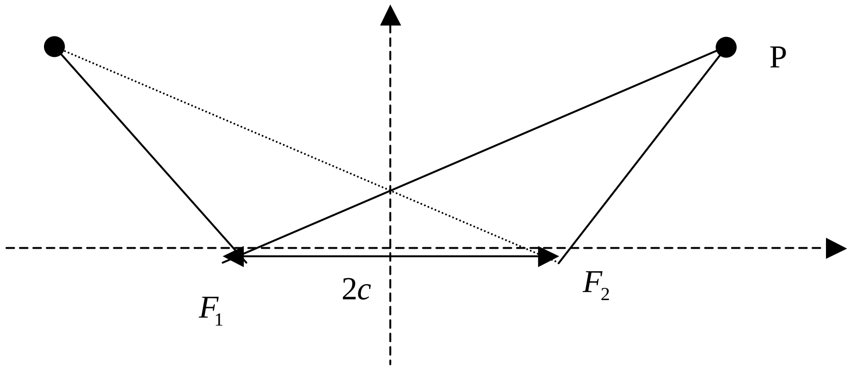
CAPITOLO 9
L'IPERBOLE NEL PIANO CARTESIANO

9.1 Costruzione dell'iperbole come luogo geometrico

L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano la cui differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi è costante. Detta *2c* la distanza focale e *2a* la differenza delle distanze dei punti dell'iperbole dai fuochi, risulta:

$$|PF_2 - PF_1| = 2a.$$



Dalla proprietà dei triangoli per cui la differenza delle lunghezze di due lati è sempre minore della lunghezza
del terzo lato segue la condizione

$$|PF_2 - PF_1| = 2a < 2c \Rightarrow a < c.$$

Per questioni di similitudine tra triangoli, l'iperbole risulta simmetrica rispetto all'asse focale (detto *asse trasverso*) ed alla retta ad esso perpendicolare passante per il punto medio del segmento avente i fuochi per estremi.

Scegliendo questi assi come sistema di riferimento "naturale", l'equazione del luogo geometrico, per punti appartenenti al primo e quarto quadrante, si scrive nella forma:

$$PF_1 - PF_2 = 2a.$$

9.2 L'equazione dell'iperbole

Calcoli analoghi a quelli sviluppati nel caso dell'ellisse portano all'individuazione dell'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x:

$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

Osserviamo che, quando il punto P sta sull'asse x, risulta $2a = PF_1 - PF_2 = x + c - (x - c) = 2c$; questo fatto, unito alla condizione $|PF_2 - PF_1| = 2a < 2c \Rightarrow a < c$, ci permette di concludere che $xc - a^2 \geq a \cdot a - a^2 = 0$. A questo punto è possibile elevare al quadrato ed ottenere:

$$4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$x^2c^2 + a^4 - 2a^2xc = a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2xc + a^2y^2.$$

$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$$

Posto $b^2 := c^2 - a^2$possiamo scrivere l'equazione dell'iperbole nella forma canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

In realtà, per effetto della simmetria rispetto all'asse y, l'equazione è soddisfatta anche dai punti del luogo situati nel secondo e terzo quadrante: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \frac{(-x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$

Se i fuochi fossero posti sull'asse y, definendo il luogo geometrico $|PF_2 - PF_1| = 2b$ otterremmo l'equazione dell'iperbole con fuochi sull'asse y:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

La forma dell'iperbole

Per tracciare il grafico dell'iperbole con riga e compasso (per punti), utilizziamo il cosiddetto *metodo dei due fuochi*. Supponiamo di voler tracciare il grafico dell'iperbole con fuochi sull'asse x e tale che $PF_1 - PF_2 = 2a$ con $a = 3; \quad c = 4$. I punti dell'iperbole saranno i punti intersezione delle circonferenze di centro nei fuochi e raggi che differiscono per $2a = 6$. Vediamo un esempio ottenuto utilizzando il foglio elettronico excel:

COSTRUZIONE PER PUNTI DELL'IPERBOLE CON IL METODO "DEI DUE FUOCHI"

Semidistanza focale c= 4

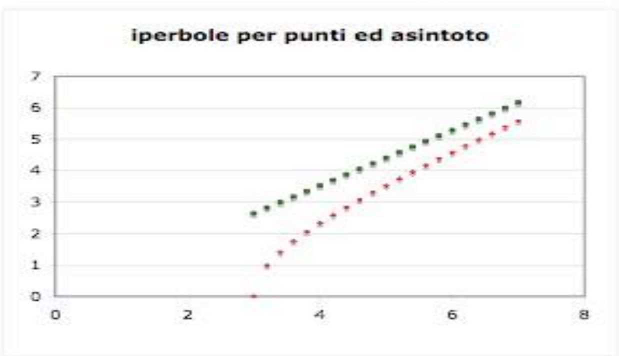
semidifferenza delle distanze dai fuochi a= 3 a<c

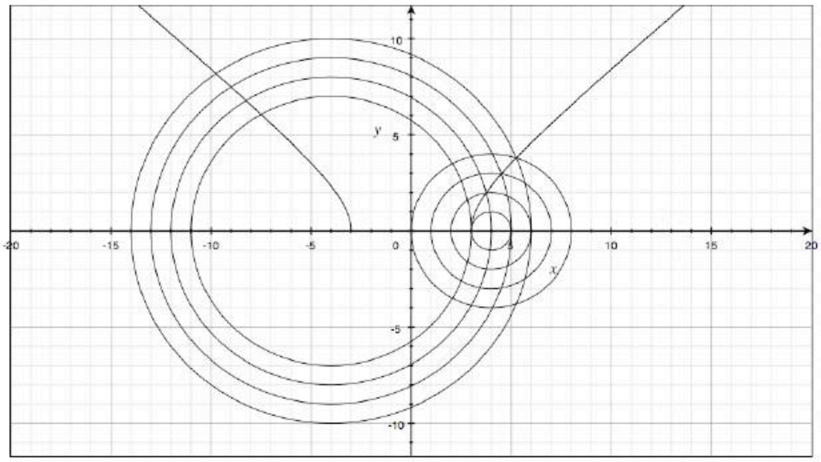
$$y = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2} x^2 - (c^2 - a^2)}$$

b= 2,645751311

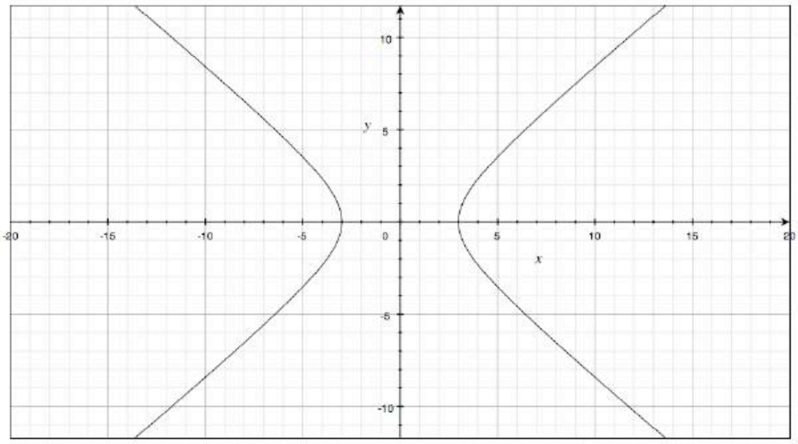
incremento= 0,2

x	y	
3	0	2,645751311
3,2	0,982061324	2,822134732
3,4	1,411067366	2,998518153
3,6	1,754992877	3,174901573
3,8	2,056966483	3,351284994
4	2,333333333	3,527668415
4,2	2,592296279	3,704051835
4,4	2,838622514	3,880435256
4,6	3,075350025	4,056818677
4,8	3,304542328	4,233202098
5	3,527668415	4,409585518
5,2	3,745812477	4,585968939
5,4	3,959797975	4,76235236
5,6	4,170265113	4,938735781
5,8	4,377721376	5,115119201
6	4,582575695	5,291502622
6,2	4,785162252	5,467886043
6,4	4,985757493	5,644269464
6,6	5,184592559	5,820652884
6,8	5,381862544	5,997036305
7	5,57773351	6,173419726





Il grafico completo dell'iperbole tiene conto anche della simmetria rispetto all'asse x:



9.3 L'iperbole come curva "illimitata"

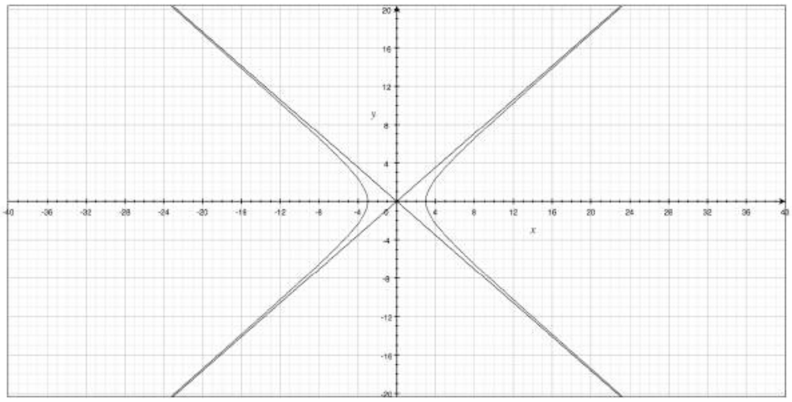
A differenza dell'ellisse, che per definizione è contenuta in una regione limitata del piano, l'iperbole (come la parabola) è illimitata. Per convincerci di questa proprietà, è sufficiente osservare che una differenza costante può essere ottenuta anche sottraendo tra loro numeri molto grandi, cosa non vera per la somma, come nel caso dell'ellisse. Possiamo rendere più rigorose queste affermazioni ragionando sulle rispettive equazioni:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}+1 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq a$ nel caso dell'iperbole, mentre

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2} \leq 1 \Rightarrow |x| \leq a$ nel caso dell'ellisse.

9.4 Il comportamento dell'iperbole "all'infinito": asintoti

Scriviamo l'equazione dell'iperbole nella forma $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ (ramo superiore). Un semplice confronto porta ad affermare che $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \leq \frac{b}{a}\sqrt{x^2} \leq \frac{b}{a}|x|$. L'iperbole è quindi "limitata" dalle rette $y=\frac{b}{a}x$ e $y=-\frac{b}{a}x$. Di più: l'iperbole tende ad avvicinarsi a queste rette senza mai incontrarle al crescere (in valore assoluto) delle ascisse dei suoi punti.



E' possibile dimostrare questa proprietà, valutando la differenza tra le ordinate dei punti sulle rette, dette *asintoti*, e le ordinate dei punti sull'iperbole, aventi la stessa ascissa:
$\left|\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right|=\frac{b}{a}\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right|=\frac{b}{a}\left|\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|\le\frac{ab}{|x|}$; evidentemente l'ultima frazione diventa piccola al crescere di $|x|$.

9.5 L'eccentricità dell'iperbole

L'eccentricità dell'iperbole è definita come il rapporto tra la semidistanza focale e la misura del semiasse trasverso. Nel caso in cui i fuochi sono situati sull'asse x l'eccentricità è data dalla formula:

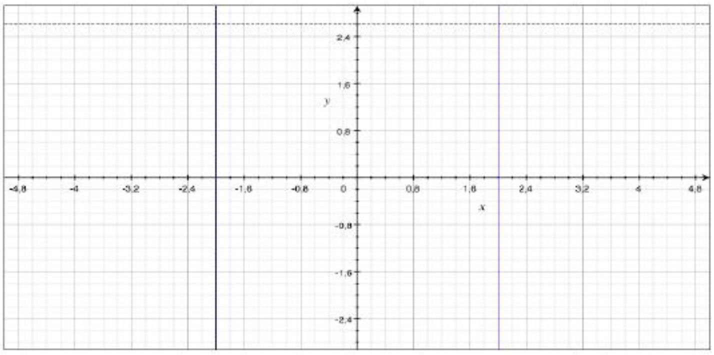
$$e=\frac{c}{a}.$$

Notiamo subito che l'eccentricità ha un valore $e>1$. Se l'eccentricità fosse uguale a uno, vorrebbe dire che $c=a\Rightarrow b^2=c^2-a^2=0$: questo significa che $PF_1-PF_2=2a=2c$, da cui segue

$$PF_1-PF_2=2c$$
$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2c$$
$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2c+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$$
$$4xc-4c^2=4c\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$$
$$x^2c^2+c^4-2c^2xc=c^2x^2+c^2c^2-2c^2xc+c^2y^2$$
$$\left(c^2-c^2\right)x^2-c^2y^2=a^2\left(c^2-c^2\right)$$
$$y=0.$$

L'iperbole degenera quindi in due semirette aventi origine nei punti di coordinate (a;0) e (-a;0).

D'altra parte, maggiore è l'eccentricità dell'iperbole, più grande è il valore di *b* rispetto a quello di *a*: l'iperbole degenera nelle rette di equazione $x=\pm a$:



Gli stessi risultati potevano essere raggiunti ragionando in modo “dinamico” sul coefficiente angolare degli asintoti, scritti opportunamente nella forma

$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}x=\pm\frac{a\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}}{a}x=\pm\sqrt{e^2-1}x$. Il modo con cui il coefficiente angolare dipende dall’eccentricità conferma quanto appena osservato: al crescere dell’eccentricità, il coefficiente angolare cresce (in valore assoluto) indefinitamente, e l’iperbole si avvicina alle rette di equazione $x=\pm a$. D’altro canto, più l’eccentricità si avvicina a uno, più il coefficiente angolare si avvicina a zero, e l’iperbole si avvicina alle semirette di equazione $y=0$ ed origine nei punti $(\pm a;0)$.

9.6 Le rette tangenti all’iperbole in un punto dato: *formula di sdoppiamento*

Anche per l’iperbole è possibile utilizzare la “formula di sdoppiamento” nei problemi in cui si hanno dati relativi alla retta tangente all’iperbole in un punto $P(x_0;y_0)$:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=\pm1\ .$$

se il centro dell’iperbole non coincide con l’origine degli assi cartesiani si procede come nel caso dell’ellisse e si ottiene la formula generalizzata:

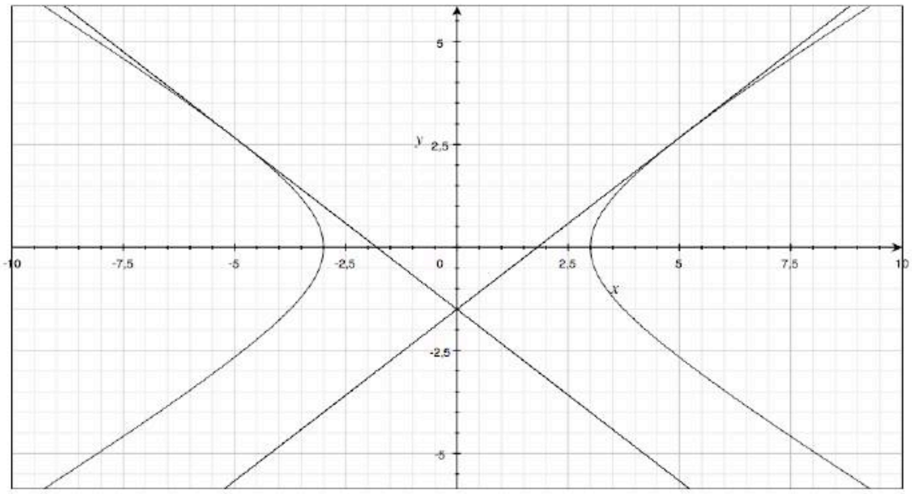
$$\frac{(x-x_c)(x_0-x_c)}{a^2}-\frac{(y-y_c)(y_0-y_c)}{b^2}=\pm1$$

Nel caso di problemi con tangenti condotte da un punto esterno, come al solito, la formula non è applicabile. Vediamo qualche esempio.

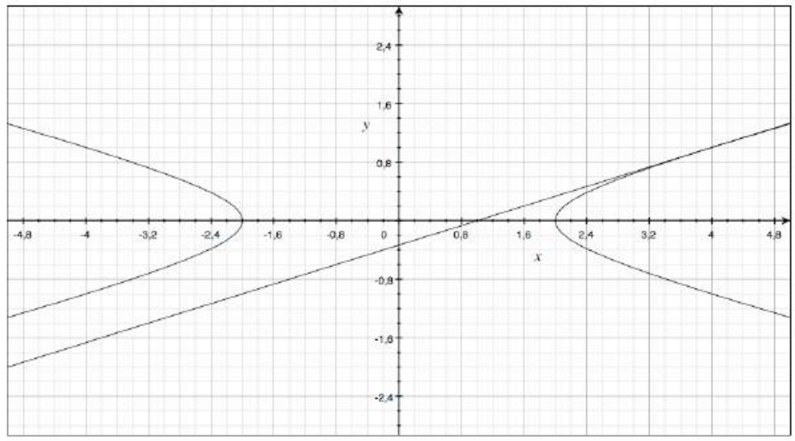
Problemi svolti

1. *Scrivi le equazioni delle rette tangenti all’iperbole di equazione* $4x^2-9y^2=36$ *condotte dal punto di coordinate* $\left(0;-\frac{3}{2}\right)$.
   - Scriviamo l’equazione del fascio di rette passanti per $\left(0;-\frac{3}{2}\right)$ e mettiamola a sistema con l’equazione dell’iperbole: $y+\frac{3}{2}=m(x-0)\Rightarrow y=mx-\frac{3}{2}$ e $\begin{cases}4x^2-9y^2=36\\ y=mx-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow 4x^2-9m^2x^2-\frac{81}{4}+27mx-36=0$. Imponendo la condizione algebrica di tangenza ad una curva di secondo grado nell’equazione risolvente ottenuta segue:

$$729m^2-4(4-9m^2)\left(-\frac{225}{4}\right)=0\Rightarrow 729m^2+900-2025m^2=0\Rightarrow m=\pm\frac{5}{6}.$$



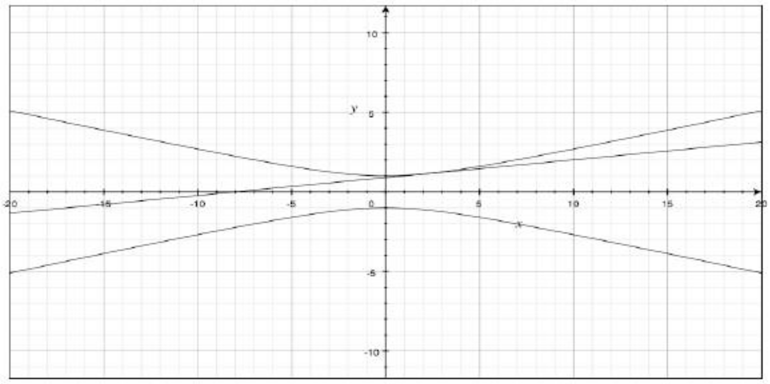
2. *Determina l'area del triangolo che la tangente nel punto* $C(4;1)$ *all'iperbole di equazione* $x^2 - 12y^2 = 4$ *forma con gli assi di simmetria dell'iperbole.*
   - Troviamo la tangente con la formula di sdoppiamento (dopo aver scritto l'equazione dell'iperbole in forma standard): $\frac{x \cdot 4}{4} - \frac{y \cdot 1}{\frac{4}{12}} = 1 \Rightarrow x - 3y - 1 = 0$. Trovate le intersezioni con gli assi di simmetria dell'iperbole (gli assi cartesiani) $A(0;-\frac{1}{3})$ e $B(1;0)$, l'area del triangolo ABO è $\frac{\left|-\frac{1}{3}\right| \cdot 1}{2} = \frac{1}{6}$.



3. *Scrivi l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse y che nel suo punto di coordinate* $\left(2;\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ *ha per tangente la retta di equazione* $x - 4\sqrt{5}y + 8 = 0$.

- Scriviamo l'equazione della retta tangente in modo conforme alla formula di sdoppiamento: $\frac{x}{8}-\frac{4\sqrt{5}y}{8}=-1$ / $\frac{x\cdot 2}{a^2}-\frac{y\cdot\sqrt{5}}{2b^2}=-1$. Comparando i coefficienti a due a due otteniamo

$$\begin{cases}\frac{2}{a^2}=\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{1}{a^2}=\frac{1}{16}\\ \frac{\sqrt{5}}{2b^2}=\frac{4\sqrt{5}}{8}\Rightarrow\frac{1}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\frac{x^2}{16}-y^2=-1.$$



9.7 L'iperbole e le funzioni irrazionali

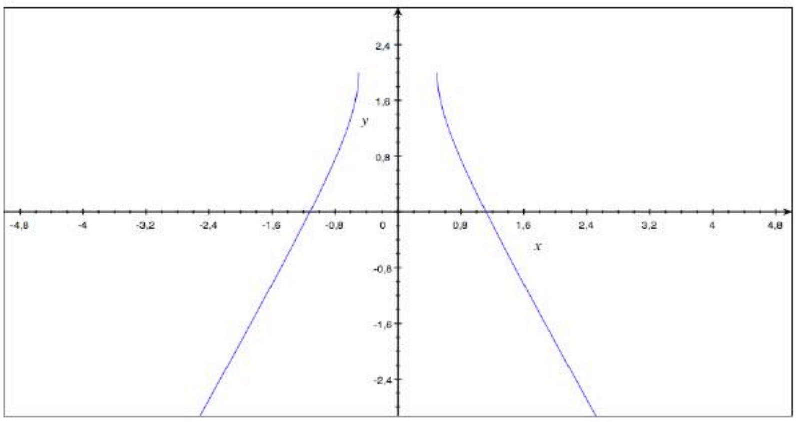
Anche l'iperbole, così come le curve di secondo grado viste fin qui, può essere utilizzata per tracciare il grafico di particolari funzioni irrazionali, come risulta dal seguente esempio.
Consideriamo la funzione $f(x)=2-\sqrt{4x^2-1}$. Le condizioni di esistenza e sul segno delle immagini portano alla seguente delimitazione del piano cartesiano:

$$\begin{cases}4x^2-1\geq 0\\ 2-y\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq-\frac{1}{2}\vee x\geq\frac{1}{2}\\ y\leq 2\end{cases}.$$

Il grafico della funzione coinciderà in questo sottoinsieme del piano cartesiano con quello dell'iperbole ottenuta elevando al quadrato l'espressione analitica della funzione stessa:

$$(y-2)^2=4x^2-1\Rightarrow 4(x-0)^2-(y-2)^2=1:$$

si tratta di un'iperbole con fuochi sull'asse x, centro nel punto di coordinate $(0;2)$, $a=\frac{1}{4}$ e $b=1$.



9.8 L'iperbole equilatera: l'iperbole riferita agli asintoti

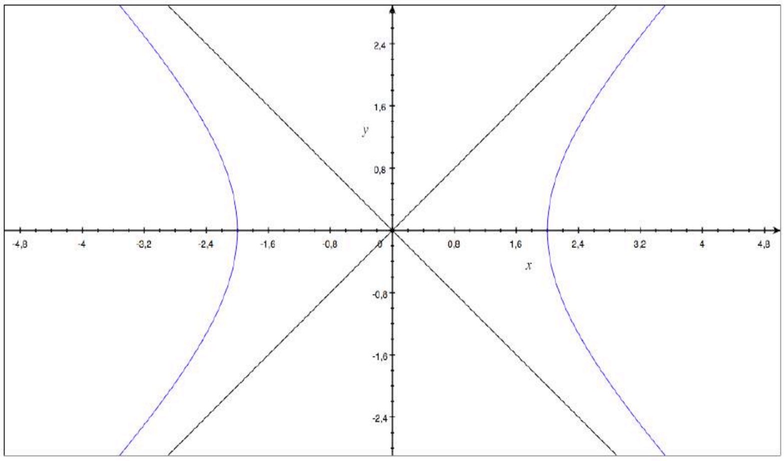
Nel caso particolare in cui gli asintoti dell'iperbole coincidono con le bisettrici dei quadranti del piano cartesiano, l'equazione dell'iperbole diventa:

$$x^2 - y^2 = \pm a^2.$$

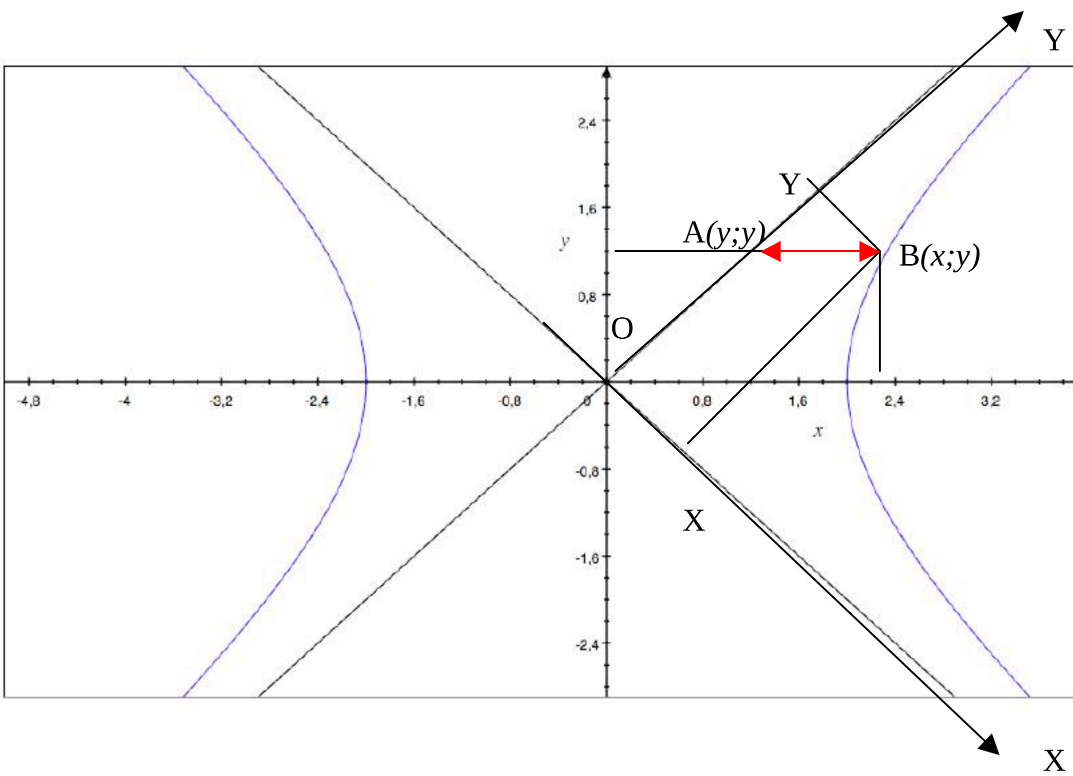
L'eccentricità dell'iperbole equilatera è, quindi,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{c}{b} = \sqrt{2}.$$

Ad esempio, l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 4$ è equilatera con $a = b = 2$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = ae$. Il suo grafico è quindi:



E' possibile riferire l'equazione di un'iperbole equilatera non agli assi cartesiani, bensì agli asintoti. Vediamo come.



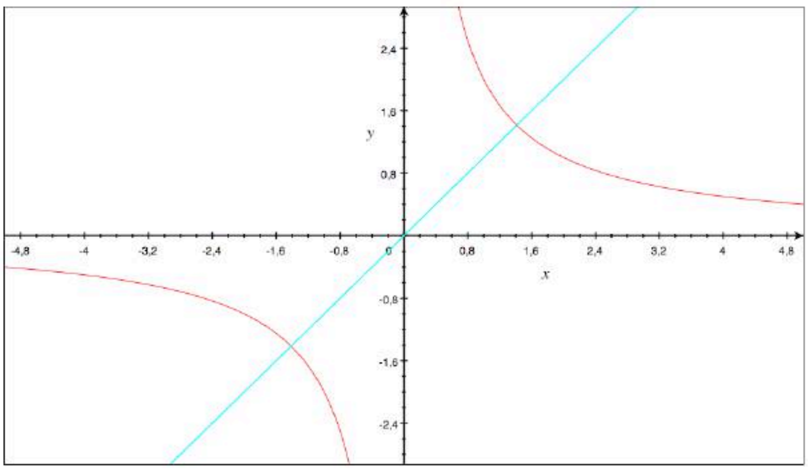
Vogliamo esprimere le coordinate del punto B*(x;y)* appartenente all'iperbole, nel sistema di riferimento avente per assi gli asintoti dell'iperbole. Le coordinate saranno x' e y', distanze (con segno) rispettivamente di X e di Y dall'origine. Ragioniamo sul triangolo rettangolo isoscele ABY rappresentato in figura ed osserviamo che:

$$\begin{cases} OX = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \\ OY = OA + AY = y\sqrt{2} + \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \\ y' = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

. Per scrivere l'equazione dell'iperbole nel nuovo sistema di riferimento, manca soltanto la sostituzione delle nuove coordinate al posto delle vecchie nell'equazione $x^2 - y^2 = a^2$: $\begin{cases} x = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{y'-x'}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\dfrac{y'-x'}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2 \Rightarrow x'y' = \dfrac{a^2}{2}$.

Pertanto l'equazione di un'iperbole equilatera riferita agli asintoti è:

$$xy = \frac{a^2}{2}.$$



Questa trasformazione può essere anche interpretata come una rotazione del grafico dell'iperbole equilatera, riferita agli assi, di un angolo di 45° in senso antiorario. Poiché la rotazione è un "movimento rigido", i parametri che caratterizzano la forma dell'iperbole (eccentricità, distanza focale, asse trasverso) restano inalterati; da questo segue che:

$e = \sqrt{2}$
$c = a\sqrt{2}$

. Nel grafico precedente è rappresentata l'iperbole di equazione $xy = 2$. Se confrontiamo l'equazione $xy = 2$ con la formula generale $xy = \dfrac{a^2}{2}$, osserviamo immediatamente che $\dfrac{a^2}{2} = 2 \Rightarrow a = 2$. La curva incontra la bisettrice del primo e terzo quadrante nei punti di coordinate $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ e $\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$, essendo $a = 2$ la loro distanza dall'origine.

9.9 La funzione omografica

Consideriamo l'iperbole equilatera riferita agli asintoti, di equazione

$$xy = 1,$$

e trasformiamola mediante la trasformazione $\begin{cases} x' = kx \\ y' = hy \end{cases}$: otteniamo l'equazione dell'iperbole

$\left(\frac{x'}{k}\right)\left(\frac{y'}{h}\right) = 1 \Rightarrow x'y' = hk \Rightarrow a' = \sqrt{2hk} = a\sqrt{hk}$. Una trasformazione di questo tipo si dice **affinità**, ed ha la proprietà di trasformare rette in rette, conservare il parallelismo, e trasformare un'ellisse, una parabola, o un'iperbole, in una curva dello stesso tipo.
Se, oltre a cambiare la scala, operiamo anche una traslazione, otteniamo ancora un'iperbole riferita agli asintoti, che può essere descritta dall'equazione:

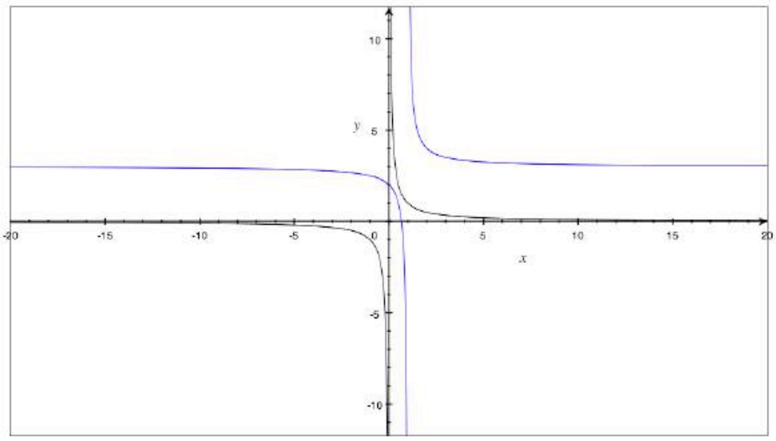
$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

In questo caso si parla di **funzione omografica**.
Il grafico di questa funzione ha centro nel punto di coordinate $\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$. Infatti:

a)Scriviamo la funzione nella forma $y = \frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}$ mediante raccoglimento della variabile *x* al numeratore ed al denominatore . Quando *x* diventa"molto grande", la funzione si avvicina all'asintoto orizzontale $y = \frac{a}{c}$, così come la funzione $y = \frac{1}{x}$ si avvicina all'asintoto $y = 0$: è come se quest'ultima fosse stata *traslata* in verticale di una distanza $\frac{a}{c}$.

b) Analogamente, scriviamo $y = \frac{ax+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}$. quando *x* si avvicina a $-\frac{d}{c}$, la funzione cresce indefinitamente, avvicinandosi sempre più all'asintoto verticale $x = -\frac{d}{c}$, così come la funzione $y = \frac{1}{x}$, quando *x* si avvicina a zero, si avvicina all'asintoto verticale $x = 0$: è come se quest'ultima fosse stata *traslata* in orizzontale di una distanza $-\frac{d}{c}$.

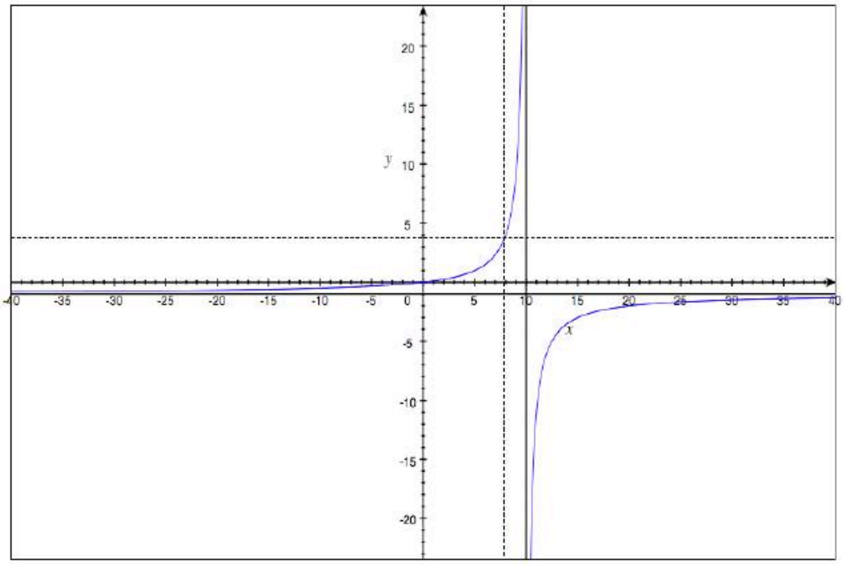
Riportiamo sullo stesso grafico le curve $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{3x-2}{x-1}$ (in blu) di centro $(1;3)$:



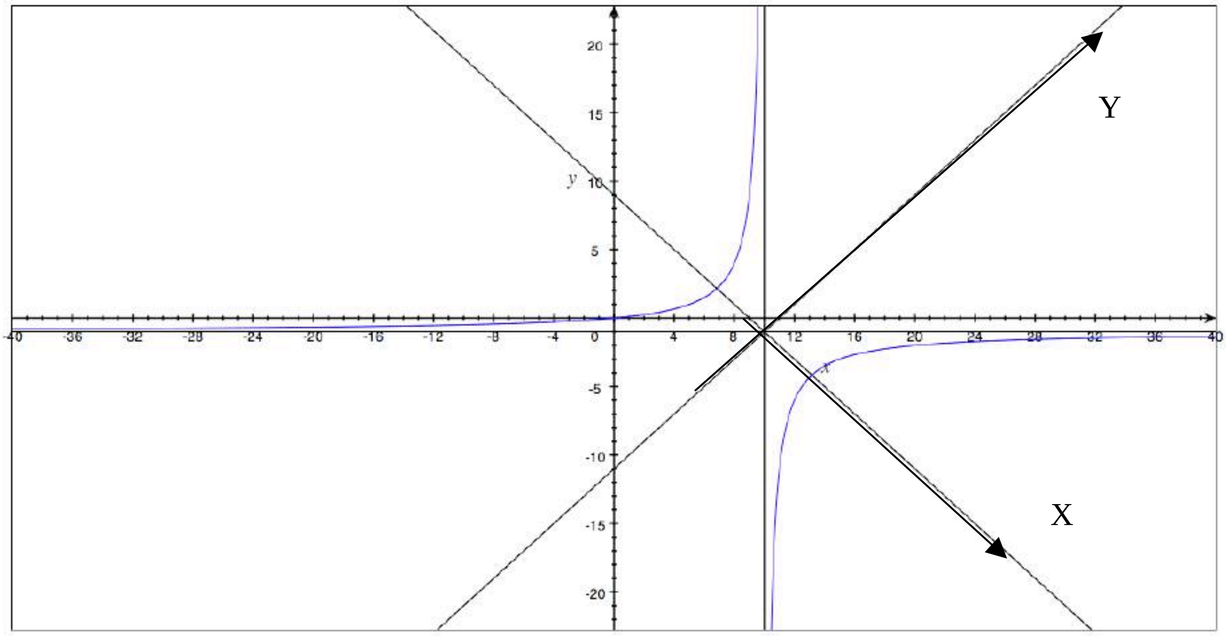
Esempio

Rappresentiamo graficamente la funzione $f(x)=\dfrac{x}{10-x}$.

Si tratta di una funzione omografica di centro $C(10;-1)$, il cui grafico è il seguente:

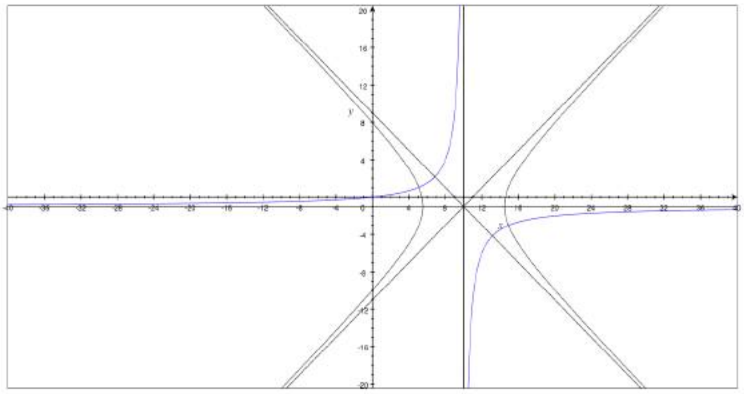


La distanza focale di quest'iperbole è $c=\sqrt{2}a=\overline{CP}$, dove gli estremi del segmento sono il centro ed il punto in cui l'asse X interseca uno dei due rami dell'iperbole.



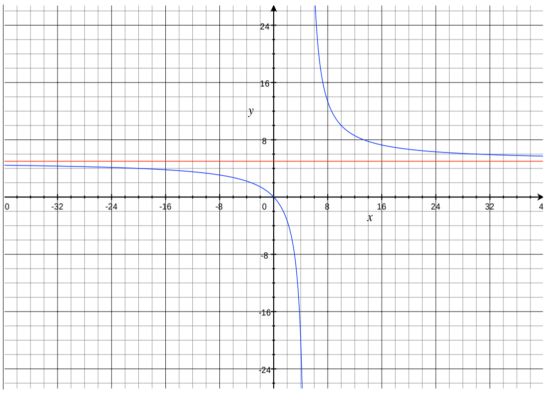
L'asse X ha equazione $y=-x+9$ ed incontra la curva nel punto ottenuto risolvendo il sistema $\begin{cases} y=\dfrac{x}{10-x} \\ y=-x+9 \end{cases} \Rightarrow -x+9=\dfrac{x}{10-x} \Rightarrow x^2-20x+90=0 \Rightarrow x=10\pm\sqrt{10} \Rightarrow y=-1\mp\sqrt{10}$. La lunghezza di *a* si determina osservando che $a=\left(10+\sqrt{10}-10\right)\sqrt{2}=\sqrt{20}$. Dunque, l'equazione dell'iperbole nel nuovo sistema di riferimento è $X^2-Y^2=20$. Ruotando il nuovo sistema di riferimento di 45° in senso antiorario, otteniamo l'equazione dell'iperbole, stavolta riferita agli assi:

$(x-10)^2-(y+1)^2=20$.



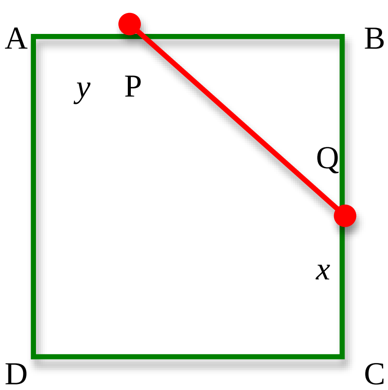
9.10 L'iperbole nello studio dell'ottica geometrica

Com'è noto dallo studio dell'ottica geometrica, la *relazione dei punti coniugati* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{f}$ lega tra loro la distanza *x* di un oggetto dal vertice dello specchio sferico (o dal centro di una lente), la distanza *y*, sempre dal vertice o dal centro della lente, a cui si forma l'immagine, e la distanza focale dello strumento ottico. Riscriviamo la relazione in un altro modo: $\frac{1}{y}=\frac{1}{f}-\frac{1}{x}=\frac{x-f}{xf}\Rightarrow y=\frac{xf}{x-f}$; la distanza a cui si forma l'immagine, in funzione della posizione iniziale dell'oggetto, può essere letta sul grafico della funzione omografica ottenuta. Ad esempio, se la distanza focale è $f=5cm$, si ha il seguente grafico:



Problema

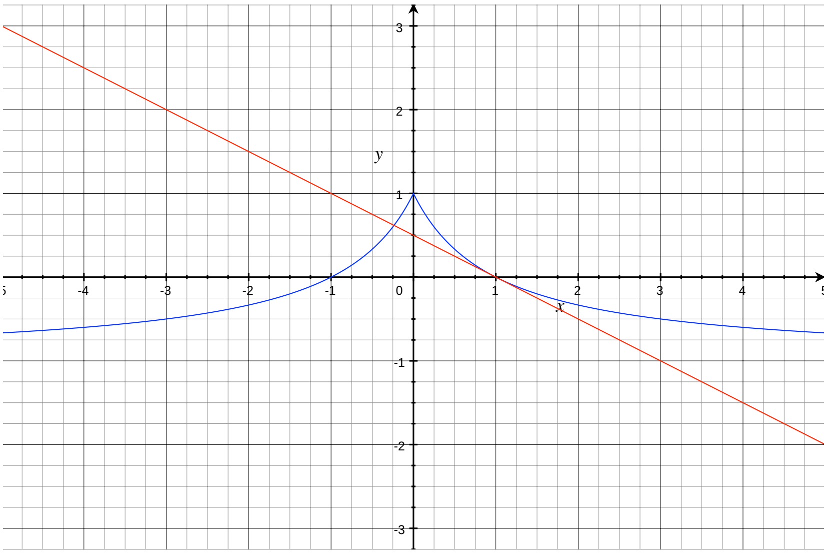
E' dato il quadrato ABCD, di lato unitario. Siano P un punto del lato AB, e Q un punto del lato BC, tali che $\overline{AP}:=y$, $\overline{QC}:=x$, e $\overline{QP}:=x+y$. Dopo aver dimostrato che sussiste la relazione $y=\frac{1-x}{1+x}$, si tracci il grafico della funzione $y=\frac{1-|x|}{1+|x|}$, e se ne determini l'equazione della tangente nel punto $P(1,0)$.



Si ha: $(1-x)^2+(1-y)^2=(x+y)^2$ da cui segue $xy+x+y-1=0\Rightarrow y=\frac{1-x}{1+x}$.

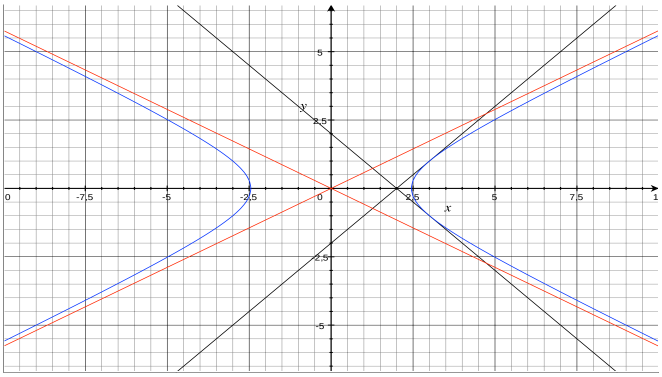
- Il grafico della funzione $y=\frac{1-|x|}{1+|x|}$ può essere dedotto a partire da quello della funzione $y=\frac{1-x}{1+x}$, riflettendo la parte situata nel semipiano positivo delle ascisse, rispetto all'asse *y*. L'equazione della tangente si ottiene imponendo che il sistema $\begin{cases} y=\frac{1-x}{1+x} \\ y=m(x-1) \end{cases}$ ammetta una sola soluzione: $0=\Delta=(2m+1)^2 \Rightarrow m=-\frac{1}{2}$.

  L'equazione della tangente è quindi $x+2y-1=0$.



1. Scrivere l'equazione generale della famiglia d'iperboli con fuochi sull'asse *x*, centro nell'origine degl'assi cartesiani, e tangenti alla retta $y=x-2$. Si trovi l'equazione di quella avente per asintoti le rette $y=\pm\frac{x}{\sqrt{3}}$.

   - $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=x-2 \end{cases} \Rightarrow 0=\frac{\Delta}{4}=4a^2b^2+a^2b^4-a^4b^2 \Rightarrow b^2=a^2-4 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-4}=1$. Tra queste, quella avente per asintoti le rette $y=\pm\sqrt{3}x$ si determina imponendo che $\frac{a^2-4}{a^2}=\frac{1}{3} \Rightarrow a^2=6 \Rightarrow \frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$.



Esercizi

1. E' data l'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = 2$.
   a) La si rappresenti graficamente.
   b) Si determini l'equazione generale delle circonferenze tangenti all'iperbole nel punto di coordinate $(\sqrt{2};0)$ in funzione del generico raggio *r*, e si scriva l'equazione della circonferenza passante per $(-\sqrt{2};0)$. *Suggerimento: due curve sono tangenti in un punto se hanno tangente in comune in quel punto.*
   c) Si riferisca l'iperbole agli asintoti e se ne scriva l'equazione (rotazione di 45° in senso antiorario).
   d) Si determini l'area del generico triangolo isoscele, avente un vertice nel punto di coordinate $(2;2)$, e gli altri due sul ramo dell'iperbole riferita agli asintoti, contenuto nel primo quadrante. *Suggerimento: la base è il segmento delimitato dai punti intersezione dell'iperbole con la retta* $x + y = k, \quad k > 2$. *Esprimere l'area in funzione del parametro k*).

2. Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera, con un fuoco coincidente con il centro di una circonferenza, tangente agli asintoti nel I e IV quadrante, e di raggio 2. Determinare inoltre:
   a) l'equazione della circonferenza,
   b) i punti P e Q intersezione dell'iperbole con la circonferenza,
   c) le equazioni delle rette tangenti all'iperbole nei punti P e Q (*formula utile:* $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$),
   d) le coordinate del punto R sulla bisettrice del I e III quadrante tale che l'area del triangolo PQR misuri 8,
   e) l'equazione dell'iperbole ruotata di 45° in senso antiorario.

3. Nel fascio di rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante, individuare le tangenti all'iperbole di equazione $4x^2 - 9y^2 - 3600 = 0$.

4. E' dato il fascio di funzioni omografiche $y = \frac{kx+3}{(k-1)x-4}$ al variare di *k*.
   a) Si studi tale fascio, individuandone le rette ed il luogo dei centri.
   b) Per $k = 0$ si scriva l'equazione dell'iperbole equilatera nel sistema di riferimento con origine coincidente con il centro della funzione omografica ottenuta, ed assi paralleli alle bisettrici.

5. Sia A il punto di ascissa negativa in cui l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ interseca l'asse x, e siano P e Q ,rispettivamente, i punti del primo e quarto quadrante in cui l'ellisse incontra la parallela all'asse y condotta dal fuoco F di ascissa positiva. Dopo aver determinato i punti A,P,Q,F si determini:
   a) Il baricentro del triangolo PAQ,
   b) L'equazione della parabola passante per P,Q,M, essendo M il punto medio di $\overline{AP}$,
   c) L'equazione della circonferenza, di centro in *F*, e tangente alla mediana uscente dal punto Q,
   d) l'equazione dell'iperbole con un fuoco in F ed avente per asintoti le mediane uscenti da Pe da Q.

6. Calcolare l'area del quadrilatero avente i vertici nei centri delle circonferenze di raggio $\sqrt{2}$, tangenti agli asintoti dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$.

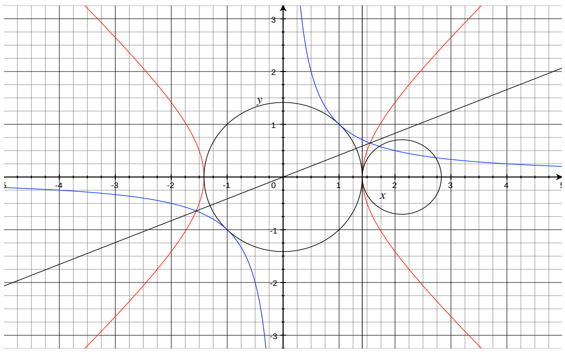
7. Data l'equazione dell'iperbole $xy = 8$, trovare le coordinate dei fuochi.

8. Della seguente funzione: $f(x)=\dfrac{2x-1}{4-x}$
   a. si determinino gli asintoti orizzontale e verticale,
   b. le intersezioni con gli assi,
   c. Si tracci il grafico della funzione.

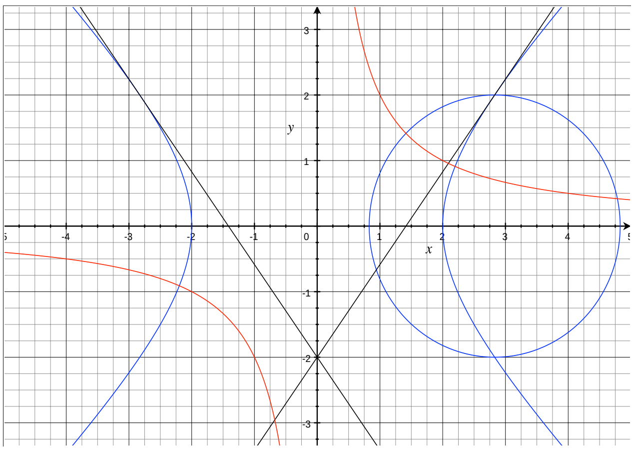
9. Dopo aver definito il luogo geometrico dei punti del piano rappresentato, al variare del parametro e, dall'equazione $e|y+2|=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$:
   a) Si tracci il grafico del luogo geometrico nel caso in cui $e=1$, e quello delle tangenti t,t' alla curva ottenuta, condotte dal punto $P(0,-2)$.
   b) Si scriva l'equazione della famiglia d'iperboli con i fuochi sull'asse *y*, il centro nel punto $P(0,-2)$, ed aventi per asintoti le rette t,t'.
   c) Tra le iperboli della famiglia $x^2-(y+2)^2+a^2=0$, si determini quella che interseca la parabola $x^2=8y$ in quattro punti, vertici di un trapezio di area uguale a $4a\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$.
   d) Scrivere l'equazione dell'ellisse con i fuochi nei punti $F_1(1,2)$ e $F_2(-1,2)$, tangente alla retta $y=1$.

Soluzioni

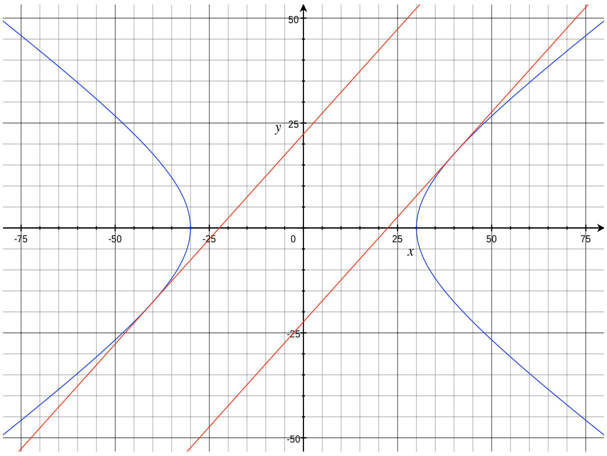
1. a) $\left[x-\left(\sqrt{2}\pm r\right)\right]^2+(y-0)^2=r^2$; b) $x^2+y^2=2$; c) $xy=1$; d) $A=\dfrac{|4-k|}{2}\sqrt{k^2-4}$.



2. $x^2-y^2=4$; a) $x^2+y^2-4\sqrt{2}x+4=0$; b) $P,Q\left(2\sqrt{2},\pm 2\right)$; c) $y=\pm\sqrt{2}x-2$; d) $R\left(2\sqrt{2}\pm 4,2\sqrt{2}\pm 4\right)$; e) $xy=2$.



3. $y=x\pm 10\sqrt{5}$.



4. Il centro del fascio ha coordinate $C\left(\frac{4}{k-1};\frac{k}{k-1}\right)$, le rette si ottengono ponendo

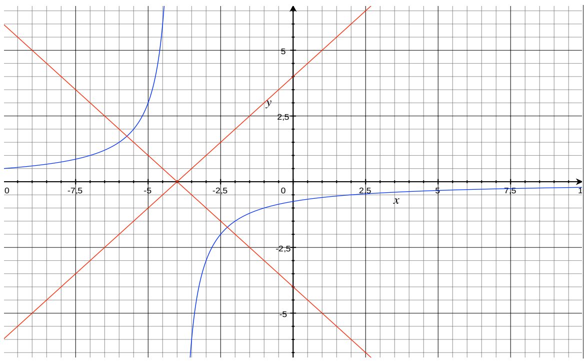
$k-1=0 \Rightarrow y=\frac{x+3}{-4}$. Il luogo geometrico dei centri si ottiene eliminando il parametro k nel

sistema formato dalle coordinate dei centri: $\begin{cases} x=\frac{4}{k-1} \\ y=\frac{k}{k-1} \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{k}{k-1}\cdot\frac{k-1}{4} \Rightarrow k=\frac{4y}{x}$.

L'equazione del luogo è quindi $y=\frac{x}{4}+1$. Per $k=0$ la funzione omografica ha la forma

$y=\frac{3}{-x-4}$. Il centro è $C(-4;0)$. E' possibile ottenere due iperboli equilatere con centro

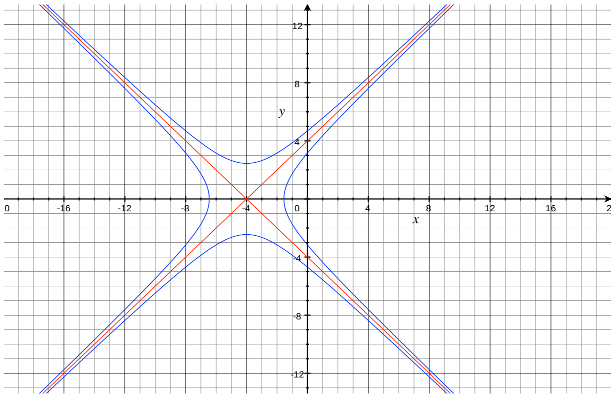
$C(-4;0)$, in base all'attribuzione del ruolo di asse X e Y alle rette $y=\pm(x+4)$.



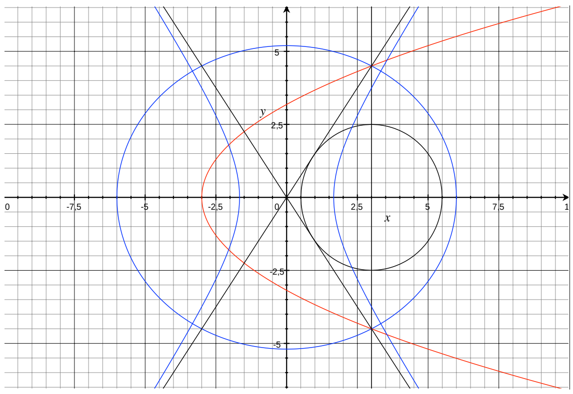
Scegliendo come asse X la retta $y=x+4$, il parametro a dell'iperbole si può ottenere come

distanza $\overline{PC}$, dove $P=\begin{cases} y=-(x+4) \\ y=\frac{3}{-(x+4)} \end{cases} \Rightarrow P\left(-4-\sqrt{3};\sqrt{3}\right),\left(-4+\sqrt{3},-\sqrt{3}\right) \Rightarrow \overline{PC}=a=\sqrt{6}$.

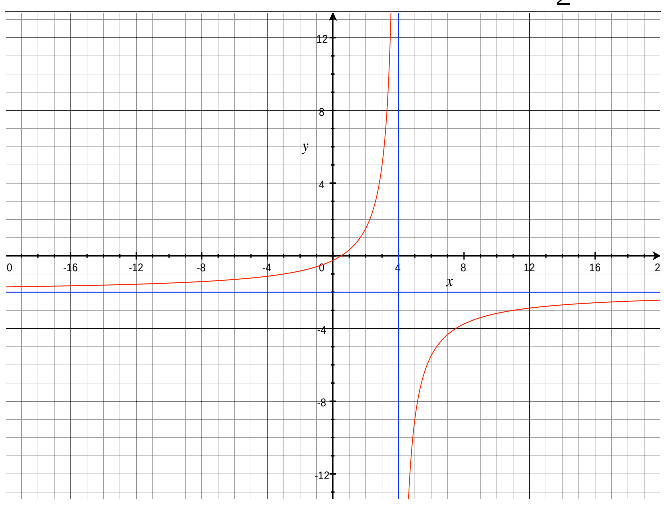
Quindi l'iperbole ha equazione $(x+4)^2-y^2=-6$.



5. $A(-6,0);P\left(3,\frac{9}{2}\right);Q\left(3,-\frac{9}{2}\right);F(3;0)$; a) $G(0;0)$; b) $x=\frac{24}{81}y^2-3$; c) $(x-3)^2+y^2=\frac{81}{13}$; d) $\frac{13x^2}{36}-\frac{13y^2}{81}=1$.

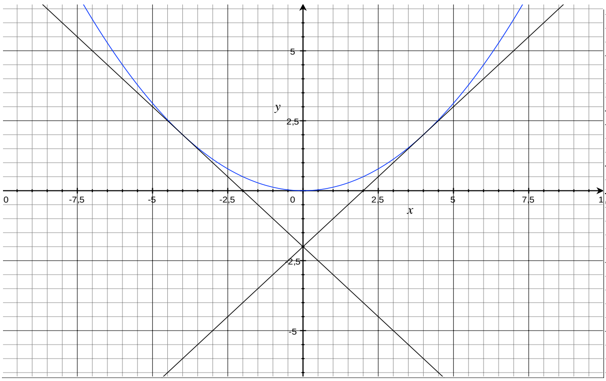


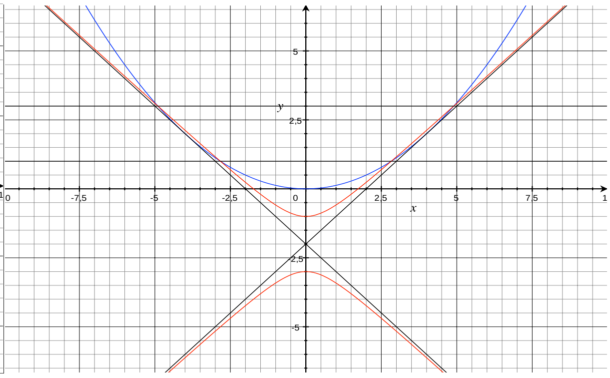
6. $A=8$.
7. $F\left(\pm 4\sqrt{2};0\right)$.
8. Asintoto orizzontale $y=-2$; asintoto verticale $x=4$; *x*-int. $x=\frac{1}{2}$; *y*-int. $y=-\frac{1}{4}$.



9.

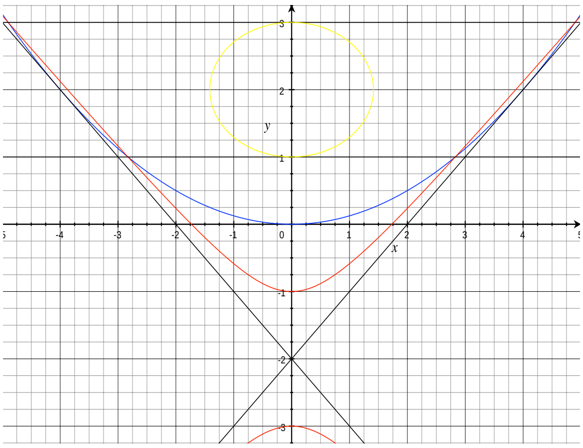
- *Si tratta del luogo geometrico dei punti del piano il cui rapporto delle distanze dal punto* $F(0,2)$ *e dalla retta* $y=-2$ *è costante ed è uguale a* e.
- $t,t':\begin{cases} x^2=8y \\ y=mx-2 \end{cases} \Rightarrow x^2-8mx+16=0 \Rightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow m=\pm 1 \Rightarrow \begin{matrix} t: y=x-2 \\ t': y=-x-2 \end{matrix}$.





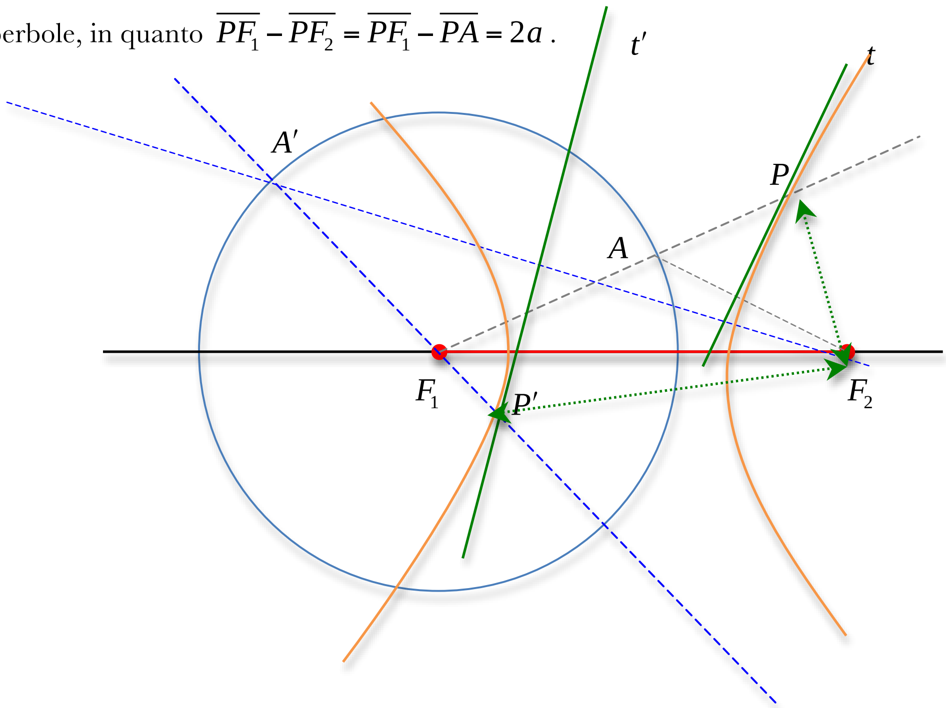
- $x^2-(y+2)^2=-a^2$.
- $\begin{cases} x^2-(y+2)^2=-a^2 \\ x^2=8y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \left(2\sqrt{4-2a},2-a\right) & \left(-2\sqrt{4-2a},2-a\right) \\ \left(2\sqrt{4+2a},2+a\right) & \left(-2\sqrt{4+2a},2+a\right) \end{matrix}$. *L'area del trapezio i cui vertici coincidono con i punti intersezione della generica iperbole con la parabola è quindi:* $A=\frac{1}{2}\left(4\sqrt{4-2a}+4\sqrt{4+2a}\right)(2a)=4a\left(\sqrt{4-2a}+\sqrt{4+2a}\right)=4a\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\Leftrightarrow a=1$.

- *La semi-distanza focale ed il semi-asse minore sono tali che:* $\begin{cases} c=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow a^2=2 \Rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{(y-2)^2}{1}=1$.



9.12 Costruzione dell'iperbole con riga e compasso

Si traccia la circonferenza di raggio $2a$ e centro nel fuoco F_1, e si sceglie un punto A su di essa. Sia t l'asse del segmento $\overline{AF_2}$; P, intersezione della semiretta per F_1 e passante per A, con l'asse t, appartiene all'iperbole, in quanto $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{PF_1} - \overline{PA} = 2a$.



Ripetendo la costruzione per il punto A', sia t' l'asse del segmento $\overline{A'F_2}$; P', intersezione della retta per F_1 e passante per A', con l'asse t', appartiene anch'esso all'iperbole poiché $\overline{P'F_2} - \overline{P'F_1} = \overline{P'A} - \overline{P'F_1} = 2a$.

Con la costruzione sopra abbiamo determinato due punti appartenenti ai due rami distinti dell'iperbole, luogo geometrico tale che $\left|\overline{PF_2} - \overline{PF_1}\right| = 2a$.