ESERCIZI LIMITI DI SUCCESSIONI

1. Verificare che la successione $a_n = (-\frac{1}{2})^n$ è limitata e dotata di minimo e massimo.
2. Dire se le seguenti successioni sono limitate (n intero e maggiore o uguale a 1):
   a) $\frac{n!}{n^n}$; b) $\frac{\sin(n)}{n}$; c) $\sqrt{n^2+1} - n$; d) $(-1)^n(\frac{2}{3})^n$; e) $(-1)^n(\frac{3}{2})^n$
3. Verificare che le disuguaglianze seguenti sono definitivamente soddisfatte:
   a) $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{n-2}{n}$; b) $\sqrt[3]{n-2n^2} < -10$.
4. Verificare che per $a \in (0,1)$ tutti i termini della successione $a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n - a_n^3, \quad n = 2,3,..$ appartengono a (0,1).
5. Determinare per quale valore di α la successione $a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2, \quad n = 1,2,..$ è definitivamente uguale a 2.
6. Calcolare il seguente limite di successione:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n^2-1}}$$
7. Dimostrare, applicando la definizione di limite, che:
   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2}{3n^2+n+1} = -\frac{1}{3}$;
   b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^3-1} = 2$;
   c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{16n-2}{n}} = 4$.
8. Si dimostri che se una successione di numeri positivi è tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, allora $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 0$ e viceversa.
9. Un'urna contiene inizialmente palline rosse e bianche. Vengono aggiunte successivamente palline rosse e si indica con r_n e b_n la probabilità di estrarre rispettivamente una pallina rossa o una pallina bianca dopo aver aggiunto n palline rosse. Si studi il comportamento delle due successioni. E se aggiungessimo due palline rosse e una bianca ogni volta?
10. Calcolare il seguente limite: $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+4+...+2^{n+1}}{2^n}$.
11. Consideriamo il fascio di circonferenze $C_n : x^2 + y^2 - 2nx = 0$ e siano P_n i punti di ordinata negativa dati dall'intersezione della tangente a C_n nel punto di coordinate $(2n,0)$ con C_{n+1}.
    - Si determini l'equazione della curva a cui appartengono tutti i P_n;
    - esprimere l'ordinata y_{n+1} del punto P_{n+1} in funzione dell'ascissa y_n di P_n;
    - esprimere il termine generale della successione y_n;
    - calcolare il $\lim_{n\to\infty} (y_{n+1} - y_n)$.

12. Data la successione $a_n = \dfrac{1}{2n(n-1)}$ si determinino due numeri reali *r* e *s* in modo tale che risulti $a_n = \dfrac{r}{2n} + \dfrac{s}{n-1}$. Si trovi inoltre un'espressione per la somma $S_n = a_1 + ... + a_n$, e si calcoli il $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.
13. Una successione x_n ha la proprietà che $x_{n+1} - x_n \geq 1$ per ogni valore dell'indice *n*. Si calcoli, se esiste, il $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
14. Indicata con a_n la *successione di Fibonacci* $\begin{cases} a_0 = 0; & a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}; & n > 1 \end{cases}$, si dimostri che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

15. Data la parabola di equazione $y = 4x - x^2$, sia $y = nx$, con *n* intero naturale, un fascio di rette che la intersecano nei punti P_n diversi dall'origine.

- Si determinino in funzione di *n* le aree S_n dei triangoli OP_nP_{n+1};
- Si calcoli il $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_{n+1}}{S_n}$.

16. Un parallelepipedo rettangolo ha dimensioni *a, b, c* rispetto ad una determinata unità di misura. Si operano successive modifiche al parallelepipedo: ogni volta il lato *a* viene dimezzato, mentre i lati *b e c* vengono aumentati di 10 unità. Se V_0 è il volume iniziale e V_n quello ottenuto dopo *n* modifiche:
- a) Si calcoli il $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{V_n}{V_0}$;
- b) Si calcoli il $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{V_{n+1}}{V_n}$.

17. In un'azienda, se un certo dipendente è presente al lavoro, la probabilità che il giorno successivo sia presente è ½, mentre se è assente la probabilità che il giorno successivo sia presente è ¾. Nell'ipotesi che il primo giorno (giorno "0") sia presente, indicata con p_n la probabilità che sia presente il giorno *n*-esimo, si studi il comportamento della successione p_n.

18. Calcolare i seguenti limiti di successioni.

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ $\quad b) \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ $\quad c) \lim\limits_{n\to\infty} \binom{n}{2} \Big/ n^2$ $\quad d) \lim\limits_{n\to\infty} \binom{n}{2} \Big/ n$ $\quad e) \lim\limits_{n\to\infty} \binom{n}{3} \Big/ n^3$

19. Si scriva in forma compatta la somma 1+11+111+1.111+11.111.
(*suggerimento:111=1+10+100…).*
20. Calcolare il valore della seguente somma parziale: $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k+1)^2$.

21. Dopo aver dimostrato che la lunghezza del lato del poligono regolare di 2^{n+1} lati è legata a quella del poligono di 2^n lati, inscritto nella medesima circonferenza di raggio unitario, dalla

relazione $l_{2^{n+1}} = \sqrt{2-\sqrt{4-\left(l_{2^n}\right)^2}}$, si calcoli il $\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-2}$. (*Suggerimento: il perimetro del poligono regolare di* 2^{n+1} *al crescere del numero dei lati tende alla misura della circonferenza...)*

22. Una pallina viene lasciata cadere dalla quota di un metro. Ad ogni impatto col suolo dissipa una quantità di energia che la fa rimbalzare ad una quota pari a $\frac{7}{8}$ di quella precedente. Si calcoli la distanza complessiva percorsa dalla pallina quando avrà terminato di rimbalzare.

23. Si calcoli il $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2^n+n}$ evidenziando i passaggi che permettono di applicare i teoremi noti e/o i limiti notevoli.

24. Calcolare i seguenti limiti di successioni: $a)\lim_{n\to\infty}\frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1}$; $b)\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2-1}$.

25. Una pallina cade da un'altezza *h* su di un piano orizzontale e rimbalza fino a raggiungere un'altezza qh, dove $0<q<1$ ed è indipendente da *h*. Supponiamo che la pallina compia "infiniti" rimbalzi raggiungendo ogni volta una quota pari al prodotto di *q* per la quota precedente. La pallina finirà di rimbalzare in un tempo finito?

26. Un quadrato unitario è suddiviso in 9 quadrati uguali e il quadrato centrale viene colorato (il mio colore preferito è il verde, fate voi). I rimanenti 8 quadrati sono similmente divisi (ognuno, cioè, viene a sua volta diviso in 9 quadrati) e viene colorato il quadrato centrale di ciascuno di essi. Il procedimento viene iterato infinite volte. Calcolare l'area complessiva della superficie colorata.

27. Dimostrare che una successione convergente è limitata.

28. All'interno del quadrato di lato 1 è inscritta una circonferenza, all'interno della quale è inscritto un quadrato, all'interno del quale è inscritta una circonferenza, e così via. Si trovi il termine generico della successione delle misure dei lati dei quadrati così ottenuti. Indicata con $d_n = l_n^2 - \pi r_n^2$ la differenza tra l'area del quadrato e quella della circonferenza inscritta, sia $S_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$, con $d_0 = 1-\frac{\pi}{4}$. Si calcoli il $\lim_{n\to\infty} S_n$.

29. Calcolare i seguenti limiti di successioni: $a)\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n}$; $b)\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{n-1}$.

30. Verificare con la definizione il seguente limite infinito: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n}-1}$.

31. Dimostrare che, se a_n è *definitivamente* maggiore di b_n, e se $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

32. Una successione che tende a più infinito non è limitata superiormente. E' vero il viceversa, cioè che se una successione non è limitata superiormente, allora tende a più infinito?

33. Calcolare i seguenti limiti di successioni:

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^4-2n^3+3}{n^4-n^5+1}$

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{n}+1}$

34. Si verifichino con la definizione i seguenti limiti di successioni:
$a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0; b)\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2}\right)=0$.

35. Dimostrare che la successione definita per ricorrenza: $\begin{cases} a_0=2 \\ a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}\end{cases}$ non ha limite.

36. E' data la famiglia di parabole $y=x^2-nx$. Dopo aver tracciato sullo stesso piano cartesiano i grafici corrispondenti ai valori $n=1,2$:
   a) Si scriva l'equazione della retta t_n, tangente al grafico della parabola corrispondente nel punto A_n di coordinate $(n,0)$.
   b) Si determini l'equazione del luogo geometrico dei punti a cui appartengono i vertici V_n della parabola.
   c) Si indichi con P_n il punto di intersezione della retta t_n con la parabola $y=-x^2$, con A_n il punto di coordinate $(n,0)$, e con H_n la proiezione di P_n sull'asse delle ascisse. Si calcoli il rapporto q tra l'area del triangolo $V_nP_nA_n$, e quella del triangolo $H_nP_nA_n$.
   d) Si calcoli il $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(q)^k$.

37. E' Data la famiglia di parabole $\wp_n$ $y=nx^2-x$. Dopo aver tracciato sullo stesso piano cartesiano i grafici corrispondenti ai valori $n=1,2$:
   a) Per $n>1$, Si determinino i punti P_n,Q_n in cui la retta t_n, tangente al grafico della parabola $y=nx^2-x$ nel vertice V_n, incontra la parabola $y=(n-1)x^2-x$.
   b) Si trovi il punto H_n intersezione delle tangenti alla parabola $y=(n-1)x^2-x$, condotte dai punti P_n,Q_n.
   c) Si calcoli l'area S_n del triangolo $V_{n-1}P_nQ_n$, e l'area S_n' del triangolo $H_nP_nQ_n$.
   d) Si calcoli il $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S_n'}$.

38. In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, è data la famiglia $\wp$ di parabole di equazione
$y=nx^2-n^2x\quad,\quad n\in N\quad.$
   a) Si determini l'equazione della retta tangente *t* alla parabola della famiglia nel punto di coordinate (0,0), e si indichi con A l'altro punto in cui la generica parabola della famiglia $\wp$ incontra l'asse *x*.
   b) Si determini il punto H, intersezione della parallela *s* a *t* condotta da A, con la perpendicolare *p* a *t* condotta da O. Detta S_T l'area del triangolo OAH, calcolare il $\lim_{n\to+\infty}S_T$.

39. In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, sono date la famiglia $\wp$ di parabole di equazione $y=\frac{4}{n}x^2-\frac{3}{n}\quad,\quad n\in N$, e la famiglia $\Im$ di iperboli $y=\frac{1}{nx},\quad n\in N\quad.$
   a) Si determinino i punti d'intersezione tra le curve rappresentanti delle due famiglie.

b) Si traccino i grafici delle parabole e delle iperboli corrispondenti ai valori $n=1$ e $n=2$.

c) Si dimostri che, al variare di $n \in N$, le rette per $P_n\left(-\frac{1}{2},-\frac{2}{n}\right)$ e $Q_n\left(1,\frac{1}{n}\right)$ intersecano l'asse delle ascisse nello stesso punto, $R\left(\frac{1}{2},0\right)$.

d) Si determini l'area del triangolo $P_{n+1}Q_nR$, e si calcoli il $\lim_{n\to\infty}\frac{Area\left(P_{n+1}Q_nR\right)}{Area\left(P_{n+1}Q_{n+1}Q_n\right)}$.

Soluzioni

1. Limitata: $-\frac{1}{2} \le a_n \le 1$.
2. $a) 0 \le a_n \le 1;\quad b) -1 < a_n < 1;\quad c) a_n \le 1;\quad -\frac{2}{3} \le a_n \le 1;\quad e) a_n \le -\frac{3}{2} \vee a_n \ge 1$.
3. $a = n > 4;\quad b) n > 46$.
4. *Si dimostra che la successione è a termini positivi ed è decrescente.*
5. $\alpha = 2 \vee \alpha = -1$.
6. 1.
9. $r_n = \frac{n+R}{n+R+B} \to 1 \quad b_n = \frac{B}{n+R+B} \to 0 \quad , \quad r_n = \frac{2n+R}{3n+R+B} \to \frac{2}{3} \quad b_n = \frac{n+B}{3n+R+B} \to \frac{1}{3}$.
10. 4.
11. $P_n = \left(2n;-2\sqrt{n}\right)$; $y=-\sqrt{2x}$; $y_{n+1} = -\sqrt{1+y_n^2}$; $y_n = -2\sqrt{n}$; 0.
12. $a_n = \frac{-1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)}$; $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$.
13. *Scrivere le prime n diseguaglianze e sommare membro a membro* $x_n \ge x_0 + n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
14. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = +\infty$.
15. $S_n = \frac{|n-3|\sqrt{n^4-8n^3+17n^2-8n+16}}{2\sqrt{n^2+1}};\quad 1$.
16. $V_n = \frac{a}{2^n}(b+10n)(c+10n) \quad a) 0;\quad b) \frac{1}{2}$.
17. $\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{3}{4}\left(1-p_n\right) = -\frac{p_n}{4} + \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow p_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{5} = 0{,}6$.
18. $a)\ 0 \quad b) \frac{1}{2} \quad c) \frac{1}{2} \quad d) +\infty \quad e) \frac{1}{6}$.
19. $\sum_{k=1}^{5}\left[6-k\right]10^{k-1}$.
20. $\frac{n}{3}\left[4n^2+12n+1\right]$.

21. $l_{2^n} = \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(2 - l_{2^n}^2\right) = 2$.

22. $15m$.

23. $0 \leftarrow \dfrac{n^2}{2\cdot 2^n} \le \dfrac{n^2+1}{2^n+n} \le \dfrac{2n^2}{2^n} \to 0$.

24.
$$a)\lim_{n\to\infty}\frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cos(n\pi)}{n^2\left(1+n^{-2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n\left(1+n^{-2}\right)} = 0;$$
$$b)\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(1+n^{-1}\right)} + 1 = +\infty$$

25. Utilizziamo la legge oraria del moto uniformemente accelerato $s = h - \frac{1}{2}gt^2$ per calcolare il "tempo di volo" relativo ad ogni rimbalzo. La pallina impiega inizialmente un tempo $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ per giungere a terra. A questo punto rimbalza (urto perfettamente elastico…) , raggiunge la quota *qh* e ricade di nuovo a terra in un tempo $t_1 = 2\sqrt{\frac{2qh}{g}}$. Rimbalza nuovamente e raggiunge la nuova quota *q(qh)* e ritorna a terra in un tempo $t_2 = 2\sqrt{\frac{2q^2h}{g}}$. Iterando il procedimento si ha che il tempo tra un rimbalzo ed il successivo è $t_n = 2\sqrt{\frac{2q^nh}{g}} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\left(\sqrt{q}\right)^n = 2t_0\left(\sqrt{q}\right)^n$. Il tempo complessivo sarà quindi $T = t_0 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n = t_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2t_0\left(\sqrt{q}\right)^n = t_0\left(1 + 2\left(\frac{1}{1-\sqrt{q}} - 1\right)\right) = t_0\left(1 + 2\frac{\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}\right) = t_0\left(\frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}\right)$.
Conclusione: pur effettuando infiniti rimbalzi la pallina cessa di rimbalzare dopo un tempo finito.

26. Innanzitutto, indichiamo con S_n l'area colorata al passo *n*-esimo:
$S_1 = 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $S_2 = S_1 + 8\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{3^2} + \frac{2^3}{3^4}$, $S_3 = S_2 + 64\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^2 = \frac{1}{3^2} + \frac{2^3}{3^4} + \frac{2^6}{3^6}$, in generale
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{3(k-1)}}{3^{2k}} = S_n = \frac{1}{8}\left(\frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{8}{9}} - 1\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

27. Sia $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Posto, ad esempio, $\varepsilon = 1$, esiste in corrispondenza un n_0 tale che $|a_n - L| < 1$ per ogni $n > n_0$. Quindi $|a_n| = |a_n - L + L| < |a_n - L| + |L| < 1 + |L|$. C.v.d.

28. $r_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n; l_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \Rightarrow d_n = l_n^2 - \pi r_n^2 = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{2^n}; S_n = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{1-2^{-(n+1)}}{1-2^{-1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$

29. $a)\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n} \Rightarrow 0 \le \frac{1-\cos n\pi}{n} \le \frac{1}{n} \to 0;\quad b)\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{n-1} = \lim_{n\to\infty} -\frac{(1-n)(1+n)}{1-n} = -\infty$

30. $\dfrac{n}{\sqrt{n}-1} \ge m \Rightarrow \dfrac{n-m\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} \ge 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \sqrt{n} \ge \dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2} \\ \sqrt{n} \le \dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{2} \end{array} \Rightarrow n_0 = \left[\left(\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}\right)^2\right]+1$

31. a_n è *definitivamente* maggiore di b_n: $\exists n_1 \mid \forall n \ge n_1 \Rightarrow a_n \ge b_n$, inoltre $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$: $\forall m > 0 \exists n_0 \mid \forall n \ge n_0 \Rightarrow b_m \ge m$. Quindi, se $n \ge \max\{n_1, n_0\} \Rightarrow a_n \ge b_n \ge m \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

32. No. Ad esempio, la successione $a_n = (-1)^n n$ non è limitata superiormente, tuttavia non esiste il limite per *n* tendente a infinito.

33. a) $a)0; b)0$

34.

$a): \dfrac{1}{\ln n} > 0 \forall n \ge 2 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{\ln n}\right| = \dfrac{1}{\ln n} \Rightarrow \dfrac{1}{\ln n} < \varepsilon \Rightarrow \dfrac{1-\varepsilon \ln n}{\ln n} < 0 \Rightarrow \ln n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > n_0 := \left[e^{\frac{1}{\varepsilon}}\right]+1$

$b): (n+3) > (n-2) \forall n \Rightarrow \left|\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2}\right| < \varepsilon = \sqrt{n+3}-\sqrt{n-2} < \varepsilon \Rightarrow n+3 < n-2+2\varepsilon\sqrt{n-2}+\varepsilon^2 \Rightarrow$

$2\varepsilon\sqrt{n-2} > 5-\varepsilon^2 \Rightarrow n > n_0 := \left[\left(\dfrac{5-\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^2 + 2\right]+1$

35. Scriviamo alcuni termini della successione: $a_0 = 2;\quad a_1 = -1;\quad a_2 = \dfrac{1}{2};\quad a_3 = 2;$ .... Dall'esame dei primi 4 termini si evince un carattere di *periodicità* della successione: per esempio i termini di indice 3*n* sono tutti uguali a due. Dimostriamo questa affermazione con il principio di induzione:

$a_0 = 2$

$a_{3n} = 2 \Rightarrow a_{3n+1} = \dfrac{1}{1-2} = -1 \Rightarrow a_{3n+2} = \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a_{3n+3} = a_{3(n+1)} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$. Di conseguenza infiniti termini sono uguali a due e, con procedimento analogo, si dimostra che infiniti termini sono uguali a -1 e a ½. Non è quindi possibile che infiniti termini della successione, tranne al più un numero finito, si possano "addensare" arbitrariamente vicino ad uno qualsiasi dei tre valori della successione.

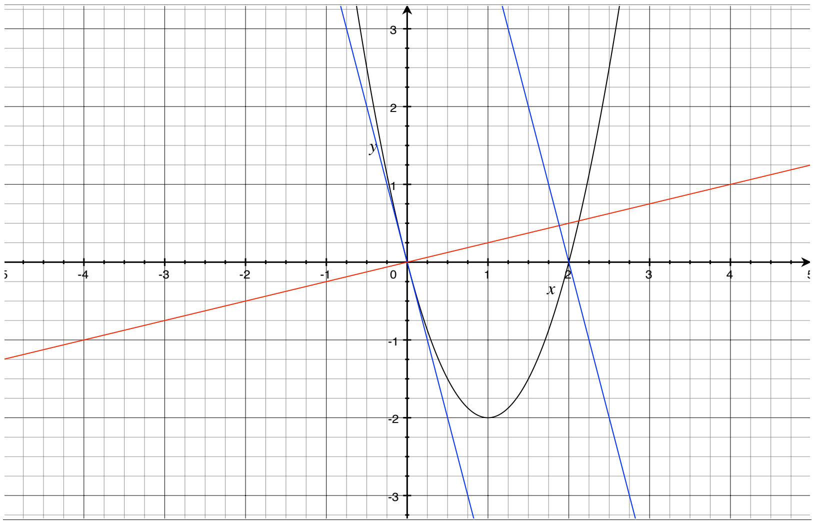
36. a) $y = n(x-n)$; b) $y = -x^2$; c) $q = \dfrac{1}{6-2\sqrt{5}} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$; d) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}\right)^k = \dfrac{1}{1-\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}} = \dfrac{8}{5-\sqrt{5}}$.

37. a) $P_n\left(\dfrac{\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}(n-1)}, -\dfrac{1}{4n}\right); Q_n\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}(n-1)}, -\dfrac{1}{4n}\right)$ b) $H_n\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}(n-1)}, -\dfrac{n^2+2\sqrt{n}+1}{4n(n-1)^2}\right)$

c) $S_n = \dfrac{1}{8n\sqrt{n}(n-1)^2}$, $S'_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{4n(n-1)^3}$, d) $\dfrac{1}{2}$.

38. $t: y = -n^2 x$. $A(n;0)$

$$s: y=-n^2x+n^3 \quad p: y=\frac{x}{n^2} \quad H\left(\frac{n^5}{1+n^4};\frac{n^3}{1+n^4}\right) \quad S_T=\frac{n^4}{2\left(1+n^4\right)} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_T=\frac{1}{2}$$



39. a) $\begin{cases} y=\dfrac{4}{n}x^2-\dfrac{3}{n} \\ nxy=1 \end{cases} \Rightarrow 0=4x^3-3x-1=(x-1)(2x+1)^2 \Rightarrow \begin{array}{c} x_1=1 \Rightarrow \left(1,\dfrac{1}{n}\right) \\ x_2=x_3=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{2}{n}\right) \end{array}$ c)

$y-\dfrac{1}{n}=\dfrac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{2}}(x-1) \Rightarrow y=\dfrac{2}{n}x-\dfrac{1}{n} \Rightarrow 0=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}\,\forall n$; d)