CAPITOLO 7

7.1 L'insieme dei numeri naturali

Consideriamo la relazione d'ordine definita nell'insieme dei numeri naturali, caratterizzandola mediante le seguenti proprietà:

1. Esistenza dello *zero;*
2. Ogni elemento ha un *successivo;*
3. Ogni numero, tranne 0, è successivo di un altro numero;
4. Partendo da zero è sempre possibile raggiungere qualsiasi elemento dell'insieme dei numeri naturali passando al successivo un certo numero di volte.

Il principio di induzione

Se A è un sottoinsieme dei naturali con la proprietà che 0 appartiene ad A e che se $a \in A$, allora anche $a+1 \in A$, allora $A \equiv N$.

Questo principio è molto usato nelle definizioni cosiddette *ricorsive* e nelle dimostrazioni chiamate *induttive*, nella forma espressa dal seguente

Teorema. Se $P_0, P_1, ..., P_n, ...$ è una famiglia di proposizioni dipendente dall'indice intero *n* e se

1. La proposizione P_0 è vera,

2. Per ogni naturale *n* la proposizione P_n implica la proposizione P_{n+1}, allora la proposizione P_n è vera per ogni *n*.

Vediamo la seguente applicazione del Principio di induzione.

Disuguaglianza (BERNOULLI)*:* dato $x \in IR, x > -1$, per ogni naturale *n* risulta vera la disuguaglianza:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Dimostrazione: consideriamo le proposizioni $P_n : (1+x)^n \geq 1+nx$.

$P_0 : (1+x)^0 \geq 1+0x = 1 \Rightarrow vera$.

$P_{n+1} : (1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x \Rightarrow vera$.

Osserviamo come nella prima disuguaglianza è stata usata l'ipotesi di supposta verità della proposizione P_n.

7.2 Le successioni

Si dice *successione* una legge che ad ogni numero naturale associa un numero reale a_n detto *termine n-*esimo della successione.

Comunemente una successione viene definita mediante una formula che restituisce il termine generico: $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\begin{cases} a_{2n-1} = \frac{1}{n} \\ a_{2n} = n^2 \end{cases}$.

Occorre precisare che non necessariamente esiste una formula per ottenere a_n dato *n*. Ad esempio, una successione è anche la sequenza -1,8,9,0,-3,2,12345,…

E' possibile altresì definire una successione assegnando una regola per la costruzione di termini successivi a partire da assegnati termini iniziali. Queste successioni si dicono *definite per ricorrenza.*

Un classico esempio di successioni definite per ricorrenza è quella che permette la costruzione dei cosiddetti *Numeri di Fibonacci*

$$\begin{cases} a_0 = 0; \quad a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}; \quad n > 1 \end{cases}.$$

Esempio
Vogliamo determinare il termine generico della successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n} \end{cases}.$$

Il procedimento "standard" prevede la scrittura dei primi termini della successione, da cui si "intuisce" la legge che esprime il termine generico, e si dimostra quindi, per induzione, il risultato intuito.

$a_1 = \frac{1}{2},\quad a_2 = \frac{2}{3},\quad a_3 = \frac{3}{4},\quad a_4 = \frac{4}{5},\cdots, a_n = \frac{n}{n+1}$. La proposizione $a_n = \frac{n}{n+1}$ è sicuramente vera per $n = 0$. Supponiamola vera per n qualsiasi, e dimostriamola per $n+1$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1}.$$

Le progressioni *aritmetiche*

Si può definire una successione per ricorrenza con la seguente legge: $\begin{cases} a_0 = b \\ a_{n+1} = a_n + h \end{cases}$,
dove *b* e *h* sono numeri reali: tale successione si dice *progressione aritmetica*, ed il suo termine generale è espresso dalla relazione $a_n = n \cdot h + b$.

Le progressioni *geometriche*

Un'altra successione definita per ricorrenza è la cosiddetta *progressione geometrica*: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n \cdot b \end{cases}$, ed il suo termine generale è $a_n = b^n$. Osserviamo che tale definizione può essere estesa anche agli interi negativi utilizzando la notazione degli esponenti negativi: $b^{-n} = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}$.

Il *fattoriale*

Il *fattoriale* di un numero intero $a_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n := n!$ dà luogo ad una successione definita per ricorrenza $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n \cdot (n+1) \end{cases}$.

Successioni monotòne

In base al loro "andamento" le successioni a valori reali si dicono

- *Crescenti* se $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in N$;
- *Non decrescenti* se $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in N$;
- *Decrescenti* se $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in N$;
- *Non crescenti* se $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in N$.

7.3 Successioni e modelli

L'*accrescimento geometrico*

Una popolazione aumenta ogni anno in proporzione al numero d'individui presenti. Il coefficiente di proporzionalità sia λ. Indicato con a_n il numero d'individui presenti all'inizio dell'*n*-esimo anno, si definisce la successione per ricorrenza che esprime il numero di individui

$$a_{n+1} = a_n + \lambda a_n,$$

il cui termine generale è rappresentato dalla relazione

$$a_n = a_0(1+\lambda)^n.$$

L'*accrescimento con risorse limitate*

Il modello di crescita visto nell'esempio precedente è consistente solo se le risorse sono illimitate. Nella realtà, questo non accade praticamente mai. Una correzione ragionevole può essere apportata supponendo una quantità di risorse limitata ad un numero *M* di individui della popolazione, e l'accrescimento annuale proporzionale alle risorse non ancora sfruttate:

$$a_{n+1} = a_n + \lambda(M - a_n).$$

In questo caso la ricerca del termine generale richiede qualche ragionamento supplementare. Poiché la successione è *limitata* da *M*, possiamo pensare di assumere come incognita il termine

$$x_n = M - a_n.$$

Con questa scelta risulta $a_{n+1} = M - x_{n+1} = M - x_n + \lambda x_n \Rightarrow x_{n+1} = x_n(1-\lambda)$.

Il termine generico della successione così definita è quindi

$$x_n = x_0(1-\lambda)^n,$$

da cui segue

$$a_n = M - (M - a_0)(1-\lambda)^n.$$

La capitalizzazione dell'*interesse composto*

Un capitale di dieci milioni di euro è depositato in banca al tasso di interesse composto annuo del 10%(!). Questo significa che gli interessi vengono calcolati sul totale progressivo al termine di ogni anno secondo lo schema proposto nella seguente tabella.

ANNI	TOTALE (MILIONI)
0	$C_0 = 10$
1	$C_1 = C_0 + C_0 \cdot \frac{10}{100} = C_0(1+0{,}1)$
2	$C_2 = C_1 + C_1 \cdot \frac{10}{100} = C_0(1+0{,}1)^2$
3	$C_3 = C_2 + C_2 \cdot \frac{10}{100} = C_0(1+0{,}1)^3$
n	$C_n = C_{n-1} + C_{n-1} \cdot \frac{10}{100} = C_0(1+0{,}1)^n$

Possiamo così formalizzare la legge di capitalizzazione dell'interesse composto:

$$C_n = C_0(1+r)^n,$$

che esprime il termine generale della successione definita per ricorrenza: $\begin{cases} C_0 = C \\ C_{n+1} = C_n(1+r) \end{cases}$.

La ricerca del termine generale della successione di Fibonacci

La rapidità di crescita della successione di Fibonacci suggerisce la ricerca di un termine generico dall'andamento esponenziale. Poniamo $a_n := x^n$ e sostituiamo nella legge ricorsiva $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

Otteniamo $x^{n+1} = x^n + x^{n-1} \Rightarrow x^{n-1}\left(x^2 - x - 1\right) = 0 \Rightarrow \ \alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Si hanno quindi ben due candidati termini generali, $a_n = \alpha^n$ e $a_n = \beta^n$, ma nessuna delle due soddisfa le condizioni iniziali $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ della definizione di successione di Fibonacci.

Per dirimere la questione, si osserva innanzitutto che se una successione a_n soddisfa la legge ricorsiva, allora la soddisferà anche la successione Aa_n. In particolare, se b_n è un'altra successione "buona", allora lo sarà anche la *combinazione* $Aa_n + Bb_n := A\alpha^n + B\beta^n$ (verificare quest'ultima affermazione). L'utilizzo della combinazione delle due soluzioni dell'equazione di secondo grado è suggerito anche dalle due condizioni iniziali; è proprio nel rispetto di queste che vengono determinati i coefficienti A, B della combinazione lineare:

$$\begin{cases} A\alpha^0 + B\beta^0 = 0 \\ A\alpha^1 + B\beta^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \dfrac{1}{\beta - \alpha} = \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \\ A = \dfrac{1}{\alpha - \beta} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Esercizio

Si trovi il termine generale della successione definita per ricorrenza: $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n} \end{cases}$.

Scriviamo i primi termini di questa successione: $\frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{7}, \frac{7}{11} \dots$. Si osserva che i numeratori e i denominatori sono successioni di Fibonacci: $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \end{cases}, \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 3 \\ b_{n+1} = b_n + b_{n-1} \end{cases}$. Ragionando come nel caso della successione originale, si ha

$$\begin{cases} A\alpha^0 + B\beta^0 = 2 \\ A\alpha^1 + B\beta^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$ e $b_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$, da cui

segue il termine generico $u_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}$.

Metodo per la ricerca del termine generico di una successione definita per ricorrenza

Si trovi il termine generale della successione definita per ricorrenza: $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n - 1 \end{cases}$.

Notiamo subito che la presenza del termine -1 nella legge ricorsiva non fa assumere a questa il carattere di progressione geometrica. Introduciamo un artificio matematico che permette di aggirare l'ostacolo, e trattare così una progressione geometrica. Definiamo quindi la successione $b_n := a_n - x$, dove *x* è una quantità da determinarsi in modo da rendere b_n una progressione geometrica. Si ha dunque $b_{n+1} = a_{n+1} - x = \frac{1}{3}(b_n + x) - 1 - x \Rightarrow b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n - \frac{2x}{3} - 1$. Se poniamo

$-\frac{2x}{3}-1=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ la successione b_n è una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{3}$ e primo termine $b_n := a_n - x \Rightarrow b_0 = a_0 + \frac{3}{2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$, da cui segue $b_n = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{3^n} \Rightarrow a_n = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{3^n} - \frac{3}{2}$.

7.4 Le sommatorie

Per indicare in modo sintetico la somma di un certo numero di termini $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ si ricorre ad un simbolo, detto di *sommatoria* (introdotto da Fourier nella prima metà dell'800):

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

dove il termine a_k è detto *termine generico di indice k* della sommatoria.

La somma dei primi *n* termini di una progressione aritmetica

Cominciamo con il calcolo della somma dei primi *n* numeri naturali:

$$s_n = 1 + 2 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

Osserviamo che, per la proprietà commutativa, tale somma può essere scritta come

$$s_n = n + (n-1) + (n-2) + ... + 1 = ((n-1)+1) + ((n-2)+1) + ... + ((n-n)+1) = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)$$

Uguagliando le due sommatorie riferite alla stessa somma parziale:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} n - \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n \cdot n - \sum_{k=1}^{n} k + n \cdot 1 \Rightarrow$$

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n$$

segue

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Il procedimento fornisce la formula per la somma di una generica progressione aritmetica:

$$(\alpha+\beta) + (\alpha+2\beta) + ... + (\alpha+n\beta) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha+k\beta).$$

Applicando la formula precedentemente trovata otteniamo:

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha+k\beta) = n\alpha + \beta\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(2\alpha+(n+1)\beta)}{2}.$$

Come applicazione di quest'ultimo risultato, calcoliamo la somma dei primi *n* numeri dispari:

$$1+3+5+7+...+(2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

Si tratta di una progressione aritmetica con $\alpha = -1, \quad \beta = 2$, di conseguenza

$$1+3+5+7+...+(2n-1) = \sum_{k=1}^{n} 2k-1 = \frac{n(-2+(n+1)2)}{2} = n^2.$$

La somma dei quadrati dei primi *n* interi

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Consideriamo il seguente artificio:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-k^3=(n+1)^3-1^3$$

di questo fatto è facile convincersi ponendo ad esempio $n=4$ e sviluppando i termini della sommatoria; il principio di induzione, poi, renderà "ufficiale" il risultato (utile esercizio…).
Ora, applicando semplici proprietà della sommatoria otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-k^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+n.$$

Uguagliando questo risultato al precedente, possiamo isolare il termine $\sum_{k=1}^{n}k^2$ e ottenere:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

La somma dei primi *n* termini di una progressione geometrica

Sia $S_n=1+b+b^2+\cdots b^{n-1}$ la somma dei primi *n* termini di una progressione geometrica.
Moltiplichiamo ambo i membri dell'uguaglianza per la ragione *b* ed eseguiamo la sottrazione:

$$S_n=1+b+b^2+\cdots b^{n-1}$$

$$\underline{bS_n=b+b^2+b^3+\cdots+b^{n-1}+b^n}$$

$$(1-b)S_n=1+b+b^2+\cdots b^{n-1}-\left(b+b^2+b^3+\cdots+b^{n-1}+b^n\right)=1-b^n\cdot$$

$$S_n=\frac{1-b^n}{1-b}$$

Esercizi

1. Si trovi il termine generale delle seguenti successioni definite per ricorrenza:
$$a)\begin{cases}a_0=1\\ a_{n+1}=\sqrt{1+a_n^2}\end{cases};b)\begin{cases}a_0=2\\ a_{n+1}=-a_n+a_n^2\end{cases};c)\begin{cases}a_0=3\\ a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+1\end{cases};d)\begin{cases}a_0=2\\ a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}\end{cases}.$$
2. Si trovi l'indice, a partire dal quale, i termini della successione $a_n=n^2-10n+25$, superano quelli della successione $a_n=n$.
3. Dimostrare che la successione $a_n=\frac{2n-5}{3n}$ è crescente.
4. Dimostrare che la successione $a_n=n-n^2$ è decrescente.
5. Studiare l'andamento delle seguenti successioni: $a_n=1-\frac{2}{n}$, $b_n=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$,
$c_n=\frac{n}{(n+1)(n+2)}$.
6. Da una successione vengono "estratti" i seguenti termini:
$a_1=1,a_3=2,a_7=3,a_{15}=4,a_{31}=5,a_{63}=6,a_{127}7,\cdots$. Dimostrare che la legge di formazione della successione estratta è $a_{2^n-1}=n$.
7. Formulare una legge di ricorrenza, e determinare il termine generale della successione
$1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{4},\frac{1}{4\sqrt{2}},\ldots.$

8. Di una progressione geometrica è noto che $a_5 = 15$ e $a_9 = 3$. Si calcoli la ragione ed il termine a_0.

9. Data la successione $\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2 \end{cases}$

a) Stabilire se si tratta di una progressione aritmetica o geometrica;
b) dimostrare che la successione $b_n = a_n - 3$ è una progressione geometrica;
c) esprimere b_n e a_n mediante il termine generale.

10. Studiare la progressione geometrica di valore iniziale 1 e ragione $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

11. Si trovino la ragione, i termini intermedi, ed il decimo termine, della progressione aritmetica in cui il primo termine è 23 ed il quinto è 91.

12. Posto $s_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$, dimostrare per induzione che si ha $s_{2^n} \geq \frac{n}{2}$. Provare, poi, ad "intuire" questa disuguaglianza scrivendo i primi termini:

$s_1 = 1;$

$s_2 = 1 + \frac{1}{2} \geq \frac{2}{2};$

$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 = \frac{4}{2}$

...

13. Scrivere un algoritmo che permetta il calcolo del fattoriale di un numero

14. Calcolare $\sum_{k=1}^{10} \frac{n+1}{n^2} - \sum_{n=3}^{9} \frac{n+1}{n^2}$

15. Calcolare la somma dei cubi dei primi *n* numeri interi (utilizzare l'artificio esposto nell'esempio 2). Si giunge al risultato, noto come *teorema di Nicomaco*, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$.
Dimostrare questo risultato anche con il principio di induzione.

16. Dimostrare che se $-1 < a < 0$ si ha $(1+a)^n \leq 1 + na + \frac{n^2a^2}{2}$.

17. Calcolare il valore della seguente somma: $1 + q + 2q^2 + 3q^3 + ... + nq^n$.

18. La somma dei primi cinque termini di una progressione aritmetica è 65. La somma dei reciproci del secondo e del quarto termine è $\frac{13}{80}$. Trovare il termine iniziale e la ragione.

19. Dimostrare che se *n* numeri sono in progressione aritmetica, la somma fra il primo e l'ultimo termine è uguale alla somma tra il secondo e il penultimo, tra il terzo e il terzultimo e così via.

20. Da un punto P esterno a un cerchio si mandi una tangente, che tocca il cerchio in un punto T, e una secante che taglia il cerchio nei punti A e B. Dimostrare che le lunghezze dei segmenti PA, PT e PB sono in progressione geometrica.

21. Il prezzo di un oggetto di antiquariato aumenta del 5% ogni anno. Se il prezzo oggi è di 5000 euro, quale sarà il prezzo tra *n* anni? Supponiamo che il proprietario dell'oggetto fra quattro anni si trovi nella condizione di doverlo vendere e decide di abbassare il prezzo del 5% ogni anno, fino a quando qualcuno non si fa avanti per comprarlo. Nell'ipotesi in cui nessun compratore si è fatto avanti, è possibile affermare che dopo quattro anni il prezzo è tornato uguale a quello di oggi?

22. Calcolare il termine generale delle seguenti successioni definite per ricorrenza:
$a)\begin{cases} a_0 = b \\ a_{n+1} = a_n^2 \end{cases};\quad b)\begin{cases} a_0 = b > 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} \end{cases};\quad c)\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \alpha a^n + \beta^n \end{cases}.$

23. Trovare il termine generico della successione $0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{6}{7}, \cdots$.

24. Una successione è definita in modo ricorsivo ponendo $a_1 = 1$ e, per $n > 1$,
$a_n = \begin{cases} 1 + a_{\frac{n}{2}} & n = pari \\ \dfrac{1}{a_{n-1}} & n = dispari \end{cases}$. Se $a_n = \frac{19}{87}$, qual è il valore di *n*?

25. Sia S_n la somma dei primi *n* termini della successione $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \cdots$. Dopo aver fatto il calcolo di S_n per i primi valori di *n*, formulare una congettura riguardo alla forma del termine generale, e dimostrarla per ricorrenza.

26. Date due semirette r e s uscenti dal vertice O che formano un angolo di 30° siano:
- A_0 il punto di r che dista 1 da O
- A_1 il piede della perpendicolare condotta da A_0 a s
- A_2 il piede della perpendicolare condotta da A_1 a r.

Esprimere la lunghezza della spezzata $A_0 A_1 A_2 \ldots A_n$

27. (Gara Nazionale di Matematica 2000) Manolo e Michele vengono assunti lo steso giorno in banca. Lo stipendio di Manolo è di 100 euro il primo mese e aumenta di 100 euro ogni mese. Quello di Michele è di 1 euro il primo mese e raddoppia ogni mese. Nel primo mese in cui il guadagno totale (dal primo giorno di lavoro fino a quel momento) di Michele avrà superato quello di Manolo, quale sarà la differenza tra detti guadagni?

28. (Gara Nazionale di Matematica 1986) Trovare il termine generale della successione a_n definita per ricorrenza nel modo seguente, a partire dal numero reale $\alpha > 0$: $\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n} \end{cases}$.

29. Una catena di S. Antonio inizia inviando SMS a 10 persone, ognuna delle quali dovrà inviarne a sua volta 10 a 10 persone diverse, e così via. Nell'ipotesi in cui tutte le persone abbiano spedito i messaggi, si calcoli la spesa complessivamente sostenuta fino al sesto livello della catena, nell'ipotesi in cui il costo di un SMS sia 0,10€.

30. Si trovino 8 numeri dispari consecutivi, la cui somma sia 2^9.

31. Una scacchiera $n \times n$ viene riempita nel seguente modo: nella casella in alto a sinistra si scrive 1, ed in ogni altra casella il successivo di quello immediatamente a sinistra, o immediatamente sopra. Si dimostri che la somma dei numeri che sono stati scritti riempiendo la scacchiera è n^3. (provare per induzione, oppure direttamente sommando lungo le diagonali…).

32. Si trovi il termine generico della successione definita per ricorrenza $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2 \end{cases}$.

33. Si trovi il termine generico delle seguenti successioni:

$$a_n = 0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{7}, \ldots n \geq 0; \quad b_n = 3, 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}, \ldots n \geq 4 \quad .$$

34. Si trovi il termine generico della successione definita per ricorrenza $\begin{cases} a_0 = \frac{8}{3} \\ a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n + 1 \end{cases}$.

35. Nel triangolo rettangolo ABC il raggio della circonferenza inscritta misura 1. Si consideri la catena di circonferenze tangenti esternamente tra loro, al cateto BC ed all'ipotenusa AB. La prima circonferenza della catena sia quella inscritta nel triangolo rettangolo. Si esprima in funzione dell'angolo in $\hat{B} = 2x$ la somma delle lunghezze delle circonferenze che costituiscono la catena.

Soluzioni

1. $a) a_n = \sqrt{n}; \quad b) a_n = 2;$

5. a) crescente; b) alternata; c) decrescente.

7. $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

8. $a_n = 75\sqrt[4]{5} \cdot (5)^{-\frac{n}{4}}$.

9. $a_n = \frac{2}{3^n} + 3$.

10. $a_n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$: i termini della successioni sono vertici di un esagono regolare di raggio 1.

11. $a_n = 23 + 17n$.

14. $\frac{143}{50}$.

17. $S_n = \frac{1 - q^{n+1} - q\left(1 + nq^n\right)\left(1 - q\right)}{\left(1 - q\right)^2}$.

18. $a_n = 7 + 3n; \quad a_n = 19 - 3n$.

21. Dopo 8 anni il prezzo sarà $5.000\left(1 - \left(0,05\right)^2\right)^4 = 4950€$.

22. $a) a_n = b^{2^n}$; $b) a_n = b^{(-1)^n}$; $c) a_n = \beta \dfrac{(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta}$.

23. $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

24. $n = 1904$.

25. $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

26. $L_n = \dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

27. Il "sorpasso" avviene al 14-esimo anno, la differenza tra i due stipendi alla fine di quel mese sarà pari a 5.883€.

28. $a_n = \dfrac{\alpha}{1+n\alpha}$.

29. 111.111€.

30. $\sum_{k=h}^{h+8}(2k+1) = 2^9 \Rightarrow h = 28 \Rightarrow 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71$.

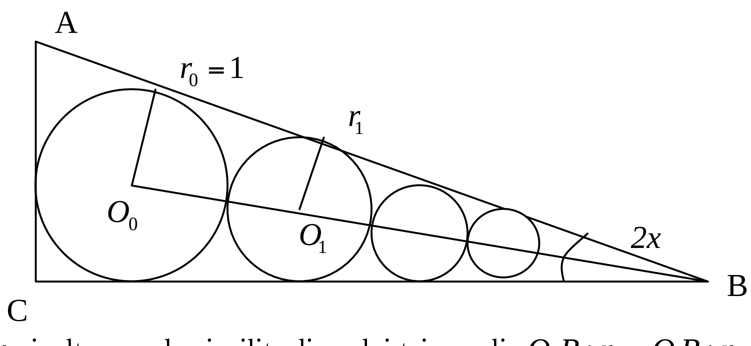
31. Si sommi sulle diagonali: $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \ldots + n \cdot n$

32. $a_n = 4 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

33. $a_n = \dfrac{n(-1)^n}{n+2}$; $b_n = \dfrac{n+2}{n}$.

34. $b_n := a_n - x \Rightarrow b_{n+1} = \dfrac{2}{5} b_n + 1 - \dfrac{3}{5} x \Rightarrow x = \dfrac{5}{3} \Rightarrow b_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n \Rightarrow a_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n + \dfrac{5}{3}$

35.



Posto $\hat{B} = 2x$ risulta, per la similitudine dei triangoli, $O_0B : r_0 = O_1B : r_1$. Da $O_1B = O_0B - (r_0 + r_1) \Rightarrow O_1B = O_0B - (1 + r_1)$ segue $O_0B = \left(\dfrac{1+r_1}{1-r_1}\right)$. Essendo $1 = O_0B \sin x \Rightarrow r_1 = \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$. Iterando il procedimento per similitudine, il raggio della circonferenza n-esima della catena è $r_n = \left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^n$. Di conseguenza la somma delle circonferenze è data dalla somma della serie geometrica $S = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi r_n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi \left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^n = \pi \left(\frac{1+\sin x}{\sin x}\right)$.