ESERCIZI IPERBOLE NEL PIANO CARTESIANO

1. E' data l'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = 2$.
   a) La si rappresenti graficamente.
   b) Si determini l'equazione generale delle circonferenze tangenti all'iperbole nel punto di coordinate $(\sqrt{2};0)$ in funzione del generico raggio *r*, e si scriva l'equazione della circonferenza passante per $(-\sqrt{2};0)$. *Suggerimento: due curve sono tangenti in un punto se hanno tangente in comune in quel punto.*
   c) Si riferisca l'iperbole agli asintoti e se ne scriva l'equazione (rotazione di 45° in senso antiorario).
   d) Si determini l'area del generico triangolo isoscele, avente un vertice nel punto di coordinate $(2;2)$, e gli altri due sul ramo dell'iperbole riferita agli asintoti, contenuto nel primo quadrante. *Suggerimento: la base è il segmento delimitato dai punti intersezione dell'iperbole con la retta* $x + y = k, \quad k > 2$. *Esprimere l'area in funzione del parametro k*).

2. Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera, con un fuoco coincidente con il centro di una circonferenza, tangente agli asintoti nel I e IV quadrante, e di raggio 2. Determinare inoltre:
   a) l'equazione della circonferenza,
   b) i punti P e Q intersezione dell'iperbole con la circonferenza,
   c) le equazioni delle rette tangenti all'iperbole nei punti P e Q (*formula utile:* $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$),
   d) le coordinate del punto R sulla bisettrice del I e III quadrante tale che l'area del triangolo PQR misuri 8,
   e) l'equazione dell'iperbole ruotata di 45° in senso antiorario.

3. Nel fascio di rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante, individuare le tangenti all'iperbole di equazione $4x^2 - 9y^2 - 3600 = 0$.

4. E' dato il fascio di funzioni omografiche $y = \frac{kx + 3}{(k-1)x - 4}$ al variare di *k*.
   a) Si studi tale fascio, individuandone le rette ed il luogo dei centri.
   b) Per $k = 0$ si scriva l'equazione dell'iperbole equilatera nel sistema di riferimento con origine coincidente con il centro della funzione omografica ottenuta, ed assi paralleli alle bisettrici.

5. Sia A il punto di ascissa negativa in cui l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ interseca l'asse x, e siano P e Q ,rispettivamente, i punti del primo e quarto quadrante in cui l'ellisse incontra la parallela all'asse y condotta dal fuoco F di ascissa positiva. Dopo aver determinato i punti A,P,Q,F si determini:
   a) Il baricentro del triangolo PAQ,
   b) L'equazione della parabola passante per P,Q,M, essendo M il punto medio di $\overline{AP}$,
   c) L'equazione della circonferenza, di centro in *F*, e tangente alla mediana uscente dal punto Q,
   d) l'equazione dell'iperbole con un fuoco in F ed avente per asintoti le mediane uscenti da Pe da Q.

6. Calcolare l'area del quadrilatero avente i vertici nei centri delle circonferenze di raggio $\sqrt{2}$, tangenti agli asintoti dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$.

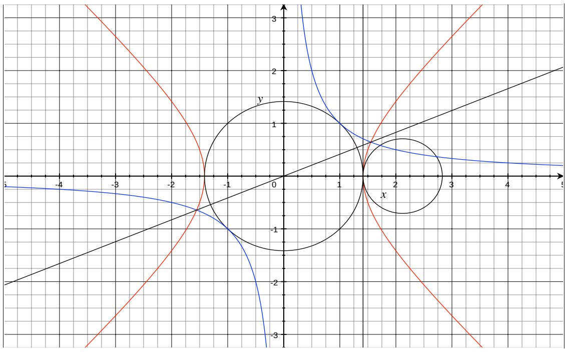
7. Data l'equazione dell'iperbole $xy = 8$, trovare le coordinate dei fuochi.

8. Della seguente funzione: $f(x)=\dfrac{2x-1}{4-x}$
   a. si determinino gli asintoti orizzontale e verticale,
   b. le intersezioni con gli assi,
   c. Si tracci il grafico della funzione.

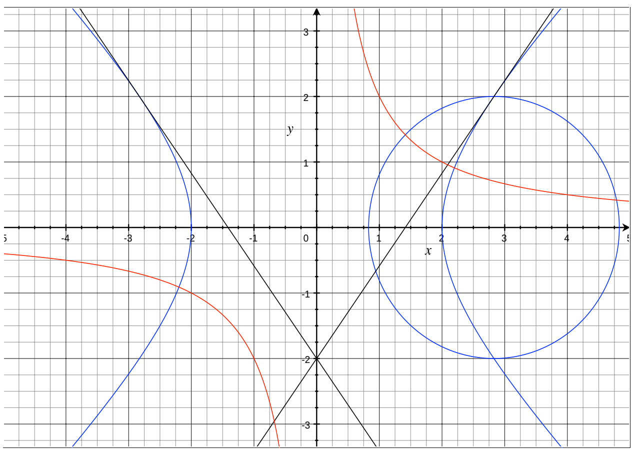
9. Dopo aver definito il luogo geometrico dei punti del piano rappresentato, al variare del parametro e, dall'equazione $e|y+2|=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$:
   a) Si tracci il grafico del luogo geometrico nel caso in cui $e=1$, e quello delle tangenti t,t' alla curva ottenuta, condotte dal punto $P(0,-2)$.
   b) Si scriva l'equazione della famiglia d'iperboli con i fuochi sull'asse *y*, il centro nel punto $P(0,-2)$, ed aventi per asintoti le rette t,t'.
   c) Tra le iperboli della famiglia $x^2-(y+2)^2+a^2=0$, si determini quella che interseca la parabola $x^2=8y$ in quattro punti, vertici di un trapezio di area uguale a $4a\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$.
   d) Scrivere l'equazione dell'ellisse con i fuochi nei punti $F_1(1,2)$ e $F_2(-1,2)$, tangente alla retta $y=1$.

Soluzioni

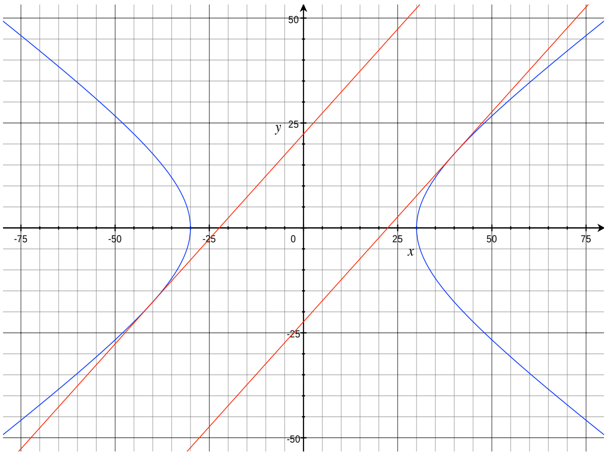
1. a) $\left[x-\left(\sqrt{2}\pm r\right)\right]^2+(y-0)^2=r^2$; b) $x^2+y^2=2$; c) $xy=1$; d) $A=\dfrac{|4-k|}{2}\sqrt{k^2-4}$.



2. $x^2-y^2=4$; a) $x^2+y^2-4\sqrt{2}x+4=0$; b) $P,Q\left(2\sqrt{2},\pm 2\right)$; c) $y=\pm\sqrt{2}x-2$; d) $R\left(2\sqrt{2}\pm 4,2\sqrt{2}\pm 4\right)$; e) $xy=2$.

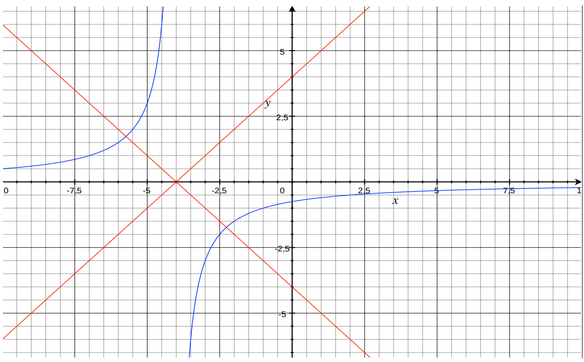


3. $y=x\pm 10\sqrt{5}$.



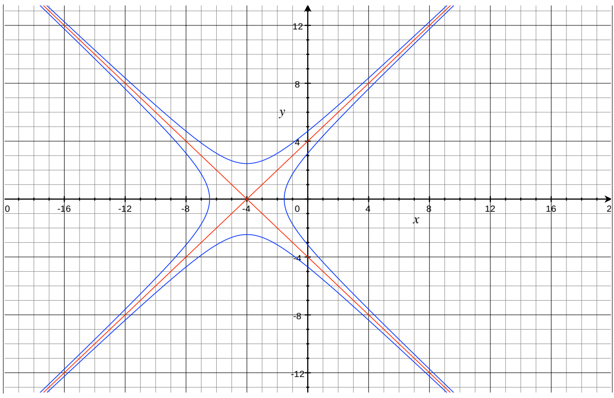
4. Il centro del fascio ha coordinate $C\left(\dfrac{4}{k-1};\dfrac{k}{k-1}\right)$, le rette si ottengono ponendo $k-1=0 \Rightarrow y=\dfrac{x+3}{-4}$. Il luogo geometrico dei centri si ottiene eliminando il parametro *k* nel sistema formato dalle coordinate dei centri: $\begin{cases} x=\dfrac{4}{k-1} \\ y=\dfrac{k}{k-1} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{y}{x}=\dfrac{k}{k-1}\cdot\dfrac{k-1}{4} \Rightarrow k=\dfrac{4y}{x}$.

   L'equazione del luogo è quindi $y=\dfrac{x}{4}+1$. Per $k=0$ la funzione omografica ha la forma $y=\dfrac{3}{-x-4}$. Il centro è $C(-4;0)$. E' possibile ottenere due iperboli equilatere con centro $C(-4;0)$, in base all'attribuzione del ruolo di asse *X* e *Y* alle rette $y=\pm(x+4)$.

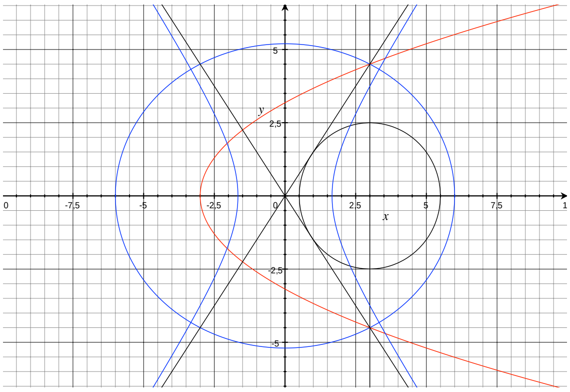


   Scegliendo come asse *X* la retta $y=x+4$, il parametro *a* dell'iperbole si può ottenere come distanza $\overline{PC}$, dove $P=\begin{cases} y=-(x+4) \\ y=\dfrac{3}{-(x+4)} \end{cases} \Rightarrow P\left(-4-\sqrt{3};\sqrt{3}\right),\left(-4+\sqrt{3},-\sqrt{3}\right) \Rightarrow \overline{PC}=a=\sqrt{6}$.

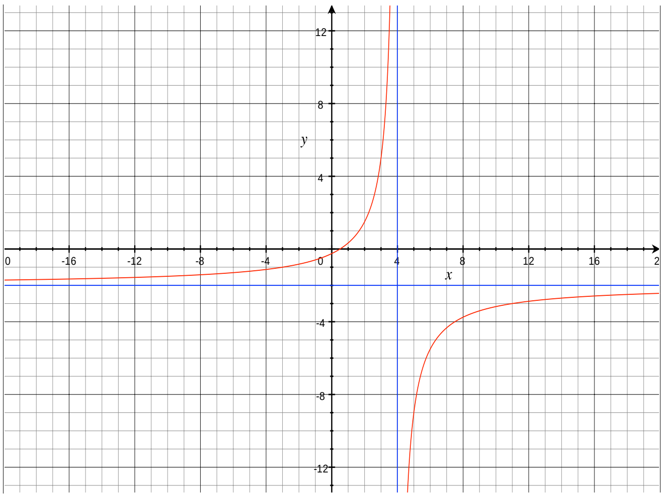
   Quindi l'iperbole ha equazione $(x+4)^2-y^2=-6$.



5. $A(-6,0);P\left(3,\frac{9}{2}\right);Q\left(3,-\frac{9}{2}\right);F(3;0)$; a) $G(0;0)$; b) $x=\frac{24}{81}y^2-3$; c) $(x-3)^2+y^2=\frac{81}{13}$; d) $\frac{13x^2}{36}-\frac{13y^2}{81}=1$.

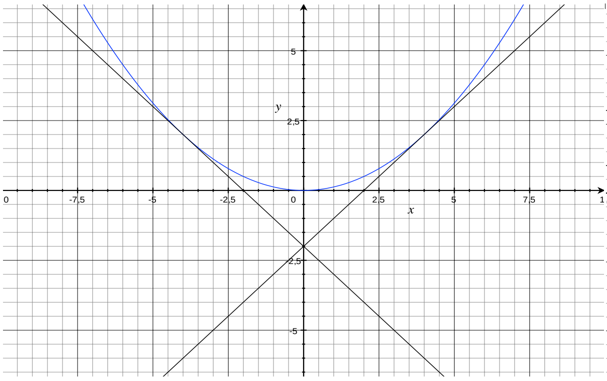
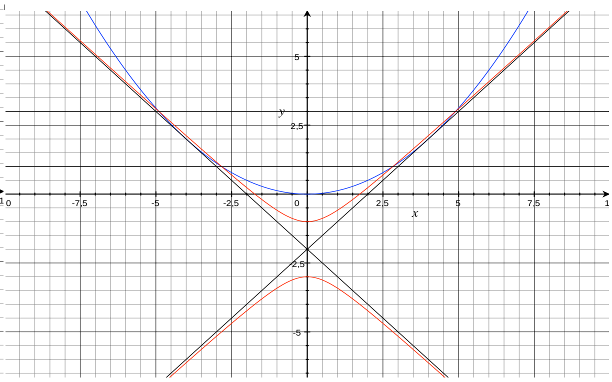


6. $A=8$.
7. $F\left(\pm 4\sqrt{2};0\right)$.
8. Asintoto orizzontale $y=-2$; asintoto verticale $x=4$; *x*-int. $x=\frac{1}{2}$; *y*-int. $y=-\frac{1}{4}$.



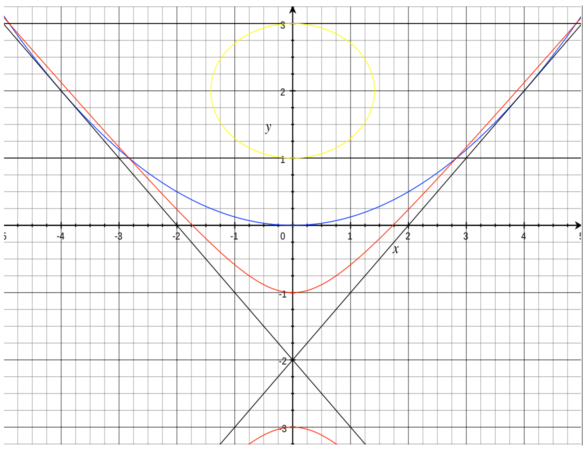
9.

- *Si tratta del luogo geometrico dei punti del piano il cui rapporto delle distanze dal punto* $F(0,2)$ *e dalla retta* $y=-2$ *è costante ed è uguale a* e.
- $t,t':\begin{cases} x^2=8y \\ y=mx-2 \end{cases} \Rightarrow x^2-8mx+16=0 \Rightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow m=\pm 1 \Rightarrow \begin{matrix} t: y=x-2 \\ t': y=-x-2 \end{matrix}$.

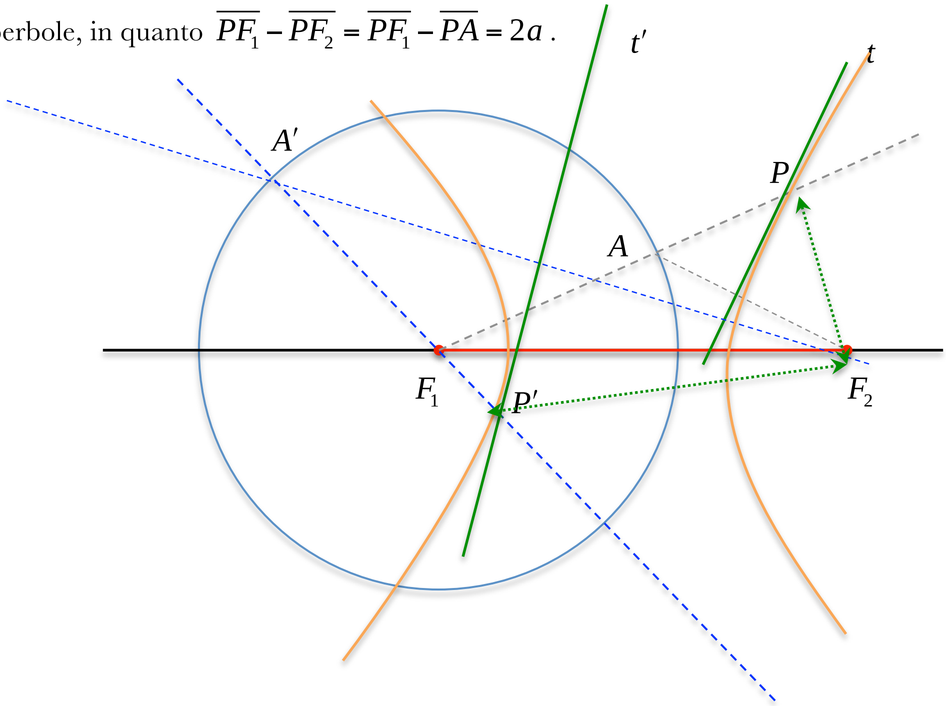
- $x^2-(y+2)^2=-a^2$.
- $\begin{cases} x^2-(y+2)^2=-a^2 \\ x^2=8y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \left(2\sqrt{4-2a},2-a\right) & \left(-2\sqrt{4-2a},2-a\right) \\ \left(2\sqrt{4+2a},2+a\right) & \left(-2\sqrt{4+2a},2+a\right) \end{matrix}$. *L'area del trapezio i cui vertici coincidono con i punti intersezione della generica iperbole con la parabola è quindi:*
  $A=\frac{1}{2}\left(4\sqrt{4-2a}+4\sqrt{4+2a}\right)(2a)=4a\left(\sqrt{4-2a}+\sqrt{4+2a}\right)=4a\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\Leftrightarrow a=1$.

- *La semi-distanza focale ed il semi-asse minore sono tali che:* $\begin{cases} c=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow a^2=2 \Rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{(y-2)^2}{1}=1$.



9.12 Costruzione dell'iperbole con riga e compasso

Si traccia la circonferenza di raggio $2a$ e centro nel fuoco F_1, e si sceglie un punto *A* su di essa. Sia *t* l'asse del segmento $\overline{AF_2}$; P, intersezione della semiretta per F_1 e passante per *A*, con l'asse *t*, appartiene all'iperbole, in quanto $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{PF_1} - \overline{PA} = 2a$.



Ripetendo la costruzione per il punto A', sia t' l'asse del segmento $\overline{A'F_2}$; P', intersezione della retta per F_1 e passante per A', con l'asse t', appartiene anch'esso all'iperbole poiché $\overline{P'F_2} - \overline{P'F_1} = \overline{P'A} - \overline{P'F_1} = 2a$.

Con la costruzione sopra abbiamo determinato due punti appartenenti ai due rami distinti dell'iperbole, luogo geometrico tale che $\left|\overline{PF_2} - \overline{PF_1}\right| = 2a$.