Gravitazione Universale

PROBLEMI

1. La Terra gira intorno al Sole su un'orbita quasi circolare di raggio $1{,}5\cdot 10^{11}\,m$. Il suo periodo è un anno. Si usino questi dati per calcolare la massa del Sole.
2. Un segnale luminoso impiega circa 13 minuti per viaggiare, alla velocità della luce $c = 3\cdot 10^{8}\,ms^{-1}$, dal Sole a Marte. Si calcoli il periodo di rivoluzione di Marte intorno al Sole.

3. Una particella viene lanciata dalla superficie della terra con una velocità pari al doppio della velocità di fuga. Qual è la sua velocità quando essa è molto lontana dalla terra?

4. Si deve lanciare dalla terra una sonda spaziale in modo che abbia la velocità di $50\,\frac{km}{s}$ quando è molto lontana dalla terra. Che velocità deve avere la sonda sulla superficie della Terra?

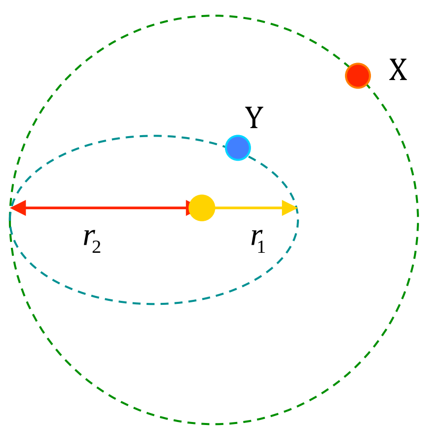
5. Si dimostri che l'equazione $U = GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right)$ può essere scritta nella forma $U = mgR_T\left(1 - \frac{R_T}{r}\right)$, dove g è l'accelerazione di gravità alla superficie della Terra.

6. Un oggetto inizialmente fermo viene lasciato cadere da una quota $h = 4\cdot 10^{6}\,m$ sopra la superficie terrestre. Se non ci fosse la resistenza dell'aria, quale sarebbe la sua velocità nel momento in cui colpisce la Terra.

7. Si calcoli l'energia necessaria per allontanare una massa di 1 kg dalla terra con la velocità di fuga. Si converta questa energia in kilowattora. Se si può produrre energia al costo di 100 lire/kilowattora, qual è il costo minimo per mandare un astronauta di 80 kg fuori dal campo gravitazionale della terra?

8. Sapendo che la massa di Marte è $0{,}642\cdot 10^{24}\,Kg$ ed il raggio misura $3{,}38\cdot 10^{6}\,m$, si calcoli l'accelerazione di gravità sulla superficie di Marte.

9. Si calcoli il rapporto tra la massima e la minima velocità di Urano, sapendo che la sua eccentricità vale 0,047.
10. Il pianeta X impiega due anni per ruotare attorno alla propria stella lungo un'orbita circolare, il cui raggio è uguale alla distanza all'afelio di un pianeta Y, che per ruotare attorno alla medesima stella impiega un anno. Sapendo che tale distanza è uguale a 200 Gm, si calcoli (a) la distanza del pianeta Y dalla stella al perielio; (b) le velocità del pianeta Y all'afelio ed al perielio.



SOLUZIONI

1. La legge della gravitazione universale e la seconda legge di Newton ci forniranno la soluzione del problema: $\frac{GM_S M_T}{d^2} = M_T a = M_T \frac{v^2}{d} = M_T \frac{(2\pi d)^2}{T^2 d} \Rightarrow M_S = \frac{4\pi^2 d^3}{GT^2} = 2{,}0 \cdot 10^{30} kg$
.
2. Per la terza legge di Keplero, $\frac{d_{TS}^3}{T_T^2} = \frac{d_{MS}^3}{T_M^2} \Rightarrow T_M^2 = \frac{(c\Delta t)^3}{d_{TS}^3} T_T^2 \Rightarrow T_M \approx 1{,}97a$.

3. Si applica il principio di conservazione dell'energia meccanica con l'espressione dell'energia potenziale gravitazionale data da $U = GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right)$ (lavoro compiuto conto le forze del campo per portare la massa *m* dalla superficie della terra ad un punto distante *r* dal centro della terra stessa). Di conseguenza: $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{\infty}\right)$. Ora, $\frac{GM_T}{R_T^2} := g$, allora $v_f = \sqrt{v_0^2 - 2gR_T} = 19{,}4\frac{km}{s}$.
   - E' interessante la discussione del termine all'interno della radice, al fine di ricavare i valori della velocità iniziale corrispondenti alle traiettorie seguite dal corpo:
   $$v_0^2 - 2gR_T \begin{cases} < 0 & ellisse \\ = 0 & parabola \\ > 0 & iperbole \end{cases}$$

4. E' una sorta di problema inverso del precedente: $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{\infty}\right)$ da cui segue $v_0 = \sqrt{v_f^2 + 2gR_T} = 51{,}2\frac{km}{s}$.

5. Dalla relazione $\frac{GM_T}{R_T^2} := g$ segue $U = GM_T m\frac{1}{R_T}\left(1 - \frac{R_T}{r}\right) = \frac{GM_T mR_T}{R_T^2}\left(1 - \frac{R_T}{r}\right) = mgR_T\left(1 - \frac{R_T}{r}\right)$, come volevasi dimostrare.

6. $mgR_T\left(1 - \frac{R_T}{R_T + h}\right) = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2ghR_T}{R_T + h}} = 6{,}95\frac{km}{s}$.

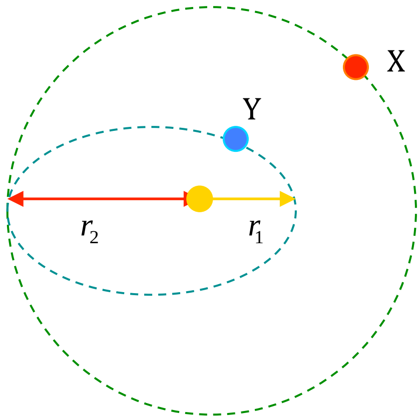
7.
   - La minima energia è quella che permette alla massa di arrivare a distanza infinita dalla terra con velocità prossima a zero. Si applica il principio di conservazione dell'energia meccanica: $mgR_T\left(1 - \frac{R_T}{R_T}\right) + \frac{mv^2}{2} = mgR_T\left(1 - \frac{R_T}{\infty}\right) + \frac{m0^2}{2} \Rightarrow E = E_{c,i} = mgR_T = 6{,}3 \cdot 10^7 J$.
   - L'energia in kilowattora (potenza) è: $P = \frac{E}{t} = \frac{6{,}3 \cdot 10^7 J}{3600s} = 17{,}5kW$.

- Il costo minimo è dato dalla relazione $P = \frac{E}{t} = \frac{6,3 \cdot 10^7 .80J}{3600s} \cdot 100 lire = 140.000 lire$.

8. Per la legge di gravitazione universale risulta, sulla superficie di Marte, $\frac{GM_M m}{R_M^2} = mg_M \Rightarrow g_M = \frac{GM_M}{R_M^2} = 3,75 \frac{m}{s^2}$.

9. $0,047 = e = \frac{c}{a} = \frac{r_A - r_p}{r_A + r_p} = \frac{1 - r_P r_A^{-1}}{1 + r_P r_A^{-1}} \Rightarrow r_P r_A^{-1} = \frac{1-e}{1+e} = 0,91 \Rightarrow \frac{v_P}{v_A} = \frac{1}{r_P r_A^{-1}} = 1,10$

10.



- Indicate con r_1 e con r_2 rispettivamente le distanze del pianeta Y dalla propria stella al perielio e all'afelio, si ha che $d_{YS} = \frac{r_1 + r_2}{2}$ (semiasse maggiore) e $d_{XS} = r_2$. Per la III legge di Keplero risulta:
$$\frac{d_{XS}^3}{T_X^2} = \frac{d_{YS}^3}{T_Y^2} \Rightarrow \frac{r_2^3}{T_X^2} = \frac{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^3}{\left(\frac{T_X}{2}\right)^2} \Rightarrow r_2^3 = \frac{(r_1 + r_2)^3}{2} \Rightarrow r_1 = \left(\sqrt[3]{2} - 1\right) r_2 \approx 50 Gm.$$
- Per calcolare la velocità del pianeta nei due punti dati ci serviamo della II legge di Keplero, riferita all'intero periodo e ad un intervallo di tempo "piccolo" intorno al passaggio del pianeta dai due punti dati:
$$\frac{A}{T_Y} = \frac{\pi \frac{r_1 + r_2}{2} \sqrt{r_1 r_2}}{T_Y} = \frac{r_i \cdot r_i \Delta\theta}{2\Delta t} = \frac{r_i v_i}{2} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{\pi (r_1 + r_2)\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 T_Y} \approx 5,0 \cdot 10^4 \frac{m}{s} \\ v_2 = \frac{\pi (r_1 + r_2)\sqrt{r_1 r_2}}{r_2 T_Y} \approx 1,3 \cdot 10^4 \frac{m}{s} \end{cases}.$$