ESERCIZI LIMITI DI FUNZIONI E CONTINUITA'

Verificare con la definizione i seguenti limiti di funzioni (limite finito per x che tende a un valore finito):

1. $\lim_{x\to -3}\sqrt{x+7}=2 \qquad I=\left(-3-4\varepsilon+\varepsilon^2,-3+\varepsilon^2+4\varepsilon\right)$;
2. $\lim_{x\to 2}2^x=4 \qquad I=\left(2+\log_2\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right),2+\log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)$;
3. $\lim_{x\to 2}\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=-1 \qquad I=\left(2-\left(3-3^{1-\varepsilon}\right),2+\left(3^{1+\varepsilon}-3\right)\right)$;
4. $*\lim_{x\to 0}\frac{3^x}{3^{x+1}-x\cdot 3^x}=\frac{1}{3} \qquad I=\left(-\frac{9\varepsilon}{1-3\varepsilon},\frac{9\varepsilon}{1+3\varepsilon}\right)$;
5. $*\lim_{x\to 0^+}|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1 \qquad I=\left(0,\sqrt{2\varepsilon+\varepsilon^2}\right)$;
6. $*\lim_{x\to 0^-}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1 \qquad I=\left(-\sqrt{2\varepsilon+\varepsilon^2},0\right)$;
7. $\lim_{x\to -1}e^{x+1}=1 \qquad I=\left(-1+\ln(1-\varepsilon),-1+\ln(1+\varepsilon)\right)$.

Verificare con la definizione i seguenti limiti di funzioni (limite infinito per x che tende a un valore finito):

1. $\lim_{x\to -1}\frac{2}{x+1}=\infty \qquad x\neq -1 \quad I=\left(-1-\frac{2}{K},-1+\frac{2}{K}\right)$;
2. $\lim_{x\to -1}\frac{1}{x^3+1}=\infty \qquad x\neq -1 \quad I=\left(\sqrt[3]{-1-\frac{2}{K}},\sqrt[3]{-1+\frac{2}{K}}\right)$;
3. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x-1}=\infty \qquad x\neq 0 \quad I=\left(\ln\left(1-\frac{1}{K}\right),\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)\right)$;
4. $\lim_{x\to 3}\frac{1}{\log_2(x-2)}=\infty \qquad x\neq 3 \quad I=\left(3-\left(1-2^{-1/K}\right),3+\left(2^{1/K}-1\right)\right)$;
5. $\lim_{x\to 1^+}\ln(x-1)=-\infty \qquad I=\left(1,1+e^{-K}\right)$;
6. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{2x}+e^x-2}=\infty \qquad x\neq 0 \quad I=\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{9-4/K}}{2}\right),\ln\left(\frac{-1+\sqrt{9+4/K}}{2}\right)\right)$;
7. $\lim_{x\to 2}\frac{1}{\log_2(x)-1}=\infty \qquad x\neq 2 \quad I=\left(2^{1-\frac{1}{K}},2^{1+\frac{1}{K}}\right)$

Verificare con la definizione i seguenti limiti di funzioni (limite finito per x che tende a un valore infinito):

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1$ $\quad U = \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, +\infty\right)$;
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^{x^2}} = 0$ $\quad U = \left(-\infty, -\sqrt{-\log_2 \varepsilon}\right) \cup \left(\sqrt{-\log_2 \varepsilon}, +\infty\right)$;
3. $*\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0$ $\quad U = \left(-\infty, -\frac{1}{1-e^{-\varepsilon}}\right) \cup \left(\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}, +\infty\right)$;
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$ $\quad U = \left(\ln\left(1+\varepsilon^{-1}\right), +\infty\right)$;
5. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1$ $\quad U = \left(-\infty, \ln\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$;
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1$ $\quad U = \left(\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2, +\infty\right)$;
7. $*\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sin x = 0$; (*ricordare che* $\sin x < 1$...) $\quad U = \left(-\ln\varepsilon, +\infty\right)$

Verificare con la definizione i seguenti limiti di funzioni (limite infinto con x che tende a un valore infinito):

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{3-x}{10} = \infty$ $\quad U = \left(-\infty, 3-10K\right) \cup \left(3+10K, +\infty\right)$;
2. $\lim_{x\to\infty} (2x^3 - 1) = \infty$ $\quad U = \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{1-K}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1+K}{2}}\right)$;
3. $\lim_{x\to+\infty} (1 + e^{2x}) = \infty$ $\quad U = \left(\ln\frac{K-1}{2}, +\infty\right)$;
4. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} = \infty$ $\quad U = \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{9+4\log_2 K}}{2}, \frac{3+\sqrt{9+4\log_2 K}}{2}, +\infty\right)$;
5. $\lim_{x\to+\infty} \ln(\sqrt{x} - 1) = \infty$ $\quad U = \left(\left(e^K + 1\right)^2, +\infty\right)$;

   $\lim_{x\to\infty} x\sqrt{\frac{1}{x}+2} = \infty$ $\quad U = \left(-\infty, \frac{2K}{1-\sqrt{1+8K^2}}, \frac{2K}{1+\sqrt{1+8K^2}}, +\infty\right)$

Dire se le seguenti sono funzioni continue in 0 (calcolare i limiti destro e sinistro per *x* che tende a zero…):

1. $f(x) = x + \sin x$ $\quad si$

2. $f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ 1-x & x<0 \end{cases}$ *no* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+|x|}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ *no*

3. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ *si* **Errore. Non si possono creare oggetti dalla modifica di codici di campo.**

4. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x>0 \\ 1-x & x\leq 0 \end{cases}$ *si* $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ *no*

5. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{|x|}, & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ *si* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{|x|-1} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ *no*

6. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ *no* $f(x)=\begin{cases} \log(2+x) & x\geq 0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$ *no*

Classificare le discontinuità delle seguenti funzioni:

1. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$; *Discontinuità eliminabile*
2. $f(x)=3^{\frac{1}{x-1}}$; *Discontinuità di II specie*
3. $f(x)=\begin{cases} kx+3; & x\geq 2 \\ x-1; & x<2 \end{cases}$; *Discontinuità di I specie se* $k\neq -1$ *altrimenti continua*
4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; *Discontinuità eliminabile*
5. $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-3}}$; *Discontinuità di II specie*
6. $f(x)=\dfrac{x}{\ln(1+x)}$; *Discontinuità eliminabile*

$f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\cos x-\cos 2x}$; *Discontinuità eliminabile*[1]

Esercizi riepilogativi

Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

1. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$ $\dfrac{1}{2}$

---

2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{(1+x)^2}}{3x}$ $\qquad -\frac{2}{9}$

3. Determinare, in base al parametro α, il $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^\alpha\right)}{x^2}$ $\qquad \begin{matrix} +\infty & 0<\alpha<2 \\ 1 & \alpha=2 \\ 0 & \alpha>2 \end{matrix}$.

4. Determinare al variare del parametro α il valore del limite $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x^\alpha+1}\right)$

• $\qquad \begin{matrix} 0 & \alpha<1 \\ -\frac{1}{2} & \alpha=1 \\ -\infty & \alpha>1 \end{matrix}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-\cos x}{x\sin x}$ $\qquad \frac{1}{2}$.

6. $\lim_{x\to 0}\frac{3^{2\sqrt{x}}-1}{1-5^{\sqrt{x}}}$ $\qquad -\frac{\ln 9}{\ln 5}$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\log(1+4x)}$ $\qquad \frac{1}{2}$

8. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+1}$ $\qquad e^2$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1+3\log(1+2x)}{3x}$ $\qquad \frac{8}{3}$

10. $\lim_{x\to+\infty}(2x+1)^{\frac{1}{\log x}}$ $\qquad e$

11. $\lim_{x\to 0}\frac{5\sin x\tan x}{x\sin 2x}$ $\qquad \frac{5}{2}$

12. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^4-1}{2x}$ $\qquad 6$

13. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2^x}-1}{4^x-1}$ $\qquad \frac{1}{4}$

14.
$a)\quad \lim_{x\to0}\left(1-\frac{x\cos5x}{\sin5x}\right)$ $\qquad \frac{4}{5}$

$b)\quad \lim_{x\to0}\frac{9^x-1}{\sqrt{3^x}-1}$ $\qquad 4$

15. $\lim_{x\to0}(1+2x)^{-\frac{3}{x}}$ $\qquad e^{-6}$

16. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2x-\pi)^2}{2\cos^2x+\sin x-1}$ $\qquad \frac{8}{3}$

17. $\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^x+\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\right]$ $\qquad e+e^2$

18. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ $\qquad e^{-1}$

19. $\lim_{x\to1}\frac{e^{2x-2}-1}{x^2+2x-3}$ $\qquad \frac{1}{2}$

20. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x}\right)^{\frac{1}{2+\log x}}$ $\qquad e^{-1}$

21. $\lim_{x\to0}\frac{3\sin2x\tan x}{2x\sin x}$ $\qquad 3$

22. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{(1+2x)^2}-1}{x}$ $\qquad \frac{4}{3}$

23. $\lim_{x\to0}\frac{5^{\sqrt{x}}-1}{1-2^{\sqrt{x}}}$ $\qquad -\frac{\ln5}{\ln2}$

24. $\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{\log(1+x)}$ $\qquad -1$

25. Calcolare il valore del $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^\alpha)\tan x}{2x^{1-\alpha}\sin x}$ al variare del parametro positivo $\alpha\in R$.

$+\infty \quad 0<\alpha<\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \quad \alpha=\frac{1}{2}$

$0 \quad \alpha>\frac{1}{2}$