ESERCIZI DERIVATE

Determinare la derivata prima delle seguenti funzioni:

1. $y=(3x^2-2)^4$ $\qquad y'=24x\left(3x^2-2\right)^3$

2. $y=\dfrac{2}{3(3x-2)^2}$ $\qquad y'=-4\left(3x-2\right)^{-3}$

3. $y=3\sqrt{2-x}$ $\qquad y'=\dfrac{-3}{2\sqrt{2-x}}$

4. $y=(1-x^2)(\sqrt{1-2x})$ $\qquad y'=\dfrac{5x^2-2x-1}{\sqrt{1-2x}}$

5. $y=\dfrac{\sqrt{6x-x^2}}{x}$ $\qquad y'=-\dfrac{3}{x\sqrt{6x-x^2}}$

6. $y=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ $\qquad y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

7. $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$ $\qquad y'=-\dfrac{\sin x}{2\left|\sin x\right|}$

8. $y=4\cos^2 x^2$ $\qquad y'=-8x\sin 2x^2$

9. $y=x^{2x^2+1}$ $\qquad y'=x^{2x^2+1}\left(4x\ln x+2x+\dfrac{1}{x}\right)$

10. $y=\log\left|\dfrac{x+1}{x}\right|$ $\qquad y'=-\dfrac{1}{x^2+x}$

11. $y=(3x+4)^5$ $\qquad y'=15\left(3x+4\right)^4$

12. $y=\dfrac{2}{(1-x)^3}$ $\qquad y'=6\left(1-x\right)^{-4}$

13. $y=\sqrt{(1-2x)^3}$ $\qquad y'=-3\sqrt{1-2x}$

14. $y = x(\sqrt{1-x^2})^3$ $\qquad y' = \left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3x\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

15. $y = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ $\qquad y' = \dfrac{x^2-x+4}{\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}$

16. $y = \log\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ $\qquad y' = \dfrac{1}{x+x^3}$

17. $y = \arctan\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ $\qquad y' = \dfrac{1}{x^2+\left(1-x\right)^2}$

18. $y = \tan^2(2x)$ $\qquad y' = \dfrac{4\tan 2x}{\cos^2 2x}$

19. $y = x^{2x}$ $\qquad y' = x^{2x}\left(2\ln x + 2\right)$

20. $y = \log|x| + \log|2x+1|$ $\qquad y' = \dfrac{4x+1}{2x^2+x}$

---

1. Indicato con V il volume di un prisma retto avente per base un triangolo equilatero, si trovi la misura del lato della base che rende minima la superficie totale del prisma. $\left[l = \sqrt[3]{12V}\right]$
2. Tra tutti i cilindri inscritti nella sfera di raggio unitario si trovi il raggio *r* di quello la cui superficie laterale è massima. $\left[r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$
3. Tra i rettangoli inscritti in un'ellisse di semiassi *a* e *b*, si trovi quello di area massima. $\left[\ base = a\sqrt{2};\quad altezza = b\sqrt{2}\ \right]$
4. Fra i coni inscritti nella sfera di raggio unitario trovare l'altezza e il raggio di quello il cui volume è massimo. $\left[\ altezza = \dfrac{4}{3};\quad raggio = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\ \right]$
5. Nella parabola di equazione $y = x^2$ si conducano per l'origine due rette perpendicolari. Si trovino le rette che rendono minima l'area del rettangolo formato dai segmenti staccati dalle rette sulla parabola. $\left[y = \pm x\right]$

6. Dimostrare che, noti il perimetro e la base di un triangolo, questo ha area massima se è isoscele. *Fissare base e perimetro permette di interpretare il triangolo come quello avente per base la distanza tra due fuochi di un'ellisse, e per terzo vertice un punto sull'ellisse. In questo modo, l'altezza è massima in corrispondenza del semiasse minore, da cui la tesi.*
7. Da un cerchio di raggio unitario si ritagli un settore di angolo α, in modo tale che il cono che si forma facendone combaciare i lati abbia volume massimo. $\left[\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\right]$
8. Tre sfere elastiche sono situate su una retta. La prima sfera di massa m_1 si muove con velocità v e urta la seconda, di massa x, che è in quiete; questa acquista una certa velocità e va ad urtare la terza, di massa m_3. Si trovi la massa della seconda sfera che rende massima la velocità assunta dalla terza sfera. $\left[x = \sqrt{m_1 m_3}\right]$

Esercizi e quesiti di riepilogo

1. E' data la funzione $f(x) = x^2 - 2x - \ln x$. Si determini:

   a) L'insieme di definizione; $\left[D \equiv \{x > 0\}\right]$

   b) L'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x = 1$. $\left[x + y = 0\right]$

   c) Si determini, con due cifre decimali, il valore dello zero di $f(x)$ in $\left[0,4;0,5\right]$. $\left[x_0 = 0,48\right]$

2. Si calcoli la derivata prima delle seguenti funzioni utilizzando la definizione:

   a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$; $\left[f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}\right]$

   b) $f(x) = e^{-x}$. $\left[f'(x) = -e^{-x}\right]$

3. Si descriva il procedimento che ci ha portato a definire il concetto di derivata di una funzione, evidenziandone il suo significato geometrico.
4. Si derivino le seguenti funzioni utilizzando il teorema di derivazione della funzione composta: *a)* $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x})$; *b)* $f(x) = \cos(x^3 - 4)$.

   $$\left[a) f'(x) = \frac{1}{2\left(x - \sqrt{x}\right)}; \quad b) f'(x) = -3x^2 \sin\left(x^3 - 4\right) \right]$$

5. Si dimostri che una funzione derivabile è continua.

6. Si consideri la funzione $y = x^2 - 4\ln(x + a)$.

   a) Si determini per quale valore del parametro a assume un minimo assoluto nel punto di ascissa $x = 1$. $\left[a = 1\right]$

   b) Si tracci il grafico della funzione $y = x^2 - 4\ln(x + 1)$ articolando lo studio nei seguenti punti:

   - Dominio; $\left[D \equiv \{x > 1\}\right]$

- Calcolo dei limiti agli estremi del dominio;

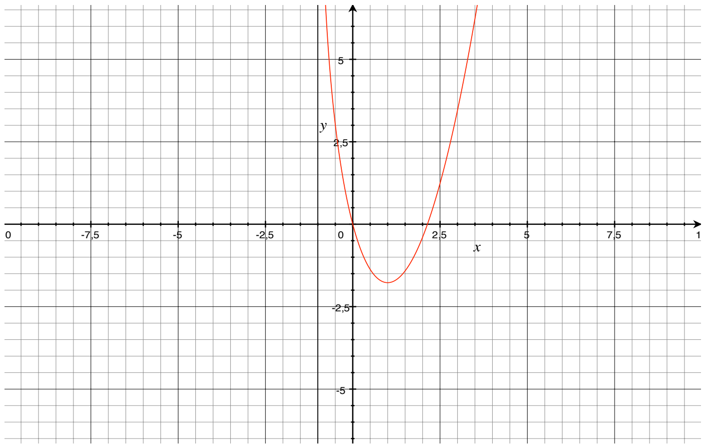
$$\left[\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\right]$$

- Crescenza e decrescenza;

$$\left[f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1; \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1\right]$$

- Concavità e convessità.

$$\left[f''(x) > 0 \forall x \in D\right]$$



7. Si determinino il raggio di base R e l'altezza H del cono di volume minimo circoscritto al cilindro di raggio di base r ed altezza h.

$$\left[H = 3h; \quad R = \frac{3r}{2}\right]$$

8. Calcolare il $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x - \ln(1+e-x)}$.

$$\left[-\frac{e}{e-1}\right]$$

9. Si dica se esiste la derivata prima della funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$ e, in caso affermativo, si dica se questa è continua nell'origine.

$$\left[f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}\right], \text{[no]}$$

10. Determinare i parametri a e b in modo che la funzione $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + 2x; & -1 \leq x \leq 0 \\ 2x - 3a - 2 & 0 < x \leq 2 \end{cases}$ verifichi le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1;2]$.

$$\left[a = -\frac{2}{3}; \quad b = \frac{16}{3}\right]$$

11. In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, è data la famiglia $\wp$ di parabole di equazione

$y = ax^2 - a^2 x \quad , \quad a \in R$.

- Si determini l'equazione della retta tangente *t* alla parabola nel punto di coordinate (0,0), e si indichi con A l'altro punto in cui la generica parabola della famiglia $\wp$ incontra l'asse *x*.

$$\left[\; t: y = -a^2 x; \quad A(a,0) \;\right]$$

- Si determini il punto H, intersezione della parallela *s* a *t* condotta da A, con la perpendicolare *p* a *t* condotta da O. Detta S_T l'area del triangolo OAH, calcolare il $\lim_{a\to+\infty} S_T$.

$$\left[\; p: y = xa^{-2}; \quad s; y = -a^2 x + a^3; \quad H\left(\frac{a^5}{1+a^4}; \frac{a^3}{1+a^4}\right); \quad \frac{1}{2} \;\right]$$

- Determinare il numero d'intersezioni della generica parabola della famiglia $\wp$ con l'iperbole $xy = a$, al variare del parametro *a*.

$$\left[\; \begin{array}{ll} & -\frac{4}{27}a^3 - 1 < 0 \Rightarrow a > -\frac{3}{\sqrt[4]{4}} \quad 1 sol. \\ a > 0 : 1 sol.; & -\frac{4}{27}a^3 - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{\sqrt[4]{4}} \quad 2 sol. \\ & -\frac{4}{27}a^3 - 1 > 0 \Rightarrow a < -\frac{3}{\sqrt[4]{4}} \quad 3 sol. \end{array} \;\right]$$

- Posto $a = 1$ nelle equazioni di cui al punto precedente, individuare l'ascissa del punto intersezione con arresto alla seconda cifra decimale.

$$\left[\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_x - \dfrac{x_n^3 - x_n^2 - 1}{3x_n^2 - 2x} \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = 1{,}625 \quad x_2 = 1{,}4858 \quad x_3 = 1{,}4660 \quad x_4 = 1{,}4666 \quad \Rightarrow \bar{x} = 1{,}46 \right]$$

12. Enunciare il teorema degli zeri di funzioni continue. Su quale assioma caratterizzante l'insieme dei numeri reali è basato?

13. Si discuta, al variare del parametro α nell'insieme dei numeri reali, il seguente $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x^\alpha}$.

$$\left[\frac{e^{\alpha x} - 1}{x^\alpha} = \alpha \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha x} \frac{1}{x^{\alpha - 1}} \Rightarrow \begin{array}{lll} 0 & se & \alpha < 1 \\ 1 & se & \alpha = 1 \\ +\infty & se & \alpha > 1 \end{array} \right]$$

14. Individuare l'estremo superiore ed inferiore della funzione $f(a)=\dfrac{a^4}{2(a^4+1)}$ nell'insieme $[0,+\infty)$. Sarebbe possibile utilizzare il teorema di Weierstrass per individuare il massimo e il minimo assoluto? Motivare la risposta.

$$\left[f(a)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\left(a^4+1\right)}<\frac{1}{2} \quad f(a)\geq 0 \quad \min=0: a=0; \quad \sup=\frac{1}{2} \right]$$

15. Si dimostri che un'equazione polinomiale di grado dispari ammette almeno una soluzione.
Suggerimento: un polinomio di grado qualsiasi è una funzione continua…

16. E' data la funzione $f(x)=x^{\alpha}\ln(1+x)$.

- Stabilire per quali valori del parametro reale α la funzione risulta in $x=0$:
  a) continua;

$$\left[\frac{\ln(x+1)}{x}x^{\alpha+1} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 0 & se & \alpha>-1 \\ 1 & se & \alpha=-1 \\ +\infty & se & \alpha<-1 \end{array} \right]$$

  b) derivabile.

$$\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x^{\alpha}\frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow derivabile \quad se \quad \alpha\geq 0\left(f'(0)=0\right)\vee \alpha=-1\left(f'(0)=-\frac{1}{2}\right) \right]$$

- Per $\alpha=1$:
  c) verificare che la funzione è crescente nella semiretta $x\geq 0$;

$$\left[f'(x)=\ln(1+x)+\frac{x}{1+x} \quad f'(0)=0; \quad f'(x)>0\,\forall x>0; \quad \Rightarrow crescente \right]$$

  d) sempre sulla semiretta $x\geq 0$, detta *g* la funzione inversa, determinare $g(0)$.
  E' derivabile in $x=0$ la funzione inversa?

$$\left[g(0)=0; \quad g'(0)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{0}\Rightarrow no \right]$$

  d) Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione in $(0,f(0))$.

$$[y=0]$$

17. E' data la funzione $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$. Si verifichi che il punto $x=0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Dopo aver enunciato e dimostrato il teorema di Rolle, si stabilisca se le ipotesi sono verificate nell'intervallo $\left[0,\dfrac{1}{\pi}\right]$ dalla funzione data.

$$\left[\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0 \Rightarrow F(x)=\begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\nexists \Rightarrow \quad no \right]$$

18. Sia *f* continua in $[0,2]$ e derivabile in $(0,2)$. Siano $f(2)=1$ e $1\leq f'(c)\leq 2$ per ogni $x\in[0,2]$. Si dimostri che $f(0)<0$.

$$[f(2)-f(0)=f'(c)(2-0)\Rightarrow -3\leq f'(0)\leq -1]$$

19. Calcolare il $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-\cos x}{x\sin x}$.

$$\left[\frac{1}{2}\right]$$

20. Si spieghi perché nell'enunciato del Teorema di Cauchy non viene fatta l'ipotesi $g(b)-g(a)\neq 0$.

[Se fosse $g(b)-g(a)=0$ avremmo, per il teorema di Rolle, $g'(c)=0$, contro l'ipotesi]

21. Dimostrare che $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}, \quad \forall x\in[-1,1]$.

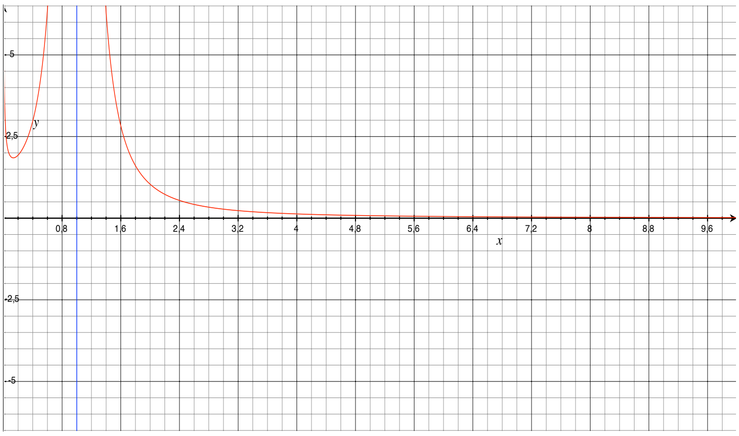
$$\left[\; f'(x)=0\forall x\in[-1;1] \quad f(0)=\frac{\pi}{2}\;\right]$$

22. E' data la funzione $f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha \ln^2 x}$.

- Si calcoli, al variare del parametro α il valore del $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$,

$$\begin{bmatrix} 0 & se & \alpha<0 \\ 0 & se & \alpha=0 \\ \infty & se & \alpha>0 \end{bmatrix}$$

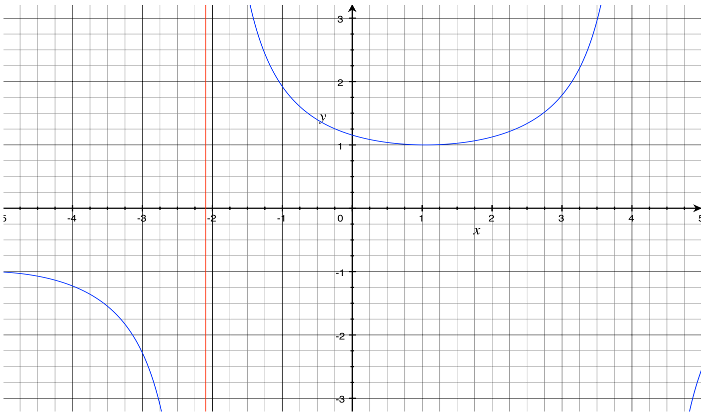
- Si studi la funzione $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^2 x}$.



23. Nel triangolo ABC il lato BC misura 1 e l'ampiezza dell'angolo in A è $\dfrac{\pi}{3}$. Condotte le bisettrici BM e CN, si determini per quale triangolo ABC risulta minima la somma dei raggi delle circonferenze circoscritte ai triangoli BNC e BMC.

[Si ponga $C\hat{B}A:=x\Rightarrow B\hat{C}A=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{x}{2}$. Si applichi il teorema della corda ai triangoli BCM, dove $2r_1\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$, e BCN, dove $2r_2\sin\left(-\dfrac{x}{2}+\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Allora $r_1+r_2:=f(x)=\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{x}{2}\right)}$ è minima quando il denominatore assume il valore massimo, ovvero 1, $x=\dfrac{\pi}{3}$]

- Si studi la funzione $f(x)=\dfrac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2})}$.



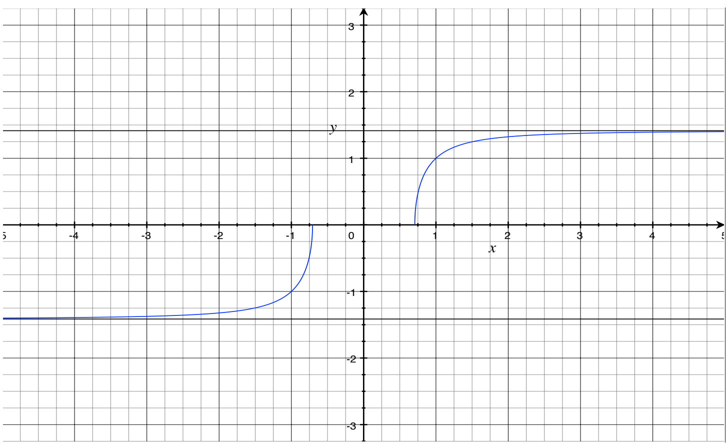
24. Classificare i punti discontinuità della derivata prima della funzione $f(x)=\dfrac{x\log x}{x^2-1}$.

$$\left[\begin{array}{c}\lim_{x\to 0^+} f'(x)=+\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x)=0\end{array}\right]$$

25. Si stabilisca se può esistere una funzione definita e derivabile due volte in IR che soddisfi le seguenti condizioni: $f'(0)=1,\quad f'(3)=7,\quad f''(x)<0 \quad \forall x\in IR$.

[No: si applichi il teorema di Lagrange a $f'(x)$ nell'intervallo $[0,3]$].

26. Si tracci il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{x}$.



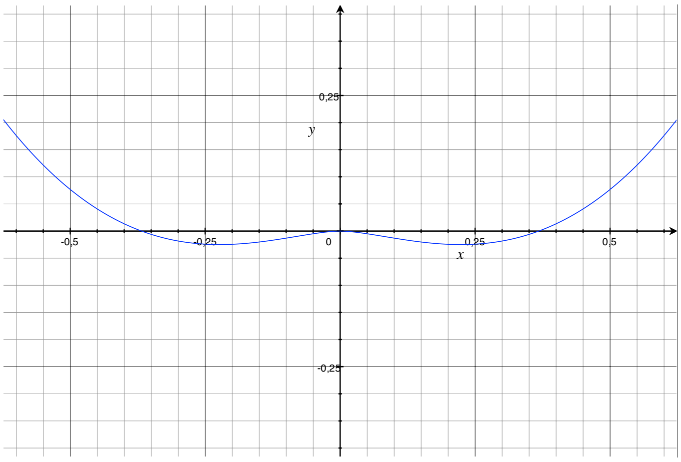
27.Si dica se è possibile determinare i parametri a,b,c affinché risulti possibile applicare il teorema di Rolle alla funzione $f(x)=\begin{cases}-ax^2+3x+c; & x\le 2\\ \dfrac{b}{x^2}; & x>2\end{cases}$ nell'intervallo $[-1;+4]$.

$$\left[\; a=\frac{15}{8} \quad b=18 \quad c=6 \;\right]$$

28. Dopo aver enunciato e dimostrato il teorema di Lagrange, si dica se è vero che, se $f'(x) \le 1$ per ogni $x \in (-2;3)$ e $f(3)=4$, allora $f(-2) \ge -1$.

[si]

29. Si tracci il grafico della funzione $f(x) = x^2(\ln|x|+1)$.



30. Si dica se la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & x \le 0 \\ (2x+1)e^{-x} & x > 0 \end{cases}$ è derivabile in $x=0$.

[si]

31. Applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \ln x$ nell'intervallo $[1;b]$ e dimostrare la disuguaglianza $1 - \frac{1}{b} < \ln b < b - 1$.

$\left[\frac{1}{b} \le \frac{\ln b - \ln 1}{b-1} = \frac{1}{c} \le 1 \ldots\right]$

32. Determinare il valore del parametro *a* che rende minima la distanza tra i vertici delle parabole $y = ax^2 - 2x + 2$ e $y = 2ax^2 - 2x + 1$.

$[a=1]$

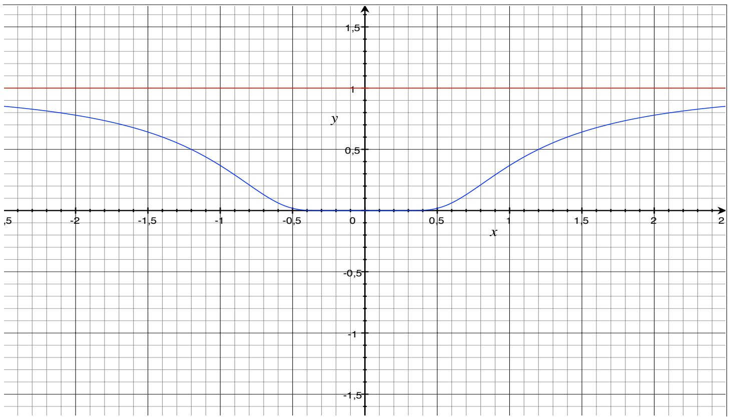
33. E' data la funzione $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

a) Si descriva l'andamento del grafico della funzione (dominio, limiti agli estremi del dominio, eventuali simmetrie, studio del segno della derivata prima);

b) Calcolare il $\lim_{x\to 0} f'(x)$;

c) Che tipo di punto è $(0;0)$, rispetto alla funzione data?

[a) $D \equiv R - \{0\}$; simmetria rispetto all'asse *y*; $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ $f'(x) = 2x^{-3}e^{-x^2} > 0 \Leftrightarrow x > 0$. b) $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$. c) discontinuità eliminabile]



34. Dimostrare che il punto di ascissa $x=0$ è un minimo locale per la funzione $f(x)=x^4-x\cos x+\sin x+\cos x+x^2$.

$$\left[\ f(0)=1;\quad f'(0)=0;\quad f''(0)=1>0\ \right]$$

35. Dimostrare che, se una funzione ammette derivate prima e seconda in tutti i punti di un intervallo $[a,b]$, e si annulla in almeno tre punti di $[a,b]$, allora la derivata seconda si annulla in almeno un punto di (a,b). (*Suggerimento: applicare due volte il teorema di Rolle…)*

$$\left[f(c)=f(d)=f(e)=0\Rightarrow \exists x_1\in(c,d);x_2\in(d,e)\middle| f'(x_1)=f'(x_2)=0\Rightarrow 0=\frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}=f''(z)\right]$$

36. Scrivere il polinomio di secondo grado che approssima la funzione $f(x)=\cos^2 x-\cos x+1$ nel punto di ascissa $x_0=\pi/2$.

$$\left[P_2\left(x;\frac{\pi}{2}\right)=1+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$$

37. Tra tutti i cilindri di volume fissato $V=25\pi$, determinare quello di superficie totale minima.

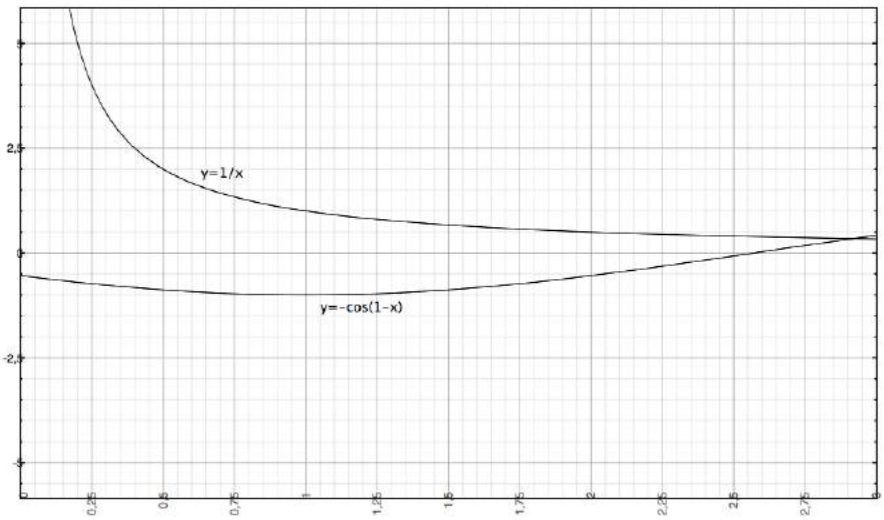
$$\left[r=\sqrt[3]{\frac{75}{2}}\right]$$

38. Una funzione derivabile $y=f(x)$ e la sua derivata prima sono legate dalla relazione $y^2+y'^2=1$. Si determinino le possibili funzioni che verificano questa proprietà.

- Derivando ambo i membri della relazione data otteniamo: $2yy'+2y'y''=0\Rightarrow 2y'(y+y'')=0$. Di conseguenza, le possibili soluzioni sono $y=1$ e $y=-\cos x$, a meno di costanti.

39. Data la funzione $f(x)=\sin(1-x)-\ln x$ ristretta all'intervallo $\left(0,1+\frac{\pi}{2}\right)$, sia $g(x)$ la sua inversa. Si calcoli il valore di $g'(0)$.

- Dallo studio per via grafica della derivata prima della funzione data $f(x)=\sin(1-x)-\ln x$, si osserva che questa è invertibile nell'intervallo $\left(0,1+\frac{\pi}{2}\right)$:



$f'(x) = -\cos(1-x) - \dfrac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > -\cos(1-x)$. Ora, poiché nell'intervallo dato risulta $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, dalla regola di derivazione della funzione inversa otteniamo:

$$g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{-1-\frac{1}{1}} = -\frac{1}{2}$$