# 3. Logica

## 3.1 Logica delle proposizioni

Una **proposizione** è una espressione matematica o verbale che può assumere i valori di verità vero ($V$) o falso ($F$).

*Esempio:* "3 è un numero primo" è una proposizione vera.

*Esempio:* "3-2=5" è una proposizione falsa.

*Esempio:* "7 è un bel numero" non è una proposizione in senso matematico, in quanto non si può stabilire se è vera o falsa.

L'**OR inclusivo** o *vel*, insimboli $\vee$ **,**di due proposizioni $p$ e $q$ è la proposizione $p \vee q$, che risulta essere falsa quando $p$ e $q$ sono contemporaneamente false e vera negli altri casi.

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

L'**OR esclusivo** o *aut*, in simbolo $\dot{\vee}$**,** di due proposizioni $p$ e $q$ è la proposizione $p \dot{\vee} q$ che è vera se le due proposizioni hanno valori logici diversi, falsa se le due proposizioni hanno valori logici uguali.

| $p$ | $q$ | $p \dot{\vee} q$ |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

La **congiunzione logica**, o *and logico*, in simboli $\wedge$ di due proposizioni $p$ e $q$ è la proposizione $p \wedge q$ che risulta essere vera se le due proposizioni sono vere, risulta falsa se almeno una delle due è falsa.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

La **negazione logica**, o *not*, di una proposizione $p$ è il predicato $\neg p$ (si usano anche i simboli $-p$ oppure $\overline{p}$ o anche $!p$) che è vera quanto $p$ è falso, è falsa quando $p$ è vero.

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

L'**implicazione** tra due proposizioni $p$ e $q$, che si indica con il simbolo $p \Rightarrow q$, è una proposizione sempre vera ad eccezione del caso in cui $p$ è vera e $q$ è falsa, quindi ad eccezione del caso in cui una proposizione vera ne implica una falsa.

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

Si dice anche che $p$ è **condizione sufficiente** per $q$, cioè è sufficiente che si realizzi $p$ affinché si realizzi anche $q$.
Si dice che $q$ è **condizione necessaria** per p, cioè se $q$ non si realizza non si realizza nemmeno $p$.
La **coimplicazione** o **doppia implicazione** tra due proposizioni $p$ e $q$, che si indica con il simbolo $p \Leftrightarrow q$ è una proposizione vera se $p$ e $q$ hanno valori logici uguali, falsa altrimenti. La coimplicazione è equivale a $(p \to q) \wedge (q \to p)$

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

Si dice che $p$ è **condizione necessaria e sufficiente** per q.

## 3.2 Logica dei predicati

**Predicati**. Un predicato è una proprietà che si riferisce a una classe di individui.
La **logica dei predicati** del primo ordine è quella in cui si introducono nomi per individui e per predicati e le variabili sono solo individuali.

Il **quantificatore universale** si indica con il simbolo $\forall$ e si legge "per ogni". La scrittua $\forall x \in A$ si legge "per ogni $x$ appartenente all'insieme $A$". Se $p(x)$ è una proposizione logica, l'enunciato $\forall x \in A \quad p(x)$ è vero se e soltanto se $p(x)$ assume valore vero per ogni $x$ appartenente all'insieme $A$.

Il **quantificatore esistenziale** si indica con il simbolo $\exists$ e si legge "esiste". La scrittua $\exists x \in A$ si legge "esiste $x$ appartenente all'insieme $A$". Se $p(x)$ è una proposizione logica, l'enunciato $\exists x \in A \quad p(x)$ è vero se e soltanto se $p(x)$ assume valore vero per qualche (almeno uno) $x$ appartenente all'insieme $A$.

**Scambio tra quantificatori**

$\forall x A(x) \Leftrightarrow \neg \exists x \neg A(x)$ "Per ogni x vale la proprietà A" equivale a dire "Non esiste un x per il quale non vale la proprietà A.

$\exists x A(x) \Leftrightarrow \neg \forall x \neg A(x)$ "Esiste almeno un x che verifica la proprietà A" equivale a dire che "Non è vero che per ogni x non vale la proprietà A).

$\exists x \neg A(x) \Leftrightarrow \neg \forall x A(x)$ "Esiste almeno un x per il quale non vale la proprietà A" equivale a dire che "Non è vero che per ogni x vale la proprietà A".

$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$ "Non esiste un x che verifica la proprietà A" equivale a "Per ogni x non vale la proprietà A".

## 3.3 Sillogismi

Un **sillogismo** è un'inferenza costituita da due premesse e una conclusione, le due premesse devono avere una proprietà in comune e nella conclusione ci sono le altre due proprietà presenti nelle premesse.
*Esempio*: Mario è un Italiano. Ogni italiano è un europeo. Quindi Mario è un europeo.

I sillogismi sono di questi quattro tipi:
- Universale affermativa: “Tutti i P sono Q” (“Ogni P è Q”)
- Universale negativa: “Tutti i P non sono Q” (“Nessun P è Q”)
- Particolare affermativa: “Qualche P è Q” (“Esiste un P che è Q”)
- Particolare negativa: “Qualche P non è Q” (“Esiste un P che non è Q”)

Possono essere rappresentati con dei diagrammi di Eulero-Venn

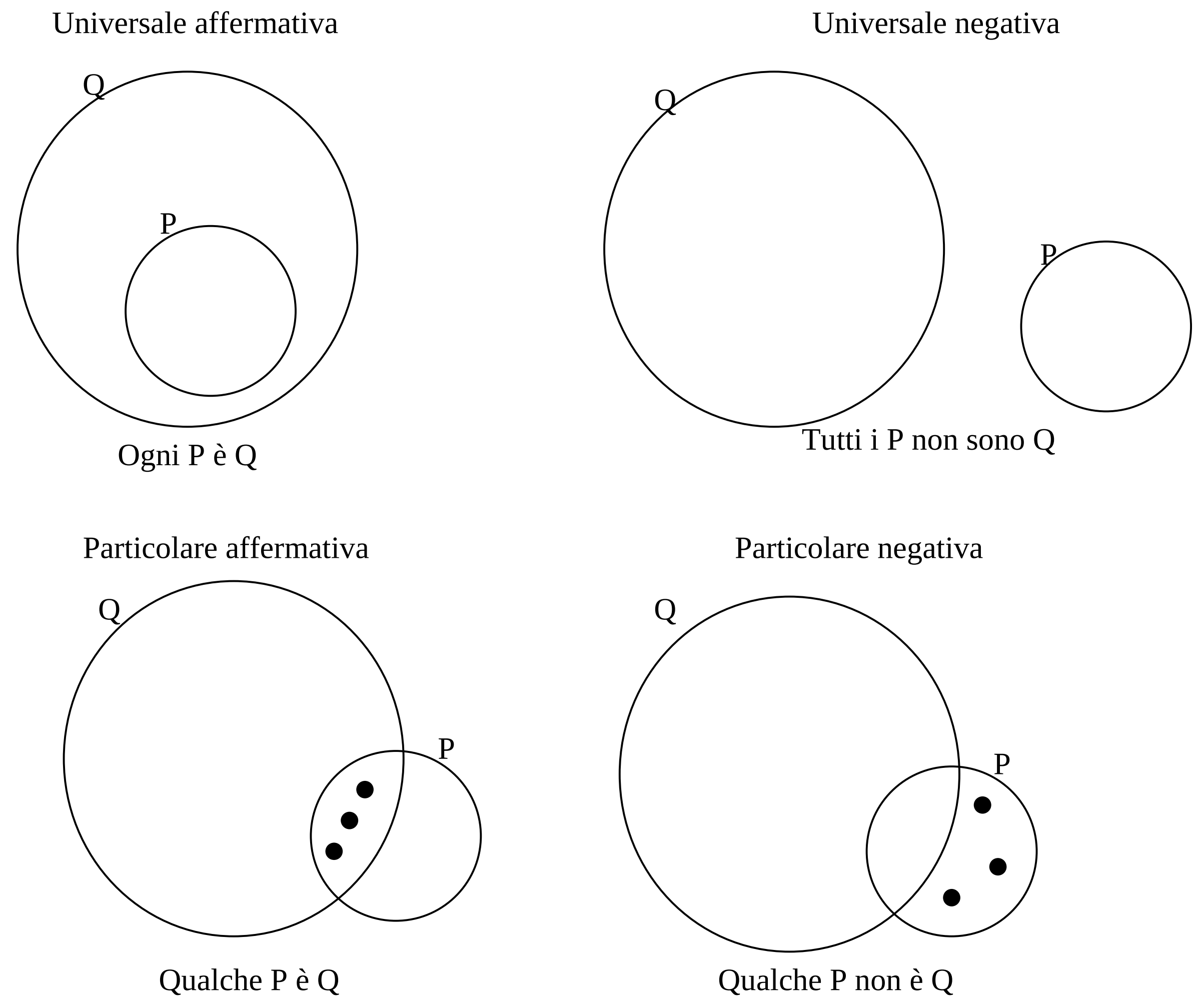


**Figura 1.** I quattro tipi di sillogismo rappresentati con diagrammi di Eulero-Venn

**Modus tollens** è una proposizione composta del tipo $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$, cioè se la proposizione p implica la proposizione q e se q è falsa, allora è falsa anche p.
**Modus ponens** è una proposizione composta del tipo $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$, cioè se la proposizione p implica la proposizione q e se p è vera allora necessariamente anche q è vera.
Una **tautologia** è una proposizione logica che assume sempre il valore di verità, indipendentemente dall'assegnazione di verità delle variabili logiche.
*Esempio:* $p \vee \neg p$ è una tautologia, in quanto è vera sia se p è vera sia se p è falsa.

## 3.4 Algebra di Boole

L'**algebra di Boole** è una strutture algebrica che descrive l'essenza del calcolo proposizionale. Su un insieme B, formato da almeno due elementi, si danno le operazioni AND $\wedge$, OR $\vee$, NOT $\neg$ e due elementi particolari 0, 1; il primo corrisponde a falsol, il secondo a vero.
Degli operatori AND e OR si hanno i corrispondenti termini negativi NAND (not and) e NOR (not or), e il termine esclusivo XOR (or esclusivo).

**Regole di calcolo**

| | |
|---|---|
| $x \vee 1 = 1$ | $V$ è l'elmento assorbente di $\vee$ |
| $x \wedge 1 = x$ | $V$ è l'elemento neutro di $\wedge$ |
| $x \wedge 0 = 0$ | $F$ è l'elemento assorbente di $\wedge$ |
| $x \vee 0 = x$ | $F$ è l'elemento neutro di $\vee$ |
| $x \wedge (\neg x) = 0$ | teorema della complementazione |
| $x \vee (\neg x) = 1$ | teorema della complementazione |
| $x \vee x = x$ | teorema di idempotenza |
| $x \wedge x = x$ | teorema di idempotenza |
| $\neg(\neg x) = x$ | teorema di involuzione |
| $x \vee y = y \vee x$ | proprietà commutativa |
| $x \wedge y = y \wedge x$ | proprietà commutativa |
| $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ | proprietà associativa |
| $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ | proprietà associativa |
| $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ | proprietà distributiva di $\wedge$ rispetto a $\vee$ |
| $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ | proprietà distributiva di $\vee$ rispetto a $\wedge$ |
| $x \vee (x \wedge y) = x$ | proprietà di assorbimento |
| $x \wedge (x \vee y) = x$ | proprietà di assorbimento |
| $(x \wedge y) \vee ((\neg x) \wedge z) \vee (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee ((\neg x) \wedge z)$ | proprietà del consenso |
| $(x \vee y) \wedge ((\neg x) \vee z) \wedge (y \vee z) = (x \vee y) \wedge ((\neg x) \vee z)$ | proprietà del consenso |

**Leggi di De Morgan.** Nell'algebra di Boole valgono due importati leggi, duali l'una dell'altra, il cui enunciato è il seguente:

$$\neg(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) = (\neg x_1) \wedge (\neg x_2) \wedge \ldots \wedge (\neg x_n)$$
$$\neg(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) = (\neg x_1) \vee (\neg x_2) \vee \ldots \vee (\neg x_n)$$

Queste due leggi affermano che il complemento dell'OR (inclusivo) di $n$ variabili logiche equivale all'AND logico dei complementi delle singole variabili e che il complemento dell'AND logico di $n$ variabili logiche equivale all'OR (inclusivo) dei complementi delle singole variabili. Pertanto l'OR inclusivo può essere espresso facendo uso degli operatori NOT e AND logico e viceversa per l'AND logico. Quindi gli operatori AND, OR inclusivo, NOT formano un insieme ridondante.