ESERCIZI SUCCESSIONI

1. Si trovi il termine generale delle seguenti successioni definite per ricorrenza:
$$a)\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{1+a_n^2} \end{cases};b)\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = -a_n + a_n^2 \end{cases};c)\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + 1 \end{cases};d)\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{1-a_n} \end{cases}.$$
2. Si trovi l'indice, a partire dal quale, i termini della successione $a_n = n^2 - 10n + 25$, superano quelli della successione $a_n = n$.
3. Dimostrare che la successione $a_n = \dfrac{2n-5}{3n}$ è crescente.
4. Dimostrare che la successione $a_n = n - n^2$ è decrescente.
5. Studiare l'andamento delle seguenti successioni: $a_n = 1 - \dfrac{2}{n}$, $b_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$, $c_n = \dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$
.
6. Da una successione vengono "estratti" i seguenti termini:
$a_1 = 1, a_3 = 2, a_7 = 3, a_{15} = 4, a_{31} = 5, a_{63} = 6, a_{127} 7, \cdots$. Dimostrare che la legge di formazione della successione estratta è $a_{2^n-1} = n$.
7. Formulare una legge di ricorrenza, e determinare il termine generale della successione
$1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4\sqrt{2}}, \ldots.$.
8. Di una progressione geometrica è noto che $a_5 = 15$ e $a_9 = 3$. Si calcoli la ragione ed il termine a_0 .
9. Data la successione $\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + 2 \end{cases}$

   a) Stabilire se si tratta di una progressione aritmetica o geometrica;
   b) dimostrare che la successione $b_n = a_n - 3$ è una progressione geometrica;
   c) esprimere b_n e a_n mediante il termine generale.
10. Studiare la progressione geometrica di valore iniziale 1 e ragione $\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
11. Si trovino la ragione, i termini intermedi, ed il decimo termine, della progressione aritmetica in cui il primo termine è 23 ed il quinto è 91.
12. Posto $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$, dimostrare per induzione che si ha $s_{2^n} \geq \dfrac{n}{2}$. Provare, poi, ad "intuire" questa disuguaglianza scrivendo i primi termini:
$s_1 = 1;$
$s_2 = 1 + \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{2}{2};$
$s_4 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} \geq 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = 2 = \dfrac{4}{2}$
...
13. Scrivere un algoritmo che permetta il calcolo del fattoriale di un numero

14. Calcolare $\sum_{k=1}^{10}\frac{n+1}{n^2}-\sum_{n=3}^{9}\frac{n+1}{n^2}$

15. Calcolare la somma dei cubi dei primi *n* numeri interi (utilizzare l'artificio esposto nell'esempio 2). Si giunge al risultato, noto come *teorema di Nicomaco*, $\sum_{k=1}^{n}k^3=(1+2+...+n)^2$. Dimostrare questo risultato anche con il principio di induzione.

16. Dimostrare che se $-1<a<0$ si ha $(1+a)^n \le 1+na+\frac{n^2a^2}{2}$.

17. Calcolare il valore della seguente somma: $1+q+2q^2+3q^3+...+nq^n$.

18. La somma dei primi cinque termini di una progressione aritmetica è 65. La somma dei reciproci del secondo e del quarto termine è $\frac{13}{80}$. Trovare il termine iniziale e la ragione.

19. Dimostrare che se *n* numeri sono in progressione aritmetica, la somma fra il primo e l'ultimo termine è uguale alla somma tra il secondo e il penultimo, tra il terzo e il terzultimo e così via.

20. Da un punto P esterno a un cerchio si mandi una tangente, che tocca il cerchio in un punto T, e una secante che taglia il cerchio nei punti A e B. Dimostrare che le lunghezze dei segmenti PA, PT e PB sono in progressione geometrica.

21. Il prezzo di un oggetto di antiquariato aumenta del 5% ogni anno. Se il prezzo oggi è di 5000 euro, quale sarà il prezzo tra *n* anni? Supponiamo che il proprietario dell'oggetto fra quattro anni si trovi nella condizione di doverlo vendere e decide di abbassare il prezzo del 5% ogni anno, fino a quando qualcuno non si fa avanti per comprarlo. Nell'ipotesi in cui nessun compratore si è fatto avanti, è possibile affermare che dopo quattro anni il prezzo è tornato uguale a quello di oggi?

22. Calcolare il termine generale delle seguenti successioni definite per ricorrenza:
$a)\begin{cases} a_0=b \\ a_{n+1}=a_n^2 \end{cases};\quad b)\begin{cases} a_0=b>0 \\ a_{n+1}=\frac{1}{a_n} \end{cases};\quad c)\begin{cases} a_0=0 \\ a_{n+1}=\alpha a^n+\beta^n \end{cases}.$

23. Trovare il termine generico della successione $0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ -\frac{4}{5},\ \frac{7}{6},\ -\frac{6}{7},\cdots$.

24. Una successione è definita in modo ricorsivo ponendo $a_1=1$ e, per $n>1$,
$a_n=\begin{cases} 1+a_{\frac{n}{2}} & n=pari \\ \frac{1}{a_{n-1}} & n=dispari \end{cases}$. Se $a_n=\frac{19}{87}$, qual è il valore di *n*?

25. Sia S_n la somma dei primi *n* termini della successione $\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{2\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 4},\ \frac{1}{4\cdot 5},\cdots$. Dopo aver fatto il calcolo di S_n per i primi valori di *n*, formulare una congettura riguardo alla forma del termine generale, e dimostrarla per ricorrenza.

26. Date due semirette r e s uscenti dal vertice O che formano un angolo di 30° siano:
- A_0 il punto di r che dista 1 da O

- A_1 il piede della perpendicolare condotta da A_0 a s
- A_2 il piede della perpendicolare condotta da A_1 a r.

Esprimere la lunghezza della spezzata $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$

27. (Gara Nazionale di Matematica 2000) Manolo e Michele vengono assunti lo steso giorno in banca. Lo stipendio di Manolo è di 100 euro il primo mese e aumenta di 100 euro ogni mese. Quello di Michele è di 1 euro il primo mese e raddoppia ogni mese. Nel primo mese in cui il guadagno totale (dal primo giorno di lavoro fino a quel momento) di Michele avrà superato quello di Manolo, quale sarà la differenza tra detti guadagni?

28. (Gara Nazionale di Matematica 1986) Trovare il termine generale della successione a_n definita per ricorrenza nel modo seguente, a partire dal numero reale $\alpha > 0$: $\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n} \end{cases}$.

29. Una catena di S. Antonio inizia inviando SMS a 10 persone, ognuna delle quali dovrà inviarne a sua volta 10 a 10 persone diverse, e così via. Nell'ipotesi in cui tutte le persone abbiano spedito i messaggi, si calcoli la spesa complessivamente sostenuta fino al sesto livello della catena, nell'ipotesi in cui il costo di un SMS sia 0,10€.

30. Si trovino 8 numeri dispari consecutivi, la cui somma sia 2^9.
31. Una scacchiera $n \times n$ viene riempita nel seguente modo: nella casella in alto a sinistra si scrive 1, ed in ogni altra casella il successivo di quello immediatamente a sinistra, o immediatamente sopra. Si dimostri che la somma dei numeri che sono stati scritti riempiendo la scacchiera è n^3. (provare per induzione, oppure direttamente sommando lungo le diagonali…).
32. Si trovi il termine generico della successione definita per ricorrenza $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 2 \end{cases}$.
33. Si trovi il termine generico delle seguenti successioni:

$$a_n = 0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{7}, \dots n \geq 0; \quad b_n = 3, 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}, \dots n \geq 4 \quad .$$

34. Si trovi il termine generico della successione definita per ricorrenza $\begin{cases} a_0 = \dfrac{8}{3} \\ a_{n+1} = \dfrac{2}{5}a_n + 1 \end{cases}$.
35. Nel triangolo rettangolo ABC il raggio della circonferenza inscritta misura 1. Si consideri la catena di circonferenze tangenti esternamente tra loro, al cateto BC ed all'ipotenusa AB. La prima circonferenza della catena sia quella inscritta nel triangolo rettangolo. Si esprima in funzione dell'angolo in $\hat{B} = 2x$ la somma delle lunghezze delle circonferenze che costituiscono la catena.

Soluzioni

1. $a) a_n = \sqrt{n}; \quad b) a_n = 2;$
   1. a) crescente; b) alternata; c) decrescente.

7. $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow a_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

8. $a_n = 75\sqrt[4]{5}\cdot(5)^{-\frac{n}{4}}$.

9. $a_n = \dfrac{2}{3^n}+3$.

10. $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{3}+i\sin\dfrac{n\pi}{3}$: i termini della successioni sono vertici di un esagono regolare di raggio 1.

11. $a_n = 23+17n$.

14. $\dfrac{143}{50}$.

17. $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}-q\left(1+nq^n\right)(1-q)}{(1-q)^2}$.

18. $a_n = 7+3n;\quad a_n = 19-3n$.

21. Dopo 8 anni il prezzo sarà $5.000\left(1-(0,05)^2\right)^4 = 4950€$.

22. $a)a_n = b^{2^n};\quad b)a_n = b^{(-1)^n};\quad c)a_n = \beta\dfrac{\left(\alpha^n-\beta^n\right)}{\alpha-\beta}$.

23. $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

24. $n = 1904$.

25. $S_n = 1-\dfrac{1}{n+1}$.

26. $L_n = \dfrac{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

27. Il "sorpasso" avviene al 14-esimo anno, la differenza tra i due stipendi alla fine di quel mese sarà pari a 5.883€.

28. $a_n = \dfrac{\alpha}{1+n\alpha}$.

29. 111.111€.

30. $\sum_{k=h}^{h+8}(2k+1) = 2^9 \Rightarrow h = 28 \Rightarrow 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71$.

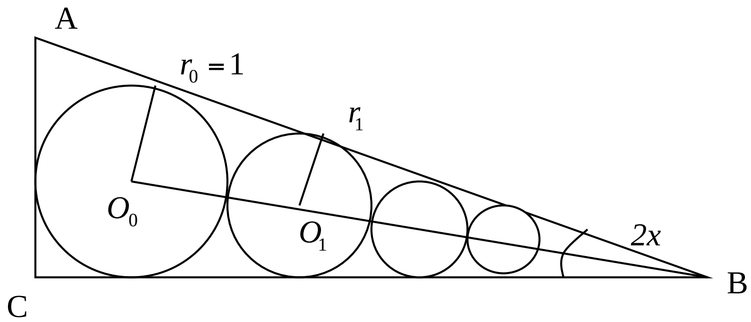
31. Si sommi sulle diagonali: $1+2\cdot 2+3\cdot 3+\ldots+n\cdot n$

32. $a_n = 4-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

33. $a_n = \dfrac{n(-1)^n}{n+2};\ b_n = \dfrac{n+2}{n}$.

34. $b_n := a_n - x \Rightarrow b_{n+1} = \frac{2}{5}b_n + 1 - \frac{3}{5}x \Rightarrow x = \frac{5}{3} \Rightarrow b_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \Rightarrow a_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}$

35.



Posto $\hat{B} = 2x$ risulta, per la similitudine dei triangoli, $O_0B : r_0 = O_1B : r_1$. Da $O_1B = O_0B - (r_0 + r_1) \Rightarrow O_1B = O_0B - (1 + r_1)$ segue $O_0B = \left(\frac{1 + r_1}{1 - r_1}\right)$. Essendo $1 = O_0B \sin x \Rightarrow r_1 = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$. Iterando il procedimento per similitudine, il raggio della circonferenza n-esima della catena è $r_n = \left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right)^n$. Di conseguenza la somma delle circonferenze è data dalla somma della serie geometrica $S = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi r_n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi \left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right)^n = \pi \left(\frac{1 + \sin x}{\sin x}\right)$.