

ESERCIZI PARABOLA NEL PIANO CARTESIANO

Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

1. $\sqrt{2x^2 - 1} \geq 1 + x$;
2. $\sqrt{1 - |x|} \geq 1 - x$.
3. $\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} \geq \frac{x+1}{x-1}$.
4. $\sqrt{3+x} - \sqrt{1-2x} \geq \sqrt{x+4}$.

Problemi

1. Dire per quali valori di a e b l'equazione $x^2 + ay^2 - 4x - 4y + b = 0$ rappresenta:
 - a) una parabola con asse parallelo all'asse y ,
 - b) una parabola con asse parallelo all'asse x .
2. Considera le parabole di equazione $y = x^2 + kx + 4$ e determina per quale valore di k sono tangenti all'asse delle ascisse e scrivi le equazioni delle parabole corrispondenti ai valori trovati.
3. Scrivere l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y , passante per $B(2,0)$ e avente per tangente in $C(1,3)$ la retta t parallela alla retta $r: 2x + y = 0$.
4. Determinare per quale valore del parametro k la parabola di equazione $y = x^2 - k$ è tangente alla circonferenza di centro l'origine e raggio 2.
5. Data la funzione $f(x) = 2 - (x-1)^2$
 - a) Tracciare il grafico della funzione $|f(x)|$;
 - b) Tracciare il grafico della funzione $f(|x|)$.
6. Si tracci il grafico della funzione la funzione $f(x) = 2 + \sqrt{3-x}$.
7. Si scriva l'equazione della parabola avente come direttrice l'asse x e vertice $V(0;1/2)$,
 - a) Indicate con A e B le intersezioni della retta $y = mx$ con la parabola e C e D le proiezioni ortogonali rispettivamente di A e B sull'asse x , determinare m in modo che il trapezio $ABCD$ sia equivalente al quadrato di lato CD ;
 - b) Si determini l'equazione della retta tangente alla parabola e parallela alla retta $y = 2x - 8$, determinando (ed indicando con P) il punto di contatto; calcolare l'area del triangolo OVP .
8. Scrivere l'equazione della parabola avente fuoco nel punto $F(0, \frac{1}{8})$ e passante per l'origine.
9. Scrivere l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y = -x^2 + 2x - 1$ nel suo punto di ascissa 2.
10. Scrivere l'equazione della parabola avente fuoco nel punto $F(0,3)$, asse parallelo all'asse delle ordinate, e tangente alla retta di equazione $x - 2y - 2 = 0$.
11. Scrivere l'equazione della parabola avente fuoco $F(1, -\frac{3}{2})$ e vertice $V(1, -2)$.
 - a) Si determinino le intersezioni della parabola con la bisettrice del II e IV quadrante,
 - b) Si determini l'equazione della tangente alla parabola nel punto d'intersezione precedentemente trovato, di ascissa negativa.
12. Scrivi l'equazione della parabola tangente alle rette $r: x + 2y = 0$; $s: 2x - 2y - 9 = 0$ e avente per asse di simmetria la retta di equazione $y = -2$. Determina l'equazione della direttrice d della parabola e calcola l'area del triangolo formato dalle rette d , s e dalla perpendicolare alla parabola nel suo punto di ordinata -3 .

13. Disegnare la parabola di equazione $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$ e scrivere l'equazione della retta tangente nel punto P di ascissa 1.
14. Si discutano le intersezioni delle rette passanti per il punto P(0,-4) con la parabola di equazione $y = x^2 - 2$.

Soluzioni delle disequazioni

1. $x \leq 1 - \sqrt{3} \vee x \geq 1 + \sqrt{3}$
2. $0 \leq x \leq 1$
3. $\left(\text{osservazione} : \sqrt{A(x)} \geq -\frac{1}{A(x)} \dots \right) -1 < x < 1$
4. \emptyset

Soluzioni dei problemi

1. a) $\begin{cases} a=0 \\ \forall b \in R \end{cases}$; b) $\exists a, b \in R$
2. $k = \pm 4$
3. $y = -x^2 + 4$
4. $k = -2$
7. $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ a) $m = \pm 1; \pm\sqrt{2}$ b) $16x - 8y - 9 = 0; A = \frac{3}{8}$
8. $y = 4x^2$
9. $2x + y - 3 = 0$
10. $3x^2 - 32y - 96 = 0$
11. $y = \frac{x^2}{4} - x - \frac{3}{2}$ a) $(\pm\sqrt{6}; \mp\sqrt{6})$ b) $(\sqrt{6} + 2)x + 2y - 6 - 4\sqrt{6} = 0$
12. $x = -\frac{y^2}{2} - 2y$
13. $x + y - 3 = 0$
14. $|m| < 2\sqrt{2}$ esterne, $|m| = \pm 2\sqrt{2}$ tangenti, $|m| > 2\sqrt{2}$ secanti

A-LEVEL MATHEMATICS

1. Find the equation of the parabola with the given focus and directrix: a) $\text{focus}(4;0)$ $\text{directrix} : x = -4$, b) $\text{focus}(0;4)$ $\text{directrix} : y = -8$.
2. Find the equation of the axis of symmetry of each of the following parabolae, and the coordinates of each vertex: a) $y^2 = 4(x-1)$, b) $4(y-1) = (x-2)^2$.
3. Find the tangent of gradient 2 to each of this parabolae: a) $y^2 = 4x$, b) $4y^2 = x$.
4. Find the tangent to the parabola $y^2 = 8x$ with gradient: a) 2, b) -1.
5. Show that there are two tangents to the parabola $y^2 = 4x$ through $(-1;2)$ and that these two tangents are perpendicular.