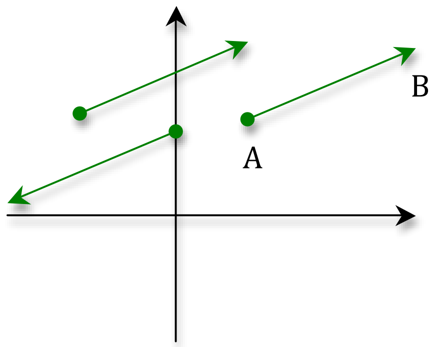
CAPITOLO 5
VETTORI DEL PIANO E DELLO SPAZIO

5.1 Definizione ed operazioni con i vettori

Un vettore è un ente matematico caratterizzato da una *direzione*, un *modulo*, e un *verso*. Si rappresenta mediante *segmenti orientati* del piano euclideo, oppure attraverso *punti*, come si può vedere nella seguente figura.

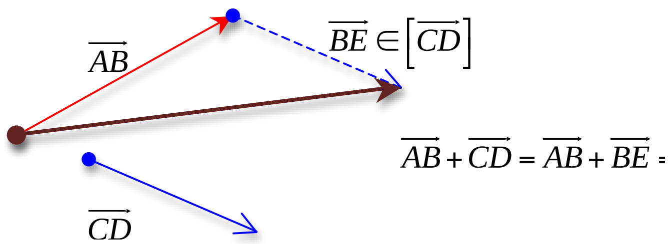


Il vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ è caratterizzato dai punti A, *coda*, e B, *punta*, del piano cartesiano. La direzione è quella della retta contenente il segmento $\overline{AB}$, il modulo è la lunghezza del medesimo segmento $\left|\overrightarrow{AB}\right| := \overline{AB}$, il verso è quello orientato dal punto A al punto B. La notazione $\overrightarrow{AB}$ riassume tutte queste informazioni.

La coda del vettore è chiamata in fisica *punto di applicazione*, e si parla di *vettori applicati* quando non si può prescindere dal punto di applicazione. Oltre ad $\overrightarrow{AB}$ sono rappresentati in figura altri vettori aventi la stessa direzione (ovvero situati su rette parallele, distinte o no da quella di $\overrightarrow{AB}$). Il *parallelismo* tra vettori è una *relazione di equivalenza*, di conseguenza l'insieme dei vettori del piano viene suddiviso in *classi di equivalenza* i cui elementi sono vettori paralleli. Si considera quindi un rappresentante per ciascuna classe, nell'esempio considerato possiamo prendere il vettore $\overrightarrow{AB}$.

Somma di vettori

La somma di vettori si basa fondamentalmente sull'idea di *traslazione*. Cerchiamo di capire perché.



Il vettore $\overrightarrow{CD}$ viene traslato "parallelamente" a se stesso nel vettore $\overrightarrow{BE}$, appartenente alla classe di equivalenza di $\overrightarrow{CD}$. La somma dei vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ viene quindi, di fatto, eseguita tra $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BE}$, e si può interpretare come lo spostamento da A a B, seguito da quello da B ad E: si tratta del cosiddetto *metodo punta-coda*, equivalente alla *regola del parallelogramma* spesso utilizzata in fisica.

L'opposto di un vettore

Dato il vettore $\overrightarrow{AB}$ si definisce *opposto* il vettore avente la stessa direzione, lo stesso modulo, ma verso opposto:

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

La somma tra un vettore ed il suo opposto è il vettore cosiddetto *nullo*, $\overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$. L'opposto di un vettore permette di ricondurre la *differenza* tra vettori alla somma tra un vettore e l'opposto dell'altro:

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}.$$

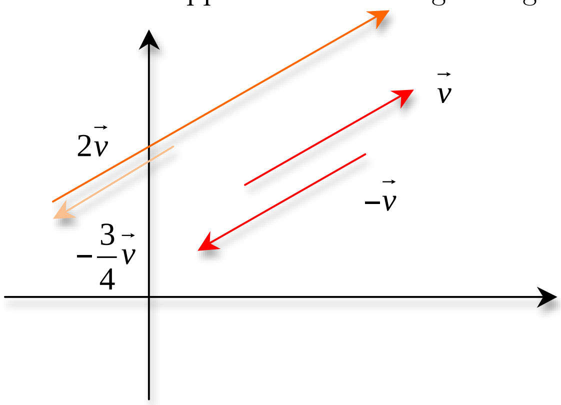
Il prodotto tra numeri e vettori

Si definisce il prodotto tra un numero reale λ, che chiameremo d'ora in poi *scalare*, ed un vettore $\overrightarrow{AB}$, come il vettore che ha la stessa direzione di $\overrightarrow{AB}$, lo stesso verso se $\lambda > 0$, verso opposto se $\lambda < 0$, e modulo uguale al prodotto tra $|\lambda|$ ed il modulo di $\overrightarrow{AB}$.

Quando non c'è bisogno di specificare il punto di applicazione si parla di *vettori liberi*, e vengono denotati con il simbolo $\vec{v}$. In questo modo il prodotto del vettore $\vec{v}$ per lo scalare λ è il vettore $\vec{w}$ tale che:

$$\vec{w}=\lambda\vec{v}, \text{ e } |\vec{w}|=|\lambda||\vec{v}|.$$

Quanto detto è rappresentato nella figura seguente.



In base ai concetti presentati possiamo definire *allineati* due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ se hanno la stessa direzione, ovvero se esiste un numero reale λ tale che $\vec{w}=\lambda\vec{v}$.

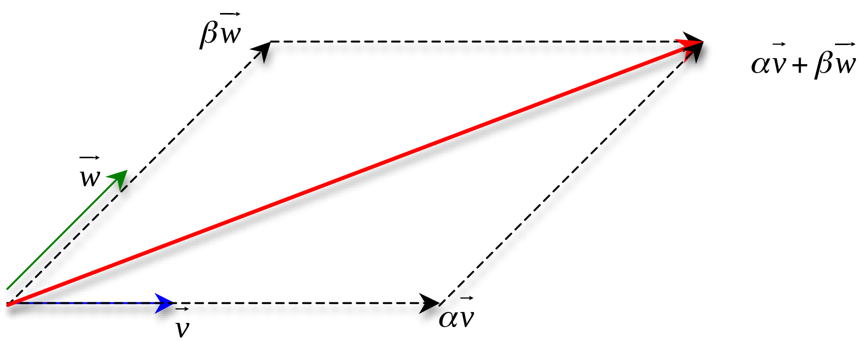
5.2 Combinazioni lineari

La somma tra vettori e la moltiplicazione di un vettore per uno scalare, permettono di scomporre ogni vettore del piano nella somma di due vettori *non* paralleli.

Quest'osservazione può essere considerata alla base del concetto di *combinazione lineare*, ovvero un'espressione del tipo:

$$\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}$$

per ogni $\vec{v},\vec{w}\in V$, e $\alpha,\beta\in R$.



Sistemi lineari

Il concetto di combinazione lineare suggerisce un'ulteriore interessante interpretazione geometrica dei sistemi lineari. Consideriamo quindi il sistema $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$, e ricordiamo la corrispondenza biunivoca tra punti del piano e vettori applicati nell'origine. Grazie quindi alla possibilità di rappresentare un vettore mediante "coordinate", il sistema lineare può essere visto come l'espressione del vettore dei termini noti (c,f), come la combinazione lineare dei vettori (a,d) e (b,e), di coefficienti x,y:

$$x(a,d)+y(b,e)=(c,f).$$

In altre parole, risolvere il sistema di cui sopra significa determinare i coefficienti x,y che permettono di scrivere il vettore (c,f) come combinazione lineare dei vettori (a,d) e (b,e). Quest'operazione è tuttavia possibile *se e soltanto se* i due vettori (a,d) e (b,e) *non* sono allineati. E' possibile così ricondurre la questione della risolubilità di un sistema lineare, alla condizione di non allineamento di vettori. E' quanto afferma la tesi del seguente teorema.

Teorema. Il sistema $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ è sempre risolubile se $ae-bd\neq 0$, ed in tal caso risulta

$$x=\frac{ce-fb}{ae-bd} \quad y=\frac{af-dc}{ae-bd}.$$

Dimostrazione. Per assurdo, se i vettori (a,d) e (b,e) fossero allineati, esisterebbe $\lambda\in R$ tale che $(b,e)=\lambda(a,d)\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{e}{d}\Rightarrow ae-bd=0$. Non potremmo esprimere il vettore (c,f) come loro combinazione lineare $x(a,d)+y(b,e)=(c,f)$ e, quindi, il sistema equivalente si ridurrebbe ad un'equazione in due incognite e non sarebbe risolubile.

Quanto visto finora permette di "organizzare" l'insieme dei vettori. Vediamo come.

5.3 Spazi vettoriali

L'insieme dei vettori liberi, munito dell'operazione di somma e di prodotto per uno scalare, origina una struttura algebrica nota come *spazio vettoriale V*, le cui proprietà sono:

1. $\forall\vec{v},\vec{w},\vec{u}\in V$ risulta: $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$;
2. $\forall\vec{v},\vec{w}\in V$ si ha che $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$;
3. Esiste l'elemento neutro della somma, $\vec{0}$ tale che $\forall\vec{v}\in V\Rightarrow\vec{v}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}$;
4. Esiste l'opposto di ogni elemento: $\forall\vec{v}\in V,\exists(-\vec{v})\in V$ tale che $\vec{v}+(-\vec{v})=(-\vec{v})+\vec{v}=\vec{0}$;
5. $\forall\vec{v}\in V,\lambda,\mu\in R\Rightarrow(\lambda+\mu)\vec{v}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{v}$;
6. $\forall\vec{v},\vec{w}\in V,\lambda\in R\Rightarrow\lambda\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\lambda\vec{v}+\lambda\vec{w}$;
7. $\forall\vec{v}\in V,\lambda,\mu\in R\Rightarrow(\lambda\mu)\vec{v}=\lambda(\mu\vec{v})$;
8. $\forall\vec{v}\in V\Rightarrow 1\cdot\vec{v}=\vec{v}$.

Osserviamo che, per le proprietà 1-4, lo spazio vettoriale è un *gruppo abeliano*.

In virtù della corrispondenza biunivoca tra punti del piano cartesiano e vettori applicati nell'origine, anche il piano cartesiano stesso è uno spazio vettoriale.

Dipendenza lineare e basi

La condizione di allineamento di due vettori può essere interpretata come combinazione lineare il cui risultato è il vettore nullo:

$$\vec{w}=\lambda\vec{v}\Rightarrow\vec{w}-\lambda\vec{v}=\vec{0}.$$

Al variare del parametro λ, quindi, la condizione di allineamento può essere espressa sotto forma di combinazione lineare a coefficienti *non* tutti nulli (infatti, può essere nullo al più il coefficiente λ).

Al contrario, se due vettori non sono allineati, non è possibile ottenere il vettore nullo attraverso una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli.

Si dice che due vettori sono **linearmente indipendenti** se

$$\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha=\beta=0\,,$$

cioè se la combinazione lineare nulla si può ottenere solo "banalmente", ovvero con *tutti* i coefficienti uguali a zero. Al contrario, due vettori si dicono **linearmente dipendenti**, cioè uno di essi può essere scritto come combinazione lineare degli altri. Il concetto di lineare indipendenza esprime quindi, in termini di combinazione lineare, quello di non allineamento.
Abbiamo visto che due vettori non allineati (linearmente indipendenti) del piano permettono di scrivere ogni altro vettore come loro combinazione lineare. In questo caso si dice che i due vettori costituiscono un **sistema di generatori**. In generale, dato uno spazio vettoriale V, un sistema di generatori è rappresentato da un insieme di vettori le cui combinazioni lineari generano tutti i vettori di V.
Finora abbiamo considerato vettori del piano. Ci chiediamo se i concetti presentati si possono estendere anche allo spazio. Intanto, quando si "estende" occorre che le proprietà di ciò che è stato esteso continuino a valere anche nella sua estensione: un piano nello spazio è prima di tutto un piano, quindi due vettori non allineati ad esso appartenenti, devono generare ogni altro vettore che vi appartiene.
Inoltre, esiste una corrispondenza biunivoca tra punti dello spazio e vettori applicati nell'origine. L'assioma euclideo secondo cui esiste (almeno) un punto dello spazio non appartenente ad un dato piano, suggerisce l'estensione del concetto di lineare indipendenza tra vettori dello spazio: tre vettori *non complanari* sono linearmente indipendenti.
Ciò significa che un vettore la cui direzione non appartiene ad un dato piano, non può essere espresso come combinazione lineare di due vettori non allineati le cui direzioni appartengono al piano dato.
Si dice che tre vettori sono linearmente indipendenti se

$$\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}+\gamma\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma=0\,.$$

In particolare quindi, ogni vettore dello spazio può essere espresso come combinazione lineare di tre vettori non complanari, che formano così un *sistema di generatori*.
Se togliamo un vettore dai tre che formano il sistema di generatori, i rimanenti due non sono più in grado di generare, attraverso una loro combinazione lineare, *tutti* i vettori dello spazio, bensì *solo* quelli del piano a cui appartengono le loro direzioni. Questo accade ogniqualvolta l'insieme dei generatori è costituito da vettori linearmente indipendenti, e quelli non complanari lo sono.
Esercizio. Giustificare l'ultima affermazione.
Dunque, se il sistema di generatori è costituito da vettori linearmente indipendenti, si dice che forma una **base** dello spazio vettoriale V, ed il numero di vettori che lo costituisce si dice **dimensione** dello spazio vettoriale.
Con ciò il piano cartesiano può essere considerato uno spazio vettoriale di dimensione due, ed una base può essere rappresentata dai vettori $B_2\equiv\left\{\vec{e_1}(1;0),\vec{e_2}(0;1)\right\}$, mentre lo spazio uno spazio vettoriale di dimensione tre con base $B_3\equiv\left\{\vec{e_1}(1;0;0),\vec{e_2}(0;1;0),\vec{e_3}(0;0;1)\right\}$.
La teoria degli spazi vettoriali costituisce una branca molto importante della matematica che prende il nome di *algebra lineare*, le cui applicazioni spaziano su molti campi del "sapere scientifico" e sarà oggetto di studi a livello universitario in molti corsi di laurea, per questo non è il caso di andare molto oltre nell'indagine delle proprietà degli spazi vettoriali. Tuttavia, per completare quanto presentato sopra, si ritiene opportuno considerare i seguenti risultati.

Teorema. Se lo spazio vettoriale V ha una base costituita da *n* vettori linearmente indipendenti, allora $m>n$ vettori sono linearmente dipendenti.
Dimostrazione. Supponiamo per semplicità che lo spazio vettoriale abbia dimensione due, e che $B\equiv\left\{\vec{v_1},\vec{v_2}\right\}$ sia una sua base. Siano $\vec{w_1},\vec{w_2},\vec{w_3}$ tre vettori di V, con $\vec{w_1},\vec{w_2}$ linearmente indipendenti. Scriviamo $\vec{w_1}$ come combinazione lineare dei vettori della base: $\vec{w_1}=a_1\vec{v_1}+a_2\vec{v_2}$. Supposto ad

esempio $a_1 \neq 0$ (almeno uno dei due coefficienti deve essere diverso da zero, altrimenti $\overrightarrow{w_1}$ dovrebbe essere il vettore nullo), possiamo scrivere $\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{a_1}\overrightarrow{w_1} - \frac{a_2}{a_1}\overrightarrow{v_2}$. Abbiamo individuato così un altro sistema di generatori di V: $\left\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{v_2}\right\}$; di conseguenza $\overrightarrow{w_2} = b_1\overrightarrow{w_1} + b_2\overrightarrow{v_2}$, con almeno un coefficiente, ad esempio b_2, diverso da zero. Allo stesso modo, $\overrightarrow{v_2} = -\frac{b_1}{b_2}\overrightarrow{w_1} + \frac{1}{b_2}\overrightarrow{w_2}$, così V si può considerare generato da $\left\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\right\}$ che, essendo linearmente indipendenti, formano una base, quindi $\overrightarrow{w_3}$ è combinazione lineare di $\left\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\right\}$ e $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}$ sono linearmente dipendenti.

Dei due risultati che seguono si lascia la dimostrazione come utile esercizio.

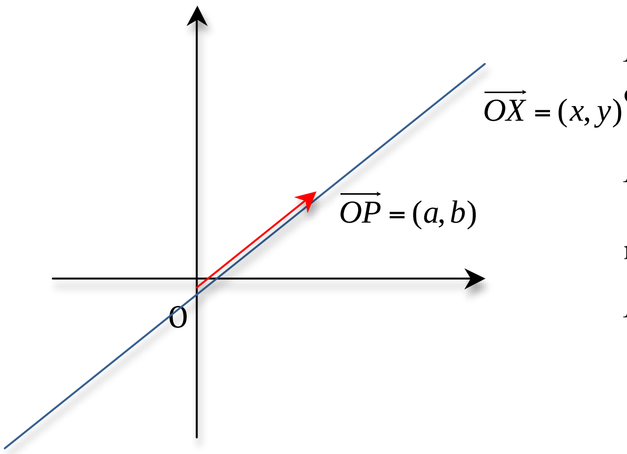
Teorema. La rappresentazione di un vettore in una determinata base è *unica*.

Teorema. Ogni insieme di vettori linearmente indipendenti può essere *completato* a formare una base dello spazio vettoriale.

5.4 Equazioni di rette e piani

La trattazione svolta ci permette di comprendere che rette e piani nello spazio, passanti per l'origine, possono essere associati a combinazioni lineari rispettivamente di uno e due vettori linearmente indipendenti. Esaminiamo separatamente i due casi.

Equazione vettoriale, parametrica, e cartesiana della retta del piano e dello spazio

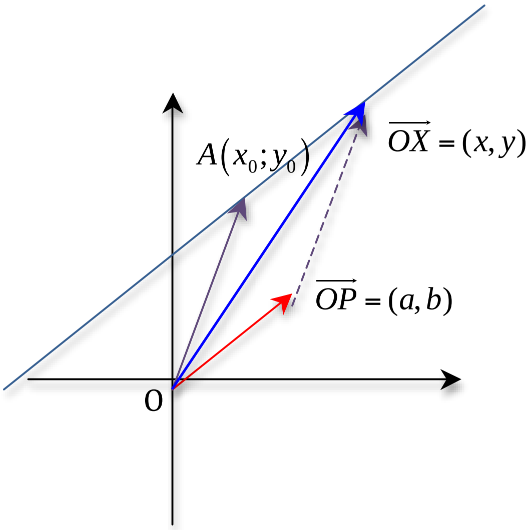


Equazione vettoriale: $\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OP}$. Da questa segue che $(x, y) = (\lambda a, \lambda b)$, e la cosiddetta

Equazione parametrica: $\begin{cases} x = \lambda a \\ y = \lambda b \end{cases}$. Dividendo membro a membro si perviene alla:

Equazione cartesiana: $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \Rightarrow y = \frac{b}{a}x$, oppure $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \frac{a}{b}y$ a seconda che uno tra *a* e *b* sia uguale a zero.

Se la retta non passa per l'origine, sia $A(x_0, y_0)$ un punto ad essa appartenente, ed $\overrightarrow{OP} = (a, b)$ il *vettore direzione*, ovvero un vettore applicato nell'origine la cui direzione è parallela a quella della retta.



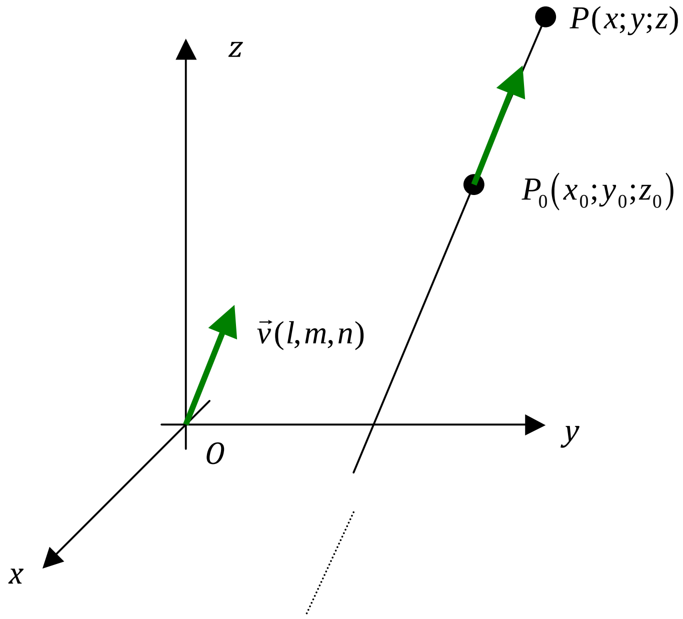
Equazione vettoriale: $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OP}$. Da questa segue che $(x,y)=(x_0+\lambda a, y_0+\lambda b)$, e la cosiddetta

Equazione parametrica: $\begin{cases} x = x_0+\lambda a \\ y=y_0+\lambda b \end{cases}$. Dividendo membro a membro si giunge alla:

Equazione cartesiana: $\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{b}{a} \Rightarrow y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0)$,

oppure $\frac{x-x_0}{y-y_0}=\frac{a}{b} \Rightarrow x-x_0=\frac{a}{b}(y-y_0)$, dove abbiamo supposto che b sia diverso da zero.

Vogliamo scrivere l'equazione della retta passante per il punto dello spazio $P_0(x_0,y_0,z_0)$, e direzione coincidente con quella del vettore $\vec{v}=(l,m,n)$.



Dall'identità vettoriale $P-O=(P-P_0)+(P_0-O)$, osservando che $P-P_0$ è un vettore parallelo a $\vec{v}(l,m,n)$ e che, quindi, è un *multiplo scalare* di quest'ultimo, $P-P_0=t\vec{v}$, si perviene alla cosiddetta **equazione vettoriale della retta**. Da questa si deduce l'**equazione parametrica**:

$$P-O=(P-P_0)+(P_0-O)=t\vec{v}+(P_0-O)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \quad \textit{equazione} \quad \textit{parametrica}$$

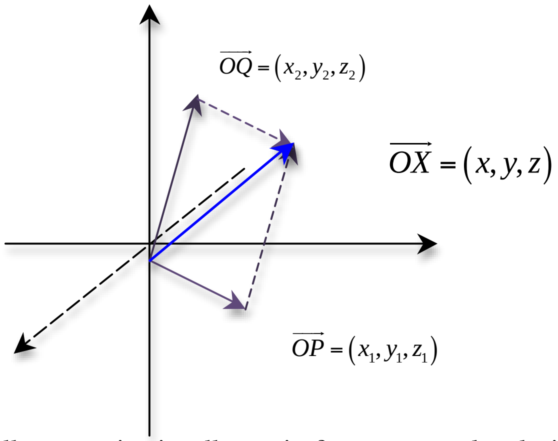
Dall'equazione parametrica segue la catena di uguaglianze che porta alla determinazione del sistema che esprime l'**equazione cartesiana** della retta (dipendenza dalle coordinate cartesiane e non da parametri):

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}\\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}\end{cases}\quad equazione\quad cartesiana\;.$$

Equazione vettoriale, parametrica, e cartesiana di un piano dello spazio

Siano $\overrightarrow{OP}=(x_1,y_1,z_1)$ e $\overrightarrow{OQ}=(x_2,y_2,z_2)$ due vettori non allineati appartenenti ad un piano passante per l'origine.



Si giunge alle equazioni nelle varie forme estendendo i ragionamenti fatti per la retta, con qualche calcolo in più.

Equazione vettoriale: $\overrightarrow{OX}=\lambda\overrightarrow{OP}+\mu\overrightarrow{OQ}$.

Da questa equazione segue $(x,y,z)=(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2,\lambda z_1+\mu z_2)$ e di conseguenza la

equazione parametrica: $\begin{cases}x=\lambda x_1+\mu x_2\\ y=\lambda y_1+\mu y_2\\ z=\lambda z_1+\mu z_2\end{cases}$. Adesso ricaviamo il parametro μ tra le prime due equazioni

moltiplicando la prima per y_1, la seconda per x_1 e sottraendo membro a membro: $\mu=\dfrac{xy_1-yx_1}{x_2y_1-x_1y_2}$.

Facendo un'operazione analoga tra la seconda e la terza equazione otteniamo di nuovo

$\mu=\dfrac{yz_1-zy_1}{y_2z_1-y_1z_2}$. Comparando i due valori del parametro μ così ottenuti, ed operando un raccoglimento parziale delle variabili x,y,z si perviene alla

equazione cartesiana: $x(y_1z_2-y_2z_1)+y(z_1x_2-x_1z_2)+z(x_1y_2-y_1x_2)=0$.

Se il piano non passa per l'origine, bensì per un generico punto dello spazio $A(x_0,y_0,z_0)$, le equazioni trovate si modificano così:

Equazione vettoriale: $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OP}+\mu\overrightarrow{OQ}$;

equazione parametrica: $\begin{cases}x-x_0=\lambda x_1+\mu x_2\\ y-y_0=\lambda y_1+\mu y_2\\ z-z_0=\lambda z_1+\mu z_2\end{cases}$;

equazione cartesiana: $(x-x_0)(y_1z_2-y_2z_1)+(y-y_0)(z_1x_2-x_1z_2)+(z-z_0)(x_1y_2-y_1x_2)=0$.

Esercizi

Negli esercizi proposti si assuma $\vec{i}(1;0)$, $\vec{j}=(0;1)$.

1. Dati i vettori $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$ e $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$, si trovino, in termini di $\vec{i}$ e $\vec{j}$, (a) $\vec{a}+\vec{b}$; (b) $\vec{a}-\vec{b}$; (c) $3\vec{a}$; (d) $-4\vec{a}+\vec{b}$.
2. Si trovi l'intensità di ognuno dei vettori precedentemente trovati, e l'angolo che ognuno di essi forma con il versore $\vec{i}$.
3. Si dica se i punti del piano, aventi come vettori posizione $2\vec{j}$, $-4\vec{j}$, $4\vec{i}+2\vec{j}$ e $4\vec{i}+\vec{j}$, possono essere vertici di un trapezio.
4. I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ di modulo $|\vec{a}|=15$ e $|\vec{b}|=8$ formano un angolo di 90°. Determinare: (a) $|\vec{a}-\vec{b}|$, (b) $|2\vec{a}+5\vec{b}|$.
5. Ripetere l'esercizio precedente nel caso in cui l'angolo formato dai due vettori è 60°.
6. Dati i vettori $\vec{v_1}=(1;2)$ e $\vec{v_2}=(2;-3)$, si determinino le coordinate del vettore $\vec{w}=\vec{v_1}-\frac{1}{2}\vec{v_2}$, ed esprimere il vettore $\vec{w'}=(3;5)$ come combinazione lineare dei vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$. E' possibile esprimere ogni vettore del piano come combinazione lineare di $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$?
7. Dati i vettori $\vec{v_1}=(1;2;0)$ e $\vec{v_2}=(2;-3;1)$, si determinino le coordinate del vettore $\vec{w}=\vec{v_1}-\frac{1}{2}\vec{v_2}$, ed esprimere il vettore $\vec{w'}=(3;5;-2)$ come combinazione lineare dei vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$. E' possibile esprimere ogni vettore dello spazio come combinazione lineare di $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$?
8. Si dica per quali valori del parametro *k* il vettore $\vec{w}=(1;1;2k)$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $\vec{v_1}=(-3;4;-1)$ e $\vec{v_2}=(0;-5;0)$.
9. Dato il vettore $\vec{w}=(3;5)$, quali sono le coordinate di un vettore $\vec{v}$ ottenuto dalla rotazione di $\vec{w}$ in senso antiorario di un angolo retto? Si generalizzi il risultato considerando la rotazione di un generico vettore $\vec{w}=(a;b)$ di un angolo θ, sempre in senso antiorario.
10. Si calcolino le coordinate del punto intersezione, se esiste, tra le rette $\overrightarrow{OX}=(4,-6,0)+\lambda(2,10,4)$ e $\overrightarrow{OY}=(4,-6,-2)+\mu(10,2,2)$. Tali rette sono parallele? Quali condizioni potrebbero descrivere rette nello spazio che non sono né parallele né incidenti?
11. Si trovi la distanza dal punto $P=(2,1)$ alla retta $\overrightarrow{OX}=(0,1)+\lambda(2,3)$.
12. Si dica per quali valori di *a* la retta $\{\ x=8+4t,\quad y=10+5t,\quad z=2a+at,$ è contenuta nel piano generato dai vettori $\overrightarrow{OA}=(1;1;3)$ e $\overrightarrow{OB}=(2;-1;-3)$.

Soluzioni

1. (a) $\vec{a}+\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}$; (b) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$; (c) $3\vec{a}=6\vec{i}+2\vec{j}$; (d) $-4\vec{a}+\vec{b}=-7\vec{i}-13\vec{j}$.
2. (a) $\vec{a}+\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13};\tan\theta=\frac{2}{3}\ldots$
3. In coordinate: $(0;2),(0;-4),(4;2),(4,1)$. Poiché la differenza tra i primi due vettori è parallela alla differenza tra i restanti due (in senso vettoriale), allora i punti possono essere vertici di un trapezio.

4. Possiamo applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo che si forma con i vettori nei singoli casi: $\begin{array}{l}(a)\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2 \Rightarrow \left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{225+64}=17\\(b)\left|2\vec{a}+5\vec{b}\right|=\sqrt{4\cdot 225+25\cdot 64}=50\end{array}$.

5. Possiamo applicare il teorema di Carnot al triangolo che si forma con i vettori nei singoli casi: $\begin{array}{l}(a)\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 60°=289-120 \Rightarrow \left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{169}=13\\(b)\left|2\vec{a}+5\vec{b}\right|=\sqrt{4\cdot 225+25\cdot 64-2\cdot 2\cdot 15\cdot 5\cdot 8}=10\end{array}$.

6. $\vec{w}=\vec{v_1}-\frac{1}{2}\vec{v_2}=(1;2)-\frac{1}{2}(2;-3)=\left(0;\frac{7}{2}\right)$. $\vec{w'}=(3;5)=\alpha(1;2)+\beta(2;-3)=(\alpha+2\beta;2\alpha-3\beta)$, da cui segue $\begin{cases}\alpha+2\beta=2\\2\alpha-3\beta=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=1\end{cases}$. Sia $(x;y)$ il generico vettore del piano; imponiamo $\begin{cases}\alpha+2\beta=x\\2\alpha-3\beta=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{3x+2y}{7}\\\beta=\dfrac{2x-y}{7}\end{cases}$, quindi ogni vettore del piano può essere espresso come combinazione lineare dei vettori $\vec{v_1}=(1;2)$ e $\vec{v_2}=(2;-3)$.

7. $\vec{w}=\vec{v_1}-\frac{1}{2}\vec{v_2}=(1;2;0)-\frac{1}{2}(2;-3;1)=\left(0;\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$.
$\vec{w'}=(3;5;-2)=\alpha(1;2;0)+\beta(2;-3;1)=(\alpha+2\beta;2\alpha-3\beta;\beta)$, da cui segue $\begin{cases}\alpha+2\beta=3\\2\alpha-3\beta=5\\\beta=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\\alpha=-\dfrac{1}{2}\\\beta=-2\end{cases}$, risultato evidentemente non accettabile.

8. $\begin{cases}1=-3\alpha+0\beta\\1=4\alpha-5\beta\\2k=-\alpha+0\beta\end{cases}\Rightarrow 2k=\frac{1}{3}\Rightarrow k=\frac{1}{6}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\dfrac{1}{3}\\\beta=-\dfrac{7}{15}\end{cases}$.

9. $\begin{cases}x'=-y=-5\\y'=x=3\end{cases}\Rightarrow\vec{v'}=(-5;3)$. In generale,
$\begin{cases}x'=x\cos\theta-y\sin\theta\\y'=x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\vec{v'}=(x\cos\theta-y\sin\theta;x\sin\theta+y\cos\theta)$.

10. $\begin{cases}4+2\lambda=4+10\mu\\-6+10\lambda=-6+2\mu\\0+4\lambda=-2+2\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=5\mu\\5\lambda=\mu\\2\lambda=\mu-1\end{cases}$ Il sistema è chiaramente impossibile. Poiché i vettori direzione non sono paralleli, le rette appartengono a piani diversi.

11. Si scrive l'equazione cartesiana della retta: $r:\begin{cases} x=0+2\lambda \\ y=1+3\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{y-1}{3}=\frac{x}{2} \Rightarrow 3x-2y+2=0$.

   La distanza è quindi $d(P,r)=\frac{|6-2+2|}{\sqrt{9+4}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$.

12. Il problema è risolto una volta che abbiamo espresso il vettore direzione della retta come

   combinazione lineare dei vettori del piano: $\begin{cases} \alpha+2\beta=4 \\ \alpha-\beta=5 \\ 3\alpha-3\beta=a \end{cases} \Rightarrow a=15$.