

CAPITOLO 1

FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

1.1 Il concetto di funzione: introduzione storica e definizione

Il concetto di *funzione*, o relazione tra variabili, trae origine dallo studio del moto: ne sono una testimonianza gli scritti di Galileo. Con il simbolismo algebrico, che inizia a prendere campo nel corso del XVII secolo, la legge oraria del corpo in caduta si scrive nella forma $s = kt^2$: in questo caso le variabili in relazione tra di loro sono lo spazio di caduta ed il tempo. In realtà, il concetto di funzione, che appare anch'esso per la prima volta nel XVII secolo, viene inizialmente studiato in relazione alle *curve* nel piano cartesiano. Ad esempio, Torricelli e Descartes si occupano della curva $y = ae^{-cx}$, $x \geq 0$, mentre della sinusoide si occupa Roberval a margine dei suoi studi sulla cicloide. Con Roberval, Barrow e Newton il concetto di curva viene definitivamente associato a quello di *traiettoria* di un punto mobile. Anche la terminologia si sviluppa “a tappe”, a partire da quando Newton conia il termine “*fluente*” per indicare una relazione tra grandezze. Il termine “funzione”, invece, risale al 1673 ed è dovuto a Leibniz. Con questo termine egli intende denotare una quantità che varia da punto a punto in una curva. Insieme al termine funzione, Leibniz introduce anche quelli di *costante*, *variabile*, e *parametro*. L'idea moderna di funzione può essere fatta risalire al 1714, quando Leibniz, nella sua opera “*Historia*”, usa questo termine per denotare quantità che dipendono da una o più variabili, mentre la notazione moderna di funzione, $f(x)$, appare per la prima volta nel 1734 ad opera di Eulero.

Nella sua opera “*Introductio*”, Eulero completa gli studi sulle funzioni trigonometriche esprimendo chiaramente il concetto di periodicità, ed introducendo la misura degli angoli in radianti. Sempre in questa opera, Eulero definisce una funzione come un'espressione *analitica* formata in modo qualsiasi da una quantità variabile e da delle costanti. In questa definizione include, oltre alle moderne funzioni *goniometriche*, anche le *polinomiali* e *logaritmiche*.

Eulero fornisce quindi la nozione di funzione *algebrica*, che è tale se le operazioni sulla variabile indipendente coinvolgono solo operazioni algebriche, che a loro volta vengono suddivise in due gruppi: le funzioni *razionali*, dove vengono utilizzate soltanto le quattro operazioni, e le *irrazionali*, dove vengono utilizzati anche i radicali in aggiunta alle quattro operazioni. Eulero definisce *trascendenti* le funzioni goniometriche, logaritmiche, esponenziali, e le variabili elevate a potenze irrazionali.

Dopo questa breve sintesi storica è il momento di formalizzare il concetto di funzione, introducendone le notazioni, la terminologia, ed i primi concetti ad esso correlati, a partire da quello di *insieme*. Per i nostri scopi sarà sufficiente l'idea intuitiva di questo concetto come quella di “collezione di elementi”.

Si dice *funzione* una legge che ad ogni elemento x appartenente all'insieme A associa un solo elemento y appartenente all'insieme B .

In simboli

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Gli insiemi A e B sono detti rispettivamente *Dominio* e *Codominio*. Ci occuperemo soltanto di funzioni *reali di variabile reale*, cioè di quelle funzioni in cui il dominio ed il codominio sono sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali.

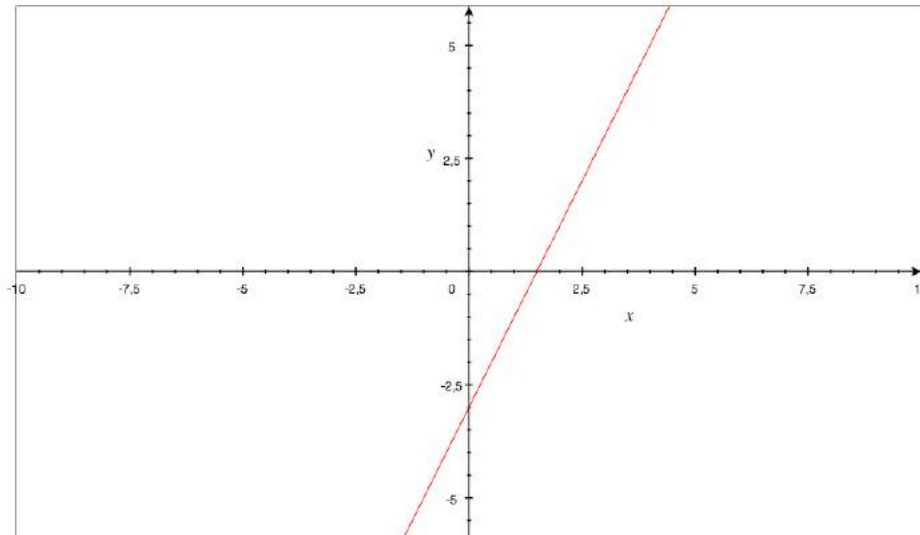
Dopo queste definizioni preliminari si pongono due questioni di rilievo per lo studio di una funzione: la determinazione del cosiddetto *insieme di definizione*, e la sua *rappresentazione grafica* su un diagramma cartesiano. Definiamo quindi l'insieme di definizione come il più grande sottoinsieme del dominio in cui la funzione è definita, e che scegliamo di denotare con A . Il grafico di una funzione è l'insieme dei punti del piano di coordinate $(x; f(x))$, dove x appartiene all'insieme di definizione e $f(x)$ è un elemento della cosiddetta *immagine di A* tramite la funzione f , che è definita come

l'insieme $f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$; in questo modo è definito l'insieme detto *controimmagine di B* costituito dagli elementi $f^{-1}(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$.

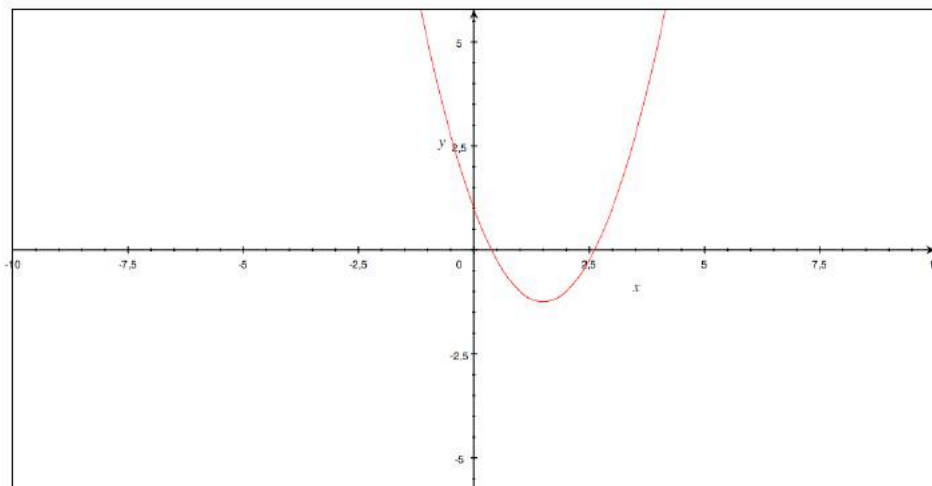
1.2 Alcuni esempi di funzioni reali di variabile reale

Le funzioni polinomiali di primo e secondo grado

Rientrano in questa categoria le funzioni del tipo $f(x) = ax + b$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$. Queste funzioni hanno come insieme di definizione l'insieme dei numeri reali. La loro rappresentazione grafica è data rispettivamente dalla *retta* e dalla *parabola*:



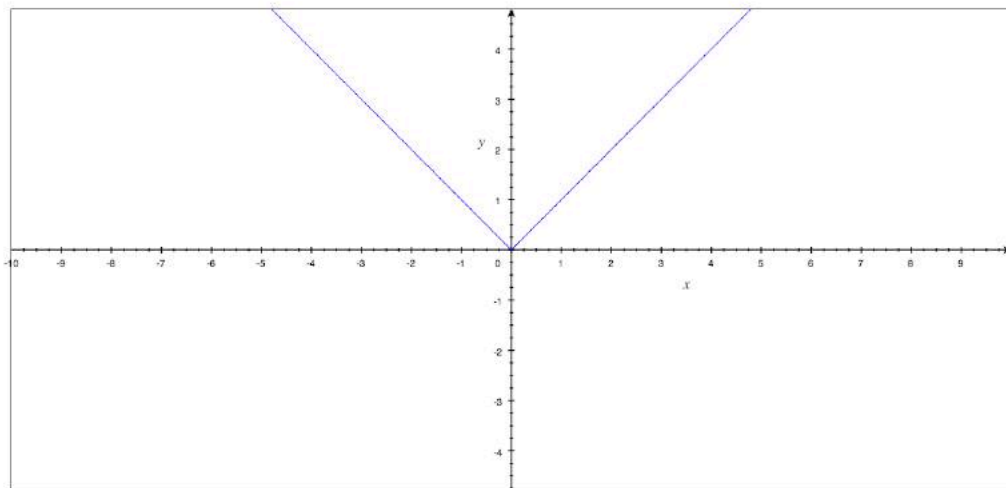
E' evidente dal grafico che l'immagine della retta coincide con l'insieme dei numeri reali. Nel caso della funzione polinomiale di secondo grado invece,



l'immagine è costituita da tutti i numeri reali non inferiori all'ordinata del vertice.

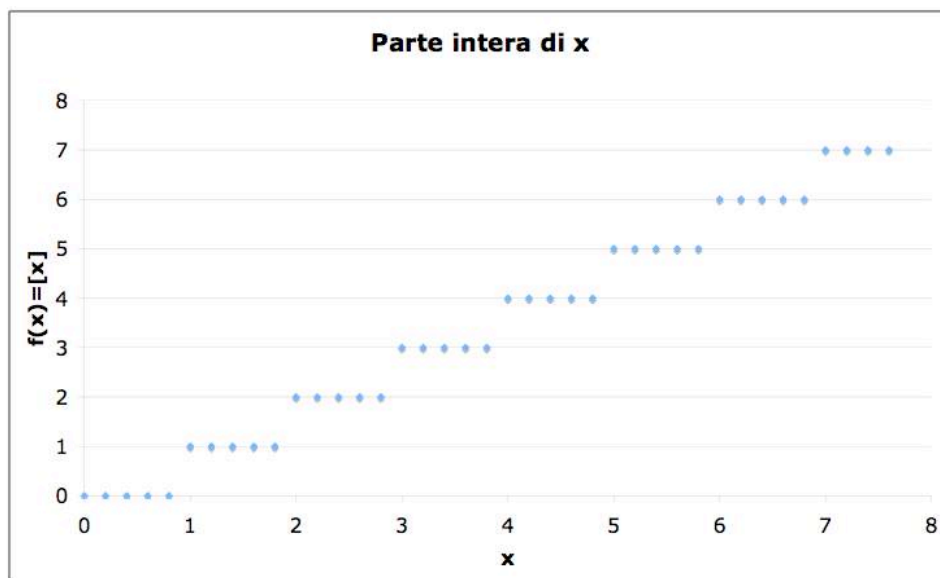
La funzione valore assoluto

Al valore assoluto di un numero reale è possibile associare la funzione $f(x) = |x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$. Una funzione di questo tipo si dice *definita per casi*. Il grafico della funzione valore assoluto è il seguente:



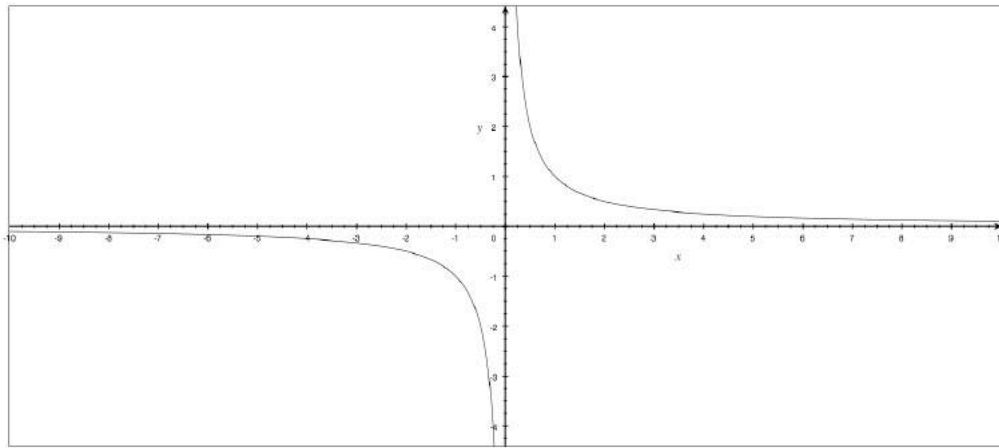
La funzione parte intera di x

Questa funzione associa ad ogni numero reale la propria parte intera. Ad esempio, la parte intera di π è 3, e si indica con $[\pi] = 3$. In generale, la funzione “parte intera di x ” si denota con $f(x) = [x]$, e la sua rappresentazione grafica:



La funzione omografica

La relazione di proporzionalità inversa tra due variabili espressa dalla $xy = k$ ha per insieme di definizione l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, e per grafico un'iperbole equilatera riferita agli asintoti:



In generale l'iperbole di equazione

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

ha centro nel punto di coordinate $\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$. Considerazioni quantitative, che saranno riprese

successivamente quando verrà affrontato il concetto di *limite di funzione*, conducono ad una giustificazione dei risultati enunciati sugli asintoti, sulla base dei seguenti fatti:

a) $y = \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}} \rightarrow y = \frac{a}{c}$ quando x diventa "molto grande", così come $y = \frac{1}{x} \rightarrow y = 0$ (asintoto

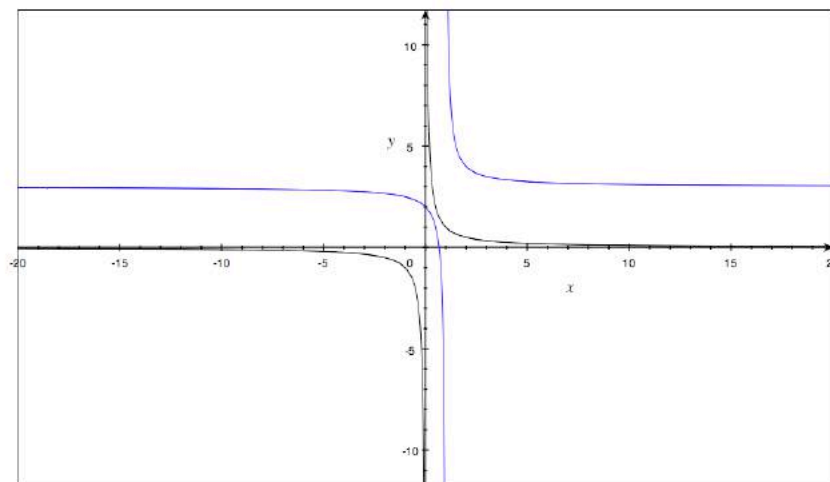
orizzontale $y = \frac{a}{c}$);

b) $y = \frac{ax + b}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} \rightarrow \infty$ quando x si avvicina a $-\frac{d}{c}$, così come $y = \frac{1}{x} \rightarrow \infty$ quando x si avvicina a

zero (asintoto verticale $x = -\frac{d}{c}$). Come funzione, l'insieme di definizione è

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{d}{c}\right\}.$$

Riportiamo sullo stesso grafico le curve $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{3x-2}{x-1}$ (in blu) di centro (1;3):



Alcune funzioni irrazionali

Prendiamo adesso in considerazione quelle funzioni irrazionali del tipo $f(x) = k + \sqrt{ax^2 + bx + c}$, direttamente riconducibili alle *coniche* come luoghi geometrici.

La parabola e le funzioni irrazionali

Consideriamo la funzione $f(x) = 4 - \sqrt{16 + 8x}$.

- Se scriviamo la curva data nella forma $\sqrt{16 + 8x} = 4 - y$, osserviamo che l'insieme di definizione della funzione e l'immagine della stessa sono rappresentati nella parte di piano delimitata dalle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} 16 + 8x \geq 0 & A \\ 4 - y \geq 0 & f(A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 4 \end{cases}.$$

questa parte di piano, quindi, è giustificata l'operazione algebrica

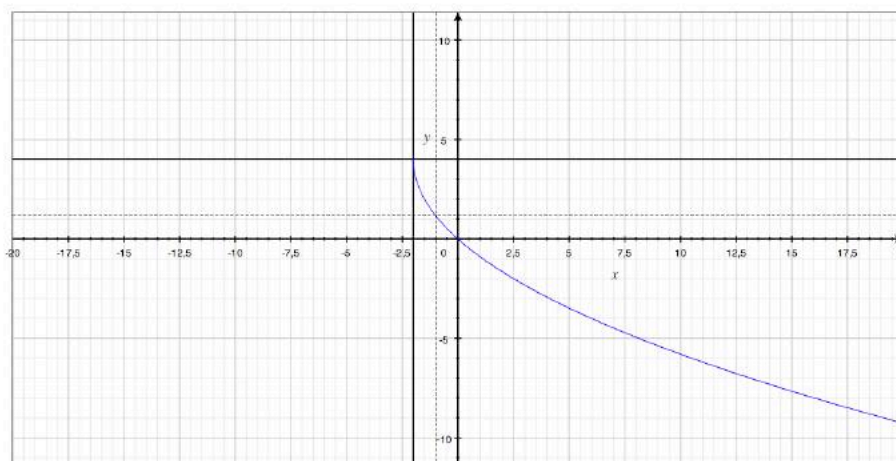
$(\sqrt{16 + 8x})^2 = (4 - y)^2$ dalla quale segue $x = \frac{1}{8}y^2 - y$ che, globalmente, rappresenta

l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse x :

$x = \frac{1}{8}(y^2 - 8y + 16 - 16) \Rightarrow x + 2 = \frac{1}{8}(y - 4)^2$ con vertice nel punto di coordinate

$V(-2; 4)$. Il grafico della funzione di partenza si ottiene a partire da quello della

parabola tenendo conto delle condizioni:
$$\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

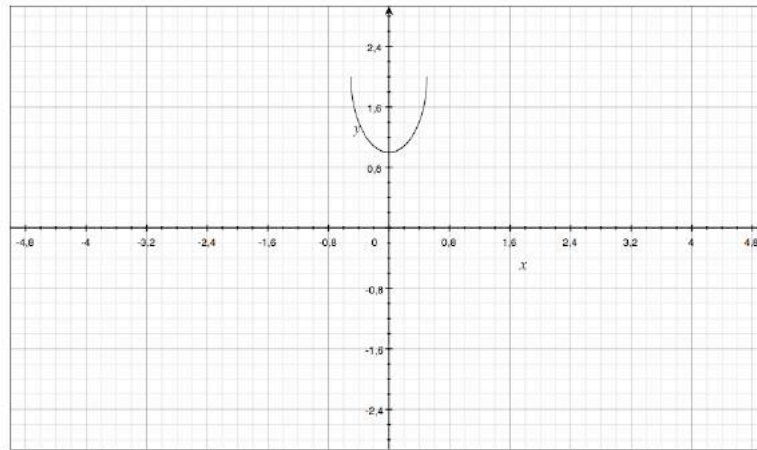


L'ellisse e le funzioni irrazionali

Consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = 2 - \sqrt{1 - 4x^2}$. Dalle condizioni di esistenza segue

innanzitutto che $y = 2 - \sqrt{1 - 4x^2} \Rightarrow \sqrt{1 - 4x^2} = 2 - y \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ y \leq 2 \end{cases}$. Elevando al quadrato ambo i

membri dell'espressione $\sqrt{1 - 4x^2} = 2 - y$, otteniamo l'equazione $4x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$. Si tratta dell'equazione di un'ellisse $4x^2 + (y - 2)^2 = 1$ con centro nel punto di coordinate $(0; 2)$. Tenendo conto delle restrizioni poste dalle condizioni relative alla funzione, otteniamo per quest'ultima il grafico:



Ricordando che una circonferenza può essere considerata come caso particolare di un'ellisse avente eccentricità uguale a zero, un esempio di funzione irrazionale riconducibile ad una circonferenza può essere $f(x) = 2 - \sqrt{1 - x^2}$.

L'iperbole e le funzioni irrazionali

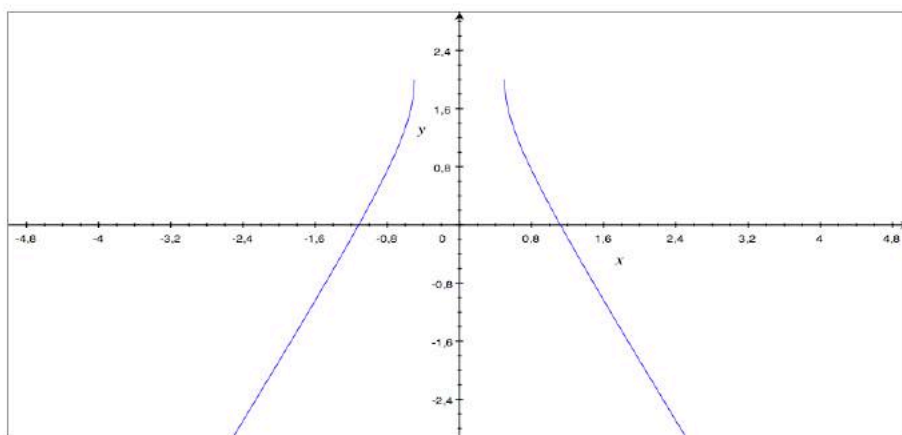
Consideriamo la funzione $f(x) = 2 - \sqrt{4x^2 - 1}$. Le condizioni di esistenza e sul segno delle immagini portano alla seguente delimitazione del piano cartesiano:

$$\begin{cases} 4x^2 - 1 \geq 0 \\ 2 - y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2} \\ y \leq 2 \end{cases}.$$

Il grafico della funzione coinciderà in questo sottoinsieme del piano cartesiano con quello dell'iperbole ottenuta elevando al quadrato l'espressione analitica della funzione stessa:

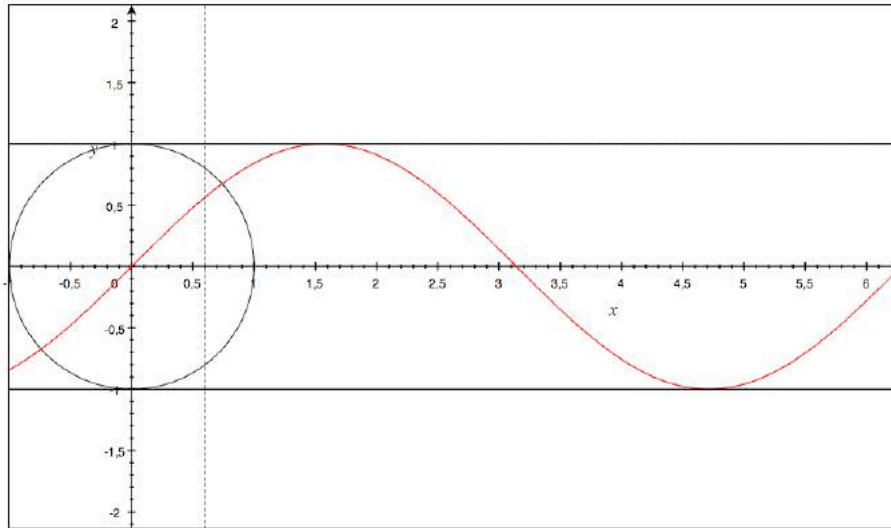
$$(y - 2)^2 = 4x^2 - 1 \Rightarrow 4(x - 0)^2 - (y - 2)^2 = 1:$$

si tratta di un'iperbole con fuochi sull'asse x, centro nel punto di coordinate $(0;2)$, $a = \frac{1}{2}$ e $b = 1$.

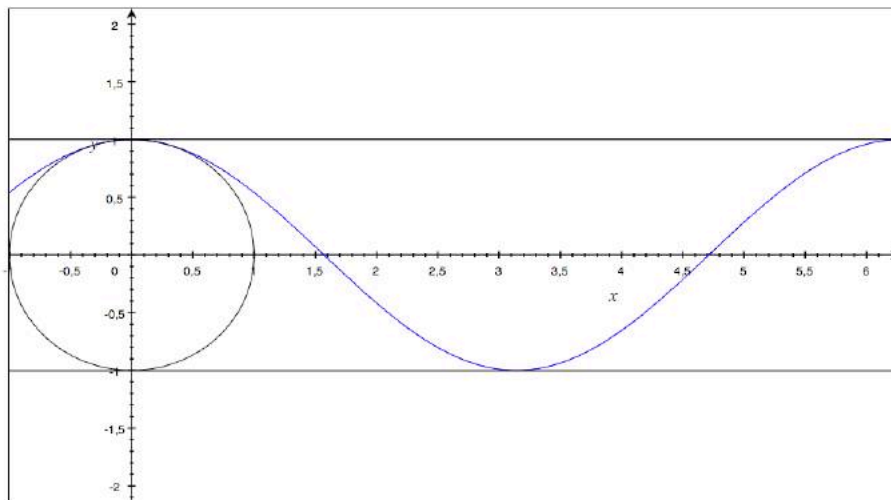


Le funzioni goniometriche

La funzione $f(x) = \sin x$ è definita su tutto l'insieme dei numeri reali, ed ha per immagine l'intervallo $[-1;1]$. Il suo grafico, limitato ad un sottoinsieme dell'insieme di definizione, è



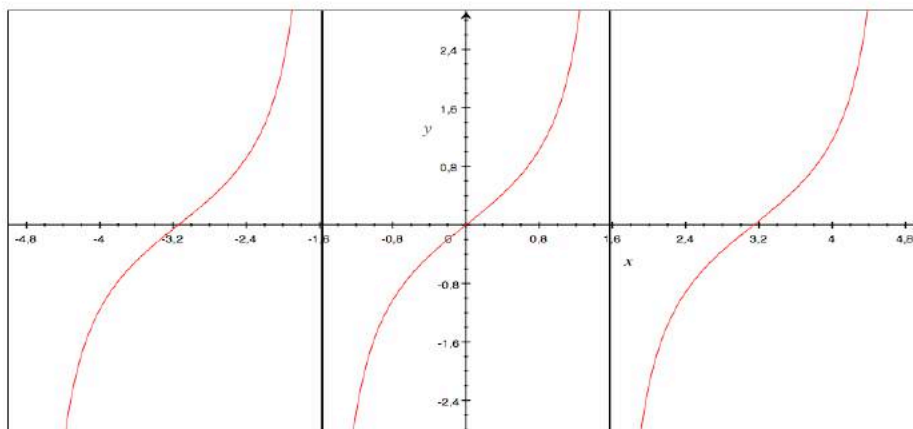
Anche la funzione $f(x) = \cos x$ è definita su tutto l'insieme dei numeri reali, ed ha per immagine l'intervallo $[-1;1]$. Il suo grafico, anch'esso limitato ad un sottoinsieme dell'insieme di definizione, è



In generale, una funzione definita sull'insieme A , si dice *periodica* di periodo T , se esiste un numero reale T tale che $f(x) = f(x + T)$, $\forall x \in A$.

Evidentemente, le funzioni seno e coseno, sono periodiche di periodo 2π .

Il discorso è diverso per quanto riguarda la funzione $f(x) = \tan x$, il cui periodo è π .



La funzione esponenziale

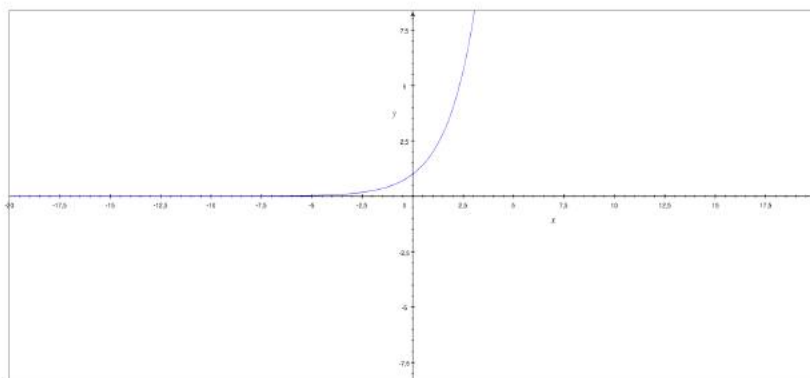
Si chiama *funzione esponenziale* ogni funzione $y = f(x) = a^x$ con $a \in \mathbb{R}^+$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

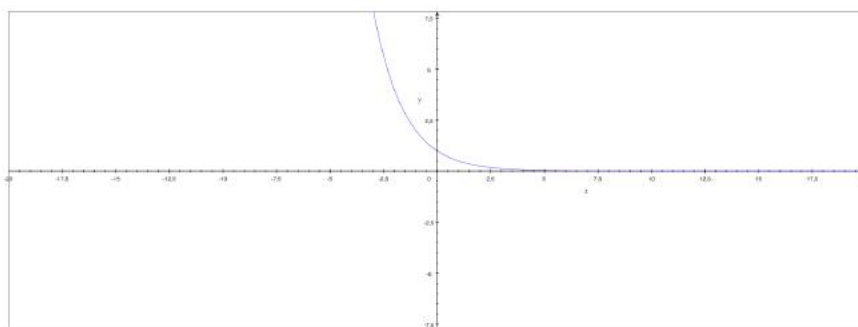
$$x \mapsto a^x$$

La funzione esponenziale è definita su tutto l'insieme dei numeri reali ed ha come immagine l'insieme $0 < y < +\infty$. Ci sono due possibili andamenti grafici della funzione esponenziale, a seconda che la base sia compresa tra 0 e 1, oppure maggiore di 1. I grafici seguenti evidenziano queste due possibilità.

- $f(x) = a^x$, $a > 1$



- $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$



1.3 Andamento di una funzione e invertibilità

Una caratterizzazione delle funzioni in termini del loro *andamento* porta alla definizione del concetto di *monotonia*:

una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *monotona crescente* (*decrecente*) se, per ogni coppia di punti

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Si vede subito che una funzione è crescente se e solo se $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0, \forall x_1, x_2 \in A; \quad x_1 \neq x_2,$

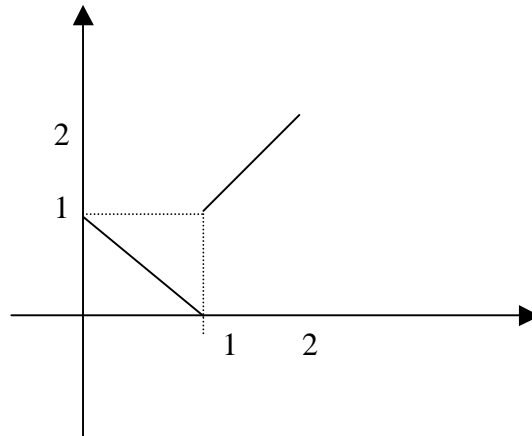
mentre è decrescente se $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0, \forall x_1, x_2 \in A; \quad x_1 \neq x_2.$

Se osserviamo il grafico della funzione polinomiale di primo grado (retta) o quello della funzione omografica (iperbole), possiamo notare che si tratta di funzioni monotone. Di più: queste funzioni *mandano punti diversi in punti diversi*. Questa notevole proprietà conduce alla seguente definizione: una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice *iniettiva* se $f(x_1) \neq f(x_2)$ quando $x_1 \neq x_2$. La funzione iniettiva stabilisce quindi una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi A e $f(A)$, nel senso che ogni elemento dell'immagine ha una ed una sola controimmagine. In questo caso è possibile definire una funzione

$f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ che ad ogni $y \in f(A)$, associa l'unico elemento $x \in A$ che verifica $y = f(x)$. Questa funzione f^{-1} si chiama *funzione inversa* della funzione f .

E' immediato constatare che le funzioni *strettamente* monotone sono invertibili, mentre non è sempre vero il viceversa, come chiarisce il seguente esempio:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



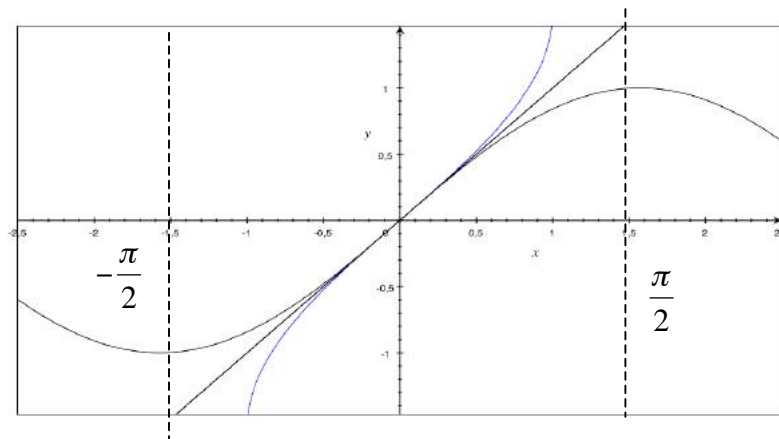
Vediamo alcuni esempi di funzioni inverse.

La funzione arcoseno di x

Consideriamo il grafico della funzione $f(x) = \sin x$ nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Costruiamo la funzione inversa $f^{-1}(x) = \arcsin x$ per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante:

$$f^{-1}: [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = \arcsin x$$

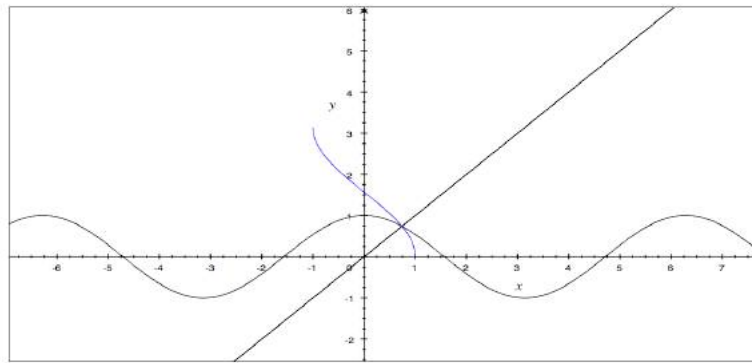


La funzione arcocoseno di x

Consideriamo il grafico della funzione $f(x) = \cos x$ nell'intervallo $[0; \pi]$. Costruiamo la funzione inversa $f^{-1}(x) = \arccos x$ per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante:

$$f^{-1}: [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = \arccos x$$

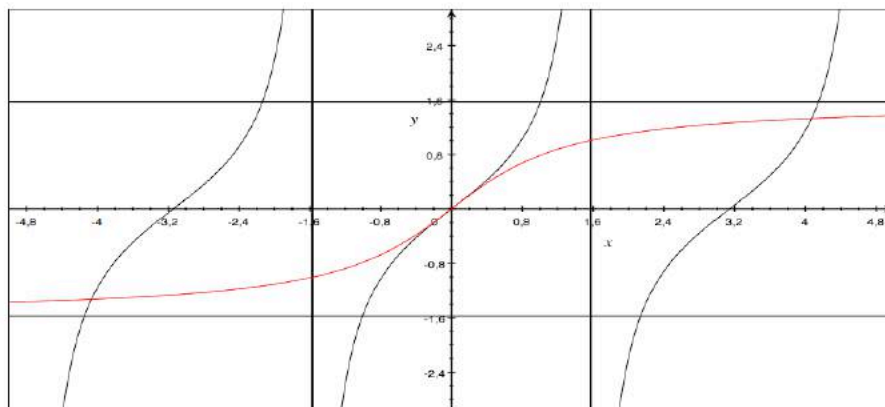


La funzione arcotangente di x

Consideriamo il grafico della funzione $f(x) = \tan x$ nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Costruiamo la funzione inversa $f^{-1}(x) = \arctan x$ per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante:

$$f^{-1} : (-\infty; +\infty) \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = \arctan x$$



La funzione logaritmo di x

Se consideriamo la funzione $y = a^x$, in virtù della sua crescita (o decrescenza) è immediatamente definita la funzione inversa, la cosiddetta *funzione logaritmica*:

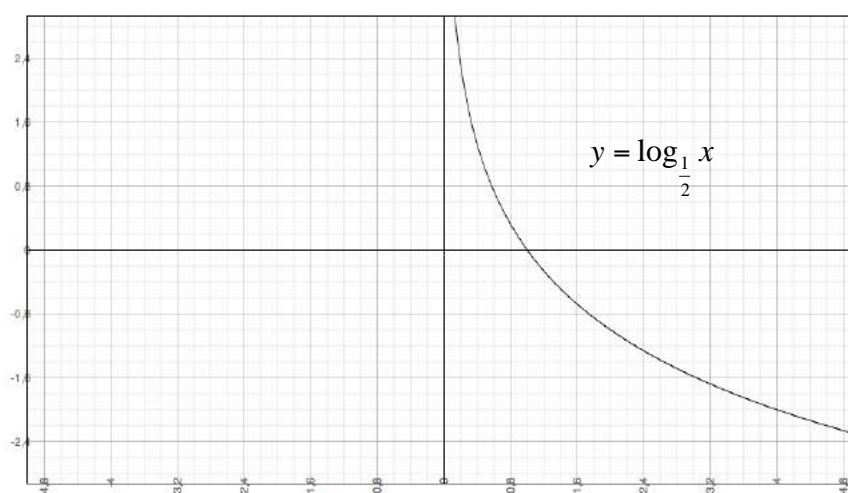
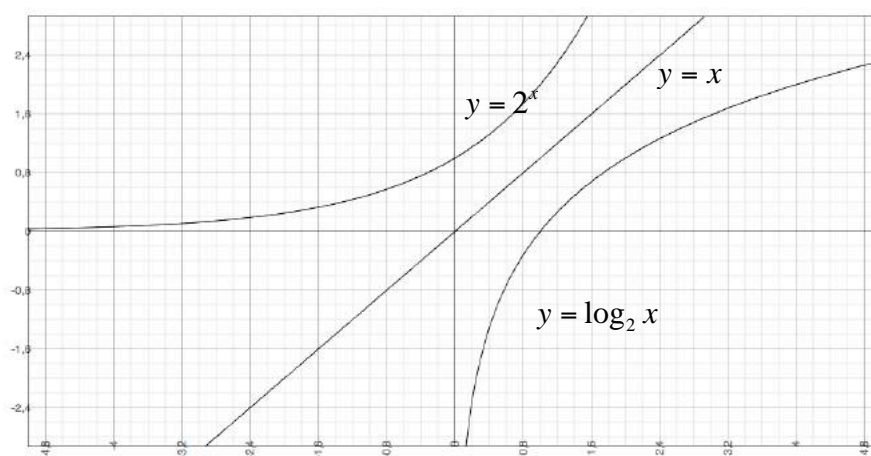
$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$$

$$y = \log_a x.$$

Il campo di esistenza della funzione logaritmica è \mathbb{R}^+ , mentre l'immagine coincide con tutto l'insieme dei numeri reali. In definitiva:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x \end{aligned} \quad 0 < a < 1 \vee a > 1$$

I grafici seguenti illustrano quanto detto.



1.4 Composizione di funzioni

Oltre alle usuali operazioni algebriche è possibile definire anche l'operazione di *composizione* tra funzioni.

Siano A, B, C tre insiemi e siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ due funzioni. Ad ogni $x \in A$, la funzione f associa l'elemento $f(x) \in B$. A quest'ultimo elemento, la funzione g associa un elemento $g(f(x)) \in C$. E' così definita una funzione da A in C che ad ogni $x \in A$ associa un elemento $g(f(x)) \in C$.

Attraverso la composizione di funzioni è possibile verificare la relazione che lega una funzione invertibile con la propria inversa:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x, & \forall x \in A \\ f(f^{-1}(x)) &= x, & \forall f(x) \in f(A) \end{aligned}$$

Questa proprietà ha permesso di costruire il grafico della funzione inversa, a partire da quello della funzione per *simmetria* rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

La simmetria è una proprietà che permette di sveltire le operazioni connesse alla rappresentazione grafica di una funzione. I concetti di funzione *pari* e di funzione *dispari*, permettono di caratterizzare due classi di funzioni.

La *parità* e la *disparità* di una funzione sono proprietà molto importanti, in quanto semplificano la rappresentazione grafica di una funzione riducendola a sottoinsiemi dell'insieme di definizione, per poi estenderla per *simmetria* ai restanti sottoinsiemi. Diamo le seguenti definizioni.

Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice *pari* se $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in A$.

Esempi di funzioni pari sono la funzione coseno, la funzione valore assoluto e la funzione quadratica il cui grafico è una parabola con asse coincidente con l'asse delle ordinate. Le funzioni pari sono *simmetriche rispetto all'asse y*. La verifica di questo fatto si basa sull'applicazione delle

equazioni della simmetria rispetto all'asse y $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$, al punto di coordinate

$$(-x, f(-x)) \rightarrow (x, f(-x)) = (x, f(x)).$$

Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice *dispari* se $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in A$.

Esempi di funzioni dispari sono la funzione seno, la funzione lineare (la retta) e la funzione cubica senza termini di secondo grado e con termine noto uguale a zero. Le funzioni dispari sono *simmetriche rispetto all'origine*. La verifica di questo fatto si basa sull'applicazione delle equazioni della

simmetria rispetto all'origine: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$, al punto di coordinate

$$(-x, f(-x)) \rightarrow (x, -f(-x)) = (x, f(x)).$$

La composizione con il valore assoluto di alcune funzioni

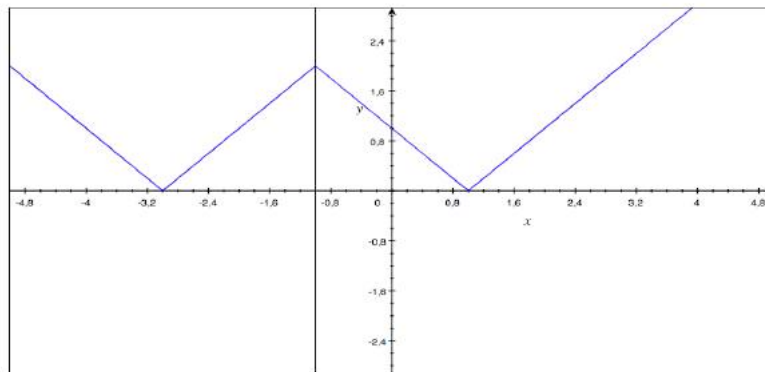
1. Si rappresenti graficamente la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5} - |4 + 4x|$.

- Dalla discussione del valore assoluto emerge che la funzione data può essere scomposta

$$f_1(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 5} - 4 - 4x & 4 + 4x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 5} + 4 + 4x & 4 + 4x < 0 \end{cases} = \begin{cases} |x - 1| & x \geq -1 \\ |x + 3| & x < -1 \end{cases}$$

nelle due funzioni

- Il grafico della funzione è quindi:



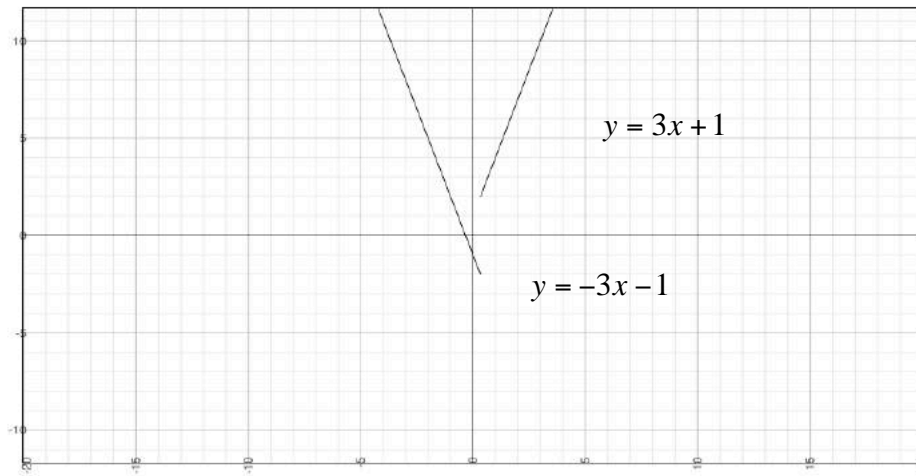
2. Si tracci il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{9x^2 - 6x + 1} + \frac{|2 - 6x|}{3x - 1}.$$

- $C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{3} \right\}$. La funzione si può scrivere nella forma

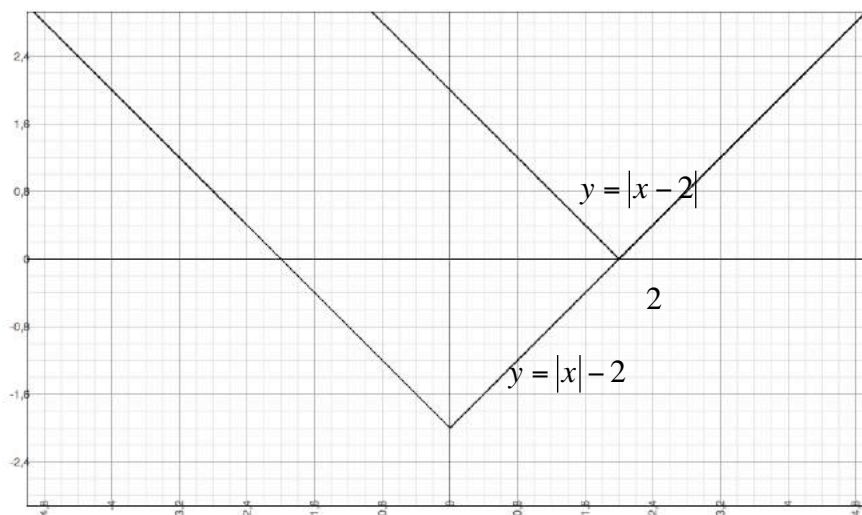
$$f(x) = \sqrt{9x^2 - 6x + 1} + \frac{|2 - 6x|}{3x - 1} = \sqrt{(3x - 1)^2} + \frac{2|1 - 3x|}{3x - 1} = \begin{cases} y = |3x - 1| + 2 & x > \frac{1}{3} \\ y = |3x - 1| - 2 & x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\bullet \quad f(x) = \begin{cases} y = 3x + 1 & x > \frac{1}{3} \\ y = -3x - 1 & x < \frac{1}{3} \end{cases}$$



3. Risolvere graficamente la seguente disequazione: $|x - 2| \leq -2 + |x|$.

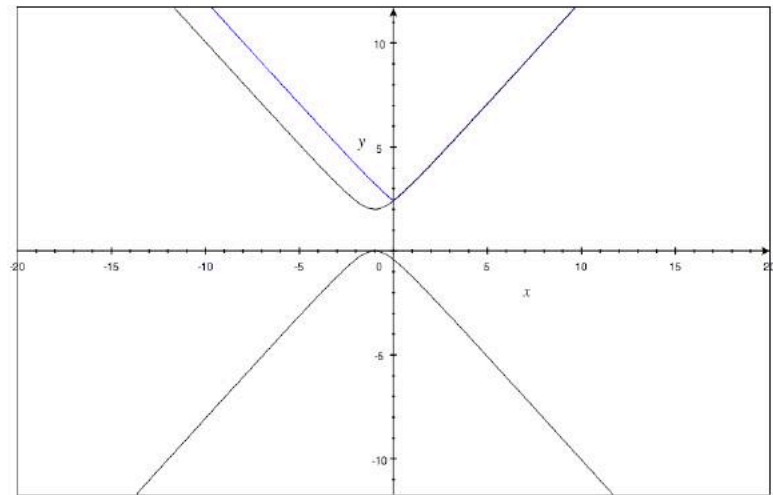
- Consideriamo le rette $y = |x - 2|$ e $y = |x| - 2$.
- Dal grafico risulta evidente che la soluzione della disequazione è $\forall x \geq 2$.



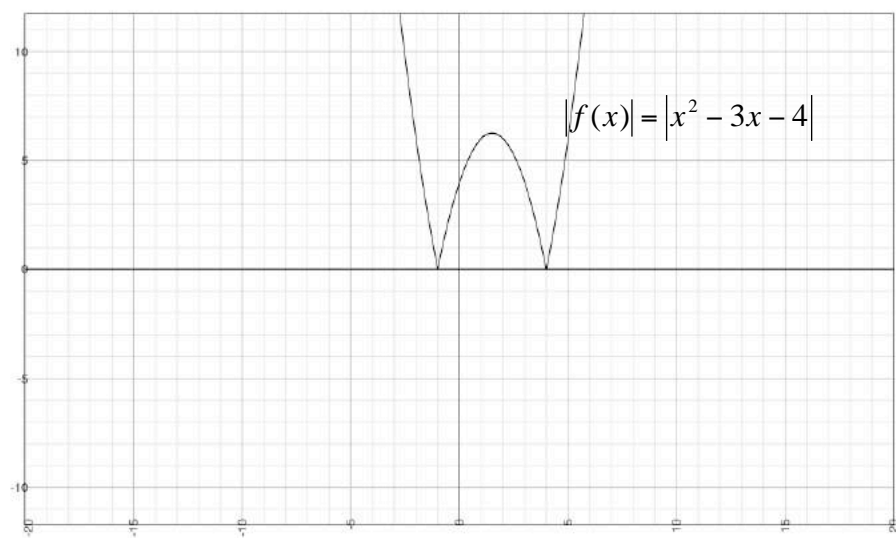
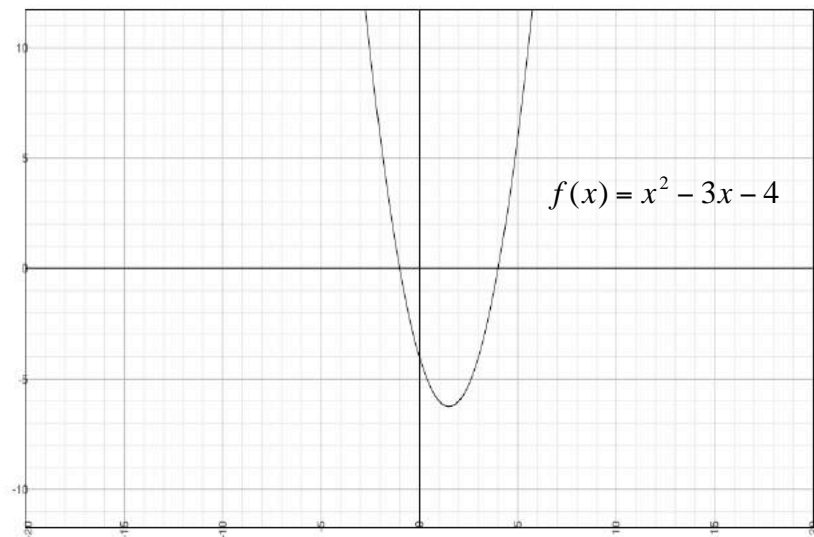
4. Si rappresenti graficamente la funzione $f(x) = 1 + \sqrt{x^2 + 2|x| + 2}$.

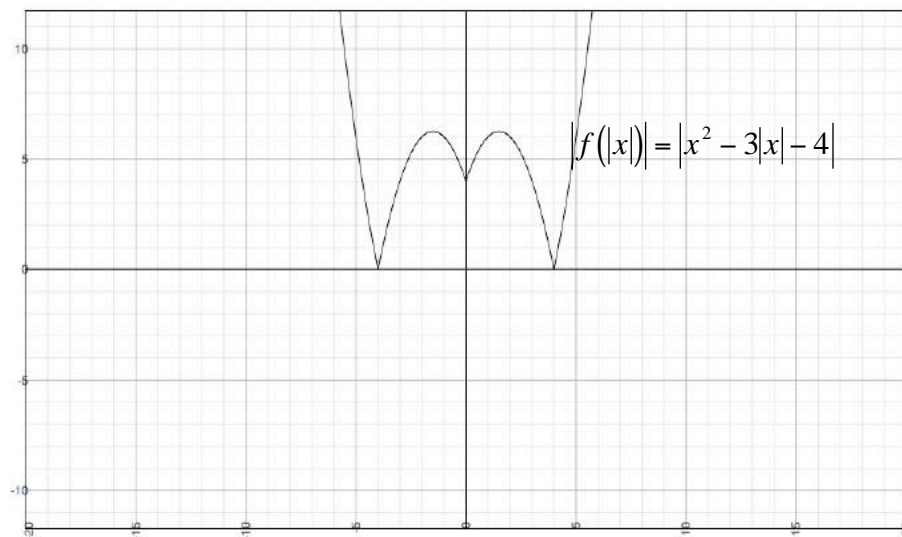
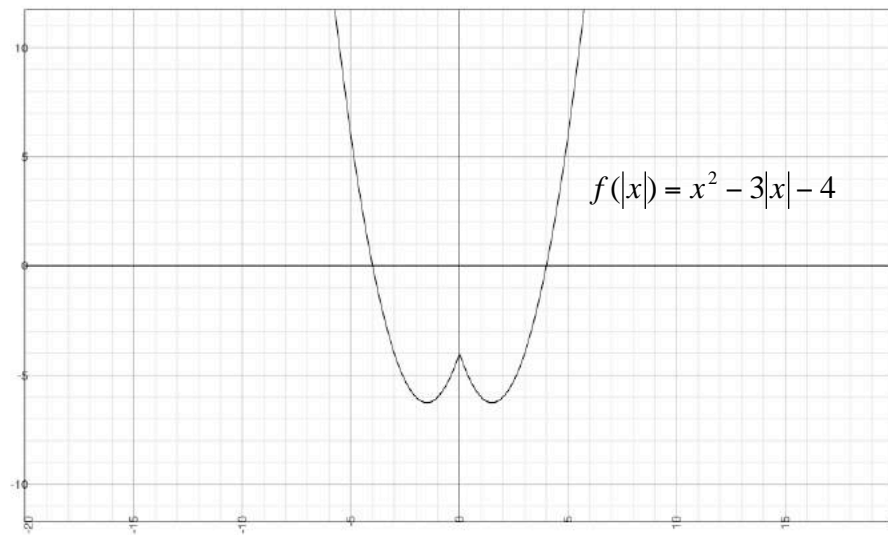
- $y - 1 = \sqrt{x^2 + 2|x| + 2} \Rightarrow \begin{cases} y - 1 \geq 0 \\ x^2 + 2|x| + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$. Poiché $f(x) = f(-x)$, il grafico

della funzione è simmetrico rispetto all'asse y. Possiamo rappresentare graficamente, per $x \geq 0$, la funzione $y - 1 = \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{(x + 1)^2 + 1} \Rightarrow (y - 1)^2 - (x + 1)^2 = 1$, e riflettere il grafico così ottenuto rispetto all'asse y. Il grafico di questa funzione è il ramo dell'iperbole equilatera di centro $(-1; 1)$ e fuochi nei punti di coordinate $(-1; 1 \pm \sqrt{2})$: $(x + 1)^2 - (y - 1)^2 = -1$, situato nel semipiano positivo delle ordinate.



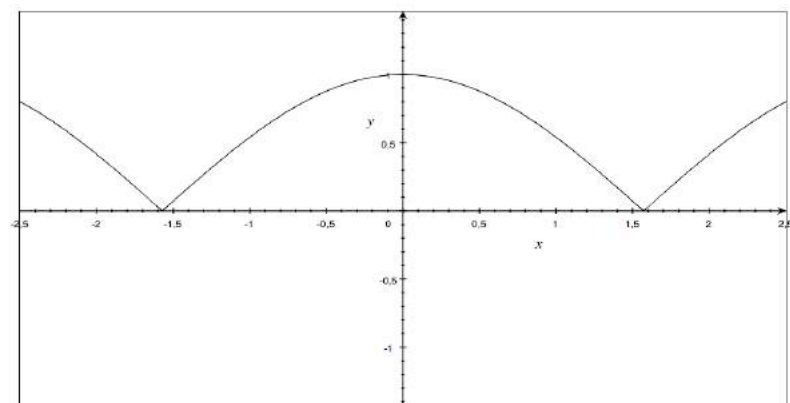
5. Si rappresenti graficamente la funzione $f(x) = x^2 - 3x - 4$, e le funzioni da essa ottenibili per composizione con la funzione valore assoluto:



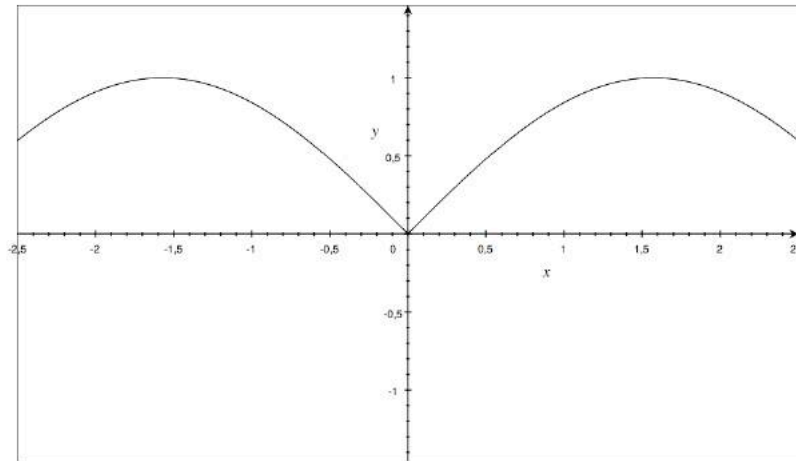


6. Consideriamo adesso la composizione delle principali funzioni goniometriche con la funzione valore assoluto. A titolo di esempio analizzeremo alcuni casi.

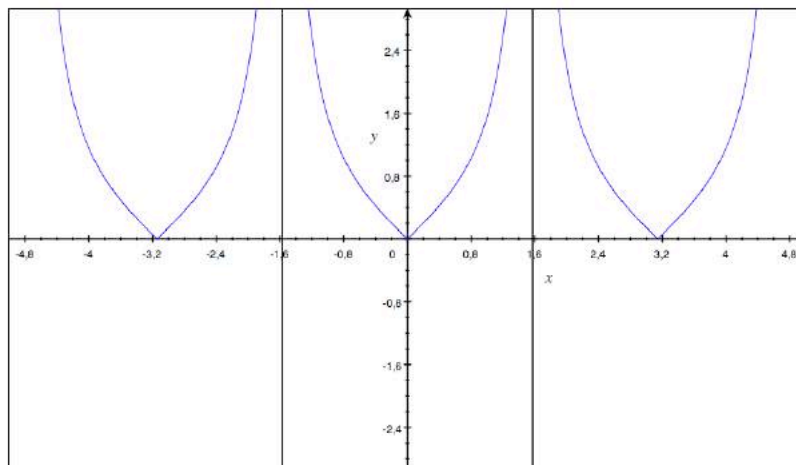
- $f(x) = |\cos x|$



- $f(x) = |\sin x|$



- $f(x) = |\tan x|$



7. Vediamo adesso una interessante applicazione della formula di sottrazione del seno, allo studio del grafico di una funzione goniometrica *lineare*.

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x$. Vogliamo scriverla nella forma $g(x) = A \sin(x - \alpha)$. Una funzione di questo tipo ha il grafico “modellato” su quello della funzione seno, mediante una traslazione di fattore α lungo l’asse delle ascisse, ed una dilatazione (o contrazione) di un fattore A , lungo l’asse delle ordinate.

Sviluppiamo con la formula di sottrazione del seno la funzione $g(x)$:

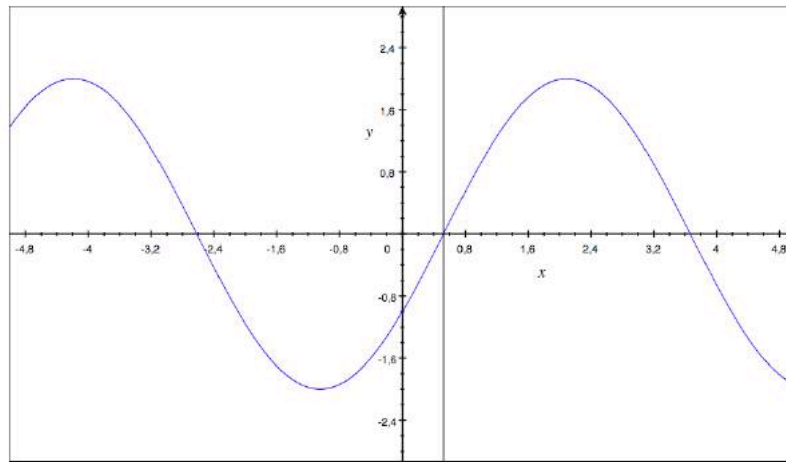
$g(x) = A \sin(x - \alpha) = A \cos \alpha \sin x - A \sin \alpha \cos x$ ed uguagliamola termine a termine alla funzione di partenza $f(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x$. Otteniamo così il sistema
$$\begin{cases} A \cos \alpha = \sqrt{3} \\ A \sin \alpha = 1 \end{cases}$$
. Le soluzioni si ottengono

applicando la relazione $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ alla somma in quadratura delle due equazioni, e la

definizione di tangente:
$$\begin{cases} A^2 = 4 \Rightarrow A = \pm 2 \\ \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$
. Per stabilire il segno di A , si valuta la funzione di

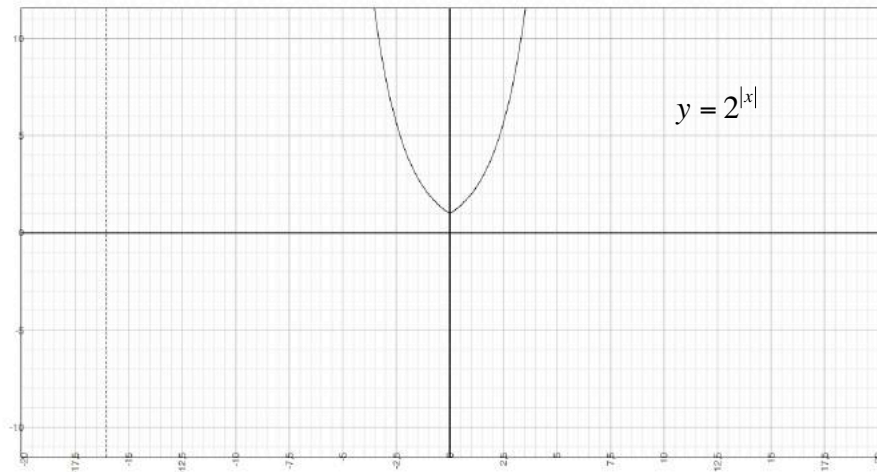
partenza in un punto qualsiasi, per esempio $f(0) = \sqrt{3} \sin 0 - \cos 0 = -1$. Tale valore dovrà essere assunto anche dalla funzione trasformata nello stesso punto, dovendo coincidere su tutto l’insieme di

definizione. Di conseguenza $g(0) = A \sin\left(0 - \frac{\pi}{6}\right) = A\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow A = +2$. La funzione cercata è quindi $g(x) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ed il suo grafico è il seguente:



8. Si tracci il grafico della funzione $f(x) = 2^{|x|}$

Dalla $f(x) = a^{|x|} = \begin{cases} a^x & x > 0 \\ \frac{1}{a^x} & x < 0 \end{cases}$ segue:

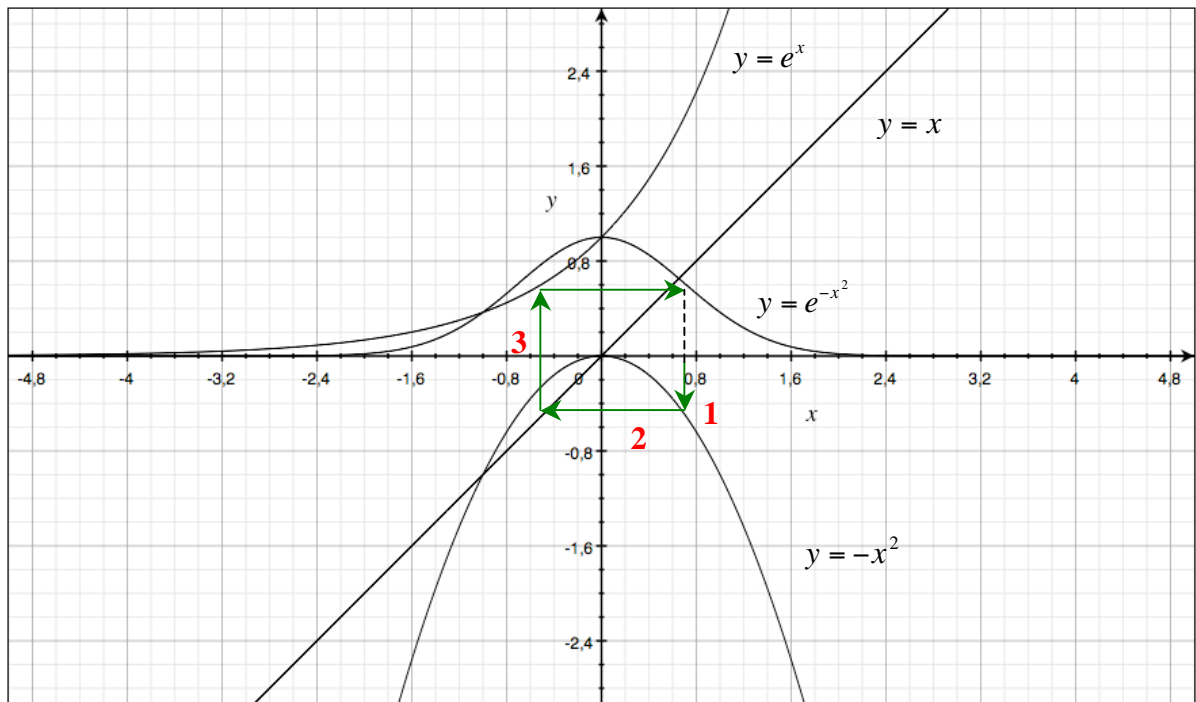


La composizione in generale

Un metodo che permette la costruzione del grafico della funzione composta $f(g(x))$, a partire dai grafici delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, consiste nello sfruttare la seguente composizione:

$$C.E.(f) \rightarrow R \rightarrow R \rightarrow R^+$$

$$x \rightarrow f(x) \rightarrow f(x) \rightarrow e^{f(x)}$$



Presentiamo adesso alcuni esercizi risolti per esteso, in modo da vedere applicati tutti i concetti visti fino ad ora.

1. E' data la funzione $f(x) = 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$.

a) Si studi il segno della funzione;

- Iniziamo con l'osservare che la funzione può essere scritta nella forma

$$f(x) = 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{x} - 2} = 1 + \ln(\sqrt{x} - 2) \text{ e che, quindi, il campo di esistenza è dato}$$

dalle soluzioni del sistema di disequazioni $\begin{cases} \sqrt{x} - 2 > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 4$. Per quanto

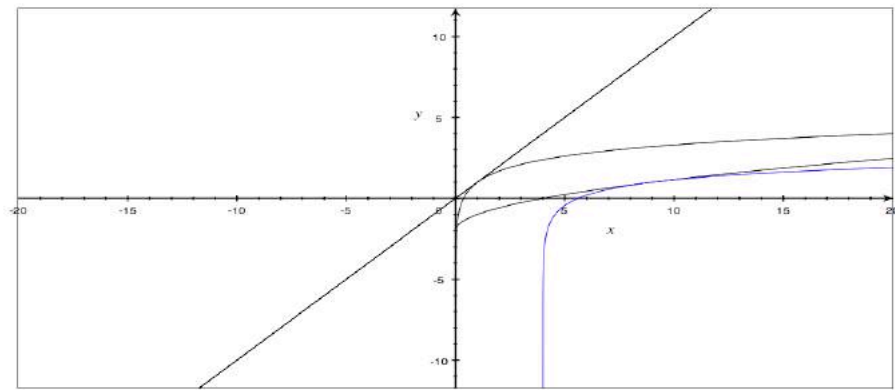
riguarda il segno della funzione risulta

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(\sqrt{x} - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(\sqrt{x} - 2) \geq -1 = \ln e^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x} - 2 \geq e^{-1} \Leftrightarrow x \geq \left(2 + \frac{1}{e}\right)^2$$

b) Si tracci un grafico approssimativo della funzione;

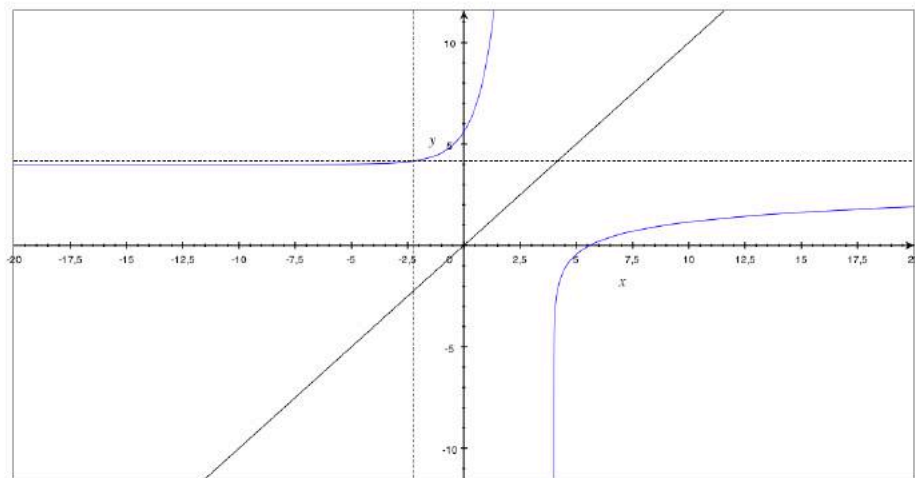
- Componiamo le funzioni $h(x) = 1 + \ln x$ e $g(x) = \sqrt{x} - 2$, in modo da scrivere $f(x) = h(g(x))$. Ora, la prima funzione ha per grafico quello della funzione logaritmo naturale, traslato di uno verso l'alto, mentre la seconda ha per grafico quello della parabola $x = (y + 2)^2$ limitato alla parte di piano $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -2 \end{cases}$:



c) Si determini la funzione inversa $f^{-1}(x)$ e se ne tracci il grafico.

- La funzione $f(x)$ è una funzione monotona crescente nel suo intero campo di esistenza, quindi è invertibile. La funzione inversa si determina risolvendo l'equazione data dall'espressione analitica della funzione $y = f(x)$, rispetto alla variabile x , cioè

$$y = 1 + \ln(\sqrt{x} - 2) \Rightarrow \ln(\sqrt{x} - 2) = y - 1 \Rightarrow \ln(\sqrt{x} - 2) = \ln e^{y-1} \Rightarrow \sqrt{x} - 2 = e^{y-1} \Rightarrow x = (2 + e^{y-1})^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (2 + e^{x-1})^2$$
- Il grafico della funzione inversa si ottiene da quello della funzione originaria per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante:



2. E' data la funzione $f(x) = \ln|1 - \sqrt{|x|}|$.

Si determini l'insieme di definizione della funzione;

- La presenza del valore assoluto all'argomento del logaritmo semplifica la determinazione dell'insieme di definizione: $1 - \sqrt{|x|} \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$, quindi $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}$. Studieremo separatamente le due funzioni che si determinano dalla discussione del valore assoluto, nei rispettivi sottoinsiemi di definizione:

$$\begin{cases} f_1(x) = \ln(1 - \sqrt{|x|}) \\ 1 - \sqrt{|x|} > 0 \Rightarrow |x| < 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_2(x) = \ln(\sqrt{|x|} - 1) \\ 1 - \sqrt{|x|} < 0 \Rightarrow |x| > 1 \end{cases}$$

Si tracci un grafico approssimativo della funzione; evidenziando:

- Intersezioni con gli assi cartesiani;

- è possibile ragionare direttamente sulla funzione

$$f(x) = \ln|1 - \sqrt{|x|}|$$

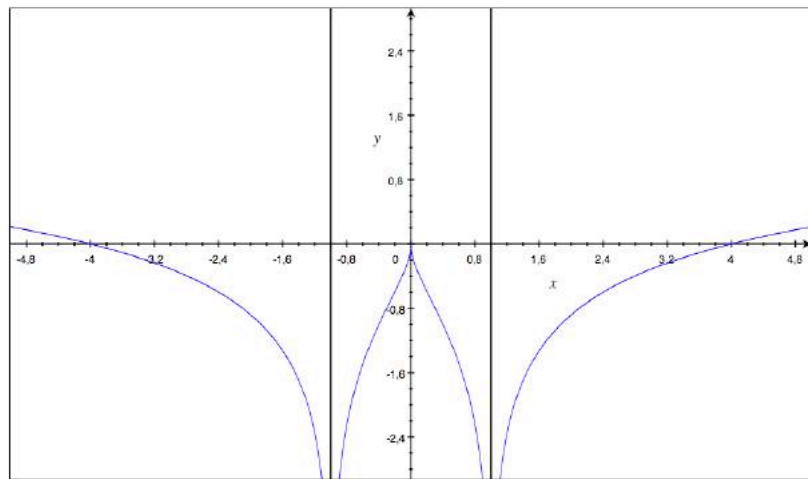
- x-int. $\begin{cases} y = \ln|1 - \sqrt{|x|}| \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow |1 - \sqrt{|x|}| = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0;0)$. Si vede subito che la funzione passa per l'origine.

- Eventuali asintoti;

- La funzione presenta due asintoti verticali: $x = \pm 1$. Eventuali asintoti orizzontali vanno ricercati per la funzione $y = f_2(x)$, in quanto è l'unica che ha un insieme di definizione illimitato.

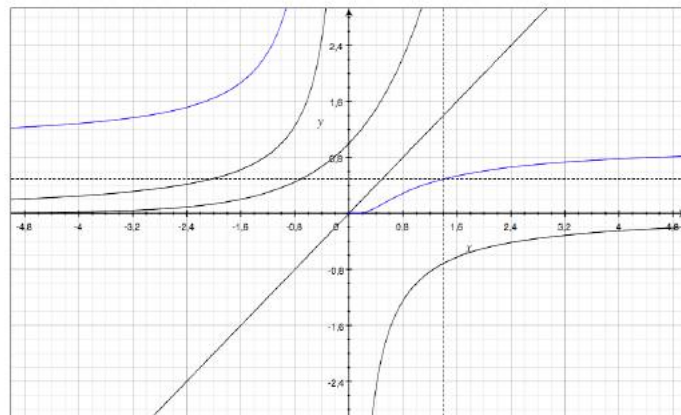
- Eventuali simmetrie.

- La funzione è tale che $f(-x) = \ln|1 - \sqrt{|-x|}| = \ln|1 - \sqrt{|x|}| = f(x)$: la funzione è pari.



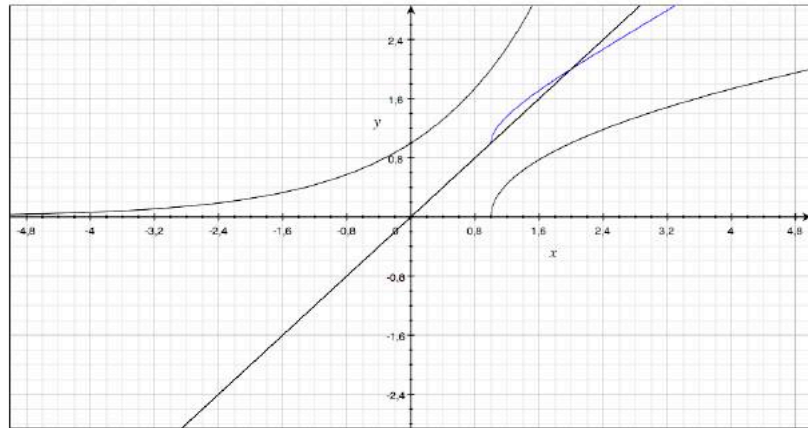
3. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

- $h(x) = e^x; \quad g(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = h(g(x))$



4. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{x-1}}$

$$\bullet \quad h(x) = 2^x; \quad g(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x = y^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = h(g(x))$$



5. Si trovi il campo di esistenza della funzione $f(x) = (\sqrt{2+x})^{\frac{1}{|x|-1}}$.

- La funzione data è del tipo $f(x)^{g(x)}$, quindi occorre che

$$\begin{cases} 2+x > 0 \\ |x|-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < -1 \vee -1 < x < 1 \vee x > 1.$$

6. Si trovi l'immagine della funzione $y = \sqrt{1 + \ln x}$

- Intanto dovrà essere $\begin{cases} 1 + \ln x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{e} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{1}{e}$. Occorre quindi vedere per quali

$y \in \mathbb{R}$ esiste un $x \geq \frac{1}{e}$ tale che $y = \sqrt{1 + \ln x}$. Vediamo subito che, essendo la radice

positiva, $y \geq 0$. In tal caso $y^2 = 1 + \ln x \Rightarrow x = e^{y^2-1}$. Dovendo essere $x \geq \frac{1}{e}$, allora

$x = e^{y^2-1} \geq \frac{1}{e} = e^{-1} \Rightarrow y^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow y \geq 0$. Di conseguenza l'immagine è

$$f\left(\left[\frac{1}{e}; +\infty\right)\right) = [0; +\infty).$$

Esercizi

Insieme di definizione

Trovare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

$$1. \quad f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-3x+2}}, \quad 2. \quad f(x) = (x+2)\log_{10}(x^2-3), \quad 3. \quad f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)},$$

$$\text{Sol: } x \geq 2 \quad \text{Sol: } x < -3 \vee x > 3 \quad \text{Sol: } 0 < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$4. \quad f(x) = \sqrt[4]{4-x|x|}, \quad 5. \quad f(x) = (x-1)^{\frac{x-2}{1-|x^2-9|}}, \quad 6. \quad f(x) = \sqrt{\ln 2 - \ln\left(\frac{1}{\sin \frac{2}{\pi} x}\right)},$$

$$\text{Sol: } x \leq 2 \quad \text{Sol: } x > 1 \wedge x \neq \sqrt{8}, x \neq \sqrt{10} \quad \text{Sol: } \left(2k + \frac{1}{6}\right)\frac{\pi^2}{2} \leq x \leq \frac{\pi^2}{2}\left(2k + \frac{5}{6}\right)$$

Immagine e controimmagine

Trovare l'immagine $f(A)$ delle seguenti funzioni:

7. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$, $A = [-1; 1]$, 8. $f(x) = \ln(e^x + 1)$; $A = \mathbb{R}$ 9. $f(x) = \frac{x - |x|}{2}$, $A = (-4; 4)$,
 $Sol: f(A) = (-\infty, -1]$ $Sol: f(A) = (0, +\infty)$ $Sol: f(A) = (-4, 0]$

10. $f(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x$; $A = [0; 2\pi]$.
 $Sol: f(A) = [-2, 2]$

Trovare la controimmagine $f^{-1}(C)$ nei seguenti casi:

11. $f(x) = \ln(1 - x)$; $C = [-2; 0]$, 12. $f(x) = \sqrt{x - 2}$; $C = [0; 4)$,
 $Sol: f^{-1}(C) = [0, 1 - e^{-2}]$ $Sol: f^{-1}(C) = [2, 18)$

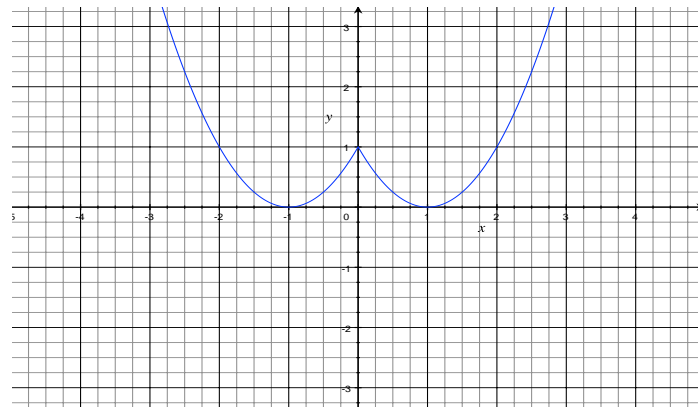
13. $f(x) = \sin x - \cos x$; $C = [-1; 1]$ 14. $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$; $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$,
 $Sol: f^{-1}(C) = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[2\pi, \frac{9\pi}{4}\right]$ $Sol: f^{-1}(C) = [1, +\infty)$

15. $f(x) = \ln|\sin x|$; $(-\infty; 0]$.
 $Sol: f^{-1}(C) = \{x \neq k\pi\}$

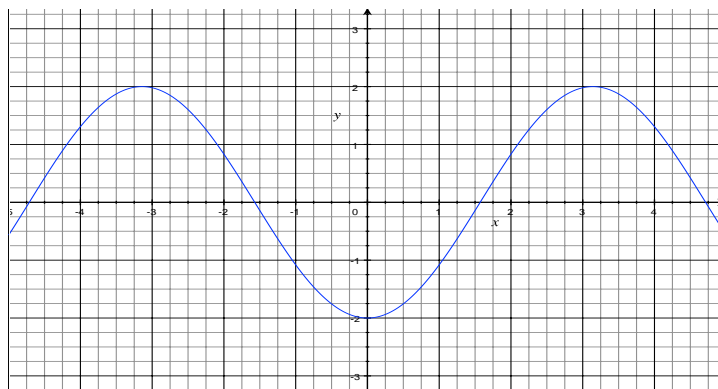
Grafici di funzioni

Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

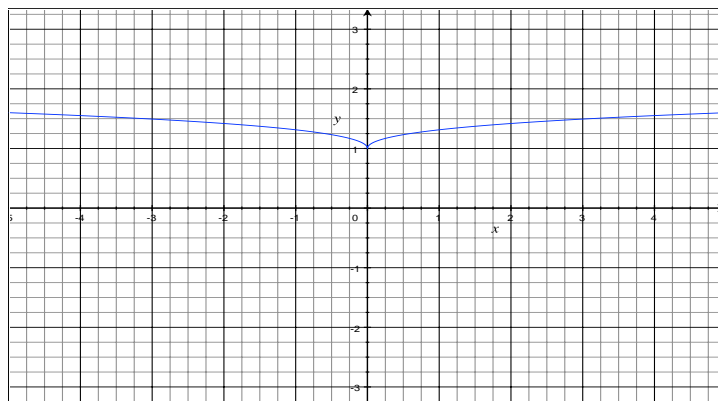
16. $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$;



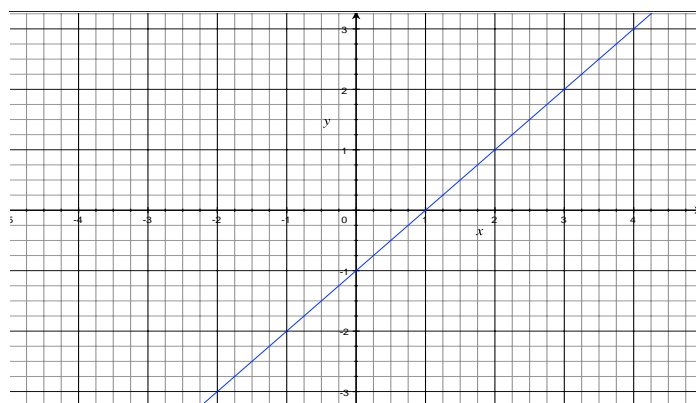
17. $f(x) = 2\cos(\pi - x)$;



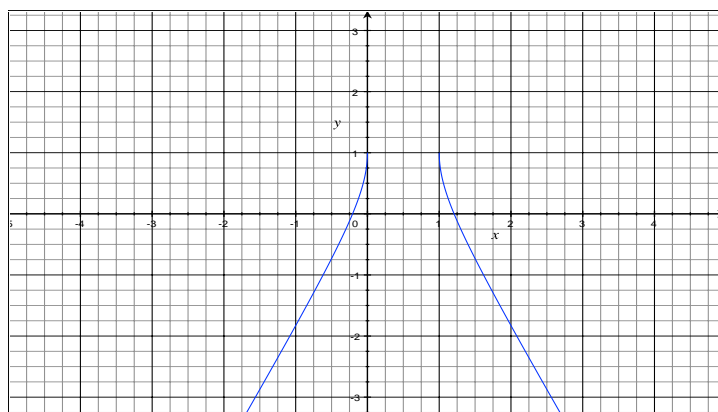
18. $f(x) = \ln(e + \sqrt{|x|});$



19. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1};$



20. $f(x) = 1 - \sqrt{4x^2 - 4x}.$



Funzione composta e funzione inversa

Trovare l'insieme di definizione e l'espressione della funzione composta $g(f(x))$ quando $g(x)$ e $f(x)$ sono le funzioni seguenti:

$$21. \quad g(x) = \sqrt{\ln x} \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \quad 22. \quad g(x) = e^{2x} \quad f(x) = x^2 + 1 \quad 23.$$

$$Sol: g(f(x)) = \sqrt{\ln\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)} \quad Sol: g(f(x)) = e^{2(x^2 + 1)}$$

$$g(x) = \sqrt{e^x - 1} \quad f(x) = \sin x$$

$$Sol: g(f(x)) = \sqrt{e^{\sin x} - 1}$$

Trovare, se esiste, l'inversa delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x - |x|$$

$$24. \quad Sol: f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x < 0 \\ \frac{x}{2} & x \geq 0 \end{cases} ; 25. \quad f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1) \\ Sol: f^{-1}(x) = e^{2x} + 1$$

26. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è invertibile la funzione $f(x) = x + \alpha|x|$, e scrivere la funzione inversa. Tracciare un grafico di f e, quando esiste, di f^{-1} .

$$\bullet \quad f(x) = x + \alpha|x| = \begin{cases} (1+\alpha)x & x \geq 0 \\ (1-\alpha)x & x < 0 \end{cases} . \text{ La funzione è invertibile se i coefficienti}$$

$(1+\alpha), (1-\alpha)$ sono *concordi*, ovvero se $-1 \leq \alpha \leq 1$. Di conseguenza:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} (1+\alpha)^{-1}x & x \geq 0 \\ (1-\alpha)^{-1}x & x < 0 \end{cases} \quad \text{Nel grafico in figura sono rappresentate la funzione (in colore rosso) e la sua inversa (in colore verde)}$$

