ESERCIZI POLINOMI

1. Scrivere il polinomio $x^{12}+x^6+1$ come prodotto di fattori (*fattorizzare*, cioè, il polinomio).
2. Dimostrare che in Z_n vale l'uguaglianza $x^2-ax+k=x^2-(a-n)x+n+k$.
3. Si determinino *a*, e *b* in modo tale che i polinomi x^3-2ax^2+bx+1 e $x^3+2bx^2+(a-1)x+1$ siano identici.
4. Eseguire nell'insieme dei polinomi $Z_7[x]$ il prodotto $(x^2-5x+1)(x+4)-(3-x^2)(6+x^3)$. A cosa corrisponde questo prodotto in $Z_5[x]$? Ed in $Z_3[x]$?.
5. Si trovi un insieme in cui il polinomio x^2+9 è riducibile.
6. Dato il polinomio $A(x)=ax^2+bx+c$, determinare *a*, *b*, *c* affinché $A(x+1)-A(x)=x$. Supponiamo inoltre che la variabile *x* possa assumere soltanto i valori "naturali" 1, 2, 3,…Si dimostri che dalle differenze $A(n+1)-A(n)$ è possibile ottenere la formula della *somma dei primi N numeri naturali.*
7. Si sfruttino le considerazioni dell'esercizio precedente per calcolare, a partire dal polinomio $A(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, la somma dei quadrati dei primi N numeri naturali.
8. Si dica per quale valore di *h* il polinomio x^3-4x^2+4x+h è divisibile per $x+1$.
9. Si sviluppino i seguenti prodotti notevoli: $(a^3+b^3x^3)$, $(x+1)^7$.
10. Determinare il resto, senza eseguire la divisione, tra i polinomi $A(x)=3x^3+5x^2-x+2$ e $B(x)=x+2$.
11. Determinare *a*, *b* in modo tale che il polinomio $2x^4+ax^3+x^2+4x+b$ sia divisibile per x^2+x.
12. Trovare tutte le radici, intere o razionali, del polinomio $x^4-3x^3-2x^2-32$.
13. Tra i polinomi di secondo grado che divisi per $(x-1),(x-2)$ danno per resto 4, determinare quello che ha come radice $\alpha=0$.
14. E' dato il polinomio $P_n(x)=x^n+1$ sull'insieme degli interi. Per quali valori di *n* è riducibile? In tal caso, si dica quant'è il valore dei coefficienti del polinomio di grado massimo che si viene a determinare nella divisione.
15. Dividere il polinomio $x^{16}-1$ per $x-1$, e determinare i coefficienti del polinomio quoziente.
16. Si trovino le intersezioni tra la parabola di vertice $V(2,2)$ passante per l'origine, e l'iperbole $xy=12$.
17. Per quali valori di *k* la parabola di equazione $y=x^2-2x-1$ interseca l'iperbole $xy=k$ in punti ad ascissa intera?
18. Sia $P(x)$ un polinomio e $Q(x)=P(x)+1$. Dimostrare che $P(x)^{2n}+Q(x)^n-1$ è divisibile per il prodotto $P(x)\cdot Q(x)$.
19. Dimostrare che un polinomio è divisibile per $(x-1)$ se la somma dei suoi coefficienti è zero.
20. Trovare tutte le radici di x^3-3x^2+2x in Z_6.

Soluzioni

1. $x^{12}+x^6+1=(x^6+1)^2-x^6=\left[(x^6+1)-x^3\right]\left[(x^6+1)+x^3\right]$
2. $Z_n:\begin{cases} -a=-a+n=-(a-n) \\ k=k+n \end{cases}$.

3. $\begin{cases} -2a = 2b \\ b = a-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \end{cases}$.

4. $x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 19x - 14 = \begin{cases} x^5 - 2x^3 + 5x^2 + 2x \quad (Z_7) \\ x^5 - 2x^3 + x + 1 \quad (Z_5) \\ x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \quad (Z_3) \end{cases}$.

5. $\begin{cases} a+b=0 \\ ab=9 \end{cases}$ in Z_{10} risulta, ad esempio, $\begin{cases} 1+9=0 \\ 1\cdot 9 = 9 \end{cases}$.

6. $x = A(x+1) - A(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2ax + a + b \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \end{cases}$

   Dalla somma delle $A(n+1) - A(n) = n$, otteniamo il valore della somma dei primi *n* numeri naturali: $A(n+1) - A(1) = \frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n+1}{2} + c - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - c = \frac{n(n+1)}{2}$.

7. $x^2 = A(x+1) - A(x) = 3ax^2 + \left(3a+2b\right)x + a + b + c \Rightarrow \begin{cases} 3a = 1 \Rightarrow a = 1/3 \\ 3a + 2b = 0 \Rightarrow b = -1/2 \\ a+b+c = 0 \Rightarrow c = 1/6 \end{cases}$. Da questo segue $A(n+1) - A(1) = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} + d - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - d = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

8. Posto $x^3 - 4x^2 + 4x + h = (x+1)(ax^2 + bx + c) \Rightarrow h = 9$.

9. $\left(a^3 + b^3x^3\right) = \left(a+bx\right)\left(a^2 - abx + b^2x^2\right)$,

   $\left(x+1\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} x^k 1^{7-k} = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7$

   $\frac{3x^3}{x} = 3x^2 \Rightarrow A(x) - 3x^2B(x) = -x^2 - x + 2 := R_1(x);$

10. Si ha $\frac{-x^2}{x} = -x \Rightarrow R_1(x) - (-x)B(x) = x + 2 := R_2(x);$.

    $\frac{x}{x} = 1 \Rightarrow R_2(x) - (1)B(x) = 0 \Rightarrow A(x) = (3x^2 - x + 1)(x+2) \Rightarrow R(x) = 0$

11. Si determina il resto: $R_3(x) = (a+1)x + b \Rightarrow R_3(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$.

12. Si osserva che $x = 4$ e $x = -2$ sono radici del polinomio, quindi questo può essere scritto nella forma $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 32 = (x-4)(x+2)(x^2 - x + 4)$, con l'ultimo fattore irriducibile in R.

13. $\begin{array}{l} ax^2+bx+c=(ax+a+b)(x-1)+a+b+c \\ ax^2+bx+c=(ax+2a+b)+4a+2b+c \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=4 \\ 4a+2b+c=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-3a \\ c=4+2a \end{cases}$. Il polinomio può quindi essere scritto nella forma $P(x)=ax^2-3ax+4+2a$. Imponendo $P(0)=0$ otteniamo il polinomio: $P(0)=0 \Rightarrow 4+2a=0 \Rightarrow a=-2 \Rightarrow P(x)=-2x^2+6x$.

14. Il polinomio è riducibile se *n* è dispari. In tal caso $x=-1$ è una radice, quindi può essere diviso per il polinomio $x+1$; di conseguenza $P_n(x)=x^n+1=\left(a_0+a_1x+...+a_{n-1}x^{n-1}\right)(x+1)$. I coefficienti del polinomio quoziente di grado $n-1$ si determinano eseguendo la moltiplicazione dei fattori presenti al membro di destra, ed imponendo *l'unicità* della forma canonica: $x^n+1=a_0+(a_0+a_1)x+(a_1+a_2)x^2+...+(a_{n-2}+a_{n-1})x^{n-1}+a_{n-1}x^n$ da cui seguono le uguaglianze $a_0=1, \quad a_{n-1}=1 \Rightarrow a_{n-2}=-1 \Rightarrow a_{n-3}=1 \Rightarrow ... \Rightarrow a_1=-1$, ottenute ponendo uguale a zero tutte le somme tra parentesi. Il quoziente è quindi $Q_{n-1}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k$.

15. $x^{16}-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$. Poiché $x=1$ è una radice del polinomio, non c'è in realtà bisogno di fare grandi calcoli: si procede, con qualche adattamento, come nell'esercizio precedente:
$x^{16}-1=\left(a_0+a_1x+...+a_{n-1}x^{n-1}\right)(x-1)=-a_0+(a_0-a_1)x+(a_1-a_2)x^2+...(a_{n-2}-a_{n-1})x^{n-1}+a_{n-1}x^n$
$a_0=1 \Rightarrow a_1=a_2=...=a_{n-1}=1$

16. Si mette a sistema l'equazione della parabola $y-2=-\frac{1}{2}(x-2)^2 \Rightarrow y=-\frac{x^2}{2}+2x$, con quella dell'iperbole, ottenendo l'equazione risolvente $x^3-4x^2+24=0$. Le soluzioni dell'equazione sono radici del polinomio $P(x)=x^3-4x^2+24$; poiché una di queste è $x=-2$, il polinomio può essere fattorizzato nel prodotto $x^3-4x^2+24=(x+2)(x^2-6x+12)$. Essendo il polinomio di secondo grado irriducibile nell'insieme dei numeri reali, l'unica intersezione tra la parabola e l'iperbole è rappresentata dal punto $(-2;-6)$.

17. Dall'equazione risolvente $x^3-2x^2-x-k=0$ e dalla divisibilità per $x=n\in Z$ otteniamo la fattorizzazione $x^3-2x^2-x-k=(x-n)\left(x^2+(n-2)x+n^2-2n-1\right)$, con resto zero $n\left[n(n-2)-1\right]-k=0 \Rightarrow k=n\left[n(n-2)-1\right]$. Il valore (o i valori) di *k* dipendono da quelli di *n* che forniscono radici intere del polinomio di secondo grado nella fattorizzazione. Questi valori si ottengono imponendo che il discriminante dell'equazione associata al fattore di secondo grado sia non negativo: $-3n^2+4n+8\geq 0 \Rightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3}\leq n\leq\frac{2+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow n=0,1$. Per $n=1$ otteniamo $k=-2$ e $x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x^2-x-2)=(x-1)(x+1)(x-2)$. Per $n=0$ otteniamo $k=0$ e l'iperbole non esiste.

18. Posto $P(x)=Q(x)-1$, poiché $Q(x)^n-1$ è divisibile per $Q(x)-1$ si ha
$P(x)^{2n}+Q(x)^n-1=P(x)^{2n}+Q(x)^n+P(x)-Q(x)=P(x)(P(x)^{2n-1}+1)+Q(x)(Q(x)^{n-1}-1)$.
Ora, poiché nel caso in cui *n* è dispari x^n+1 è divisibile per $x+1$, essendo $2n-1$ dispari, allora $P(x)^{2n-1}+1$ è divisibile per $P(x)+1$, ovvero per $Q(x)$. In definitiva,
$$\begin{array}{l} P(x)^{2n}+Q(x)^n-1=P(x)(P(x)^{2n-1}+1)+Q(x)(Q(x)^{n-1}-1)= \\ P(x)A(x)Q(x)+Q(x)B(x)P(x)=Q(x)P(x)(A(x)+B(x)) \end{array}.$$

19. Per il teorema di Ruffini, la divisibilità per $(x-1)$ equivale a dire che $x=1$ è una radice del polinomio, quindi $0=P(1)=a_0+a_1+\ldots+a_n$.

20. $x^3-3x^2+2x=x(x^2-3x+2)$. Una radice è evidentemente $x=0$. Le altre possono essere individuate, per la proprietà conseguente al teorema di Ruffini, tra i divisori del termine noto, che sono in Z_6, oltre a $x=1$ e $x=2$, anche $x=4$ e $x=5$, dal momento che $5 \cdot 4 = 20 \equiv 2_6$. Sostituendo questi valori nel polinomio di secondo grado e svolgendo i calcoli con le classi di resto modulo 6, si trova che le soluzioni sono 0, 1, 2, 4, 5.