla figura precedente si osserva che i triangoli OFM e MKH sono uguali, in quanto ambedue rettangoli, con gli angoli $K\hat{M}H = O\hat{M}F$ perché opposti al vertice, e con i lati $OF = KM$, coincidenti con la semidistanza focale per costruzione della parabola. Di conseguenza, il punto M appartiene all'asse *x* e le sue coordinate sono $M=\left(\frac{x_0}{2};0\right)$.

Il coefficiente angolare dell'asse è, per definizione, $m=\frac{P_0K}{MK}=\frac{y_0}{x_0/2}=\frac{2ax_0^2}{x_0}=2ax_0$ e, quindi la sua equazione è $y=y_0+2ax_0(x-x_0)$.

Per dimostrare che la parabola sta tutta su uno dei due semipiani delimitati dall'asse *t*, valutiamo lo "scostamento" Δy di un punto della parabola da quello, *avente la stessa ascissa*, che si trova sull'asse: $\Delta y=ax^2-(y_0+2ax_0(x-x_0))=ax^2-\left[ax_0^2+2ax_0x-2ax_0^2\right]=a\left(x-x_0\right)^2\geq 0$. Abbiamo così dimostrato che, nel caso particolare di parabola con vertice coincidente con l'origine, il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della parabola nel punto di coordinate $P\left(x_0;y_0\right)$ è dato dalla relazione $m=2ax_0$.

Se il vertice non coincide con l'origine, l'invarianza del coefficiente angolare per traslazioni, e le relazioni $\begin{cases}X=x-x_V\\Y=y-y_V\end{cases}$ permettono di determinare il coefficiente angolare: $m=2aX_0=2a\left(x_0-x_V\right)=2ax_0+b$. L'equazione generale della retta tangente nel punto $P\left(x_0;y_0\right)$ è $y=y_0+(2ax_0+b)(x-x_0)$.

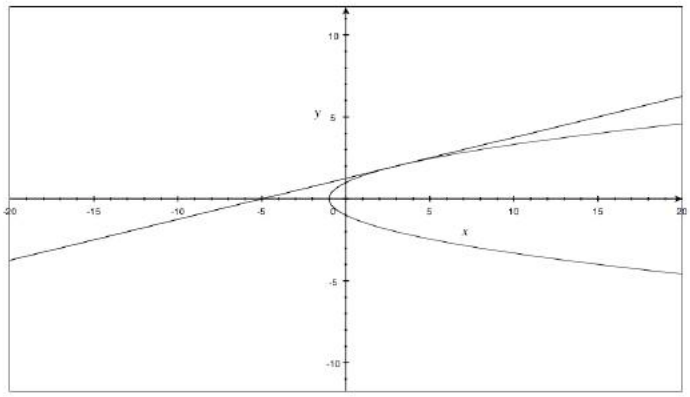
Calcoli analoghi a quelli fatti nel caso della parabola con asse parallelo all'asse y portano alla seguente utile formula per il calcolo del coefficiente angolare della tangente alla parabola in un punto noto $P\left(x_0;y_0\right)$:

$$m=\frac{1}{2ay_0+b}$$

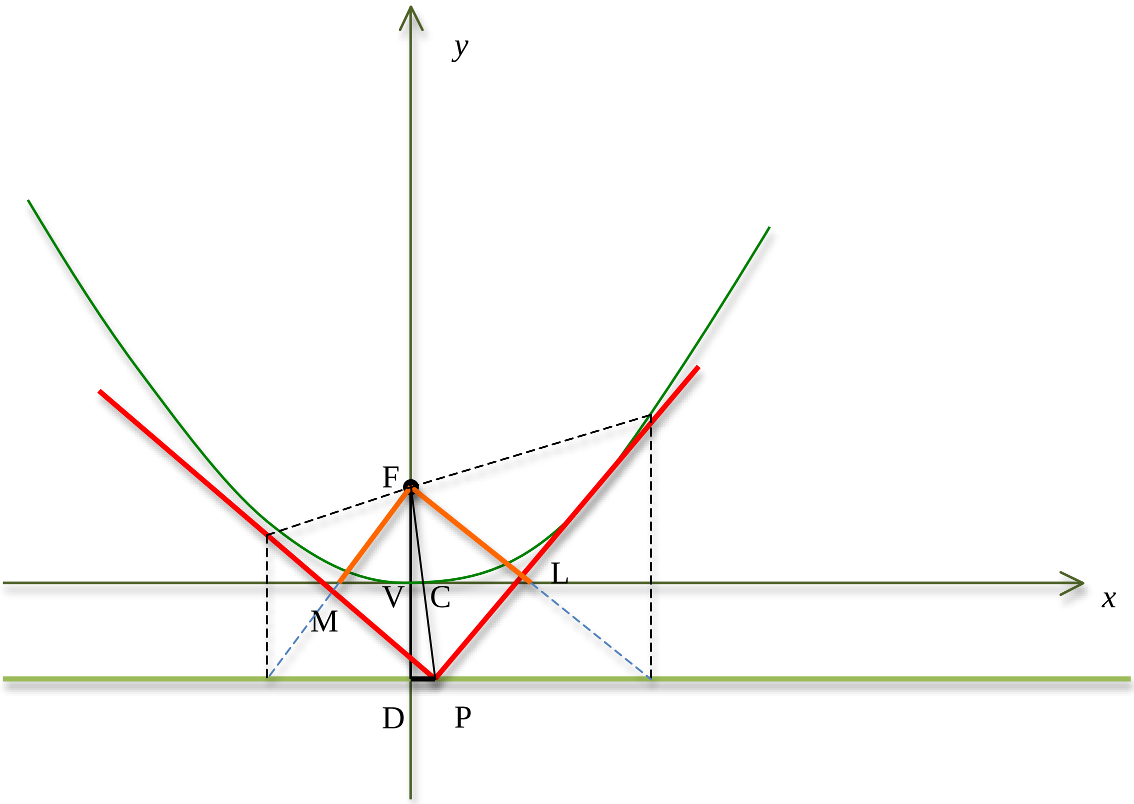
- *Determinare l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione* $x=y^2-1$ *nel punto di coordinate* $(3;2)$.

  Si applica la formula $m=\frac{1}{2ay_0+b}=\frac{1}{2\cdot 1\cdot 2+0}=\frac{1}{4}$ per cui

  $y-2=\frac{1}{4}(x-3)\Rightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ è l'equazione della tangente cercata.



6.4 Alcune proprietà della parabola
Perpendicolarità delle tangenti a una parabola condotte da un punto sulla direttrice



Dimostrazione *geometrica* I
Siano L e M i punti in cui le tangenti condotte dal punto P, appartenente alla direttrice, incontrano l'asse *x*. Per costruzione gli angoli $F\hat{M}P$ e $F\hat{L}P$ sono retti (si veda al riguardo il procedimento che ha portato alla costruzione della parabola). Siano C il punto in cui il segmento FP incontra l'asse *x*, e D il punto in cui la direttrice taglia l'asse *y*. La similitudine dei triangoli FVC e FDP ed il fatto che $FV = FD/2$ per le proprietà della parabola, conducono alla relazione $FC = CP$. Il triangolo FMP è quindi rettangolo in M e, di conseguenza, inscrivibile in una circonferenza di centro C e raggio $FC = CP = MC$. Con un ragionamento identico fatto sul triangolo FLP si arriva a concludere che $FC = CP = CL$, da cui segue $MC = CL$. L'ultima relazione trovata, unitamente alla $FC = CP$, permettono di concludere che il quadrilatero FMPL ha le diagonali ML e FP che si tagliano scambievolmente a metà in C: il quadrilatero è quindi un rettangolo e $M\hat{P}L$ è un angolo retto, c.v.d.

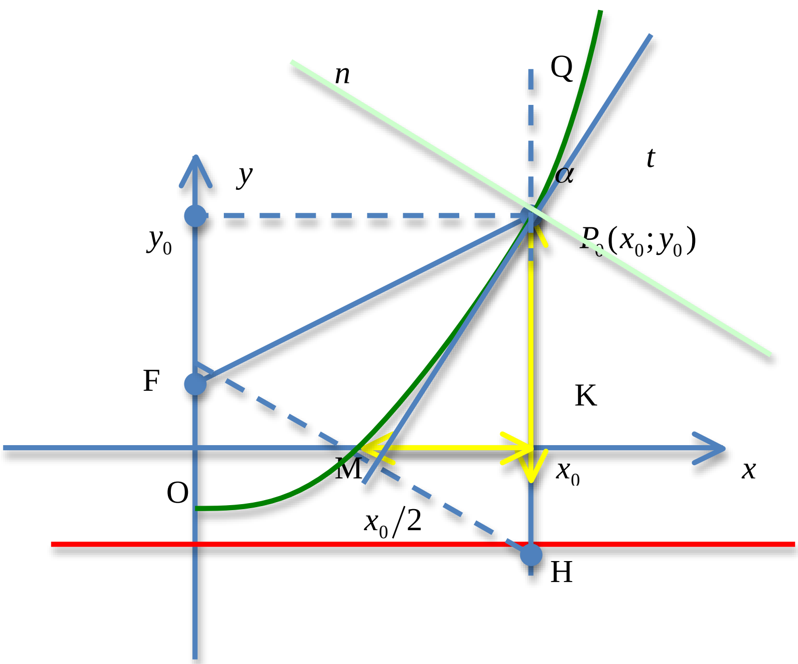
Dimostrazione *geometrica* II
Si traccino le semirette con origine nel fuoco F, perpendicolari alle tangenti t_1, t_2 uscenti da P, e siano H' e K' i punti in cui queste semirette incontrano la direttrice. Le tangenti t_1, t_2 sono, per costruzione, assi dei segmenti $\overline{FH'}, \overline{FK'}$, i cui punti medi sono rispettivamente H e K. Si formano i triangoli isosceli FPH' e FPK'. Proviamo che l'angolo $K\hat{P}H$ è retto: $\begin{cases} K\hat{P}H = 180° - (H\hat{P}H' + K\hat{P}K') \\ K\hat{P}H = F\hat{P}H + F\hat{P}K = H\hat{P}H' + K\hat{P}K' \end{cases} \Rightarrow 2K\hat{P}H = 180° \Rightarrow K\hat{P}H = 90°$.

Dimostrazione *analitica*

In riferimento alla figura, siano $y = ax^2$ l'equazione della parabola, e $y = -\frac{1}{4a}$ quella della direttrice.
L'equazione del fascio di rette uscenti da un generico punto $P(\bar{x}; -1/4a)$ sulla direttrice è
$y + \frac{1}{4a} = m(x - \bar{x})$. Il sistema con l'equazione della parabola conduce all'equazione risolvente
$ax^2 - mx + m\bar{x} + \frac{1}{4a} = 0$. Posta la condizione di tangenza
$0 = \Delta = m^2 - 4am\bar{x} - 1 \Rightarrow m_{1,2} = 2a\bar{x} \pm \sqrt{4a^2\bar{x}^2 + 1}$ da cui segue $m_1 m_2 = -1$, c.v.d. (oppure, dalla relazione tra le radici di un'equazione di secondo grado ed il termine noto,
$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow m_1 m_2 = \frac{-1}{1} = -1$).

Proprietà focali della parabola

Non è difficile dimostrare che un raggio incidente la parabola parallelamente all'asse, viene riflesso nel fuoco: $H\hat{P}_0M = \alpha$ perché opposti al vertice, $H\hat{P}_0M = M\hat{P}_0F$ perché il triangolo HFP_0 è isoscele di base FH, di conseguenza $M\hat{P}_0F = \alpha$



Parabola come traiettoria di un proiettile

Un proiettile è lanciato dal punto $P(x_0; y_0)$ con velocità v_0 con un angolo θ sopra l'orizzontale.
Fissato un sistema di coordinate, il moto nel campo gravitazionale considerato approssimativamente costante nelle vicinanze della superficie terrestre, è regolato dalle seguenti equazioni:

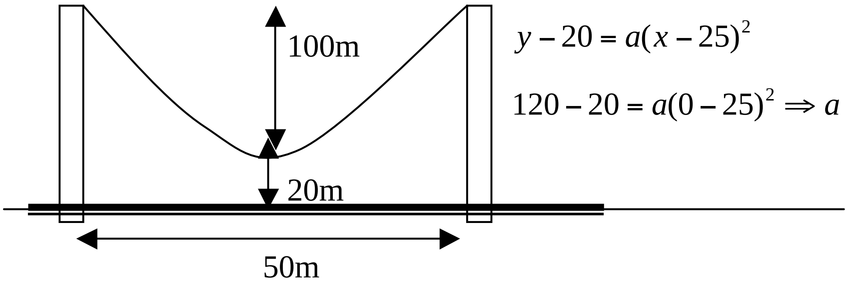
$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}.$$

Equazioni scritte in questo modo si dicono **equazioni parametriche** della parabola. In questo caso il "parametro" è il tempo *t*.
Si giunge all'**equazione cartesiana** della parabola (traiettoria del proiettile) eliminando il parametro *t* tra le due equazioni precedenti:

$$y = -\frac{(x - x_0)^2}{2v_{0x}^2} g + v_{0y} \frac{(x - x_0)}{v_{0x}} + y_0.$$

Problem

The cable of a suspension bridge is in the form of a parabola. If the bridge spans 50m, the roadway is 80m above the water level, the lowest point of the cable is 100m above the water and the top of the towers is 200m above the water, find the equation in expanded form of the cable.



$$y - 20 = a(x - 25)^2$$

$$120 - 20 = a(0 - 25)^2 \Rightarrow a = \frac{4}{25} \Rightarrow y = \frac{4}{25}x^2 - 8x + 120$$

Problem

If a soccer ball is kicked directly up at 4 m/s, how high does the ball get, at what time does it reach its maximum height, and at what time does it strike the ground.

$$a_y = -g$$

$$v_y = 4 - gt \Rightarrow t_{\max\, height} = \frac{4}{g} = 0.4s \Rightarrow t_{strike} = 2 \cdot 0.4s = 0.8s$$

$$y = 4t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y_{\max\, height} = 4 \cdot 0.4 - \frac{1}{2}g(0.4)^2 = 0.8m$$

Problema

a) Nel fascio di parabole con asse parallelo all'asse *y*, tangenti alla retta $2x - y - 3 = 0$ nel suo punto di ordinata 3, individua quella passante per il punto $(1;3)$.

- Scriviamo innanzitutto l'espressione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse *y*: $y = ax^2 + bx + c$. Il punto di tangenza è comune alla retta ed alla parabola cercata, quindi per ottenere un secondo punto (oltre al punto $(1;3)$) da cui passa la parabola, sarà sufficiente sostituire il valore 3 dell'ordinata nell'equazione della retta: $2x - y - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$. Ora, poiché due punti da cui passa la parabola, aventi la stessa ordinata, sono simmetrici rispetto all'asse, l'equazione di quest'ultimo è quindi $x = 2$. Riassumendo quanto appena detto:

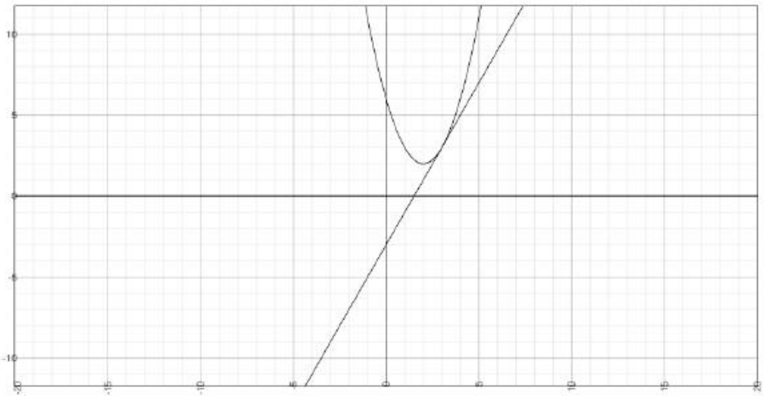
a) $-\dfrac{b}{2a} = 2$ (relazione tra l'asse della parabola ed i coefficienti della stessa)

b) $2 = 2a \cdot 3 + b$ (formula del coefficiente angolare della tangente in un punto dato)

c) $3 = a + b + c$ (imposizione del passaggio per il punto $(1;3)$).

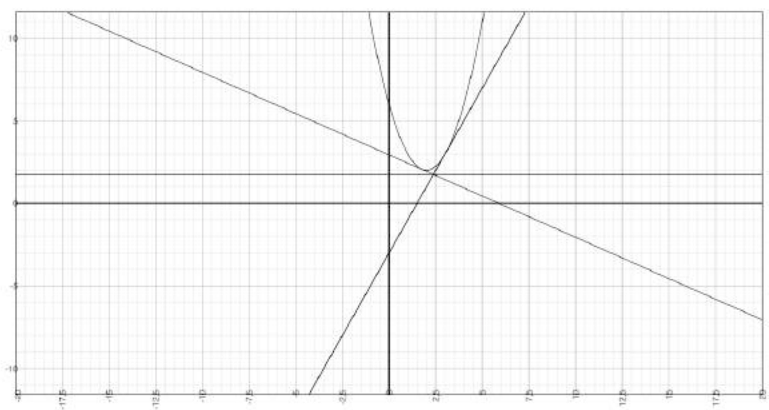
Mettendo a sistema quanto riportato nei punti a)-b)-c) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 4a + b = 0 \\ 6a + b = 2 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 6 \end{cases}$$ da cui segue l'equazione della parabola $y = x^2 - 4x + 6$.



b) Determina le equazioni delle tangenti *r* e *s* alla parabola mandate dal punto P della direttrice avente ascissa $\frac{19}{8}$.

- Iniziamo con lo scrivere l'equazione della parabola $y = x^2 - 4x + 6$ nella forma $y - 2 = (x-2)^2$. Di conseguenza la direttrice ha equazione $y = y_V - p = y_V - \frac{1}{4a} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$. Di conseguenza il punto P ha coordinate $P\left(\frac{19}{8};\frac{7}{4}\right)$. Il fascio di rette passanti per P ha equazione $y - \frac{7}{4} = m(x - \frac{19}{8})$. Mettendo questa equazione a sistema con quella della parabola $\begin{cases} y - \frac{7}{4} = m(x - \frac{19}{8}) \\ y = x^2 - 4x + 6 \end{cases}$ otteniamo l'equazione risolvente $x^2 - (4+m)x + \frac{17}{4} + m\frac{19}{8} = 0$, in cui, imponendo la condizione di tangenza $\Delta = 0$ otteniamo $(4+m)^2 - 17 - \frac{19m}{2} = 0 \Rightarrow m^2 - \frac{3}{2}m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} \Rightarrow \begin{matrix} m = 2 \\ m = -\frac{1}{2} \end{matrix}$. Di conseguenza, le rette cercate hanno equazione: $y = 2x - 3$ e $2y + x - \frac{7}{2} - \frac{19}{8} = 0 \Rightarrow 8x + 16y - 47 = 0$.



c) Calcola perimetro ed area del triangolo APB, dove A e B sono i punti di tangenza delle rette *r* e *s*.

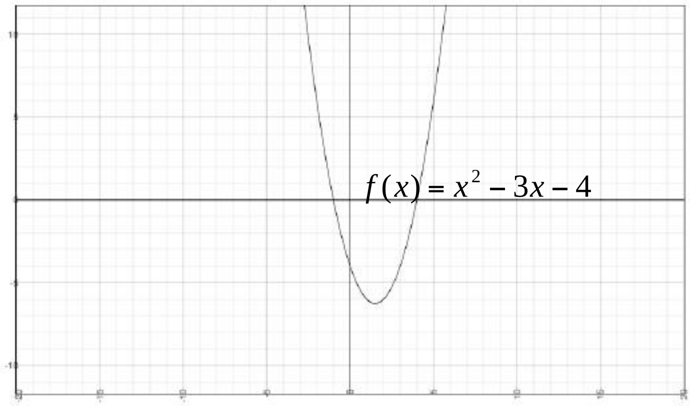
- Dalla formula $m = 2ax_0 + b$ segue: $2 = 2x_0 - 4 \Rightarrow A(3;3)$ e $-\frac{1}{2} = 2x_0 - 4 \Rightarrow B(\frac{7}{4};\frac{33}{16})$. Poiché le rette uscenti da un punto sulla bisettrice sono tra loro perpendicolari, il triangolo APB è un triangolo rettangolo, $AP = \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{8}$; $BP = \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{16}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{16}$; $AB = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{15}{16}\right)^2} = \frac{25}{16}$. Il perimetro sarà quindi $p = AP + BP + AB = \frac{15\sqrt{5} + 25}{16}$ e l'area $A = \frac{AP \cdot BP}{2} = \frac{125}{256}$.

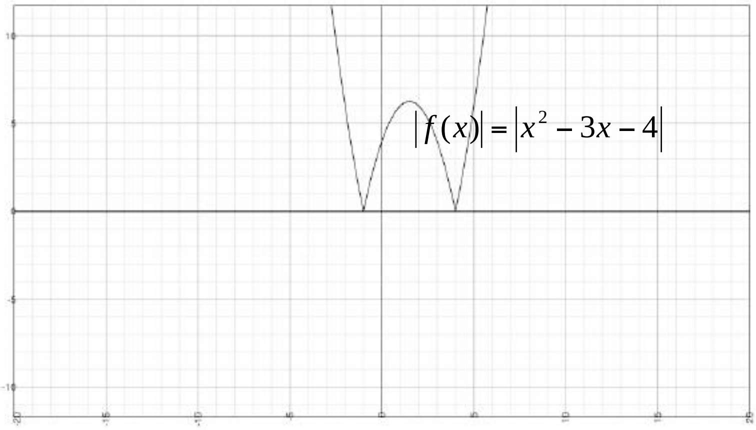
6.5 La parabola come grafico delle funzioni polinomiali di secondo grado

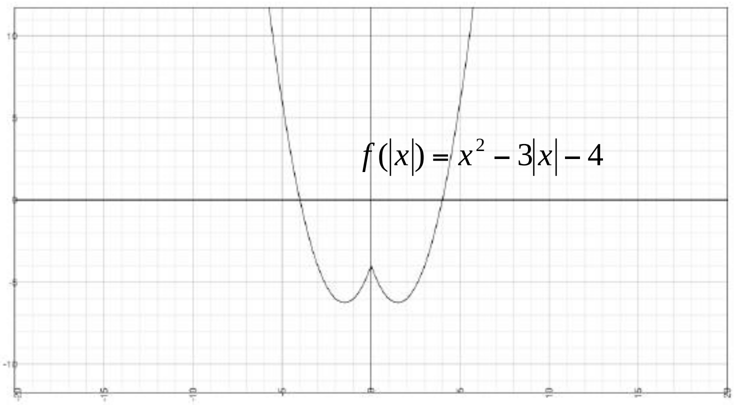
Una parabola con asse parallelo all'asse *y* può essere vista come il grafico di una funzione polinomiale di secondo grado (o, più brevemente, *quadratica*):

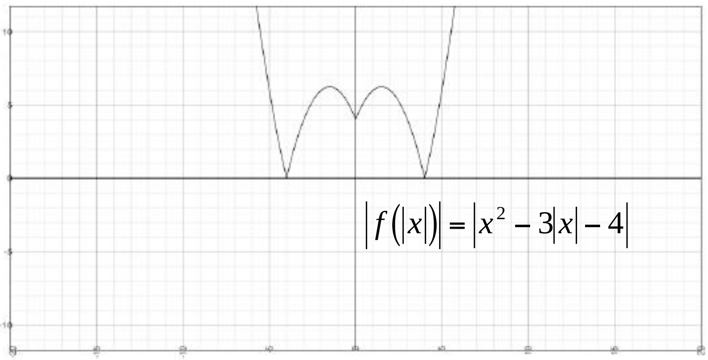
$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Di seguito rappresentiamo la funzione $f(x) = x^2 - 3x - 4$ e le funzioni da essa ottenibili per composizione con la funzione valore assoluto:


$f(x) = x^2 - 3x - 4$


$|f(x)| = |x^2 - 3x - 4|$

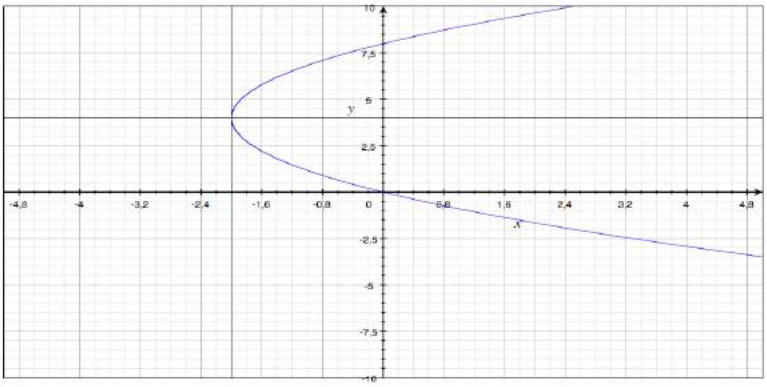

$f(|x|) = x^2 - 3|x| - 4$


$|f(|x|)| = |x^2 - 3|x| - 4|$

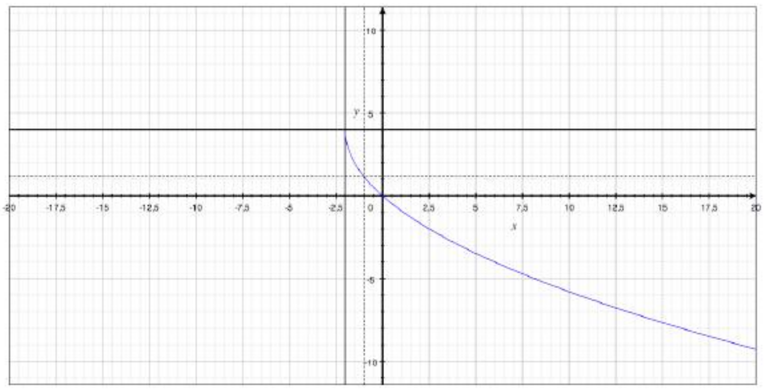
6.6 La parabola e le funzioni irrazionali
Problema

a) Rappresenta graficamente la curva di equazione $y = 4 - \sqrt{16+8x}$.

- Se scriviamo la curva data nella forma $\sqrt{16+8x} = 4 - y$, osserviamo che il campo di esistenza della funzione e l'immagine della stessa sono rappresentati nella parte di piano delimitata dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} 16+8x \geq 0 & C.E. \\ 4-y \geq 0 & I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 4 \end{cases}$. In questa parte di piano, quindi, è giustificata l'operazione algebrica $\left(\sqrt{16+8x}\right)^2 = (4-y)^2$ dalla quale segue $x = \frac{1}{8}y^2 - y$ che, globalmente, rappresenta l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse *x*: $x = \frac{1}{8}\left(y^2 - 8y + 16 - 16\right) \Rightarrow x + 2 = \frac{1}{8}(y-4)^2$ con vertice nel punto di coordinate $V(-2;4)$, il cui grafico è



Il grafico della funzione di partenza si ottiene a partire da quello della parabola tenendo conto delle condizioni $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 4 \end{cases}$:

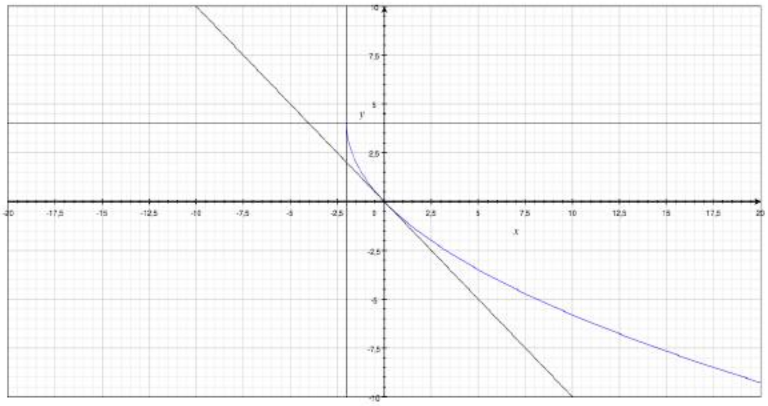


b) Determina l'equazione della retta *r* tangente alla curva nel suo punto V di ordinata maggiore.

- Il punto $V(-2;4)$ di ordinata maggiore, essendo vertice della parabola $x = \frac{1}{8}y^2 - y$, è tale che la tangente alla curva in quel punto coincide con la tangente alla parabola nel vertice, cioè con la retta $x + 2 = 0$.

c) Scrivi l'equazione della retta *s* tangente alla curva nel suo punto di ascissa nulla e trova le coordinate del punto A di intersezione tra le rette *r* e *s*.

- Il punto di ascissa nulla coincide con l'origine degli assi cartesiani. Dalla formula del coefficiente angolare ottenuta con il metodo degli infinitesimi "adattata" al caso della parabola con asse parallelo all'asse *x* ovvero $x = ay^2 + by + c$, risulta $m = 2ay_0 + b \Rightarrow m = 2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot 0 - 1 = -1$. Dunque la retta tangente *s* passa per l'origine ed ha coefficiente angolare uguale a-1: $s: \quad y + x = 0$. Di conseguenza il punto A è $A: \begin{cases} x + 2 = 0 \\ y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-2;2)$



d) Indica con B e C le proiezioni di V rispettivamente sull'asse *x* e sull'asse *y* e trova il rapporto tra l'area del quadrilatero VAOC e l'area del triangolo ABO.
   - I punto richiesti hanno coordinate $B(-2;0)$ e $C(0;4)$. Il quadrilatero VAOC è il trapezio di base maggiore OC = 4, base minore VA = 2, ed altezza VC = 2. L'area del quadrilatero VAOC sarà quindi $Area = 6$. Il triangolo ABO (rettangolo) ha base OB = 2 ed altezza AB = 2. L'area di conseguenza sarà uguale a 2 ed il rapporto tra l'area del quadrilatero VAOC e quella del triangolo ABO è dunque 6:2 = 3.

6.7 Disequazioni irrazionali

Il problema precedente suggerisce la ricerca di un metodo per risolvere disequazioni del tipo generale $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$, oppure $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$. Esaminiamo separatamente i due casi.

- $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$: se $g(x) < 0$ è sufficiente che il radicale esista affinché la disequazione sia risolubile, mentre se $g(x) \geq 0$, la disequazione è equivalente alla $f(x) \geq [g(x)]^2$. Quanto detto può essere riassunto nel seguente schema: $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq [g(x)]^2 \end{cases}$.
- $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$: in questo caso, se $g(x) < 0$ la disequazione è chiaramente impossibile. Al contrario, se $g(x) \geq 0$, e se il radicale esiste, $f(x) \geq 0$, la disequazione è equivalente alla $f(x) \leq [g(x)]^2$. Riassumendo: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^2 \end{cases}$.

Esercizi

Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

1. $\sqrt{2x^2 - 1} \geq 1 + x$;

2. $\sqrt{1-|x|} \geq 1-x$.
3. $\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} \geq \frac{x+1}{x-1}$.
4. $\sqrt{3+x} - \sqrt{1-2x} \geq \sqrt{x+4}$.

Problemi

1. Dire per quali valori di *a* e *b* l'equazione $x^2 + ay^2 - 4x - 4y + b = 0$ rappresenta:
   a) una parabola con asse parallelo all'asse y,
   b) una parabola con asse parallelo all'asse x.

2. Considera le parabole di equazione $y = x^2 + kx + 4$ e determina per quale valore di k sono tangenti all'asse delle ascisse e scrivi le equazioni delle parabole corrispondenti ai valori trovati.

3. Scrivere l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, passante per B(2,0) e avente per tangente in C(1,3) la retta *t* parallela alla retta $r: 2x + y = 0$.
4. Determinare per quale valore del parametro *k* la parabola di equazione $y = x^2 - k$ è tangente alla circonferenza di centro l'origine e raggio 2.
5. Data la funzione $f(x) = 2 - (x-1)^2$
   a) Tracciare il grafico della funzione $|f(x)|$;
   b) Tracciare il grafico della funzione $f(|x|)$.
6. Si tracci il grafico della funzione la funzione $f(x) = 2 + \sqrt{3-x}$.
7. Si scriva l'equazione della parabola avente come direttrice l'asse x e vertice V(0;1/2),
   a) Indicate con A e B le intersezioni della retta $y = mx$ con la parabola e C e D le proiezioni ortogonali rispettivamente di A e B sull'asse x, determinare *m* in modo che il trapezio ABCD sia equivalente al quadrato di lato CD;
   b) Si determini l'equazione della retta tangente alla parabola e parallela alla retta $y = 2x - 8$, determinando (ed indicando con P) il punto di contatto; calcolare l'area del triangolo OVP.
8. Scrivere l'equazione della parabola avente fuoco nel punto $F(0, \frac{1}{8})$ e passante per l'origine.
9. Scrivere l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y = -x^2 + 2x - 1$ nel suo punto di ascissa 2.
10. Scrivere l'equazione della parabola avente fuoco nel punto F(0,3), asse parallelo all'asse delle ordinate, e tangente alla retta di equazione $x - 2y - 2 = 0$.
11. Scrivere l'equazione della parabola avente fuoco $F\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ e vertice $V(1, -2)$.
    a) Si determinino le intersezioni della parabola con la bisettrice del II e IV quadrante,
    b) Si determini l'equazione della tangente alla parabola nel punto d'intersezione precedentemente trovato, di ascissa negativa.
12. Scrivi l'equazione della parabola tangente alle rette $r: x + 2y = 0$; $s: 2x - 2y - 9 = 0$ e avente per asse di simmetria la retta di equazione $y = -2$. Determina l'equazione della direttrice *d* della parabola e calcola l'area del triangolo formato dalle rette *d*, *s* e dalla perpendicolare alla parabola nel suo punto di ordinata -3.
13. Disegnare la parabola di equazione $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$ e scrivere l'equazione della retta tangente nel punto P di ascissa 1.
14. Si discutano le intersezioni delle rette passanti per il punto P(0,-4) con la parabola di equazione $y = x^2 - 2$.

Soluzioni delle disequazioni

1. $x \le 1-\sqrt{3} \vee x \ge 1+\sqrt{3}$
2. $0 \le x \le 1$
3. $\left(osservazione : \sqrt{A(x)} \ge -\frac{1}{A(x)} ... \right) -1 < x < 1$
4. $\varnothing$

Soluzioni dei problemi

1. $a)\begin{cases} a=0 \\ \forall b \in R \end{cases} ; b) \nexists a, b \in R$
2. $k = \pm 4$
3. $y = -x^2 + 4$
4. $k = -2$
7. $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \quad a) m = \pm 1; \pm\sqrt{2} \quad b) 16x - 8y - 9 = 0; A = \frac{3}{8}$
8. $y = 4x^2$
9. $2x + y - 3 = 0$
10. $3x^2 - 32y - 96 = 0$
11. $y = \frac{x^2}{4} - x - \frac{3}{2} \quad a)\left(\pm\sqrt{6}; \mp\sqrt{6}\right) \quad b)\left(\sqrt{6}+2\right)x + 2y - 6 - 4\sqrt{6} = 0$
12. $x = -\frac{y^2}{2} - 2y$
13. $x + y - 3 = 0$
14. $|m| < 2\sqrt{2}$ esterne, $|m| = \pm 2\sqrt{2}$ tangenti, $|m| > 2\sqrt{2}$ secanti

A-LEVEL MATHEMATICS

1. Find the equation of the parabola with the given focus and directrix: a) $focus(4;0) \quad directrix: x = -4$,b) $focus(0;4) \quad directrix: y = -8$.
2. Find the equation of the axis of symmetry of each of the following parabolae, and the coordinates of each vertex: a) $y^2 = 4(x-1)$, b) $4(y-1) = (x-2)^2$.
3. Find the tangent of gradient 2 to each of this parabolae: a) $y^2 = 4x$, b) $4y^2 = x$.
4. Find the tangent to the parabola $y^2 = 8x$ with gradient: a) 2, b) -1.
5. Show that there are two tangents to the parabola $y^2 = 4x$ through $(-1;2)$ and that these two tangents are perpendicular.