CAPITOLO 2
LIMITI DI FUNZIONI E CONTINUITA'

2.1 Gli assiomi dei numeri reali

Assiomi sulle operazioni

Definite le operazioni di addizione $(+)$ e moltiplicazione $(\cdot)$ tra coppie di numeri reali, si hanno le seguenti proprietà:

1. *Proprietà associativa*: $(a+b)+c=a+(b+c)$; $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
2. *Proprietà commutativa*: $a+b=b+a$; $a\cdot b=b\cdot a$
3. *Proprietà distributiva*: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
4. *Esistenza degli elementi neutri*: $\exists 0\in R | a+0=a$; $\exists 1\in R | a\cdot 1=a$
5. *Esistenza degli opposti e degli inversi*:

   $\forall a\in R, \exists(-a)\in R | a+(-a)=0$; $\forall a\neq 0\in R, \exists a^{-1}\in R | a\cdot a^{-1}=1$.

Assiomi dell'ordinamento

E' definita la relazione $(\leq)$ tra coppie di numeri reali tale che:

6. *Dicotomia*: $\forall a,b\in R\Rightarrow a\leq b \vee b\leq a$
7. *Proprietà asimmetrica*: se $a\leq b\wedge b\leq a\Rightarrow a=b$
8. Se $a\leq b\Rightarrow a+c\leq b+c$
9. Se $0\leq a\wedge 0\leq b\Rightarrow$ $0\leq a+b$; $0\leq a\cdot b$

Assioma di completezza (I)

Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietà che, comunque si scelgano $a\in A$ e $b\in b$ risulta $a\leq b$, allora $\exists c\in R | a\leq c\leq b$, $\forall a\in A$ e $\forall b\in B$.

2.2 Numeri naturali, interi, razionali

Da quanto sopra esposto $0,1\in R$, così come $1+1=2$; $2+1=(1+1)+1=3$; $(n-1)+1=n,\ldots$ I numeri così ottenuti formano un sottoinsieme dei numeri reali detto l'insieme dei *numeri naturali* $N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$. Se ai numeri naturali aggiungiamo i loro opposti e lo zero, otteniamo l'insieme dei *numeri interi* $Z=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots,\pm n,\ldots\}$. I risultati della moltiplicazione $m\cdot n^{-1}$, con $m,n\in R$, $n\neq 0$, formano l'insieme dei *numeri razionali* $Q=\left\{\frac{m}{n} \middle| \; m,n\in Z, \quad n\neq 0, \quad MCD(m,n)=1 \right\}$. Da queste definizioni segue l'ovvia catena di inclusioni: $N\subset Z\subset Q\subset R$.

Osservazioni.

L'insieme dei numeri naturali non soddisfa la proprietà 5 in quanto $-n\notin N$, e nemmeno l'insieme dei numeri razionali, in quanto $z^{-1}\notin Z$. L'insieme dei numeri razionali soddisfa tutte le proprietà, ma non l'assioma di completezza. Infatti, se consideriamo gli insiemi $A=\{a\in Q | a^2\leq 2\}$ e $B=\{b\in Q | \; b^2\geq 2, \quad b>0\}$, si ha che tutti i numeri di A sono minori di tutti i numeri di B, e l'unico $c | a\leq c\leq b$ è $c=\sqrt{2}\notin Q$.

2.3 La *topologia* della retta reale

La teoria formale dei numeri reali richiede una sistemazione rigorosa dei numeri *irrazionali*, e questa può essere realizzata, ad esempio, grazie al cosiddetto *assioma di continuità*. Infatti, considerare un numero irrazionale come un *decimale illimitato aperiodico*, risente troppo della scelta del sistema decimale; è quindi opportuno un criterio più generale.

L'*assioma di continuità*

Proviamo a calcolare il valore di $\sqrt{2}$ utilizzando i numeri razionali, considerando il seguente procedimento: $1 = 1^2 < 2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 < 4 = 2^2$, vediamo così che $\sqrt{2}$ è compreso tra 1 e 2. Dividiamo a metà l'intervallo [1, 2] e consideriamo il punto medio $\frac{3}{2}$: poiché $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = \frac{1+8}{4} > \frac{8}{4} = 2$, segue che $\sqrt{2}$ sta nell'intervallo $[1, \frac{3}{2}]$. Ripetiamo il procedimento: il punto medio $\frac{5}{4}$ è tale che $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} < 2$, quindi $\sqrt{2}$ sta nell'intervallo $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$.

In questo modo si costruisce una *successione di intervalli dimezzati*, ognuno costituito da una delle metà del precedente, e tutti contenenti il numero $\sqrt{2}$.

A questo punto possiamo pensare a $\sqrt{2}$ come all'*unico numero appartenente a tutti gli intervalli*.

Interessante! Se ciò fosse vero, avremmo "costruito" $\sqrt{2}$ come successione di razionali. E qui entra in gioco l'assioma di continuità, una proprietà fondamentale dei numeri reali.

Assioma di continuità: *Data una successione di intervalli dimezzati, esiste uno ed un solo punto contenuto in tutti gli intervalli.*

La possibilità di generalizzare dall'insieme dei numeri razionali le quattro operazioni e le relazioni di disuguaglianza è evidente, ed è interessante osservare che "*…da un punto di vista fisico, la definizione di un numero irrazionale mediante una successione monotona di intervalli corrisponde alla determinazione del valore di una quantità osservabile, per mezzo di una serie di misure sempre più approssimate.*" (citazione dal libro *"Che cos'è la matematica?")*.

Massimi, minimi, estremo superiore, estremo inferiore

Sia $A \subset R$ un insieme. Un numero reale M si dice *massimo* dell'insieme A, e si indica con

$M := \max A \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq a \quad \forall a \in A \\ M \in A \end{cases}$. Analogamente il *minimo* dell'insieme A è

$m := \min A \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq a \quad \forall a \in A \\ m \in A \end{cases}$. Notiamo che non tutti gli insiemi sono dotati di massimo e/o minimo.

Proposizione. Il massimo (e il minimo) di un insieme, se esiste è unico.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che esistano due massimi dell'insieme A, denotati con M_1 e M_2. Dalla definizione di massimo segue che $M_1 \geq a$ per ogni $a \in A$. In particolare, poiché $M_2 \in A$, dovrà risultare $M_1 \geq M_2$. Ripetendo il ragionamento scambiando di ruolo M_1 e M_2 si giunge alla disuguaglianza opposta $M_1 \leq M_2$, da cui segue, necessariamente, l'uguaglianza $M_1 = M_2$, che prova l'unicità del massimo.

Un numero reale L si dice *maggiorante per A* se $L \geq a \quad \forall a \in A$, mentre un numero reale l si dice *minorante per A* se $l \leq a \quad \forall a \in A$. Non sempre un insieme ammette maggioranti/minoranti: ad esempio un sottoinsieme illimitato di R, come quello formato dai reali positivi, non ha maggioranti, non ha massimo ma ha come minoranti tutti gli $x \in R | x \leq 0$.

Definizione. Un insieme $A \subset R$ si dice *limitato superiormente* se ammette un maggiorante, *limitato inferiormente* se ammette un minorante. In particolare $A \subset R$ è *limitato*

$\Leftrightarrow \exists L, l \in R \mid l \leq a \leq L \quad \forall a \in A$.

Per esempio, l'insieme numerico $(-\infty;3)$ è limitato superiormente perché 5, ad esempio, è un suo maggiorante. Un insieme inferiormente limitato è $[6;+\infty)$ ed un minorante è 1.

Proposizione. $A \subset R$ è limitato $\Leftrightarrow \exists M > 0 \| a| \leq M \quad \forall a \in A$.

Dimostrazione. $(\Leftarrow)$ Se $\exists M > 0 \| a| \leq M \Rightarrow -M \leq a \leq M$, allora $A \subset R$ è limitato da $l = -M$ e $L = M$.

$(\Rightarrow)$ Se $A \subset R$ è limitato allora $\exists L, l \in R \mid l \leq a \leq L \quad \forall a \in A$. Scelto $M := \max\{|l|,|L|\}$, si ha la tesi grazie alla catena di disuguaglianze: $-M \leq -|l| \leq l \leq a \leq L \leq |L| \leq M$.

Teorema di esistenza dell'estremo superiore. $A \subset R$, $A \neq \varnothing$ limitato superiormente, allora esiste il minimo dell'insieme B dei maggioranti di A.

Dimostrazione. Poiché $A \neq \varnothing$, allora l'insieme dei maggioranti $B \neq \varnothing$. Applichiamo l'assioma di completezza agli insiemi A e B: esiste $M \in R \mid a \leq M \leq b \quad \forall a \in A$ e $\forall b \in B$. Ora, $M \geq a \ \forall a \in A$, quindi M è un maggiorante di A, allora $M \in B$. Tuttavia, risulta anche $M \leq b \ \forall b \in B$, quindi M è il minimo di B, come volevasi dimostrare.

Definizione. Si definisce **estremo superiore M** dell'insieme $A \subset R$, $A \neq \varnothing$ il *minimo* dei maggioranti di A. Si definisce **estremo inferiore m** dell'insieme $A \subset R$, $A \neq \varnothing$, il *massimo* dei minoranti di A.

Osservazione. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow M - \varepsilon < M \Rightarrow M - \varepsilon \in A \Rightarrow \exists a \in A \mid a > M - \varepsilon$, altrimenti avremmo trovato un maggiorante $M - \varepsilon < M$, contro la proprietà che M è il minimo dei maggioranti. Schematicamente:

$$M := \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq a \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \mid a > M - \varepsilon \end{cases}$$

$$m := \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq a \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \mid a < m + \varepsilon \end{cases}$$

Di conseguenza, un insieme limitato superiormente è dotato di estremo superiore, e un insieme limitato inferiormente è dotato di estremo inferiore.

Definizione. Se A non è limitato superiormente, si dice che l'estremo superiore è $+\infty$:

$$\sup A := +\infty \Leftrightarrow \forall L \in R, \exists a \in A \mid a > L .$$

Se A non è limitato inferiormente, si dice che l'estremo inferiore è $-\infty$:

$$\inf A := -\infty \Leftrightarrow \forall l \in R, \exists a \in A < l .$$

Esempi.

1. $A = \{x \in R \mid x > 0\} \Rightarrow \quad \sup A = +\infty; \quad \inf A = 0; \quad \nexists \max A; \quad \nexists \min A$.
2. $B = \left\{\frac{n-1}{n} | n \in N\right\} \Rightarrow \quad \sup B = 1; \quad \inf B = 0; \quad \nexists \max B; \quad \min B = 0$.
3. $C = \left\{\frac{n+1}{n} | n \in N\right\} \Rightarrow \quad \sup C = 2; \quad \inf C = 1; \quad \max C = 2; \quad \nexists \min C$.

Esercizio. Si trovino l'estremo superiore e inferiore dell'insieme

$$A \equiv \left\{a \in R : a = \frac{1}{n}, n \in N\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}.$$

Vediamo "all'opera" questi concetti. Iniziamo con la dimostrazione che l'insieme dei numeri naturali non è limitato superiormente.
Teorema. *L'insieme dei numeri naturali non è limitato superiormente.*
Dimostrazione: supponiamo per assurdo che l'insieme dei numeri naturali sia limitato superiormente. Per l'assioma di completezza esiste *m* estremo superiore di N. Essendo il più piccolo dei maggioranti, $m-1$ appartiene all'insieme dei naturali e non può essere un maggiorante, quindi esiste un numero naturale, *n*, con la proprietà che $m-1<n\le m$. Risulta di conseguenza che $m<n+1$ e questo è assurdo perché per il principio di induzione $n+1$ appartiene all'insieme dei naturali e l'estremo superiore non può essere più piccolo di un elemento dell'insieme! Quindi l'insieme dei naturali non può essere limitato superiormente (c.v.d.).
Proseguiamo con la dimostrazione del cosiddetto *Assioma di Archimede.*

Proposizione. Dati due numeri reali positivi a,b, esiste un naturale N tale che $Na>b$.
Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che esistano due positivi a,b tali che $\forall n$, risulta $na\le b$.
Possiamo quindi definire l'insieme $A\equiv\left\{x\in R \,\middle|\; x=na,\quad n=1,2,3,...\right\}$ e, per quanto appena visto, affermare che si tratta di un insieme di numeri reali *limitato superiormente* (da *b*), quindi per l'assioma di completezza esiste $L=\sup A$. Per definizione di estremo superiore risulta $(n+1)a\le L\Rightarrow na\le L-a\quad\forall n$, quindi avremmo trovato un maggiorante dell'insieme, $L-a$, più piccolo di $L=\sup A$, in contraddizione con la minimalità dell'estremo superiore come maggiorante.

L'insieme dei razionali è *denso* in quello dei reali

Il fatto, intuitivo, che tra due numeri reali si possa sempre trovare un razionale (in realtà se ne possono trovare infiniti) esprime la cosiddetta *densità* dell'insieme dei numeri razionali in quello dei numeri reali. Formalizziamo questo concetto nella seguente:
Proposizione. Per ogni coppia di numeri reali a,b, con $a<b$, esiste un numero razionale *r* tale che $a<r<b$.
Dimostrazione. Supponiamo che i due reali in questione siano positivi, e applichiamo la proposizione precedente alla coppia $b-a,1$. Sia quindi N tale che $N(b-a)>1$, e consideriamo la successione di razionali $\frac{1}{N},\frac{2}{N},...$. Solo un numero finito di termini di questa successione è minore od uguale ad *a* (altrimenti prima o poi il numeratore supererebbe il denominatore e quindi *a* limiterebbe l'insieme dei numeri naturali). Sia $\frac{k}{N}$ il più grande degli elementi della successione tale che $\frac{k}{N}\le a$. Allora, $r:=\frac{k+1}{N}>a$. Facciamo vedere che $r<b$ ed abbiamo trovato il razionale cercato. Per assurdo, se $r\ge b$ avremmo che $\frac{1}{N}=r-\frac{k}{N}\ge b-\frac{k}{N}\ge b-a\Rightarrow N(b-a)\le 1$, contro il fatto che $N(b-a)>1$.

Il concetto di *punto di accumulazione*

Propedeutico al concetto di limite di *funzione* è quello di punto di accumulazione. Nello specifico, si definisce *intorno* di un punto x_0, un qualsiasi insieme contenente un intervallo $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$.
Si dice che x_0 è un punto di accumulazione per l'insieme *A* se *in ogni* intorno di x_0 cade *almeno* un punto di *A*, diverso da x_0.
L'esistenza dei punti di accumulazione è regolata dal seguente teorema.
Teorema (Bolzano-Weierstrass). Sia $E\subset R$ un insieme *limitato* e *infinito*. Allora l'insieme *E* ammette almeno un punto di accumulazione (in realtà ne ammette infiniti).

Dimostrazione. Poiché l'insieme è limitato, possiamo supporre che $E \subset [a,b]$. Consideriamo la partizione $[a,b] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \cup \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$: in almeno uno dei due intervalli devono necessariamente cadere infiniti punti dell'insieme *E*; chiamiamo tale intervallo $[a_1, b_1]$ e ripetiamo l'operazione precedente. Otterremo così una successione di intervalli, ognuno contenuto nel precedente, tale che

$$\begin{array}{ll} a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots & A \equiv \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \\ b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots & B \equiv \{b_1, b_2, b_3, \ldots\} \end{array}.$$

Siano $a_k \in A$ e $b_s \in B$ generici elementi dei due insiemi sopra definiti. Se $n > k$ e $n > s$, allora $a_k \leq a_n \leq b_n \leq b_s$ e quindi b_s è un maggiorante di A, limitato, per cui $\sup A \leq b_s$. Poiché questa disuguaglianza vale per qualsiasi indice *s*, in particolare risulta $\sup A \leq \inf B$ (l'estremo inferiore di B esiste per l'assioma di completezza, essendo B limitato). Se dimostriamo la disuguaglianza opposta, $\sup A \geq \inf B$, allora abbiamo trovato il punto di accumulazione $\sup A = \inf B$.
Per questo scopo ricordiamo, dalle proprietà dell'estremo superiore e inferiore, che $\sup A \geq a_n \wedge \inf B \leq b_n \Rightarrow \inf B - \sup A \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow \inf B \leq \sup A + \frac{b-a}{2^n}$. Poiché questa espressione vale per ogni scelta di *n*, si ha $\inf B \leq \sup A \Rightarrow \sup A = \inf B$. Che si tratta effettivamente di un punto di accumulazione si può verificare così: indicato con $z := \sup A = \inf B$, $[a,b]$ è un intorno di z, dal momento che contiene l'intervallo $(z-r, z+r)$ non appena avremo scelto n tale che $r > \frac{b-a}{2^n}$.

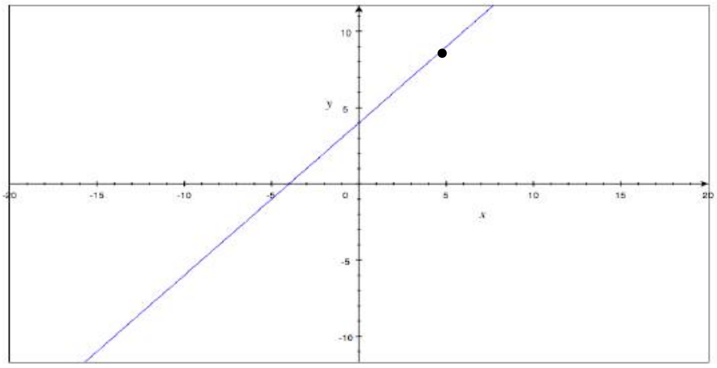
Teorema sulle successioni monotòne. Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, se è anche limitata allora è convergente.
Dimostrazione. Sia x_n una successione crescente e limitata, e sia $L := \sup x_n$. Per le proprietà dell'estremo superiore, $\forall \varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in N \mid x_{n_0} > L - \varepsilon$. La successione è crescente, quindi $\forall n > n_0$, $x_n \geq x_{n_0}$. Di conseguenza, $L - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq L < L + \varepsilon$, che è proprio la tesi: $\lim_{n\to\infty} x_n = L$.
Nel caso in cui la successione crescente *non* è limitata superiormente, $\sup x_n = +\infty$. Sempre per le proprietà dell'estremo superiore, $\forall K > 0 \exists n_0 \mid x_{n_0} > K$ e, per la crescenza di x_n, $\forall n > n_0$, $x_n \geq x_{n_0}$. Di conseguenza, $x_n \geq x_{n_0} > K$, che è proprio la tesi: $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2.4 Premesse all'analisi infinitesimale

Vogliamo adesso estendere il concetto di limite dalle successioni alle funzioni reali di variabile reale, al fine di indagare il comportamento generale di quest'ultime, in particolare *nelle vicinanze* dei punti in cui non sono definite. Per poter compiere questa operazione, è necessario stabilire alcuni pre-requisiti di carattere "topologico".
Per questo scopo consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$, il cui campo di esistenza è rappresentato dall'insieme $\{x \in R \mid x \neq 4\}$. Per valori della variabile $x \neq 4$ possiamo scrivere la funzione nella forma $f(x) = x + 4$. In altre parole, il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ si ottiene da quello della funzione $f(x) = x + 4$ privato del punto $(4;8)$. Morale: anche se 8 non può essere immagine di nessun *x* per la funzione $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$, è il valore a cui questa si avvicina quando la variabile

indipendente *x* “tende” al valore “proibito” $x = 4$. Il concetto di limite di funzione, come vedremo, formalizza quanto appena osservato mediante la scrittura densa di significato:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=8.$$

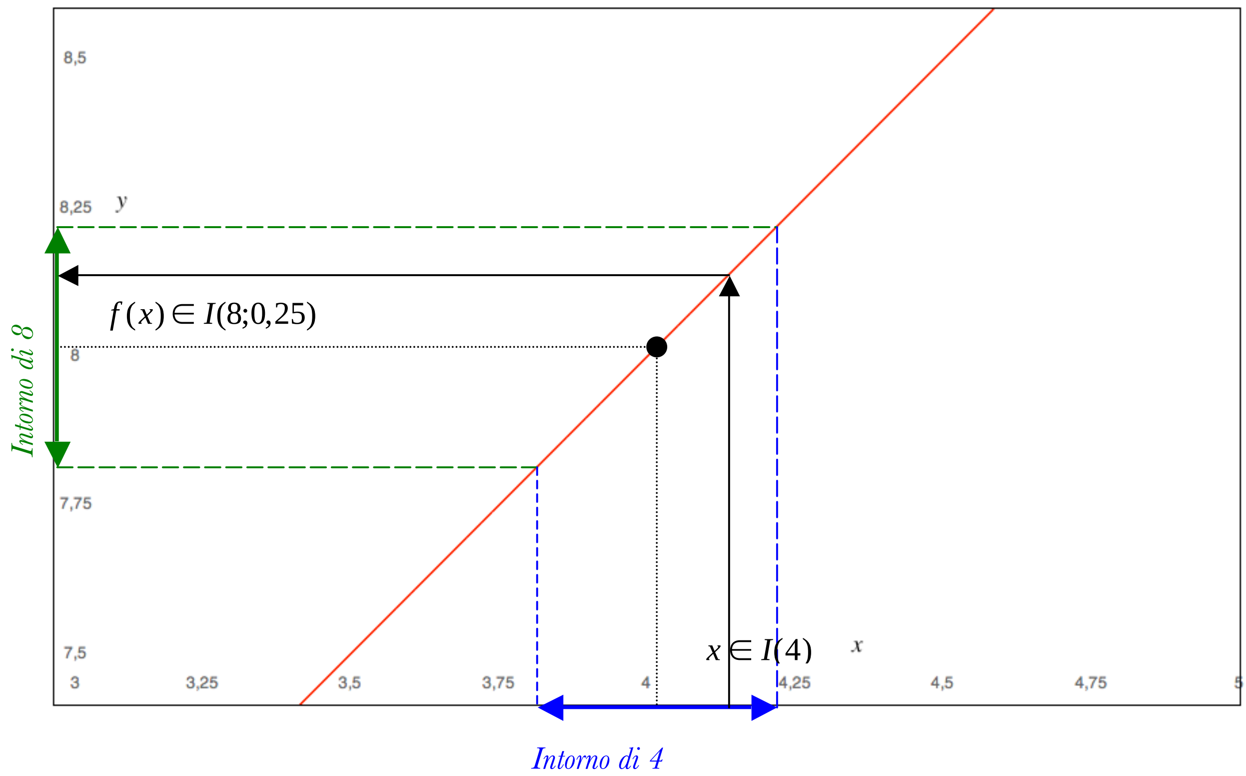


Presentiamo alcuni concetti caratterizzanti la retta reale, pensata come modello che rappresenta l’insieme dei numeri reali, propedeutici alla definizione generale di limite di funzione.
E’ noto il concetto di **intervallo** come sottoinsieme della retta reale. Gli intervalli possono essere di due tipi: *limitati* o *illimitati*. Un intervallo limitato si dice *chiuso* se è del tipo $[a;b]=\{x\in R \mid a\le x\le b\}$, *aperto* se è del tipo $(a;b)=\{x\in R \mid a<x<b\}$. Possono tuttavia esistere “casi misti” di intervalli limitati aperti ad un estremo e chiusi all’altro, tipo $[a;b)=\{x\in R \mid a\le x<b\}$ oppure $(a;b]=\{x\in R \mid a<x\le b\}$.
Analogamente si definiscono gli intervalli aperti illimitati *superiormente*, $(a;+\infty)=\{x\in R \mid x>a\}$, oppure *inferiormente* $(-\infty;a)=\{x\in R \mid x<a\}$, e gli intervalli chiusi illimitati *superiormente* $[a;+\infty)=\{x\in R \mid x\ge a\}$, oppure *inferiormente* $(-\infty;a]=\{x\in R \mid x\le a\}$.
In *topologia*, dal greco *studio del luogo*, la retta reale è considerata come un intervallo illimitato, sia aperto che chiuso (anche l’insieme vuoto $\varnothing$ è sia aperto che chiuso): $R=(-\infty;+\infty)$.
Si definiscono *valori interni* ad un intervallo, quelli che vi appartengono ma non sono estremi. E’ facile vedere che in un intervallo aperto tutti i valori sono interni, mentre in un intervallo chiuso, limitato o illimitato, i valori interni coincidono con l’intervallo privato degli estremi, se è limitato, oppure dell’estremo, se è illimitato.
Un particolare intervallo su cui si baserà la definizione di limite, è il cosiddetto **intorno**. Si definisce intorno *completo* di un punto x_0, un qualsiasi intervallo aperto contenente x_0: $I(x_0)=(x_0-\delta_1;x_0+\delta_2)=\{x\in R \mid x_0-\delta_1<x<x_0+\delta_2,\quad \delta_1,\delta_2>0\}$. Un intorno completo si dice *circolare* quando $\delta_1=\delta_2$. Altri tipi di intorno sono l’intorno *sinistro di* x_0: $I_S(x_0)=(x_0-\delta;x_0)$, l’intorno *destro di* x_0: $I_D(x_0)=(x_0;x_0+\delta)$, l’intorno di *meno infinito*: $I(-\infty)=(-\infty;a)$, l’intorno di *più infinito*: $I(+\infty)=(a;+\infty)$, e l’intorno di *infinito*: $I(\infty)=(-\infty;a)\cup(b;+\infty),\quad a<b$.
Concludiamo questa nota sintetica richiamando il concetto di **punto di accumulazione**: un punto x_0 è di accumulazione per un sottoinsieme della retta reale, se ogni suo intorno completo contiene infiniti punti del sottoinsieme stesso. Si tratta di un requisito fondamentale per descrivere il comportamento di una funzione, nelle vicinanze di un determinato punto.

2.5 Limite finito di una funzione per *x* che tende ad un valore finito

Consideriamo di nuovo la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$ e cerchiamo di formalizzare quanto già osservato, e cioè che, pur essendo definita nell’insieme $\{x\in R \mid x\ne 4\}$, quando *x* si avvicina a 4, la sua immagine si avvicina a 8. L’idea è: *comunque si fissi un intorno circolare di 8, è possibile individuare un intorno di 4 i cui punti, escluso 4, hanno immagine contenuta nell’intorno precedentemente fissato di 8.*

Il grafico seguente chiarisce quanto appena detto.



Con la notazione specifica degli intorni, è possibile a questo punto dare la definizione di limite *finito*, per *x* che tende ad un valore *finito*:

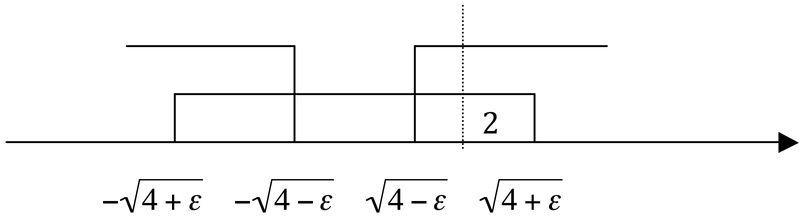
Definizione: sia *f* una funzione definita in un intorno completo $I(x_0)$ del punto x_0, escluso al più x_0, e sia $l \in R$. Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se $\forall \varepsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che per ogni* $x \in I(x_0)$, $0 < |x - x_0| < \delta$, *risulta* $|f(x) - l| < \varepsilon$.
In genere è chiesto di *calcolare* i limiti di funzioni, ma la *verifica* degli stessi con la definizione data è un utile esercizio. Vediamo come può essere condotta questa verifica analizzando alcuni esempi. Partiamo proprio dalla funzione considerata.
Cominciamo con l'osservare che *verificare un limite finito per x che tende ad un valore finito, consiste essenzialmente nel risolvere la disequazione* $|f(x) - l| < \varepsilon$. *Le soluzioni, che dipendono da* ε*, grandezza arbitraria, permetteranno di ricavare il* δ *che compare nella definizione sotto forma di condizione* $0 < |x - x_0| < \delta$.
Da un punto di vista "operativo" le operazioni che dobbiamo compiere richiedono un po' di riflessione: il nostro obiettivo è isolare, all'interno dell'espressione $|f(x) - l|$, il termine $|x - x_0|$. Nel caso della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$, in cui $l = 8$ e $x_0 = 4$, possiamo procedere come segue.
$|f(x) - l| = \left| \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} - 8 \right| = \left| \dfrac{(x-4)(x+4)}{(x-4)} - 8 \right| = |x - 4|$ (poiché la condizione $x \neq x_0$ ci permette di dividere per il termine $(x - 4)$). A questo punto si pone $|f(x) - l| = |x - 4| < \varepsilon$ e si prende come valore di δ, direttamente quello di ε: $\left| \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} - 8 \right| < \varepsilon$ se $0 < |x - 4| < \delta = \varepsilon$. In generale il valore di δ è diverso da quello di ε, come si vede dal seguente esempio.

$\lim_{x\to 2}(4-x^2)=0$.
In questo caso $l=0$ e $x_0=2$ notiamo subito che la funzione *è definita* nel punto $x_0=2$: questo significa che nell'intorno $I(2)$ potremo "prendere" anche $x_0=2$. Ciò significa che non troveremo un intorno del tipo $0<|x-x_0|<\delta$, fatto per escludere proprio x_0, ma uno del tipo $|x-x_0|<\delta$:

$$|4-x^2|<\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} 4-x^2<\varepsilon \\ 4-x^2>-\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2>4-\varepsilon \\ x^2<4+\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|>\sqrt{4-\varepsilon} \\ |x|<\sqrt{4+\varepsilon} \end{cases}$$



L'intorno cercato di $x_0=2$ è quindi l'intorno completo $I(2)=\left(\sqrt{4-\varepsilon};\sqrt{4+\varepsilon}\right)$: $\forall x\in I(2), |f(x)|<\varepsilon$.
Può accadere che una funzione non sia definita in un intervallo illimitato, e che si voglia calcolare il limite della funzione per *x* che tende ad un estremo finito. E' il caso, ad esempio, della funzione $f(x)=\sqrt{x}$, che è definita nell'insieme $\{x\in R \mid x\geq 0\}$. Se vogliamo calcolare il $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$, è evidente che non potremo determinare, come nel caso precedente, un intorno completo di $x_0=0$, perché la funzione non è definita per valori di $x<0$. Il concetto di intorno destro ci permette di sistemare la questione e di parlare di *limite destro*:

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0.$$

In generale si dice che $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$ è il *limite destro* se $\forall\varepsilon>0$ *esiste un intorno destro di* x_0, $I_D(x_0)=(x_0;x_0+\delta)$, *tale che,* $\forall x\in I_D(x_0)$, *risulta* $|f(x)-l|<\varepsilon$.
Nel caso della funzione $f(x)=\sqrt{x}$, si ha come limite destro $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$, come si può facilmente verificare:
$\left|\sqrt{x}-0\right|=\sqrt{x}<\varepsilon \Rightarrow x<\varepsilon^2 \Rightarrow |x-0|<\varepsilon^2:=\delta$. L'intorno destro di zero che verifica la definizione di limite destro è $I_D(0)=\left(0;\varepsilon^2\right)$.
Analogamente si dice che $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l$ è il *limite sinistro* se $\forall\varepsilon>0$ *esiste un intorno sinistro di* x_0, $I_S(x_0)=(x_0-\delta;x_0)$, *tale che,* $\forall x\in I_S(x_0)$, *risulta* $|f(x)-l|<\varepsilon$.
I concetti di limite destro e di limite sinistro sono legati a quello di limite dal seguente risultato, di cui tralasciamo la dimostrazione.
Teorema: *Si ha* $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ *se e solo se i limiti destro e sinistro esistono e sono uguali.*

Esercizi

Verificare con la definizione i seguenti limiti di funzioni:

1. $\lim_{x\to -3}\sqrt{x+7}=2$ $\quad I=\left(-3-4\varepsilon+\varepsilon^2,-3+\varepsilon^2+4\varepsilon\right)$;
2. $\lim_{x\to 2}2^x=4$ $\quad I=\left(2+\log_2\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right),2+\log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)$;
3. $\lim_{x\to 2}\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=-1$ $\quad I=\left(2-\left(3-3^{1-\varepsilon}\right),2+\left(3^{1+\varepsilon}-3\right)\right)$;
4. $*\lim_{x\to 0}\frac{3^x}{3^{x+1}-x\cdot 3^x}=\frac{1}{3}$ $\quad I=\left(-\frac{9\varepsilon}{1-3\varepsilon},\frac{9\varepsilon}{1+3\varepsilon}\right)$;

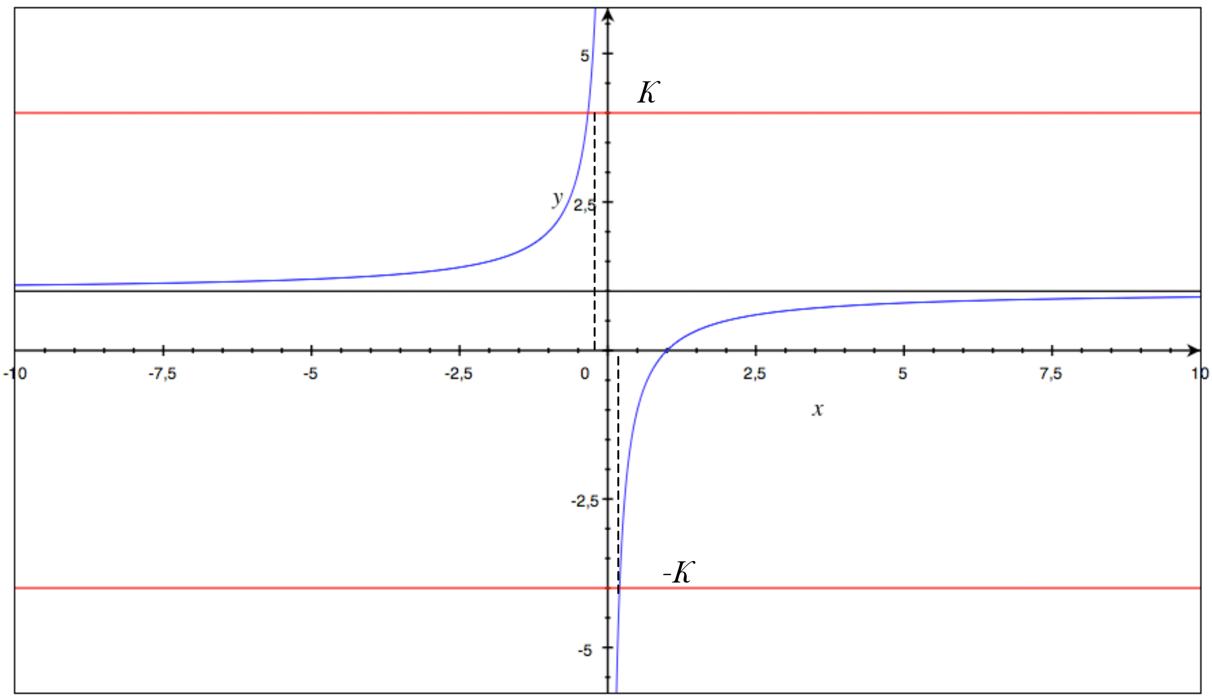
5. $* \lim_{x \to 0^+} |x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$ $\qquad I = \left(0, \sqrt{2\varepsilon+\varepsilon^2}\right)$;

6. $* \lim_{x \to 0^-} x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1$ $\qquad I = \left(-\sqrt{2\varepsilon+\varepsilon^2}, 0\right)$;

7. $\lim_{x \to -1} e^{x+1} = 1$ $\qquad I = \left(-1+\ln(1-\varepsilon), -1+\ln(1+\varepsilon)\right)$.

2.6 Limite infinito di una funzione per *x* che tende ad un valore finito

Questa tipologia di limite si incontra, a d esempio, nello studio delle funzioni omografiche. Consideriamo di nuovo la funzione $f(x) = \frac{x-1}{x}$. Il suo insieme di definizione è $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ e vogliamo calcolare il $\lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x}$. Sostituendo alla variabile *x* alcuni valori prossimi a zero, ci accorgiamo che il valore dell'immagine tende a $+\infty$ quando *x* si avvicina a zero per valori positivi, mentre tende a $-\infty$ quando si avvicina a zero per valori negativi. Anche questa volta ci aiutiamo con il grafico della funzione, dal quale è possibile osservare che, *comunque si fissi un intorno di infinito sull'asse y, del tipo* $(-\infty;-K) \cup (K;+\infty)$, *è possibile determinare un intorno completo di zero (delimitato dal tratteggio in figura),* $I(0)$, *tale che per ogni x ad esso appartenente risulta* $|f(x)| > K$.



Definizione: sia *f* una funzione definita in un intorno di x_0, escluso al più x_0. Si dice che

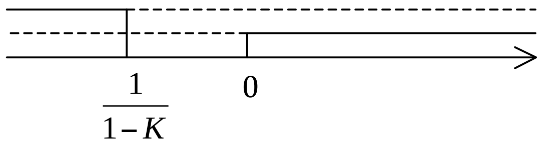
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

se $\forall K > 0$ *esiste un intorno completo di* $x_0, I(x_0)$, *tale che, per ogni* $x \in I(x_0)$, *escluso al più* x_0, *risulta* $|f(x)| > K$.

La determinazione dell'intorno $I(x_0)$ si ha risolvendo le disequazioni che si originano dall'applicazione della definizione. Nel caso della funzione $f(x) = \frac{x-1}{x}$ risulta:

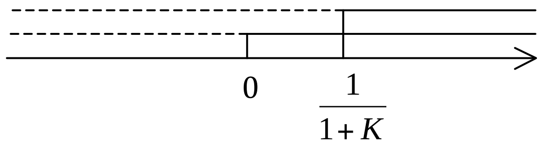
$\left|\frac{x-1}{x}\right| > K \Rightarrow \frac{x-1}{x} > K \vee \frac{x-1}{x} < -K$, da cui segue:

$\frac{x-1-Kx}{x} > 0 \Rightarrow \frac{(1-K)x-1}{x} > 0$



$\frac{1}{1-K} < x < 0$

$\frac{x-1+Kx}{x} < 0 \Rightarrow \frac{(1+K)x-1}{x} < 0$



$0 < x < \frac{1}{1+K}$

L'intorno completo di zero che soddisfa la definizione è dato dall'unione delle soluzioni delle due disequazioni: $I(0) = \left(\frac{1}{1-K};0\right) \cup \left(0;\frac{1}{1+K}\right)$.

Questo tipo di limiti è legato al concetto di *asintoto verticale*, una retta di equazione $x = x_0$, che si ha quando la funzione è definita in un intorno completo di x_0, escluso x_0, e tale che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Esercizi

Verificare con la definizione i seguenti limiti di funzioni:

1. $\lim_{x\to -1} \frac{2}{x+1} = \infty \qquad x \neq -1 \quad I = \left(-1-\frac{2}{K}, -1+\frac{2}{K}\right)$;
2. $\lim_{x\to -1} \frac{1}{x^3+1} = \infty \qquad x \neq -1 \quad I = \left(\sqrt[3]{-1-\frac{2}{K}}, \sqrt[3]{-1+\frac{2}{K}}\right)$;
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x-1} = \infty \qquad x \neq 0 \quad I = \left(\ln\left(1-\frac{1}{K}\right), \ln\left(1+\frac{1}{K}\right)\right)$;
4. $\lim_{x\to 3} \frac{1}{\log_2(x-2)} = \infty \qquad x \neq 3 \quad I = \left(3-\left(1-2^{-1/K}\right), 3+\left(2^{1/K}-1\right)\right)$;
5. $\lim_{x\to 1^+} \ln(x-1) = -\infty \qquad I = \left(1, 1+e^{-K}\right)$;
6. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{2x}+e^x-2} = \infty \qquad x \neq 0 \quad I = \left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{9-4/K}}{2}\right), \ln\left(\frac{-1+\sqrt{9+4/K}}{2}\right)\right)$;
7. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{\log_2(x)-1} = \infty \qquad x \neq 2 \quad I = \left(2^{1-\frac{1}{K}}, 2^{1+\frac{1}{K}}\right)$

2.7 FUNZIONI CONTINUE

Ricordiamo la definizione di limite *finito* per *x* che tende a valore *finito*:

Definizione Sia *f* una funzione definita in un intorno del punto x_0, eccettuato al più il punto stesso, e sia *L* un numero reale. Si dice che *f ha limite L per x che tende a* x_0, e si scrive

$$L = \lim_{x\to x_0} f(x),$$

se per ogni $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall 0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$.

Notiamo subito che la funzione può <u>non</u> essere definita in x_0, come accade, per esempio, alla funzione $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ nel punto $x_0=0$, pur essendo $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.
Se x_0 è un *punto interno*[1] all'insieme di definizione della funzione, allora risulta:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

e la funzione si dice ***continua nel punto*** x_0. La definizione di limite viene modificata prevedendo la possibilità che *x* possa coincidere con x_0: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\mid\forall|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon.$
Una definizione alternativa di funzione continua in un punto è la seguente:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0).$$

La funzione si dice **infinitesima** in x_0 se vale $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, anche se la funzione non è definita in x_0.

Esercizi
Dire se le seguenti sono funzioni continue in 0 (calcolare i limiti destro e sinistro per *x* che tende a zero…):

1. $f(x)=x+\sin x$ *si*
2. $f(x)=\begin{cases} x, & x\ge 0\\ 1-x & x<0\end{cases}$ *no* $f(x)=\begin{cases}\frac{x+|x|}{x^2} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ *no*
3. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\ne 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ *si* $f(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x^2} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$
4. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x>0\\ 1-x & x\le 0\end{cases}$ *si* $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ *no*
5. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{|x|}, & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ *si* $f(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{|x|-1} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ *no*
6. $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|}, & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ *no* $f(x)=\begin{cases}\log(2+x) & x\ge 0\\ 1 & x<0\end{cases}$ *no*

La continuità della somma e del prodotto di funzioni continue si dimostra senza troppe difficoltà, così come il quoziente nei punti in cui la funzione al denominatore è diversa da zero.
Occupiamoci adesso della continuità della funzione composta.
Teorema (continuità della funzione composta). Siano f una funzione definita in un intorno aperto di x_0, e continua in x_0, e g una funzione definita in un intorno aperto di $y_0=f(x_0)$ e

[1] Questa ipotesi è essenziale per poter parlare in termini di limite, contrariamente al caso in cui x_0 è un *punto isolato*.

continua in y_0. Se y_0 è un punto di accumulazione per l'immagine della funzione f, allora, la funzione composta $g(f(x))$ è continua in x_0.

$$\underset{x_0}{A} \xrightarrow{f} \underset{y_0=f(x_0)}{B} \xrightarrow{g} \underset{z_0=g(y_0)}{C}$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon_2 > 0$ esiste un intorno di $y_0 = f(x_0)$, $(y_0 - \delta_2; y_0 + \delta_2)$ tale che $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon_2$, per ogni $y \in (y_0 - \delta_2; y_0 + \delta_2)$. In corrispondenza di δ_2 esiste, per la continuità dalla funzione *f*, un δ_1 tale che $|f(x) - f(x_0)| < \delta_2$ per ogni $x \in (x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1)$. In definitiva, per ogni $\varepsilon_2 > 0$ esiste un $\delta_1 > 0$ tale che $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon_2$ per ogni $x \in (x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1)$, di conseguenza $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = (g(f(x_0)) = g(y_0)$.

Esercizio. Si studi la continuità della funzione $(2x + \log x)^{x^2+x-1}$ $\quad x > 0$.

Discontinuità

I punti in cui una funzione non è continua si dicono **punti di discontinuità**. Ci sono quattro tipi di punti di discontinuità, cominciamo con i cosiddetti

Punti di discontinuità eliminabile: sono punti in cui il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ esiste finito ma è diverso da $f(x_0)$, oppure la funzione non è definita in x_0.

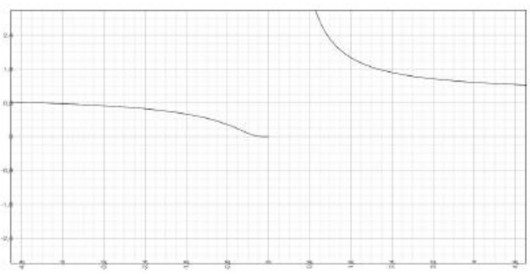
Esempio $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$, $\quad f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Punti di discontinuità di prima specie: sono punti in cui limite destro e limite sinistro esistono finiti e sono diversi tra loro. In questo caso si dice che la funzione ha un **salto** nel punto di discontinuità dato da $s(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

Esempio $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}$.

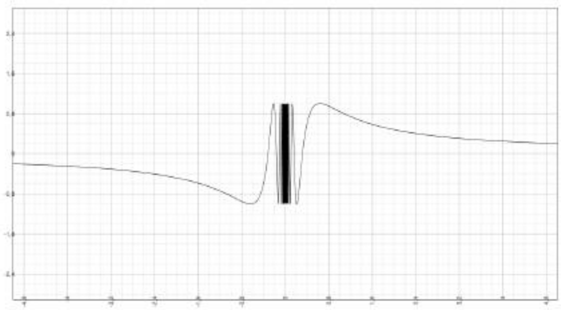
Punti di discontinuità di seconda specie: sono punti in cui esistono limite destro e sinistro, ma almeno uno dei due è infinito.

Esempio $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.



Punti di discontinuità di terza specie: sono punti in cui uno o ambedue i limiti, destro e sinistro, non esistono.

Esempio $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$.



Esercizi
Classificare le discontinuità delle seguenti funzioni:

1. $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}$; *Discontinuità eliminabile*
2. $f(x)=3^{\frac{1}{x-1}}$; *Discontinuità di II specie*
3. $f(x)=\begin{cases} kx+3; & x\geq 2 \\ x-1; & x<2 \end{cases}$; *Discontinuità di I specie se* $k\neq -1$ *altrimenti continua*
4. $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; *Discontinuità eliminabile*
5. $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-3}}$; *Discontinuità di II specie*
6. $f(x)=\frac{x}{\ln(1+x)}$; *Discontinuità eliminabile*
7. $f(x)=\frac{1-\cos x}{\cos x-\cos 2x}$; *Discontinuità eliminabile*[2]

2.8 Teoremi sulle funzioni continue

Diciamo che una funzione *f* è **continua sull'intervallo chiuso** $[a,b]$ se è continua in *a*, in *b* ed in ogni punto $a<x<b$.
Il seguente risultato svela la relazione tra funzioni continue su intervalli chiusi e l'esistenza di massimi e minimi:

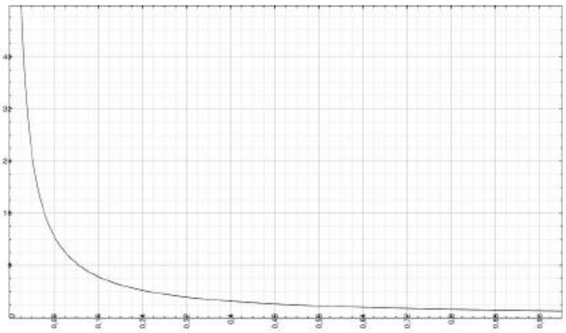
Teorema di Weierstrass. Ogni funzione continua su un intervallo chiuso $[a,b]$ è ivi limitata e assume massimo e minimo.
Dimostrazione. Sia *f* una funzione continua su $[a,b]$ e poniamo $A=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Dividiamo $[a,b]$ in due parti uguali $[a,c]$ e $[c,b]$ con *c* punto medio. Supponiamo che *A* appartenga all'intervallo $[a,c]$ ed iteriamo il procedimento. Ad ogni passo è così determinato un intervallo chiuso I_n di ampiezza $\frac{b-a}{2^n}$, contenuto nei precedenti e tale che $\sup_{I_n} f(x)=\sup_{x\in[a,b]} f(x)=A$. Per l'assioma di continuità esiste un unico punto x_0 che appartiene a tutti gli I_n. Per la continuità di *f*, tuttavia, dato $\varepsilon>0$ esiste un intorno di x_0 in cui $f(x)<f(x_0)+\varepsilon$. Da questo segue che su un I_n la quantità $f(x_0)+\varepsilon$ maggiora i valori assunti da *f* in I_n, in particolare maggiora il $\sup_{I_n} f$. Di conseguenza,

---
2

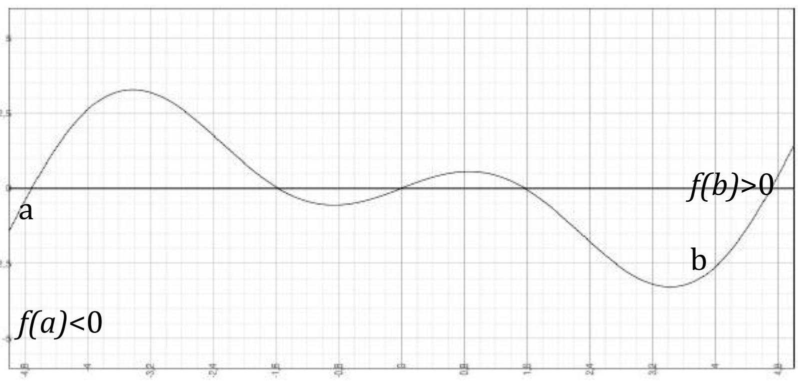
$$\cos x-\cos 2x=\cos x-\cos^2 x+1-\cos^2 x=\cos x(1-\cos x)+(1+\cos x)(1-\cos x)=(1-\cos x)(\cos x+\cos^2 x)$$

$$\begin{cases} f(x_0) \leq A, & (x_0 \in I_n) \\ f(x_0) + \varepsilon \geq A, & (A = \sup\limits_{I_n} f(x)) \end{cases}$$ e quindi $f(x_0) \leq A \leq f(x_0) + \varepsilon$. Per l'arbitrarietà di scelta di $\varepsilon > 0$ risulta $f(x_0) = A$ e x_0 è il punto di massimo (in quanto la funzione è continua e $x_0 \in [a, b]$. Analogamente si procede per la determinazione del punto di minimo. (c.v.d.).

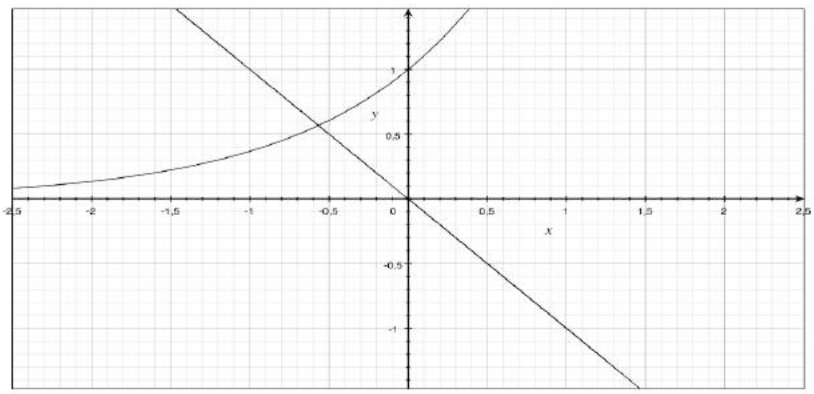
Per convincersi dell'essenzialità dell'ipotesi di intervallo chiuso, consideriamo il comportamento della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x \in (0,1]$: la funzione non ammette massimo!



Sempre con il metodo di bisezione degli intervalli e sempre grazie all'assioma di continuità, è possibile dimostrare il seguente:
Teorema degli zeri di funzioni continue. Sia *f* una funzione continua su un intervallo chiuso $[a,b]$ e tale che $f(a) > 0, \quad f(b) < 0$; allora esiste almeno un punto x_0 in (a,b) tale che $f(x_0) = 0$.



Problema. Si determini il numero di soluzioni dell'equazione $e^x + x = 0$, e si indichino con due cifre decimali esatte.



- Dal grafico si vede che l'equazione ammette una sola soluzione $-0{,}6 < \bar{x} < -0{,}5$. Applichiamo il metodo di bisezione per determinare la soluzione con due cifre decimali esatte:

a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	m	$f(m)$
-0,6	-0,051188	-0,5	0,106531	-0,55	0,026950
-0,6	-0,051188	-0,55	0,026950	-0,575	-0,012295
-0,575	-0,012295	-0,55	0,026950	-0,5625	0,007282
-0,575	-0,012295	-0,5625	0,007282	-0,56875	-0,002517

La soluzione con la precisione richiesta è $\bar{x} = -0{,}56$.

Teorema dei valori intermedi. Sia *f* una funzione continua su un intervallo chiuso $[a,b]$. Allora la funzione assume tutti i valori compresi tra il minimo *m* e il massimo *M*. L'immagine di $[a,b]$ è quindi l'intervallo chiuso $[m,M]$.

Dimostrazione. Siano *c* e *d* i punti rispettivamente di minimo e di massimo (che esistono per il teorema di Weierstrass). Supponiamo che *c<d*. Sia α un numero compreso tra *m* e *M*. Proviamo che esiste x_0 in $[a,b]$ tale che $f(x_0) = \alpha$. Per questo sarà sufficiente applicare il teorema degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - \alpha$, continua su $[c,d]$, e tale che $g(c) = f(c) - \alpha = m - \alpha < 0, \quad g(d) = f(d) - \alpha > 0$.

La continuità della funzione inversa

Abbiamo già avuto modo di osservare che funzioni strettamente monotone sono invertibili, mentre non è necessariamente vero il viceversa: esistono, infatti, funzioni invertibili che non sono monotone.

Vediamo sotto quali ipotesi una funzione invertibile e continua, ammette inversa continua.

Cominciamo col dire che la definizione su un intervallo è essenziale. Infatti, esistono funzioni continue *non* definite su un intervallo, con inversa non continua, come ad esempio $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ x-1 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$, chiaramente invertibile con inversa $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ x+1 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ definita sull'intervallo $[0,2]$, evidentemente discontinua in $x = 1$.

Faremo vedere che, in generale, una funzione continua ed invertibile, definita su un intervallo (che può essere limitato, una semiretta, oppure tutto l'insieme dei numeri reali), possiede inversa continua. Premettiamo alla dimostrazione il seguente lemma.

Lemma. Una funzione continua e invertibile su un intervallo chiuso e limitato I è strettamente monotòna.

Dimostrazione. Sia $I = [a,b]$ e supponiamo, ad esempio, che $f(a) < f(b)$. Facciamo vedere che $f(x)$ è strettamente crescente. Sia $x \in (a,b)$: allora $f(a) < f(x) < f(b)$. Dimostriamo questo fatto per assurdo. Se $\exists x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) > b$, allora per il teorema dei valori intermedi $\exists z \in (a, x_0)$ tale che $f(z) = f(b)$, con $z \neq b$, in contraddizione con l'ipotesi d'invertibilità di $f(x)$.

Considerazioni analoghe portano ad escludere che $\exists x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) < a$.

A questo punto possiamo dimostrare che $f(x)$ è crescente. Infatti, supponiamo per assurdo che $\exists x_1 < x_2$ con $f(x_1) > f(x_2)$. Per quanto appena visto, $f(x_1) < f(b)$, quindi per il teorema dei valori intermedi $\exists z \in (x_2, b)$ tale che $f(x_2) < f(z) = f(x_1) < f(b)$, con $z \neq x_1$. Poiché l'ultimo

risultato è in contraddizione con l'ipotesi d'invertibilità, abbiamo dimostrato che $f(x)$ è strettamente crescente.
A questo punto possiamo dimostrare il risultato centrale.
Teorema. Se $f(x)$ è una funzione continua e invertibile su un intervallo I, allora la funzione inversa $f^{-1}(y)$ è continua su $J=f(I)$.

Dimostrazione. Per il teorema dei valori intermedi $J=f(I)$ è un intervallo, inoltre $f^{-1}(y)$ è anch'essa una funzione crescente. Supponiamo per assurdo che $\exists y_0 \in J$ in cui la funzione inversa non è continua. Dovrà essere $\lim_{y\to y_0^+} f^{-1}(y)=L>f^{-1}(y_0)$, da cui segue, per la crescenza di $f^{-1}(y)$, che $f^{-1}(y)>L$, per ogni $y>y_0$ (perché?). Ora, sempre per la crescenza di $f^{-1}(y)$, risulta, per ogni $y<y_0$, $f^{-1}(y)<f^{-1}(y_0)$. Abbiamo così individuato un intervallo $\left(f^{-1}(y_0),L\right)\subset J$, i cui punti non sono immagini di alcun $x\in I$, in contraddizione col fatto che $J=f(I)$ è un intervallo. In definitiva, $\forall y_0 \in J$, dovrà essere $\lim_{y\to y_0^+} f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)$ e quindi $f^{-1}(y)$ una funzione continua.