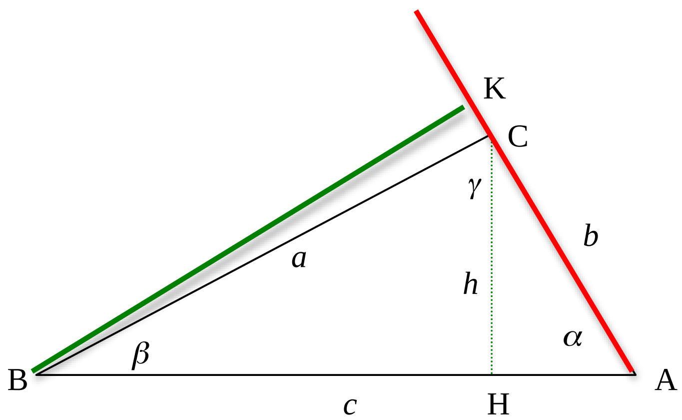
CAPITOLO 1
LA TRIGONOMETRIA
1.1 I teoremi classici

La trigonometria, che vide tra i suoi padri fondatori Ipparco, Menelao e Tolomeo, fu concepita come strumento necessario per la costruzione di un'astronomia quantitativa, con il preciso scopo di poter prevedere il moto dei corpi celesti, di determinare l'ora, e di compilare calendari. La trigonometria si è rivelata uno strumento molto utile alla navigazione ed alla geografia. Gli storici concordano nell'attribuire ad Ipparco, che visse a Rodi e ad Alessandria e morì attorno al 125 a.C., il ruolo di fondatore della trigonometria, e all'egiziano Claudio Tolomeo, che visse ad Alessandria lavorando al museo e morì nel 168 d.C., il proseguimento e la sintesi del lavoro precedentemente iniziato da Ipparco e Menelao, riguardante la trigonometria e l'astronomia. L'opera più importante di Tolomeo è l'*Almagesto*, dove in realtà si parla più di *trigonometria sferica* piuttosto che di trigonometria piana, oggetto dei nostri studi.
Presentiamo una selezione di risultati e teoremi tipici della trigonometria.

Il teorema di CARNOT

In un triangolo qualsiasi valgono le seguenti relazioni:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Dimostrazione.
Proviamo, ad esempio, la prima delle tre relazioni. Sul prolungamento del lato AC con origine in C sia K il piede della perpendicolare al prolungamento condotta dal vertice B. Applichiamo al triangolo rettangolo ABK il teorema di Pitagora e le relazioni sugli angoli associati, otteniamo così: $\overline{AB}^2 = \left(\overline{AC} + \overline{CK}\right)^2 + \overline{BK}^2$, da cui segue $c^2 = \left(b + a\cos(\pi - \gamma)\right)^2 + \left(a\sin(\pi - \gamma)\right)^2 = b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2$.
Le altre due relazioni si dimostrano con considerazioni del tutto analoghe.

Un'applicazione: a formula di addizione del coseno

E' possibile sfruttare il teorema di Carnot per dedurre la *formula di addizione del coseno*

$$\left(\cos\gamma_1\cos\gamma_2 - \sin\gamma_1\sin\gamma_2\right) = \cos\left(\gamma_1 + \gamma_2\right).$$

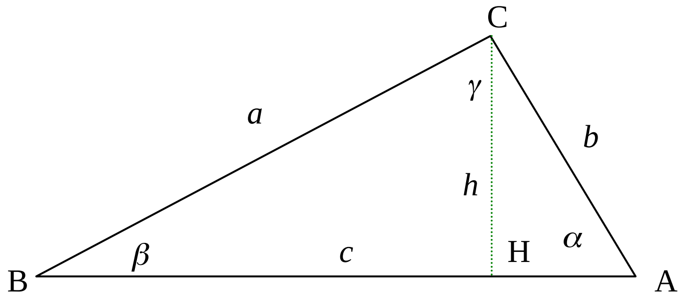
Per questo scopo scriviamo l'angolo $B\hat{C}A$ come somma degli angoli $B\hat{C}H$ e $A\hat{C}H$, in simboli $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Di conseguenza
$c^2 = AB^2 = (BH + AH)^2 = BH^2 + AH^2 + 2AH \cdot BH = a^2 - h^2 + b^2 - h^2 + 2b\sin\gamma_2 a\sin\gamma_1$. Ora, posiamo sostituire $h = a\cos\gamma_1 = b\cos\gamma_2$, nell'espressione precedente ed ottenere:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2h \cdot h + 2b\sin\gamma_2 a\sin\gamma_1 = a^2 + b^2 - 2a\cos\gamma_1 b\cos\gamma_2 + 2b\sin\gamma_2 a\sin\gamma_1$. D'altra parte, per il teorema di Carnot risulta $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\gamma_1 + \gamma_2\right)$ e, confrontando questa espressione con quella precedentemente trovata,
risulta $2ab\left(\cos\gamma_1\cos\gamma_2 - \sin\gamma_1\sin\gamma_2\right) = 2ab\cos\left(\gamma_1 + \gamma_2\right) = 2ab\cos\gamma$ e di conseguenza,
$\left(\cos\gamma_1\cos\gamma_2 - \sin\gamma_1\sin\gamma_2\right) = \cos\left(\gamma_1 + \gamma_2\right)$.

Il teorema dei SENI

In un triangolo qualsiasi, dette e a,b,c, le misure dei lati e α,β,γ *le ampiezze degli angoli opposti, sussiste la seguente relazione:*

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2r,$$

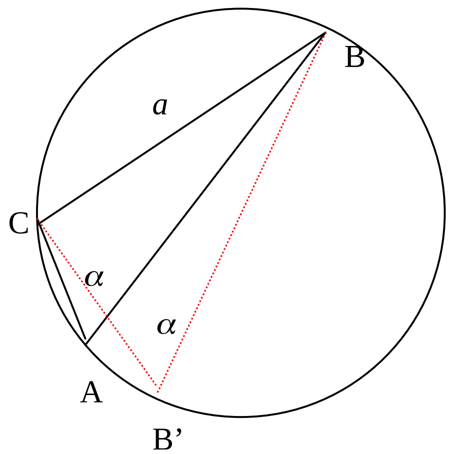
dove r è il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo.



Dimostrazione.

Consideriamo la seguente figura. Sia B' il simmetrico del vertice B rispetto al centro della circonferenza circoscritta al triangolo di partenza ABC. Poiché l'angolo in B' è uguale all'angolo in A, e il triangolo BCB' è rettangolo in C, si ha $BC = BB'\sin\alpha$, da cui segue una delle tre relazioni trovate:

$$a = 2r\sin\alpha.$$



Con costruzioni analoghe si dimostra che $b = 2r\sin\beta$ e $c = 2r\sin\gamma$, da cui segue la relazione cercata $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2r$.

Il teorema della corda

In una circonferenza di raggio r, siano A e B gli estremi di una corda. Allora si ha:

$\overline{AB} = 2r\sin\frac{\beta}{2}$, *dove* β *è l'angolo al centro riferito alla corda.*

1.2 I problemi di trigonometria

Le conoscenze di goniometria e trigonometria fin qui acquisite permettono di risolvere i problemi geometrici riguardanti la cosiddetta *risoluzione dei triangoli*, ovvero l'espressione delle relazioni che legano tra loro i lati e gli angoli.

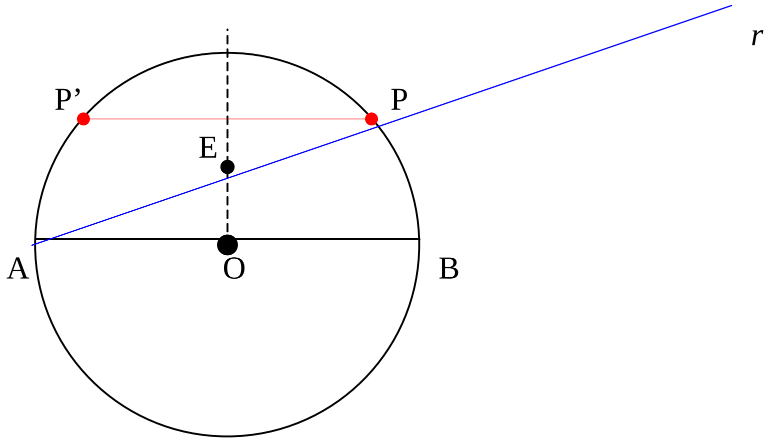
Problema

E' data la semicirconferenza di diametro $AB = 2$, *r la semiretta di origine in A, e P il punto in cui r interseca la circonferenza. Indicato con x l'angolo* $P\hat{A}B$ *e con P' il simmetrico del punto P rispetto all'asse del diametro AB, si determinino:*

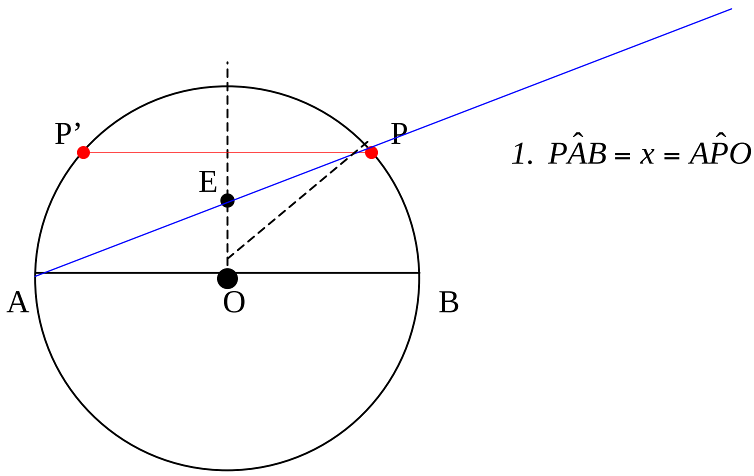
1. La lunghezza della corda PP' al variare di x;

2. L'area del triangolo POP', dove O è il centro della semicirconferenza. Per quali valori di x tale area assume il valore massimo?

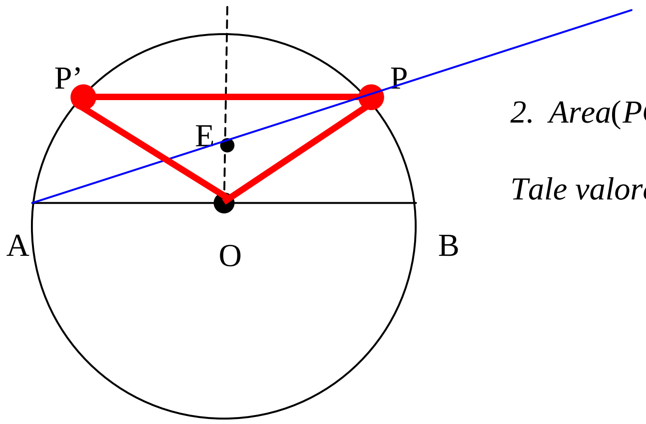
3. L'area del triangolo OEP.



Soluzione

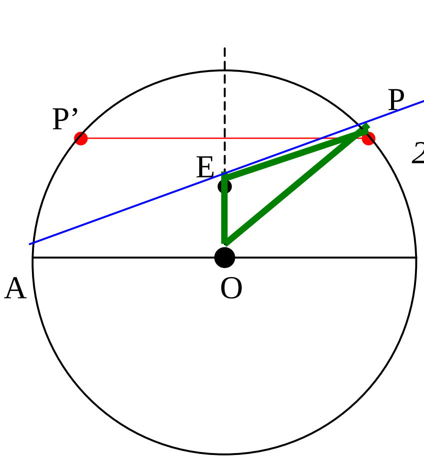


$1.\ P\hat{A}B = x = A\hat{P}O \Rightarrow P'\hat{P}O = 2x \Rightarrow PP' = 2\cos 2x$



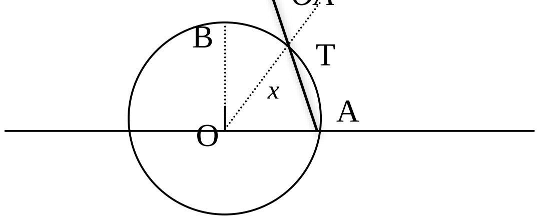
$2.\ Area(POP') = \frac{1}{2} 2\cos 2x \sin 2x = \frac{\sin 4x}{2}.$

Tale valore è massimo quando $4x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}.$



2\. $Area(OEP) = \frac{1}{2} OE \cdot \frac{PP'}{2} = \frac{1}{2} OA \tan x \frac{2\cos 2x}{2} = \frac{\tan x \cos 2x}{2}$

2. Sia T un punto appartenente all'arco AB congruente a un quarto della circonferenza di centro O e raggio OA. Posto $O\hat{A}T = x$, *si costruisca la funzione* $f(x) = \dfrac{AT + TB}{OA}$.



Posto il raggio OA = *r* si ha che $AT = 2r\cos x$. L'angolo $B\hat{O}T = \frac{\pi}{2} - (\pi - 2x) = 2x - \frac{\pi}{2}$, con la limitazione $\frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2}$. Dal teorema del coseno applicato al triangolo (isoscele) BOT otteniamo $BT^2 = OB^2 + OT^2 - 2OB \cdot OT\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow BT = r\sqrt{2\left(1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right)} = r\sqrt{2(1 - \sin 2x)}$. La funzione cercata è dunque

$$f(x) = \frac{2r\cos x + r\sqrt{2(1-\sin 2x)}}{r} = 2\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} + \sqrt{2(1-\sin 2x)} = \sqrt{2(1+\cos 2x)} + \sqrt{2(1-\sin 2x)}$$

$$= 2|\cos x| + \sqrt{2(\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x)} = 2|\cos x| + \sqrt{2}|\cos x - \sin x| = \left(\frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2}\right) = \left(2 - \sqrt{2}\right)\cos x + \sqrt{2}\sin$$

$$\begin{cases} r\sin\alpha = 2 - \sqrt{2} \\ r\cos\alpha = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 8 - 4\sqrt{2} \\ \tan\alpha = \left(\sqrt{2} - 1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{8 - 4\sqrt{2}} \\ \theta = \frac{\pi}{8} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}\,\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$$

1. *Nel triangolo equilatero ABC sia P un punto sul lato BC. Detto* $x = B\hat{A}P$

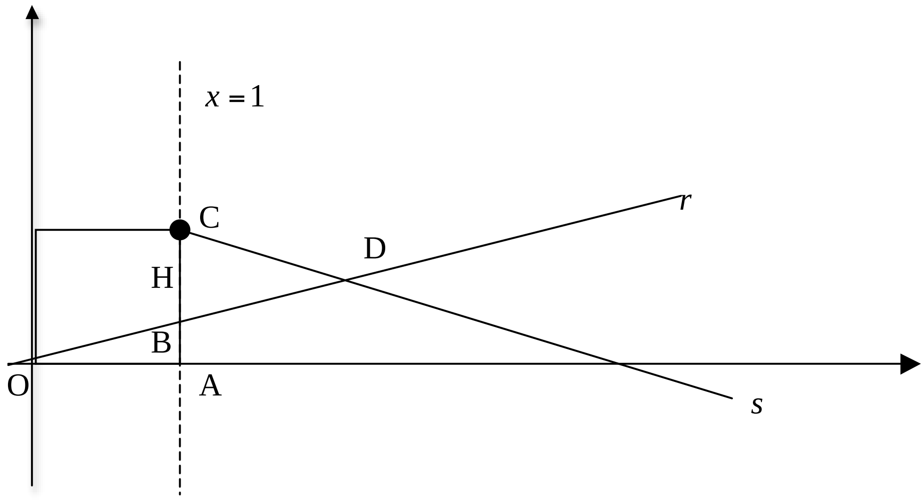
a) *Si determini la funzione* $f(x) = \dfrac{1}{AP}$.

b) *Verificato che la funzione richiesta può essere scritta nella forma* $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, *si tracci il grafico nell'intervallo* $[0, 2\pi]$.

c) *Si tracci il grafico della funzione* $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

d) *Si stabilisca per quali valori di k l'equazione* $f(x) = k$ *ammette due soluzioni, nell'intervallo* $[0, 2\pi]$.

2. *Sono date le rette del piano cartesiano* $r: y = mx, \quad s: y - 1 = m'(x-1)$ *, dove* $m = \tan\theta, \quad m > 0$ *e* $m' = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right), \quad m' < 0$*, ed i punti del piano* $O(0;0), \quad C(1;1), \quad A(1;0), \quad B = r \cap x = 1, \quad D = r \cap s$. *Dopo aver individuato i limiti geometrici imposti all'angolo* θ*, si determini la funzione* $f(\theta) = \dfrac{Area(BCD)}{Area(OAB)}$.



I limiti geometrici imposti all'angolo θ sono determinati dal segno del coefficiente angolare delle rette: $m' < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + 2\theta < \pi \Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$.

$B = \begin{cases} y = mx \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = m \end{cases} \Rightarrow B = (1;m)$. Da questo segue, essendo m>0, che $AB = m$ e $BC = 1 - m$

Il punto D ha coordinate

$$\begin{cases} y = mx \\ y - 1 = m'(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = mx \\ (m - m')x = 1 - m' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{m(1-m')}{m-m'} \\ x = \dfrac{1-m'}{m-m'} \end{cases} \Rightarrow D = \left(\frac{1-m'}{m-m'}; \frac{m(1-m')}{m-m'}\right)$$ di

conseguenza $DH = \dfrac{1-m'}{m-m'} - 1 = \dfrac{1-m}{m-m'}$.

$$f(\theta) = \frac{\dfrac{\frac{1-m}{m-m'} \cdot (1-m)}{2}}{\dfrac{1 \cdot m}{2}} = \frac{(1-m)^2}{m(m-m')} = \frac{(1-\tan\theta)^2}{\tan\theta\left(\tan\theta - \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)\right)} =$$

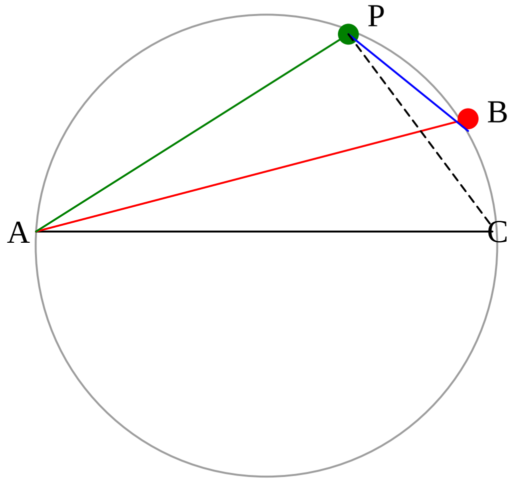
La funzione cercata è $\dfrac{(1-\tan\theta)^2}{\tan\theta\left(\tan\theta + \dfrac{1}{\tan 2\theta}\right)} = \dfrac{(1-\tan\theta)^2}{\tan\theta\left(\tan\theta + \dfrac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}\right)} = \dfrac{2(1-\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}$

$$f(\theta) = 2(\cos\theta - \sin\theta)^2$$

a. Il metodo dell'angolo aggiunto permette di scrivere la funzione trovata nella forma

$$f(\theta) = 2\left[\sqrt{2}\left(\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^2.$$

3. *Nella semicirconferenza unitaria di diametro AC sia B il punto tale che* $B\hat{A}C = \frac{\pi}{6}$*, e sia P un punto sulla semiconferenza con* $P\hat{A}C := x$.



a) Si determini la funzione $f(x) = AP + PB$, nel caso in cui $\frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{2}$

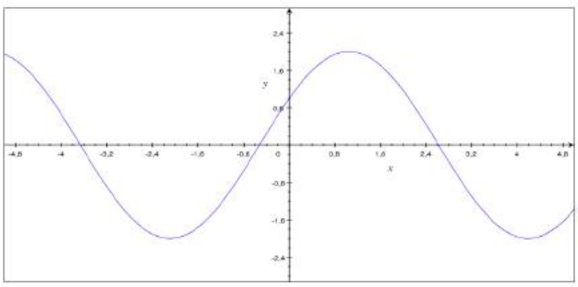
a. $AP = AC\cos x = 2\cos x$; $\frac{PB}{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = 2r = 2 \Rightarrow PB = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. Di conseguenza,

$f(x) = AP + PB = 2\cos x + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. Di conseguenza

$f(x) = 2\cos x + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$.

b) Verificato che la funzione richiesta può essere scritta nella forma, $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ si tracci il grafico nell'intervallo $[0,2\pi]$.

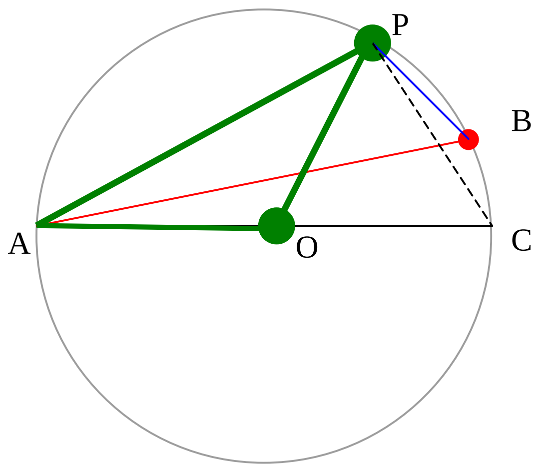
b. Con il metodo dell'angolo aggiunto è possibile scrivere la funzione nella forma $f(x) = A\sin(x - \alpha) \Rightarrow \begin{cases} A\cos\alpha = \sqrt{3} \\ -A\sin\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{\pi}{6} \\ A = \pm 2 \end{cases}$. Si determina il valore dell'ampiezza sostituendo un valore di riferimento: $f(0) = 1 = \pm 2\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow A = 2$. La funzione può essere scritta quindi nella forma $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.



c) Si individui il valore di x per cui è massimo il perimetro del triangolo APB.

c. Il perimetro del triangolo APB è dato dalla funzione dell'angolo $p(x) = AP + PB + AB = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\frac{\pi}{6}$. Questa espressione è massima quando l'argomento della funzione seno è uguale a $\frac{\pi}{2}$: $\Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

e) Si esprima in funzione di x il rapporto tra l'area del triangolo APB e l'area del triangolo AOP, dove O è il centro della semicirconferenza.

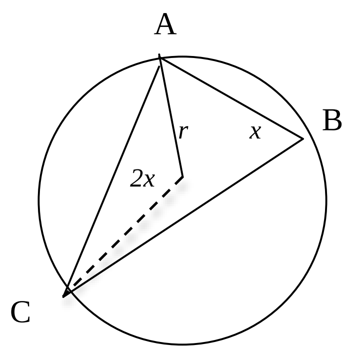


- L'area del triangolo AOP è $S(AOP) = \frac{2\cos x \sin x}{2}$, mentre quella del triangolo APB è $S(APB) = \frac{AB \cdot AP \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{2\cos\frac{\pi}{6} \cdot 2\cos x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{2} = \sqrt{3}\cos x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

  Il rapporto tra le aree è dato dalla funzione

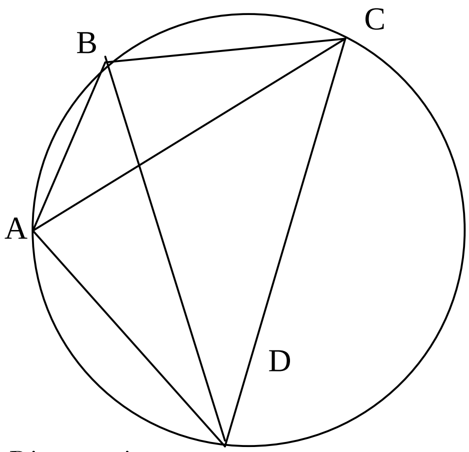
$$r(x) = \frac{\sqrt{3}\cancel{\cos x} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\cancel{\cos x} \cdot \sin x} = \sqrt{3}\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x}{\sin x} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2\tan x}.$$

4. *Un triangolo ABC è inscritto in una circonferenza di raggio r e* $\cos A\hat{C}B = \frac{3}{5}$. *Determina l'ampiezza dell'angolo* $A\hat{B}C = x$ *in modo tale che l'area del triangolo ABC valga* $\frac{28}{25}r^2$.



1.3 Alcuni risultati famosi
Il Teorema di TOLOMEO

In un quadrilatero inscritto in una circonferenza, il prodotto delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti.



Dimostrazione.
Sia E il punto sulla diagonale AC tale che l'angolo AEB sia uguale all'angolo BCD; per costruzione i triangoli AEB e BCD sono simili, dal momento che anche gli angoli BAE e BDC sono uguali. Dall'uguaglianza degli angoli ABE (somma degli angoli ABD e DBE) e DBC (somma degli angoli DBE e EBC) segue l'uguaglianza degli angoli ABD e EBC; poiché risultano uguali anche gli angoli ADB e BCE, segue la similitudine dei triangoli EBC e ABD. Quindi, dalla similitudine dei triangoli AEB e BCD segue:

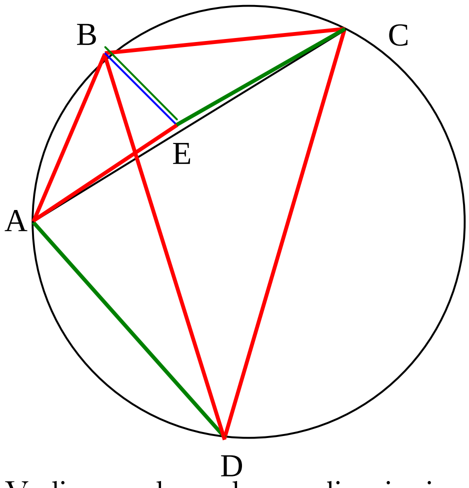
$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = BD \cdot AE\,,$$

mentre dalla similitudine dei triangoli EBC e ABD segue:

$$\frac{BC}{EC} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow AD \cdot BC = BD \cdot EC\,.$$

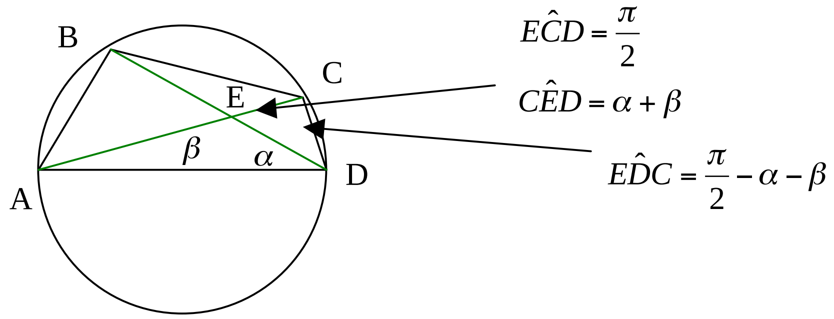
Sommando queste relazioni otteniamo la tesi:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot (AE + EC) = BD \cdot AC$$



Vediamo adesso due applicazioni particolari del teorema di Tolomeo.

1. Il lato AD coincide con un diametro.



Si hanno le seguenti relazioni:
$AC = 2r\cos\beta;\quad DB = 2r\cos\alpha;\quad AB = 2r\sin\alpha;\quad DC = 2r\sin\beta$. Resta da valutare BC. Per questo scopo si applica il teorema dei seni al triangolo BCD: $\frac{BC}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \alpha\right)} = \frac{DC}{\sin\beta}$, da cui segue

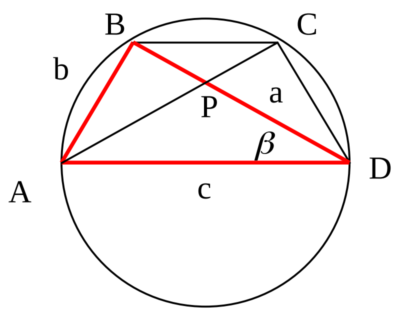
$BC = \frac{2r\sin\beta\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right)}{\sin\beta} = 2r\cos(\alpha + \beta)$. Applicando il teorema di Tolomeo con questi dati otteniamo:

$$DB \cdot AC = AD \cdot BC + AB \cdot CD$$
$$2r\cos\alpha \cdot 2r\cos\beta = 2r \cdot 2r\cos(\alpha + \beta) + 2r\sin\alpha \cdot 2r\sin\beta$$

da cui segue la nota **formula di addizione del coseno**:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

2. Il quadrilatero è un trapezio isoscele.



Consideriamo nel quadrilatero ABCD il triangolo ABD, ed applichiamo il teorema di Tolomeo:

$$DB \cdot AC = AD \cdot BC + AB \cdot CD$$
$$a \cdot a = c \cdot BC + b \cdot b \, .$$

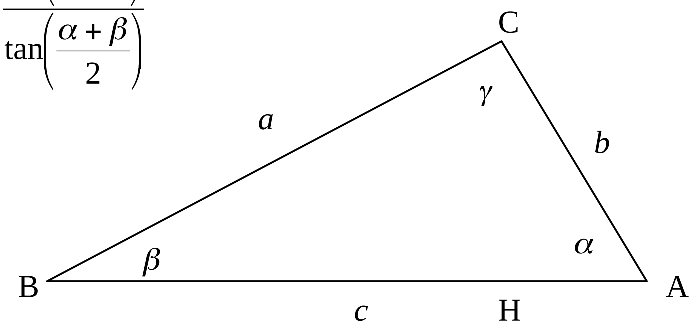
Esprimiamo BC in modo opportuno: $BC = c - 2\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\beta} = c - 2\sqrt{b^2 - a^2 + a^2\cos^2\beta}$. Quindi, $-a^2 + b^2 + c^2 = 2c\sqrt{b^2 - a^2 + a^2\cos^2\beta}$. Elevando ambo i membri al quadrato otteniamo il **teorema di CARNOT**

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

Come caso particolare è opportuno citare quello in cui il quadrilatero è un rettangolo. In questo caso $\beta = \frac{\pi}{2}$ e l'applicazione del teorema di Tolomeo conduce al noto **teorema di PITAGORA** $b^2 = a^2 + c^2$.

Il teorema di Nepero:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$



Dimostrazione. Dal teorema dei seni si ha $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}\Rightarrow a\sin\beta=b\sin\alpha$. All'ultima uguaglianza si aggiungono e tolgono le quantità:
$a\sin\beta+a\sin\alpha=b\sin\alpha+a\sin\alpha\Rightarrow a(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin\alpha(a+b)$ (1), e
$b\sin\alpha+b\sin\beta=a\sin\beta+b\sin\beta\Rightarrow b(\sin\alpha+\sin\beta)=(a+b)\sin\beta$ (2).
Sottraendo la (2) dalla (1) si ottiene
$(a-b)(\sin\alpha+\sin\beta)=(a+b)(\sin\alpha-\sin\beta)$, e quindi $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}$. La tesi segue per applicazione delle formule di prostaferesi.

Esercizi

1. In un generico rettangolo, si indichi con *x* l'angolo che una diagonale forma con un lato. Si esprima in funzione di *x* il rapporto tra i raggi delle due circonferenze inscritte nei triangoli isosceli individuati dalle due diagonali. Sempre in funzione di *x*, si esprima la lunghezza del segmento *d* congiungente i centri delle due circonferenze.
   - $\frac{r_1}{r_2}=\frac{b}{a}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$, $\quad d=\sqrt{\left(\frac{b}{2}-r_2\right)^2+\left(\frac{a}{2}-r_1\right)^2}$

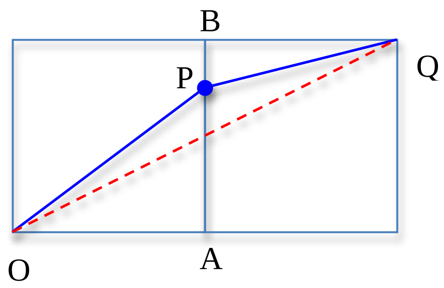
2. Sulla semiretta *s* di origine O si segni il punto H a distanza *b* da O, e si conduca per esso la perpendicolare *p* a *s*. Sia *t* la semiretta con origine nel medesimo punto O, che incontra *p* nel punto P, e sia $x:=P\hat{O}H$. Indicata con *n* la perpendicolare al segmento PO condotta da H, sia C il punto in cui *n* interseca la bisettrice dell'angolo delimitato dalle semirette *t* e *p*, con origine in P, esterno al triangolo OPH. Si esprima in funzione di *x* il rapporto tra la misura del raggio della circonferenza di centro C e tangente alle semirette *p* e *t*, e quella dell'altezza del triangolo CPH riferita alla base CH.
   - $\frac{r}{h}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

3. Indicato con O un vertice di un cubo, sia P un punto su uno spigolo opposto ad O, di vertici A e B. Congiungiamo P con un vertice Q di una faccia avente in comune con quella a cui

appartengono O e P lo spigolo di estremi A e B. Si determini la funzione $f(x) = \overline{OP} + \overline{PQ}$ in funzione dell'angolo $x = A\hat{O}P$. Per quale valore dell'angolo la funzione assume il valore minimo?

$$f(x) = l\left(\sqrt{1+(1-\tan x)^2} + \sqrt{1+\tan^2 x}\right)$$

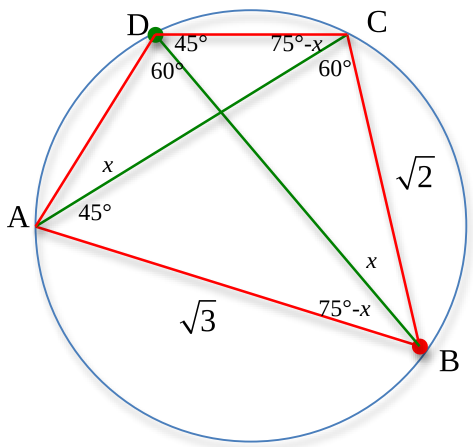
$$\tan x_{\min} = \frac{l}{2l} \Rightarrow x_{\min} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x_{\min}) = l\sqrt{5}$$



4. In una circonferenza unitaria si traccino due corde aventi un estremo in comune, ed aventi lunghezza $\overline{AB} = \sqrt{3}$ e $\overline{BC} = \sqrt{2}$. Preso un punto D sull'arco AC che non contiene B, si ponga $D\hat{A}C := x$ e se ne individuino i limiti geometrici. Tracciate le diagonali AC e DB del quadrilatero ABCD:

   a. Si trovino le ampiezze degli otto angoli che vengono a formarsi;
   b. Si determini la posizione di D che rende massima la lunghezza della diagonale DB;
   c. Si dica per quali valori di *x* risulta $\overline{DB} = \overline{DC}$.

- a) vedi figura.



- I limiti geometrici possono essere individuati ragionando sulla somma degli angoli interni al triangolo DAC: $180° = 105° + x + D\hat{C}A$, da cui segue che $x = 0$ se $D \equiv C$, e $x = 75°$ se $D \equiv A$. Di conseguenza $0° < x < 75°$.

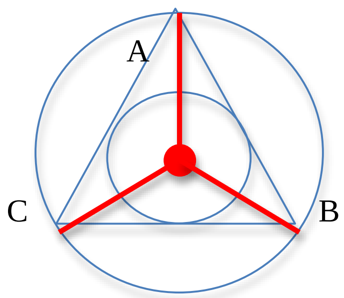
- b) La lunghezza della diagonale DB si trova con il teorema della corda: $\overline{DB} = 2\sin\left(45° + x\right)$. Tale lunghezza è massima se $45° + x = 90° \Rightarrow x = 45°$.

- c) Si ha $\overline{DB} = \overline{DC} \Leftrightarrow 2\sin(45° + x) = 2\sin x \Leftrightarrow \begin{matrix} x = x + 45° \Rightarrow \textit{impossibile} \\ 180° - x = 45° + x \Rightarrow x = \dfrac{135°}{2} = 67{,}5° \end{matrix}$.

5. Nel triangolo ABC il lato BC misura 1 e l'ampiezza dell'angolo in A è $\frac{\pi}{3}$. Condotte le bisettrici BM e CN, si determini per quale triangolo ABC risulta minima la somma dei raggi delle circonferenze circoscritte ai triangoli BNC e BMC.

[Si ponga $C\hat{B}A := x \Rightarrow B\hat{C}A = \frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}$. Si applichi il teorema della corda ai triangoli BCM, dove $2r_1 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$, e BCN, dove $2r_2 \sin\left(-\frac{x}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)$. Allora $r_1 + r_2 := f(x) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{2}\right)}$ è minima quando il denominatore assume il valore massimo, ovvero 1, $x = \frac{\pi}{3}$]

6. Un triangolo A B C, isoscele sulla base BC, ha area costante s^2. Si determini, in funzione dell'ampiezza dell'angolo al vertice, il prodotto $R \cdot r$ del raggio R della circonferenza circoscritta e del raggio r della circonferenza inscritta.



[Per il teorema della corda risulta $\overline{AB} = \overline{AC} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 2R\cos\frac{x}{2}$, dove R è il raggio della circonferenza circoscritta. Scriviamo l'area come somma delle aree dei triangoli AOB, AOC, e BOC, dove O è il centro della circonferenza inscritta:

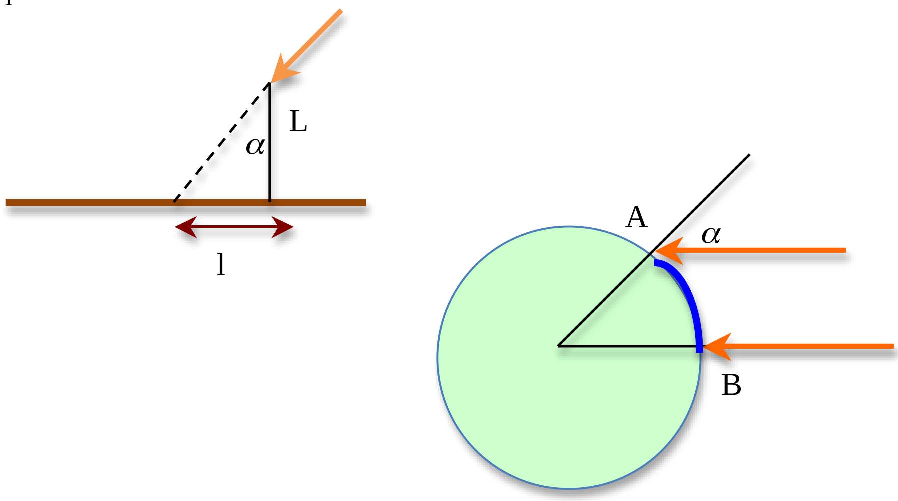
$s^2 = 2Rr\cos\frac{x}{2} + Rr\sin x \Rightarrow Rr := f(x) = \dfrac{s^2}{2\cos\frac{x}{2} + \sin x}$].

1.4 Approfondimento: geometria e astronomia

Misura del raggio terrestre (Eratostene 275 – 195 a.C.)

Le prove della sfericità della Terra, secondo alcuni pensatori dell'antichità, erano rappresentate dalla graduale visibilità degli oggetti che si avvicinavano dall'orizzonte, e l'ombra della Terra proiettata sulla Luna durante un'eclissi di Luna. Rappresentiamo schematicamente il procedimento di misura del raggio terrestre seguito da Eratostene.

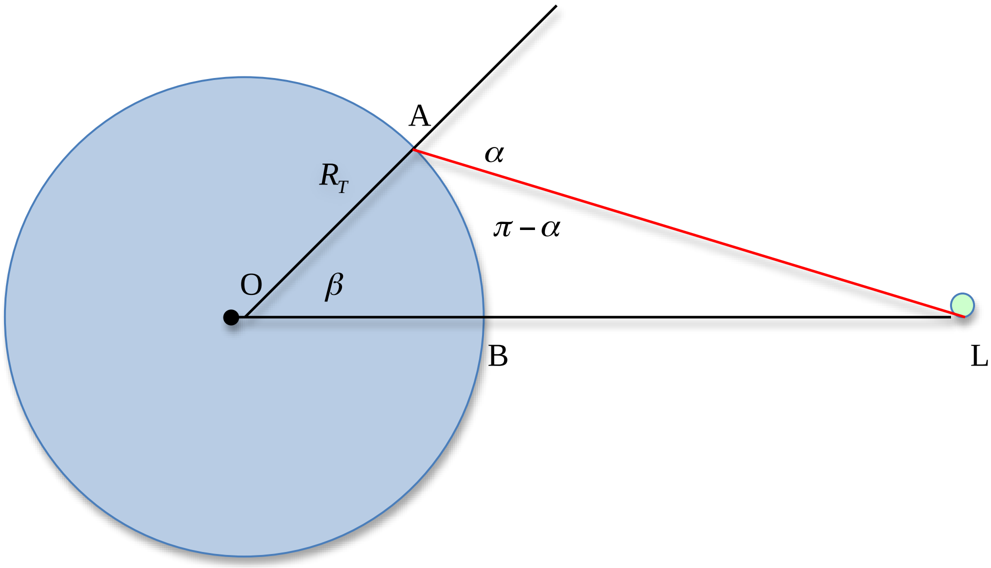
Scelte due località sullo stesso meridiano (Alessandria e Siene), distanti $\widehat{AS} = 785km$, Eratostene misura l'ombra prodotta da un'asta verticale a mezzogiorno in corrispondenza delle due località. L'angolo formato dai raggi solari con la direzione dell'asta (quella del filo a piombo) è $7°12'$ per la misura eseguita ad Alessandria, e circa $0°$ per quella eseguita a Siene. La lontananza del Sole è tale da poter considerare i raggi solari, in corrispondenza della superficie terrestre, approssimativamente paralleli.



La lunghezza dell'arco $\widehat{AS} = 785km$, e la misura dell'angolo formato dai raggi solari con la direzione del filo a piombo $\frac{l}{L} = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{l}{L}\right) = 7°12'$, fornisce per similitudine una misura del raggio terrestre, d'impressionante precisione se consideriamo i tempi in cui è stata eseguita: $\frac{785km}{2\pi R_T} = \frac{7°12'}{360°} \Rightarrow R_T \approx 6.250km$.

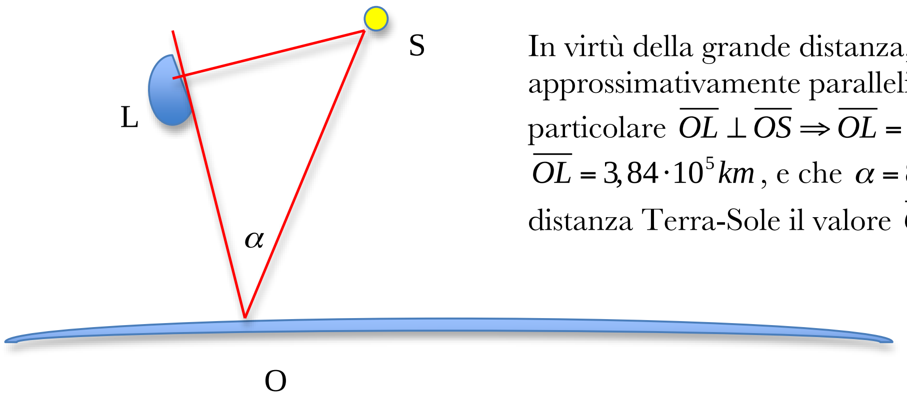
Misura della distanza Terra-Luna

Si può sfruttare uno schema simile al precedente, in cui i punti A e B sono lontani tra loro, ed il punto L, indicante la Luna, situato sulla verticale alla superficie terrestre in B.
L'angolo α si può misurare, così come l'angolo β (quest'ultimo con un procedimento del tutto analogo a quello seguito da Eratostene), mentre l'angolo $O\hat{L}A := \gamma = \alpha - \beta$. La distanza $\overline{OL}$ si determina quindi applicando il *teorema dei seni* al triangolo OAL: $\overline{OL} = R_T \dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} = 3{,}84 \cdot 10^5 km$



La distanza Terra-Sole

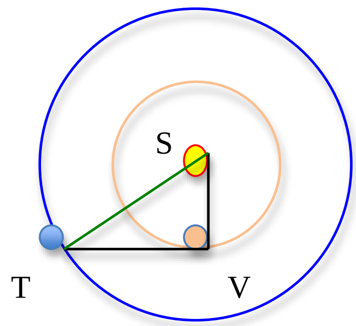
Per il calcolo di questa distanza, i greci partirono dal presupposto che la Luna, illuminata dal Sole, ne rifletteva la luce. Inoltre, il Sole illumina una metà della Luna (faccia), non sempre visibile dalla Terra. In particolare, indichiamo con O un osservatore sulla superficie terrestre che, in un certo istante, vede una metà illuminata.



In virtù della grande distanza, i raggi solari arrivano approssimativamente paralleli sulla superficie lunare. In particolare $\overline{OL} \perp \overline{OS} \Rightarrow \overline{OL} = \overline{OS}\cos\alpha$. Sapendo che $\overline{OL} = 3{,}84 \cdot 10^5 km$, e che $\alpha = 89°50'$, si ottiene per la distanza Terra-Sole il valore $\overline{OS} = 1{,}32 \cdot 10^8 km$.

La distanza Venere-Sole (pianeta interno)

Si assume che Terra e Venere si muovono su orbite circolari, complanari e concentriche rispetto al Sole. Da svariate misure eseguite è noto che l'angolo massimo tra le semirette congiungenti la Terra e il Sole, e la Terra e venere, è $\alpha := V\hat{T}S = 46°$. In corrispondenza di quest'angolo quindi, la semiretta $\overline{TV}$ è approssimativamente tangente all'orbita di Venere. Definita l'*unità astronomica* come la distanza Terra-Sole ($\overline{TS} = 1{,}49 \cdot 10^8 km$), si ha per la distanza Venere-Sole il valore $\overline{VS} = 0{,}72\overline{TS}$.



La distanza Giove – Sole (pianeta esterno)
Anche in questo caso si assume che il moto di Giove sia circolare uniforme, complanare con l'orbita terrestre, concentrica con questa rispetto al Sole. Scegliamo come riferimento il sistema delle *stelle fisse*, ed indichiamo con 2α l'arco di orbita percorsa da Giove in un certo tempo rispetto alle stelle fisse, con 2β l'arco percorso, sempre da Giove nel medesimo tempo, rispetto al Sole, e con 2γ l'arco percorso dalla Terra, rispetto al Sole, sempre nello stesso intervallo di tempo. Misurata l'altezza di Giove sull'orizzonte, δ, si applica il teorema dei seni al triangolo SG_1T_1:

$$\frac{\overline{G_1S}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)}=\frac{\overline{T_1S}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta-(\gamma+\delta)\right)}\Rightarrow \overline{G_1S}=\frac{\cos\delta}{\cos\left(\frac{\pi t}{T}-(\pi t+\delta)\right)}\overline{T_1S}.$$

T è il periodo di Giove, *t* è la durata del transito G_1G_2 e T_1T_2.

$$t:1a=2\gamma:2\pi\Rightarrow 2\gamma=2\pi t$$

$$t:T=2\beta:2\pi\Rightarrow 2\beta=\frac{2\pi t}{T}$$