

CAPITOLO 3

I NUMERI COMPLESSI

3.1 Definizione e operazioni algebriche con i numeri complessi

In linea con quanto già successo per gli altri sistemi numerici, è stato un “bisogno” che ha portato all'introduzione dell'insieme dei numeri complessi. Fu il bisogno di una maggiore libertà nei calcoli formali che portò all'uso dei numeri interi relativi (introduzione del simbolo “-”), dei numeri razionali (introduzione del simbolo di frazione), e dei numeri irrazionali (introduzione del simbolo di *radice*). Soltanto alla fine del medioevo i matematici cominciarono a perdere il loro senso di disagio nell'usare questi concetti, che non sembrava avessero lo stesso carattere intuitivo dei numeri naturali.

E' importante sottolineare il rapporto di inclusione dei numeri naturali in quelli interi, che a loro volta sono inclusi in quelli razionali che, infine, costituiscono un sottoinsieme di quelli reali.

Ogni volta che un insieme numerico è stato ampliato, le sue leggi e le sue proprietà si sono trasferite nell'insieme esteso.

L'introduzione dei numeri complessi ha permesso, ad esempio, la risoluzione di quelle *equazioni di secondo grado* che non sono risolubili nell'insieme dei numeri reali. E' noto che una semplice equazione come

$$x^2 + 1 = 0,$$

non ammette soluzioni reali. Superiamo lo scoglio rappresentato dalla non negatività del quadrato di un numero reale introducendo la cosiddetta *unità immaginaria*, “*i*” tale che

$$i^2 = -1.$$

Volendo eseguire operazioni di addizione e moltiplicazione con il simbolo *i* come con un ordinario numero reale, dobbiamo porci nella condizione di definire simboli come, ad esempio, $3i$, $5-2i$ o, più in generale, del tipo $a+ib$, dove *a* e *b* sono numeri reali qualsiasi. Questi simboli dovranno rispettare le proprietà tipiche dell'addizione e della moltiplicazione quali la commutativa, la distributiva e l'associativa:

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

$$(a+ib) \cdot (c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

Con queste definizioni, l'insieme dei numeri complessi può essere così definito:

$$C = \{z = x + iy \mid x, y \in R\},$$

dove *x* e *y* rappresentano, rispettivamente, la *parte reale* e la *parte immaginaria* del numero complesso *z*. Notiamo, dalla seconda proprietà, che

$$(x+iy) \cdot (x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2.$$

Inoltre, anche la sottrazione e la divisione conducono a numeri della forma $a+ib$:

$$\begin{aligned} (a+ib) - (c+id) &= (a-c) + i(b-d) \\ \frac{a+ib}{c+id} &= \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + i \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}. \end{aligned}$$

Con qualche calcolo in più è possibile scrivere anche un radicale con radicando complesso nella forma $a+ib$, ad esempio $\sqrt{5+12i}$. Si procede formalmente ponendo

$$\sqrt{5+12i} = x + iy.$$

A questo punto eleviamo al quadrato ed otteniamo

$$5+12i = x^2 - y^2 + i2xy.$$

La determinazione di *x* e *y* avverrà una volta risolto il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = +5 \\ 2xy = +12 \end{cases}$$

ottenuto uguagliando le parti reali del radicando e del numero $x+iy$, e le parti immaginarie, sempre del radicando e del numero complesso.

Applicando il metodo di sostituzione otteniamo l'equazione a coefficienti reali

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$

Il numero, o meglio i numeri, rappresentativi del radicale $\sqrt{5+12i}$ nella forma $x+iy$ sono

$$z_1 = -3 - 2i$$

$$z_2 = 3 + 2i$$

Per esercizio, provare a risolvere nell'insieme dei numeri complessi l'equazione di secondo grado $x^2 - 2x + 2 = 0$.

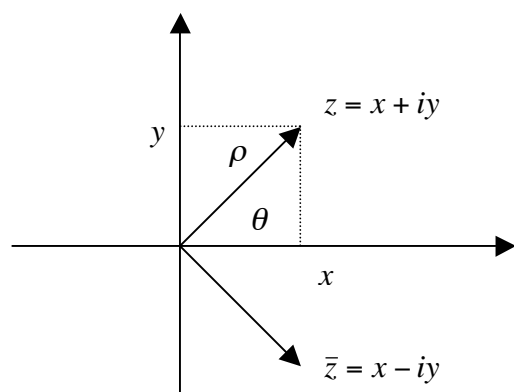
E' possibile definire l'insieme dei numeri reali come il sottoinsieme dei complessi costituito dai numeri aventi parte immaginaria uguale a zero. In simboli:

$$R = \{z = x + iy \in C \mid y = 0\}.$$

In realtà, una proprietà comune a tutti gli insiemi numerici visti finora non si trasferisce all'insieme dei numeri complessi: l'*ordinamento*. Per comprendere il significato di quest'ultima affermazione occorre considerare la seguente rappresentazione.

3.2 Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Dovuta essenzialmente al lavoro di matematici come Wessel, Argand e Gauss, consiste nel riportare su un piano cartesiano la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso, rispettivamente sull'asse delle ascisse e su quello delle ordinate. In questo modo è stabilita una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri complessi e quello dei punti del piano.



Si definisce il *coniugato* di un numero complesso $z = x + iy$, il numero complesso $\bar{z} = x - iy$. Il *modulo* ρ di un numero complesso è definito dalla distanza del punto che lo rappresenta dall'origine:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} =: \rho.$$

Un numero complesso ed il suo coniugato sono legati dalla relazione

$$z \cdot \bar{z} = \rho^2;$$

sussistono inoltre le seguenti relazioni:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Si osserva che l'insieme dei numeri complessi di modulo unitario è rappresentato sul piano d'Argand da una circonferenza di raggio uno. Sussiste il seguente:

Teorema: Dati due numeri complessi z_1, z_2 risulta

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Dimostrazione. Risulta $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$. Di conseguenza

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = |z_1| \cdot |z_2| \text{ c.v.d.}$$

Un numero complesso può essere espresso in *forma trigonometrica*:

$$z = x + iy = \rho(\cos \theta + i \sin \theta),$$

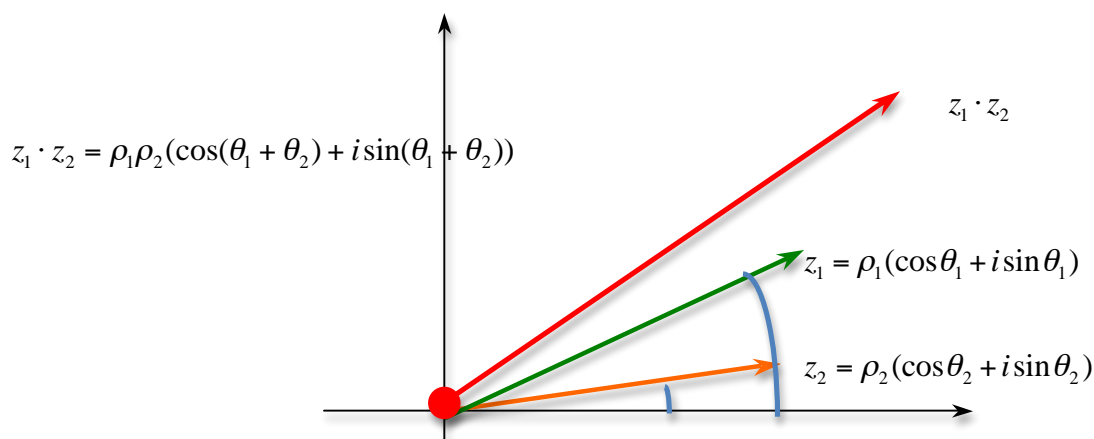
dove θ è detto *argomento* del numero complesso.

Ragionando sui vettori associati ai numeri complessi è di immediata dimostrazione la cosiddetta *disuguaglianza triangolare*:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Significato geometrico della moltiplicazione di numeri complessi: rotazioni

Possiamo interpretare l'operazione di moltiplicazione di due numeri complessi in termini di *rotazioni* e di *omotetie*, in quanto il risultato dell'operazione $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$ può essere visto come l'azione sul punto z_1 dell'omotetia di centro l'origine e rapporto ρ_2 , e della rotazione di un angolo θ_2 , in senso antiorario a partire dalla semiretta di centro l'origine a cui appartiene z_1 .



Il prodotto di complessi è quindi un numero complesso il cui modulo è il prodotto dei moduli dei due numeri dati, e l'argomento è la somma degli argomenti. In particolare risulta

$$z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Nel caso particolare in cui $\rho = 1$ si ha la *formula di De Moivre*:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

La dimostrazione di questa relazione segue dall'applicazione di uno dei "principi" più importanti della matematica: il *principio di induzione*. Vediamo di cosa si tratta.

Il principio di induzione

Esiste un modo preciso per individuare i numeri naturali tra i numeri reali, basato sulla nozione di *insieme induttivo*: un sottoinsieme di \mathbb{R} che gode delle due seguenti proprietà:

1. Il numero 1 appartiene all'insieme,
2. Per ogni x appartenente all'insieme anche il numero $x + 1$ appartiene all'insieme.

\mathbb{R} stesso è induttivo, i reali positivi costituiscono un insieme induttivo. I numeri naturali si possono quindi identificare come quei reali che appartengono ad ogni insieme induttivo. \mathbb{N} è dunque il più piccolo insieme induttivo. Con questa definizione è possibile enunciare il seguente procedimento dimostrativo:

principio di induzione: se A è un sottoinsieme dei naturali con la proprietà che 1 appartiene ad A e che se a appartiene ad A allora anche $a+1$ appartiene ad A , allora $A = \mathbb{N}$.

Questo principio è molto usato nelle definizioni cosiddette *ricorsive* e nelle dimostrazioni chiamate *induttive*, nella forma espressa dal seguente risultato.

TEOREMA: se $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ è una famiglia di proposizioni dipendente dall'indice intero n e se

1. La proposizione P_0 è vera.

2. Per ogni naturale n la proposizione P_n implica la proposizione P_{n+1} , allora la proposizione P_n è vera per ogni n .

Dimostrazione della formula di de Moivre

1. La tesi è vera per $n = 1$: $(\cos \theta + i \sin \theta)^1 = (\cos \theta + i \sin \theta)$.
2. Si suppone vero che $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta)$, e si dimostra che $(\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} = (\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta)$. Infatti:
 $(\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} = (\cos \theta + i \sin \theta)^n (\cos \theta + i \sin \theta) = (\cos n\theta + i \sin n\theta)(\cos \theta + i \sin \theta)$, e la tesi segue applicando la formula del prodotto al membro di destra.

Questa formula si rivela particolarmente utile per la determinazione delle cosiddette *radici n-esime dell'unità*, intese come quei numeri complessi b tale che $b^n = 1$. Le radici n-esime dell'unità sono rappresentate dai vertici del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza unitaria. Tali radici sono le soluzioni dell'equazione

$$z^n = 1$$

e si indicano con

$$z_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n},$$

con $k = 0, 1, \dots, n-1$.

3.3 Radici n-esime dell'unità e trasformazioni geometriche

La rappresentazione geometrica delle radici n-esime dell'unità permette alcune interessanti interpretazioni di risultati in termini di particolari trasformazioni geometriche.

Esempio. Rappresentare geometricamente le soluzioni dell'equazione $z^n = k^n$, dove k è un numero reale.

Procedendo come sopra, le soluzioni di questa equazione sono $\left\{ \begin{array}{l} |z| = |k| \\ \theta = \frac{2\pi h}{n}, \quad h = 0, 1, \dots, n-1 \end{array} \right.$, e

possono essere rappresentate su una circonferenza centrata nell'origine degli assi, e di raggio uguale a k . Tale circonferenza può essere vista come la trasformata per omotetia di centro l'origine e rapporto k della circonferenza unitaria, su cui si sono rappresentate le radici n-esime dell'unità.

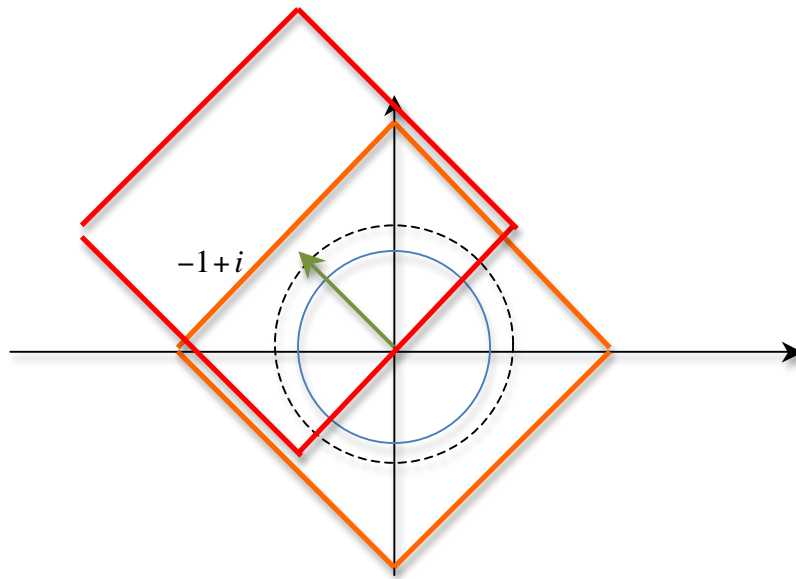
Esempio. Rappresentare geometricamente le soluzioni dell'equazione $(z+w)^n = k^n$, dove k è un numero reale, e $w = a + ib$ un numero complesso.

E' possibile ricondursi inizialmente al caso presentato nell'esercizio precedente mediante la sostituzione $u := z + w$, giungendo quindi all'equazione $u^n = k^n$. Dalle soluzioni di quest'ultima equazione è possibile giungere a quelle richieste in z , sottraendo alle parti reali e immaginarie, le rispettive parti del numero complesso z . L'interpretazione geometrica di questi passi può quindi essere data in termini della solita omotetia di centro l'origine e rapporto k , e della traslazione di vettore $(-a, -b)$.

Esempio

Rappresentare geometricamente le soluzioni dell'equazione complessa $(z+1-i)^4 = 16$.

L'equazione è del tipo $(z+w)^n = k^n$ con $w = 1-i$ e $k = 2$.



Esercizi svolti

1. E' data l'equazione $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = 0$, dove $z \in \mathbb{C}$. Si verifichi che i e $-i$ sono soluzioni e si determinino le rimanenti soluzioni.

- Si scrive l'equazione nella forma

$z^4 + 2z^2 + 1 - 2z^3 + z^2 - 2z + 1 = 0 = (z^2 + 1)^2 - 2z(z^2 + 1) + (z^2 + 1)$, da cui segue, raccogliendo opportunamente:

$$(z^2 + 1)[z^2 - 2z + 2] = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = i = i \sin \frac{\pi}{2} \\ z_2 = -i = -i \sin \frac{\pi}{2} \\ z_3 = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ z_4 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \end{cases}.$$

2. E' dato il numero complesso $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

- a) Si scriva la forma trigonometrica di z .

- $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right).$

- b) Si calcoli la potenza dodicesima z_{12} .

- $z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \Rightarrow z^{12} = 1^{12} \left(\cos \left(-\frac{12\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{12\pi}{6} \right) \right) = 1.$

- c) Si determinino le radici seste di z_1 e si rappresentino nel piano dei numeri complessi.

- Dalla formula di De Moivre segue $(\cos \theta + i \sin \theta)^6 = (\cos 6\theta + i \sin 6\theta)$ da cui
 $z_k = \cos \frac{2\pi k}{6} + i \sin \frac{2\pi k}{6}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

3. Risolvere l'equazione $(1+i)z^3 = 8\sqrt{2}i$, con $z \in \mathbb{C}$.

- $(1+i)z^3 = 8\sqrt{2}i \Rightarrow z^3 = \frac{8\sqrt{2}i}{(1+i)} = \frac{8\sqrt{2}i(1-i)}{2} = 4\sqrt{2}(1+i)$. Si scrive $4\sqrt{2}(1+i)$ in forma

trigonometrica: $4\sqrt{2}(1+i) = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ e si uguaglia a

$z^3 = \rho^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$. Di conseguenza

$$z^3 = \rho^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} \rho^3 = 8 \Rightarrow \rho = \sqrt[3]{8} = 2 \\ 3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

4. Risolvere la seguente equazione: $z^4 = 1 - i$. Cosa rappresentano sul piano di Gauss le soluzioni di questa equazione?

$$\rho^4 \cos 4\theta + i\rho^4 \sin 4\theta = 1 - i = r\cos\alpha + ir\sin\alpha$$

$$\begin{cases} r\cos\alpha = 1 \\ r\sin\alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^4 = \sqrt{2} \\ 4\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[4]{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

- Le soluzioni dell'equazione in questione rappresentano, sul piano di Gauss, i vertici di un quadrato inscritto in una circonferenza di raggio $\rho = \sqrt[4]{2}$.

5. Risolvere la seguente equazione: $z^6 = -i$.

- Dalla formula di De Moivre: $z^6 = \rho^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta)$. Scriviamo il numero complesso $-i$

in forma trigonometrica: $-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$. Di conseguenza:

$$\begin{cases} \rho^6 = 1 \\ 6\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

6. Risolvere le seguenti equazioni nell'insieme dei numeri complessi:

a) $z^4 = \bar{z}^3$ (suggerimento: si moltiplichino ambo i membri per z^3 e si ricordi che $z\bar{z} = |z|^2 \dots$)

- $z^7 = |z|^6 \Rightarrow |z|^7(\cos 7\theta + i\sin 7\theta) = |z|^6(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi) \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta_k = \frac{2k\pi}{7}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{cases}$

b) $z^2 + i \cdot \bar{z} = 1$.

$$z = x + iy \Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi + ix + y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + y - 1 = 0 \\ x(2y + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{imp}; \begin{cases} x^2 - 1/4 - 1/2 - 1 = 0 \\ y = -1/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{7/8} \\ y = -1/2 \end{cases} . \text{ Le soluzioni sono}$$

$$\text{dunque } z = \pm\sqrt{\frac{7}{8}} - i\frac{1}{2}.$$

7. Si determinino algebricamente e si rappresentino geometricamente le soluzioni dell'equazione complessa $|z-1| + |z+1| = 4$.

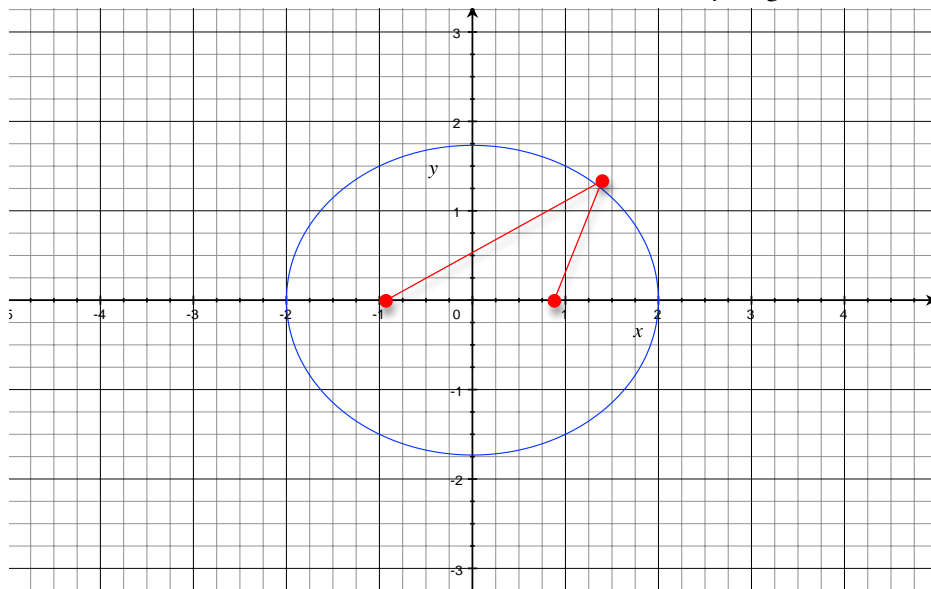
- Nel piano complesso le soluzioni possono essere interpretate come i punti la cui somma delle distanze da $(-1;0), (1,0)$ è costante e vale 4: si tratta quindi di un'ellisse

$$\text{con fuochi nei punti } (-1;0), (1,0) \text{ e semiasse } a = 2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

- Per via algebrica:

$$\begin{aligned} |x-1+iy| + |x+1+iy| = 4 &\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 16 + (x+1)^2 + y^2 - 8\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \\ -2x = 16 + 2x - 8\sqrt{(x+1)^2 + y^2} &\Rightarrow 4 + x = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$16 + 8x + x^2 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$



$$C - \{0\} \rightarrow C - \{0\}$$

8. E' data la funzione $f : z \mapsto f(z) = \frac{4}{\bar{z}}$. a) Si determinino i punti fissi, b) si risolva

$$\text{l'equazione } 16f(z) = z^3.$$

- a) $f(z) = z \Rightarrow \frac{4}{\bar{z}} = z \Rightarrow 4 = z\bar{z} = |z|^2 \Rightarrow \left\{ z = x + iy \in C \mid x^2 + y^2 = 2 \right\}.$

$$16f(z) = z^3 \Rightarrow \frac{64}{\bar{z}} = z^3 \Rightarrow 64 = z^2 |z|^2 = \rho^4 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

• b)

$$64(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = \rho^4 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \Rightarrow \begin{matrix} \rho = \sqrt[4]{64} \\ \theta_1 = 0; \theta_2 = \pi \end{matrix}$$

9. Si determinino i punti fissi della funzione $f(z) = \frac{\bar{z}}{z-1}$.

• Si risolve l'equazione $f(z) = z \Rightarrow \frac{\bar{z}}{z-1} = z \Rightarrow \frac{\bar{z} - z^2 + z}{z-1} = 0 \Rightarrow \bar{z} - z^2 + z = 0; z \neq 1$.

$$x - iy - x^2 + y^2 - 2xyi + x + iy = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ -2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0; x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

3.4 I numeri complessi e le formule goniometriche

La formula di De Moivre permette di calcolare espressioni quali, ad esempio, $\cos 3\varphi$ o $\sin 3\varphi$.

Infatti, $\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi$; da cui segue, uguagliando parte reale e parte immaginaria tra i due membri:

$$\begin{cases} \cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \\ \sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi \end{cases}$$

Esercizi e quesiti

1. Si descriva il procedimento che ha condotto alla scrittura del radicale di un numero complesso $z = \sqrt{a+ib}$ nella forma algebrica $z = x + iy$. Quale interpretazione geometrica è possibile dare delle equazioni nelle incognite x e y che si ottengono?
2. In cosa consiste la rappresentazione geometrica di un numero complesso?
3. Cosa si intende per “coniugato” di un numero complesso? Quale trasformazione geometrica è richiamata dalla rappresentazione sul piano di Gauss di un numero complesso e del suo coniugato?
4. Che relazione intercorre tra le soluzioni complesse dell'equazione di secondo grado che non ammette soluzioni reali?
5. Qual è il risultato della moltiplicazione di un numero complesso e del suo coniugato?
6. Si dimostri che $z^n \cdot \bar{z}^n = (z \cdot \bar{z})^n$.
7. Si esprima un numero complesso in forma trigonometrica, e si sfrutti questa rappresentazione per dimostrare la *disuguaglianza triangolare*.
8. Quale interpretazione geometrica può essere data del prodotto di due numeri complessi? E della potenza n-esima di un numero complesso?
9. Dedurre la formula De Moivre nel caso $n = 4$.
10. Si rappresentino geometricamente le radici n-esime dell'unità.
11. Si specifichi il tipo di struttura algebrica rappresentata dall'insieme delle radici n-esime dell'unità, munito dell'operazione di prodotto.
12. Si consideri la funzione $f(z) = z^2$. a) Si dica se ammette punti fissi; b) Si determini l'immagine dei numeri aventi modulo rispettivamente minore, uguale, o maggiore di uno.

$$\left[z = 0, \quad z = 1 \right]$$
13. Si consideri la funzione $f(z) = 1/z$. a) Si dica se ammette punti fissi; b) Si determini l'immagine dei numeri aventi modulo rispettivamente minore, uguale, o maggiore di uno.

$$\left[\begin{array}{l} z = 1, \quad z = -1 \end{array} \right]$$

14. Descrivere l'insieme dei numeri complessi tali che $|z| \geq |z - i|$.

$$\left[z = x + iy \mid y \geq \frac{1}{2} \right]$$

15. Risolvere le seguenti equazioni:

$$a) z^2 + 3iz + 4 = 0; \quad [i; -4i]$$

$$b) z^2 = \bar{z}; \quad \left[\begin{array}{l} 0; \quad 1; \quad \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \end{array} \right]$$

$$c) z^2 + 2z + i = 0; \quad \left[-1 \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \mp i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right]$$

$$d) z^3 = iz\bar{z}; \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}; \quad -i \end{array} \right]$$

$$e) |z|^2 z^2 = i \quad \left[\left\{ \begin{array}{l} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad k = 0, 1 \end{array} \right. \right]$$

A-LEVEL MATHEMATICS

1. Find in the form $x + iy$ the solutions of the following equations:

$$(a) z^2 = -25; (b) (2z - 3)^2 = -25; (c) (z - 2i)^2 = 49.$$

2. If $\frac{z}{z-2} = 2 + i$, find z in the form $x + iy$.

3. Sketch the loci described by (a) $|z + 2i| = 1$; (b) $\arg(z - 1) = -\frac{2\pi}{3}$; (c) $|z + 2 + i| = |z - 4 + i|$.

4. If P represents the complex number $\sqrt{3} + i$, find geometrically the two possible complex numbers represented by Q, the third vertex of the equilateral triangle OPQ.

5. Find the roots of the equations: (a) $(1 - i)z^2 - 2iz + 3 - i = 0$; (b) $z^2 + 2z + 5 = 0$.

6. Expand $(\cos\theta + i\sin\theta)^5$ by the binomial theorem. From this expansion, show that $\cos 5\theta = 16c^2 - 20c^3 + 5c$, where $c = \cos\theta$. Obtain a similar expression for $\cos 6\theta$.