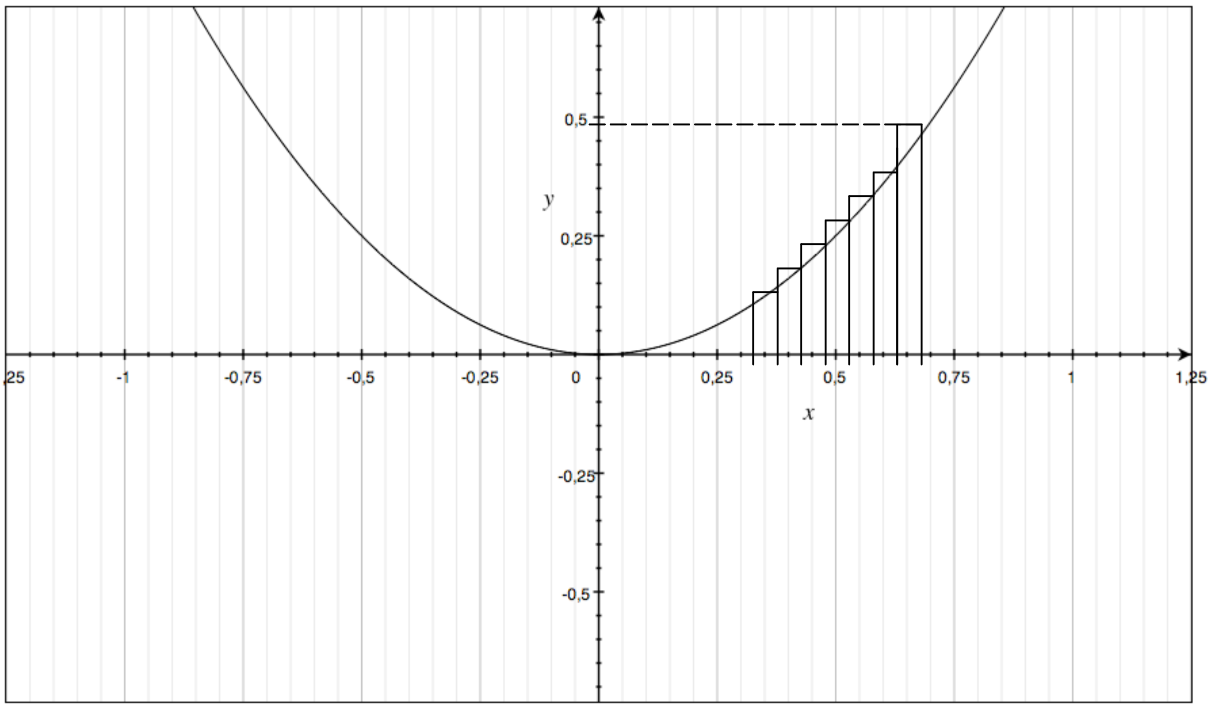
CAPITOLO 4
INTEGRALI
4.1 L'area del segmento di parabola

Il concetto d'integrale nasce per risolvere un problema geometrico dalle molteplici applicazioni: il *Problema delle aree*.
In particolare, con l'integrale è possibile calcolare l'area racchiusa dal grafico di una funzione limitata non negativa e dall'asse delle ascisse.
In Fisica, con il *calcolo integrale* è possibile determinare, ad esempio, il lavoro compiuto da una forza non costante, oppure quello compiuto in una trasformazione termodinamica, o lo spostamento di un corpo se è nota la legge oraria della velocità. Avviciniamoci alle idee fondamentali del calcolo integrale. Per questo scopo consideriamo il problema affrontato dai matematici greci oltre duemila anni fa: la misura dell'*area del cerchio*. L'idea messa in campo dai matematici del tempo, in particolare da *Archimede*, è riassunta dal cosiddetto *metodo di esaustione*, che consiste in una sorta di "somma infinita". Un esempio in cui si applica questa idea è dato dal calcolo dell'area del *segmento parabolico*.
Consideriamo la parabola di equazione $y = ax^2$. Vogliamo calcolare l'area compresa tra il grafico della parabola per $0 \le z \le x$ e l'asse delle ascisse. Per questo scopo suddividiamo l'intervallo $0 \le z \le x$ in *n* intervalli di uguale ampiezza $\frac{x}{n}$. I sotto-intervalli così individuati sono rappresentati con la seguente notazione: $\left[\frac{k-1}{n}x; \frac{k}{n}x\right], \quad k = 1, 2, \ldots, n$. Consideriamo gli *n* rettangoli di base $\frac{x}{n}$ ed altezza $a\left(\frac{k}{n}x\right)^2$ come in figura:



Calcoliamo l'area totale di tutti i rettangoli:
$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{n} \cdot a\left(\frac{kx}{n}\right)^2 = \frac{ax^3}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{ax^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{ax^3}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$. E' evidente dalla figura che, al crescere del numero di suddivisioni *n*, l'area totale dei rettangoli "si avvicina" all'area racchiusa dal grafico della parabola e dall'asse delle ascisse: $S \to \frac{ax^3}{3}$. Di conseguenza, l'area del *segmento parabolico* è data dalla differenza $ax^2 \cdot x - \frac{ax^3}{3} = \frac{2}{3}ax^3$.

4.2 Funzioni integrabili

Proseguiamo nel nostro cammino di avvicinamento alla formulazione del concetto d'area di una regione piana, osservando che:

1. L'area è un numero non negativo;
2. L'area di un rettangolo è il prodotto della base per l'altezza;
3. L'area di due figure congruenti è la stessa;
4. Se una regione viene suddivisa in due parti, l'area complessiva è la somma delle aree delle due parti.

Consideriamo una *partizione p* dell'intervallo $[a;b]$ in *n* intervalli equispaziati:

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b; \quad x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$, ed indichiamo con m_i e M_i rispettivamente il minimo e il massimo della funzione su ognuno degli intervalli equispaziati, che supponiamo per il momento *continua* e *non negativa* (e quindi il massimo ed il minimo esistono per il teorema di Weierstrass). Si costruiscono le somme $s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ e $S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ chiamate *somma inferiore* e *somma superiore*, formate da *plurirettangoli* contenuti nel *trapezoide* $\{(x;y) \in R^2, a \le x \le b; \quad 0 \le y \le f(x)\}$ nel caso della somma inferiore, e contenenti il trapezoide nel caso della somma superiore.

E' ragionevole affermare che più *fine* è la partizione, più le somme inferiori e superiori si avvicinano al valore dell'area del trapezoide; inoltre per qualsiasi partizione, la somma inferiore è minore o al più uguale alla somma superiore.

Queste considerazioni portano alla seguente

Definizione. Poniamo $I^+ = \inf_p S_n$ e $I^- = \sup_p s_n$ rispettivamente l'estremo inferiore delle somme superiori e l'estremo superiore delle somme inferiori, al variare della partizione dell'intervallo $[a;b]$.
Se risulta

$$I^+ = I^-$$

si dice che la funzione *f* (che continuiamo a supporre continua e non negativa) è *integrabile* secondo Riemann in $[a;b]$, e si indica il comune valore $I^+ = I^-$ con

$$\int_a^b f(x)dx,$$

detto *integrale definito* della funzione *f* tra gli estremi *a* e *b*.

Abbiamo bisogno di un criterio pratico per stabilire l'integrabilità di una funzione.

Teorema 1. *Sia f una funzione continua e non negativa sull'intervallo* $[a;b]$. *Se risulta*

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0,$$

allora la funzione f è integrabile.

Dimostrazione. Dall'ipotesi $\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$ segue che $\forall \varepsilon > 0$ esiste un indice *k* tale che $S_k - s_k < \varepsilon$.
Ora, poiché $I^+ \le S_k$ e $I^- \ge s_k$, combinando tutte queste disuguaglianze otteniamo $I^+ - I^- \le S_k - s_k < \varepsilon$; questo risultato, unito al fatto che $I^+ \ge I^-$ porta alla conclusione che $0 \le I^+ - I^- \le S_k - s_k < \varepsilon$ e quindi, per l'arbitrarietà di scelta di ε, risulta $I^+ = I^- = \int_a^b f(x)dx$.

Osservazioni

1. Le partizioni non devono necessariamente essere equispaziate, è sufficiente che siano costituite da intervalli di ampiezza via via più piccola (partizioni più *fini*).
2. La funzione non deve necessariamente essere continua: basta che sia limitata su $[a;b]$.

Teorema 2. *Sia f una funzione continua e monotòna sull'intervallo* $[a;b]$. *Allora la funzione è integrabile.*

Dimostrazione. Consideriamo una partizione dell'intervallo $[a;b]$ in *n* intervalli di uguale ampiezza $\dfrac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$. Per la continuità della funzione sull'intervallo chiuso e limitato $[a;b]$, esistono massimo e minimo su ognuno degli intervalli della partizione; per la monotonia (supponiamo la funzione non decrescente) si ha $m_i = f(x_{i-1})$ e $M_i = f(x_i)$. Valutiamo il limite delle somme inferiori e superiori:

$$0 \le \lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(f(b) - f(a))(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty}(f(b) - f(a))\left(\frac{b-a}{n}\right) = 0$$

quindi $\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$ e, per il teorema 1, la funzione è integrabile.

Una funzione non integrabile: la funzione di Dirichlet

Si consideri la funzione definita su $[0;1]$, detta di Dirichlet, così definita: $f(x) = \begin{cases} 1; & x \in Q \\ 0; & x \notin Q \end{cases}$. Si tratta evidentemente di una funzione limitata e discontinua in ogni punto del dominio. In ogni partizione di $[0;1]$ si trovano infiniti razionali ed infiniti irrazionali, quindi $m_i = 0$ e $M_i = 1$. Di conseguenza $I^+ = 1 \ne 0 = I^-$.

4.3 Alcune proprietà algebriche dell'integrale

Presentiamo adesso alcune proprietà di carattere algebrico che risultano essere utili in molte situazioni in cui si utilizza il concetto di integrale. Omettiamo la dimostrazione di questi semplici fatti, consigliando tuttavia di tentare una giustificazione basata sul significato geometrico di integrale come area.

1. E' possibile definire l'integrale anche per funzioni che cambiano segno: laddove la funzione è negativa il contributo al calcolo dell'area racchiuso dal grafico della funzione e dall'asse delle ascisse è negativo.
2. Se $a \ge b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx; \quad \int_a^a f(x)dx := 0$.
3. *(Linearità) Se f e g sono due funzioni integrabili sull'intervallo* $[a;b]$, *allora le funzioni* $f+g$ *e* Cf *(C è una costante) sono integrabili e si ha:* $\begin{gathered}\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx\end{gathered}$.
4. *(Additività) Se f è integrabile sugli intervalli* $[a;c]$ *e* $[c;b]$, *allora è integrabile su* $[a;b]$ *e si ha* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
5. *(Monotonia) Siano f e g integrabili su* $[a;b]$ *(con a<b). Allora*

   a) Se $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a;b]; \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx;$

   b) $|f(x)|$ *è integrabile su* $[a;b]$ *e risulta* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx;$

   c) Se $m \le f(x) \le M \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

4.4 Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Con questo risultato si mettono in relazione tra loro le due operazioni su cui si fonda il calcolo infinitesimale: l'integrale e la derivata. Grazie a questo risultato sarà possibile disporre di un primo strumento per il calcolo effettivo di integrali. Come risultato preliminare si dimostra il seguente

Teorema 3 (della media integrale). *Sia f una funzione continua sull'intervallo* $[a;b]$; *allora esiste un punto* $c \in [a;b]$ *tale che* $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Dimostrazione. Poiché la funzione è continua in un insieme chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass esistono massimo e minimo tali che, per la proprietà di monotonia (5. c) risulta

$m \le f(x) \le M \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. Sempre per la continuità della funzione, per il teorema dei valori intermedi esiste un punto $c \in [a;b]$ tale che

$m \le f(c) \le M \Rightarrow m \le f(c) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \le M$, c.v.d.

Osservazione. Si indichino con $f(x_1),..., f(x_n)$ i valori della funzione in *n* punti equispaziati. La *media aritmetica* di questi valori è $\frac{f(x_1)+...+f(x_n)}{n}$; facciamo vedere che la media integrale è il limite della media aritmetica quando $n \to \infty$. Sia $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ l'ampiezza degli intervalli equispaziati, allora:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1)+...+f(x_n)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(f(x_1)+...+f(x_n))\Delta x}{n\Delta x} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n}}{\cancel{n}\frac{b-a}{\cancel{n}}} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Nell'integrale definito sono fissate ambedue gli estremi di integrazione. Se decidiamo di lasciarne uno "variabile" (geometricamente significherebbe disporre di una "funzione dell'area" in cui la variabile indipendente è il secondo estremo di integrazione), viene quasi automatica la seguente definizione:

Definizione (funzione integrale). *Se f è integrabile sull'intervallo* $[a;b]$, *si definisce* funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt; \quad a \le x \le b.$$

E' d'uso, quando un estremo di integrazione è variabile, indicare la variabile della funzione integranda con un simbolo diverso.

Teorema 4 (fondamentale del calcolo integrale). *Sia f una funzione continua sull'intervallo* $[a;b]$; *allora la funzione integrale* $F(x) = \int_a^x f(t)dt; \quad a \le x \le b$ *è derivabile* $\forall x \in [a;b]$ *e risulta* $F'(x) = f(x)$.

Dimostrazione. Scriviamo il rapporto incrementale

$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$ =(proprietà 4, additività) $= \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$ =(teorema della media integrale) $= \frac{(x+h-x)f(z)}{h} = f(z)$ per un certo valore $z \in (x;x+h)$. Di conseguenza, passando al limite per $h \to 0$ si ottiene $F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{z\to x} f(z) = f(x)$, per la continuità della funzione *f* .

Da quanto visto segue la

Definizione (primitiva). *Si definisce primitiva della funzione f la funzione integrale F tale che* $F'(x) = f(x)$.

Segue da questa definizione che le primitive sono *infinite* e differiscono tra loro per una costante. In particolare:

Corollario (formula fondamentale del calcolo integrale). *Nelle ipotesi del teorema fondamentale del calcolo integrale si ha la seguente relazione:*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx := F(x)\,\Big|_a^b .$$

Dimostrazione. Dalla definizione di primitiva di una funzione, sono primitive di *f* tutte le funzioni $G(x) := F(x) + c$. Di conseguenza, $G(a) = F(a) + c = \int_a^a f(x)dx + c = 0 + c = c$,

$G(b) = F(b) + c = \int_a^b f(x)dx + c \Rightarrow F(b) - F(a) = G(b) - c - G(a) + c = \int_a^b f(x)dx$.

4.5 Un'applicazione numerica*: la formula di quadratura (*detta *dei trapezi)*

Si consideri la partizione ottenuta suddividendo $[a;b]$ in intervalli uguali, e sia z_i un punto appartenente all'intervallo $[x_{i-1};x_i]$. Si ha: $s_n \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) f(z_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(z_i) \le S_n$, e, per il teorema precedente (e per quello *dei due carabinieri* applicato alle successioni $S_n; s_n$), se la funzione è continua, risulta $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(z_i) = \int_a^b f(x)dx$. In particolare, per il teorema dei valori intermedi $m_i \le f(z_i) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \le M_i$. Di conseguenza

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\ldots+\frac{f(b)+f(x_{n-1})}{2}\right]=$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)}{2}+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{f(b)}{2}\right].$$

Per quanto riguarda la valutazione dell'*errore assoluto* R_n, se la funzione è derivabile due volte nell'intervallo $[a,b]$, questo è dato dalla $R_n \le \frac{h^2}{12}(b-a)M_2$, dove abbiamo indicato con $h = \frac{b-a}{n}$ il *passo di calcolo*, e con M_2 il valore massimo assunto dalla derivata seconda nell'intervallo $[a,b]$.
Per ottenere la *precisione data* ε, occorre quindi ricavare il passo di calcolo dalla disuguaglianza $R_n \le \varepsilon$, da cui segue $\frac{h^2}{12}(b-a)M_2 \le \varepsilon$. Il passo di calcolo dovrà quindi avere l'ordine di grandezza di $\sqrt{\varepsilon}$.
Ad esempio, se $\varepsilon = \frac{1}{100} \Rightarrow h \approx \frac{1}{10} \Rightarrow n = 10$.

Esercizi

1. Sia *f* una funzione continua sull'intervallo $[a;b]$ con $f(x) \le 0$ e $\int_a^b f(x)dx = 0$. Allora *f* è identicamente nulla.

2. Trovare le primitive delle seguenti funzioni:
   a) $f(x) = 3x^2 - x^{-2/3}$; $\quad\left[F(x) = x^3 - 3x^{1/3} + c\right]$
   b) $f(x) = \frac{6x}{(1+3x^2)^2}$; $\quad\left[F(x) = -(1+3x^2)^{-1} + c\right]$
   c) $f(x) = -\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}$; $\quad\left[F(x) = -\cos\frac{1}{x} + c\right]$
   d) $f(x) = \frac{x^{-1/2}}{2(1+x)}$. $\quad\left[F(x) = \arctan\sqrt{x} + c\right]$

3. Calcolare i seguenti integrali:
   a) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$; $\left[\frac{\pi}{2}\right]$
   b) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$; $\left[\frac{e-1}{2}\right]$
   c) $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{9+4x^2} dx$; $\left[\frac{\pi}{36}\right]$
   d) $\int_0^1 \frac{1-x^9}{1-x} dx$. $\left[\sum_{k=1}^{9} k^{-1}\right]$
4. Dimostrare che $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$.
   $$\left[x = a-t \Rightarrow dx = -dt \Rightarrow \int_0^a f(a-x)dx = -\int_a^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt\right]$$
5. L'immissione di rifiuti in una discarica viene sospesa quando viene raggiunta la quantità di 50 mila tonnellate. Da quel momento inizia il trasferimento dei rifiuti verso un'altra discarica al tasso di $P'(t) = -1{,}8t - 0{,}08t^2$, dove t è il tempo trascorso espresso in mesi. Si calcoli la quantità di rifiuti presente nella discarica dopo 3 mesi dal raggiungimento della quantità massima di rifiuti. $\left[P(3) = 41{,}18 \cdot 10^6 kg\right]$

4.6 L'integrale indefinito

Definizione. Si dice *integrale indefinito* una *qualsiasi* funzione integrale (primitiva) di una funzione data: $F(x) = \int f(x)dx$.

Il teorema fondamentale del calcolo suggerisce un metodo per calcolare rapidamente le primitive delle funzioni più importanti: basta leggere al contrario una tabella di derivate!

$$F(x) = x^{n+1} \Rightarrow F'(x) = (n+1)x^n \Rightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$$

$$F(x) = \sin x \Rightarrow F'(x) = \cos x \Rightarrow \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$F(x) = \cos x \Rightarrow F'(x) = -\sin x \Rightarrow \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$F(x) = \ln|x| \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$F(x) = e^x \Rightarrow F'(x) = e^x \Rightarrow \int e^x dx = e^x + C;$$

$$F(x) = \arctan x \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C;$$

$$F(x) = \tan x \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$$

4.7 Integrazione per sostituzione

Un metodo un po' meno immediato per il calcolo di primitive è suggerito dalla derivata della funzione composta. Esaminiamo alcuni casi rilevanti.

$$y=\left[f(x)\right]^{\alpha+1}\Rightarrow y'=(\alpha+1)\left[f(x)\right]^{\alpha}f'(x)\Rightarrow\int\left[f(x)\right]^{\alpha}f'(x)dx=\frac{\left[f(x)\right]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C;$$

$$y=\ln(f(x))\Rightarrow y'=\frac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\left|f(x)\right|+C;$$

$$y=\sin(f(x))\Rightarrow y'=f'(x)\cos(f(x))\Rightarrow\int f'(x)\cos(f(x))dx=\sin(f(x))+C;$$

$$y=\cos(f(x))\Rightarrow y'=-f'(x)\sin(f(x))\Rightarrow\int f'(x)\sin(f(x))dx=-\cos(f(x))+C;$$

$$y=\tan(f(x))\Rightarrow y'=\frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}dx=\tan(f(x))+C;$$

$$y=\arcsin(f(x))\Rightarrow y'=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx=\arcsin(f(x))+C;$$

$$y=\arctan(f(x))\Rightarrow y'=\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx=\arctan(f(x))+C;$$

In generale se $u=\varphi(x)\Rightarrow du=\varphi'(x)dx\Rightarrow f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=f(u)du$.

Una primitiva che avremo modo di calcolare anche con altre tecniche è quella relativa alla funzione $f(x)=\dfrac{1}{m^2+x^2}$. Il calcolo può essere ricondotto al tipo "arcotangente" semplicemente osservando che

$$\int\frac{dx}{m^2+x^2}=\int\frac{dx}{m^2\left(1+\left(\frac{x}{m}\right)^2\right)}=\frac{1}{m}\int\frac{\frac{1}{m}}{\left(1+\left(\frac{x}{m}\right)^2\right)}dx=\frac{1}{m}\arctan\left(\frac{x}{m}\right)+C.$$

Esercizi

1. $\int x(2x+5)^{10}dx$ $\left[2x+5=t\Rightarrow F(x)=\dfrac{(2x+5)^{12}}{24}-\dfrac{(2x+5)^{11}}{22}+C\right]$
2. $\int\dfrac{1-x}{1+\sqrt{x}}dx$ $\left[\sqrt{x}=t\Rightarrow F(x)=x-\dfrac{2}{3}x^{3/2}+C\right]$
3. $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$ $\left[2x+1=t^2\Rightarrow F(x)=\ln\left|\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+C\right]$
4. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ $\left[e^x-1=t^2\Rightarrow F(x)=2\arctan\sqrt{e^x-1}+C\right]$
5. $\int\dfrac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx$ $\left[u=\ln x\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x}\Rightarrow\int\dfrac{u+\ln 2}{u+\ln 4}du\Rightarrow F(x)=\ln x-\left[\ln(\ln 4x)\right]\ln 2+C\right]$
6. $\int\dfrac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\left[u=\arcsin x\Rightarrow du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow F(x)=\dfrac{(\arcsin x)^3}{3}+C\right]$
7. $\int\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$ $\left[e^x+1=t^2\Rightarrow F(x)=2\left(\dfrac{(e^x+1)^{3/2}}{3}-\sqrt{e^x+1}\right)+C\right]$
8. $\int\dfrac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$ $\left[u=\cos x\Rightarrow du=-\sin xdx\Rightarrow-\int\dfrac{1-u^2}{\sqrt{u}}du\Rightarrow F(x)=-2\sqrt{\cos x}+\dfrac{2}{5}(\cos x)^{5/2}+C\right]$
9. $^*\int\dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ $\left[1+x^2=t^2\Rightarrow F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)+C\right]$

4.8 Integrazione per parti

Siano f e g due funzioni continue con derivata prima continua. Dalla formula di derivazione del prodotto di funzioni si ha $\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, da cui è possibile scrivere $f'(x)g(x) = \frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) - f(x)g'(x)$. Integrando ambo i membri di questa espressione si perviene alla cosiddetta *formula di integrazione per parti*:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Esempio. Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \arctan x$.

$$\int \arctan x dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C.$$

Esempio. Sia f una funzione derivabile nell'intervallo $[a,b]$ con $f(a) = f(b) = 0$. Dimostrare che $\int_a^b \left(f(t) + tf'(t)\right)dt = 0.$

- Integrando per parti: $\int_a^b \left(f(t) + tf'(t)\right)dt = tf(t) - \int_a^b f(t)dt + \int_a^b f(t)dt = bf(b) - af(a) = 0.$

Esercizio. Calcolare l'integrale della funzione $f(x) = \arcsin x$.

Esercizi

1. $\int \ln x\, dx$ $\quad \left[x\ln x - x + C\right]$
2. $\int \arcsin x\, dx$ $\quad \left[x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\right]$
3. $\int x\sin x\, dx$ $\quad \left[-x\cos x + \sin x + C\right]$
4. $\int x\cos 3x\, dx$ $\quad \left[\frac{x\sin 3x}{3} + \cos 3x + C\right]$
5. $\int xe^{-x}\, dx$ $\quad \left[-e^{-x}(x+1) + C\right]$
6. ** $\int x^2e^{3x}\, dx$ $\quad \left[\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}\right)e^{3x} + C\right]$
7. $\int x^\alpha \ln x\, dx$ $\quad \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C\right]$
8. $\int x\arctan x\, dx$ $\quad \left[\frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{\arctan x}{2} + C\right]$
9. $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)dx$ $\quad \left[x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C\right]$
10. $\int e^{ax}\sin bx\, dx$ $\quad \left[\frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C\right]$
11. $\int \sin(\ln x)dx$ $\quad \left[\frac{x\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right)}{2} + C\right]$
12. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$ $\quad \left[\ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \Rightarrow \ln x\left[\ln(\ln x) - 1\right] + C\right]$
13. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$ $\quad \left[x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \Rightarrow 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + C\right]$

14. $\int (\arcsin x)^2\, dx$ $\left[x(\arcsin x)^2 + 2(\arcsin x)\sqrt{1-x^2} - 2x + C\right]$

15. $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$ $\left[\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{x \cdot x dx}{(1+x^2)^2} = \ldots \Rightarrow -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\arctan x}{2} + C\right]$

16. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ $\left[\int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{a^2(x^2+a^2)^2} dx = \ldots \Rightarrow \frac{1}{2a^3}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + C\right]$

17. $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$ $\left[x = \sinh t \Rightarrow dx = \cosh t dt \Rightarrow \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right) + C\right]$

18. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ $\left[\frac{x}{a} = \sin t \Rightarrow dx = a\cos t dt \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + \arcsin\frac{x}{a}\right) + C\right]$

19. ** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}$ $\left[x+1 = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt \Rightarrow \ldots \ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x}\right| + C\right]$

4.9 Integrazione di semplici funzioni razionali fratte

Si studiano i casi in cui al denominatore è presente un polinomio di secondo grado ed al numeratore un polinomio di grado inferiore:

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx; \quad \int \frac{q}{ax^2+bx+c}dx;$$

Qualora il grado del polinomio al numeratore fosse maggiore di quello al denominatore, si esegue la divisione tra polinomi i n modo da ricondurci ai casi suddetti (più l'integrazione del polinomio quoziente).

In base al segno del discriminante del polinomio al denominatore si hanno tre casi:

1. $\Delta > 0 \Rightarrow ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Si decompone la funzione integranda nella somma di funzioni $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$, dove i coefficienti al numeratore sono determinati con il *principio di identità dei polinomi.*
   - *Esempio*. Si calcoli il seguente integrale: $\int \frac{2x-7}{x^2-x-2}dx$.

     Si ha $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$. Imponiamo che $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{2x-7}{x^2-x-2}$. Si uguaglia il polinomio al numeratore del membro di sinistra $(A+B)x + (A-2B)$ a quello del membro di destra $(2x-7)$. Si determinano i coefficienti A e B risolvendo il sistema $\begin{cases} A+B=2 \\ A-2B=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=3 \\ A=-1 \end{cases}$ L'integrale di partenza si scrive quindi nella forma

     $\int \frac{2x-7}{x^2-x-2}dx = \int \frac{-1}{x-2}dx + \int \frac{3}{x+1}dx = -\ln|x-2| + 3\ln|x+1| + C$.
2. $\Delta = 0 \Rightarrow ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$. Si possono presentare due tipologie di integrali di questo tipo.
   - *Esempio*. Si calcoli il seguente integrale: $\int \frac{1}{4x^2-4x+1}dx$.

     Risulta $\int \frac{1}{4x^2-4x+1}dx = \int \frac{1}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}dx = -\frac{1}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)} + C$.

- *Esempio*. Si calcoli il seguente integrale: $\int \frac{x+5}{9x^2-6x+1}dx$.

  In questo caso si ha $\int \frac{x+5}{9x^2-6x+1}dx = \int \frac{x+5}{9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}dx$. Scriviamo la funzione integranda nella forma $\frac{A}{9\left(x-\frac{1}{3}\right)} + \frac{B}{9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{x+5}{9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=\frac{16}{3} \end{cases}$, da cui segue

  $$\int \frac{x+5}{9x^2-6x+1}dx = \int \frac{1}{9\left(x-\frac{1}{3}\right)}dx + \int \frac{16/3}{9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\ln\left|x-\frac{1}{3}\right| - \frac{16}{27\left(x-\frac{1}{3}\right)} + C.$$

3. $\Delta < 0$. In questo caso il polinomio si scrive come somma del quadrato di un binomio e di un numero positivo.

- *Esempio*. Si calcoli il seguente integrale: $\int \frac{1}{4x^2-4x+6}dx$.

  L'integrale viene scritto nella forma

  $\int \frac{1}{4x^2-4x+6}dx = \int \frac{1}{4x^2-4x+1+5}dx = \int \frac{1}{(2x-1)^2+5}dx$. Si passa al "tipo arcotangente" con l'operazione

  $$\int \frac{1}{(2x-1)^2+5}dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+1}dx = \frac{1}{2\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+C.$$

- *Esempio*. Si calcoli il seguente integrale: $\int \frac{3x+1}{x^2+4}dx$.

  In questo caso non si cerca il quadrato del binomio, bensì:

  $\int \frac{3x+1}{x^2+4}dx = \int \frac{3x}{x^2+4}dx + \int \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+4} + \frac{2}{4}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx$, da cui si ottiene $\int \frac{3x+1}{x^2+4}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+4} + \frac{2}{4}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+4\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C$

Esercizi

1. $\int \frac{x+7}{x^2-x-2}dx$ $\quad\left[-2\ln|x+1|+3\ln|x-2|+C\right]$
2. $\int \frac{x}{x^2+2x+1}dx$ $\quad\left[\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C\right]$
3. $\int \frac{1-2x}{x^2+2x+5}dx$ $\quad\left[-\ln\left(x^2+2x+5\right)+\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C\right]$
4. $\int \frac{x}{x^2+x+1}dx$ $\quad\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C\right]$
5. $\int \frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}dx$ $\quad\left[\frac{x^2}{2}-\ln|x|-\frac{1}{x}-\arctan x+C\right]$

4.10 Calcolo di aree

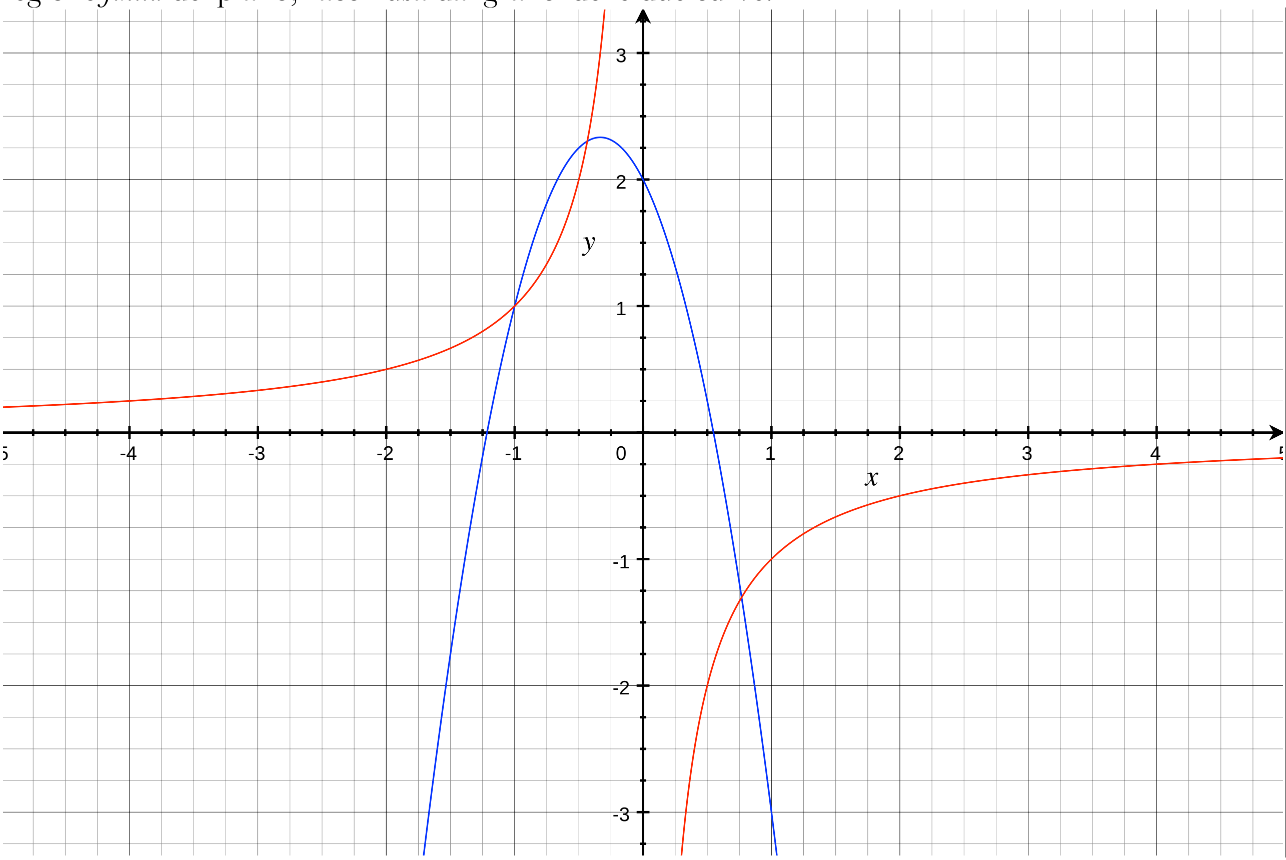
Con l'integrale definito si è calcolata l'area di figure piane tipo

$S=\left\{(x,y)\middle|\ a\le x\le b,\quad 0\le y\le f(x)\ \right\}$, da cui risulta $Area(S)=\int_a^b f(x)dx$. In generale, se vogliamo calcolare l'area di una regione del piano delimitata da due funzioni continue $f(x),g(x)$, definita come $G=\left\{(x,y)\middle|\ a\le x\le b,\quad g(x)\le y\le f(x)\ \right\}$, dobbiamo calcolare l'integrale definito

$Area(G)=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$.

Esempio. Calcolare l'area della regione *finita* racchiusa dai grafici delle funzioni $y=-3x^2-2x+2$ e $y=-\frac{1}{x}$.

Per meglio renderci conto dell'operazione da svolgere, è opportuno tracciare i grafici delle due curve, e calcolare le ascisse dei punti che delimitano l'intervallo (o gli intervalli) in cui è definita la regione *finita* del piano, racchiusa dai grafici delle due curve.



$$\begin{cases} y=-3x^2-2x+2 \\ y=-\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=-1:=a \\ x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{6}:=b \\ x_3=\frac{1+\sqrt{13}}{6} \end{array}$$

. Quindi, $Area(G)=\int_{-1}^{\frac{1-\sqrt{13}}{6}}\left[-3x^2-2x+2+\frac{1}{x}\right]dx$.

4.11 Calcolo di volumi di solidi di rotazione

Vogliamo calcolare il volume di particolari solidi, generati dalla rotazione di un trapezio curvilineo, limitato dalla curva $y = f(x)$, dall'asse *x*, e dalle rette $x = a$ e $x = b$, intorno agli assi cartesiani.

Rotazione attorno all'asse x

In questo caso l'*elemento di volume* è dato dal *cilindro infinitesimo* di altezza Δx e raggio $f(x)$, $dV = \pi\left[f(x)\right]^2 dx$. Il volume si calcola con la formula $V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$.

Esempio

Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione della figura limitata dal grafico della funzione $f(x) = \sin x$, dal segmento $0 \le x \le \pi$, e dall'asse delle ascisse, attorno all'asse *x*.

- $V = \pi\int_a^b \sin^2 x\, dx = \pi\left[\frac{x - \sin x \cos x}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$.

Rotazione attorno all'asse y

In questo caso l'*elemento di volume* è dato dalla *corona cilindrica* di altezza $f(x)$, larghezza Δx, e raggio x, $dV = 2\pi x f(x)dx$. Il volume si calcola con la formula $V = 2\pi\int_a^b x f(x)dx$.

Esempio

Calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione della figura limitata dal grafico della funzione $f(x) = \sin x$, dal segmento $0 \le x \le \pi$, e dall'asse delle ascisse, attorno all'asse *y*.

- $V = 2\pi\int_0^\pi x \sin x\, dx = 2\pi\left[-x\cos x + \sin x\right]_0^\pi = 2\pi^2$.

Osservazione. Nel caso generale, il volume del corpo generato dalla rotazione attorno agli assi cartesiani di una figura limitata dalle curve $y = f(x) \le y = g(x)$ dall'asse *x*, e dalle rette $x = a$ e $x = b$, è dato dalle seguenti formule:

- *rotazione attorno all'asse x*: $V = \pi\int_a^b \left\{\left[g(x)\right]^2 - \left[f(x)\right]^2\right\} dx$.
- *Rotazione attorno all'asse y*: $V = 2\pi\int_a^b x\left[g(x) - f(x)\right] dx$.

Esempio. Calcolare il volume del toro generato dalla rotazione del cerchio $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, con $b \ge a$, attorno all'asse delle ascisse.

- Posto $f(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}$; $g(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2}$ si ha $V = 4\pi b\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2\pi^2 a^2 b$.

Il teorema di Guldin

Nei casi in cui il centro di gravità di una figura piana coincide con il centro geometrico (quando questo esiste), è possibile sfruttare il seguente risultato.

Il volume di un corpo generato dalla rotazione di una figura piana intorno ad un certo asse che si trova nel piano della figura senza intersecarla, è uguale al *prodotto dell'area di questa figura per la lunghezza della circonferenza descritta dal centro di gravità della figura.*

Esempio. Calcolare il volume del toro generato dalla rotazione del cerchio $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, con $b \ge a$, attorno all'asse delle ascisse.

- Applichiamo stavolta il teorema di Guldin. L'area è πa^2, mentre la lunghezza della circonferenza descritta è $2\pi b$; il volume è quindi $2\pi^2 a^2 b^2$.

4.12 Integrali impropri

Finora ci siamo occupati del calcolo d'integrali di funzioni *continue* definite su intervalli *limitati*. Per la loro utilità nelle applicazioni, esaminiamo i casi di funzioni non continue nell'intervallo d'integrazione, oppure di funzioni continue, ma definite su un intervallo d'integrazione illimitato; ad esempio, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ e $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. In ogni caso, ci occuperemo di funzioni non negative.

Gli integrali che presentano queste caratteristiche si dicono *integrali impropri*.

Nel primo caso, facciamo vedere che è possibile scrivere $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx$. Infatti, la funzione integrale $F(b) = \int_1^b \frac{1}{x^2} dx$ è derivabile, e risulta, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $F' = \frac{1}{x^2} > 0$. Da questo segue che la funzione integrale $F(b)$ è crescente, e quindi ammette limite $\lim_{b \to +\infty} F(b) = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{b} + 1 \right] = 1$.

Esercizi

1. Generalizzare lo studio condotto su $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$, al caso $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, dove la funzione è continua e non negativa sull'intervallo $[a, +\infty)$.
2. Dimostrare che l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1} & se \quad \alpha > 1 \\ +\infty & se \quad \alpha < 1 \end{cases}$.

Nel secondo caso $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, il modo naturale di procedere consiste nel calcolare il $\lim_{k \to 0^+} \int_k^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.
Argomentazioni analoghe a quelle proposte nel caso precedente (monotonia dell'integrale, quindi esistenza del limite per *k* che tende a zero "da destra") assicurano la bontà dell'impostazione. In particolare, $\lim_{k \to 0^+} \int_k^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{k \to 0^+} \left[2\sqrt{1} - 2\sqrt{k} \right] = 2$.

In generale, l'integrale improprio si dice *convergente* se il limite è finito, altrimenti si dice *divergente*.
Il calcolo degli integrali impropri può essere semplificato grazie all'applicazione del cosiddetto *criterio del confronto*.

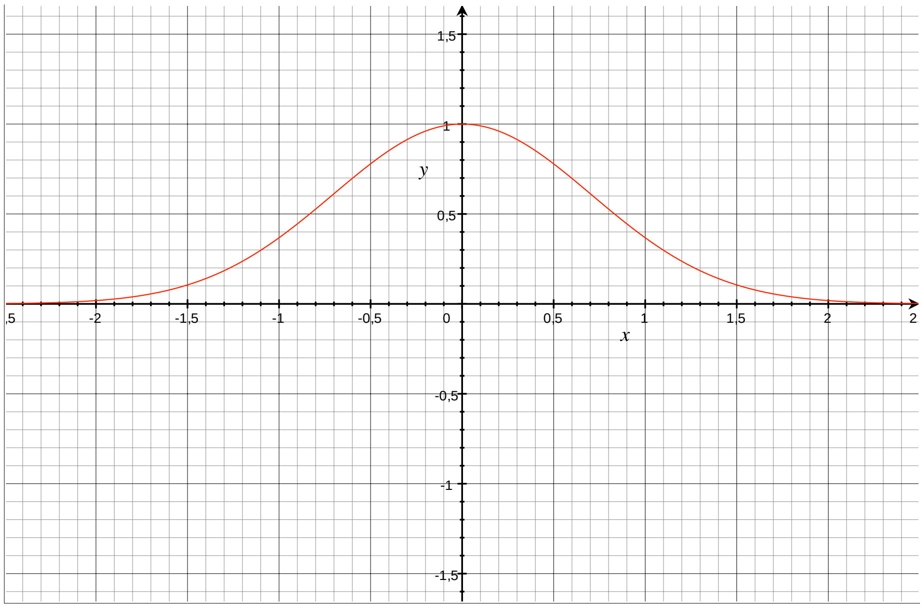
Esercizio

1. Dimostrare che l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1} & se \quad \alpha < 1 \\ +\infty & se \quad \alpha > 1 \end{cases}$.

4.13 La funzione *gaussiana* $f(x) = e^{-x^2}$

Vogliamo calcolare il valore dell'integrale improprio della funzione di Gauss: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. La ricerca di questo risultato è molto importante, soprattutto alla luce delle applicazioni di questa funzione nel *calcolo delle probabilità*, dove rappresenta una particolare densità di probabilità, e in fisica sperimentale, dove descrive la *distribuzione dei risultati di un gran numero di misure, affette soltanto da errori casuali*.

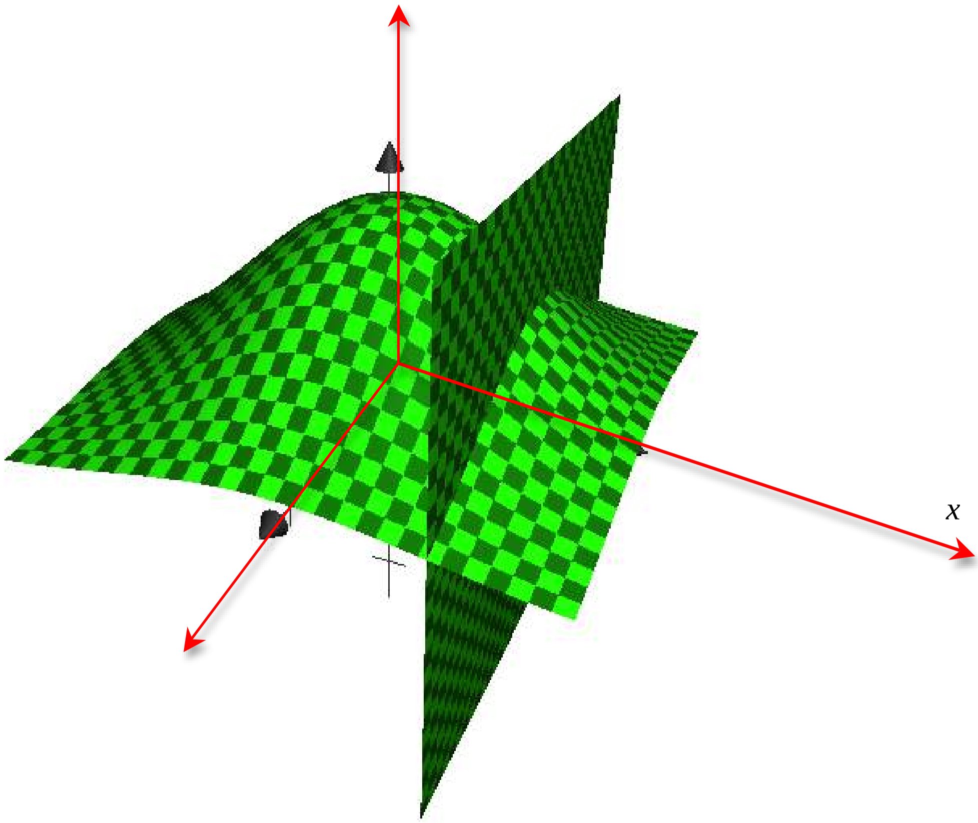
Il calcolo dell'integrale improprio della funzione gaussiana è tanto istruttivo quanto laborioso.
Iniziamo con lo studio e la rappresentazione grafica della funzione $f(x) = e^{-x^2}$.
La funzione è definita su tutto l'insieme dei numeri reali, e risulta simmetrica rispetto all'asse delle ordinate. In particolare si ha:
$D \equiv R$, $\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0$, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$: la funzione è crescente in $(-\infty, 0]$, decrescente in $[0, +\infty)$, $f''(x) = 2e^{-x^2}\left[2x^2 - 1\right]$: la funzione è concava in $\left[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right]$. Il grafico è quindi il seguente:



La difficoltà nel calcolo dell'integrale della funzione gaussiana, risiede tutta nell'impossibilità di utilizzare i metodi di cui disponiamo. Per inciso, questo tipo di difficoltà è molto diffuso nel calcolo degli integrali indefiniti, mentre non sussiste in quello delle derivate (per quanto complicate possano essere, i metodi noti, correttamente utilizzati, conducono sempre al risultato); per rendercene conto è sufficiente inventarsi una funzione "non troppo semplice", e provare a calcolarne la derivata prima e l'integrale indefinito[1].
Aggiriamo l'ostacolo con il seguente stratagemma, che viene qui riassunto "per punti":

1. Si ruota il grafico della funzione attorno all'asse delle ordinate;
2. Si calcola il volume come somma delle sezioni infinitesime, ottenute intersecando il grafico del solido di rotazione con piani perpendicolari all'asse delle ascisse. Tali sezioni sono delle "contrazioni" della funzione di Gauss lungo la direzione verticale, di un fattore uguale a e^{-x^2}, dove x è l'ascissa del punto in cui il piano-sezione interseca l'asse delle ascisse. Tale volume risulterà uguale al quadrato dell'integrale improprio che vogliamo calcolare;
3. Si calcola il volume del solido ruotato attorno all'asse delle ordinate con il metodo conosciuto;
4. Si comparano i risultati dei due punti precedenti.

[1] Provare con la funzione $f(x) = \sin\left(\ln\left(x^3\right)\right)$.



L'area della sezione è $A(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-z^2}dz = e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz$. L'elemento di volume è quindi $dV = A(x)dx$, da cui segue, per le proprietà note degli integrali,

$$V=\int_{-\infty}^{+\infty} A(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz\right)e^{-x^2}dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Il calcolo del volume con la formula $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$ conduce al risultato:

$V=\lim_{b\to+\infty} 2\pi\int_0^b xf(x)dx = \lim_{b\to+\infty} 2\pi\int_0^b xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\pi\left(-e^{-x^2}\right)_0^b = \pi$. Comparando i due risultati ottenuti $V=\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi$, si giunge al risultato cercato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\,.$$