ESERCIZI RETTA NEL PIANO CARTESIANO

Problemi svolti

1. Rappresenta graficamente la funzione di equazione $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + |x + 1|$.
   a) Determina le coordinate dei punti A, B, C $(x_A < x_B < x_C)$ del grafico dato le cui ascisse sono soluzioni dell'equazione $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$.
   b) Individua il quarto vertice D del trapezio isoscele ABCD.
   c) Calcola il perimetro e l'area del trapezio isoscele ABCD.
   d) Dimostra che congiungendo i punti medi dei lati si ottiene un rombo che ha l'area uguale alla metà di quella del trapezio.

Soluzione

La funzione è $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + |x + 1| = |x - 2| + |x + 1| = \begin{cases} y = -2x + 1 & x \le -1 \\ y = 3 & -1 < x \le 2 \\ y = 2x - 1 & x > 2 \end{cases}$

a) Applicando la regola di Ruffini (una soluzione è x = -1) otteniamo:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \Rightarrow x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x^2 + x - 6)(x + 1) = (x - (-3))(x - (-1))(x - 2).$$

$A(-3;7)$, $B(-1;3)$, $C(2;3)$

b) Il quarto vertice D si determina mediante l'intersezione tra la retta di equazione $y = 7$ e la retta di equazione $y = 2x - 1$: $D(4;7)$.

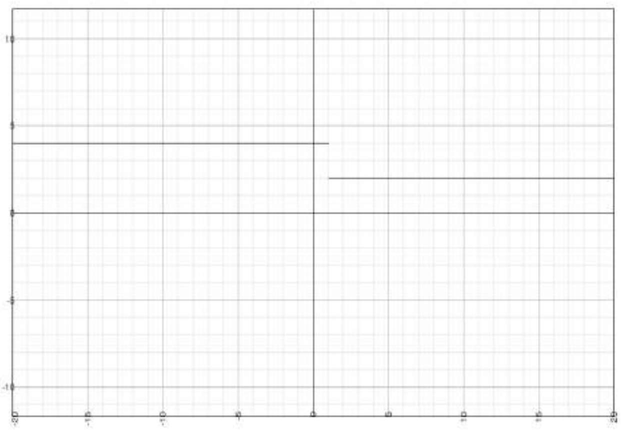
c) Il perimetro del trapezio ABCD misura:
$2p = |4 - (-3)| + |2 - (-1)| + 2\sqrt{(4 - 2)^2 + (7 - 3)^2} = 10 + 2\sqrt{20} = 2(5 + 2\sqrt{5})$, mentre l'area risulta: $area = \frac{1}{2}(7 + 3)|7 - 3| = 20$.

d) $M_{AB}(-2;5), M_{BC}(\frac{1}{2};3),\quad M_{CD}(3;5),\quad M_{DA}(\frac{1}{2};7)$. L'area del rombo è:
$area = \frac{1}{2} M_{AB}M_{DC} \cdot M_{BC}M_{AD} = \frac{1}{2} 5 \cdot 4 = 10$.

2. Considera la funzione di equazione $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{1 - x} + 3$.
   a) Rappresentala graficamente.
   b) Sia A l'intersezione della curva data con l'asse delle ordinate. Determina la retta *r* passante per A che forma un angolo di 45° con l'asse delle ascisse.
   c) Sia B l'intersezione di *r* con l'asse *x*. Scrivi le equazioni dei lati del triangolo isoscele ABC, di base AB, e con il vertice C situato nel quarto quadrante, la cui area vale 24.
   d) Stabilisci per quali valori del parametro *m* le rette del fascio di equazione $mx + y - 2 - m = 0$ intersecano il lato BC.

Soluzione

a) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{1 - x} + 3 = \frac{|x - 1|}{1 - x} + 3 \Rightarrow \begin{cases} y = 2, & x \ge 1 \\ y = 4, & x < 1 \end{cases}$



b) $A = \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(0;4)$. Una retta che forma un angolo di 45° con l'asse delle ascisse è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante, quindi il suo coefficiente angolare è $m = 1$. Dovendo passare per il punto A, sarà la retta di equazione $y = x + 4$.

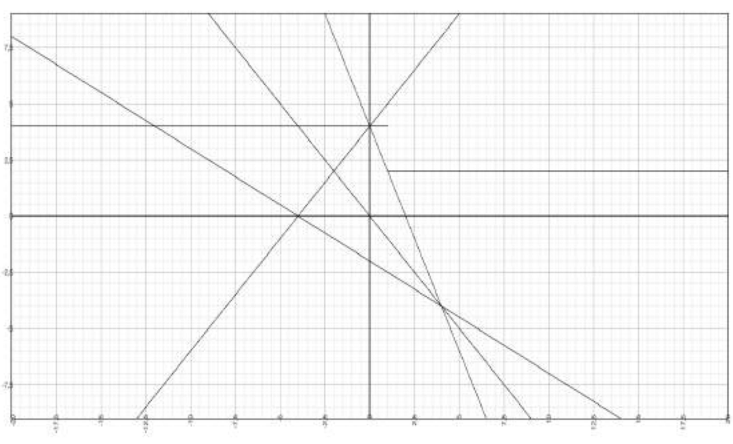
c) $B = \begin{cases} y = 0 \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow B(-4;0)$. Il vertice C è situato sull'asse del segmento AB:

$$y - \frac{y_A + y_B}{2} = -\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B}\left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)$$
$$y - 2 = -(x + 2) \Rightarrow y = -x$$

Di conseguenza il vertice C ha coordinate $C(x;-x)$ e, detta *h* la sua distanza dalla retta *r*, risulta $h = \frac{|x + x + 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|x + 2|$. Sfruttando l'ipotesi sull'area:

$24 = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}|x + 2|}{2} \Rightarrow |x + 2| = 6 \Rightarrow x = 4$. Quindi $C(4;-4)$ e le rette contenenti i lati del triangolo isoscele hanno equazione

$BC: \frac{y - 0}{-4 - 0} = \frac{x + 4}{8} \Rightarrow x + 2y + 4 = 0;\quad AC: \frac{y - 4}{-4 - 4} = \frac{x - 0}{4 - 0} \Rightarrow 2x + y - 4 = 0$.



d) Il centro del fascio di rette si ottiene assegnando due valori qualsiasi al parametro e mettendo a sistema le rette ottenute: $\begin{cases} y = 2 & (m = 0) \\ y = -x + 3 & (m = 1) \end{cases} \Rightarrow D(1;2) \Rightarrow y - 2 = m(x - 1)$. La retta congiungente

D con B ha coefficiente angolare $m = \frac{2-0}{1+4} = \frac{2}{5}$, mentre la retta congiungente D con C ha coefficiente angolare $m = \frac{2+4}{1-4} = -2$.

Esercizi

1. Tra le rette passanti per il punto di coordinate (1,2), determinare:
   a) La parallela alla retta di equazione $3x-2y=10$; $[3x-2y+1=0]$
   b) La perpendicolare alla retta di equazione $x+2y=0$. $[2x-y=0]$

2. Tra tutte le rette del fascio $kx+(1-k)y+3k-2=0$ determinare:
   a) la parallela all'asse y; $[x+1=0]$
   b) la perpendicolare alla retta $y=x-1$; $[x+y-1=0]$

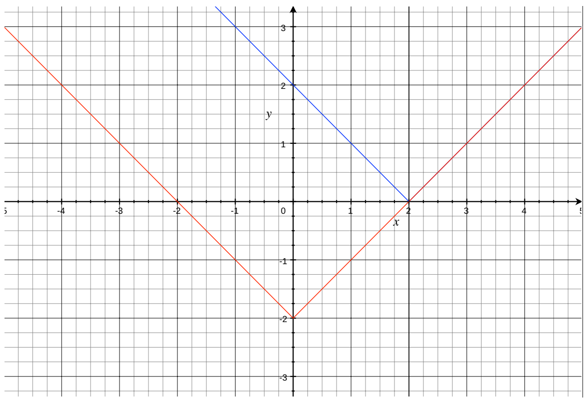
3. Scrivere l'equazione dell'asse del segmento A(-2,2) B(2,-1). Determinare sull'asse un punto C tale che il triangolo ABC abbia area 4.
   $$\left[\ 8x-6y+3=0 \quad C_1\left(\frac{24}{25},\frac{89}{50}\right), C_2\left(-\frac{24}{25},-\frac{39}{25}\right)\ \right]$$

4. Sono dati i punti A(-1;-2) e B(3;-1). L'asse di AB interseca in E l'asse y e la retta a cui appartiene il segmento AB interseca in D l'asse x. Detto M il punto medio di AB, determinare:
   a) il punto medio M, $\left[M\left(1,-\frac{3}{2}\right)\right]$
   b) la retta a cui appartiene il segmento AB, $[x-4y-7=0]$
   c) l'asse del segmento AB, $[8x+2y-5=0]$
   d) i punti E e D, $\left[\ E\left(0,\frac{5}{2}\right) \quad D(7,0)\ \right]$

5. Siano A e B i punti intersezione della retta $x+y-4=0$ con gli assi cartesiani. Si individui sull'asse del segmento AB il punto C nel primo quadrante, in modo tale che il triangolo di vertici A, B, C abbia area $8\sqrt{3}$. $\left[C\left(2+2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3}\right)\right]$

6. E' dato il fascio di rette $(2-k)x+y-1+k=0$.
   a) Si determini il centro del fascio. $[C(1,-1)]$
   b) Si determini la parallela alla bisettrice II-IV quadrante. $[x+y=0]$

7. Risolvere graficamente la seguente disequazione: $|x-2| \le -2+|x|$. $[x \ge 2]$



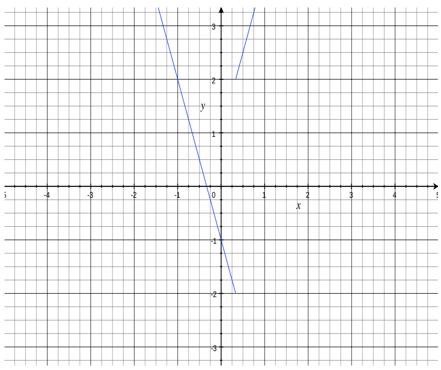
8. Tra le rette del fascio $kx + y - 2 = 0$ si determinino quelle distanti $\sqrt{2}$ dall'origine.
$\left[\ x + y - 2 = 0; \quad x - y + 2 = 0\ \right]$

9. Dato il fascio di rette di equazione $kx + 3(2 - k)y + 1 - k = 0$ determinare:
   a) Il centro del fascio; $\left[C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)\right]$
   b) I valori di k per cui le rette del fascio formano un angolo ottuso con l'asse delle ascisse. $\left[0 < k < 2\right]$

10. Un motociclista parte e si muove alla velocità costante di 10 m/s, contemporaneamente ad un'automobilista, che si trova 100 metri più avanti rispetto al motociclista, e che parte con velocità costante di 5 m/s nella stessa direzione e verso del motociclista. Dopo quanto tempo si troveranno nello stesso punto? $\left[t = 20s\right]$

11. Si tracci il grafico della seguente funzione: $f(x) = \sqrt{9x^2 - 6x + 1} + \frac{|2 - 6x|}{3x - 1}$.

$$\left[f(x) = \begin{cases} 3x + 1; & x > \frac{1}{3} \\ -3x - 1; & x \le \frac{1}{3} \end{cases} \right]$$



12. Nel fascio di rette di equazione $2x + 5y + k = 0$ individuare:
   a) Le rette *r*, *s* che passano per i punti dell'asse y, le cui ordinate sono soluzioni dell'equazione $t^2 - 2t - 8 = 0$; $\left[\ r: 2x + 5y + 10 = 0; \quad s: 2x + 5y - 20 = 0\ \right]$
   b) Determinare i punti A e B intersezione della retta $8x + 5y + 10 = 0$ rispettivamente con le rette *s* e *r*; $\left[\ A(-5, 6) \quad B(0, -2)\ \right]$
   c) Determinare il punto C di ascissa positiva situato sulla bisettrice del I e III quadrante, tale che il segmento AB, sia la base di un triangolo ABC di area 8; $\left[C(2, 2)\right]$
   d) Individuare, per costruzione geometrica, le coordinate del punto D in modo tale che il quadrilatero ACBD sia un parallelogramma. $\left[D(-7, 2)\right]$