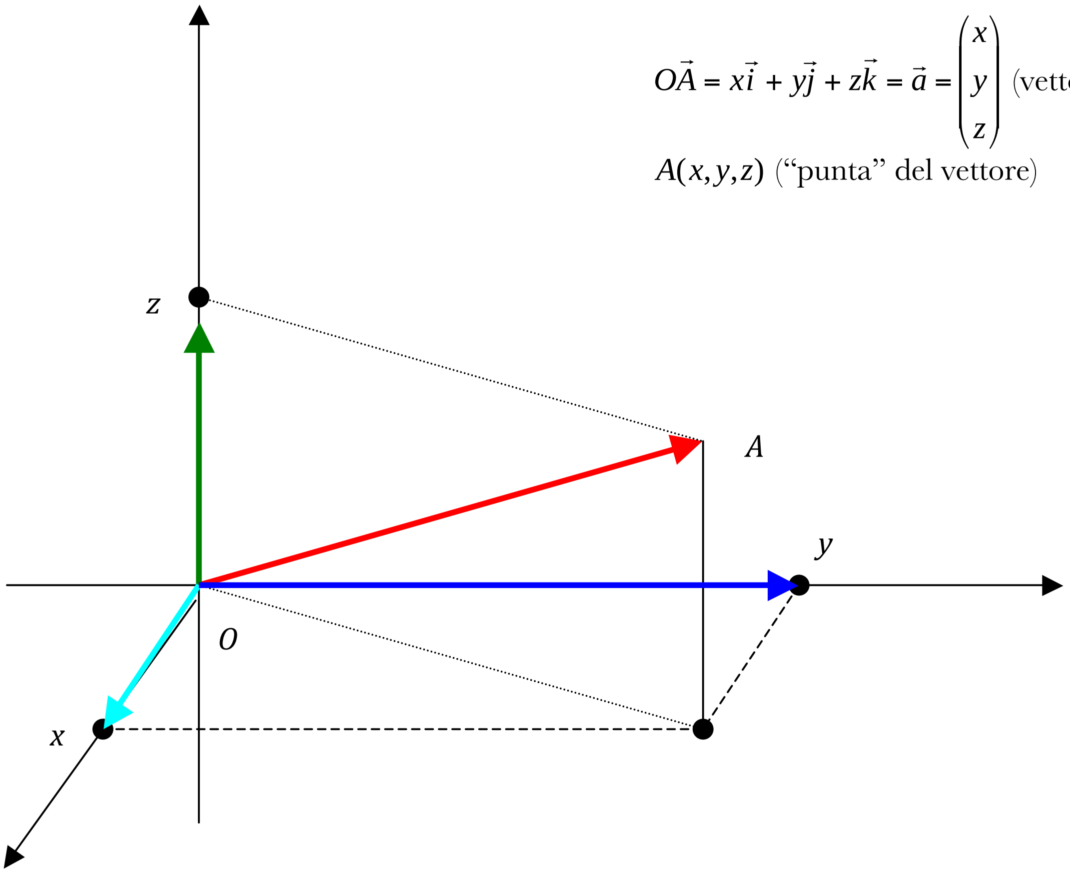
CAPITOLO 6
GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO
6.1 Vettori nello spazio

In Fisica, un vettore può essere definito come una grandezza avente direzione, intensità e verso. I vettori sono detti *liberi* se il punto di applicazione non è specificato: in questo senso consideriamo *equivalenti* i vettori che hanno stessa intensità (lunghezza), verso (orientazione) e che stanno su rette parallele (hanno, cioè, la stessa direzione). Per i nostri scopi descriveremo i vettori in termini delle loro componenti lungo direzioni perpendicolari, rappresentate da Ox, Oy, Oz. La rappresentazione del vettore può quindi essere fatta utilizzando la notazione matriciale $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, o utilizzando i *versori* $\vec{i}, \quad \vec{j}, \quad \vec{k}$ cioè le direzioni unitarie rappresentative degli assi cartesiani, mediante la cosiddetta *combinazione lineare* $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$$\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ (vettore)}$$

$A(x, y, z)$ ("punta" del vettore)



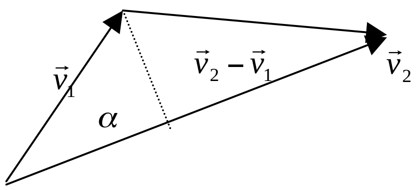
Intensità e direzione di un vettore

La direzione di un vettore in 3 dimensioni è più difficile da descrivere. Se $\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$ sono gli angoli che il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ forma con gli assi coordinati, allora

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$
$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

6.2 Il prodotto scalare

Consideriamo i vettori $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$ e $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y})$. Se li pensiamo come matrici 1 x 2, li possiamo moltiplicare con la nota regola $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{1y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} = v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y}$. Il risultato ottenuto si chiama **prodotto scalare**. E' opportuno osservare che questo "prodotto" di vettori origina un numero e non un altro vettore, contrariamente a quanto accade nel caso della somma di vettori, o della moltiplicazione di un vettore per un numero. Cerchiamo di interpretare geometricamente e fisicamente questo concetto.



Calcoliamo il modulo del vettore $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$applicando il teorema di Carnot:

$$|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|^2 = |\vec{v}_2|^2 + |\vec{v}_1|^2 - 2|\vec{v}_2||\vec{v}_1|\cos\alpha.$$

Sostituendo ai vettori la loro espressione in componenti $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$ e $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y})$, otteniamo

$$-2(v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y}) = -2|\vec{v}_1||\vec{v}_2|\cos\alpha.$$

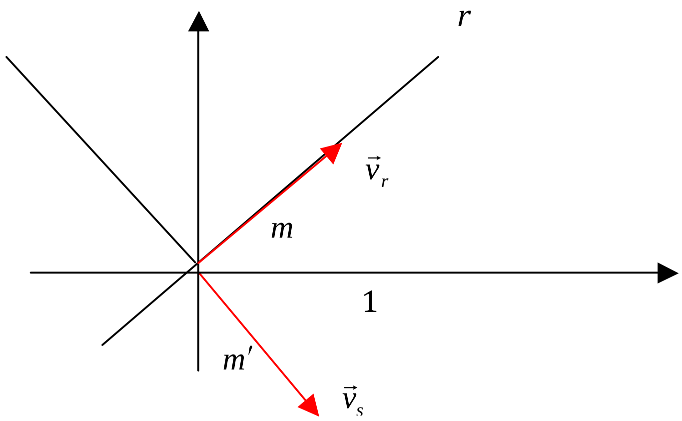
Ricordando la definizione di prodotto scalare si ottiene la seguente relazione:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y}) = |\vec{v}_1||\vec{v}_2|\cos\alpha.$$

Leggendo tra le righe dell'ultima relazione trovata, possiamo notare una sorta di "duplice definizione" del prodotto scalare: una basata sulle componenti del vettore (legata quindi ad una particolare scelta del sistema di riferimento), l'altra basata su proprietà indipendenti dalla scelta del sistema di riferimento, quali la lunghezza dei vettori e l'angolo (convesso) da essi formato.
E' proprio questa seconda definizione di prodotto scalare, in virtù della sua indipendenza dalla particolare scelta del sistema di riferimento, quella più utilizzata. L'applicazione più nota del prodotto scalare si trova nel concetto fisico di **lavoro**:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}.$$

Occupiamoci adesso dell'applicazione del prodotto scalare per la risoluzione di due problemi di geometria analitica: la determinazione della condizione di perpendicolarità tra due rette del piano, e la deduzione dell'equazione cartesiana di un piano nello spazio.
Siano $r: y = mx$ e $s: y = m'x$ due rette perpendicolari tra loro passanti per l'origine. Definiamo i vettori $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ rappresentativi delle rette date. Quali possono essere le componenti dei due vettori? Per esempio, i punti di ascissa uno $(1;m)$ e $(1;m')$ sono in corrispondenza biunivoca con i vettori applicati nell'origine; si possono quindi considerare come componenti dei vettori $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$:



Le rette sono perpendicolari, di conseguenza anche i vettori rappresentativi sono perpendicolari, quindi il loro prodotto scalare dovrà essere nullo:

$$0 = \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = \begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix} = 1 + mm' \Rightarrow mm' = -1.$$

Consideriamo un punto nello spazio $P_0(x_0;y_0;z_0)$ ed una direzione $\vec{v} = (a,b,c)$. Dove stanno i punti $P(x;y;z)$ tali che il vettore $P - P_0$ è perpendicolare al vettore $\vec{v} = (a,b,c)$?
L'equazione (vettoriale) che ci permette di rispondere alla domanda, scaturisce dal fatto che il prodotto scalare dei vettori dati è nullo:

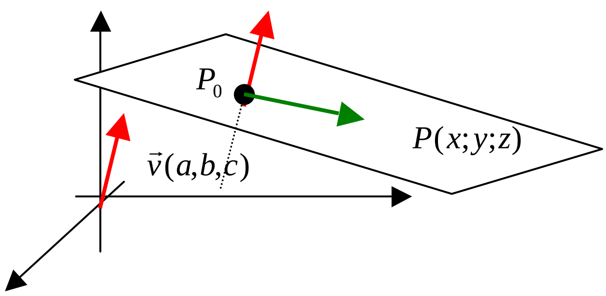
$$(P - P_0) \cdot \vec{v} = 0.$$

Quindi,

$$0 = \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0).$$

Sviluppando i prodotti otteniamo la forma con cui si esprime l'equazione cartesiana di un piano:

$$ax + by + cz + d = 0.$$



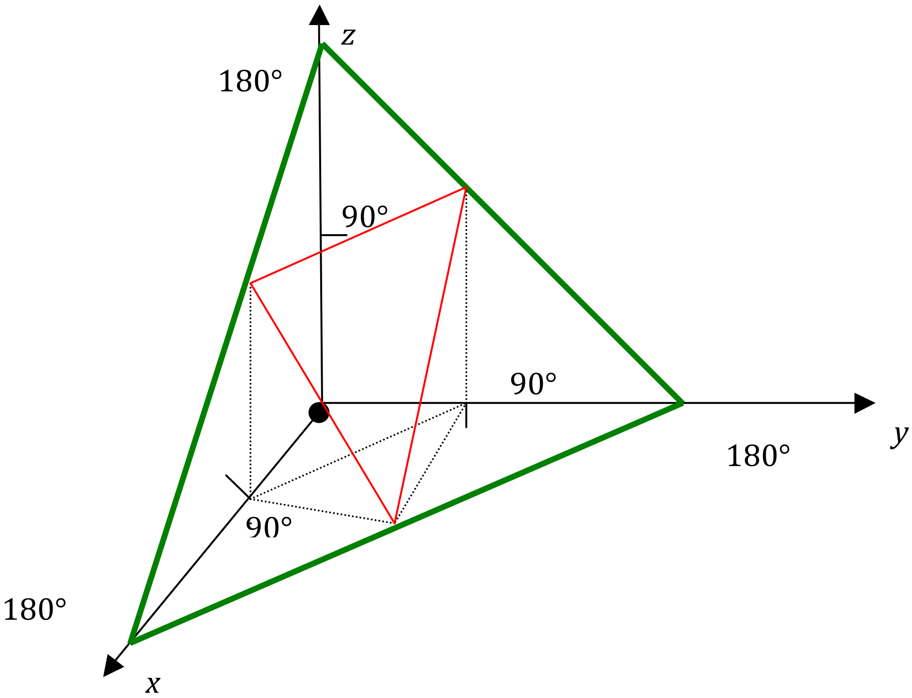
Le applicazioni di questa "equazione" sono innumerevoli. Vediamone una, "non convenzionale".
Ci proponiamo di rappresentare tutti i possibili valori che possono assumere gli angoli di un triangolo. In questo modo potremo rappresentare la famiglia dei triangoli (a meno di similitudini), e renderci conto del fatto che la famiglia dei triangoli ottusangoli è "più numerosa" di quella dei triangoli acutangoli. La nozione geometrica di triangolo viene tradotta in equazione dalla proprietà secondo cui la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°:

$$x + y + z = 180,$$

dove *x*, *y*, *z*, rappresentano gli angoli di un triangolo. Ovviamente occorre considerare i "vincoli" sugli angoli imposti dalla natura geometrica del problema:

$$x + y + z = 180$$

$$0 < x < 180, \quad 0 < y < 180, \quad 0 < z < 180$$



I triangoli acutangoli, dovendo necessariamente avere tutti gli angoli di ampiezza minore di 90°, sono rappresentati dai punti del piano contenuti all'interno della regione delimitata dal triangolo rosso. Nelle altre regioni saranno rappresentati i triangoli ottusangoli. Segue da quanto appena osservato che la famiglia dei triangoli ottusangoli è tre volte quella dei triangoli acutangoli!

6.3 Mutua posizione di rette e piani nello spazio

Dalle nozioni analitiche di piano e retta nello spazio basate sul concetto di vettore possiamo dedurre con facilità le condizioni di parallelismo e perpendicolarità. Vediamo come.

Condizione di parallelismo tra piani

Due piani di equazioni $ax+by+cz+d=0$ e $a'x+b'y+c'z+d'=0$ sono paralleli se (e solo se) tali sono i vettori $\vec{v}=(a,b,c)$ e $\vec{v}'=(a',b',c')$, ovvero se uno dei due vettori è multiplo scalare dell'altro: $\vec{v}=t\vec{v}'\Rightarrow(a,b,c)=(ta',tb',tc')$. Quindi:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\begin{cases} =\dfrac{d}{d'} & \textit{coincidenti} \\ \neq\dfrac{d}{d'} & \textit{differenti} \end{cases}.$$

Condizione di perpendicolarità tra piani

Due piani di equazioni $ax+by+cz+d=0$ e $a'x+b'y+c'z+d'=0$ sono perpendicolari se (e solo se) tali sono i vettori $\vec{v}=(a,b,c)$, ovvero se il loro prodotto scalare è nullo:

$$aa'+bb'+cc'=0.$$

Condizione di parallelismo tra rette
Due rette di direzioni $\vec{v}(l,m,n)$; $\vec{w}(l',m',n')$ sono parallele se:

$$\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}.$$

In particolare, se tali rette hanno anche un punto in comune sono coincidenti.
Condizione di perpendicolarità tra rette
Due rette di direzioni $\vec{v}(l,m,n)$; $\vec{w}(l',m',n')$ sono perpendicolari se:

$$ll'+mm'+nn'=0.$$

Condizione di perpendicolarità retta-piano
Un piano di equazione $ax+by+cz+d=0$ ed una retta di direzione $\vec{v}(l,m,n)$ sono perpendicolari se:

$$\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}.$$

Condizione di parallelismo retta-piano
Un piano di equazione $ax+by+cz+d=0$ ed una retta di direzione $\vec{v}(l,m,n)$ sono paralleli se:

$$al+bm+cn=0.$$

Distanza tra due piani paralleli distinti
Sono dati i piani di equazioni $ax+by+cz+d=0$ e $ax+by+cz+d'=0$. Si dimostri che la distanza tra essi è $\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Si considera un punto qualsiasi sul piano $ax+by+cz+d=0$, per esempio $P(0;0;-d/c)$, e si scrive l'equazione parametrica della retta *n* passante per P e perpendicolare al piano: $n:\begin{cases} x=at \\ y=bt \\ z=-\frac{d}{c}+ct \end{cases}$. Determiniamo il punto Q intersezione tra la retta *n* ed il piano

$$a^2t+b^2t+c^2t-d+d'=0 \Rightarrow t=\frac{d-d'}{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow$$

$$Q\left(a\frac{d-d'}{a^2+b^2+c^2};b\frac{d-d'}{a^2+b^2+c^2};c\frac{d-d'}{a^2+b^2+c^2}-\frac{d}{c}\right) \Rightarrow.$$

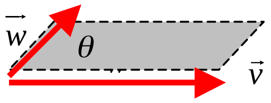
$$PQ=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

6.4 Il prodotto vettoriale

Confrontiamo l'equazione del piano $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$, ottenuta come luogo geometrico di punti dello spazio perpendicolari a una direzione $\vec{v}(a,b,c,)$, con quella cartesiana, diretta conseguenza della sua espressione parametrica, (vedi capitolo "vettori del piano e dello spazio") $(x-x_0)(y_1z_2-y_2z_1)+(y-y_0)(z_1x_2-x_1z_2)+(z-z_0)(x_1y_2-y_1x_2)=0$. Se interpretiamo anche questa equazione come prodotto scalare, uguagliando tra loro i coefficienti corrispondenti $a=(y_1z_2-y_2z_1); b=(z_1x_2-x_1z_2); c=(x_1y_2-y_1x_2)$, possiamo concludere che il vettore

$\left(y_1z_2-y_2z_1, z_1x_2-x_1z_2, x_1y_2-y_1x_2\right)$ è perpendicolare al piano, individuato appunto dai vettori $\vec{v}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ e $\vec{w}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$.

Occupiamoci adesso del calcolo dell'*area* del parallelogramma formato dai due vettori, nel caso in cui questi non sono paralleli.



Sia $A=vw\left|\sin\theta\right|$ l'espressione dell'area del parallelogramma, e ricordiamo che $\left|\sin\theta\right|=\sqrt{1-\cos^2\theta}$.

Dalla definizione di prodotto scalare, $\cos\theta=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{vw}$, segue

$A=vw\left|\sin\theta\right|=vw\sqrt{1-\left(\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{vw}\right)^2}=\sqrt{v^2w^2-\left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)^2}$. Sostituendo ai vettori ed ai loro moduli le corrispondenti espressioni in componenti, otteniamo per l'area l'espressione

$A=\sqrt{v^2w^2-\left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)^2}=\sqrt{\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)-\left(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\right)^2}$. Svolgendo con un po' di pazienza i calcoli sotto la radice, otteniamo il seguente risultato:

$A=\sqrt{\left(y_1z_2-y_2z_1\right)^2+\left(z_1x_2-x_1z_2\right)^2+\left(x_1y_2-y_1x_2\right)^2}=\left|\left(y_1z_2-y_2z_1, z_1x_2-x_1z_2, x_1y_2-y_1x_2\right)\right|$. Abbiamo appena scoperto il significato geometrico del modulo del vettore $\left(y_1z_2-y_2z_1, z_1x_2-x_1z_2, x_1y_2-y_1x_2\right)$: è l'area del parallelogramma individuato dai vettori che lo definiscono!

Questo fatto suggerisce di attribuire la dovuta importanza a questo vettore.

Definizione. Sono dati i vettori $\vec{v}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ e $\vec{w}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$. Si definisce *prodotto vettoriale di* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$, e si indica con

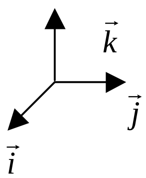
$$\vec{p}=\vec{v}\wedge\vec{w},$$

il vettore di intensità $p=\left|vw\sin\theta\right|$, dove θ è l'angolo convesso formato dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, avente direzione *perpendicolare* al piano formato dai vettori in questione, e verso determinato dalla *regola della mano destra*.

La regola introdotta per la determinazione del verso è dovuta al fatto che, in linea di principio, anche il vettore $\left(-y_1z_2+y_2z_1,-z_1x_2+x_1z_2,-x_1y_2+y_1x_2\right)$ pur avendo verso opposto, è perpendicolare al piano, ed il suo modulo è uguale all'area del parallelogramma formato dai vettori non paralleli. Stabilire una convenzione permette quindi di definire *univocamente* il prodotto vettoriale.

Quando i vettori sono ambientati in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, è possibile definire il prodotto vettoriale mediante la sua applicazione ai *versori* che dà origine alle seguenti relazioni:

$$\begin{array}{lll}\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}; & \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}; & \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{0}; & \vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{0}; & \vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}\end{array}.$$



Da queste, scrivendo i vettori nella forma $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$; $\vec{w}=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$, si ottiene:

$$\vec{p}=\vec{v}\wedge\vec{w}=\left(bn-mc\right)\vec{i}+\left(lc-an\right)\vec{j}+\left(am-bl\right)\vec{k}.$$

Spesso si rappresenta il prodotto vettoriale come il *determinante* della matrice:

$$\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ l & m & n \end{pmatrix}.$$

Un'applicazione: determinazione dei coefficienti del piano formato da due rette incidenti

- Siano $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - 1\vec{k};\quad \vec{w} = 2\vec{i} - \vec{k}$ le direzioni di due rette incidenti nel punto di coordinate $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Vogliamo scrivere l'equazione del piano che le contiene entrambe. Per questo scopo ricordiamo che i coefficienti dei termini dell'equazione lineare rappresentativa di un piano nello spazio, rappresentano i componenti di una direzione perpendicolare al piano stesso. Di conseguenza, il prodotto vettoriale delle direzioni $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - 1\vec{k};\quad \vec{w} = 2\vec{i} - \vec{k}$ permette di determinare i coefficienti del piano. Dalla $\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ segue quindi $a = -1 \quad b = 1 \quad c = -2$.

6.5 Sistemi lineari in tre incognite e loro interpretazione geometrica

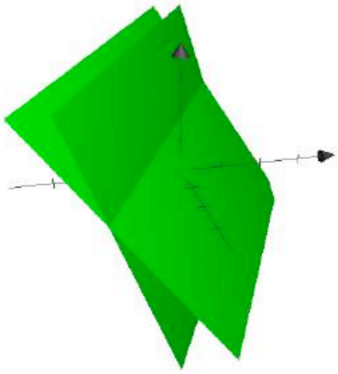
In generale, lo studio della mutua posizione di rette e piani nello spazio è condotto attraverso quello di un sistema di equazioni lineari in tre incognite. La teoria dei sistemi lineari ha avuto uno sviluppo autonomo e costituisce il fondamento di quella parte della Matematica che si chiama *Algebra lineare*. Noi svilupperemo questa parte evidenziandone i risultati principali alla luce della loro interpretazione geometrica.

Esempio 1

Si dica se i due piani di equazioni $2x - y + z - 3 = 0$ e $4x - 2y + z = 0$ sono incidenti. In caso affermativo si scriva l'equazione della retta intersezione.

Svolgimento

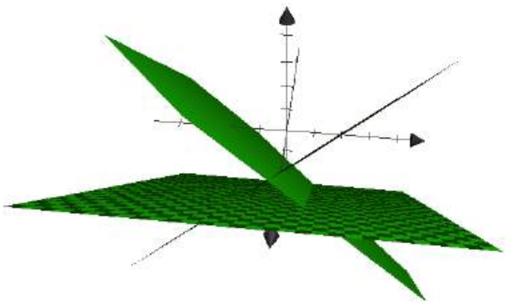
Poiché $\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{1}$ i due piani non sono paralleli, quindi si intersecano in una retta. La ricerca dell'equazione della retta intersezione, porta al sistema $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ 4x - 2y + z = 0 \end{cases}$. Osserviamo che l'equazione del primo dei due piani può essere scritta nella forma $4x - 2y = -2z + 6$. Se la confrontiamo con la seconda $4x - 2y = -z$, otteniamo l'equazione $-2z + 6 = -z \Rightarrow z = 6$: la retta intersezione dei due piani appartiene al piano di equazione $z = 6$. Ponendo ad esempio $y = t$ e sostituendo nel sistema otteniamo: $\begin{cases} 2x + z = t + 3 \\ 4x + z = 2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = t \\ 2x = t - 3 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 6 \\ x = \frac{t}{2} - \frac{3}{2} \\ y = t \end{cases}$. Si tratta, a ben vedere, di una retta parallela al piano x-y passante dal punto $(0;3;6)$, ottenuto assegnando un valore arbitrario al parametro *t* nell'equazione parametrica della retta $\begin{cases} x = \frac{t}{2} - \frac{3}{2} \\ y = t \\ z = 6 \end{cases}$.



Esempio 2

Risolvere il seguente sistema di equazioni: $\begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x-y-z-2=0 \\ x-z-3=0 \end{cases}$.

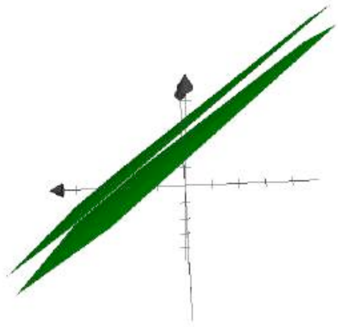
- Osserviamo che, ad esempio, i primi due piani s'intersecano nella retta $\begin{cases} x=t+2 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$, che non appartiene al terzo piano, in quanto la condizione di appartenenza del generico punto, $t+2-t-3=0$, non è mai verificata. Il sistema non ha quindi soluzione, come si vede chiaramente dalla rappresentazione grafica dei piani corrispondenti alle equazioni del sistema.



Esempio 3

Si studino al variare del parametro *k* le mutue posizioni dei piani $\begin{cases} kx+y+z=3 \\ x+y+kz=2 \end{cases}$, e si dica se esistono valori del parametro per i quali i piani sono perpendicolari.

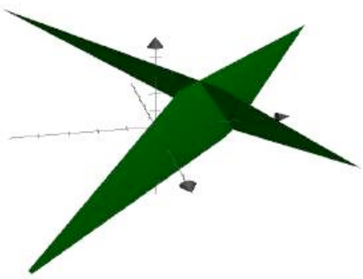
Vediamo se possono essere paralleli: $\frac{k}{1}=\frac{1}{1}=\frac{1}{k} \Leftrightarrow k=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y+z=2 \end{cases}$.



Per quali valori del parametro sono perpendicolari?

$$k \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + z = 3 \\ x + y - \frac{1}{2}z = 2 \end{cases}.$$

In questo caso, l'equazione della retta intersezione in forma parametrica si scrive ponendo, ad esempio, $y = t \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + 2z - 6 \\ y = t \\ z = 2x + 2t - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + 2z - 6 \\ y = t \\ z = 2(2t + 2z - 6) + 2t - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t + \frac{14}{3} \\ y = t \\ z = -2t + \frac{16}{3} \end{cases}$



Il metodo di Gauss

E' noto che due piani non paralleli si intersecano in una retta; un eventuale terzo piano, non parallelo a nessuno dei precedenti né alla loro retta intersezione, incontrerà quest'ultima in un punto.

Lo studio della mutua intersezione di tre piani nello spazio, ci porta a prendere in considerazione un metodo per la risoluzione dei *sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite*: il cosiddetto *metodo di Gauss*, o di *riduzione a scala*. Questo metodo si basa sul fatto che una soluzione del sistema di equazioni, è soluzione anche del sistema ottenuto sostituendo ad una, o più, equazioni, una loro combinazione lineare. Il criterio con cui si opera per ridurre a scala il sistema è il seguente: si scrive come prima equazione quella, se è presente, con il coefficiente della prima variabile (x) diverso da zero, e si sostituiscono la seconda e la terza con opportune combinazioni lineari con la prima, in modo tale che il coefficiente della prima variabile sia zero. Successivamente, si scrive come seconda equazione quella, se esiste, con il coefficiente della seconda variabile (y) diverso da zero, e si sostituisce alla terza equazione la combinazione lineare con la seconda che la porta ad avere il coefficiente della seconda variabile uguale a zero. La terza equazione è di primo grado nell'incognita rappresentata dalla terza variabile (*z*): si risolve e si determina la soluzione del sistema procedendo "all'indietro".

Esempio 4

Risolvere il sistema di equazioni $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+z=1 \\ 4x+4z=2 \end{cases}$.

Applichiamo il metodo di Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x=1/2 \\ y=1/2 \\ z=0 \end{cases}.$$

E' interessante vedere cosa succede applicando il metodo di Gauss quando il sistema non ammette soluzioni.

$$\begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x-y-z-2=0 \\ x-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

. Si nota subito che la seconda e la terza riga sono associate a due equazioni incompatibili $\begin{cases} 2y=0 \\ y=-1 \end{cases}$ relative a due piani paralleli distinti.

Metodo di Gauss con il foglio elettronico excel

1,00	**x**	**-1,00**	**y**	**1,00**	**z**	**4,00**
3,00	**x**	**0,00**	**y**	**5,00**	**z**	**8,00**
1,00	**x**	**1,00**	**y**	**3,00**	**z**	**0,00**

1	x	-1	y	1	z	4
0	x	3	y	2	z	-4
0	x	2	y	2	z	-4

1	x	-1	y	1	z	4
0	x	3	y	2	z	-4
0	x	**0**	y	-1	z	2

z=	**-2,000**
y=	**0,000**
x=	**6,000**

6.6 Il fascio di piani

E' noto che per una retta dello spazio passano infiniti piani. Se scriviamo l'equazione della retta come intersezione di piani, $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$, potremmo rappresentare <u>tutti</u> i piani a cui questa appartiene con un'equazione del tipo:

$$\mu(ax+by+cz+d)+\lambda(a'x+b'y+c'z+d')=0.$$

Un'equazione di questo tipo rappresenta la cosiddetta **combinazione lineare**.

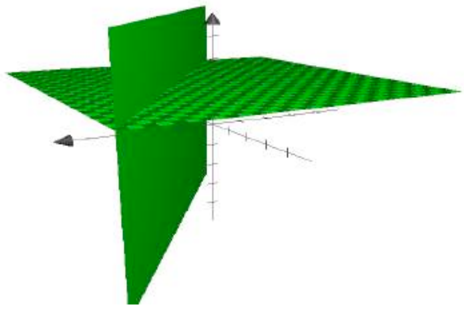
Esercizio. *Determinare il piano a cui appartengono le due rette di equazione* $r:\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases}$ *e* $s:\begin{cases} x+z+2=0 \\ 5x-y+4z+5=0 \end{cases}$ *e dire se tali rette sono incidenti o parallele.*

- (Metodo 1) Si scrive l'equazione di una delle rette in forma parametrica: $r:\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=2-3t \end{cases}$, e si sostituiscono le coordinate del suo punto generico nella combinazione lineare dei piani che generano la seconda retta: $\lambda(x+z+2)+\mu(5x-y+4z+5)=0$. Si ha $\lambda(t+2-3t+2)+\mu(5t-1+t+8-12t+5)=0$ da cui segue $\lambda(4-2t)+\mu(12-6t)=0$. I coefficienti della combinazione lineare si determinano ricordando che l'uguaglianza deve essere verificata per ogni valore del parametro *t*; e questo porta necessariamente a scrivere l''ultima equazione nella forma $(2\lambda+6\mu)(2-t)=0\forall t \Rightarrow 2\lambda+6\mu=0 \Rightarrow \lambda=-3\mu$. L'equazione del piano è $2x-y+z-1=0$.
- (Metodo 2) Si scrivono le combinazioni lineari (fascio di piani) e le si uguagliano:
$$\lambda(x+y-1)+\mu(2x+z-y-1)=0 \Rightarrow (\lambda+2\mu)x+(\lambda-\mu)y+\mu z-\lambda-\mu=0$$
$$\alpha(x+z+2)+\beta(5x-y+4z+5)=0 \Rightarrow (\alpha+5\beta)x+(-\beta)y+(\alpha+4\beta)z+2\alpha+5\beta=0$$
. Per il Principio d'identità dei polinomi si uguagliano i coefficienti ottenendo i valori $\begin{cases} \lambda=0 \\ \beta=\beta \\ \alpha=-3\beta \\ \mu=\beta \end{cases}$.
Sostituendo in una qualsiasi delle due combinazioni lineari otteniamo l'equazione del piano cercata: $2\beta x-\beta y+\beta z-\beta=0 \Rightarrow 2x-y+z-1=0$.

Rette sghembe

Se due rette non appartengono ad un medesimo piano, sono sghembe. Un metodo analitico per stabilire se due rette sono sghembe può essere rappresentato dal primo dei due presi in esame nell'esercizio precedente. Infatti, se non fosse possibile giungere ad un'equazione indeterminata, nell'incognita data dalla combinazione di λ, μ come sopra, non sarebbe possibile affermare che *tutti* i punti di una retta appartengono ad *un* piano del fascio avente l'altra retta come retta base.

Esercizio. *Determinare l'equazione della retta passante per i punti* $P(-1;2;2)$ *e* $Q(3;-1;2)$.

- Scrivendo l'equazione della retta in forma parametrica osserviamo che $\begin{cases} x+1=lt \\ y-2=mt \\ z-2=nt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+1=lt \\ -1-2=mt \\ 2-2=nt \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{l}=\frac{-3}{m}=\frac{0}{n} \Rightarrow \begin{cases} l=4 \\ m=-3 \\ n=0 \end{cases}$. L'equazione della retta cercata è quindi $\begin{cases} x+1=4t \\ y-2=-3t \\ z-2=0t \end{cases}$. Si tratta di una retta contenuta nel piano di equazione $z=2$:
- 

Esercizi

1. Si scriva l'equazione parametrica della retta passante per l'origine dello spazio $Oxyz$ parallela alla retta intersezione dei piani $x-y+z+1=0$ e $2x-y-z=0$.

2. Si discutano al variare del parametro k le mutue posizioni dei seguenti piani:
$\begin{cases} kx+y+z=0 \\ kx+ky+z=0 \end{cases}$. Per quali valori di k sono perpendicolari?

3. Si scriva l'equazione della retta dello spazio passante per l'origine e per il punto $P(-1;1;2)$.
4. Discutere la risolubilità del seguente sistema al variare del parametro $k \in R: \begin{cases} x-2y-z=3k \\ 4y+3z=0 \\ x+ky=-5 \end{cases}$.

5. Date le rette $r\begin{cases} 2x-y-2z=0 \\ 2x+2y-3z=0 \end{cases}, s_k: \begin{cases} 2x-2y-z=0 \\ z-k=0 \end{cases}$ si dica per quali valori del parametro sono complanari, e se ne determini l'equazione del piano.
6. Si determini il piano contenente la retta $r: \begin{cases} 2x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$, parallelo alla retta $s: \begin{cases} x+y=1 \\ x-z=-2 \end{cases}$.
7. Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i punti dello spazio $A(0,1,0), B(-1,0,0), C(0,0,1)$.

8. Dati il piano $\pi: 2x+3y-z=4$ e la retta $r:\begin{cases} x+y=0 \\ x-z=1 \end{cases}$ si dica se sono paralleli o incidenti, e si trovi l'eventuale punto di intersezione.
9. Trovare l'equazione del piano passante per il punto $P(1,0,1)$ e contenente la retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y-z=0 \end{cases}$.

Soluzioni

1. Scriviamo l'equazione della retta intersezione dei due piani in forma parametrica al fine di evidenziarne il vettore direzione:
$\begin{cases} x-y+1=-t \\ y-2x=-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-1-t \\ y-2y+2+2t=-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=2t \\ y-2=3t \\ z-0=t \end{cases} \Rightarrow v(2;3;1)$. L'equazione della retta cercata, in forma parametrica, è quindi: $\begin{cases} x-0=2t \\ y-0=3t \\ z-0=t \end{cases}$.

2. Vediamo se, ed eventualmente per quali, valori del parametro i piani sono paralleli (e, in tal caso, coincidenti, visto che ambedue passano per l'origine, essendo zero il termine noto delle rispettive equazioni): $\frac{k}{k}=\frac{1}{k}=\frac{1}{1}$ se e soltanto se $k=1$. In questo caso i piani sono paralleli (e coincidenti). Per tutti gli altri valori del parametro si intersecheranno nella retta (passante per l'origine) di equazione $\begin{cases} kx-k^2x-kt=-t \\ y=-kx-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{(k-1)t}{k(1-k)}=-\frac{1}{k}t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$. Per $k=0$ il sistema si riduce a $\begin{cases} y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ e questa è l'equazione dell'asse x.

Per vedere se possono essere perpendicolari, applicando la condizione di perpendicolarità tra piani nello spazio otteniamo $k^2+k+1=0$. Poiché $\Delta=-3<0$, l'equazione non ammette soluzioni reali: i due piani non possono quindi essere perpendicolari per alcun valore del parametro.

3. Scriviamo l'equazione parametrica della retta passante per l'origine $\begin{cases} x=lt \\ y=mt \\ z=nt \end{cases}$ ed imponiamo il passaggio per il punto $P(-1;1;2)$: $\begin{cases} -1=lt \\ 1=mt \\ 2=nt \end{cases} \Rightarrow t=\frac{-1}{l}=\frac{1}{m}=\frac{2}{n} \Rightarrow \begin{cases} l=-1 \\ m=1 \\ n=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=2t \end{cases}$.

4.
$$\begin{cases} x-2y-z=3k \\ 4y+3z=0 \\ x+ky=-5 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3k \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & k & 0 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3k \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -2-k & -1 & 3k+5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3k \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2+3k}{4} & 3k+5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x-2y-z=3k \\ 4y+3z=0 \\ \frac{2+3k}{4}z=3k+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} k\neq -\frac{2}{3} \Rightarrow \quad 1 soluzione \\ k=-\frac{2}{3} \Rightarrow \quad \varnothing \end{array}.$$

5. $s_k: \begin{cases} x=t+\frac{k}{2} \\ y=t \\ z=k \end{cases} \in p: \lambda(2x-y-2z)+\mu(2x+2y-3z)=0 \Leftrightarrow (\lambda+4\mu)t-k(\lambda+2\mu)=0$. Di conseguenza $\begin{array}{c} \lambda=-4\mu \\ k=0 \end{array} \Rightarrow p: 6x-6y-5z=0$.

6. Si osserva subito che la retta $s \subset p: x-z=-2$, che a sua volta è parallelo al piano $x-z=0$ contenente la retta *r*. Di conseguenza, quest'ultimo è il piano cercato. Oppure, se non avessimo notato questo fatto, avremmo dovuto procedere così: tra tutti i piani a cui appartiene la retta *r*, rappresentati dall'equazione $\lambda(2x-y)+\mu(x-z)=0 \Rightarrow (2\lambda+\mu)x-\lambda y-\mu z=0$, si seleziona quello parallelo alla retta $s: \begin{cases} x+2=t \\ y-3=-t \\ z-0=t \end{cases}$ applicando la condizione di parallelismo $1(2\lambda+\mu)-1(-\lambda)+1(-\mu)=0 \Rightarrow 3\lambda=0 \Rightarrow x-z=0$.

7. $\begin{cases} b+d=0 \\ -a+d=0 \\ c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=d \\ b=-d \\ c=-d \end{cases} \Rightarrow dx-dy-dz+d=0 \Rightarrow x-y-z+1=0$.

8. $r: \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t+1 \\ y=-t-1 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}(1,-1,1) \Rightarrow \vec{v}\cdot(2,3,-1)=2-3-1=-2\neq 0$. Retta e piano sono incidenti nel punto $2(t+1)+3(-t-1)-t=4 \Rightarrow -2t=5 \Rightarrow t=-\frac{5}{2} \Rightarrow P\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$.

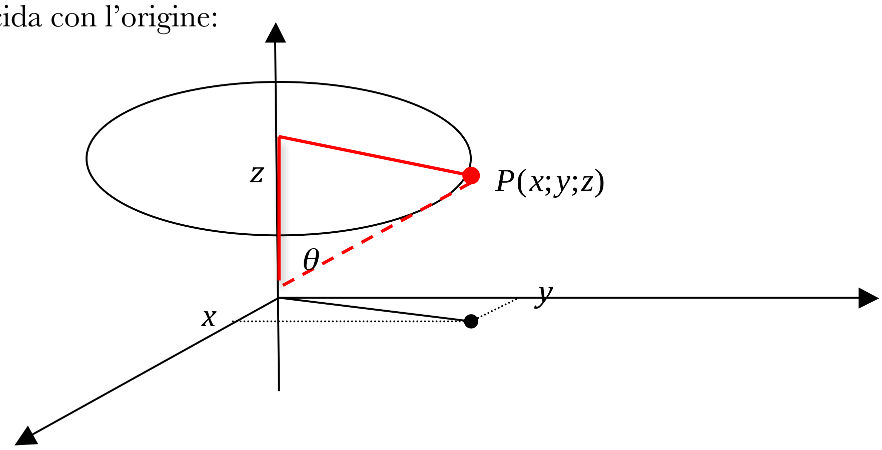
9. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=t \\ z=-t+\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{3}{2}a+bt-ct+\dfrac{3}{2}c+d=0 \forall t \Rightarrow \begin{cases} b-c=0 \\ \dfrac{3}{2}a+\dfrac{3}{2}c+d=0 \end{cases}$. Si mettono a sistema le ultime due equazioni trovate con la condizione di appartenenza del punto al piano: $\begin{cases} b-c=0 \\ 3a+3c+2d=0 \\ a+c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ a=-c \\ b=c \end{cases} \Rightarrow x-y-z=0$.

6.7 La sfera ed il cono

Definiamo la superficie sferica (sfera) come il luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da un punto fisso detto centro. In base a questa definizione l'equazione della sfera è:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

La superficie conica (cono) è il luogo geometrico dei punti dello spazio ottenuto ruotando un triangolo rettangolo intorno ad un cateto. Supponiamo per semplicità che il cateto stia sull'asse z e che un vertice coincida con l'origine:



Notiamo innanzitutto che $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|z|}$. Poiché $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ la tangente risulta essere positiva; elevando al quadrato e ponendo $\tan\theta := k$ otteniamo l'equazione della superficie conica con asse coincidente con l'asse z nelle forme:

$$|z|k=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2-k^2z^2=0.$$

Intersezione della superficie conica con un piano non passante per l'origine (vertice)

Prendiamo in considerazione la superficie conica di equazione $x^2+y^2-k^2z^2=0$ ed il piano di equazione $z=my+1$, e studiamo l'intersezione al variare del parametro *m*. Risulta:

$$\begin{cases} x^2+y^2-k^2z^2=0 \\ z=my+1 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2-k^2(m^2y^2+2my+1)=0 \Rightarrow x^2+(1-k^2m^2)y^2-2k^2my-k^2=0.$$

Il coefficiente del termine di secondo grado in *y* porta in modo naturale alla seguente discussione:

$$1-m^2k^2>0 \Rightarrow |m|<\frac{1}{k} \Rightarrow ellisse, \quad m=0 \Rightarrow circonferenza, \quad x^2+y^2=k^2$$

$$1-m^2k^2=0 \Rightarrow |m|=\frac{1}{k} \Rightarrow parabola, \quad y=\frac{x^2}{2k}-\frac{k}{2} \qquad .$$

$$1-m^2k^2<0 \Rightarrow |m|>\frac{1}{k} \Rightarrow iperbole$$

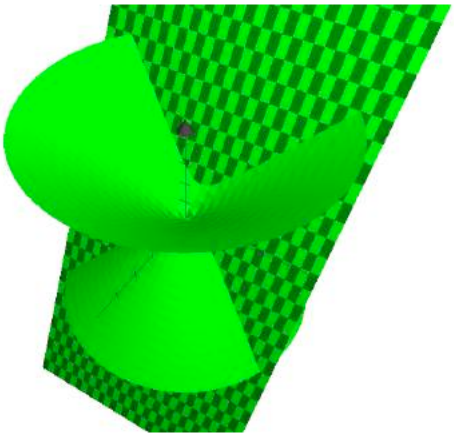
Esempio

E' data la superficie conica di semi-apertura angolare 45°. Si determini l'intersezione con il piano di equazione $2x-z=1$.

Si mettono a sistema le equazioni della superficie conica con $k=\tan 45°=1$ ed il piano:

$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ z=2x-1 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2-4x^2+4x-1=0 \Rightarrow 3x^2-4x-y^2=-1$. L'ultima equazione è rappresentativa di un' iperbole con centro non coincidente con l'origine, come si evince dalla sua scrittura nella forma $3(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9})-y^2=-1 \Rightarrow 3(x-\frac{2}{3})^2-y^2=\frac{1}{3}$, da cui segue

$$9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-3y^2=1 \Rightarrow C\left(\frac{2}{3};0\right) \quad a^2=\frac{1}{9} \quad b^2=3 \quad y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x.$$



Esempio. E' data la retta nello spazio di equazione $r:\begin{cases} x=1+kt \\ y=-1+2t \\ z=2-kt \end{cases}$. Si studino al variare del parametro *k* le intersezioni con il piano di equazione $x+z=3$.

- Scriviamo la retta di data in forma cartesiana, ovvero come intersezione di piani: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{k} = \dfrac{y+1}{2k} \\ \dfrac{x-1}{k} = \dfrac{z-2}{-k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - ky - 1 - k = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$. Poiché il piano di equazione $x + z = 3$ contiene la retta data, le intersezioni coincidono con la retta stessa per qualsiasi valore del parametro *k*.

Esempio. Si individui inoltre la curva ottenuta intersecando detto piano con la superficie conica di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

- Si mettono a sistema le equazioni $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 9 - x^2 + 6x - 1 = 0 \\ z = 3 - x \end{cases} \Rightarrow 6x = 10 - y^2$. L'equazione ottenuta è quella di una parabola con asse coincidente con l'asse *x*.

L'equazione della superficie conica con vertice nell'origine

Sia $\overrightarrow{OH} = (l, m, n)$ la direzione dell'asse del cono rappresentato in figura. La superficie del cono è il luogo dei punti tali che $\dfrac{\overline{PH}}{\overline{\overline{OH}}} = \tan\theta := k > 0$, dove

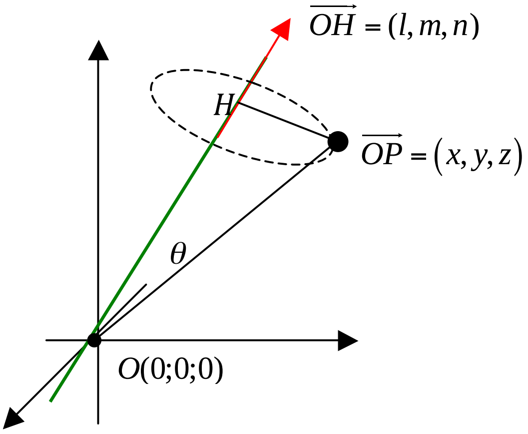
$$\overline{PH}^2 = \overline{OP}^2 \sin^2\theta = \overline{OP}^2 \frac{\left|\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OH}\right|^2}{\overline{OP}^2 \cdot \overline{OH}^2} = \frac{\left|\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OH}\right|^2}{\overline{OH}^2}, \text{ e}$$

$$\overline{OH}^2 = \overline{OP}^2 \cos^2\theta = \overline{OP}^2 \frac{\left(\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OH}\right)^2}{\overline{OP}^2 \cdot \overline{OH}^2} = \frac{\left(\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OH}\right)^2}{\overline{OH}^2}, \text{ per cui } \frac{\overline{PH}^2}{\overline{OH}^2} = \frac{\left|\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OH}\right|^2}{\left(\left|\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OH}\right|\right)^2} := k^2.$$

Dal calcolo del prodotto scalare e del prodotto vettoriale, $k^2 = \dfrac{\left|\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OH}\right|^2}{\left(\left|\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OH}\right|\right)^2} = \dfrac{(mz - ny)^2 + (nx - lz)^2 + (ly - mx)^2}{(lx + my + nz)^2}$,

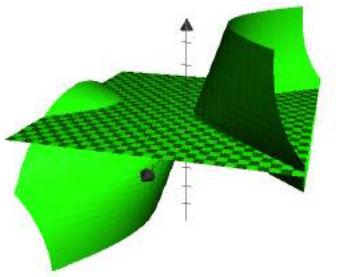
segue l'espressione generale della superficie conica con asse passante per l'origine dello spazio cartesiano:

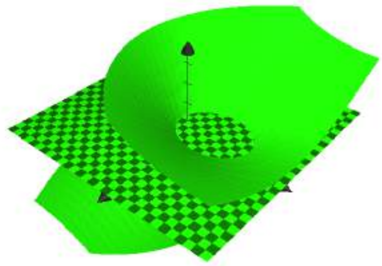
$$\left(k^2l^2 - n^2 - m^2\right)x^2 + \left(k^2m^2 - n^2 - l^2\right)y^2 + \left(k^2n^2 - l^2 - m^2\right)z^2 + 2mn\left(k^2+1\right)zy + 2nl\left(k^2+1\right)xz + 2ml\left(k^2+1\right)xy = 0$$

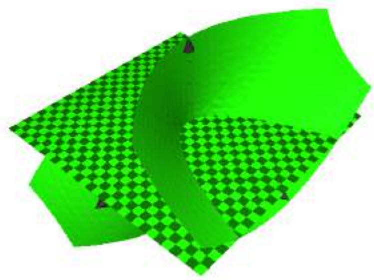


Esempio. Il piano $z = 1$ interseca il cono di direzione $\overrightarrow{OH} = (0, m, n) \Rightarrow \theta = 45° \Rightarrow k = 1$ nella conica $-\left(m^2 + n^2\right)x^2 + \left(m^2 - n^2\right)\left(y^2 - 1\right) + 4mny = 0$. Si tratta della parabola di equazione $y = \dfrac{x^2}{2}$ nel piano $z = 1$ se $m = n$, di un'ellisse se $n > m$, e di un'iperbole se $n < m$.

I grafici che seguono rappresentano i tre casi presi in esame nell'esempio sopra ($m = 2, n = 1$ per l'iperbole, $m = 1, n = 2$ per l'ellisse, $m = n$ per la parabola).







Problemi

1. Dopo aver determinato l'equazione del piano π parallelo all'asse *x* e passante per i punti $P(0;\sqrt{2};0)$ e $Q(0;0;\sqrt{2})$, si determini l'equazione della superficie conica avente semi-apertura di ampiezza $\pi/3$, per asse la retta *r* perpendicolare al piano π e passante per l'origine, e per vertice il punto *V* di intersezione del piano π con la retta *r*.
2. Si studino, al variare del parametro *k*, le mutue posizioni dei piani $\begin{cases} k^2x + y + z = 1 \\ (2k-1)x + y + kz = -1 \end{cases}$.

   Si scriva l'equazione parametrica della retta intersezione dei piani nel caso $k = 1/2$, e l'equazione, sempre in forma parametrica, della retta ad essa perpendicolare passante per il punto $P(0;0;1)$.
3. E' data la superficie conica di equazione $x^2 - y^2 + z^2 = 0$. Si studino le intersezioni con i piani $z = 1 + ky$ al variare del parametro *k*.
4. Si determini l'equazione della superficie sferica con centro nell'origine e tangente al piano α di equazione $2x - y + 2z - 3 = 0$.

Soluzioni

1. Scritta l'equazione generica del piano $ax+by+cz+d=0$ si impone il passaggio per i punti dati: $\begin{cases} b\sqrt{2}+d=0 \\ c\sqrt{2}+d=0 \end{cases} \Rightarrow ax-\frac{d}{\sqrt{2}}y-\frac{d}{\sqrt{2}}z+d=0$. La condizione di parallelismo con l'asse x, che in forma parametrica è rappresentato dal vettore direzione $(1;0;0)$, porta alla determinazione del coefficiente a, in quanto $a\cdot 1+b\cdot 0+c\cdot 0=0 \Rightarrow a=0$. L'equazione del piano è $y+z-\sqrt{2}=0$. Ricaviamo l'equazione della retta r, asse del cono, imponendo la condizione di parallelismo con la direzione perpendicolare al piano, individuata dai coefficienti del piano stesso $(0;1;1)$: $r:\begin{cases} x=0+0t \\ y=0+1t \\ z=0+1t \end{cases}$. Si determina il vertice del cono imponendo la condizione $t+t-\sqrt{2}=0 \Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. L'equazione del cono si trova infine applicando la
$$\left(k^2l^2-n^2-m^2\right)(x-x_V)^2+\left(k^2m^2-n^2-l^2\right)(y-y_V)^2+\left(k^2n^2-l^2-m^2\right)(z-z_V)^2+$$
$$2mn\left(k^2+1\right)(z-z_V)(y-y_V)+2nl\left(k^2+1\right)(x-x_V)(z-z_V)+2ml\left(k^2+1\right)(x-x_V)(y-y_V)=0$$
con $(l;m;n)=(0;1;1)$ e $k^2=\tan^2\frac{\pi}{3}=3$:
$$-2x^2+2(y-\sqrt{2}/2)^2+2(z-\sqrt{2}/2)^2+8(z-\sqrt{2}/2)(y-\sqrt{2}/2)=0$$
$$x^2-y^2-z^2-4yz+3\sqrt{2}y+3\sqrt{2}z-3=0$$
2. Vediamo in quali casi i due piani possono risultare paralleli:
$$\frac{k^2}{2k-1}=\frac{1}{1}=\frac{1}{k} \Rightarrow \begin{cases} \frac{k^2}{2k-1}=1 \\ \frac{1}{k}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{k^2-2k+1}{2k-1}=0 \\ k=1 \end{cases} \Rightarrow k=1.$$ Per $k=1$ i piani sono paralleli.

   Poiché $\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-1}$ i due piani sono paralleli distinti.

Nel caso $k=1/2$ le equazioni dei piani sono $\begin{cases} \frac{x}{4}+y+z=1 \\ y+\frac{z}{2}=-1 \end{cases}$. Posto ad esempio $z=t$ otteniamo
$$\begin{cases} x=4\left(\frac{t}{2}+1-t+1\right) \\ y=-\frac{t}{2}-1 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8-2t \\ y=-1-\frac{t}{2} \\ z=0+t \end{cases}$$. La direzione della retta è data dal vettore $(-2;-1/2;1)$. La retta cercata appartiene al piano perpendicolare alla retta trovata, passante per il punto $P(0;0;1)$. Tale piano ha equazione $-2x-\frac{y}{2}+z+d=0$, e il coefficiente d si ottiene imponendo il passaggio del piano per il punto $P(0;0;1)$: $-2\cdot 0-\frac{0}{2}+1+d=0 \Rightarrow d=-1$, di conseguenza l'equazione del piano è $-2x-\frac{y}{2}+z-1=0$. Questo piano interseca la retta nel punto

$$-2(8-2t)-\frac{-1-t/2}{2}+t-1=0\Rightarrow -32+8t+1+\frac{t}{2}+2t-2=0\Rightarrow 21t/2=33\Rightarrow t=\frac{22}{7}\Rightarrow\left(\frac{12}{7};-\frac{18}{7};\frac{22}{7}\right)$$

L'equazione della retta è quindi: $\begin{cases} x=0+\left(\frac{12}{7}-0\right)t \\ y=0+\left(-\frac{18}{7}-0\right)t \\ z=1+\left(\frac{22}{7}-1\right)t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{12}{7}t \\ y=-\frac{18}{7}t \\ z=1+\frac{15}{7}t \end{cases}$.

3. Si studiano le soluzioni del sistema $\begin{cases} x^2-y^2+z^2=0 \\ z=1+ky \end{cases} \Rightarrow x^2+\left(k^2-1\right)y^2+2ky+1=0$. Si tratta di ellissi se $k^2-1>0 \Leftrightarrow |k|>1$, di iperboli se $k^2-1<0 \Leftrightarrow |k|<1$, di una parabole se $k^2-1=0 \Leftrightarrow |k|=1$.
4. La misura del raggio della sfera è uguale alla distanza del centro dal piano tangente. Il punto di tangenza si ottiene intersecando il piano tangente con la retta passante per il centro e perpendicolare al piano, la cui direzione è data dal vettore $\vec{v}(2;-1;2)$. L'equazione della retta è quindi $r:\begin{cases} x=2t \\ y=-t \\ z=2t \end{cases}$, ed il punto d'intersezione si ottiene sostituendo le coordinate del generico punto della retta nell'equazione del piano: $2(2t)-(-t)+2(2t)-3=0\Rightarrow t=\frac{1}{3}\Rightarrow P\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. Da questo segue $r^2=PH^2=1$ e l'equazione della sfera è quindi $x^2+y^2+z^2=1$.