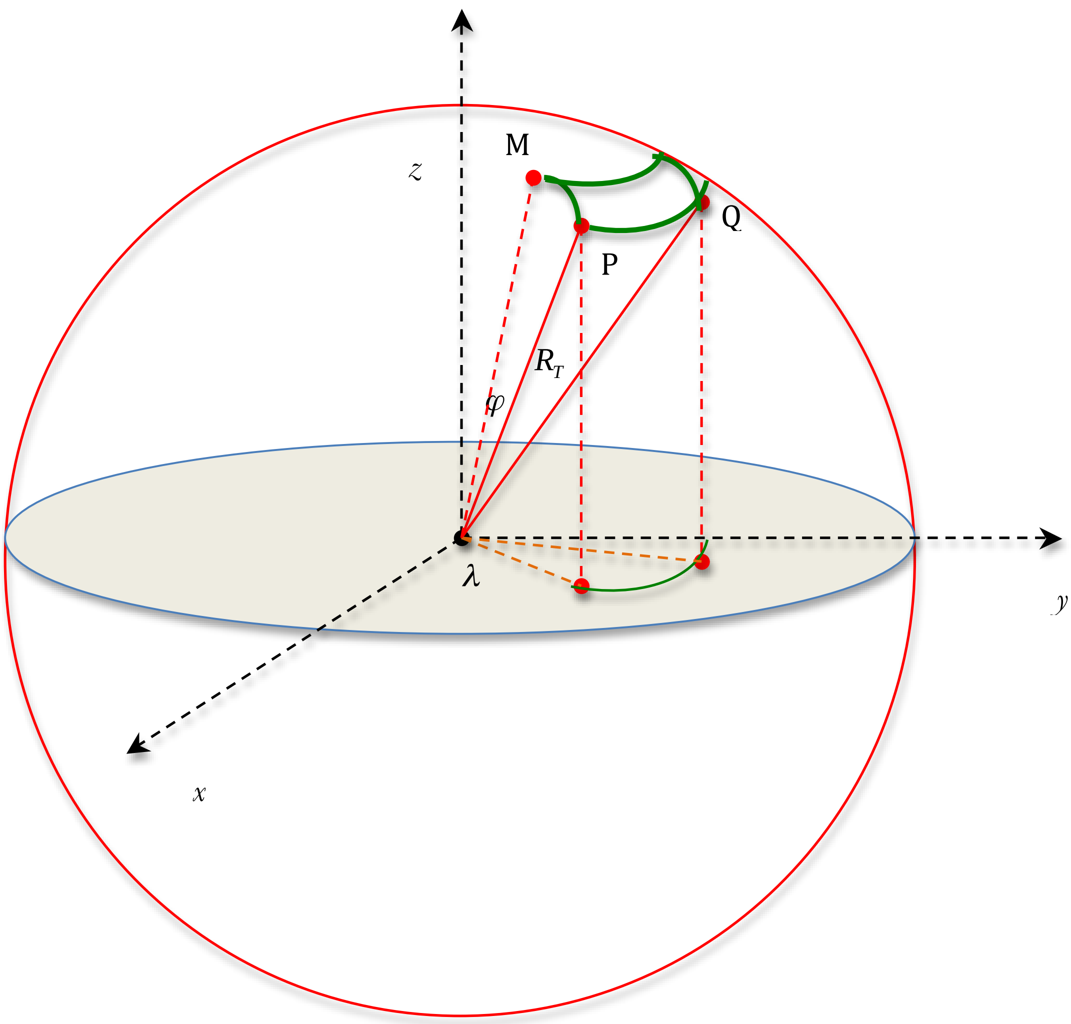
CAPITOLO 7
LA SFERA E LA GEOMETRIA NON EUCLIDEA

Ci prefiggiamo lo scopo di studiare la sfera come superficie dello spazio in modo *intrinseco*, senza considerare lo spazio in cui è *immersa*. I primi studi in questa direzione vengono fatti risalire alla prima metà dell'800, quando **Gauss** pubblica, nel 1837, la memoria *"Disquisitiones generales circa superficies curvas"*. Le idee esposte furono poi riprese da **Riemann**, nel 1854, durante la conferenza dal titolo *"Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria"*.
La novità più rilevante è certamente rappresentata dall'introduzione del concetto di *spazio curvo*, di fondamentale importanza nello studio della Teoria della Relatività generale.
L'idea di base sta tutta nello studio di una superficie dal punto di vista di un osservatore che può muoversi *su* di essa, senza essere in grado di percepire gli oggetti che stanno all'*esterno* della superficie, un po'come la *formica* di **Poincaré**.

7.1 La geometria della sfera

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con l'origine nel centro della Terra. Indicato con R_T il raggio terrestre, sono sufficienti due parametri angolari per individuare un punto sulla superficie della sfera: la *latitudine* e la *longitudine*. Il primo angolo è formato dal raggio congiungente il punto sulla superfice con il centro della Terra, con l'asse terrestre, mentre il secondo è l'angolo diedro formato dal piano contenente il punto sulla superficie e l'asse terrestre, con il piano contenente il *meridiano di Greenwich*. Indichiamo la latitudine con $-90° \le \varphi \le 90°$, la longitudine con $-180° \le \lambda \le 180°$.



La superficie della sfera e quella del fuso sferico

Le coordinate di un generico punto sulla superficie della sfera sono:
$P\left(R_T \cos\varphi \cos\lambda, R_T \cos\varphi \sin\lambda, R_T \sin\varphi\right)$. Di conseguenza, la superficie della sfera è data dall'integrazione dell'*elemento di superficie* $dS = PM \cdot PQ$:

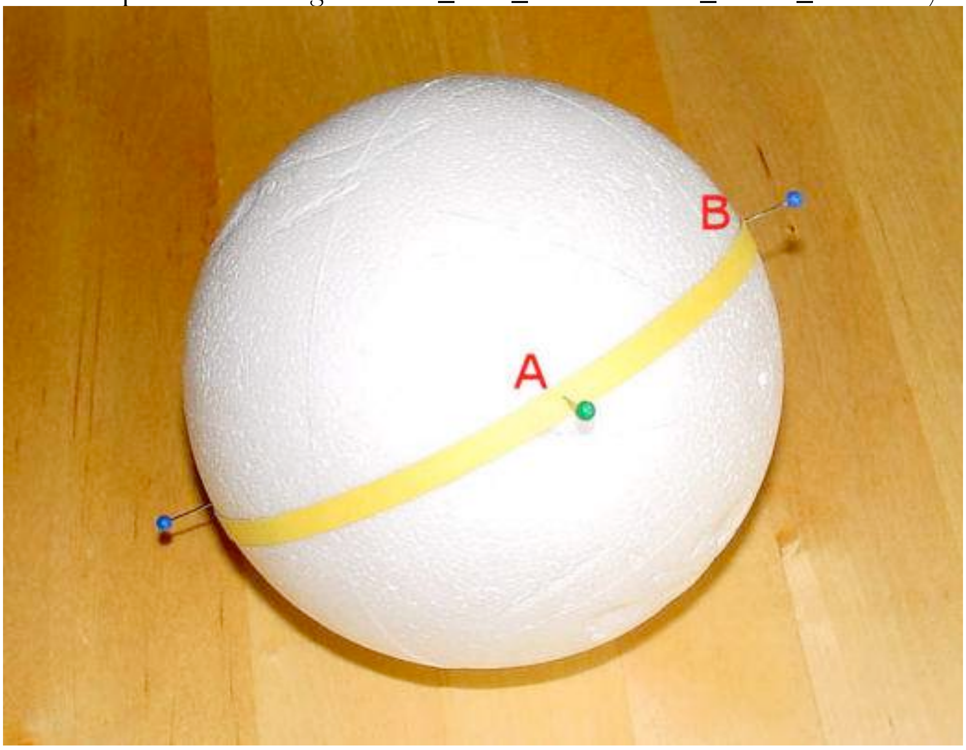
$$dS = (2\pi R_T \cos\varphi) R_T d\varphi \Rightarrow S = 2\pi R_T^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = 4\pi R_T^2$$

Consideriamo adesso due circonferenze massime che si incontrano in due punti antipodali A e A'. La superficie sferica viene così suddivisa in 4 parti, dette **fusi**, limitate da due semicirconferenze che formano, in A e in A', angoli uguali. In particolare, l'ampiezza del diedro individuato dalle due semicirconferenze è detta **ampiezza del fuso**. Si può dimostrare che l'area del fuso $A(F)$ e quella della sfera $A(S) = 4\pi r^2$ sono proporzionali, per cui: $A(F) : A(S) = \alpha : 2\pi$. Di conseguenza, l'area del fuso sferico è $A(F) = 2r^2\alpha$. Se l'angolo β è espresso in gradi, l'area del fuso si scrive nella forma

$$A(F) = \frac{\pi\beta}{90°} r^2 .$$

Geodetiche sulla sfera

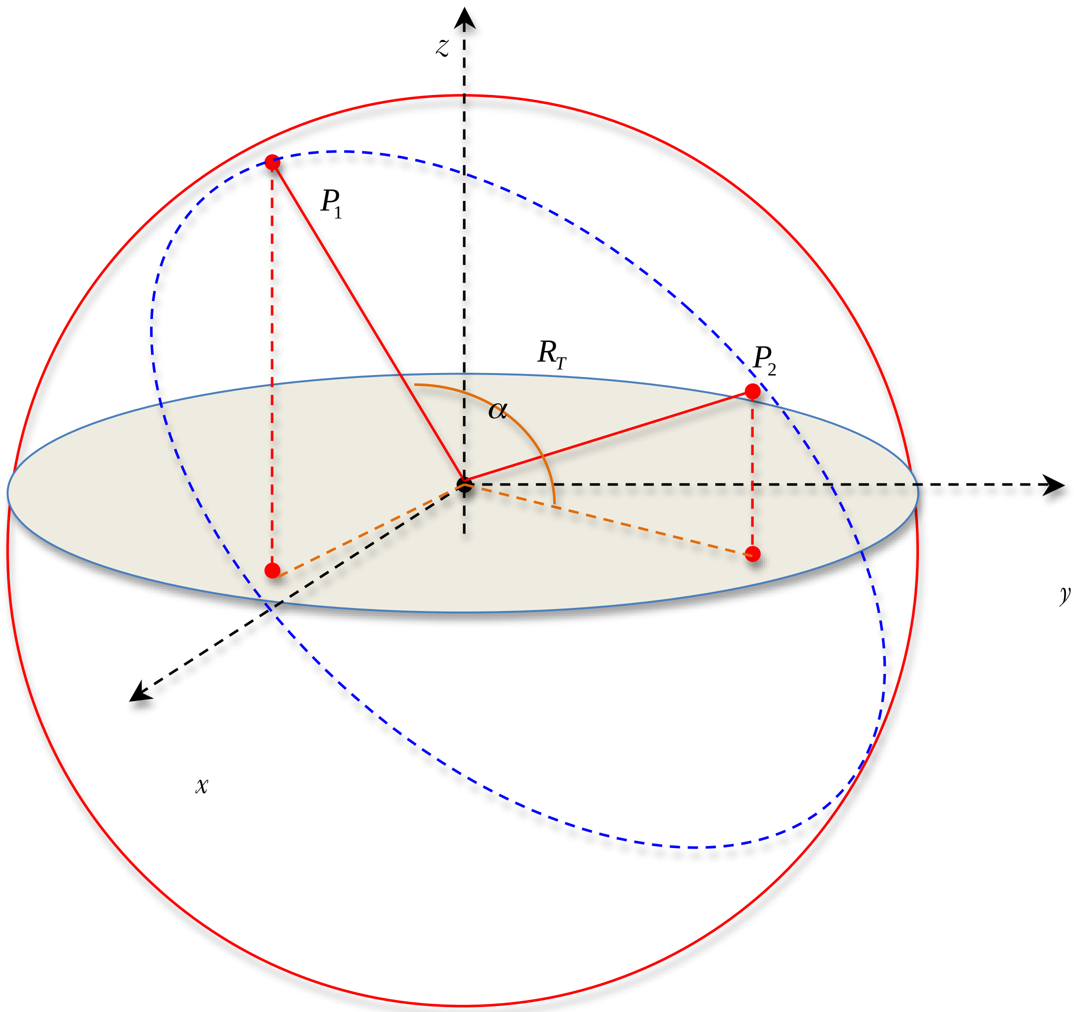
Dati due punti A, B su una sfera, si può *dimostrare* che il cammino di minima lunghezza che li congiunge è un **arco di cerchio massimo**. La dimostrazione è piuttosto complessa, tuttavia è possibile convincersi empiricamente di questo fatto, tendendo un filo elastico tra i due punti (si tratta di un'esperienza condotta *sulla* sfera, senza sfruttare lo spazio in cui è immersa). La curva su cui si dispone, in modo naturale, il filo elastico, è un arco di cerchio massimo, o **geodetica**. Per via di questa proprietà di minimizzare il cammino tra due punti sulla sfera, le geodetiche possono essere considerate l'equivalente delle rette del piano euclideo: d'ora in poi le geodetiche saranno per noi le *rette* sulla sfera. Inutile dire che le rette, per come le conoscevamo sul piano, dovranno, sulla sfera, essere *profondamente* ripensate. (L'immagine seguente è tratta dal sito http://users.libero.it/prof.lazzarini/geometria_sulla_sfera/modelli_noneu_start.htm)



Calcolo della lunghezza di un arco di geodetica

Vogliamo calcolare la lunghezza dell'arco di geodetica congiungente due punti, P_1 e P_2, individuati dalle rispettive latitudini e longitudini: $P_1\left(R_T\cos\varphi_1\cos\lambda_1, R_T\cos\varphi_1\sin\lambda_1, R_T\sin\varphi_1\right)$, e $P_2\left(R_T\cos\varphi_2\cos\lambda_2, R_T\cos\varphi_2\sin\lambda_2, R_T\sin\varphi_2\right)$. La lunghezza dell'arco è $P_1P_2 = R_T\alpha$, dove α è l'angolo tra i raggi congiungenti il centro della Terra con i punti P_1 e P_2 sulla superficie terrestre. Si applica il teorema di Carnot al triangolo OP_1P_2 per determinare il coseno dell'angolo α:

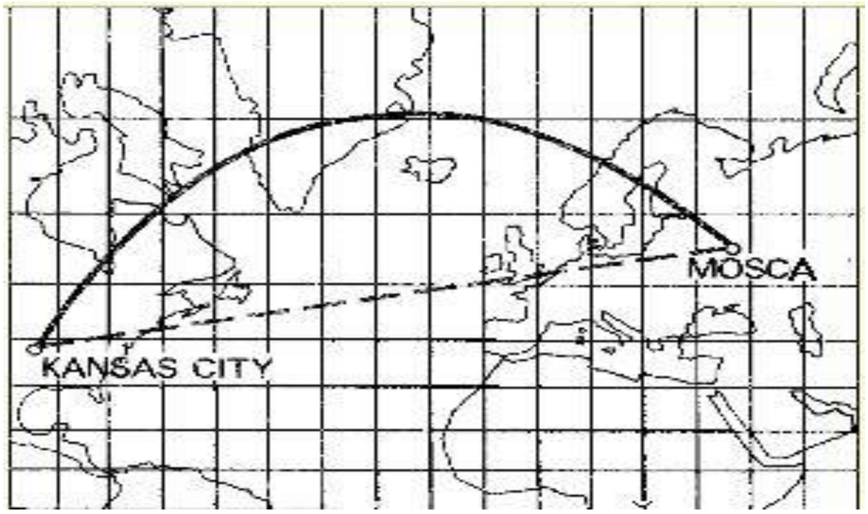
$\overline{P_1P_2} = R_T\sqrt{2(1-\cos\alpha)} = 2R_T\sin\dfrac{\alpha}{2}$, essendo $\overline{P_1P_2}^2 = 2R_T^2\left[1-\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos|\Delta\lambda| - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right]$. Di conseguenza, se gli angoli sono espressi in gradi, la lunghezza d'arco geodetica è data dalla relazione $P_1P_2 = R_T\dfrac{\pi}{180}\arccos\left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos|\Delta\lambda| + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right]$.



Osservazione. Se i due punti si trovano alla stessa latitudine $\varphi_1 = \varphi_2$, la lunghezza dell'**arco di parallelo** che li congiunge è data dalla relazione $L_{P_1P_2} = R_T\dfrac{\pi}{180}|\Delta\lambda|\cos\varphi$.

Esercizio. Calcolare la lunghezza d'arco di geodetica congiungente Mosca $\left(\varphi = 55°45'N, \lambda = 37°37'E\right)$, con Kansas city $\left(\varphi = 39°8'N, \lambda = 94°34'O\right)$.

Si ha $P_1P_2 = 6371,22\frac{\pi}{180}\arccos\left[\cos 55,75°\cos 39,13°\cos 132,18 + \sin 55,75°\sin 39,13°\right]km = 8539km$



Esercizio. Calcolare la lunghezza d'arco di parallelo congiungente San Pietroburgo $(\varphi = 60°N, \lambda = 30°E)$ con le Isole Shetland $(\varphi = 60°N, \lambda = 1°O)$.

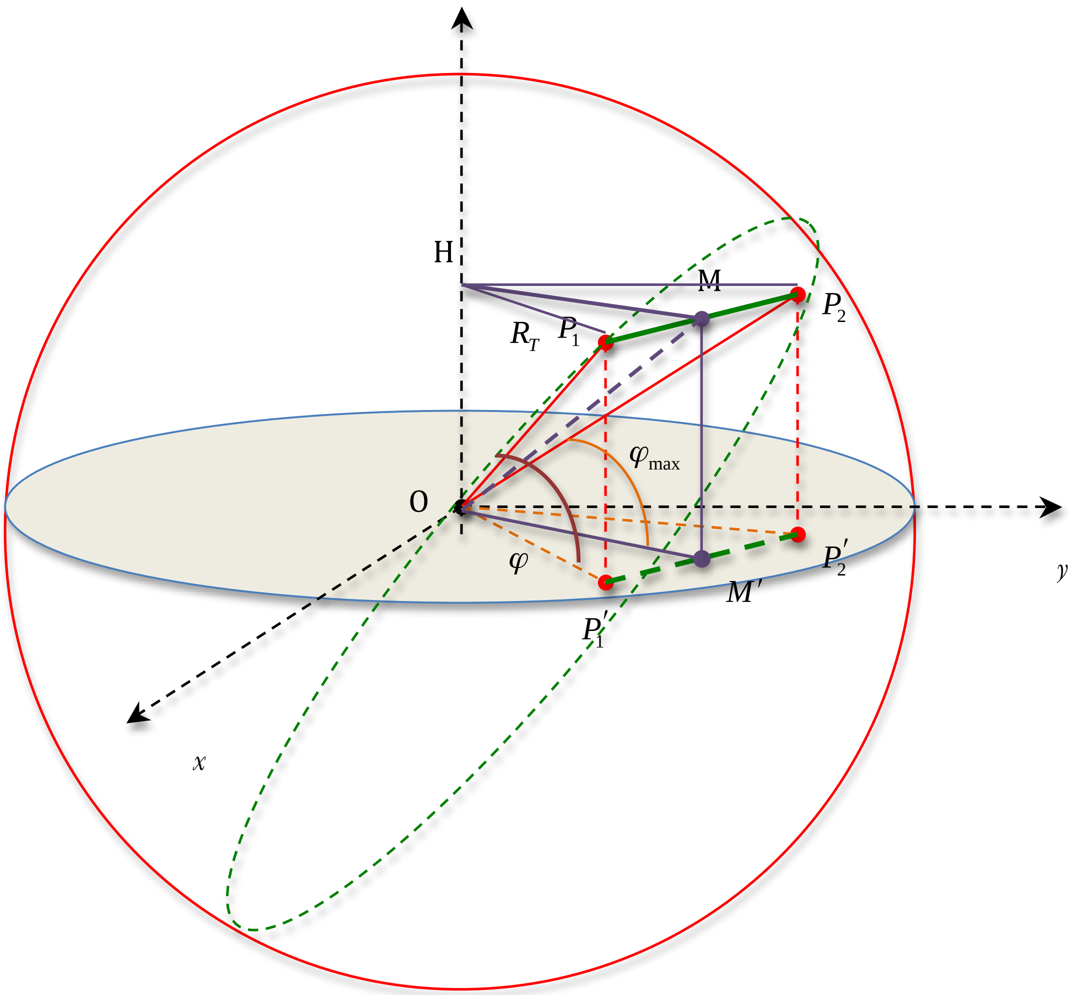
Risulta $L_{P_1P_2} = 6371,22\frac{\pi}{180°}\left(30-(-1)\right)°\cos 60° km = 1724km$.

Calcolo del culmine

Il culmine è la massima latitudine toccata dall'arco di cerchio massimo che congiunge due punti P_1 e P_2, situati sullo stesso arco di parallelo (che si trovano, quindi, alla stessa latitudine φ). Indicato con M il punto medio del segmento P_1P_2, siano P_1', P_2', M' le proiezioni dei rispettivi punti sul piano equatoriale. Il culmine è quindi l'angolo $\varphi_{\max}$ formato dal piano OP_1P_2 con il piano equatoriale. Si ha: $P_1\hat{H}P_2 = |\Delta\lambda|$, $\overline{P_1H} = \overline{P_2H} = R_T\cos\varphi$, $\overline{OM}\sin\varphi_{\max} = \overline{MM'} = \overline{P_1P_1'} = R_T\sin\varphi$, e

$\overline{OM}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HM}^2 = \left(R_T\sin\varphi\right)^2 + \left(R_T\cos\varphi\cos\frac{|\Delta\lambda|}{2}\right)^2$. Ora, dalla

$$\sin\varphi_{\max} = \frac{\overline{MM'}}{\overline{OM}} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\left(\cos\varphi\sin\frac{|\Delta\lambda|}{2}\right)^2}}.$$



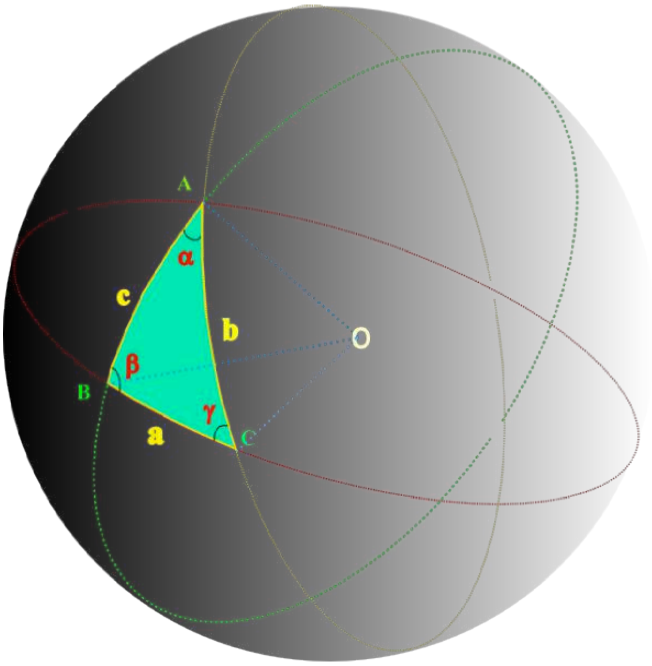
Esercizio. Calcolare l'altezza del culmine dell'arco di geodetica che congiunge Montevideo $(\varphi = 34°53'S, \lambda = 56°14'O)$, con Città del capo $(\varphi = 34°22'S, \lambda = 18°39'E)$. Considerare approssimativamente alla stessa latitudine $(\varphi = 34,5°S)$ le due località.

Risulta $\sin\varphi_{max} = \dfrac{\sin(-34,5°)}{\sqrt{1-\left(\cos(-34,5°)\sin\dfrac{|34°22'-(-56°14')|}{2}\right)^2}} = 0,6545 \Rightarrow \varphi_{max} = -41° = 41°S$.

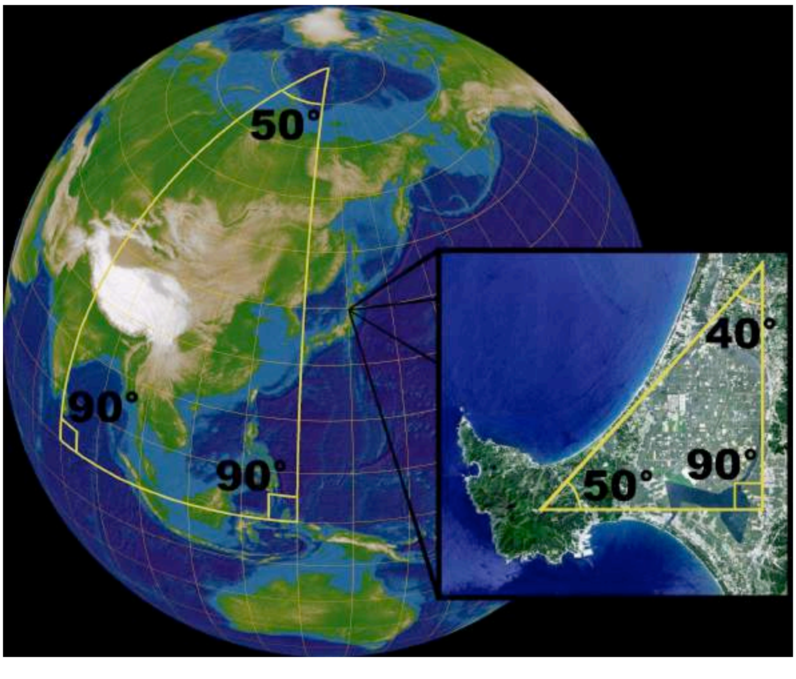
7.2 Triangolo sferico

Dati tre punti A, B, C sulla sfera non appartenenti allo stesso cerchio massimo (nel piano diremmo non allineati…) si definisce **triangolo sferico** l'intersezione tra la superficie sferica ed il triedro che ha vertice coincidente con il centro O della sfera, e spigoli passanti per i tre punti A, B, C. Le

circonferenze massime a cui appartengono i lati del triangolo sferico appartengono a piani passanti per il centro della sfera, che formano angoli di ampiezza inferiore a π.
Per definire rigorosamente l'angolo sulla sfera, si considerano due circonferenze massime, C_1, C_2, aventi in comune il punto A. I piani che le contengono individuano sul piano tangente in A alla sfera, due rette t_1, t_2, tangenti rispettivamente alle circonferenze C_1, C_2. Si chiama **angolo sferico** l'angolo avente per origine A, e semirette quelle tangenti alle due semicirconferenze delimitate da A e dal suo antipodale A'.



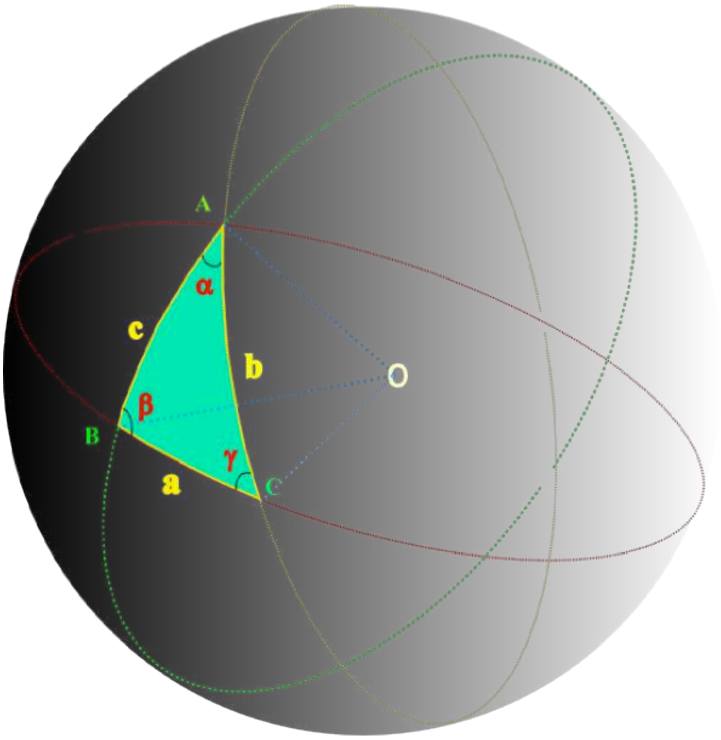
Eccesso angolare
Si può dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo sferico è maggiore di 180°. La differenza tra la somma e la misura dell'angolo piatto si dice **eccesso angolare**: $\alpha + \beta + \gamma > 180°$.



Il teorema di Girard.

In un triangolo sferico l'eccesso angolare è proporzionale all'area del triangolo stesso: $A(T)=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)r^2$.

Dimostriamo questo teorema. Due circonferenze massime su una sfera si incontrano in due punti antipodali, A e A'. Una terza circonferenza massima incontra le prime due nei punti B,B',C,C': a questo punto la sfera è divisa in 8 triangoli sferici. Calcoliamo l'area di uno di questi, ad esempio ABC.



Indichiamo con T e T' il triangolo ABC ed il suo simmetrico rispetto al centro O della sfera. I due triangoli hanno la stessa area: $A(T)=A(T')$, che può essere calcolata osservando che i tre fusi individuati dal triangolo T, ed i rispettivi opposti individuati da T', ricoprono la sfera: $4\pi r^2 = 2(2\alpha r^2)+(2\beta r^2-A(T))+(2\beta r^2-A(T'))+(2\gamma r^2-A(T))+(2\gamma r^2-A(T'))$, da cui segue, ricordando che $A(T)=A(T')$, il risultato cercato:

$$A(T)=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)r^2.$$

Il raggio della sfera

Un'importante conseguenza della formula trovata è rappresentata dalla possibilità di ricavare la lunghezza del raggio della superficie sferica in modo intrinseco, ovvero *senza ricorrere allo spazio in cui è immersa*:

$$r^2=\frac{A(T)}{(\alpha+\beta+\gamma-\pi)}.$$

Un confronto tra rette del piano e cerchi massimi sulla sfera

Riassumiamo nel seguente schema comparativo le proprietà delle rette del piano e dei cerchi massimi sulla sfera.

	Retta del piano	**Cerchio massimo sulla sfera**
1. simmetrie	È asse di simmetria del piano (lo divide in due parti).	Divide la sfera in due parti simmetriche rispetto al piano contenente il cerchio massimo.
2. limitatezza	È illimitata.	Non è illimitata, in quanto l'inestendibilità è dovuta al ritorno, dopo un giro, al punto di partenza.
3. parallele e V postulato	Esistono rette parallele tra loro.	Non esistono cerchi massimi paralleli sulla sfera. Tutti i piani passanti per il centro della sfera hanno una retta in comune, e i punti in cui questa incontra la sfera appartengono a tutti i cerchi massimi.
4. unicità della "retta" per due punti	Per due punti del piano passa una ed una sola retta.	Non sempre. Per due punti *antipodali* (simmetrici rispetto al centro della sfera) passano infiniti cerchi massimi.
5. somma degli angoli interni di un triangolo	180°	Non è costante.