ESERCIZI NUMERI COMPLESSI

1. Si descriva il procedimento che ha condotto alla scrittura del radicale di un numero complesso $z = \sqrt{a+ib}$ nella forma algebrica $z = x + iy$. Quale interpretazione geometrica è possibile dare delle equazioni nelle incognite x e y che si ottengono?
2. In cosa consiste la rappresentazione geometrica di un numero complesso?
3. Cosa si intende per "coniugato" di un numero complesso? Quale trasformazione geometrica è richiamata dalla rappresentazione sul piano di Gauss di un numero complesso e del suo coniugato?
4. Che relazione intercorre tra le soluzioni complesse dell'equazione di secondo grado che non ammette soluzioni reali?
5. Qual è il risultato della moltiplicazione di un numero complesso e del suo coniugato?
6. Si dimostri che $z^n \cdot \overline{z}^n = (z \cdot \overline{z})^n$.
7. Si esprima un numero complesso in *forma trigonometrica*, e si sfrutti questa rappresentazione per dimostrare la *disuguaglianza triangolare*.
8. Quale interpretazione geometrica può essere data del prodotto di due numeri complessi? E della potenza n-esima di un numero complesso?
9. Dedurre la formula De Moivre nel caso $n = 4$.
10. Si rappresentino geometricamente le radici n-esime dell'unità.
11. Si specifichi il tipo di struttura algebrica rappresentata dall'insieme delle radici n-esime dell'unità, munito dell'operazione di prodotto.
12. Si consideri la funzione $f(z) = z^2$. a) Si dica se ammette punti fissi; b) Si determini l'immagine dei numeri aventi modulo rispettivamente minore, uguale, o maggiore di uno.

    $$\left[\ z = 0, \quad z = 1\ \right]$$
13. Si consideri la funzione $f(z) = 1/z$. a) Si dica se ammette punti fissi; b) Si determini l'immagine dei numeri aventi modulo rispettivamente minore, uguale, o maggiore di uno.

    $$\left[\ z = 1, \quad z = -1\ \right]$$
14. Descrivere l'insieme dei numeri complessi tali che $|z| \geq |z - i|$.

    $$\left[z = x + iy \mid y \geq \frac{1}{2} \right]$$
15. Risolvere le seguenti equazioni:

$a) z^2 + 3iz + 4 = 0;$ $\quad [i; -4i]$

$b) z^2 = \overline{z};$ $\quad \left[\ 0;\quad 1;\quad \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\ \right]$

$c) z^2 + 2z + i = 0;$ $\quad \left[-1 \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \mp i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right]$

$d) z^3 = iz\overline{z};$ $\quad \left[\ \frac{\pm\sqrt{3}+i}{2};\quad -i\ \right]$

$e) |z|^2 z^2 = i$ $\quad \left[\begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad k = 0,1 \end{cases}\right]$

A-LEVEL MATHEMATICS

1. Find in the form $x + iy$ the solutions of the following equations: $(a) z^2 = -25; (b)(2z-3)^2 = -25; (c)(z-2i)^2 = 49$.
2. If $\frac{z}{z-2} = 2 + i$, find z in the form $x + iy$.
3. Sketch the loci described by $(a)|z + 2i| = 1; (b)\arg(z-1) = -\frac{2\pi}{3}; (c)|z + 2 + i| = |z - 4 + i|$.
4. If P represents the complex number $\sqrt{3} + i$, find geometrically the two possible complex numbers represented by Q, the third vertex of the equilateral triangle OPQ.
5. Find the roots of the equations: $(a)(1-i)z^2 - 2iz + 3 - i = 0; (b) z^2 + 2z + 5 = 0$.
6. Expand $(\cos\theta + i\sin\theta)^5$ by the binomial theorem. From this expansion, show that $\cos 5\theta = 16c^2 - 20c^3 + 5c$, where $c = \cos\theta$. Obtain a similar expression for $\cos 6\theta$.