ESERCIZI TRIGONOMETRIA

1. In un generico rettangolo, si indichi con *x* l'angolo che una diagonale forma con un lato. Si esprima in funzione di *x* il rapporto tra i raggi delle due circonferenze inscritte nei triangoli isosceli individuati dalle due diagonali. Sempre in funzione di *x*, si esprima la lunghezza del segmento *d* congiungente i centri delle due circonferenze.

- $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{a} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$, $\quad d = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - r_2\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - r_1\right)^2}$

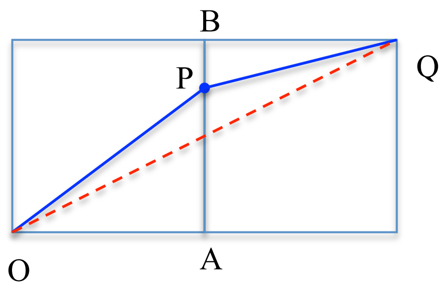
2. Sulla semiretta *s* di origine O si segni il punto H a distanza *b* da O, e si conduca per esso la perpendicolare *p* a *s*. Sia *t* la semiretta con origine nel medesimo punto O, che incontra *p* nel punto P, e sia $x := P\hat{O}H$. Indicata con *n* la perpendicolare al segmento PO condotta da H, sia C il punto in cui *n* interseca la bisettrice dell'angolo delimitato dalle semirette *t* e *p*, con origine in P, esterno al triangolo OPH. Si esprima in funzione di *x* il rapporto tra la misura del raggio della circonferenza di centro C e tangente alle semirette *p* e *t*, e quella dell'altezza del triangolo CPH riferita alla base CH.

- $\frac{r}{h} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

3. Indicato con O un vertice di un cubo, sia P un punto su uno spigolo opposto ad O, di vertici A e B. Congiungiamo P con un vertice Q di una faccia avente in comune con quella a cui appartengono O e P lo spigolo di estremi A e B. Si determini la funzione $f(x) = \overline{OP} + \overline{PQ}$ in funzione dell'angolo $x = A\hat{O}P$. Per quale valore dell'angolo la funzione assume il valore minimo?

$$f(x) = l\left(\sqrt{1 + (1 - \tan x)^2} + \sqrt{1 + \tan^2 x}\right)$$

$$\tan x_{\min} = \frac{l}{2l} \Rightarrow x_{\min} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x_{\min}) = l\sqrt{5}$$

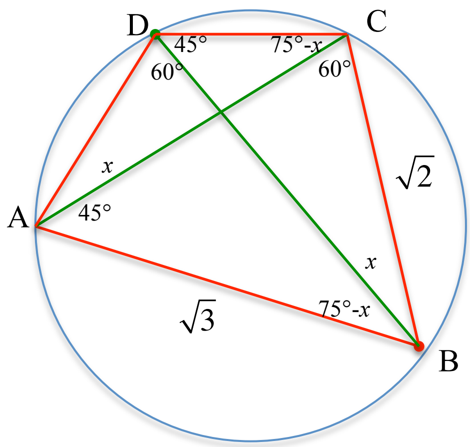


4. In una circonferenza unitaria si traccino due corde aventi un estremo in comune, ed aventi lunghezza $\overline{AB} = \sqrt{3}$ e $\overline{BC} = \sqrt{2}$. Preso un punto D sull'arco AC che non contiene B, si ponga $D\hat{A}C := x$ e se ne individuino i limiti geometrici. Tracciate le diagonali AC e DB del quadrilatero ABCD:

a. Si trovino le ampiezze degli otto angoli che vengono a formarsi;

b. Si determini la posizione di D che rende massima la lunghezza della diagonale DB;
c. Si dica per quali valori di x risulta $\overline{DB} = \overline{DC}$.

- a) vedi figura.

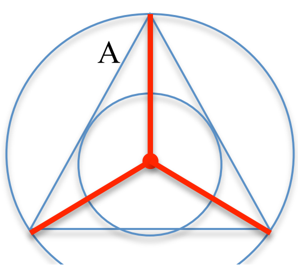


- I limiti geometrici possono essere individuati ragionando sulla somma degli angoli interni al triangolo DAC: $180° = 105° + x + D\hat{C}A$, da cui segue che $x = 0$ se $D \equiv C$, e $x = 75°$ se $D \equiv A$. Di conseguenza $0° < x < 75°$.
- b) La lunghezza della diagonale DB si trova con il teorema della corda: $\overline{DB} = 2\sin(45° + x)$. Tale lunghezza è massima se $45° + x = 90° \Rightarrow x = 45°$.
- c) Si ha $\overline{DB} = \overline{DC} \Leftrightarrow 2\sin(45° + x) = 2\sin x \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = x + 45° \Rightarrow \textit{impossibile} \\ 180° - x = 45° + x \Rightarrow x = \dfrac{135°}{2} = 67{,}5° \end{array}$.

1. Nel triangolo ABC il lato BC misura 1 e l'ampiezza dell'angolo in A è $\dfrac{\pi}{3}$. Condotte le bisettrici BM e CN, si determini per quale triangolo ABC risulta minima la somma dei raggi delle circonferenze circoscritte ai triangoli BNC e BMC.

[Si ponga $C\hat{B}A := x \Rightarrow B\hat{C}A = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{x}{2}$. Si applichi il teorema della corda ai triangoli BCM, dove $2r_1 \sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right)$, e BCN, dove $2r_2 \sin\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{2\pi}{3}\right)$. Allora $r_1 + r_2 := f(x) = \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{x}{2}\right)}$ è minima quando il denominatore assume il valore massimo, ovvero 1, $x = \dfrac{\pi}{3}$]

6. Un triangolo A B C, isoscele sulla base BC, ha area costante s^2. Si determini, in funzione dell'ampiezza dell'angolo al vertice, il prodotto $R \cdot r$ R · r del raggio R della circonferenza circoscritta e del raggio r della circonferenza inscritta.



C B

[Per il teorema della corda risulta $\overline{AB} = \overline{AC} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 2R\cos\frac{x}{2}$, dove R è il raggio della circonferenza circoscritta. Scriviamo l'area come somma delle aree dei triangoli AOB, AOC, e BOC, dove O è il centro della circonferenza inscritta:
$s^2 = 2Rr\cos\frac{x}{2} + Rr\sin x \Rightarrow Rr := f(x) = \frac{s^2}{2\cos\frac{x}{2} + \sin x}$].