

ESERCIZI FUNZIONI

Insieme di definizione

Trovare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
 1. \quad f(x) &= \sqrt{\frac{x-1}{x^2-3x+2}}, \quad 2. \quad f(x) = (x+2)\log_{10}(x^2-3), \quad 3. \quad f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)}, \\
 \text{Sol: } x &\geq 2 \quad \text{Sol: } x < -3 \vee x > 3 \quad \text{Sol: } 0 < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\
 4. \quad f(x) &= \sqrt[4]{4-x|x|}, \quad 5. \quad f(x) = (x-1)^{\frac{x-2}{1-x^2-9}}, \quad 6. \quad f(x) = \sqrt{\ln 2 - \ln\left(\frac{1}{\sin \frac{2}{\pi}x}\right)}, \\
 \text{Sol: } x &\leq 2 \quad \text{Sol: } x > 1 \quad x \neq \sqrt{8}, x \neq \sqrt{10} \quad \text{Sol: } \frac{\pi^2}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi^2}{3} + 2k\pi
 \end{aligned}$$

Immagine e controimmagine

Trovare l'immagine $f(A)$ delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
 7. \quad f(x) &= \frac{x^2+1}{x^2-1}, \quad A = [-1;1], \quad 8. \quad f(x) = \ln(e^x+1); \quad A = \mathbb{R} \quad 9. \quad f(x) = \frac{x-|x|}{2}, \quad A = (-4;4), \\
 \text{Sol: } f(A) &= (-\infty, -1] \quad \text{Sol: } f(A) = (0, +\infty) \quad \text{Sol: } f(A) = (-4, 0] \\
 10. \quad f(x) &= \sqrt{3}\sin x - \cos x; \quad A = [0; 2\pi] \\
 \text{Sol: } f(A) &= [-2, 2]
 \end{aligned}$$

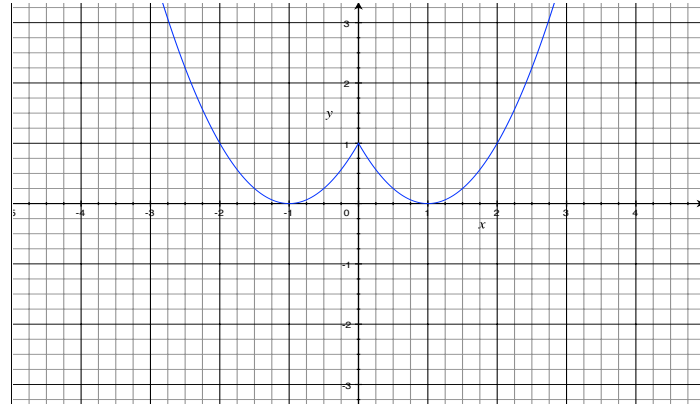
Trovare la controimmagine $f^{-1}(C)$ nei seguenti casi:

$$\begin{aligned}
 11. \quad f(x) &= \ln(1-x); \quad C = [-2;0], \quad 12. \quad f(x) = \sqrt{x-2}; \quad C = [0;4), \quad 13. \\
 \text{Sol: } f^{-1}(C) &= [0, 1-e^{-2}] \quad \text{Sol: } f^{-1}(C) = [2, 18) \\
 f(x) &= \sin x - \cos x; \quad C = [-1;1] \quad 14. \quad f(x) = \arctan \frac{1}{x}; \quad \left(0; \frac{\pi}{4}\right], \quad 15. \\
 \text{Sol: } f^{-1}(C) &= \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \vee \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \vee \left[2\pi, \frac{9\pi}{4}\right], \quad \text{Sol: } f^{-1}(C) = [1, +\infty) \\
 f(x) &= \ln|\sin x|; \quad (-\infty; 0] \\
 \text{Sol: } f^{-1}(C) &= \{x \neq k\pi\}
 \end{aligned}$$

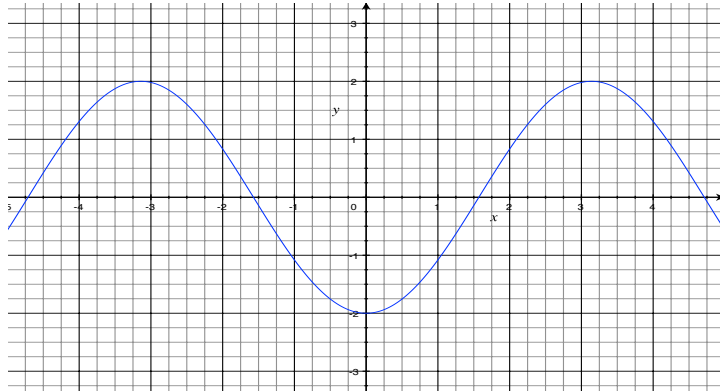
Grafici di funzioni

Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

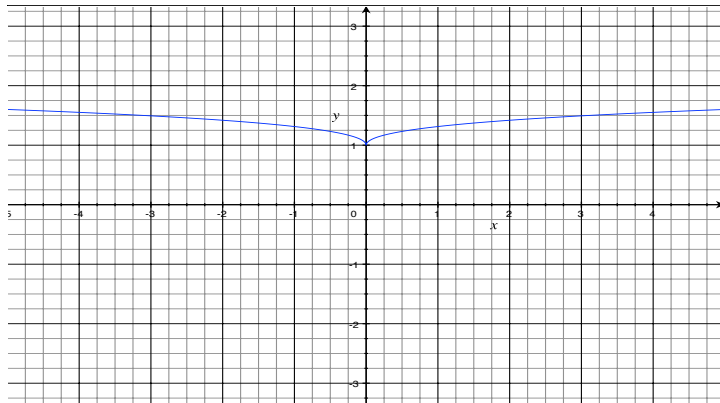
$$16. \quad f(x) = x^2 - 2|x| + 1;$$



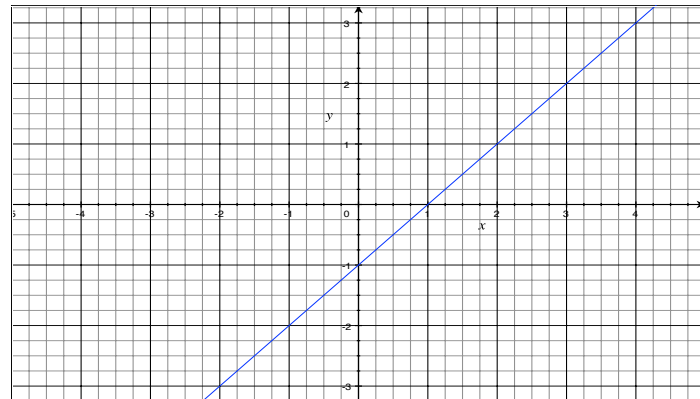
17. $f(x) = 2\cos(\pi - x)$;



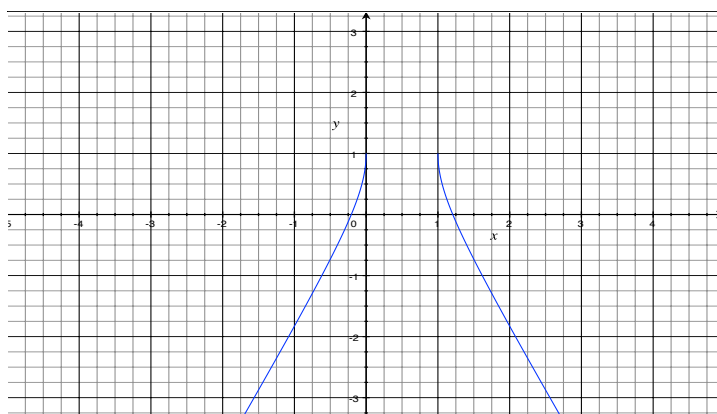
18. $f(x) = \ln(e + \sqrt{|x|})$;



19. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$;



20. $f(x) = 1 - \sqrt{4x^2 - 4x}$.



Funzione composta e funzione inversa

Trovare l'insieme di definizione e l'espressione della funzione composta $g(f(x))$ quando $g(x)$ e $f(x)$ sono le funzioni seguenti:

$$21. \quad g(x) = \sqrt{\ln x} \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \quad 22. \quad g(x) = e^{2x} \quad f(x) = x^2 + 1 \quad 23. \\ \text{Sol: } g(f(x)) = \sqrt{\ln\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)} \quad \text{Sol: } g(f(x)) = e^{2(x^2 + 1)}$$

$$g(x) = \sqrt{e^x - 1} \quad f(x) = \sin x$$

$$\text{Sol: } g(f(x)) = \sqrt{e^{\sin x} - 1}$$

Trovare, se esiste, l'inversa delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x - |x|$$

$$24. \quad \text{Sol: } f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x < 0 \\ \frac{x}{2} & x \geq 0 \end{cases} \quad 25. \quad f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1) \\ \text{Sol: } f^{-1}(x) = e^{2x} + 1$$

26. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è invertibile la funzione $f(x) = x + \alpha|x|$, e scrivere la funzione inversa. Tracciare un grafico di f e, quando esiste, di f^{-1} .

$$\bullet \quad f(x) = x + \alpha|x| = \begin{cases} (1 + \alpha)x & x \geq 0 \\ (1 - \alpha)x & x < 0 \end{cases} \quad \text{La funzione è invertibile se i coefficienti } (1 + \alpha), (1 - \alpha)$$

$$\text{sono concordi, ovvero se } -1 \leq \alpha \leq 1. \text{ Di conseguenza: } f^{-1}(x) = \begin{cases} (1 + \alpha)^{-1}x & x \geq 0 \\ (1 - \alpha)^{-1}x & x < 0 \end{cases} \quad \text{Nel}$$

grafico in figura sono rappresentate la funzione (in colore rosso) e la sua inversa (in colore verde)

