CAPITOLO 7
LA CIRCONFERENZA NEL PIANO CARTESIANO
7.1 L'equazione della circonferenza come luogo geometrico
Insieme alla retta, la circonferenza costituiva per gli antichi una traiettoria "speciale" in natura. Queste due curve, infatti, rappresentavano i moti più comuni: quello rettilineo e quello circolare. In particolare, la circonferenza è definita come *il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto detto centro*. La traduzione analitica di questa definizione si dà quindi fissando il centro $C(x_0,y_0)$ ed il raggio *r*:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

Volendo scrivere l'equazione della circonferenza in forma di equazione di secondo grado in due incognite occorre sviluppare l'espressione sopra:

$$\begin{aligned}&(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\\&x^2+y^2-2xx_0-2yy_0=-x_0^2-y_0^2+r^2(\geq 0),\\&x^2+y^2+ax+by+c=0\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}&a=-2x_0\\&b=-2y_0\\&c=x_0^2+y_0^2-r^2\Rightarrow\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c=r^2\geq 0\end{aligned}$$

Per vedere se l'equazione di secondo grado in due variabili $x^2+y^2+ax+by+c=0$ rappresenta una circonferenza (reale), occorre che sia verificata la condizione espressa da $a^2+b^2-4c^2>0$. Se tale quantità è uguale a zero, la circonferenza si dice *degenere* e coincide con il centro (una circonferenza di raggio zero), mentre se è minore di zero, la circonferenza si dice *immaginaria* e non si può tracciare sul piano cartesiano.
Ricapitolando, data un'equazione del tipo $x^2+y^2+ax+by+c=0$, questa rappresenta una circonferenza reale se $a^2+b^2-4c^2>0$, con centro e raggio espressi dalle relazioni

$$x_0=-\frac{a}{2},\quad y_0=-\frac{b}{2},\quad r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c},$$

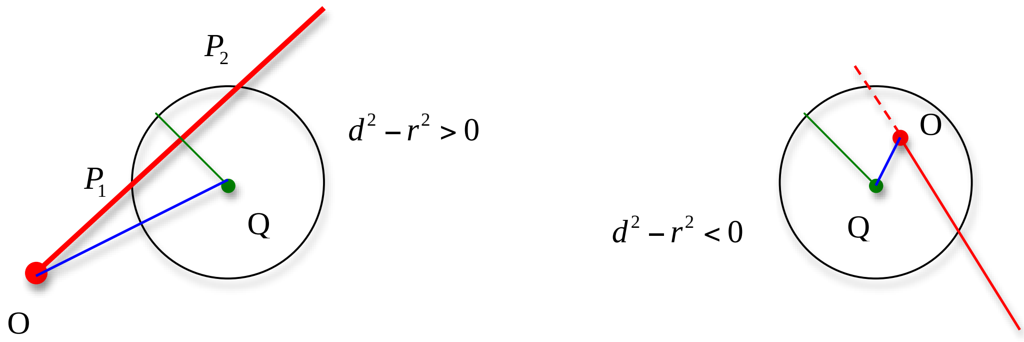
mentre, dati il centro $C(x_0,y_0)$ ed il raggio *r*, l'equazione è data dalla relazione $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

7.2 L'equazione della circonferenza passante per tre punti non allineati
E' noto dalla geometria euclideo che per tre punti non allineati passa una ed una sola circonferenza. Esaminiamo il seguente esempio.
Esempio. Si scriva l'equazione della circonferenza passante per i punti A(1,1); B(-2,0) e C(0,4).
Soluzione. Sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ si ottiene il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite *a, b, c*

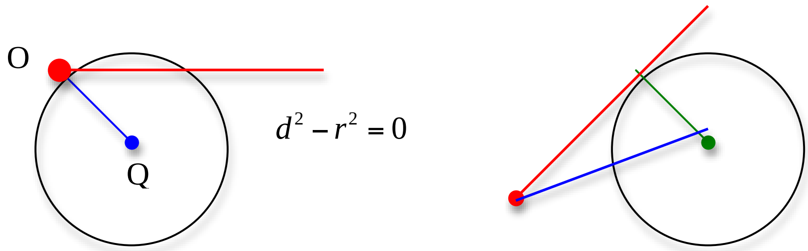
$$\begin{cases}a+b+c=-2\\-2a+c=-4\\4b+c=-16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=0\\b=-4\\a=2\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2+2x-4y=0\,.$$

La potenza di un punto rispetto ad una circonferenza
Vogliamo studiare le intersezioni della circonferenza $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ con l'asse delle ascisse:

$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x^2-2x_0x+x_0^2+y_0^2-r^2=0$. Le soluzioni dell'equazione di secondo grado ottenuta, se esistono, sono tali che
$x^2-2x_0x+x_0^2+y_0^2-r^2=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2$, da cui seguono le relazioni
$\begin{cases} x_1+x_2=2x_0 \\ x_1x_2=x_0^2+y_0^2-r^2 \end{cases}$. Indicato con $Q(x_0;y_0)$ il centro della circonferenza, e posto $d^2=x_0^2+y_0^2$, segue $x_1x_2=d^2-r^2$: il prodotto delle ascisse dei punti intersezione della circonferenza con la retta $y=0$ dipende solo dalla distanza $\overline{OQ}$ e dal raggio *r*.
Quanto detto vale per qualsiasi semiretta di origine *O* che interseca la circonferenza di centro *Q* e raggio *r* in due punti P_1, P_2.



$\overline{OP_1}\cdot\overline{OP_2}=\overline{OQ}^2-r^2$. Abbiamo dedotto una relazione euclidea da relazioni analitiche!



Si definisce quindi *potenza del punto O rispetto alla circonferenza data* la quantità d^2-r^2.

7.3 Mutua posizione retta-circonferenza

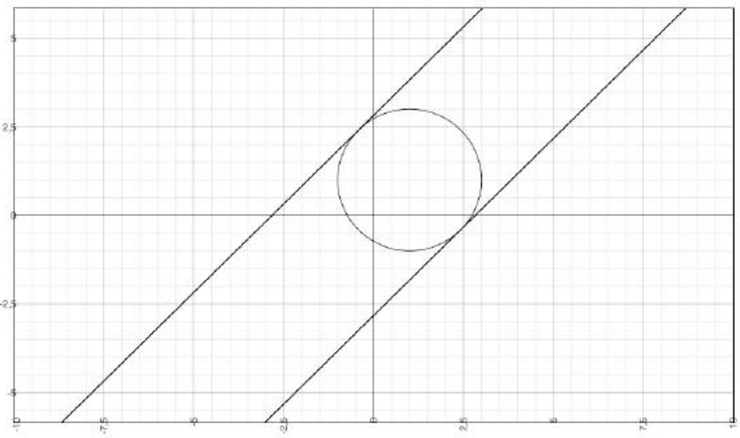
Come è noto dalla geometria euclidea, una retta ed una circonferenza possono avere nessuno (*retta esterna*), uno (due coincidenti, *retta tangente*), oppure due punti distinti (*retta secante*) in comune. In particolare, la tangente è sempre perpendicolare al raggio: questa proprietà permette di applicare la formula della distanza punto-retta per la determinazione della tangente alla circonferenza.

Esempio 1

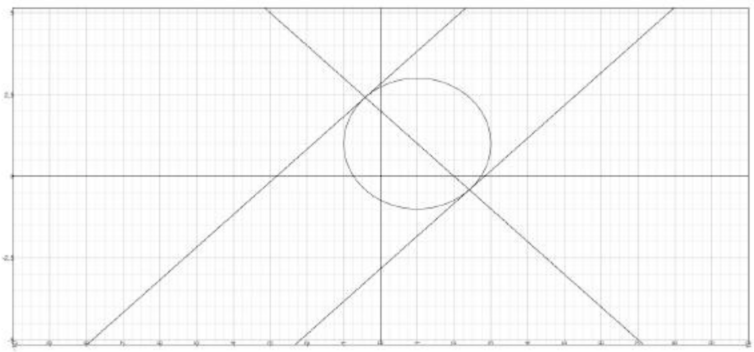
Scrivere l'equazione delle rette tangenti alla circonferenza di raggio 2 e centro nel punto C(1;1), parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Si determini, inoltre, l'equazione della perpendicolare alle tangenti passante per i punti di contatto.
Soluzione:

- Equazione della circonferenza: $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ (non serve per risolvere il problema, ma fa sempre bene calcolarla!).

- Equazione del fascio improprio di rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante: $y = x + k$.
- Imposizione che la distanza del centro dalla generica retta del fascio sia uguale al raggio: $\frac{|1-1+k|}{\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow |k| = 2\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = x + 2\sqrt{2} \\ y = x - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.



- La perpendicolare alle tangenti passante per i punti di contatto contiene necessariamente il diametro di estremi questi punti, quindi sarà sufficiente imporre l'appartenenza del centro della circonferenza alla retta cercata: $y - 1 = -(x-1) \Rightarrow y = -x + 2$.



7.4 L'equazione della circonferenza: alcune condizioni per la sua determinazione

La presenza di tre coefficienti nell'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ comporta la necessità di dover disporre di tre ipotesi per determinare l'equazione della circonferenza. Presentiamo una breve rassegna di situazioni con le quali esercitarsi.

1. Determinare l'equazione della circonferenza di centro (2;1) e raggio 3
   - $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$
2. Determinare l'equazione della circonferenza sapendo che le coordinate degli estremi di un diametro sono (1;3) e (3;1).
   - Il centro della circonferenza, è il punto medio del segmento corrispondente al diametro: $C = (2;2)$, mentre il raggio è metà della lunghezza del suddetto segmento: $r = \frac{\sqrt{(1-3)^2 + (3-1)^2}}{2} = \sqrt{2}$. Di conseguenza, l'equazione è $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$.
3. Determinare l'equazione della circonferenza di centro (3;4) passante per il punto (1;1).
   - Si determina il raggio come misura della distanza tra il centro ed il punto dato $r = \sqrt{(3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{13} \Rightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 13$.

4. Determinare l'equazione della circonferenza passante per i punti (5;2) e (1;5) ed avente il centro sulla bisettrice I-III quadrante.
   - Il centro appartiene alla retta $y = x \Rightarrow C = (x;x)$. Di conseguenza,

     $$(x-5)^2 + (x-2)^2 = (x-1)^2 + (x-5)^2$$

     $$4 - 4x = 25 - 10x \Rightarrow x = \frac{7}{2} \Rightarrow C = \left(\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$$

     $$r^2 = \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(5 - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$$

5. Determinare il minimo valore *r* del raggio di una circonferenza passante per i punti A(-2;0) e B(0;-1).
   - Il punto medio del segmento AB è il punto M($-1;-\frac{1}{2}$), mentre il coefficiente angolare della retta per A e B è $m = -\frac{1}{2}$. Di conseguenza, l'asse del segmento AB ha equazione $y + \frac{1}{2} = 2(x+1) \Rightarrow y = 2x + \frac{3}{2}$. Il centro della circonferenza sarà dunque il punto di coordinate (variabili) $C(k;2k+\frac{3}{2})$. Il centro della circonferenza di raggio 1 lo determiniamo imponendo che, ad esempio, BC = *r*

     $$\left(0 - k^2\right) + (-1 - 2k - \frac{3}{2})^2 = r^2$$

     $$5k^2 + 10k + \frac{25}{4} - r^2 = 0 \Rightarrow (\Delta > 0) \Rightarrow 25 - \frac{125}{4} + 5r^2 > 0.$$

     $$5r^2 > \frac{25}{4} \Rightarrow r > \frac{\sqrt{5}}{2}$$

   Saremmo potuti pervenire al risultato con il seguente (semplice) ragionamento: tra tutte le circonferenze passanti per A e B quella di raggio minimo è quella con il centro coincidente con il punto medio del segmento AB! Essendo il diametro

   $$AB = \sqrt{5} \Rightarrow r_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

7.5 La tangente in un punto dato: *formula di sdoppiamento*

Vogliamo determinare l'equazione della tangente ad una circonferenza in un punto noto $P(x_0;y_0)$. Per la proprietà secondo cui il raggio di una circonferenza forma sempre un angolo retto con la tangente, se *m* è il coefficiente angolare della retta congiungente il centro con il punto di tangenza, la tangente avrà coefficiente angolare l'antireciproco di *m*. Poiché $m = \frac{y_0 - y_C}{x_0 - x_C}$, dove $C(x_C;y_C)$ è il centro della circonferenza, la retta tangente ha equazione $y - y_0 = -\frac{x_0 - x_C}{y_0 - y_C}(x - x_0)$. Di conseguenza, se è data l'equazione della circonferenza nella forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, dalle relazioni che legano i coefficienti dell'equazione alle coordinate del centro $x_C = -\frac{a}{2}$, $y_C = -\frac{b}{2}$ si giunge all'equazione della retta tangente alla circonferenza nel caso in cui sono noti l'equazione di quest'ultima ed il punto di tangenza, detta *formula di sdoppiamento*:

$$y - y_0 = -\frac{x_0 - x_C}{y_0 - y_C}(x - x_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{x_0 + \frac{a}{2}}{y_0 + \frac{b}{2}}(x - x_0)$$

$$x(x_0 + \frac{a}{2}) + y(y_0 + \frac{b}{2}) - y_0(y_0 + \frac{b}{2}) - x_0(x_0 + \frac{a}{2}) = 0$$

$$ma \quad x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0 \Rightarrow$$

$$xx_0 + yy_0 + a\left(\frac{x + x_0}{2}\right) + b\left(\frac{y + y_0}{2}\right) + c = 0$$

- Inversamente, nota l'equazione della retta tangente $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ed il punto di tangenza $P(x_0;y_0)$, da quanto appena visto risulta $\begin{cases} \alpha = x_0 + \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2(\alpha - x_0) \\ \beta = y_0 + \frac{b}{2} \Rightarrow b = 2(\beta - y_0) \end{cases}$. Inoltre, dalla relazione $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} \quad r^2 = (x_0 + \frac{a}{2})^2 + (y_0 + \frac{b}{2})^2 \Rightarrow$ di $c = -x_0^2 - y_0^2 - 2x_0(\alpha - x_0) - 2y_0(\beta - y_0) = x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 = x_0^2 + y_0^2 + 2\gamma$ conseguenza l'equazione del fascio di circonferenze tangenti alla retta data nel punto dato è

$$x^2 + y^2 + 2(\alpha - x_0)x + 2(\beta - y_0)y + x_0^2 + y_0^2 + 2\gamma = 0.$$

- Saremmo pervenuti ad analogo risultato comparando l'espressione $xx_0 + yy_0 + a\left(\frac{x + x_0}{2}\right) + b\left(\frac{y + y_0}{2}\right) + c = 0$ con quella della retta data $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ed uguagliando i coefficienti $\begin{cases} x_0 + \frac{a}{2} = \alpha \\ y_0 + \frac{b}{2} = \beta \\ \frac{ax_0 + by_0}{2} + c = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2(\alpha - x_0) \\ b = 2(\beta - y_0) \\ c = \gamma - x_0(\alpha - x_0) - y_0(\beta - y_0) \end{cases}$

Esercizio 1

Scrivere l'equazione della retta tangente alla circonferenza

1) di centro (1;3) e raggio 4, nel suo punto di ascissa 2.
2) Di centro (0,2) e raggio 1 nel suo punto di ordinata $\frac{3}{2}$

Esercizio 2

Scrivere l'equazione della circonferenza tangente

1) alla retta di equazione $2x - y + 3 = 0$ nel suo punto di ascissa 3.
2) Alla retta di equazione $x - 2y + 5 = 0$ nel suo punto di ordinata 4.

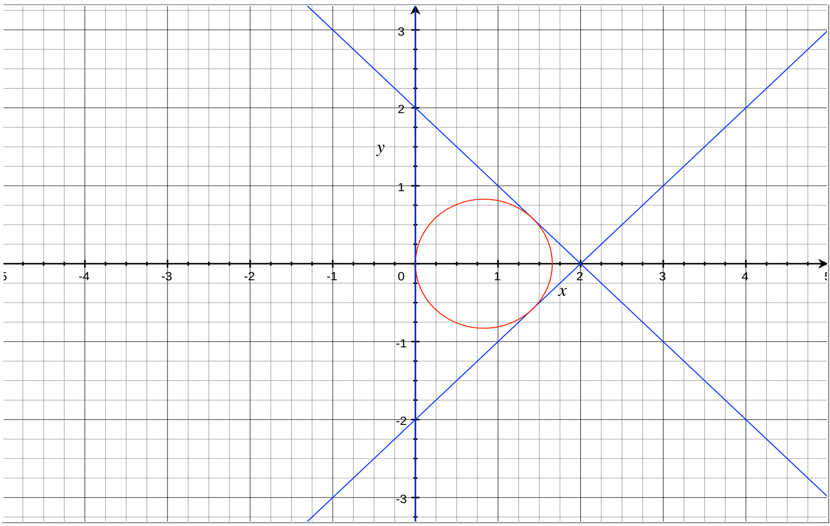
Problema

Si scriva l'equazione della circonferenza inscritta nel triangolo di vertici $A(2;0), B(0;2), C(0;-2)$. *Si rappresenti su un piano cartesiano quanto richiesto.*

- Poiché si tratta di un triangolo rettangolo isoscele con l'ipotenusa sull'asse *y*, per simmetria il centro ha coordinate $(r;0)$. Imponendo la distanza del centro dalla retta per AB uguale al raggio otteniamo:

$$\frac{|r-2|}{\sqrt{2}} = r \Rightarrow r = \frac{2}{1+\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1) \Rightarrow \left(x-2(\sqrt{2}-1)\right)^2 + y^2 = 4\left(\sqrt{2}-1\right)^2.$$

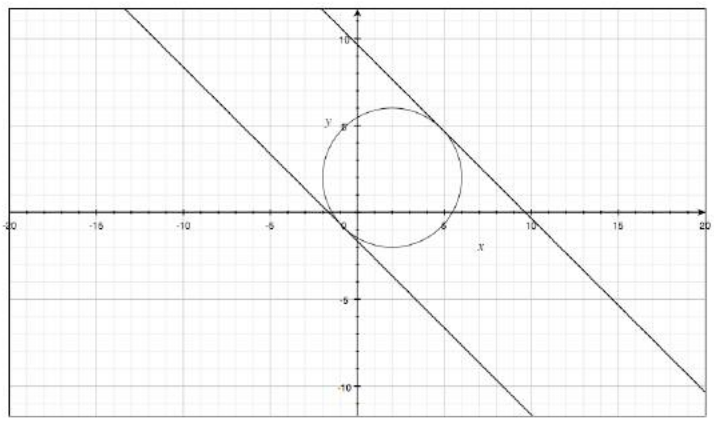
- *Oppure*: i raggi perpendicolari alle tangenti formano, con i segmenti congiungenti i punti di tangenza con il punto A, un quadrato di lato *r* e diagonale $2-r \Rightarrow r\sqrt{2} = 2-r \Rightarrow r = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$. Poiché $x_0 = r, y_0 = 0$, l'equazione della circonferenza è $\left(x-2(\sqrt{2}-1)\right)^2 + y^2 = 4\left(\sqrt{2}-1\right)^2$.



Problema

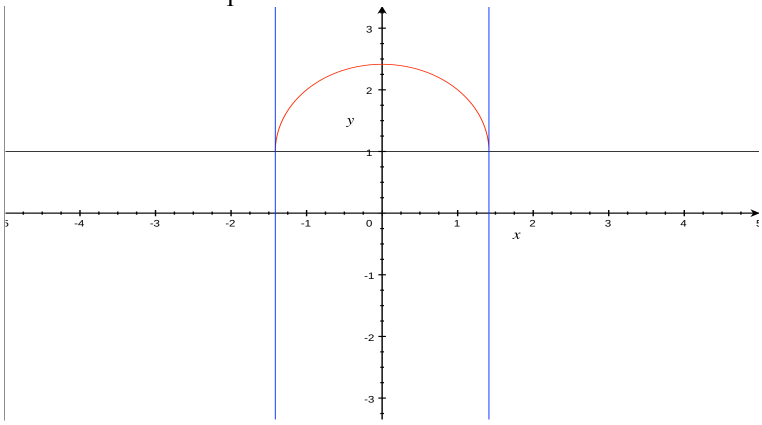
Dopo aver verificato che le soluzioni dell'equazione $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$ rappresentano una circonferenza nel piano cartesiano, la si rappresenti, e si trovino le equazioni delle rette parallele alla bisettrice del II e IV quadrante, e tangenti alla circonferenza.

- $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$. Si tratta di una circonferenza. Le parallele alla bisettrice II-IV quadrante hanno equazione $x + y = k$, di conseguenza, imponendo la distanza centro-retta uguale al raggio: $4 = \frac{|2+2-k|}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow |4-k| = 4\sqrt{2} \Rightarrow k = 4 \pm 4\sqrt{2}$



7.6 La circonferenza e le disequazioni irrazionali

Vogliamo tracciare il grafico della funzione $y-1=\sqrt{2-x^2}$. Innanzitutto osserviamo che ciò è possibile se $\begin{cases} y-1\geq 0 \\ 2-x^2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\geq 1 \\ -\sqrt{2}\leq x\leq \sqrt{2} \end{cases}$. Di conseguenza è possibile elevare al quadrato ambo i membri ed ottenere l'equazione della circonferenza di centro $(0;1)$ e raggio $\sqrt{2}$ $x^2+y^2-2y-1=0$. Il grafico della funzione si ottiene da quello della circonferenza tenendo conto dalle condizioni determinate in precedenza.



7.7 La formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo

Vogliamo utilizzare l'equazione della circonferenza per ottenere la celebre relazione che permette di calcolare l'area di un triangolo quando sono note le misure *a*, *b*, *c* dei suoi lati.
In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, siano B e B i vertici del triangolo che delimitano il lato di lunghezza *a*. Se disponiamo questi due vertici sull'asse *x*, simmetricamente rispetto all'origine, le loro coordinate sono $B\left(\frac{a}{2};0\right), C\left(0;-\frac{a}{2}\right)$. Ora, le circonferenze con centro nei punti B e C e raggi *b*e *c*, si intersecano in due punti simmetrici rispetto all'asse *x*: denotiamo uno di questi con A, ed il triangolo è così determinato con i vertici espressi in coordinate. In particolare:

$$A\equiv\begin{cases} \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=c^2 \\ \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2=b^2 \end{cases} \Rightarrow Area=\frac{a|y|}{2}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{, dove } p=a+b+c\,.$$

Esercizi

1. Si tracci il grafico della seguente funzione irrazionale:
$$y-2=\sqrt{1-x^2}\,.$$
2. Si risolva graficamente la seguente disequazione irrazionale:
$$\sqrt{1-x}\leq 1-2x\,.$$
3. Sono dati i punti A(-1;-2) e B(3;-1). L'asse di AB interseca in E l'asse y e la retta a cui appartiene il segmento AB interseca in D l'asse x. Detto M il punto medio di AB:
    a) Si determini l'asse del segmento AB;
    b) Si determinino i punti E e D;
    c) Si scriva l'equazione della circonferenza tangente in E all'asse del segmento AB, e alla retta contenente il segmento AB.

4. Si determini l'equazione della circonferenza, tangente alla retta *r:* $y = 4x$ ed alla sua simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, situata nel primo quadrante, ed avente raggio uguale a 4. Detti C il centro della circonferenza e B il punto di tangenza tra la circonferenza e la parallela *s* alla retta *r*, determinare l'area del triangolo ABC, dove A è il punto di intersezione della retta *s* con la bisettrice del primo e del terzo quadrante.

5. Sia C il centro di una circonferenza *C1* e P un punto esterno. Detto M il punto medio del segmento PC, si tracci la circonferenza *C2* di centro M e raggio MC. Indicate con A e B le intersezioni di questa con la circonferenza *C1*. Dimostrare che le rette PA e PB sono tangenti alla circonferenza *C1*.

6. Scrivere l'equazione della circonferenza tangente alla retta r di equazione $y = x + 8$ nel punto di ascissa $x = 6$ ed avente il centro sulla retta di equazione $x = 2$.
7. Si disegni la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$, e si determinino i punti E ed F di ascissa 2. Si scriva l'equazione della tangente alla circonferenza nel punto di ordinata maggiore tra i due trovati.

8. Scrivere l'equazione della circonferenza avente centro nel punto (-2,-2) e tangente alle rette $y = 2x \quad y = -\frac{x}{2}$.
9. Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$, determinare la retta tangente alla circonferenza nell'origine degli assi cartesiani.

10. Trovare l'equazione della circonferenza che passa per i punti A(0,-1) e B(-3,0) e ha il centro sulla retta di equazione $6x - y + 4 = 0$ *(suggerimento: il centro, oltre che sulla retta data, sta anche sull'asse del segmento AB…).*
11. PROBLEMA
    a) Si scriva l'equazione della circonferenza *C* di centro (5;5) e tangente alla retta $t: y = 2x$.
    b) Si individuino il punto di tangenza A della circonferenza *C* con la retta *t*, ed il punto A' di tangenza della circonferenza *C* con la retta *t'*, simmetrica della retta *t* rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.
    c) Si calcoli l'area del quadrilatero OACA'.
    d) Si determinino le equazioni delle circonferenze tangenti esternamente a *C* e al semiasse positivo delle ascisse.

12. Si risolva graficamente la seguente disequazione irrazionale: $\sqrt{1-x} \le 1 - 2x$.

13. Si tracci il grafico della seguente funzione irrazionale: $y - 2 = \sqrt{1 - x^2}$.

14. Determinare l'equazione della circonferenza passante per A(0,-2), B(0,6) e C(8,0).

15. Determinare l'equazione delle rette tangenti uscenti dal punto $P(\sqrt{2},0)$ alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

16. Date le circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - 4x = 0; \quad x^2 + y^2 - 4y = 0$, determinare la circonferenza di centro C(1,1) e passante per i punti intersezione delle due circonferenze. Calcolare inoltre l'area del quadrato circoscritto alla circonferenza trovata.

17. Determinare l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo isoscele ABC, sapendo che la base AB misura $6\sqrt{2}$ e sta sulla retta di equazione $y = x - 4$, e che il vertice si trova nel punto $C(-1;5)$.

Soluzioni

2. $x \le 0$
3. $a) 8x + 2y - 5 = 0 \quad b) E\left(0;\frac{5}{2}\right), D(7;0) \quad c) (x-4)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = 17, \ (x+4)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 17$
4. $\left(x - \frac{4\sqrt{17}}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4\sqrt{17}}{3}\right)^2 = 16 \quad 4x - y - 8\sqrt{17} = 0 \quad Area = 8$
6. $(x-2)^2 + (y-18)^2 = 32$
7. $E(2;0) F(2;-6) \quad x + 3y - 2 = 0$
8. $(x+2)^2 + (y+2)^2 = \frac{4}{5}$
9. $x + y = 0$
10. $x^2 + y^2 - 8y = 9$
11. $a) (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5 \quad b) A(3;6) A'(6;3) \quad c) Area = 15 \quad d) \left(x - 3\sqrt{5}\right)^2 + \left(y - 15 + 6\sqrt{5}\right)^2 = 45(9 - 4\sqrt{5})$
12. $x \le 0$
14. $x^2 + y^2 - \frac{13}{2}x - 4y - 12 = 0$
15. $y = \pm\left(x - \sqrt{2}\right)$
16. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$
17. $\left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{5}\right)^2 = \frac{578}{25}$.

A-LEVEL MATHEMATICS

1. Write down the equation of the circle with centre $C = (1;2)$ and radius $r = 3$.
2. Find the coordinates of the centre and the radius of the following circle: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$.
3. Find the equation of the circle passing through three points: $(3;3), (1;4), (0;2)$.
4. Find the equation of the tangent to $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ at $(1;7)$.
5. Find the point on the circle $x^2 + y^2 - 16x + 12y + 75 = 0$ which is a) nearest to, b) furthest from origin.
6. Find the equations of the circle touching both coordinate axes and passing through point $(2;1)$.
7. Find the two values of m for which the line $my = 11 - 3x$ is a tangent to the circle $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 25 = 0$.
8. Find the equations of the two tangents from the origin to the circle $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$.