

ESERCIZI LOGARITMI

Risolvere le seguenti equazioni esponenziali e logaritmiche:

$$1. \quad 2^{x+3} - \sqrt{2^{4+2x}} = 4 + 2 \cdot 4^{\frac{x}{2}}$$

$$\bullet \quad 2^x := t \Rightarrow 8t - \sqrt{16t^2} = 4 + 2t \Rightarrow 2t = 4 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$2. \quad \sqrt{\log_3 x} - 6 \log_3 \sqrt{x} = 0$$

$$\bullet \quad x > 0; \quad \log_3 x := t \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ \sqrt{t} - 6 \cdot \frac{1}{2} t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ t - 9t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ t = 0 \vee t = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_3 x = \frac{1}{9} \Rightarrow x = 3^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{3} \vee \log_3 x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$3. \quad 2^{x+1} - 2^x + 2^{x-2} = 5$$

$$\bullet \quad 2^x := t \Rightarrow 2t - t + \frac{t}{4} = 5 \Rightarrow \frac{5}{4}t = 5 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$4. \quad \log_2(x+1) + \log_2(x+2) = 2 + \log_2 3$$

$$C.E. \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -1$$

$$\bullet \quad \log_2[(x+1)(x+2)] = \log_2 12 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 12 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x = -5 \text{ non accettabile} \\ x = 2 \text{ accettabile} \end{matrix}$$

6. Risolvere la seguente disequazione: $\log_2 x > -\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x}$.

- Scriviamo il logaritmo in base un mezzo nel corrispondente logaritmo in base due:

$$-\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x} = -\frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 \frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{x}. \text{ Di conseguenza la disequazione diventa}$$

$$\log_2 x > \log_2 \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \vee x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1.$$

7. Si risolvano le seguenti disequazioni

a) $\log_2 \log_{\frac{1}{2}}(x-6) < 0$;

$$\bullet \quad 0 < \log_{\frac{1}{2}}(x-6) < 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x-6) > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x-6) < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x-6 < 1 \\ x-6 > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < x-6 < 1 \Rightarrow \frac{13}{2} < x < 7$$

b) $2^x - 1 > \sqrt{3 \cdot 2^x - 3}$. Si ricordi che $\sqrt{A(x)} < B(x) \Rightarrow \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$.

$$\bullet \quad \begin{cases} 2^x - 1 \geq 0 \\ 3 \cdot 2^x - 3 \geq 0 \\ 3 \cdot 2^x - 3 < (2^x - 1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x \geq 1 \\ 2^x \geq 1 \\ (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2^x < 1 \vee 2^x > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \vee x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

La popolazione di expolandia decresce con modello esponenziale da 550.000 a 450.000 dal 2008 al 2010. Quanti abitanti avrà expolandia nel 2012? Si scriva la legge esponenziale nella forma $N(t) = N_0 e^{kt}$, dove t è il numero di anni dal 2008 (cioè, $t = 0$ nel 2008, $t = 1$ nel 2009 etc.).

$$2008 : N_0 = N(0) = 550.000$$

$$\bullet \quad 2010 : N_2 = N(2) = 450.000 = 550.000 e^{k \cdot 2} \Rightarrow 2k = \ln \frac{450.000}{550.000} \Rightarrow k = -0,1$$

$$2012 : N_4 = N(4) = 550.000 e^{-0,1 \cdot 4} = 368676 \cong 370.000$$

Esercizi

$$1. \quad \log_5(x+1) + \log_5 4 = \log_5 6x \quad x = 2$$

$$2. \quad \log_2^2 x^2 + 4 \log_2 \sqrt{x} - 2 = 0 \quad x = \sqrt{2}; \quad x = \frac{1}{2}$$

$$3. \quad \sqrt{\log_2^2 x + \log_2 x - 2} = \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \quad x = \frac{1}{4}$$

$$4. \quad \log \sqrt{|x-2|+2x} - \frac{1}{2} \log(3x+7) = 0 \quad x = -\frac{5}{6}$$

$$5. \quad \frac{\log_{\frac{1}{3}}(2x+4) + \log_3 x + \log_3(x-1)}{\log_3 \frac{x}{2}} = 0 \quad x = 4$$

$$6. \quad \text{Risolvere il seguente sistema:} \begin{cases} \log_{xy} 12 = 1 \\ 2^{x-4} \cdot 3^{x-1} = \frac{6^y}{8} \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 4 & y = 3 \\ x = -3 & y = -4 \end{matrix}$$

$$7. \quad a) \frac{2^{x-1} \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt{10}} = 5^{x+1} \quad x = \frac{\frac{7}{6} \ln 5 + \frac{3}{2} \ln 2}{\ln 2 - \ln 5}.$$

$$b) \frac{1}{2} \log(7+3x) = \log(1-\sqrt{x+2}) \quad x = -2$$

$$8. \quad a) \sqrt{2\sqrt{2}} = 4^{1-x} \quad x = \frac{5}{8}$$

$$b) \text{Log} 5 - \text{Log}(3+\sqrt{x}) = \text{Log}(3-\sqrt{x}) \quad x = 4$$

$$9. \quad a) \frac{1}{4\sqrt{2}} = 8^x \quad x = -\frac{5}{6}.$$

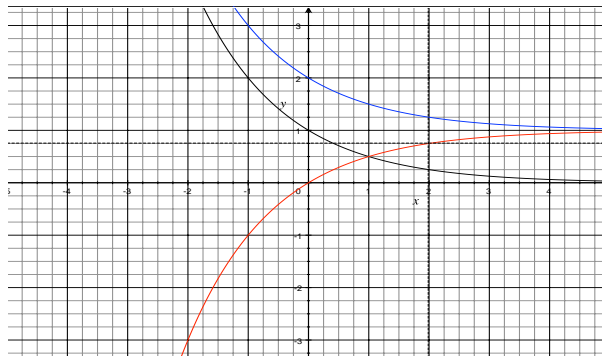
$$b) \log_3(x^2+x) - \log_3(x^2-x) = 1 \quad x = 2$$

$$10. \quad \log_{\frac{1}{y}}(\log_y x) > \log_y(\log_y x) \quad \begin{cases} 0 < x < y \vee 1 < x < \frac{1}{y}; & 0 < y < 1 \\ 0 < x < \frac{1}{y} \vee 1 < x < y; & y > 1 \end{cases}$$

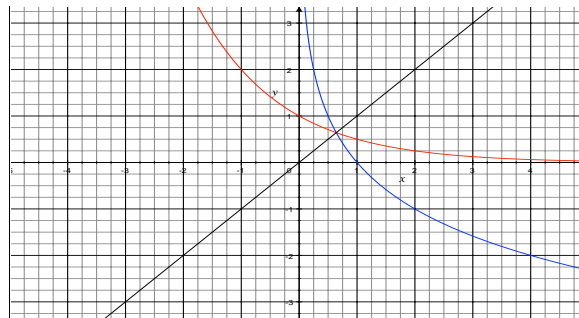
$$a) y = 2^{-x}$$

11. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni: $b) y = 2^{-x} + 1$.

$$c) y = 1 - 2^{-x}$$

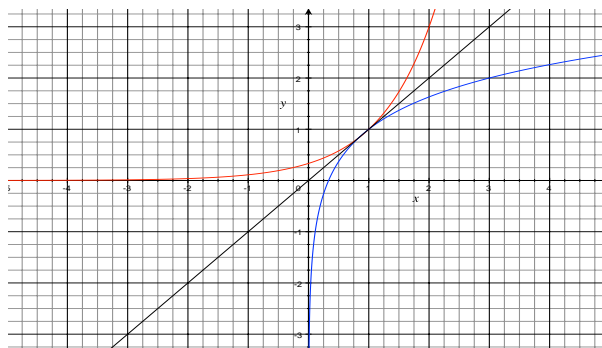


12. Tracciare il grafico della funzione $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, a partire da quello della funzione $y = \frac{1}{2^x}$. Che relazione sussiste tra le due funzioni?



13. Data la funzione $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$ determinare la funzione inversa $f^{-1}(x)$, tracciare i grafici delle due funzioni sullo stesso diagramma cartesiano, e risolvere la disequazione $f^{-1}(x) \leq 1$.

• $f^{-1}(x) = 1 + \log_3 x$ $0 < x \leq 1$.

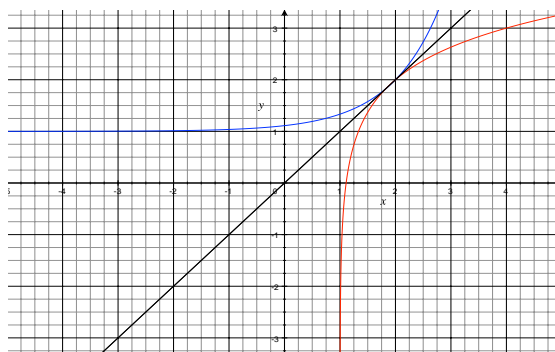


14. Determinare l'equazione cartesiana del luogo geometrico le cui equazioni parametriche sono: $\begin{cases} x = \log_2(1+k) \\ y = k-1 \end{cases}$ per valori di $k > -1$.

- $y = 2^x - 2$

15. Data la funzione $f(x) = 1 + 3^{x-2}$ determinare l'insieme di definizione, l'immagine, la funzione inversa e tracciare i grafici della funzione e dell'inversa.

- $D \equiv \mathbb{R} \quad I \equiv \{y \in \mathbb{R} | y > 1\} \quad y = 2 + \log_3(x-1)$



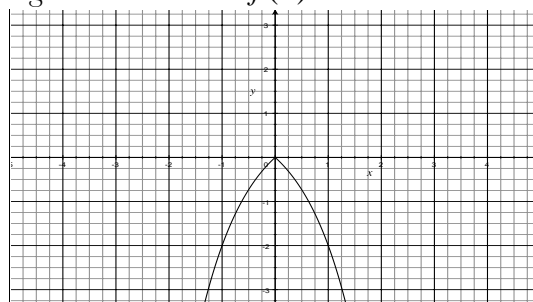
16. Date le funzioni $f(x) = |2x|$ e $g(x) = \log_2(x-1)$, determinare la funzione composta $f(g(x))$ e risolvere la disequazione $g(f(x)) > 1$.

- $f(g(x)) = |2 \log_2(x-1)| \quad x < -\frac{3}{2} \vee x > \frac{3}{2}$

17. Risolvere la seguente disequazione: $25^x - 13 \cdot 5^x + 30 \geq 0$.

- $x \leq \log_5 3 \vee x \geq \log_5 10$

18. Tracciare il grafico della seguente funzione $f(x) = 1 - 3^{|x|}$.



19. Il numero di nuclei presenti al tempo t , in una massa radioattiva, è determinato dalla legge $n(t) = n_0 e^{-\alpha t}$. Dopo quanto tempo la massa non decaduta è un decimo della massa iniziale?

Si assuma per α il valore $\alpha = 10^{-3} s^{-1}$.

- $n(t) = \frac{1}{10} n(0) \Rightarrow n_0 e^{-\alpha t} = n_0 10^{-1} \Rightarrow t = 10^3 \ln 10 = 2303 s = 38'22''$

20. Risolvere la seguente disequazione logaritmica: $\log_{\frac{1}{x-1}}(x^2 - 1) \leq \log_{x-1} x^2$.

- $1 < x < \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \vee x > 2$

21. Si tracci il grafico della funzione $f(x) = 1 + \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x}$.

