CAPITOLO 3
DERIVATE
3.1 Funzioni derivabili e primi risultati

Introdotte per risolvere il cosiddetto *Problema delle tangenti*, le derivate hanno permesso di definire rigorosamente il concetto di *velocità istantanea*.
Preliminare al concetto di derivata di una funzione è quello di *rapporto incrementale.*
Definizione. Si definisce **rapporto incrementale** della funzione f, relativo al punto x_0, il rapporto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Geometricamente, questa grandezza rappresenta il **coefficiente angolare** della retta **secante** il grafico della funzione, passante per i punti $(x_0;f(x_0))$ e $(x_0+h;f(x_0+h))$. Quando $h \to 0$, la secante si "avvicina" alla **tangente** al grafico della funzione nel punto di coordinate $(x_0;f(x_0))$.
Questo "avvicinamento" è reso possibile da un'operazione di passaggio al limite. In particolare:
Definizione. Si definisce **derivata prima della funzione nel punto** x_0, e si denota con $f'(x_0)$, il valore, se esiste ed è finito del limite del rapporto incrementale per $h \to 0$. In simboli:

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Una definizione alternativa di rapporto incrementale è la seguente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

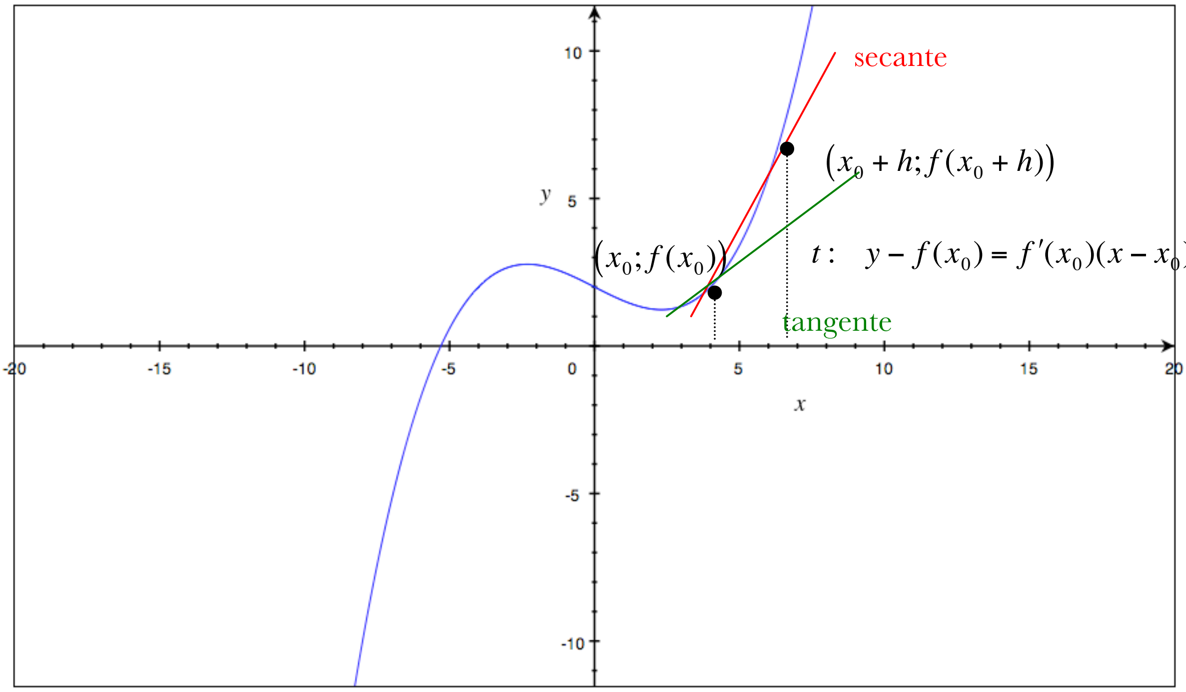
e conduce alla definizione di derivata prima:

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Sono presenti in letteratura anche le seguenti notazioni usate per indicare la derivata prima di una funzione: y', f_x, $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ Df ,...
Le due definizioni sono equivalenti in virtù della relazione $x - x_0 := h$.
Il significato geometrico della derivata prima di una funzione in un punto x_0, è quindi quello di rappresentare il **coefficiente angolare** della **tangente** al grafico della funzione nel punto di coordinate $(x_0;f(x_0))$.
L'equazione della **retta tangente** al grafico della funzione nel punto di coordinate $(x_0;f(x_0))$ è:

$$t: \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0).$$

Nel grafico seguente si illustrano i concetti di rapporto incrementale e derivata prima di una funzione dal punto di vista geometrico.



Grazie al concetto di derivata è quindi possibile allargare il campo delle soluzioni del cosiddetto *Problema delle tangenti* alle curve grafico di funzioni, a patto che queste siano sufficientemente *lisce*, ovvero tali da possedere la retta tangente al loro grafico nel punto considerato. Per questo scopo si introduce la seguente:
Definizione. Una funzione si dice **derivabile in** x_0 se ammette ivi derivata prima.

Osservazione. La funzione valore assoluto non è derivabile nell'origine, dal momento che il limite destro del rapporto incrementale è diverso dal limite sinistro:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1 \quad \neq \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x-0}{x-0} = -1.$$

I punti in cui si annulla la derivata prima sono punti in cui la tangente è *parallela* all'asse delle ascisse. Vedremo in seguito che, con ipotesi aggiuntive, questi punti rappresentano punti di *massimo* o di *minimo* per la funzione data. Per ora diamo la seguente:
Definizione. Un punto x_0 si dice **stazionario** se $f'(x_0) = 0$.
Un legame importante esistente tra le funzioni continue e le funzioni derivabili è sancito dal ***Teorema (continuità delle funzioni derivabili)***. Una funzione derivabile in un punto x_0 è ivi continua.

Dimostrazione. Per ipotesi esiste finito il $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, da cui segue

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0,$$ e

quindi $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Osservazione. La funzione valore assoluto costituisce un esempio di funzione continua in un punto, ma ivi *non* derivabile.

Esercizi
Si calcoli la derivata prima delle seguenti funzioni mediante la definizione nel punto indicato.

1. $f(x)=x^2+1; \quad x=0$ $\qquad f'(0)=0$;

2. $f(x)=\sqrt{3x-1}; \quad x=3$ $\qquad f'(3)=\frac{3\sqrt{8}}{16}$;

3. $f(x)=\log(2x); \quad x=\frac{1}{2}$ $\qquad f'\left(\frac{1}{2}\right)=2$;

4. $f(x)=e^{2x}; \quad x=0$ $\qquad f'(0)=2$;

5. $f(x)=\sin x; \quad x=\frac{\pi}{2}$ $\qquad f'(0)=0$.

3.2 Derivate fondamentali

Nella pratica non è molto comodo l'utilizzo della definizione per il calcolo "rapido" della derivata di una funzione. Al fine di calcolare la derivata di una funzione *qualsiasi*, è possibile determinare la derivata delle funzioni più "rappresentative" e, soprattutto, utilizzare dei teoremi che ci permettono di calcolare la derivata di una funzione ottenuta da altre mediante le quattro operazioni, la composizione, oppure come inversa di una funzione.

1. $f(x)=c \Rightarrow f'(x)=0$.
   - $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{c-c}{h}\equiv 0.$
2. $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$.
   - $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}\equiv 1.$
3. $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$.
   - $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}h^i x^{n-i}-x^n}{h}=$$
     $$\lim_{h\to 0}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\binom{n}{i}h^i x^{n-i}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hnx^{n-1}+\sum\limits_{i=2}^{n}\binom{n}{i}h^i x^{n-i}}{h}=nx^{n-1}.$$
4. $f(x)=a^x \Rightarrow f'(x)=a^x\ln a$. *Osservazione:* $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$.
   - $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\lim\limits_{h\to 0}\frac{(a^h-1)}{h}=a^x\ln a.$
5. $f(x)=\log_a x \Rightarrow f'(x)=\frac{\ln a}{x}$. *Osservazione:* $f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$.
   - $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a x\left(1+\frac{h}{x}\right)-\log_a x}{h}=$$
     $$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a x+\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)-\log_a x}{h}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\ln a}.$$
6. $f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$.

- $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}=\sin x\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=\cos x.$$

7. $f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$.

- $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin h\sin x-\cos x}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h}=\cos x\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)}{h}-\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=-\sin x.$$

3.3 Teoremi per il calcolo delle derivate

In tutti i teoremi che seguono, le funzioni sono definite in un intorno del punto x_0.

Teorema 1. Se f e g sono due funzioni derivabili in x_0, allora: $D(f\pm g)=Df\pm Dg$.

Dimostrazione. $\lim_{x\to x_0}\frac{(f\pm g)(x)-(f\pm g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\pm\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0).$

Osservazione 1. La dimostrazione sfrutta il teorema del limite della somma.

Teorema 2. Se f e g sono due funzioni derivabili in x_0, allora: $D(f\cdot g)=Df\cdot g+Dg\cdot f$.

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$\lim_{x\to x_0}g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0).$$

Osservazione 2. Oltre ad aggiungere e togliere il termine $f(x_0)g(x)$, la dimostrazione fa uso di alcuni dei teoremi sul calcolo dei limiti (quali?), e del fatto che una funzione derivabile in un punto è ivi continua: $\lim_{x\to x_0}g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)g(x_0)$.

Teorema 3. Se f e g sono due funzioni derivabili in x_0 con $g(x_0)\neq 0$, allora

$$D\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{Df\cdot g-Dg\cdot f}{g^2}.$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}=$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))g(x_0)-f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\cdot\left(\frac{(f(x)-f(x_0))g(x_0)}{(x-x_0)}-\frac{f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{(x-x_0)}\right)$$
$$\frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Esercizio. Dimostrare il seguente:

Corollario 3. (Derivata del reciproco di una funzione) $D\left(\frac{1}{f}\right)=-\frac{f'}{f^2}$.

La formula della derivata del quoziente permette di derivare la funzione tangente dell'angolo:

8. $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos^2 x-(-\sin^2 x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Teorema 4. (Derivata della funzione composta). Se *f* è derivabile in un intorno di $g(x_0)$, con $g(x) \neq g(x_0)$, e *g* è derivabile in x_0, allora $D(f(g(x_0)) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Dimostrazione. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(f(g(x)) - f(g(x_0)))(g(x) - g(x_0))}{(g(x) - g(x_0))(x - x_0)} = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Osservazione 4. In questo teorema si suppone, ovviamente, che *f* sia definita in un intorno di $g(x_0)$; inoltre l'immagine della funzione *g* deve essere contenuta nell'insieme di definizione della funzione *f*. Se poniamo $z = g(x)$ e $z_0 = g(x_0)$ la dimostrazione può essere scritta nella forma:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ z \to z_0}} \frac{(f(z)) - f(z_0))(g(x) - g(x_0))}{(z - z_0)(x - x_0)} = f'(z_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Esercizio. Si dimostri il teorema 4 nel caso generale in cui può essere che $g(x) = g(x_0)$ per qualche $x \neq x_0$. *Suggerimento*: *si ragioni sulla funzione* $h(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}; & z \neq z_0 \\ f'(z_0); & z = z_0 \end{cases}$.

Con questo risultato è possibile derivare le seguenti funzioni:

9. $f(x) = x^\alpha \quad \alpha \in R; x > 0$.
   - Posto $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \Rightarrow f'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \dfrac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$.
10. $f(x) = g(x)^{h(x)}$ (laddove la funzione è definita)
    - Posto $f(x) = g(x)^{h(x)} = e^{g(x) \ln h(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x) \ln h(x)} \left[g'(x) \ln h(x) + g(x) \dfrac{h'(x)}{h(x)} \right]$.

Teorema 5. (Derivata della funzione inversa) Se la funzione *f* è invertibile nel punto x_0 e ivi derivabile con derivata diversa da zero, allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e risulta $f^{-1'}(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

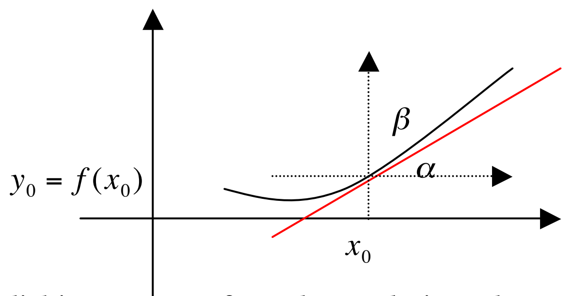
Dimostrazione. Per definizione di funzione inversa si ha, per ogni $x \in I(x_0)$, $f^{-1}(f(x)) = x$, da cui segue, dalla formula di derivazione della derivata composta, $f^{-1'}(f(x))f'(x) = 1 \Rightarrow f^{-1'}(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Osservazione 5.1 A titolo di esempio, proviamo a derivare l'inversa della funzione $f(x) = x^3$ nell'origine. Risulta $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$, quindi la formula $f^{-1'}(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ non è applicabile. La conferma è data in questo caso dalla derivata della funzione inversa

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f^{-1'}(x) = \dfrac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}$ che non è derivabile nell'origine (pur essendo ivi definita e continua).

Osservazione 5.2 L'utilità della formula $f^{-1'}(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ è rappresentata dal fatto che essa rende possibile il calcolo della derivata della funzione inversa senza dover necessariamente conoscere l'espressione analitica della stessa.

Osservazione 5.3. (Interpretazione geometrica)



$$f'(x_0) = \tan\alpha$$
$$f^{-1'}(y_0) = \tan\beta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Applichiamo questa formula per derivare le seguenti funzioni:

11. $f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos(y)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y = \sin x.$

12. $f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{-\sin(y)} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y = \cos x.$

13. $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$. Ora, poiché

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$, allora

$f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \dfrac{1}{1+\tan^2(\tan x)} = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad y = \tan x.$

Esercizi

Determinare la derivata prima delle seguenti funzioni:

1. $y = (3x^2-2)^4$ $\qquad y' = 24x\left(3x^2-2\right)^3$

2. $y = \dfrac{2}{3(3x-2)^2}$ $\qquad y' = -4\left(3x-2\right)^{-3}$

3. $y = 3\sqrt{2-x}$ $\qquad y' = \dfrac{-3}{2\sqrt{2-x}}$

4. $y = (1-x^2)(\sqrt{1-2x})$ $\qquad y' = \dfrac{5x^2-2x-1}{\sqrt{1-2x}}$

5. $y = \dfrac{\sqrt{6x-x^2}}{x}$ $\qquad y' = -\dfrac{3}{x\sqrt{6x-x^2}}$

6. $y = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

7. $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$ $\qquad y' = -\dfrac{\sin x}{2\left|\sin x\right|}$

8. $y = 4\cos^2 x^2$ $\qquad y' = -8x\sin 2x^2$

9. $y = x^{2x^2+1}$ $\qquad y' = x^{2x^2+1}\left(4x\ln x + 2x + \dfrac{1}{x}\right)$

10. $y = \log\left|\dfrac{x+1}{x}\right|$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{x^2+x}$

11. $y=(3x+4)^5$ $\qquad y'=15(3x+4)^4$

12. $y=\dfrac{2}{(1-x)^3}$ $\qquad y'=6(1-x)^{-4}$

13. $y=\sqrt{(1-2x)^3}$ $\qquad y'=-3\sqrt{1-2x}$

14. $y=x(\sqrt{1-x^2})^3$ $\qquad y'=(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

15. $y=\dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ $\qquad y'=\dfrac{x^2-x+4}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$

16. $y=\log\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ $\qquad y'=\dfrac{1}{x+x^3}$

17. $y=\arctan\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ $\qquad y'=\dfrac{1}{x^2+(1-x)^2}$

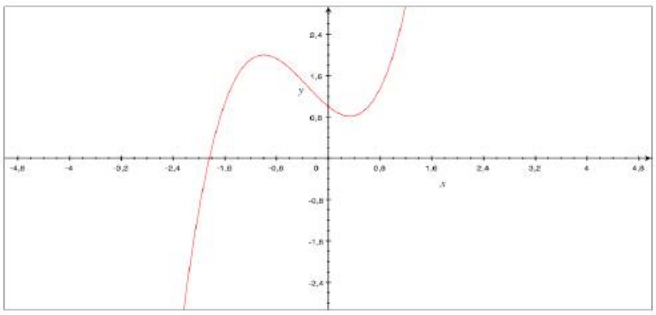
18. $y=\tan^2(2x)$ $\qquad y'=\dfrac{4\tan 2x}{\cos^2 2x}$

19. $y=x^{2x}$ $\qquad y'=x^{2x}(2\ln x+2)$

20. $y=\log|x|+\log|2x+1|$ $\qquad y'=\dfrac{4x+1}{2x^2+x}$

3.4 I teoremi del calcolo differenziale e i problemi di "minimax"

Osservando il grafico della funzione seguente, si nota che nei punti di *massimo* e di *minimo* la tangente è *parallela* all'asse delle ascisse: in questi punti la derivata è *nulla*.



Il teorema di *Fermat*, come vedremo, è il risultato che formalizza quanto appena osservato; prima di darne l'enunciato è opportuno richiamare il concetto di massimo (minimo) relativo.

Definizione. Un punto x_0 si dice di *massimo (minimo) relativo* per la funzione *f* se esiste un intorno $I(x_0) \mid f(x) \le f(x_0), \quad (f(x) \ge f(x_0)), \quad \forall x \in I(x_0)$.

Teorema ***(Fermat)***. Sia $x_0 \in (a;b)$ un punto di massimo (minimo) relativo per la funzione $f : (a;b) \to R$. Se la funzione è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Consideriamo il rapporto incrementale $\dfrac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0}$. Dal momento che x_0 è un punto di massimo relativo si ha $\begin{array}{l} \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} \ge 0; \quad x > x_0 \\ \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} \le 0; \quad x < x_0 \end{array}$. Passando al limite per $x \to x_0$ si ha $\begin{array}{l} f'_+(x_0) \ge 0 \\ f'_-(x_0) \le 0 \end{array}$ e, poiché la funzione è derivabile in x_0, si conclude che $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = 0$.

Osservazione. Il teorema di Fermat fornisce una condizione necessaria ma non sufficiente per la ricerca di eventuali punti di massimo o minimo relativi di una funzione. Ad esempio, la già citata $f(x) = x^3$ ha derivata nulla nell'origine, pur non essendo questa un punto di massimo o minimo relativo. D'altro canto esistono funzioni che presentano punti di massimo o di minimo relativo dove queste *non* sono derivabili, basti pensare alla funzione $f(x) = |x|$. In definitiva il teorema di Fermat è un utile strumento per indagare l'esistenza di eventuali punti di massimo e di minimo relativi, unitamente all'analisi della situazione nei punti di non derivabilità ed agli estremi dell'insieme di definizione.

Teorema ***(Rolle)***. Sia $f : [a;b] \to R$ continua in $[a;b]$, derivabile in $(a;b)$, con $f(a) = f(b)$. Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a;b)$ in cui $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass esistono $M = \max\limits_{[a;b]} f$ e $m = \min\limits_{[a;b]} f$, rispettivamente massimo e minimo assoluti della funzione nell'intervallo di definizione. Se i valori massimo e minimo vengono assunti negli estremi dell'intervallo, dall'ipotesi $f(a) = f(b)$ segue che la funzione è costante in $[a;b]$ per cui $f'(x_0) = 0, \quad \forall x \in [a;b]$. Se i valori sono assunti all'interno, ad esempio sia $x_0 \in (a;b)$ con $f(x_0) = M$, per la derivabilità della funzione in $(a;b)$ si ha, dal teorema di Fermat, $f'(x_0) = 0$.

Teorema ***(del valor medio o di Lagrange)***. Sia $f : [a;b] \to R$ continua in $[a;b]$, derivabile in $(a;b)$. Allora esiste $x_0 \in (a;b)$ in cui $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Dimostrazione. Il teorema afferma che esiste almeno un punto del grafico della funzione in cui la tangente è parallela alla retta congiungente i punti $(a; f(a))$ e $(b; f(b))$. Per questo scopo consideriamo la funzione ausiliaria $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Geometricamente questa funzione misura lo scarto tra la funzione *f* e la retta passante per i punti $(a; f(a))$ e $(b; f(b))$. Questa funzione possiede le stesse proprietà di regolarità della funzione *f*, inoltre $g(a) = f(a) = g(b)$. Per il teorema di Rolle esiste quindi almeno un punto $x_0 \in (a;b)$, tale che

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Esercizio

Applicando il Teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ sull'intervallo $[1;2]$, ottenere una stima per $\sqrt[3]{2}$.

Si ha $\sqrt[3]{2} - 1 = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}; \quad z \in (1;2) \Rightarrow \quad \sqrt[3]{2} = 1 + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{z^2}} \Rightarrow 1 + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}} \le \sqrt[3]{2} \le 1 + \dfrac{1}{3}$.

Conseguenza diretta del teorema di Lagrange sono i seguenti teoremi.
Teorema ***(di Cauchy)***. Siano $f, g : [a;b] \to R$ continue in $[a;b]$, derivabile in $(a;b)$, con $g'(x) \neq 0$ in $(a;b)$. Allora esiste $x_0 \in (a;b)$ in cui $(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$.

Dimostrazione. Se applichiamo il teorema di Rolle alla funzione $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$, dove $h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b)$, otteniamo la prova dell'esistenza di $x_0 \in (a;b)$ tale che $0 = h'(x_0) = (f(b) - f(a))g'(x_0) - (g(b) - g(a))f'(x_0)$, da cui segue la tesi.
Corollario. La conclusione del teorema di Cauchy può essere scritta nella forma
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$
Dimostrazione. Dall'ipotesi $g'(x) \neq 0$ in $(a;b)$ siamo sicuri del fatto che $g(b) - g(a) \neq 0$. Infatti, se così non fosse, la funzione *g* rientrerebbe nelle ipotesi del teorema di Rolle, violando l'ipotesi $g'(x) \neq 0$ in $(a;b)$.

Le derivate e l'andamento delle funzioni

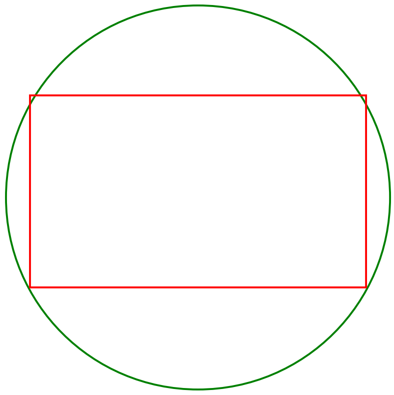
Teorema. Sia $f : [a;b] \to R$ continua in $[a;b]$, derivabile in $(a;b)$, tale che $f'(x) = 0 \forall x \in (a;b)$. Allora *f* è costante in $[a;b]$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano $x_1 \neq x_2$ tali che $f(x_1) \neq f(x_2)$. Applicando il teorema di Lagrange alla funzione nell'intervallo $[x_1;x_2]$ si trova $x_1 < x_0 < x_2$ tale che $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$, in contraddizione con l'ipotesi $f'(x) = 0 \forall x \in (a;b)$; di conseguenza la funzione *f* è costante in $[a;b]$.
Osservazione. L'ipotesi di derivata nulla in un intervallo è essenziale. Infatti esistono funzioni con derivata nulla definite "a pezzi" che evidentemente non sono costanti, come dimostra la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 2 \\ -1 & x < 2 \end{cases}.$$

Teorema. Sia $f : [a;b] \to R$ derivabile in $(a;b)$. Allora *f* è crescente in $[a;b]$ se e solo se $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a;b)$.
Dimostrazione. Sia *f* è crescente e siano $x_1 < x_2 \in (a;b)$ tali che $f(x_1) < f(x_2)$. Per il teorema del valor medio esiste $x_1 < x_0 < x_2$ tale che $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. La tesi segue facendo tendere x_2 a x_1 grazie al teorema della permanenza del segno garantito dalla derivabilità della funzione.
Viceversa, sia $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a;b)$ e siano $x_1 < x_2 \in (a;b)$. Dal teorema del valor medio segue
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1).$$
Osservazione. Se la derivata è strettamente maggiore di zero, allora la funzione è strettamente crescente, mentre non è vero il viceversa: la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente pur avendo la derivata nulla nell'origine. Anche la continuità è un'ipotesi essenziale, come dimostra la funzione $f(x) = \begin{cases} x; & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 3; & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ che ha derivata $f'(x) = 1 > 0 \forall x \in [0;2]$, ma non è crescente nell'intervallo di definizione.

Problemi di massimo e minimo

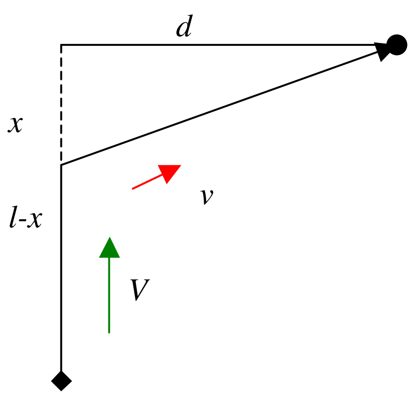
1. Tra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza, determinare quello di area massima.



- In riferimento alla figura sopra, sia x la lunghezza del lato lungo del rettangolo, e sia r il raggio della circonferenza circoscritta; i limiti geometrici entro cui può variare al lunghezza del lato lungo sono $0 < x < 2r$. L'altro lato del rettangolo si trova grazie al teorema di Pitagora: $\sqrt{4r^2 - x^2}$. L'area del rettangolo può quindi essere espressa dalla funzione $A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2}$. Questa funzione verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass e quindi è dotata di massimo e minimo assoluti nell'intervallo di riferimento $[0;2\pi]$. Poiché la funzione è derivabile internamente all'intervallo $[0;2\pi]$, e vale zero agli estremi, non ci resta che indagare la natura dei punti stazionari, quelli cioè in cui si annulla la derivata prima. Si ha $A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2} \Rightarrow A'(x) = \sqrt{4r^2 - x^2} + x\dfrac{-2x}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} = \dfrac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$. Lo studio del segno della derivata prima ci permette di determinare l'andamento della funzione e, di conseguenza, di individuare eventuali massimi e minimi (perché il teorema di Fermat è una condizione necessaria ma non sufficiente per l'esistenza dei massimo e minimi per funzioni derivabili). $A'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4r^2 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2}r \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{2}r$, quindi la funzione ammette un massimo quando $x = \sqrt{2}r$ e vale $A(\sqrt{2}r) = \sqrt{2}r\sqrt{4r^2 - 2r^2} = 2r^2$. Di che rettangolo si tratta?

Esercizio. Si stabilisca se la funzione $A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[0;2\pi]$.

2. Da una nave in viaggio con velocità *V* verso nord, viene avvistato un naufrago. La nave verrà a trovarsi ad una distanza minima *d* dal naufrago quando avrà percorso un tratto lungo *l*. In questa fase viene calata in mare una scialuppa che può viaggiare a velocità *v*. In quale punto del tratto lungo *l* dovrà essere calata in mare la scialuppa per raggiungere il naufrago nel minor tempo possibile?



- Possiamo suddividere il problema in due fasi: quella in cui la scialuppa non viene calata e si muove con la velocità della nave per un tempo $T_1(x) = \dfrac{l-x}{V}$, e quella in cui la scialuppa si dirige verso il naufrago, e che ha la durata $T_2(x) = \dfrac{\sqrt{d^2+x^2}}{v}$. Il tempo totale necessario per raggiungere il naufrago è dato dalla somma dei tempi espressa dalla funzione $T(x) = T_1(x) + T_2(x) = \dfrac{l-x}{V} + \dfrac{\sqrt{d^2+x^2}}{v}$. Con un procedimento analogo al precedente si minimizza la funzione:
$0 = T'(x) = -\dfrac{1}{V} + \dfrac{x}{v\sqrt{d^2+x^2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{vd}{\sqrt{V^2-v^2}}$.

3. Trovare i punti dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$ che sono più vicini al punto di coordinate $(a;0)$. Discutere le soluzioni del problema al variare del parametro *a*.
   - Consideriamo inizialmente il caso in cui $a > 0$, e prendiamo un punto sul ramo d'iperbole situato nel primo quadrante: $P(x;\sqrt{x^2-1})$. La formula della distanza tra due punti conduce alla funzione $\left[d(x)\right]^2 = (x-a)^2 + x^2 - 1$. La ricerca del minimo della funzione trovata passa dal calcolo della sua derivata:
$d'(x) = \dfrac{4x-2a}{2d(x)} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{a}{2}$. Il punto dell'iperbole che minimizza la distanza è quindi $P_{\min} = \left(\dfrac{a}{2};\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$. Se $0 < a < 2$ la soluzione va ricercata in un altro modo, ovvero attraverso considerazioni di natura geometrica: la retta $x = 1$ è tangente all'iperbole, ed il vertice di coordinate $(1;0)$ appartiene ad entrambe. Il vertice $(1;0)$ è il minimo cercato.

4. Provare che l'equazione $x^2 = x\sin x + \cos x$ ha due sole soluzioni reali.
   - Ragioniamo sull'andamento della funzione $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$. Lo studio del segno della derivata $f'(x) = 2x - \sin x - x\cos x + \sin x = x(2-\cos x)$, ci dice che la funzione è crescente se $x > 0$ e decrescente se $x < 0$; inoltre il punto $(0;-1)$ è un punto di minimo relativo. Essendo $f(0) < 0$ esisteranno di conseguenza $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ tali che $f(x_1) = 0$ e $f(x_2) = 0$.

5. Trovare il massimo valore della costante $K > 0$ tale che $K\ln x \leq \sqrt{x}$ per ogni $x > 0$.
   - Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ e cerchiamo il massimo valore della costante tale che $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{K}$. La derivata prima
$f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\ln x = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(1 - \dfrac{\ln x}{2}\right)$ è positiva (e la funzione crescente) se $x < e^2$; di conseguenza abbiamo un massimo relativo nel punto $x = e^2$ che è anche assoluto. Dunque $f(x) \leq f(e^2) \leq \dfrac{1}{K} \Rightarrow K \leq \dfrac{1}{f(e^2)} = \dfrac{e}{2}$.

Esercizi

1. Indicato con V il volume di un prisma retto avente per base un triangolo equilatero, si trovi la misura del lato della base che rende minima la superficie totale del prisma. $\left[l = \sqrt[3]{12V}\right]$

2. Tra tutti i cilindri inscritti nella sfera di raggio unitario si trovi il raggio r di quello la cui superficie laterale è massima. $\left[r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$
3. Tra i rettangoli inscritti in un'ellisse di semiassi a e b, si trovi quello di area massima. $\left[\ base = a\sqrt{2};\quad altezza = b\sqrt{2}\ \right]$
4. Fra i coni inscritti nella sfera di raggio unitario trovare l'altezza e il raggio di quello il cui volume è massimo. $\left[\ altezza=\dfrac{4}{3};\quad raggio=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\ \right]$
5. Nella parabola di equazione $y = x^2$ si conducano per l'origine due rette perpendicolari. Si trovino le rette che rendono minima l'area del rettangolo formato dai segmenti staccati dalle rette sulla parabola. $\left[y=\pm x\right]$
6. Dimostrare che, noti il perimetro e la base di un triangolo, questo ha area massima se è isoscele. *Fissare base e perimetro permette di interpretare il triangolo come quello avente per base la distanza tra due fuochi di un'ellisse, e per terzo vertice un punto sull'ellisse. In questo modo, l'altezza è massima in corrispondenza del semiasse minore, da cui la tesi.*
7. Da un cerchio di raggio unitario si ritagli un settore di angolo α, in modo tale che il cono che si forma facendone combaciare i lati abbia volume massimo. $\left[\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi\right]$
8. Tre sfere elastiche sono situate su una retta. La prima sfera di massa m_1 si muove con velocità v e urta la seconda, di massa x, che è in quiete; questa acquista una certa velocità e va ad urtare la terza, di massa m_3. Si trovi la massa della seconda sfera che rende massima la velocità assunta dalla terza sfera. $\left[x=\sqrt{m_1 m_3}\right]$

3.5 L'approssimazione polinomiale delle funzioni

Abbiamo già osservato che la tangente al grafico della funzione in un punto costituisce nell'intorno del punto stesso un'*approssimazione lineare* (o, come si dice, *del primo ordine*) della funzione stessa. Si possono ricavare in prima battuta alcuni esempi in tal senso, semplicemente *arrangiando* qualche limite notevole. Vediamo alcuni casi.

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow f(x)=\sin x \approx x$; in un intorno di zero.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1 \Rightarrow f(x)=e^x \approx x+1$; in un intorno di zero.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1 \Rightarrow f(x)=\ln(1+x) \approx x$; in un intorno di zero.

Vediamo adesso un limite notevole che suggerisce un'approssimazione *del secondo ordine.*

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow f(x)=\cos x \approx 1-\dfrac{x^2}{2}$; in un intorno di zero.

Ci proponiamo adesso di generalizzare quanto appena visto. Iniziamo con la ricerca di un polinomio di secondo grado che approssima la funzione nell'intorno dell'origine. I coefficienti si determinano imponendo che i valori della funzione e del polinomio $P_2(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ coincidano in zero, e lo stesso deve valere per la derivata prima e seconda:

$$f(0):=P_2(0)=a_0$$
$$f'(0):=P_2'(0)=a_1$$
$$f''(0):=P_2''(0)=2a_2$$

Il polinomio approssimante del secondo ordine è quindi:

$$P_2(x) := f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

Come per tutte le approssimazioni, affinché possa considerarsi soddisfacente, occorre che la differenza

$$R_2(x) = f(x) - P_2(x),$$

tra il polinomio approssimante e la funzione, sia *piccola*. Quanto piccola? Diciamo che deve essere un *infinitesimo* di almeno un ordine superiore:

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x^2} = 0.$$

Di conseguenza la differenza $R_2(x) = f(x) - P_2(x)$, che chiameremo il *resto*, deve tendere a zero, per $x \to 0$, più velocemente di x^2. Si dice che il resto è un *"o piccolo"* di x^2.

Esempio

Sviluppiamo fino al secondo ordine la funzione $f(x) = (1+x)^n$ in un intorno di zero.

Risulta $f(x) = 1 + n(1+0)^{n-1}x + \frac{n(n-1)(1+0)^{n-2}}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + o(x^2)$. Nel caso in cui $n = -\frac{1}{2}$ e $x = -\frac{v^2}{c^2}$ otteniamo uno sviluppo del *fattore* $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, di fondamentale importanza nella teoria della relatività speciale, per velocità *classiche*, ovvero $v << c$:

$$\gamma = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + o\left(\frac{v^4}{c^4}\right).$$

Il polinomio di Taylor

Calcoliamo adesso i coefficienti del polinomio approssimante di terzo grado $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, e cerchiamo una regola per scrivere il polinomio approssimante di grado qualsiasi.

$$f(0) := P_3(0) = a_0$$
$$f'(0) := P_3'(0) = a_1$$
$$f''(0) := P_3''(0) = 2a_2$$
$$f'''(0) := P_3'''(0) = 2\cdot 3a_3$$

Il polinomio approssimante di terzo grado ha la seguente espressione:

$$P_3(x) := f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3,$$

ed il resto dovrà soddisfare la condizione

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^3} = 0$$

La formula generale per la determinazione del polinomio approssimante di grado *n*, sempre in un intorno di zero, è

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Questo polinomio si dice *Polinomio di Taylor* di ordine *n* con la condizione sul resto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_n(x)}{x^n} = 0.$$

Osservazione. Abbiamo visto che, affinché se ne possa scrivere il polinomio, la funzione deve essere derivabile nel punto considerato (che in generale può non essere zero) un numero di volte almeno pari al grado del polinomio stesso.

La formula generale del polinomio di Taylor centrato in un punto qualsiasi x_0 e la relativa condizione sul resto si scrivono così:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\,;\quad \lim_{x\to x_0}=\frac{R_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n}=0\,.$$

Nel caso $n=1$ la condizione $\lim_{x\to 0}\frac{R_n(x)}{x^n}=0$ è di facile dimostrazione (ed interpretazione). Sia

$$R_1(x;x_0)=f(x)-P_1(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{R_1(x;x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right]=0$$

per la continuità della derivata della funzione nel punto x_0. Il resto è quindi un *o piccolo* di $x-x_0$:
$f(x)-P_1(x)=o(x-x_0)\Rightarrow f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$.

Questo fatto può essere utilizzato a sua volta per dimostrare un teorema di straordinaria utilità nel calcolo dei limiti.

La regola di De L'Hôpital. *Siano f e g due funzioni derivabili tali che*

1. *f e g sono infinitesimi (o infiniti) simultanei per* $x\to x_0$,
2. $g'(x)$ *è diversa da zero in un intorno di* x_0,
3. *esiste finito il* $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Allora esiste il $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ *e si ha* $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Dimostrazione. Si applica lo sviluppo di Taylor al primo ordine alle funzioni che formano il quoziente $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)}{g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)}=\frac{f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)}{g'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)}$; si giunge alla tesi passando al limite per $x\to x_0$.

Esempio. Si calcoli il $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{x^2}$ nei seguenti modi: (a) con i limiti notevoli; (b) con la formula di Taylor; (c) con la regola di De L'Hôpital.

- (a) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x(1-\cos x)-\sin^2 x}{x^2}=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$;
- (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{4}{2}x^2+o(x^2)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}=-\frac{3}{2}$;
- (c) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x+\sin x}{2x}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-4\cos 2x+\cos x}{2}=-\frac{3}{2}$.

Dimostriamo adesso la condizione $\lim_{x\to 0}\frac{R_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n}=0$ nel caso generale, facendo vedere che segue dal seguente lemma:

lemma: Se *f* è una funzione *n* volte derivabile in x_0 e se risulta

$f(x_0)=f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n)}(x_0)=0$, allora $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}=0$.

Dimostrazione. La tesi segue dall'applicazione ripetuta della regola di de l'Hôpital:

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\cdots=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=0$, come volevasi dimostrare.

La condizione $\lim_{x\to 0}\frac{R_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n}=0$ segue quindi da un'applicazione del lemma alla funzione $R_n(x;x_0)$.

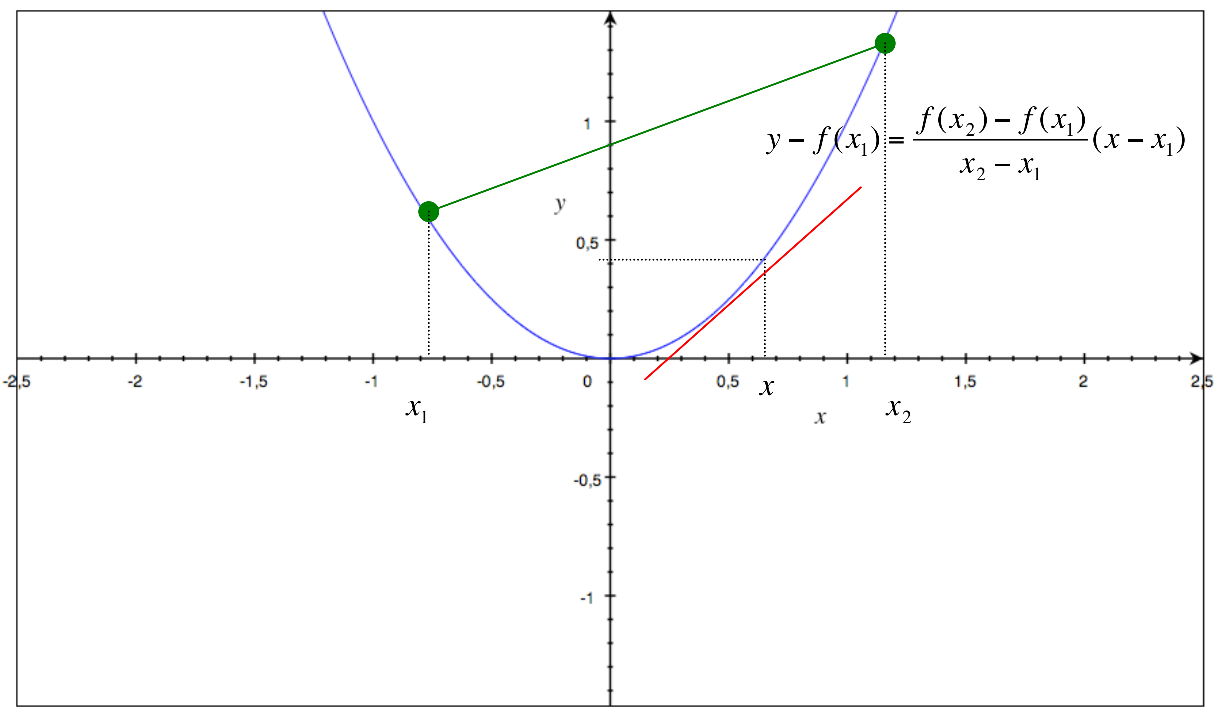
Esercizio. Sia $p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polinomio di grado *n*. Dimostrare che la derivata *n*-esima del polinomio è $p^{(n)}=n!a_n$.

Soluzione. Si applica il Principio di induzione sul grado del polinomio; la tesi è vera se il polinomio è di grado zero, ovvero è una funzione costante: $p^{(0)}=a_0=a_0\cdot 1=a_0\cdot 0!$. Supponiamo vera la tesi per il generico termine di grado $n-1$ e dimostriamo che $p^{(n)}=n!a_n$. Risulta, per ipotesi induttiva: $D^{(n)}\left(a_n x^n\right)=D^{(n-1)}\left(D\left(a_n x^n\right)\right)=D^{(n-1)}\left(a_n n x^{n-1}\right)=a_n n D^{(n-1)}\left(x^{n-1}\right)=a_n n(n-1)!=a_n n!$; da questo segue

$$D^{(n)}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)=D^{(n)}\left(a_n x^n+\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right)=D^{(n)}\left(a_n x^n\right)+D\left(D^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right)\right)=a_n\cdot n!+D\left(a_{n-1}\cdot(n-1)!\right)=a_n\cdot n!$$

3.6 Funzioni convesse

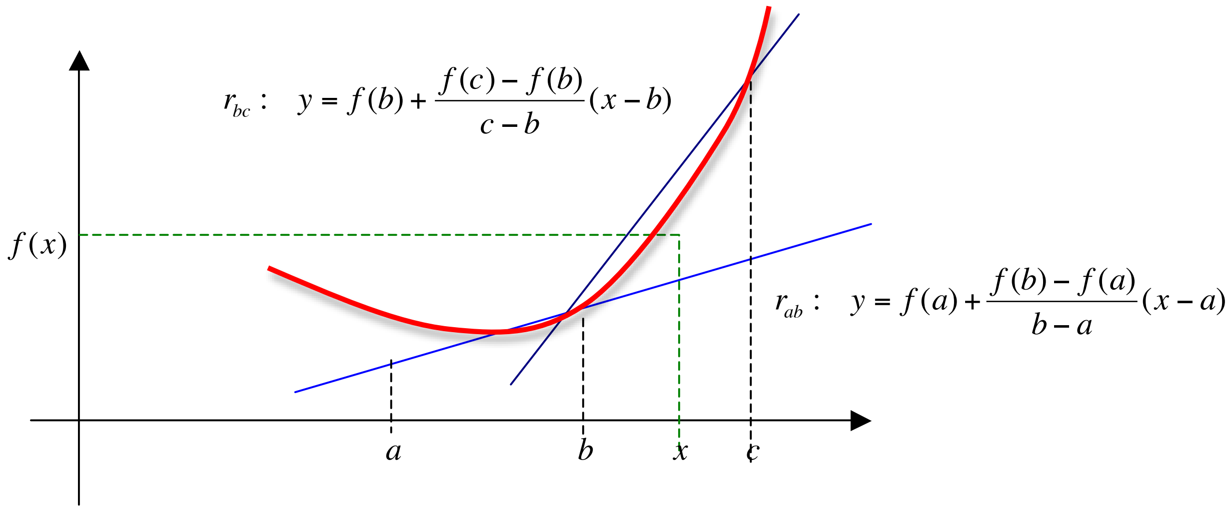
Quando il grafico di una funzione "sta sotto" la corda staccata tra due punti su di esso, la funzione si dice **convessa**. Ad esempio la parabola $f(x)=x^2$ è un esempio di funzione convessa su tutto l'insieme di definizione:



Una caratteristica delle funzioni convesse è quella di "stare sopra" la retta tangente, nei punti in cui questa esiste:

$$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\quad \forall x,x_0\in\left[x_1;x_2\right].$$

Teorema 1. f è convessa in $a<b<c \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$.



Dimostrazione. ($\Rightarrow$)Siano $a<b<c$ tre punti in un intervallo in cui la funzione è convessa, e sia $b<x<c$. Come si può osservare dal grafico, $r_{ab}(x) < f(x) < r_{bc}(x)$. Di conseguenza

$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \le f(x) \le f(b) + \frac{f(c)-f(b)}{c-b}(x-b)$, da cui segue

$$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \le f(b) + \frac{f(c)-f(b)}{c-b}(x-b) \Rightarrow$$

$$\left(f(b)-f(a)\right)\left[\frac{x-a}{b-a}-1\right] \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b}(x-b)$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b}(x-b)$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \qquad essendo (x>b)$$

Resta da provare la tesi anche nel caso in cui $a<x<b$, dove $r_{bc}(x) < f(x) < r_{ab}(x)$

$$f(b) + \frac{f(c)-f(b)}{c-b}(x-b) \le f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \Rightarrow$$

$$(f(b)-f(a))\left[\frac{x-a}{b-a}-1\right] \ge \frac{f(c)-f(b)}{c-b}(x-b) \Rightarrow$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) \ge \frac{f(c)-f(b)}{c-b}(x-b) \Rightarrow$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \qquad essendo (x<b)$$

($\Leftarrow$) Viceversa, aggiungiamo e togliamo il termine $f(a)$ al denominatore nel membro di destra della disuguaglianza: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)+f(a)-f(a)-f(x)}{b-x}$. Da questo segue

$\left(f(x)-f(a)\right)\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{b-x}\right) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-x} \Rightarrow \frac{(f(x)-f(a))(b-a)}{(x-a)(b-x)} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-x}$, da cui si giunge a

$f(x)-f(a) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, ovvero la condizione di convessità della funzione nell'intervallo $[a;b]$.

Teorema 2. Se f è convessa e derivabile, allora $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), \quad \forall x, x_0 \in [x_1;x_2]$.

Dimostrazione. Se $x_0 < z < x$ risulta, per il lemma precedente $\frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0} \le \frac{f(x)-f(z)}{x-z}$ e, facendo tendere $z \to x_0$ si ha la tesi: $f'(x_0) \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Osservazione. La derivata seconda di una funzione lineare è nulla in ogni punto; di conseguenza una funzione che ha derivata seconda non nulla in un intorno di un punto, avrà un grafico *localmente* non rettilineo.
Con questa osservazione è possibile pensare alla derivata seconda come ad una *misura dello scostamento del grafico della funzione dalla tangente*.
Il segno della derivata prima ci ha permesso di descrivere l'andamento di una funzione, quello della derivata seconda ci permetterà di descriverne la convessità. Prima di enunciare questo risultato, estendiamo il teorema 1 al caso delle funzioni derivabili:
Teorema 3. f derivabile in $[a,b]$ è convessa $\Leftrightarrow$ f' è crescente.

Posiamo a questo punto enunciare un risultato di grande utilità.
Teorema 4. Sia $f \in C^2([a;b])$; *f* è convessa in $[a;b]$ *se e solo se* $f''(x) \ge 0$ per ogni $x \in (a;b)$.
Dimostrazione. $(\Rightarrow)$ Se *f* è convessa in $[a;b]$ allora f' è ivi crescente e risulta $f''(x) \ge 0$ per ogni $x \in (a;b)$.
Dimostrazione $(\Leftarrow)$ Se $f''(x) \ge 0$ per ogni $x \in (a;b)$, allora $f'(x)$ è crescente nel medesimo intervallo. La tesi segue dall'applicazione del teorema 3.

Una condizione sufficiente per i massimi ed i minimi di funzioni
Come è noto, l'annullarsi della derivata prima in un punto non è di per sé una condizione necessaria per l'esistenza di un massimo o di un minimo in quel punto. Tuttavia, se insieme a questa condizione si richiede che la derivata seconda nel medesimo punto sia *diversa* da zero, allora quello è un massimo, o un minimo. Questa condizione appare naturale se si osserva il grafico di una funzione "regolare" che possiede massimi e/o minimi, come ad esempio la funzione $f(x) = x^2$.

Teorema 5. Sia $f \in C^2([a;b])$, e sia $x_0 \in (a;b)$ un punto tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$. Allora x_0 è un punto di minimo relativo per la funzione *f.*
Dimostrazione. La continuità della derivata seconda permette di individuare un intorno $I(x_0)$ in cui $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I(x_0)$ per il teorema della permanenza del segno. Di conseguenza la funzione è convessa, per cui $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ nell'intorno. La tesi segue dall'applicazione della condizione $f'(x_0) = 0$.
Esiste anche una formulazione in cui non si richiede la continuità della derivata seconda, ma soltanto la sua esistenza nel punto $x_0 \in (a;b)$ con $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$. In questo caso è possibile applicare il teorema della permanenza del segno alla funzione $\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$, essendo

$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = f''(x_0) > 0$; risulta quindi $f'(x) > f'(x_0)$ per $x > x_0$, e $f'(x) < f'(x_0)$ per $x < x_0$, con $f'(x_0) = 0$. La funzione è quindi crescente nell'intorno destro di $x_0 \in (a;b)$, decrescente in quello sinistro, proprio come richiesto in corrispondenza di un minimo relativo.

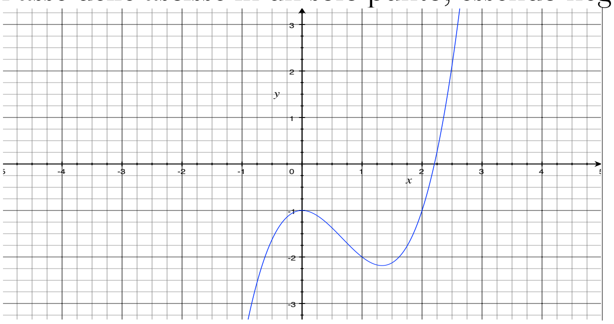
3.7 Un'applicazione numerica: il metodo delle tangenti (o di Newton)

Si tratta di un metodo per la determinazione degli zeri di una funzione. Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$, derivabile due volte in (a,b), con $f(a)\cdot f(b) < 0$, $f'(x) \neq 0$, e $f''(x) \neq 0$, sempre in (a,b).

Allora esiste almeno uno zero della funzione in (a,b), e può essere determinato con una precisione fissata, come termine *n*-esimo della seguente successione definita per ricorrenza, i cui termini corrispondono ai punti in cui la tangente al grafico della funzione interseca l'asse delle ascisse:

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} .$$

Esempio. Determiniamo lo zero della funzione $f(x) = x^3 - ax^2 - 1$. Dal grafico si osserva che taglia l'asse delle ascisse in un solo punto, essendo negativi sia il minimo che il massimo relativo.



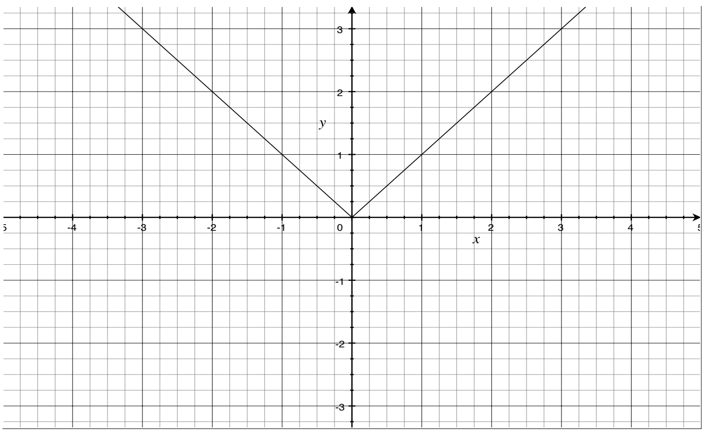
Applicando il *metodo delle tangenti* con arresto alla seconda cifra decimale, risulta

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_x - \dfrac{x_n^3 - x_n^2 - 1}{3x_n^2 - 2x} \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = 1{,}625 \quad x_2 = 1{,}4858 \quad x_3 = 1{,}4660 \quad x_4 = 1{,}4666 \quad \Rightarrow \bar{x} = 1{,}46 .$$

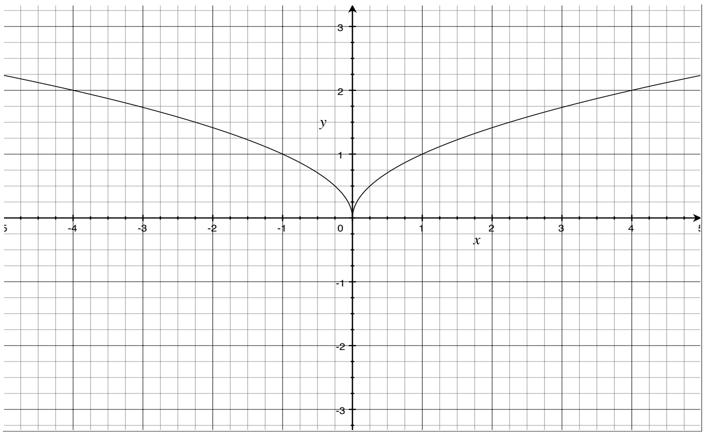
3.8 Riepilogo delle principali proprietà delle funzioni

Abbiamo visto che la continuità di una funzione può essere associata al suo insieme di definizione, mentre le derivate prima e seconda ne caratterizzano rispettivamente l'andamento e la forma. Dopo aver caratterizzato i punti di discontinuità, dobbiamo prendere in considerazione i punti di non derivabilità. Nei punti in cui la funzione non è derivabile (nel senso che non esiste finito il limite del rapporto incrementale), si possono avere le seguenti situazioni:

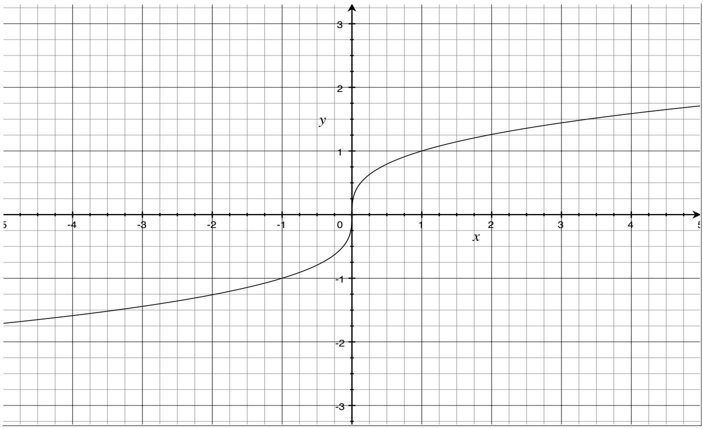
- *punti angolosi*: $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1 \neq l_2 = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$; esempio $f(x) = |x|$



- *Cuspidi*: $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \neq \mp\infty = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$; esempio $f(x) = \sqrt{|x|}$.



- *Flessi a tangente verticale*: $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$; esempio $f(x)=\sqrt[3]{x}$.



A questo punto possiamo estendere la condizione sufficiente per la determinazione dei massimi e dei minimi di funzioni, al caso in cui si annullano, in un punto x_0, tutte le derivate fino all'ordine *n*.

Teorema. Se $f(x)$ è una funzione derivabile *n* volte con derivata *n*-esima continua in (a,b), e se in $x_0\in(a,b)$ risulta $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0\wedge f^{(n)}(x_0)\neq 0$, allora:

- Se *n* è *pari* il punto x_0 è di minimo relativo se $f^{(n)}(x_0)>0$, e di massimo relativo se $f^{(n)}(x_0)<0$.
- Se *n* è *dispari* il punto x_0 è di flesso a tangente orizzontale: ascendente se $f^{(n)}(x_0)>0$, discendente se $f^{(n)}(x_0)<0$.

La dimostrazione di questo risultato ricalca sostanzialmente quella vista nel caso $n=2$, servendosi dello sviluppo di Taylor della funzione in un intorno di x_0, che assume la forma particolarmente semplice: $f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x,x_0)$, con $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x,x_0)}{(x-x_0)^n}=0$.

Ad esempio, se *n* è *pari* e se $f^{(n)}(x_0)>0$, allora $f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n>f(x_0)$, quindi x_0 è di minimo relativo. Tralasciamo i dettagli (comunque importanti) che permettono di valutare adeguatamente il resto *n*-esimo in modo da giustificare pienamente l'ultima disuguaglianza scritta.