CAPITOLO 10
IL CALCOLO DELLE PROBABILITA'
10.1 Introduzione
Il calcolo delle probabilità ha avuto origine nel XVII secolo in riferimento a questioni legate al gioco d'azzardo. Oggigiorno trova notevoli applicazioni in tutte quelle situazioni umane, tecniche e scientifiche in cui interviene il **caso**, definito da G. Castelnuovo come *il risultato di un gran numero di piccole cause, indipendenti, che variano secondo leggi non considerate, o mal conosciute*. Al matematico tedesco K.F. Gauss si deve, invece, la possibilità di prevedere la distribuzione degli errori casuali che intervengono in un esperimento che consiste in un gran numero di prove.
Possiamo dire che il calcolo delle probabilità è uno strumento che rende razionale il comportamento umano in situazioni d'incertezza.

Il caso
Nel gioco dei dadi, o della roulette, si usa dire che il risultato è frutto del caso, nel senso che è imprevedibile nella sua indeterminazione. Tuttavia, se fosse possibile governare "la dinamica" di questi giochi con la dovuta precisione, il risultato sarebbe determinabile *a priori*; l'incertezza che si ha è quindi legata all'incapacità di esprimere con leggi della fisica quello che avviene quando si lancia un dado o si gioca alla roulette; un'incertezza di questo tipo è detta *operazionale*. In altre situazioni, il caso ha un significato *essenziale*, come, ad esempio, quando si assiste ad un incidente automobilistico: quante volte abbiamo sentito frasi come: "… meno male andavo piano e mi sono potuto fermare in tempo, altrimenti…". A pensarci bene, però, anche nella situazione appena descritta, in cui due eventi sono indipendenti (l'incidente automobilistico e il moto della macchina di chi vi ha assistito) potremmo pensare a un'incertezza di tipo operazionale, dal momento che, in linea di principio, dovremmo essere in grado di governarne la dinamica. Questa difficoltà nello stabilire il tipo d'incertezza rende bene l'idea dei conflitti sorti intorno al concetto di caso, ben rappresentati dalla celebre frase di Einstein "*Dio non gioca a dadi*", e dal pensiero del filosofo greco Democrito, secondo il quale "*tutto ciò che esiste nell'Universo è frutto del caso e della necessità*".

10.2 Definizioni di probabilità
Estrarre una carta da un mazzo, lanciare un dado o una moneta, sono esempi di **esperimenti casuali**, che danno luogo a più **eventi aleatori**. Un evento aleatorio può essere:
certo: ad esempio l'uscita di un numero intero compreso tra 1 e 6 nel lancio di un dado a sei facce,
impossibile: ad esempio l'uscita del 9 nel lancio di un dado a sei facce,
possibile: ad esempio l'estrazione di una carta da fiori da un mazzo di 40 carte da gioco.
L'insieme dei risultati possibili di un esperimento casuale si dice **spazio campionario**.
Ad esempio, lo spazio campionario riferito al lancio di un dado consiste di sei esiti possibili $\Omega \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Due o più eventi si dicono **incompatibili** se il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro. Ad esempio nel lancio di una moneta, o esce testa o esce croce: gli eventi "esce testa" e "esce croce" sono evidentemente incompatibili. Un esempio di eventi non incompatibili si trova nel lancio di un dado quando si considerano eventi quali "esce un numero pari" e "esce un multiplo di tre", dal momento che l'esito 6 è comune ai due eventi.
Dato un evento E si chiama **complementare** $\bar{E}$ l'evento corrispondente al non verificarsi di E.
Introduciamo adesso le famose quattro definizioni di probabilità, per poi approfondirle in un secondo momento.

Definizione *soggettivista* di probabilità
Consiste nella quantificazione del grado di fiducia che un evento si verifichi. Questa quantificazione rappresenta la probabilità dell'evento E ed è espressa da un numero reale $p(E)$ tale che $0 \le p(E) \le 1$.

Definizione *classica* di probabilità
Si intende con questa definizione il rapporto tra i casi favorevoli e quelli possibili, *se tutti i casi sono ugualmente possibili*. L'ultima precisazione può originare nella definizione un circolo vizioso in quanto, a ben vedere, si sfrutta la definizione di probabilità per stabilire se i casi sono ugualmente possibili. Tuttavia, è opinione diffusa che in molte situazioni è possibile verificare l'uguale possibilità di verificarsi dei casi, senza dover ricorrere a prove sperimentali.
Definizione *frequentista* di probabilità
La probabilità di un evento è il valore a cui tende la frequenza relativa dell'evento stesso, qualora fosse possibile effettuare un gran numero di prove. E' evidente che questa definizione risulta non adeguata nel calcolo della probabilità che si verifichi un incidente in una centrale nucleare…
Definizione *assiomatica* di probabilità
La probabilità di un evento è un numero reale p tale che:

- $0 \le p \le 1$;
- $p(E)=0$ se l'evento è impossibile, $p(E)=1$ se l'evento è certo;
- $p(E_1 o E_2)=p(E_1)+p(E_2)$ se i due eventi sono incompatibili.

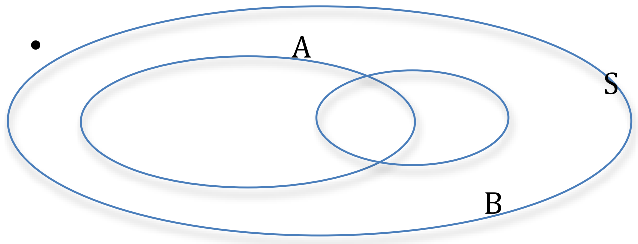
10.3 I principali risultati sul calcolo delle probabilità
Il teorema dell'evento complementare: $P(E)=1-P(\overline{E})$, dove con $\overline{E}$ abbiamo indicato l'**evento complementare**.
Esempio. Da un'urna contenente palline numerate da uno a dieci si estraggono simultaneamente 4 numeri. Valutiamo la probabilità dell'evento E: "almeno uno dei numeri estratti è pari". In questo caso l'evento complementare è $\overline{E}$:"nessuno dei numeri estratti è pari", e la sua probabilità è

$$P(\overline{E})=\frac{\binom{5}{4}}{\binom{10}{4}}=\frac{5}{10}\frac{4}{9}\frac{3}{8}\frac{2}{7}=\frac{1}{42}$$, quindi $P(E)=1-P(\overline{E})=1-\frac{1}{42}=\frac{41}{42}$.

Questo teorema è legato al connettivo logico *negazione*.
Definiamo **incompatibili** due eventi A e B se non esistono esiti che li soddisfano entrambi.
Il teorema della somma per eventi incompatibili: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
Esempio: Dall'urna precedente vengono estratti due numeri simultaneamente. L'evento E:" la somma dei numeri è 8 o 7" può essere scomposto negli eventi incompatibili (ovvio, la somma di due numeri non può dare più di un risultato!) A:" la somma dei numeri è 7" e B:" la somma dei numeri è 8". L'evento $A=\{(1;6)(2;5)(3;4)\}$ ha una probabilità di verificarsi $P(A)=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$, lo stesso dicasi per l'evento $B=\{(1;7)(2;6)(3;5)\}$, che conta lo stesso numero di esiti favorevoli. La probabilità dell'evento E è quindi $P(E)=P(A)+P(B)=\frac{2}{15}$. Il connettivo logico riferito a questo teorema è la *congiunzione*. E se gli eventi non fossero incompatibili?
Esempio: si lanciano due dadi. Consideriamo l'evento E:" la somma delle facce è un numero maggiore di sette o multiplo di 3". Gli eventi A e B in cui può essere scomposto sono caratterizzati dai seguenti esiti favorevoli: $A=\{(1;2)(1;5)(2;4)(3;3)(3;6)(4;5)(6;6)\}$; e $B=\{(2;6)(3;5)(3;6)(4;4)(4;5)(4;6)(5;5)(5;6)(6;6)\}$, con $P(A)=\frac{7}{45}$ e $P(B)=\frac{9}{45}$. Tuttavia ci sono esiti comuni ai due eventi: $A\cap B=\{(3;6)(4;5)(6;6)\}$, con $P(A\cap B)=\frac{3}{45}$. In definitiva, per non

contare due volte gli esiti dell'ultimo insieme sfruttiamo la relazione
$P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Nel caso dell'esempio considerato $P(E) = \frac{13}{45}$.

Il teorema del prodotto per la probabilità condizionata: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ **. Formula di Bayes**



Supporre che l'evento A si sia verificato equivale alla riduzione dello spazio campionario ad A.

Gli esiti favorevoli saranno quindi gli elementi dell'insieme $A \cap B$, per cui la *probabilità che si verifichi l'evento B* ***sapendo che*** *l'evento A si è verificato,* $P(B|A)$, *è:* $\frac{\#(A \cap B)}{\#(A)} = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\#(S)}}{\frac{\#(A)}{\#(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A)$

Esempio. Un'urna contiene dieci palline numerate da uno a dieci. Vengono estratte due palline successivamente. Si calcoli la probabilità che alla seconda estrazione esca un numero pari sapendo che alla prima è stato estratto un numero pari.
Il problema può essere risolto ragionando sull'evento $A \cap B$ ="esce un numero pari alla prima e alla seconda estrazione", la cui probabilità di verificarsi è $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$.
Esempio. Il 25% degli studenti della terza classe del Liceo frequenta la sperimentazione P.N.I, il 15% la sperimentazione bilingue, il resto il corso di ordinamento. Le insufficienze il matematica riguardano il 20% degli studenti P.N.I., il 12% degli studenti del bilingue, ed il 25% degli studenti del corso di ordinamento. Si calcoli la probabilità che uno studente insufficiente provenga dal corso sperimentale P.N.I..

- Definiamo gli eventi: A: "lo studente è insufficiente in Matematica"; B:" lo studente frequenta la sperimentazione P.N.I."; C:" lo studente frequenta la sperimentazione bilingue"; D:" lo studente frequenta il corso di ordinamento". Per risolvere il problema (anamnesi) si applica il teorema di Bayes:
  $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C) + P(D)P(A|D)}$. Con i dati in nostro possesso la probabilità richiesta è: $P(B|A) = \frac{\frac{25}{100}\frac{20}{100}}{\frac{25}{100}\frac{20}{100} + \frac{15}{100}\frac{12}{100} + \frac{60}{100}\frac{25}{100}} = 0{,}23 = 23\%$.

10.4 Elementi di combinatoria

Il principio fondamentale del contare
Se un elemento *x* viene scelto tra *m* elementi, ed un elemento *y* viene scelto tra *s* elementi, allora le possibili scelte di *x* e *y* sono ***ms***. Consideriamo i seguenti esempi.
Esempio 1. Quante coppie miste si possono formare da un gruppo contenente 4 ragazzi e 3 ragazze?

Ogni ragazzo può essere abbinato ad una qualsiasi delle 3 ragazze. Poiché i ragazzi sono 4, le scelte saranno 12.

Esempio 2. Quante targhe "all'italiana" si possono formare?

Una targa all'italiana è una sequenza alfanumerica del tipo LLNNNLL dove L rappresenta una lettera e N un numero. Le lettere vengono selezionate dall'alfabeto di 26 simboli, mentre i numeri possono essere formati con le cifre da 0 a 10. Il conteggio è presto fatto:26x26x10x10x10x10x26x26 = 456.976.000

Esempio 3. Quanti numeri di sei cifre si possono scrivere di cui la prima cifra non sia zero e in modo che due qualunque cifre consecutive siano distinte?

La prima cifra può essere scelta in 9 modi diversi, così come le restanti 5. Complessivamente si possono quindi scrivere 9x9x9x9x9x9 cifre con le caratteristiche richieste.

Un concetto molto importante in questi processi di conteggio è costituito dal cosiddetto *Principio additivo*: dati due insiemi A e B risulta $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.

Esempio 4. In una classe di 24 studenti vengono proposti due test. 18 studenti superano il primo test, 17 superano il secondo test, 14 superano entrambi i test. Quanti studenti superano almeno un test?

Se interpretiamo "almeno un test" come "test 1 o test 2", dal principio additivo risulta

$card(test1 \cup test2) = card(test1) + card(test2) - card(test1 \cap test2) = 18 + 17 - 14 = 21$.

Esempio 5. Quante targhe all'italiana contengono almeno un 7 ed almeno una A?

Ragioniamo sugli insiemi complementari: le targhe che contengono nessun 7 sono $26^4 \cdot 9^3 = 333.135.504$, quelle che contengono nessuna A sono $25^4 \cdot 10^3 = 390.625.000$, mentre quelle che contengono nessun 7 e nessuna A sono $25^4 \cdot 9^3 = 284.765.625$.

A questo punto le targhe cercate si ottengono togliendo dal totale delle targhe che si possono formare quelle che non contengono nessun 7 o nessuna A, che rappresentano il complementare dell'insieme cercato: 456.976.000 – (390.625.000 + 333.135.504 – 284.765.625) = 17.981.121

Le figure fondamentali della combinatoria

In combinatoria si richiede il numero di entità riconducibili a raggruppamenti di *k* elementi presi da un insieme che ne contiene *n*. I due criteri fondamentali che caratterizzano il conteggio dei raggruppamenti che si possono formare sono l'**ordine** e la possibilità di **ripetizioni**. A seconda che l'ordine venga preso in considerazione o meno si parla di **disposizioni** o di **combinazioni**, mentre a seconda che vi sia possibilità di ripetizioni o meno, le disposizioni e le combinazioni si dicono **semplici** o **con ripetizioni**.

Esempio 6. Quanti sono i possibili podi non simultanei relativi ad una gara a cui hanno preso parte 10 atleti?

Un podio è composto da 3 atleti dei 10 partecipanti alla gara. E' evidente che in questo esempio l'ordine conta, soprattutto se sono previsti premi "a scalare"! Scegliamo un atleta qualsiasi dei 10 e diciamo che questo è il vincitore. La seconda piazza sarà occupata da uno qualsiasi dei restanti 9; di conseguenza saranno 8 i possibili occupanti il gradino più basso del podio. Il numero di podi è quindi $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Si tratta delle **disposizioni semplici di 3 elementi tra 10** e si indicano con la notazione:

$$D_n^k = D_{10}^3$$

In generale si tratta di scegliere un elemento tra *n* e metterlo come primo elemento della lista di *k* elementi che vogliamo formare. Il successivo verrà scelto tra $n-1$, e così via fino al *k-esimo* elemento che verrà scelto tra $n-(k-1)$. Il numero di possibili raggruppamenti che possono essere composti con questo criterio è quindi:

$$D_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-(k-1)), \quad k \le n.$$

Il caso particolare in cui i raggruppamenti contengono $k = n$ elementi si dicono **permutazioni semplici di n elementi**, si indicano con la notazione:

$$P_n,$$

e sono in numero deducibile dalla regola di formazione delle disposizioni semplici

$$P_n = D_n^n = n \cdot (n - \cdot 1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Le possibili permutazioni semplici di *n* elementi sono tante quante il prodotto di *n* fattori decrescenti a partire da *n*. Questo prodotto di dice **fattoriale di *n*** e si indica con la notazione:

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1.$$

Si osserva che il fattoriale è un numero intero, ovviamente pari, che cresce molto rapidamente: per esempio $7! = 5040$.

Con l'introduzione del fattoriale è possibile scrivere in forma compatta la regola di formazione delle disposizioni semplici di *k* elementi tra *n*:

$$D_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Per definizione 0!=1. Potremmo giustificare questa posizione pensando alle disposizioni di *n* elementi a gruppi di *n* come alle permutazioni di *n* elementi:

$$n! = P_n = D_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} \Rightarrow 0! := 1.$$

Supponiamo adesso di possedere un'urna contenente 8 palline rosse, e chiediamoci in quanti modi si possono estrarre quattro palline. In situazioni come queste, è evidente che l'ordine non conta. Infine, se l'ordine con cui si presentano gli elementi nel gruppo non conta, si parla di **combinazioni semplici**, il cui numero si ottiene da quello delle disposizioni semplici di *n* elementi a gruppi di *k*, dividendo per *k*!:

$$D_n^k = C_n^k\cdot k! \Rightarrow C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} := \binom{n}{k}$$

L'espressione $\binom{n}{k}$, è detta **coefficiente binomiale**.

Il binomio di Newton

Si vuole dimostrare il risultato

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k},$$

nel caso particolare in cui $a = b$:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

Un'applicazione di questo fatto è legata alla cardinalità del cosiddetto *insieme delle parti*, ovvero l'insieme di tutti i sottoinsiemi di un insieme contenente un numero finito di elementi. I coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$ indicano il numero di sottoinsiemi di *k* elementi scelti nell'insieme di partenza che ne contiene *n*.

Si osserva che $2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ come proposizione è vera nel caso in cui $n = 0$, e si suppone vera la proposizione $2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$. Dimostriamo quindi che $2^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}$. Per questo scopo si utilizza l'identità $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$; $0 < k < n$[1]. Si ha $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\right] + \binom{n+1}{n+1}$ da cui

[1] $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k-1+1)!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{k+n-k}{k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} + \frac{(n-k)}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

segue
$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}=1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}+1=1+\sum_{h=0}^{n-1}\binom{n}{h}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}+1=1+\left(2^n-1\right)+\left(2^n-1\right)+1=2\cdot 2^n=2^{n+1},$$
come volevasi dimostrare.

Il modello dell'urna contenente palline numerate ed il "problema dei compleanni"

Un'urna contenente N palline numerate da 1 a N. Si estraggono *n* palline, rimettendole ogni volta nell'urna. Vogliamo calcolare la probabilità dell'evento A ="tutte le palline estratte hanno numeri diversi tra loro". Ogni pallina ha probabilità $1/N$ di essere estratta. Lo spazio campionario è l'insieme di tutti gli esiti possibili $\Omega=\{\omega:\omega=(a_1,...,a_n)|a_i=1,...,N\}$. Poiché ad ogni estrazione sono possibili N esiti, i casi possibili (cioè i modi con cui possono essere estratte le *n*-uple di palline) sono $\underbrace{N\cdot N\cdot...\cdot N}_{n}=N^n=card(\Omega)$. Contiamo quindi gli esiti favorevoli al verificarsi dell'evento A. I modi con cui, ad ogni estrazione, si può estrarre un numero diverso da *tutti* quelli che lo hanno preceduto sono $N\cdot(N-1)\cdot(N-2)\cdot\cdots\cdot(N-n+1)=\frac{N!}{(N-n)!}=D_N^n$. Da questo segue che la probabilità dell'evento A è $p(A)=\frac{N!}{N^n(N-n)!}=\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)...\left(1-\frac{n-1}{N}\right)$.

Il modello dell'urna con palline numerate può essere preso in considerazione per risolvere il classico *problema dei compleanni*. In breve, si tratta di calcolare la probabilità che, in un gruppo di $n<365$ persone, *almeno due* festeggino il compleanno nello stesso giorno. Ragioniamo sull'evento complementare, "tutte le persone sono nate in giorni diversi", del tutto equivalente all'estrazione di palline con numeri diversi. Indicato con A l'evento "almeno due persone festeggiano il compleanno lo stesso giorno, risulta $p(A)=1-\frac{365!}{(365-n)!365^n}$. Ad esempio, in un gruppo di 23 persone, la probabilità che almeno due festeggino il compleanno lo stesso giorno è circa del 50%.

Esercizi

1. Studiare il problema delle palline numerate nel caso in cui, dopo ogni estrazione, le palline *non* vengono rimesse nell'urna. Cosa succede se facciamo un numero di estrazioni, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna, *maggiore* del numero di palline contenute nell'urna?
2. Si calcoli la probabilità che in un gruppo di 25 persone, due di queste festeggino il compleanno lo stesso giorno.
3. Studiare il problema dei compleanni nel caso in cui il gruppo è composto da un numero di persone maggiore di 365.

10.5 Lo schema delle prove ripetute e i numeri di Pascal

Consideriamo adesso il caso di un *processo ricorrente*, come il lancio ripetuto di una moneta: in quanti casi, su *n* lanci, esce testa *m* volte $(0\le m\le n)$? Ad esempio, 3 volte su 4 lanci. Per questo scopo costruiamo il seguente grafo.

					1				
$n=1$				1(t)		1(c)			
$n=2$			1(tt)		2(tc)		1(cc)		
$n=3$		1(ttt)		3(ttc)		3(tcc)		1(ccc)	
$n=4$	1($tttt$)		4($tttc$)		6($ttcc$)		4($tccc$)		1($cccc$)
	$m=4$		$m=3$		$m=2$		$m=1$		$m=0$

Si legge così: in colonna dall'alto verso il basso è indicato il numero di lanci, *n*, mentre in orizzontale da sinistra verso destra, ad esempio, il numero di successi, *m*. I numeri presenti in corrispondenza di ogni nodo rappresentano il numero di *cammini*, corrispondente al totale degli esiti favorevoli. Nel caso proposto, il nodo $4(tttc)$ dice che esce testa 3 volte in 4 lanci (su un totale di $2^n = 2^4$ casi possibili). La probabilità che ciò accada è quindi $p(tttc) = \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4} = 0,25$.

I numeri presenti in ogni nodo si chiamano **numeri di Pascal**, e lo schema presentato si dice *triangolo di Pascal*. I numeri di Pascal si indicano con il simbolo $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ ed hanno le due seguenti importanti proprietà:

La somma per righe è pari al numero di casi possibili: $\sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = 2^n$,

La regola di formazione di ognuno è: $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ m-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ m \end{pmatrix}$.

Lo schema delle prove ripetute funziona, ad esempio, anche nel caso del lancio ripetuto di un dado. Per esempio, qual è la probabilità che su 7 lanci esca il 4 esattamente 3 volte?

Applichiamo la regola di formazione per valutare il numero di casi del tipo $444xxxx$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 35$, ognuno dei quali ha probabilità $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^4$. La probabilità che esca il 4 esattamente 3 volte in 7 lanci è quindi $p(444xxxx) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^4$.

I numeri di Pascal e gli insiemi

Un'interessante applicazione dei numeri di Pascal è data dalla determinazione *del numero di sottoinsiemi di m elementi scelti da un insieme di n elementi*. Questo numero è proprio il numero di Pascal $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$. Infatti, come abbiamo visto nel caso del lancio ripetuto di una moneta, $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ rappresenta il *numero di cammini* che conducono, nel grafo, a quella determinata *n*-pla: basta associare ad ognuno dei cammini uno degli insiemi che si possono formare, e il gioco è fatto.

Esempi

1. In una prova scritta si deve rispondere a 5 quesiti. Vengono attribuiti 2 punti per ogni risposta esatta, -1 per ogni risposta errata, 0 punti per ogni quesito a cui non si è risposto. Il punteggio minimo richiesto per superare la prova è 6. Qual è la probabilità di superare la prova rispondendo a caso a tutti i quesiti?
   - Ogni quesito può avere 3 esiti, quindi le possibili cinquine di risposte che si possono formare sono $3^5 = 243$. Tra queste, quelle utili ai fini del superamento della prova sono quelle che danno i seguenti punteggi ("1" significa risposta esatta, "X" significa quesito no affrontato, e "2" significa risposta sbagliata):

PUNTEGGI	Cinquine utili	Modi di formazione
Punteggio 6	1-1-1-X-X	$\binom{5}{3}=10$
Punteggio 7	1-1-1-1-2	$\binom{5}{4}=5$
Punteggio 8	1-1-1-1-X	$\binom{5}{4}=5$
Punteggio 10	1-1-1-1-1	$\binom{5}{5}=1$

La probabilità di superare la prova è quindi $\frac{21}{243}=\frac{7}{81}$.

2. Ci troviamo in via della Colonna, a metà strada tra piazza San Marco e Piazza D'Azeglio. Decidiamo di muoverci, spostandoci di venti passi, in uno dei due sensi, scelto a caso, per poi fermarci trenta secondi a riposare. Si riparte di nuovo in uno dei due sensi, sempre scelto a caso, e sempre facendo venti passi e fermandoci trenta secondi. Se ripetiamo questa sequenza *n* volte, qual è la probabilità di ritrovarci alla fine al punto di partenza?
   - Intanto, il numero di spostamenti deve essere pari, altrimenti non è possibile tornare al punto di partenza. Il numero di spostamenti possibili è 2^n, mentre quelli favorevoli sono $\binom{n}{n/2}$ (si torna al punto di partenza se il numero di spostamenti verso piazza D'Azeglio è uguale a quello verso piazza San Marco). La probabilità richiesta è quindi $p=\frac{\binom{n}{n/2}}{2^n}$. Ad esempio, se $n=10 \Rightarrow p=\frac{252}{1024}=\frac{63}{256}$.
3. In ogni estrazione del lotto, che si tengono in varie città, vengono estratti 5 numeri distinti tra 1 e 90. Considerando solo le città di Firenze e di Genova, qual è la probabilità che il 17 esca solo in una delle due città?
   - Si tratta di moltiplicare per due la probabilità che il 17 esca in *una sola* delle due città:

$$p=2\frac{\binom{89}{4}\binom{89}{5}}{\binom{90}{5}\binom{90}{5}}=\frac{17}{162}.$$

10.6 Variabili aleatorie discrete

Galileo Galilei fu interpellato circa il fatto che, nel gioco in cui si lanciavano tre dadi e si puntava sulla somma dei numeri usciti, il 10 compariva più spesso del 9. Il grande scienziato studiò il problema, e lo risolse nel suo scritto *Considerazioni di Galileo sopra il gioco dei dadi*.
Ciò che lasciava perplessi i giocatori che si rivolsero a Galileo, era che il numero di terne utili a comporre la somma 10, ovvero 6, era uguale a quello delle terne utili a comporre la somma 9.

Analizzando le terne in questione, Galileo osservò che il *numero di modi* in cui si potevano presentare le singole terne era così distribuito:

$10: \quad 631(6) \quad 541(6) \quad 532(6) \quad 442(3) \quad 433(3) \quad 622(3) \quad = 27$

$9: \quad 621(6) \quad 531(6) \quad 522(3) \quad 441(3) \quad 432(6) \quad 333(1) \quad = 25$

I numeri a fianco delle terne sono i numeri di Pascal, che contano i modi con cui la terna si può comporre. Se pensiamo che il numero di terne possibili che si possono formare lanciando 3 dadi è $6^3 = 216$, allora lo scarto tra le frequenze relative al 10 ed al 9 è $\frac{1}{108}$: è decisamente ragguardevole il fatto che i due giocatori si siano accorti di questa differenza!
Analizziamo nel dettaglio il gioco di cui sopra. I valori possibili per le somme vanno da 3 (111) a 18 (666). Chiamiamo *variabile aleatoria (discreta)* il valore della somma su cui puntare, e lo indichiamo con X. Esaminiamo il quadro generale, dove nella prima colonna è ripotato il valore della variabile aleatoria, in quelle centrali sono riportate le terne favorevoli, infine, nell'ultima colonna, sono riportati i valori della probabilità di ciascuna variabile aleatoria.

X			*terne*				$P(X)$
3	111						$1/216$
4	121						$3/216$
5	113	122					$6/216$
6	114	123	222				$10/216$
7	115	124	133	223			$15/216$
8	116	125	134	224	233		$21/216$
9	126	135	144	234	252	333	$25/16$
10	136	145	226	235	244	334	$27/216$
11	146	155	236	245	335	344	$27/216$
12	156	246	255	336	345	444	$25/216$
13	166	256	346	355	445		$21/216$
14	266	356	446	455			$15/216$
15	366	456	555				$10/216$
16	466	556					$6/216$
17	556						$3/216$
18	666						$1/216$

Con il concetto di variabile aleatoria è possibile estendere la definizione di *guadagno medio*. Stabilito un determinato esperimento, si associa ad ogni evento elementare la relativa probabilità, ed un certo numero variabile da evento ad evento (la variabile aleatoria, appunto). Ad esempio, nell'esperimento del lancio dei tre dadi, il valore della somma è la variabile aleatoria, le terne che ne permettono l'uscita costituiscono l'evento, la probabilità che associamo alla variabile aleatoria è il rapporto tra il numero di terne favorevoli e quello di tutte le terne possibili.
Si definisce quindi *valore medio* della variabile aleatoria *la somma dei prodotti dei suoi valori per le rispettive probabilità.*

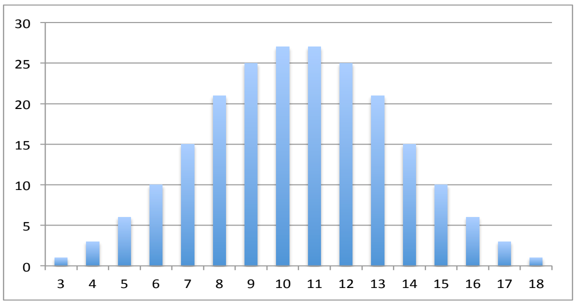
Ad esempio, nel lancio dei tre dadi, il valore medio della somma è

$$\overline{X}=\frac{3\cdot1+4\cdot3+5\cdot6+6\cdot10+7\cdot15+8\cdot21+9\cdot25+10\cdot27+11\cdot27+12\cdot25+13\cdot21+14\cdot15+15\cdot10+16\cdot6+17\cdot3+18\cdot1}{216}=10,5.$$

Riportiamo i valori della variabile aleatoria su grafico ad istogramma.

X	numero terne	P(X)	
3	1	0,00462963	0,01388889
4	3	0,01388889	0,05555556
5	6	0,02777778	0,13888889
6	10	0,0462963	0,27777778
7	15	0,06944444	0,48611111
8	21	0,09722222	0,77777778
9	25	0,11574074	1,04166667
10	27	0,125	1,25
11	27	0,125	1,375
12	25	0,11574074	1,38888889
13	21	0,09722222	1,26388889
14	15	0,06944444	0,97222222
15	10	0,0462963	0,69444444
16	6	0,02777778	0,44444444
17	3	0,01388889	0,23611111
18	1	0,00462963	0,08333333
	216	1	10,5

$\overline{X}=10,5$



Esempi

1. Si lanciano due dadi, uno regolare e l'altro truccato. In quest'ultimo la probabilità che esca un numero pari è tripla di quella che esca un numero dispari. Si confrontino i valori medi dei punteggi ottenuti lanciando i due dadi.
    - Nel caso del dado regolare il calcolo del valore medio del punteggio è $\overline{X_r}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3,5$, mentre in quello del dado truccato occorre determinare la probabilità $3p$ che esca un numero pari, e che quella che esca un numero dispari, p. Dovrà risultare $3\cdot3p+3\cdot p=1\Rightarrow p=\frac{1}{12}$, di conseguenza $\overline{X_t}=1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{3}{12}+3\cdot\frac{1}{12}+4\cdot\frac{3}{12}+5\cdot\frac{1}{12}+6\cdot\frac{3}{12}=3,75$.

2. Nel lancio di due dadi non truccati, si calcoli il valore medio della variabile aleatoria *differenza in valore assoluto dei punteggi ottenuti*.

   •

X	0	1	2	3	4	5	
P(X)	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36	Valor medio
XP(X)	0	10/36	16/36	18/36	16/36	10/36	35/18

3. Si lanciano contemporaneamente un dado e una moneta le cui facce sono contrassegnate dai numeri 2 e 3. Si consideri la variabile aleatoria X = " differenza, in valore assoluto, tra il prodotto e la somma dei numeri usciti ". Dopo aver rappresentato in modo schematico i valori possibili, corredati delle rispettive probabilità, si calcoli il valore medio della variabile aleatoria.

   •

X	0	1	2	3	4	5	7	9
P(X)	1/12	4/12	1/12	2/12	1/12	1/12	1/12	1/12
XP(X)	0	4/12	2/12	6/12	4/12	5/12	7/12	9/12

Il valore medio della variabile aleatoria è $\sum XP(X)=\frac{37}{12}$.

4. Si lanciano 5 volte due dadi regolari. Si consideri la variabile aleatoria X = "numero di volte in cui il prodotto delle facce è ≥ 20 ". Dopo aver rappresentato in modo schematico i valori possibili, corredati delle rispettive probabilità, si calcoli il valore medio della variabile aleatoria.

- La probabilità che il prodotto delle facce sia ≥ 20 è

$$p=\frac{2}{9}\Rightarrow q=1-p=\frac{7}{9}\Rightarrow P(X=k)=\binom{5}{k}\left(\frac{2}{9}\right)^k\left(\frac{7}{9}\right)^{5-k},k=0,1,2,3,4,5.$$

X	0	1	2	3	4	5		
p(X)	0,284628021	0,406611458	0,232349405	0,066385544	0,009483649	0,000541923		
Xp(X)	0	0,406611458	0,464698809	0,199156633	0,037934597	0,002709614	1,111111111	(media)
F(X)	0,284628021	0,691239479	0,923588884	0,989974428	0,999458077	1		

Esercizi

1. Si hanno 8 palline bianche. Quante palline azzurre dovremmo aggiungere affinché la probabilità di estrarre una pallina bianca sia $2/3$?
   - $\frac{8}{N}=\frac{2}{3}\Rightarrow N=12$, di conseguenza dovremmo aggiungere $12-8=4$ palline azzurre.
2. Un cubo colorato di verde viene suddiviso in 64 cubetti uguali, ottenuti con tagli equi-spaziati paralleli alle facce. I cubetti vengono messi in un'urna. a) Si calcoli la probabilità di estrarre un cubetto con tre facce colorate; b) si calcoli la probabilità che, dopo aver estratto casualmente un cubetto ed averlo lanciato su un tavolo, esso appoggi su una faccia colorata.
   - Suddividiamo i 64 cubetti in base al numero di facce colorate, che possono essere 0 (per i cubetti interni), 1, 2, 3 (per quelli con una, due o tre facce sulla superficie del cubo): il numero di cubetti con 0 facce colorate, che indichiamo con $n(0)$ è uguale a

8, quindi $n(0)=8$; per quelli colorati risulta $n(1)=24; n(2)=24; n(3)=8$; di conseguenza: a) $p=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$. b) I casi possibili sono tanti quante le facce di tutti i cubetti: $N=6\cdot 64=384$. I casi favorevoli sono tanti quante sono le facce colorate: $n=24\cdot 1+24\cdot 2+8\cdot 3=96$; di conseguenza $p=\frac{96}{384}=\frac{1}{4}$.

3. Da Pontassieve partono tre strade che conducono rispettivamente a Forlì, a Firenze, e ad Arezzo; ognuna delle tre direzioni è segnalata da un cartello. Sapendo che *tutti* e tre i cartelli sono stati scambiati, qual è la probabilità di raggiungere Forlì seguendo l'indicazione per Arezzo? E se fossero scambiati solo due dei tre cartelli?
   - Ci sono solo due modi in cui è possibile scambiare le tre indicazioni. Riassumiamo la situazione nella seguente tabella, dove la prima riga indica le indicazioni corrette:

FORLI'	AREZZO	FIRENZE
AR	FI	FC
FI	FC	AR

Solo la prima delle due alternative (AR – FI – FC) vede il cartello per Arezzo in corrispondenza della strada per Forlì, quindi $p=\frac{1}{2}$. Nel caso in cui i cartelli scambiati sono solo due si ragiona in maniera analoga:

FORLI'	AREZZO	FIRENZE
FC	FI	AR
AR	FC	FI
FI	AR	FC

In questo caso, è l'alternativa (AR – FC – FI), quella che scambia tra loro i cartelli per Firenze e per Forlì, a rappresentare la soluzione, per cui $p=\frac{1}{3}$.

4. Dimostrare per induzione che

$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C\cup D) &= n(A)+n(B)+n(C)+n(D)\\ &-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(A\cap D)-n(B\cap C)-n(B\cap D)-n(C\cap D)\\ &+n(A\cap B\cap C)+n(A\cap B\cap D)+n(A\cap C\cap D)+n(B\cap C\cap D)\\ &-n(A\cap B\cap C\cap D) \end{aligned}.$$

5. Calcolare la probabilità che, scrivendo le cifre 1, 2, 3, 4 a caso, almeno una venga scritta al proprio posto.

6. In un'urna sono contenute 150 palline numerate, suddivise tra bianche e nere, ripartite nel seguente modo:

	PARI	DISPARI
BIANCHE	40	60
NERE	15	35

Si estrae una pallina a caso dall'urna. a) Si calcoli la probabilità che sia bianca, o pari; b) si calcoli la probabilità che sia nera, e dispari; c) si calcoli la probabilità che sia o bianca, o pari (in senso *esclusivo*: o bianca, o pari).

- a) $p\left(B \vee P\right) = \frac{100}{150} + \frac{55}{150} - \frac{40}{150} = \frac{23}{30}$; b) $p\left(N \wedge D\right) = \frac{35}{150} = \frac{7}{30}$;c) o bianca o pari significa che se è bianca deve essere dispari, oppure che se è pari deve essere nera: $p(oBoP) = p(B \wedge D) + p(N \wedge P) = \frac{60}{150} + \frac{15}{150} = \frac{1}{2}$.

7. Un dado è truccato: la probabilità che esca un numero pari è doppia di quella che esca un numero dispari, inoltre tutti i numeri pari hanno la stessa probabilità di presentarsi, così come tutti i numeri dispari. a) Si calcoli la probabilità che esca un numero primo dispari; b) si calcoli la probabilità che esca un numero pari o primo.
   - Se indichiamo con *p* la probabilità che esca un numero pari, e con *d* la probabilità che esca un numero dispari, per ipotesi si ha che $p = 2d$, e che $p + d = 1$. Di conseguenza $d = \frac{1}{3}$ e $p = \frac{2}{3}$. a) Ogni numero dispari ha probabilità $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$ di presentarsi, quindi la probabilità che esca un numero primo dispari è $\frac{2}{9}$. b) I casi favorevoli sono 2, 3, 4, 5, 6: la probabilità è quindi $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, in quanto l'evento considerato è il complementare dell'evento "esce il numero 1", che ha probabilità $\frac{1}{9}$.

8. Da un'indagine condotta su un gruppo di 40 avventori di una pizzeria si sono rilevate le seguenti scelte di portate:

Avventori	Portate scelte
15	Primo
13	Secondo
12	pizza
4	Primo e secondo
7	Primo e pizza
3	Secondo e pizza
1	Primo secondo e pizza

Qual è la probabilità che un avventore scelto a caso si sia seduto "per compagnia", ovvero senza aver ordinato niente? Qual è la probabilità che abbia preso soltanto la pizza?

- Il numero di avventori che ha ordinato almeno una portata è dato dalla relazione $n(I \cup II \cup P) = n(I) + n(II) + n(P) - n(I \cap II) - n(I \cap P) - n(II \cap P) + n(I \cap II \cap P)$. $15 + 13 + 12 - 4 - 7 - 3 + 1 = 27$, quindi 13 persone sono sedute senza aver ordinato alcuna portata (per la gioia del ristoratore…). a) La probabilità di estrarne una a caso è $p = \frac{27}{40}$. b) Al numero di ordinazioni di pizza occorre togliere quello di primo e pizza e di secondo e pizza, ed aggiungere quello di ordinazioni complete (primo, secondo e pizza): $p = \frac{12 - 7 - 3 + 1}{40} = \frac{3}{40}$.

9. Sia S l'insieme delle 20 squadre del campionato di calcio. Indichiamo con (a, b) la partita della squadra *a* contro la squadra *b*, giocata in casa della squadra *a*. Quante partite si giocano in un anno? Quante sono le "giornate"?

- Le partite sono tante quante le coppie ordinate che si possono formare con squadre diverse, ovvero $n = 20 \times 20 - 20 = 380$. Le giornate si determinano osservando che ad ogni turno si giocano 10 partite, quindi $g = \frac{380}{10} = 38$.

10. Un'urna contiene sei palline rosse e otto bianche. Si calcoli la probabilità di estrarre con restituzione: a) due palline rosse; b) almeno una pallina rossa; c) due palline dello stesso colore. Si rappresenti la situazione mediante un diagramma ad albero.

- $R,N \quad \begin{array}{ll} R:6/14 & \begin{array}{l} R:6/14 \\ N:8/14 \end{array} \\ N:8/14 & \begin{array}{l} R:6/14 \\ N:8/14 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a)p(RR) = \frac{6}{14}\cdot\frac{6}{14} = \frac{9}{49} \\ b)1 - p(NN) = 1 - \frac{16}{49} = \frac{33}{49} \\ c)p(RR) + p(NN) = \frac{9}{49} + \frac{16}{49} = \frac{25}{49} \end{array}$.

11. Si lanciano due dadi. Se la somma è minore di 4 si ricevono 11€. Quanto deve essere la posta affinché il gioco sia equo?

- $\frac{3}{36}\cdot 11€ - \frac{33}{36}\cdot x = 0 \Rightarrow x = 1€$.

12. Un'urna contiene *x* palline verdi e *y* azzurre. Si estraggono due palline rimettendo la prima nell'urna. E' più probabile che escano due palline dello stesso colore o due palline di colore diverso?

- $V,A \quad \begin{array}{ll} V:x/(x+y) & \begin{array}{l} V:x/(x+y) \\ A:y/(x+y) \end{array} \\ A:y/(x+y) & \begin{array}{l} V:x/(x+y) \\ A:y/(x+y) \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} p(VV) + p(AA) = \frac{x^2}{(x+y)^2} + \frac{y^2}{(x+y)^2} = \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} \\ p(VA) + p(AV) = \frac{xy}{(x+y)^2} + \frac{xy}{(x+y)^2} = \frac{2xy}{(x+y)^2} \end{array}$

- Poiché $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} - \frac{2xy}{(x+y)^2} = \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \geq 0$, è più probabile che escano due palline dello stesso colore. La probabilità è uguale solo nel caso in cui il numero di palline di un colore è uguale al numero di palline dell'altro; in tal caso la probabilità vale $p = \frac{1}{2}$.

13. Si lanciano tre dadi non truccati. Qual è la probabilità che escano tre numeri consecutivi?

- I casi favorevoli sono le terne $1,2,3 \quad 2,3,4 \quad 3,4,5 \quad 4,5,6$. Ognuna di queste a sua volta si può presentare in 6 modi diversi (le *permutazioni* di 3 elementi, senza ripetizioni). Complessivamente si hanno quindi 24 casi favorevoli: $p = \frac{24}{216} = \frac{1}{9}$.

14. Si lanciano 5 monete. Qual è la probabilità che escano almeno tre teste?

- $$\begin{array}{ll} CCCCC & (1) \\ CCCCT & (5) \\ CCCTT & (10) \\ CCTTT & (10) \\ CTTTT & (5) \\ TTTTT & (1) \end{array} \quad 2^5 = 32 \text{ casi possibili, } 10+5+1=16 \text{ casi favorevoli: } p = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

15. Si considerano tre urne A(1 pallina rossa, 2 verdi), B(3 palline rosse, 2 verdi), C(2 palline rosse, 3 verdi). Si estrae una pallina da ogni urna. Qual è la probabilità che, tra le palline estratte, ce ne siano: a) una rossa e due verdi; b) più verdi che rosse.

- $$\begin{array}{ll} A(1R,2V) & \begin{array}{l} R:1/3 \\ V:2/3 \end{array} \\ B(3R,2V) & \begin{array}{l} R:3/5 \\ V:2/5 \end{array} \\ C(2R,3V) & \begin{array}{l} R:2/5 \\ V:3/5 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a)p = p(RVV)+p(VRV)+p(VVR) = \frac{6}{75}+\frac{18}{75}+\frac{8}{75} = \frac{32}{75} \\ b)p = p(RVV)+p(VRV)+p(VVR)+p(VVV) = \frac{32}{75}+\frac{12}{75} = \frac{44}{75} \end{array}$$

16. Si lanciano tre monete. Qual è la probabilità che si presenti testa su tutte e tre le monete sapendo che almeno una è testa? E sapendo che la prima moneta è testa?
    - Sapere che almeno una è testa toglie dal conto dei casi possibili quello in cui tutte e tre sono croci. I casi possibili sono dunque $2^3 - 1 = 7$. Tra questi, solo in un caso si hanno tre teste, quindi $p = \frac{1}{7}$. Se la prima moneta è testa, i casi possibili si riducono a quattro: TTT, TCC, TCT, TTC, di conseguenza $p = \frac{1}{4}$.

17. Si hanno due urne: A(una pallina bianca, nove nere), B(nove palline bianche, una nera). Si chiede la probabilità di estrarre due palline bianche con le seguenti modalità: a) si sceglie a caso un'urna, si estrae la pallina e la si rimette nell'urna; si estrae di nuovo a caso un'urna e si estrae una pallina; b) si sceglie a caso un'urna, si estrae una pallina, la si rimette dall'urna, e sempre dalla medesima urna si estrae la seconda pallina.

- $a)$

$A(1b,9n)$ $b \rightarrow$

A $b \Rightarrow p = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{400}$

n

B $b \Rightarrow p = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10} = \frac{9}{400}$

n

n

$B(9b,1n)$ $b \rightarrow$

A $b \Rightarrow p = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} = \frac{9}{400}$

n

B $b \Rightarrow p = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10} = \frac{81}{400}$

n

n

$$p = \frac{1+9+9+81}{400} = \frac{25}{100}.$$

- $b)$

$A(1b,9n)$ $b \rightarrow$ $b \Rightarrow p = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{200}$

n

n

$B(9b,1n)$ $b \rightarrow$ $b \Rightarrow p = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10} = \frac{81}{200}$

n

n

$$p = \frac{82}{200} = \frac{41}{100}.$$

La seconda modalità è più conveniente.

18. Moreno e Marino hanno tre figli. Moreno dice: “ho almeno un maschio”, mentre Marino afferma: “il maggiore è maschio”. La probabilità che tutti e tre i figli siano maschi è uguale per tutti e due?
    - Moreno presenta le seguenti possibilità: MMM-MMF-MFM-FMM-FFM-FMF-MFF, quindi $p = \frac{1}{7}$. Per Marino invece, la situazione è la seguente: MMM-MFM-FMM-FFM, quindi $p = \frac{1}{4}$.

19. In una particolare zona ci sono due aziende produttrici di asciugacapelli. La prima azienda produce il 70% del totale degli asciugacapelli, di cui il 20% è difettoso, mentre l’altra produce il restante 30%, e di questi il 30% è difettoso. Qual è la probabilità che un asciugacapelli non difettoso sia stato prodotto dalla prima azienda?

- Consideriamo gli eventi A: l'asciugacapelli è non difettoso, e B: l'asciugacapelli è stato prodotto dalla prima azienda. Di conseguenza: $p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{0,80 \cdot 0,70}{0,80 \cdot 0,70 + 0,70 \cdot 0,30} = \frac{8}{11}$.

20. Nella classe 4P del Liceo Scientifico "Morfeo De sogni", il 60% degli studenti preferisce la Matematica alle altre discipline, il 20% la Fisica, mentre il 10% le preferisce entrambe. Si calcoli la probabilità che uno studente scelto a caso preferisca anche la Fisica, sapendo che preferisce la Matematica, e si calcoli la probabilità che non preferisca nessuna delle due materie.
    - L'evento B: "lo studente scelto preferisce la Fisica" è condizionato dall'evento A: "lo studente scelto preferisce la Matematica"; per cui $p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{0,10}{0,60} = 17\%$. Per rispondere alla seconda domanda si calcola la probabilità dell'evento contrario C: "lo studente preferisce almeno una delle due materie", la cui probabilità è $p = 0,60 + 0,20 - 0,10 = 70\%$, per cui la probabilità che uno studente non preferisca nessuna delle due materie è $p = 1 - 0,70 = 30\%$.

21. Siano A e B due eventi tali che $p(A) = \frac{3}{8}$, $p(B) = \frac{5}{8}$, $p(A \cup B) = \frac{3}{4}$. Determinare $p(B|A)$.
    - $p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A) + p(B) - p(A \cup B)}{p(A)} = \frac{2}{3}$.

22. La probabilità che un individuo di una certa popolazione sia affetto da una certa malattia è $p(M) = 0,16$, mentre quella che un individuo, della popolazione, presenti un determinato sintomo è $p(S) = 0,08$. Da un'indagine condotta risulta che la probabilità che un individuo malato presenti il sintomo è $p(S|M) = 0,32$. Si calcoli la probabilità che un individuo che presenta il sintomo sia anche affetto dalla malattia.
    - $p(M|S) = \frac{p(M \cap S)}{p(S)} = \frac{p(S|M) \cdot p(M)}{p(S)} = 0,64 = 64\%$.

23. Il 40% degli individui di una popolazione è costituito da fumatori. Soffre di bronchite il 30% dei fumatori e l'8% dei non fumatori. Scelto a caso un individuo della popolazione, si calcoli la probabilità che sia un fumatore sapendo che soffre di bronchite cronica.
    - $p(F|br) = \frac{p(F \cap br)}{p(br)} = \frac{\frac{40}{100} \cdot \frac{30}{100}}{\frac{40}{100} \cdot \frac{30}{100} + \frac{60}{100} \cdot \frac{8}{100}} = 0,714$.

24. Tre macchine, A, B, C, producono rispettivamente il 60%, il 25%, il 15% del numero totale dei pezzi prodotti da una fabbrica. Le percentuali di prodotti difettosi sono rispettivamente del 3%, del 4%, e del 5%. Qual è la probabilità che un pezzo difettoso sia stato scelto dalla macchina B?
    - $p(B|dif) = \frac{p(B \cap dif)}{p(dif)} = \frac{\frac{25}{100} \cdot \frac{4}{100}}{\frac{60}{100} \cdot \frac{3}{100} + \frac{25}{100} \cdot \frac{4}{100} + \frac{15}{100} \cdot \frac{5}{100}} = \frac{20}{71}$.

25. In tre borsellini contengono ognuno due monete. Il primo contiene due monete da 1€, il secondo, una da 1€ e una da 2€, il terzo due monete da 2€. Scelto a caso un borsellino, si estrae da questo una moneta da 2€. Qual è la probabilità che anche la seconda moneta sia da 2€?

- Gli eventi sono A: "esce una moneta da 2€", $p(A)=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1\Rightarrow p(A)=\frac{1}{2}$ e B: "anche la seconda moneta è da 2€", $p(A)=\frac{1}{3}$ perché solo il terzo borsellino permette di estrarre due monete da 2€. La formula della probabilità condizionale porta alla conclusione: $p(B|A)=\frac{p(B\cap A)}{p(A)}=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}$.

26. La probabilità che l'arciere A colpisca il bersaglio è $\frac{1}{4}$, mentre quella che lo colpisca l'arciere B è $\frac{1}{5}$. Se ciascuno scocca due frecce, qual è la probabilità che il bersaglio venga colpito *almeno* una volta? Se ciascuno scocca una freccia ed il bersaglio viene colpito una volta, qual è la probabilità che il colpo sia stato messo a segno dall'arciere A?
    - Si risponde alla prima domanda ragionando sull'evento contrario, ovvero che nessuna delle quattro frecce raggiunga il bersaglio. Indichiamo con S lo sbaglio, e con C il centro. La probabilità contraria è quindi $\left[p(S_A)p(S_B)\right]\left[p(S_A)p(S_B)\right]=\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\right]^2=\frac{9}{25}$, di conseguenza $1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$. Quanto alla seconda richiesta, il seguente schema degli esiti aiuta il ragionamento:

Arciere A	Arciere B	Probabilità
C	C	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$
C	S	$\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{20}$
S	C	$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{20}$
S	S	$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{20}$

Il bersaglio è colpito una volta nel secondo e terzo caso, che costituiscono una coppia di eventi disgiunti (o si verifica uno, CS, o si verifica l'altro, SC). La probabilità è quindi la somma delle singole probabilità: $p((S_B\vee S_B))=\frac{7}{20}$, mentre quella che il centro sia stato fatto dall'arciere A, insieme allo sbaglio dell'arciere B, è $p(C_A\cap(S_B\vee S_B))=\frac{4}{20}$. Dalla formula della probabilità condizionale: $p(C_A|(S_B\vee S_B))=\frac{p(C_A\cap(S_B\vee S_B))}{p((S_B\vee S_B))}=\frac{4/20}{7/20}=\frac{4}{7}$.

27. Si scelga a caso un punto P di un segmento AB il cui punto medio è O. Si calcoli la probabilità che i segmenti AP, PB, e AO possano formare un triangolo.

- Possiamo supporre $AP < PB$. Risulta $\begin{cases} PB - AP \le AO \\ AP + PB = 2AO \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AP}{AO} \le \dfrac{1}{2}$, ma anche

$\begin{cases} AP \ge PB - AO \\ AP = -PB + 2AO \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AP}{AO} \ge \dfrac{1}{2}$

28. Si deve rispondere a 7 domande su 10 di un questionario. In quanti modi si possono scegliere le domande, se è obbligatorio rispondere alle prime 2? E se dovessimo rispondere ad almeno 4 delle prime 5 domande?
    - Nel primo caso, le 5 domande libere vengono scelte tra le restanti 8 in $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = 56$ modi possibili.
    - Si può rispondere a 4 o a 5 delle prime domande. Nel primo caso si hanno $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 50$ modi possibili, nel secondo $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$. In totale sono 60.
29. Qual è la probabilità che lanciando 10 volte una moneta esca testa esattamente quattro volte? E che non esca testa più di otto volte?
    - La decupla con 4 teste e 6 croci può formarsi in $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ modi diversi, ognuno con probabilità $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{1}{2^{10}}$. La probabilità è quindi $\dfrac{210}{1024} = \dfrac{105}{512}$. La probabilità che non esca più di otto volte può essere vista in termini di probabilità dell'evento complementare dell'uscita 9 o 10 volte:
    $p = 1 - \left[\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix}\dfrac{1}{2^{10}} + \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}\dfrac{1}{2^{10}}\right] = 1 - \dfrac{11}{2^{10}} = \dfrac{1013}{1024}$.
30. In una prova scritta si deve rispondere a 5 quesiti. Vengono attribuiti 2 punti per ogni risposta esatta, -1 per ogni risposta errata, 0 punti per ogni quesito a cui non si è risposto. Il punteggio minimo richiesto per superare la prova è 6. Qual è la probabilità di superare la prova rispondendo a caso a tutti i quesiti?
    - Ogni quesito può avere 3 esiti, quindi le possibili cinquine di risposte che si possono formare sono $3^5 = 243$. Tra queste, quelle utili ai fini del superamento della prova sono quelle che danno i seguenti punteggi ("1" significa risposta esatta, "X" significa quesito no affrontato, e "2" significa risposta sbagliata):

• PUNTEGGI	• Cinquine utili	• Modi di formazione
• Punteggio 6	• 1-1-1-X-X	• $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 10$
• Punteggio 7	• 1-1-1-1-2	• $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 5$
• Punteggio 8	• 1-1-1-1-X	• $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 5$
• Punteggio 10	• 1-1-1-1-1	• $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 1$

La probabilità di superare la prova è quindi $\frac{21}{243}=\frac{7}{81}$.

31. Si calcoli la probabilità che nelle targhe automobilistiche a sei cifre, il numero di targa sia composto a) utilizzando solo il 3 e il 7, b) utilizzando solo due cifre. In ambedue i casi non sono contemplati i numeri composti utilizzando *solo* una cifra delle due (per intenderci, o tutti 3 o tutti 7).
    - I numeri di 6 cifre si possono formare in 10^6 modi, mentre quelli favorevoli al primo caso possono essere dedotti sommando i numeri di Pascal in corrispondenza della riga 6, e togliendo 2 al risultato (ovvero le targhe 333333 e 777777): $p=\frac{2^6-2}{10^6}=\frac{62}{10^6}$. Nel secondo caso invece, il numero di casi favorevoli viene moltiplicato per *numero di modi in cui è possibile selezionare 2 oggetti da un gruppo di 10*, che è dato dal numero di Pascal $\binom{10}{2}$. Di conseguenza $p=\frac{\binom{10}{2}(2^6-2)}{10^6}=\frac{279}{10^5}$.

32. Ci troviamo in via della Colonna, a metà strada tra piazza San Marco e Piazza D'Azeglio. Decidiamo di muoverci, spostandoci di venti passi, in uno dei due sensi, scelto a caso, per poi fermarci trenta secondi a riposare. Si riparte di nuovo in uno dei due sensi, sempre scelto a caso, e sempre facendo venti passi e fermandoci trenta secondi. Se ripetiamo questa sequenza *n* volte, qual è la probabilità di ritrovarci alla fine al punto di partenza?
    - Intanto, il numero di spostamenti deve essere pari, altrimenti non è possibile tornare al punto di partenza. Il numero di spostamenti possibili è 2^n, mentre quelli favorevoli sono $\binom{n}{n/2}$ (si torna al punto di partenza se il numero di spostamenti verso piazza D'Azeglio è uguale a quello verso piazza San Marco). La probabilità richiesta è quindi $p=\frac{\binom{n}{n/2}}{2^n}$. Ad esempio, se $n=10 \Rightarrow p=\frac{252}{1024}=\frac{63}{256}$.

33. In ogni estrazione del lotto, che si tengono in varie città, vengono estratti 5 numeri distinti tra 1 e 90. Considerando solo le città di Firenze e di Genova, qual è la probabilità che il 17 esca solo in una delle due città?
    - Si tratta di moltiplicare per due la probabilità che il 17 esca in *una sola* delle due città: $p=2\frac{\binom{89}{4}\binom{89}{5}}{\binom{90}{5}\binom{90}{5}}=\frac{17}{162}$.

34. Si lanciano due dadi, uno regolare e l'altro truccato. In quest'ultimo la probabilità che esca un numero pari è tripla di quella che esca un numero dispari. Si confrontino i valori medi dei punteggi ottenuti lanciando i due dadi.
    - Nel caso del dado regolare il calcolo del valore medio del punteggio è $\overline{X_r}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3,5$, mentre in quello del dado truccato occorre determinare la probabilità $3p$ che esca un numero pari, e che quella che esca un

numero dispari p. Dovrà risultare $3\cdot 3p+3\cdot p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{12}$, di conseguenza

$\overline{X_t}=1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{3}{12}+3\cdot\frac{1}{12}+4\cdot\frac{3}{12}+5\cdot\frac{1}{12}+6\cdot\frac{3}{12}=3,75$.

35. Nel lancio di due dadi non truccati, si calcoli il valore medio della variabile aleatoria *differenza in valore assoluto dei punteggi ottenuti*.

•

X	0	1	2	3	4	5	
P(X)	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36	Valor medio
XP(X)	0	10/36	16/36	18/36	16/36	10/36	35/18

36. Due tennisti che hanno la stessa probabilità di vincere, si affrontano in una competizione dalla quale uscirà vincente quello che vincerà per primo due partite consecutive, oppure tre partite. Quante partite si disputeranno, in media, nella competizione?
    - Indicati con A e con B i due tennisti, le sequenze possibili e le relative probabilità sono riportate nella seguente tabella:

SEQUENZE	Numero di partite	probabilità	Numero partite per probabilità
ABABA – BABAA – BABAB - ABABB	5	$\frac{1}{32}\cdot 4=\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$
ABAA - BABB	4	$\frac{1}{16}\cdot 2=\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
BAA - ABB	3	$\frac{1}{8}\cdot 2=\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
AA - BB	2	$\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$

Sommando i valori nell'ultima colonna a sinistra otteniamo il valore $\frac{23}{8}$, si disputeranno quindi "poco meno" di tre partite.

37. Si calcoli il valore medio del numero di successi che si possono avere, nel caso di quattro eventi indipendenti, ciascuno con probabilità di successo uguale a $\frac{1}{3}$.
    - Riportiamo i valori della variabile aleatoria in tabella $P(X)=\binom{4}{X}\left(\frac{1}{3}\right)^X\left(\frac{2}{3}\right)^{4-X}$:

X	0	1	2	3	4	
P(X)	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$	
XP(X)	0	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{4}{81}$	Valor medio: $\frac{84}{81}=\frac{28}{27}$

38. Se lanciamo tre volte un dado, qual è la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia compresa tra 9 e 11 (compreso 9 e compreso 11)?

- $p = p(9) + p(10) + p(11) = \frac{25}{216} + \frac{27}{216} + \frac{27}{216} = \frac{79}{216}$.

39. Scelto un intero *n* a caso, si determini la probabilità che la rappresentazione decimale di n^2 termini per 1.
    - Interi che elevati al quadrato hanno una rappresentazione decimale che termina per 1 sono quelli la cui rappresentazione decimale termina per 1 o per 9. Poiché la rappresentazione decimale di *n* può terminare in 10 modi possibili (le cifre da 0 a 9), la probabilità richiesta è $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.
40. Una scatola contiene 4 monete da 1 euro, 4 monete da 20 centesimi, e 2 monete da 10 centesimi. Se vengono estratte 4 monete senza restituzione, qual è la probabilità che il valore complessivo delle monete sia di almeno 3 euro?
    - Si possono avere almeno tre euro con le seguenti possibilità:

Possibilità	Numero di possibilità	probabilità
1-1-1-1 (4 euro)	$\binom{4}{4} = 1$	$\binom{4}{4}\frac{4}{10}\frac{3}{9}\frac{2}{8}\frac{1}{7} = \frac{1}{210}$
1-1-1-0,20 (3,20 euro)	$\binom{4}{3} = 4$	$\binom{4}{3}\frac{4}{10}\frac{3}{9}\frac{2}{8}\frac{4}{7} = \frac{16}{210}$
1-1-1-0,10 (3,10 euro)	$\binom{4}{3} = 4$	$\binom{4}{3}\frac{4}{10}\frac{3}{9}\frac{2}{8}\frac{2}{7} = \frac{8}{210}$

La probabilità richiesta è la somma delle probabilità (eventi indipendenti) $p = \frac{25}{210} = \frac{5}{42}$.

41. Una persona lancia 5 volte una freccia su un bersaglio. La probabilità di centrare il bersaglio a ogni colpo è $\frac{1}{3}$. Sapendo che il bersaglio è stato centrato esattamente 3 volte, qual è la probabilità che sia stato centrato già al primo tiro?
    - Consideriamo gli eventi A: "fare centro al primo tiro" e B: "fare 3 centri su 5 tiri". Si tratta di calcolare la probabilità condizionale

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{3}\binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

42. In una famiglia di 8 figli, qual è la probabilità che vi siano 4 maschi e 4 femmine? E quella che vi siano 5 figli di un sesso e 3 dell'altro?
    - E' simile al problema in cui si lancia una moneta (dire maschio o femmina è come dire testa o croce) 8 volte. La probabilità che si abbiano 4 maschi (e quattro femmine) è quindi $p = \binom{8}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{128}$, mentre quella di avere 5 figli di un sesso e tre dell'altro è $p = \binom{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{56}{128}$.
43. Un buon tiratore ha probabilità *p* di centrare il bersaglio. Sapendo che la probabilità che faccia almeno centro su tre tiri è 0,992, calcolare il valore di *p*.

- Ragioniamo sul complementare: la probabilità che non faccia alcun centro è $(1-p)^3 = 1-0,992 = 0,008 = (0,2)^{-3} \Rightarrow 1-p = 0,2 \Rightarrow p = 0,8$.