ESERCIZI LOGARITMI

Risolvere le seguenti equazioni esponenziali e logaritmiche:

1. $2^{x+3} - \sqrt{2^{4+2x}} = 4 + 2 \cdot 4^{\frac{x}{2}}$
   - $2^x := t \Rightarrow \quad 8t - \sqrt{16t^2} = 4 + 2t \Rightarrow 2t = 4 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x = 1$
2. $\sqrt{\log_3 x} - 6\log_3 \sqrt{x} = 0$
   - $$x > 0; \quad \log_3 x := t \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ \sqrt{t} - 6 \cdot \frac{1}{2} t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ t - 9t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ t = 0 \vee t = \frac{1}{9} \end{cases}$$

     $$\Rightarrow \log_3 x = \frac{1}{9} \Rightarrow x = 3^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{3} \vee \log_3 x = 0 \Rightarrow x = 1$$
3. $2^{x+1} - 2^x + 2^{x-2} = 5$
   - $2^x := t \Rightarrow 2t - t + \frac{t}{4} = 5 \Rightarrow \frac{5}{4} t = 5 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$
4. $\log_2(x+1) + \log_2(x+2) = 2 + \log_2 3$

   $$C.E. \begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -1$$
   - $\log_2\left[(x+1)(x+2)\right] = \log_2 12 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 12 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$

     $$x = \frac{-3 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x = -5\, non \quad accettabile \\ x = 2 \quad accettabile \end{matrix}$$

6. Risolvere la seguente disequazione: $\log_2 x > -\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x}$.
   - Scriviamo il logaritmo in base un mezzo nel corrispondente logaritmo in base due: $-\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x} = -\dfrac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 \frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{x}$. Di conseguenza la disequazione diventa

     $$\log_2 x > \log_2 \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \vee x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1.$$

7. Si risolvano le seguenti disequazioni

   a) $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} (x-6) < 0$;
   - $$0 < \log_{\frac{1}{2}} (x-6) < 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} (x-6) > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} (x-6) < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x - 6 < 1 \\ x - 6 > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < x - 6 < 1 \Rightarrow \frac{13}{2} < x < 7$$

   b) $2^x - 1 > \sqrt{3 \cdot 2^x - 3}$. *Si ricordi che* $\sqrt{A(x)} < B(x) \Rightarrow \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq 0 \\ A(x) < \left[B(x)\right]^2 \end{cases}$.
   - $$\begin{cases} 2^x - 1 \geq 0 \\ 3 \cdot 2^x - 3 \geq 0 \\ 3 \cdot 2^x - 3 < (2^x - 1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x \geq 1 \\ 2^x \geq 1 \\ \left(2^x\right)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2^x < 1 \vee 2^x > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \vee x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

La popolazione di expolandia decresce con modello esponenziale da 550.000 a 450.000 dal 2008 al 2010. Quanti abitanti avrà expolandia nel 2012? Si scriva la legge esponenziale nella forma $N(t) = N_0 e^{kt}$*, dove t è il numero di anni dal 2008 (cioè, t = 0 nel 2008, t = 1 nel 2009 etc..)* .

$2008: N_0 = N(0) = 550.000$

- $2010: N_2 = N(2) = 450.000 = 550.000e^{k\cdot 2} \Rightarrow 2k = \ln\dfrac{450.000}{550.000} \Rightarrow k = -0{,}1$

$2012: N_4 = N(4) = 550.000e^{-0{,}1\cdot 4} = 368676 \cong 370.000$

Esercizi

1. $\log_5(x+1)+\log_5 4 = \log_5 6x \qquad x=2$

2. $\log_2^2 x^2 + 4\log_2\sqrt{x} - 2 = 0 \qquad x=\sqrt{2};\quad x=\dfrac{1}{2}$

3. $\sqrt{\log_2^2 x + \log_2 x - 2} = \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \qquad x=\dfrac{1}{4}$

4. $\log\sqrt{|x-2|+2x} - \dfrac{1}{2}\log(3x+7) = 0 \qquad x=-\dfrac{5}{6}$

5. $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}(2x+4)+\log_3 x + \log_3(x-1)}{\log_3\dfrac{x}{2}} = 0 \qquad x=4$

6. Risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} \log_{xy} 12 = 1 \\ 2^{x-4}\cdot 3^{x-1} = \dfrac{6^y}{8} \end{cases} \qquad \begin{matrix} x=4 & y=3 \\ x=-3 & y=-4 \end{matrix}$

7. $a)\ \dfrac{2^{x-1}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt{10}} = 5^{x+1} \qquad x=\dfrac{\frac{7}{6}\ln 5 + \frac{3}{2}\ln 2}{\ln 2 - \ln 5}$.

   $b)\ \dfrac{1}{2}\log(7+3x) = \log(1-\sqrt{x+2}) \qquad x=-2$

8. $a)\ \sqrt{2\sqrt{2}} = 4^{1-x} \qquad x=\dfrac{5}{8}$

   $b)\ Log 5 - Log(3+\sqrt{x}) = Log(3-\sqrt{x}) \qquad x=4$

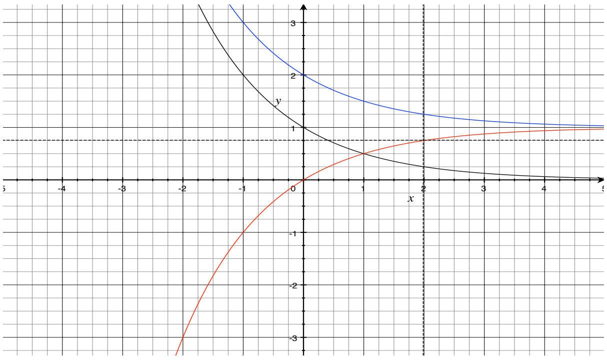
9. $a)\ \dfrac{1}{4\sqrt{2}} = 8^x \qquad x=-\dfrac{5}{6}$.

   $b)\ \log_3(x^2+x) - \log_3(x^2-x) = 1 \qquad x=2$

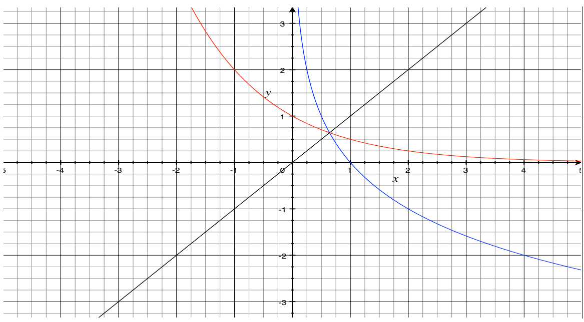
10. $\log_{\frac{1}{y}}(\log_y x) > \log_y(\log_y x) \qquad \begin{cases} 0<x<y \vee 1<x<\dfrac{1}{y}; & 0<y<1 \\ 0<x<\dfrac{1}{y} \vee 1<x<y; & y>1 \end{cases}$

11. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} &a)\, y = 2^{-x} \\ &b)\, y = 2^{-x} + 1 \\ &c)\, y = 1 - 2^{-x} \end{aligned} \quad .$$

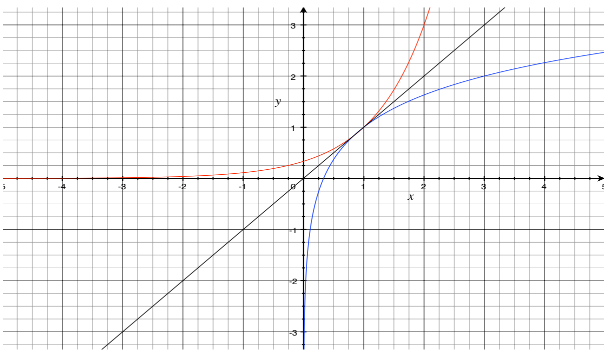


12. Tracciare il grafico della funzione $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, a partire da quello della funzione $y = \frac{1}{2^x}$. Che relazione sussiste tra le due funzioni?



13. Data la funzione $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$ determinare la funzione inversa $f^{-1}(x)$, tracciare i grafici delle due funzioni sullo stesso diagramma cartesiano, e risolvere la disequazione $f^{-1}(x) \leq 1$.

- $f^{-1}(x) = 1 + \log_3 x \qquad\qquad 0 < x \leq 1 \quad .$

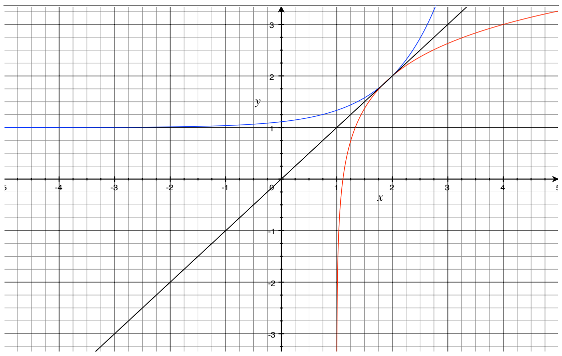


14. Determinare l'equazione cartesiana del luogo geometrico le cui equazioni parametriche sono: $\begin{cases} x = \log_2(1+k) \\ y = k-1 \end{cases}$ per valori di $k > -1$..

- $y = 2^x - 2$

15. Data la funzione $f(x) = 1 + 3^{x-2}$ determinare l'insieme di definizione, l'immagine, la funzione inversa e tracciare i grafici della funzione e dell'inversa.

- $D \equiv R$ $\quad I \equiv \{y \in R | y > 1\}$ $\quad y = 2 + \log_3(x-1)$.



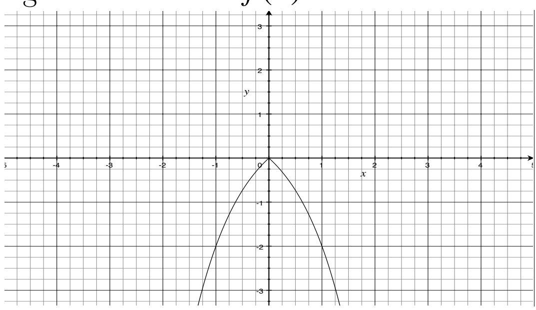
16. Date le funzioni $f(x) = |2x|$ e $g(x) = \log_2(x-1)$, determinare la funzione composta $f(g(x))$ e risolvere la disequazione $g(f(x)) > 1$.

- $f(g(x) = |2\log_2(x-1)|$ $\quad x < -\frac{3}{2} \vee x > \frac{3}{2}$.

17. Risolvere la seguente disequazione : $25^x - 13 \cdot 5^x + 30 \geq 0$.

- $x \leq \log_5 3 \vee x \geq \log_5 10$.

18. Tracciare il grafico della seguente funzione $f(x) = 1 - 3^{|x|}$.



19. Il numero di nuclei presenti al tempo *t*, in una massa radioattiva, è determinato dalla legge $n(t) = n_0 e^{-\alpha t}$. Dopo quanto tempo la massa non decaduta è un decimo della massa iniziale? Si assuma per α il valore $\alpha = 10^{-3} s^{-1}$.

- $n(t) = \frac{1}{10} n(0) \Rightarrow n_0 e^{-\alpha t} = n_0 10^{-1} \Rightarrow t = 10^3 \ln 10 = 2303 s = 38'22''$.

20. Risolvere la seguente disequazione logaritmica: $\log_{\frac{1}{x-1}}(x^2 - 1) \leq \log_{x-1} x^2$.

- $1 < x < \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \vee x > 2$.

21. Si tracci il grafico della funzione $f\left(x\right)=1+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x}$.