CAPITOLO 7
DINAMICA ROTAZIONALE

7.1 Le grandezze della cinematica rotazionale

Abbiamo già avuto modo di introdurre i concetti di velocità *angolare* e di velocità *tangenziale*. Queste due velocità sono legate tra loro dalla relazione:

$$v = \omega \cdot r.$$

Se il moto è circolare uniforme la velocità angolare è costante, se è uniformemente accelerato valgono se seguenti leggi orarie:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2;$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha t;$$
$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta.$$

E' evidente l'analogia con le leggi orarie del moto rettilineo uniformemente accelerato: al posto dell'accelerazione lineare *a* si trova l'accelerazione angolare α. L'accelerazione angolare e l'accelerazione tangenziale si corrispondono in virtù della relazione:

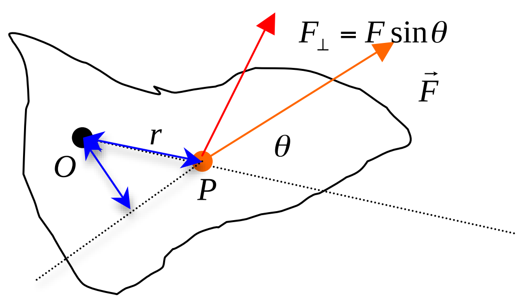
$$a = \alpha \cdot r.$$

7.2 Il momento di una forza

La grandezza fisica responsabile della rotazione di un corpo esteso è il *momento di una forza*, di cui riportiamo per comodità la definizione:

$$M = \pm F r \sin\theta,$$

dove θ è l'angolo tra la direzione della forza e la congiungente il centro di rotazione (di solito è il *centro di massa* del corpo) (O) con il punto di applicazione della forza (*P*), e *r* è la distanza tra questi due punti. Convenzionalmente il segno è positivo se la rotazione avviene in senso *antiorario*, negativo altrimenti. Nella situazione rappresentata in figura, il momento è positivo.



Occorre precisare che il momento di una forza è una grandezza fisica *vettoriale*, la cui direzione è quella *perpendicolare* al piano a cui appartengono la forza e la congiungente il centro di rotazione con il punto di applicazione della forza, mentre il verso è determinato dalla cosiddetta *regola della mano destra*: le dita si chiudono dalla congiungente alla direzione della forza a partire dal punto di applicazione, il verso è determinato dal pollice.

7.3 La seconda legge di Newton "rotazionale"

Come è noto, la seconda legge della dinamica espressa in termini di *variazione* della quantità di moto assume la forma:

$$F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t}.$$

Ricordiamo che in fisica classica la massa *non* dipende dalla velocità; questo ci ha permesso di scrivere l'ultima uguaglianza.

La definizione di momento, insieme al concetto di *corpo rigido*, tale cioè che la distanza tra i suoi punti non cambia durante il moto, permette di determinare la seguente relazione:

$$M_i^{est} = F_i^{est} r_i \sin\theta_i = \frac{\Delta(m_i v_i)}{\Delta t} r_i \sin\theta_i = \frac{\Delta(m_i v_i r_i \sin\theta_i)}{\Delta t},$$

riferita ad ognuna delle particelle puntiformi di cui possiamo pensare composto il corpo rigido.

7.4 Il momento angolare e il momento d'inerzia

Definiamo a questo punto la grandezza fisica *momento angolare* (o momento della quantità di moto):

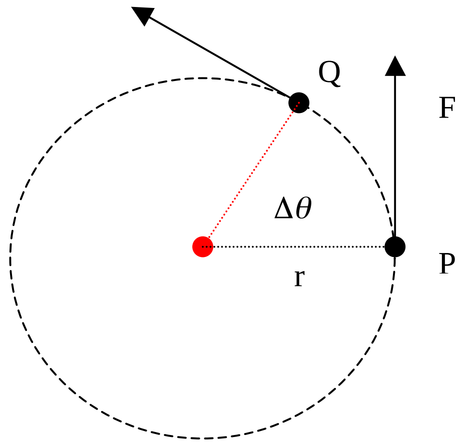
$$L_i := \pm m_i v_i r_i \sin\theta_i \,.$$

Il momento angolare è una grandezza fisica vettoriale, la cui direzione è perpendicolare al piano in cui si trovano, ad ogni istante di tempo, la congiungente il centro di massa con la particella costituente il copro rigido ed il suo vettore velocità, mentre il verso è determinato con la regola della mano destra.

Con questa nuova grandezza è possibile scrivere una versione della seconda legge di Newton "rotazionale" in termini di variazione del momento angolare:

$$\vec{M}_{tot}^{est} = \frac{\Delta\left(\sum \vec{L}_i\right)}{\Delta t}.$$

Di conseguenza, se il momento risultante è nullo, il momento angolare si conserva, come la quantità di moto se era nulla la risultante delle forze.



Proseguendo nella ricerca di analogie tra il moto rotatorio di un corpo rigido ed il moto traslatorio dello stesso, ricordiamo che la massa rappresenta l'*opposizione* da parte del corpo ai *cambiamenti* di velocità. A questo punto ci chiediamo se la massa si oppone *anche* ai cambiamenti di velocità angolare. Cerchiamo di capire come stanno le cose supponendo, per esempio, che la rotazione del corpo rigido avvenga in senso antiorario e che sia dovuta ad una forza che agisce *sempre* perpendicolarmente alla congiungente il centro di rotazione con il punto di applicazione. In questo caso il momento è dato dalla relazione:

$$M = Fr = \frac{\Delta(mvr)}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\omega r^2)}{\Delta t} = mr^2\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = mr^2\alpha.$$

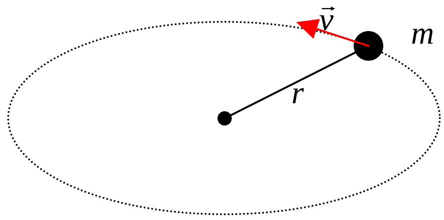
Essendo il corpo rigido, la distanza del punto di applicazione della forza dal centro di rotazione, che abbiamo indicato con *r*, rimane invariata. Di conseguenza è costante la grandezza

$$I = mr^2,$$

che prende il nome di *momento d'inerzia* e rappresenta l'analogo rotazionale del concetto di massa. La seconda legge della dinamica si può quindi esprimere in termini di grandezze tipiche del moto rotatorio come:

$$M = I\alpha\,.$$

Quanto appena detto è corretto nel limite entro il quale le dimensioni del corpo rigido sono piccole rispetto alla sua distanza dal centro di rotazione, come nel caso di un corpo fissato all'estremità di una lunga sbarra rigida, di massa trascurabile rispetto a quella del corpo, che ruota intorno all'estremità libera (o come nel caso di un pianeta che orbita intorno alla propria stella per la forza di gravità):

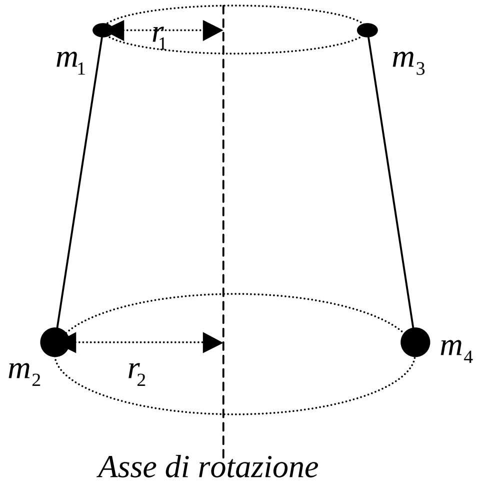


Nel caso generale dobbiamo scomporre il corpo in tante “piccole” parti (piccole rispetto alle dimensioni generali, ma grandi rispetto a quelle molecolari) e considerare il momento d’inerzia come *somma* dei momenti delle varie parti:

$$I = \sum m_i r_i^2 .$$

Come è facile immaginare, il calcolo del momento d’inerzia è in generale complicato, salvo casi particolari come quelli rappresentati da corpi costituiti da un numero finito di masse aventi dimensioni piccole rispetto alla distanza dall’asse di rotazione.

Esempio. Si calcoli il momento d’inerzia del sistema rappresentato in figura.

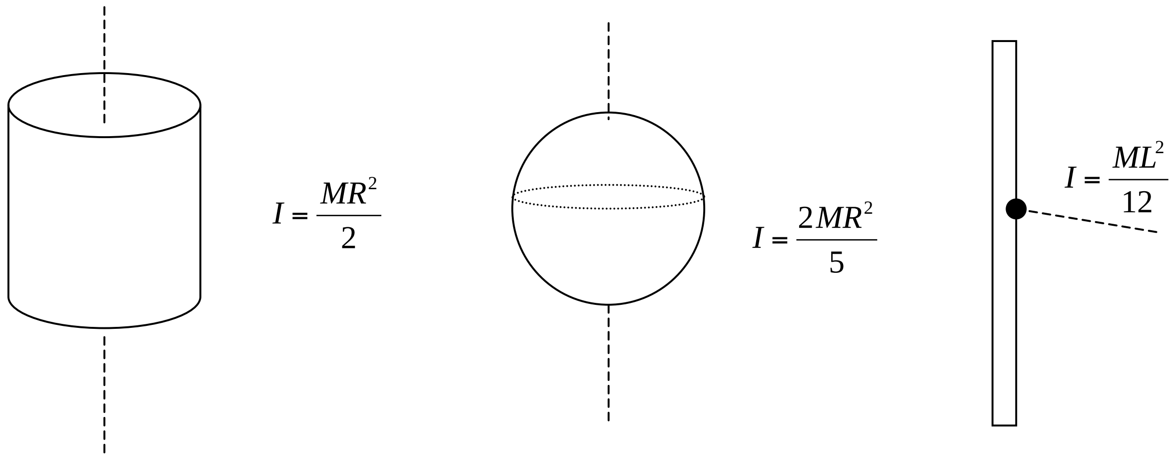


Il momento d’inerzia del sistema di masse rispetto all’asse di rotazione, coincidente con l’altezza del tronco di cono descritto dal sistema durante la rotazione, è:

$$I = \sum m_i r_i^2 = (m_1 + m_3) r_1^2 + (m_2 + m_4) r_2^2 .$$

Esercizio. Quattro masse uguali sono poste nei vertici di un rettangolo. Si calcoli il momento d’inerzia del sistema nei seguenti casi:
a) la rotazione avviene attorno ad un lato corto;
b) la rotazione avviene attorno ad un lato lungo;
c) la rotazione avviene attorno ad un asse parallelo ad uno dei due lati, situato tra due masse;
d) la rotazione avviene attorno ad un asse parallelo ad uno dei due lati, situato esternamente al rettangolo;
e) la rotazione avviene attorno ad un asse perpendicolare al piano del rettangolo passante per il centro del rettangolo;
f) la rotazione avviene attorno ad un asse perpendicolare al piano del rettangolo, passante per un punto interno al rettangolo, diverso dal centro.
g) In riferimento ai casi c) ed f) si detersi la posizione dell’asse di rotazione che rende minimo il momento d’inerzia calcolato.

Abbiamo già detto che, in generale, il calcolo del momento d'inerzia di un corpo rigido è piuttosto complicato; tuttavia esistono delle situazioni "classiche" per le quali sono disponibili i momenti d'inerzia rispetto a determinati assi di rotazione.



Cilindro uniforme *Sfera uniforme* *Asta sottile*

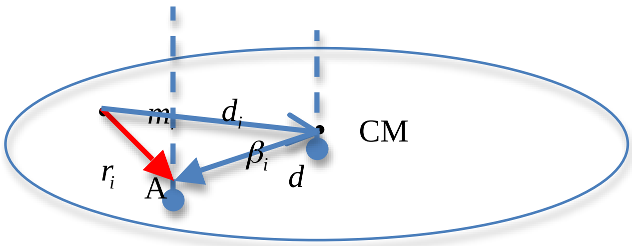
Il teorema di Huygens-Steiner

Nei tre esempi in figura, l'asse di rotazione passa per il centro di massa. E' possibile calcolare il momento d'inerzia anche nel caso in cui la rotazione avviene attorno ad un asse *parallelo* a quello rappresentato in figura.

Il risultato che ci permette di eseguire il calcolo è rappresentato dal cosiddetto *teorema di Steiner:* se d è la distanza tra il centro di massa (CM) ed il centro di rotazione (A), il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro di rotazione, parallelo all'asse passante per il centro di massa è dato dalla relazione:

$$I = I_c + Md^2.$$

Dimostrazione. Consideriamo il corpo rigido in figura:



Il momento d'inerzia rispetto all'asse verticale passante per A, $I = \sum m_i r_i^2$, può essere scritto, applicando il teorema di Carnot, nella forma

$I = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i \left(d_i^2 + d^2 - 2d_i d\cos\beta_i\right) = I_C + Md^2 + 0$, dove abbiamo riconosciuto nell'espressione $-2d\sum m_i \left(d_i \cos\beta_i\right) = -2d(mx_{CM}) = -2d \cdot 0 = 0$ l'ascissa del centro di massa, riferita ad un sistema centrato nel centro di massa stesso.

Ad esempio, se incardiniamo un'asta sottile ad una estremità, il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il cardine e perpendicolare al piano in cui ruota l'asta sottile è: $I = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2}{3}$.

7.5 L'energia cinetica rotazionale e il teorema dell'energia cinetica

Durante la rotazione del corpo attorno ad un asse fisso passante per il centro di massa, il punto di applicazione della forza si sposta sulla circonferenza percorrendo un tratto $\Delta s = r\Delta\theta$. Di conseguenza il lavoro fatto dalla forza è:

$$\Delta L = F\Delta s = Fr\Delta\theta = M\Delta\theta,$$

dove con L abbiamo indicato il lavoro.

Se, al solito, supponiamo la forza di intensità costante, allora

$$\Delta L = M\Delta\theta = I\alpha\Delta\theta = I\alpha\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}\right) = \Delta E_c .$$

Questa relazione rappresenta il *teorema dell'energia cinetica*, dove quest'ultima è data dall'espressione:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 .$$

7.6 Il moto di rotolamento

Dal moto di rotolamento di una ruota omogenea di raggio *r* si può osservare che, quando questa è ruotata di un angolo $\Delta\theta$, il punto di contatto con la strada si è spostato di un tratto

$$\Delta s = r\Delta\theta .$$

Di conseguenza, anche il centro della ruota si è spostato di un tratto $\Delta s = r\Delta\theta$. Se la ruota *rotola senza strisciare*, il punto di contatto è istantaneamente fermo e la relazione tra la velocità del centro di massa e la velocità angolare fornisce la cosiddetta *condizione di rotolamento puro:*

$$v_{CM} = \omega r .$$

Questa condizione si realizza se possiamo trascurare *l'attrito volvente* (altrimenti si formerebbe una coppia di forze che si oppone al rotolamento); l'accelerazione lineare e l'accelerazione angolare sono correlate dalla

$$a_{CM} = \alpha r .$$

La ruota in ogni istante rotola intorno all'*asse istantaneo di rotazione*, parallelo alla superficie di contatto e passante per CM. Il punto di contatto è istantaneamente fermo perché soggetto a due tipi di velocità: quella "in avanti" dell'asse della ruota ($v = v_{cm} = \omega r$) e quella di rotazione attorno al centro ($v = \omega r$), nella direzione *opposta* a quella del centro di massa.

La forza che genera il momento necessario per la rotazione è la forza di *attrito radente* tra la ruota e la strada, che permette di evitare lo slittamento della ruota. A differenza di quanto avviene per l'attrito dinamico, quello statico non dissipa energia sotto forma di calore.

L'energia meccanica di un moto di rotolamento puro su un piano orizzontale è tutta di tipo cinetico di rotazione *rispetto all'asse passante per il centro di massa e parallelo alla superficie di contatto*, e di traslazione del centro di massa.

Per il teorema di Huygens-Steiner $I_P = I_{CM} + Mr^2$

$$E_c = \frac{1}{2}I_P\omega^2 = \frac{1}{2}\left(I_{cm} + Mr^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 .$$

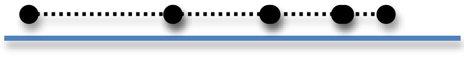
Da quest'ultima relazione appare chiaro come il moto di rotolamento puro possa essere di fatto scomposto in due moti:

1. di rotazione rispetto al centro della ruota,
2. di traslazione del centro di massa.

L'arresto di corpi in moto traslatorio e rotatorio

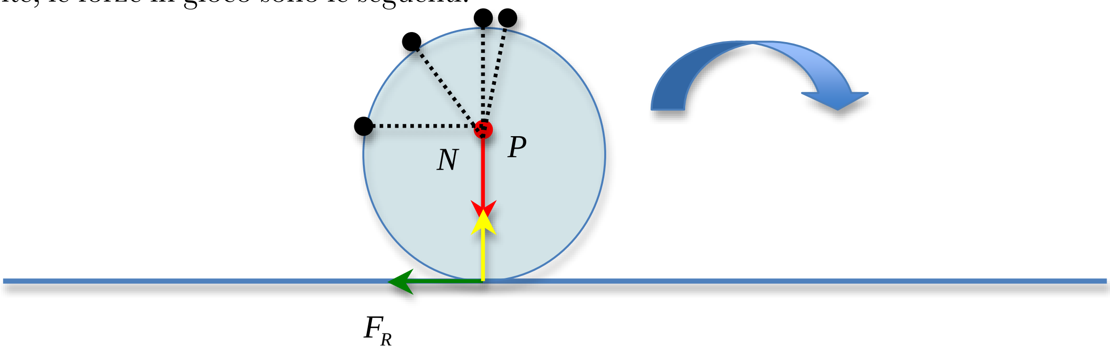
Abbiamo visto che un corpo in moto rettilineo si ferma se soggetto alla forza d'attrito dinamico. Supponendo questa forza costante, durante la sua azione il moto decelera uniformemente in base alla seconda legge della dinamica:

$$-\vec{F}_d = m\vec{a} .$$



Le relazioni cinematiche tra le grandezze coinvolte permettono, ad esempio, di caratterizzare questo tipo di moto in termini di spazio d'arresto $-v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{mv_0^2}{2F_d}$.

Un'interessante analogia ci viene presentata quando analizziamo il moto di una ruota in moto roto-traslatorio soggetto alla forza d'attrito volvente. Innanzitutto ricordiamo che la forza d'attrito radente è sufficiente ad equilibrare lo slittamento e a garantire, di conseguenza, la condizione di rotolamento puro: $v = \omega r$, mentre l'attrito volvente si manifesta attraverso l'azione di una *coppia* di forze, in quanto si oppone al (solo) moto di rotolamento. Nell'ipotesi in cui l'attrito volvente è costante, le forze in gioco sono le seguenti:



Problema

Una palla da biliardo di massa $m = 0,2kg$ rotola sul piano orizzontale del biliardo. In un certo istante il suo centro si muove con velocità costante di modulo $v_0 = 4ms^{-1}$, poi, dopo che la palla ha fatto esattamente 8 giri, si ferma. Si calcoli il momento della coppia di forze d'attrito volvente M_V.

Soluzione

Indicata con F_t la forza d'attrito radente (componente tangenziale della reazione vincolare) e con F_n la forza normale (componente normale della reazione vincolare), le leggi della dinamica (traslazionale e rotazionale *rispetto al punto di contatto della palla col tavolo*) sono: $\begin{matrix} ma_G = -F_t \\ \left(I_G + mr^2\right)\alpha = -M_V \end{matrix}$,

dove *r* indica il raggio della palla, il cui momento d'inerzia rispetto al centro di massa è $I_G = \dfrac{2}{5}mr^2$.

La condizione di rotolamento puro permette di sfruttare la relazione cinematica $\Delta x = r\Delta\theta$, da cui seguono $v = \omega r$ e $a = \alpha r$. Ora, supponendo l'attrito volvente costante, siamo in presenza di un moto circolare uniformemente decelerato, per cui

$-v_0^2 = 2a_G\Delta x = 2a_G r\Delta\theta = 2\alpha r^2\Delta\theta \Rightarrow \alpha = -\dfrac{v_0^2}{2r^2\Delta\theta}$. In definitiva,

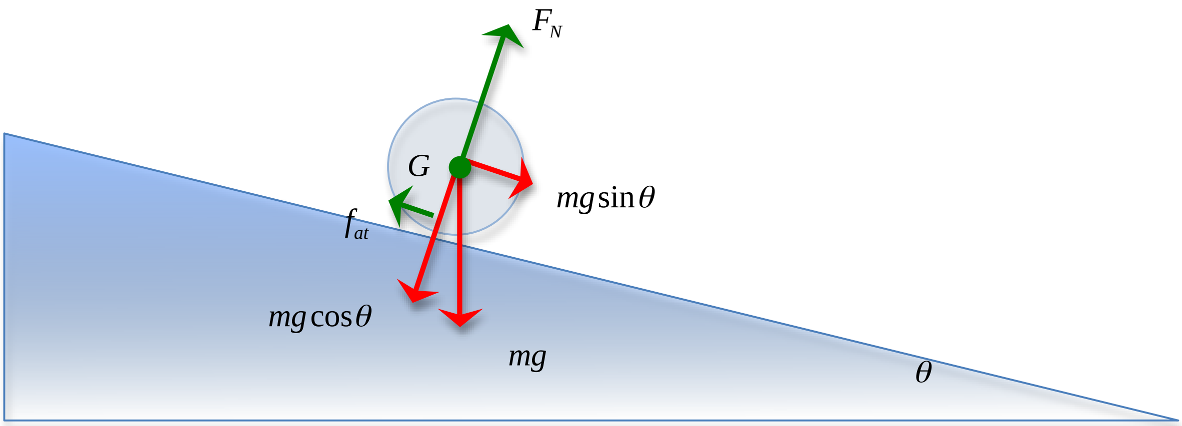
$\left(\dfrac{2}{5}mr^2 + mr^2\right)\left(-\dfrac{v_0^2}{2r^2\Delta\theta}\right) = -M_V \Rightarrow M_V = \dfrac{7mv_0^2}{10\Delta\theta}$.

Osservazione

La seconda legge della dinamica traslazionale non ha giocato alcun ruolo, perché la forza d'attrito radente, nel vincolo di rotolamento puro, ha la funzione di *evitare* lo slittamento del punto di contatto (istantaneamente fermo). Le cause dell'arresto sono da ricercarsi nella sola coppia d'attrito volvente.

Il rotolamento lungo un piano inclinato

Vogliamo studiare il moto di un corpo che rotola lungo un piano inclinato. In particolare, vogliamo condurre questo studio utilizzando le leggi della dinamica.



Determiniamo l'accelerazione del centro di massa *G* utilizzando la seconda legge della dinamica, lineare e rotazionale (il momento delle forze esterne è calcolato rispetto a *G*, così come il momento d'inerzia), entro il limite $f_{at} \le f_{at,\max} := \mu F_N = \mu mg\cos\theta$ che garantisce il rotolamento:

$$\begin{cases} ma_G = mg\sin\theta - f_{at} \\ f_{at}R = I\alpha = I \\ a_G = R\alpha \end{cases} \Rightarrow a_G = \frac{mg\sin\theta}{m + I/R^2}$$

. Si giunge allo stesso risultato utilizzando il principio di conservazione dell'energia e la relazione tra grandezze cinematiche del moto rettilineo uniformemente accelerato. Infatti, se *l* è la distanza lineare percorsa dal centro di massa, alla diminuzione di energia potenziale $mgl\sin\theta$, corrisponde un aumento di energia cinetica $\frac{1}{2}\left(I + mR^2\right)\omega^2$. Con le relazioni $v^2 = 2la_G$ e $v = \omega R$ otteniamo:

$$mgl\sin\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{I}{R^2} + m\right)\omega^2 R^2 \Rightarrow mg\frac{v^2}{2a_G}\sin\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{I}{R^2} + m\right)v^2 \Rightarrow a_G = \frac{mg\sin\theta}{\left(\frac{I}{R^2} + m\right)}.$$

In riferimento alla figura sopra, se il piano inclinato viene accelerato verso destra uniformemente con accelerazione *a*, il corpo sperimenta una forza apparente tale che:

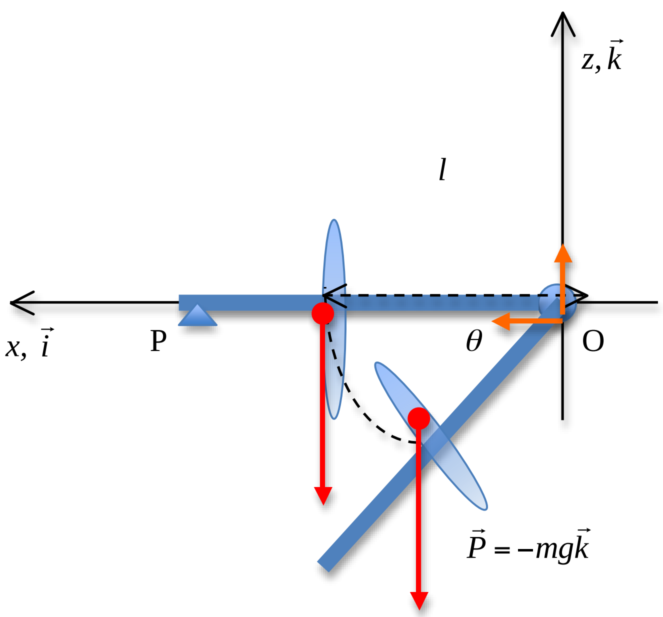
$$\begin{cases} ma_G = mg\sin\theta - f_{at} - ma\cos\theta \\ f_{at}R = I\alpha \\ a_G = R\alpha \end{cases} \Rightarrow a_G = \frac{mg\sin\theta - ma\cos\theta}{m + I/R^2}$$

; si avrà quindi equilibrio se $a = g\tan\theta$

7.7 Il moto giroscopico

Esaminiamo adesso un tipo di moto rotatorio più complicato: quello in cui l'asse di rotazione cambia continuamente direzione. Un moto di questo tipo si dice *giroscopico*. Un giroscopio è un dispositivo libero di ruotare attorno ad un asse, detto *asse giroscopico*. Esempi di giroscopi sono la trottola, una comune ruota di bicicletta in determinate condizioni, ma anche, vedremo in seguito, il nostro pianeta.

Per capire la dinamica del moto giroscopico ci serviamo di una ruota di bicicletta con un asse passante per il mozzo, perpendicolare quindi al piano del cerchio della ruota. L'asse è mantenuto inizialmente parallelo al suolo da due sostegni, essendo rigidamente collegato ad uno di questi mediante una "cerniera sferica", e semplicemente appoggiato all'altro.



Se togliamo l'appoggio in P, il composto ruota-asse inizia a ruotare attorno all'asse *y* (orientato nel verso uscente dalla pagina) per effetto del momento della forza peso che, calcolato rispetto al vincolo sferico O, è:

$$\vec{M} = \left(l\cos\theta\vec{i} - l\sin\theta\vec{k}\right)\wedge\left(-mg\vec{k}\right) = mgl\cos\theta\vec{j}\ .$$

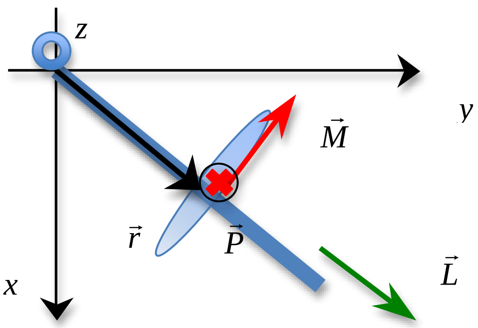
Supponiamo adesso di porre la ruota in rapida rotazione, prima che venga rimosso il sostegno in P. A questa rotazione è associato un momento angolare diretto concordemente con l'asse di rotazione (che mantiene la sua direzione costante, finché non viene rimosso il sostegno in P):

$$\vec{L} = I\omega\vec{i}\ .$$

Un osservatore disposto verticalmente lungo l'asse *z* vede qualcosa di inaspettato: un *moto circolare*, nel piano orizzontale *x-y*, dell'asse attorno a cui la ruota è in rotazione! Infatti, possiamo considerare il momento della forza di gravità come la *velocità di variazione* del momento angolare $\vec{L}$:

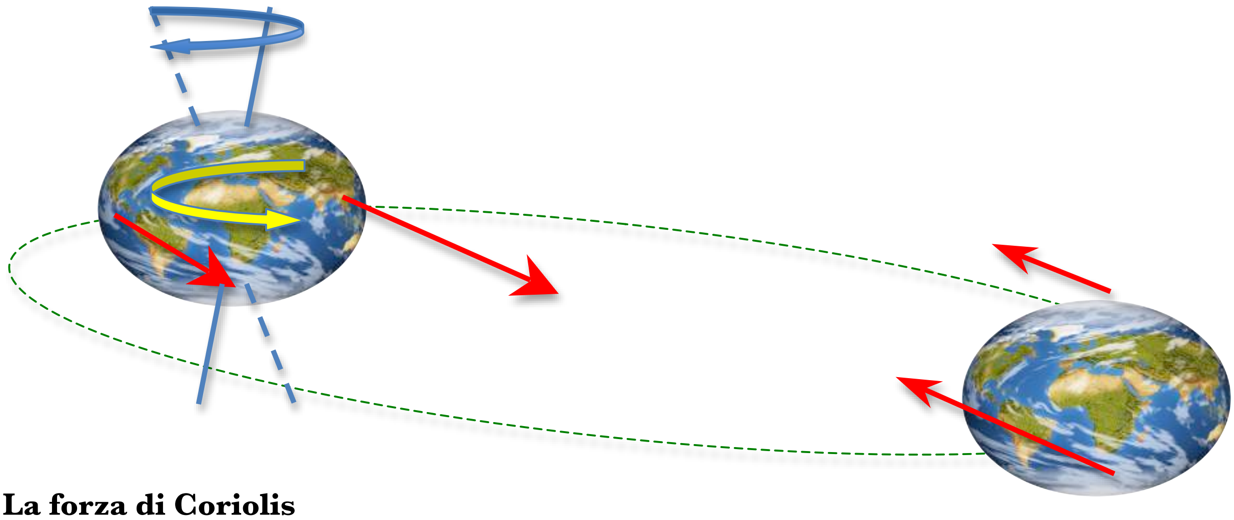
$$\vec{M} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}\ .$$

Ora, poiché la forza peso mantiene costante la propria direzione (verticale), il momento ad essa riferito, calcolato rispetto al vincolo in O, si mantiene nel piano orizzontale. Questo significa che non c'è caduta verso il basso dell'asse di rotazione, ma soltanto un moto rotatorio attorno all'asse *z*, sul piano *x-y*. Per questo si dice che $\vec{L}$ "tenta di seguire" $\vec{M}$, descrivendo una precessione giroscopica uniforme.

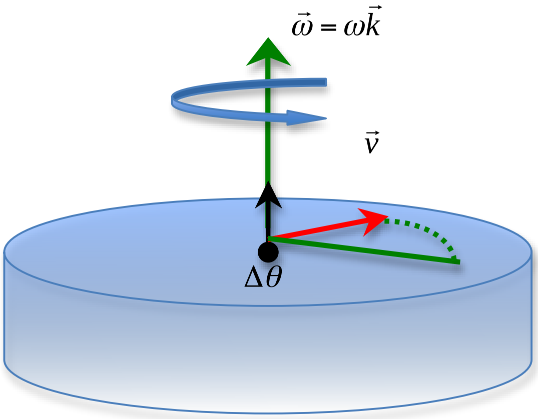


Il giroscopio "terra"

La forma del nostro pianeta è considerata approssimativamente sferica, ma in realtà non è così, e questo fatto ha delle conseguenze importanti sul suo moto intorno al Sole. Infatti, la Terra presenta dei "rigonfiamenti" all'equatore (uno scostamento di circa 21 km dal raggio di una sfera perfetta), dovuti alla sua rotazione attorno al proprio asse che, come sappiamo, è inclinato di circa 23° rispetto al piano dell'orbita. L'attrazione gravitazionale del Sole esercita un momento rispetto al centro di questi rigonfiamenti, cui è associata una "lenta" rotazione dell'asse terrestre da est verso ovest (la rotazione della terra avviene in senso opposto, da ovest verso est). Poiché la rotazione completa dell'asse terrestre, fenomeno noto come *precessione degli equinozi*, avviene in un tempo di circa 26.000 anni, al momento in cui la terra si trova dalla parte opposta rispetto al Sole, i rigonfiamenti non si sono mossi. Questo comporta che sul rigonfiamento più vicino al Sole, il momento associato all'attrazione (più intensa), non muta orientamento. Nella figura seguente le forze agenti sui rigonfiamenti sono indicate dai vettori in rosso.



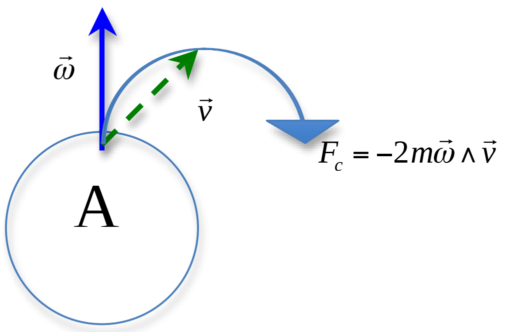
La forza di Coriolis
Si tratta di una forza "apparente", sperimentata da un corpo che si muove rispetto ad un sistema di riferimento rotante. La situazione può essere schematizzata come nella figura seguente, dove un corpo di massa *m* si sposta lungo la direzione radiale della piattaforma rotante, partendo dal centro della stessa, muovendosi con velocità $\vec{v}$ rispetto ad un sistema di riferimento fisso.



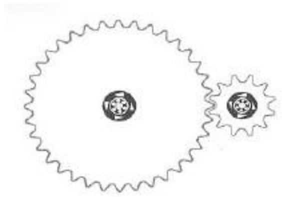
Durante l'intervallo di tempo Δt, la piattaforma ha ruotato di un angolo $\Delta\theta$, ed il corpo ha percorso una distanza lineare pari a $r = v\Delta t$ che, per effetto della rotazione in senso antiorario della piattaforma, viene incurvata rispetto alla piattaforma stessa di un tratto $\Delta s = r\Delta\theta = r\omega\Delta t = \omega v(\Delta t)^2$. Per confronto con lo spostamento di un corpo in moto rettilineo uniformemente accelerato (plausibile, immaginando che per piccoli intervalli di tempo l'incurvamento della traiettoria possa essere approssimato con uno spostamento rettilineo), $\Delta s = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$, otteniamo l'espressione della cosiddetta *accelerazione di Coriolis*: $a_c = 2\omega v$. La *forza di Coriolis* quindi, agisce lungo una direzione perpendicolare al piano formato dai vettori $\vec{\omega}$ e $\vec{v}$:

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}\,.$$

L'azione di questa forza condiziona la circolazione dei venti, nei due emisferi terrestri, in prossimità delle zone di alta e di bassa pressione. Ricordando che le masse d'aria si spostano dalle regioni ad alta pressione a quelle a bassa pressione, nell'emisfero settentrionale si ha la seguente circolazione dei venti:



Ingranaggi

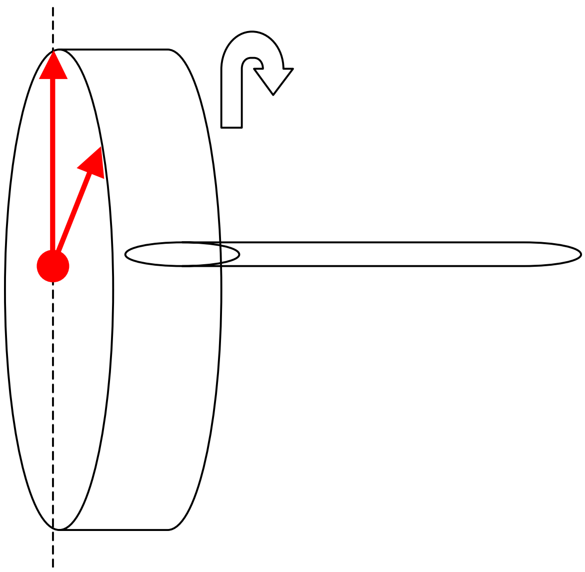


Siano rispettivamente R, r e M, m i raggi e le masse della ruota dentata grande e di quella piccola. Il meccanismo è posto in movimento da un momento τ applicato alla ruota piccola. Indicati con φ, Φ gli angoli che misurano le rotazioni della ruota piccola e di quella grande, il vincolo che impedisce lo slittamento garantisce la condizione $r\varphi = R\Phi$. Supponiamo che la ruota grande compia una rotazione in senso antiorario, e quella piccola in senso orario. Nel punto di contatto le due ruote agiscono una sull'altra con una forza tangenziale T. Indicate con A, α le accelerazioni angolare della ruota grande e di quella piccola, applichiamo la seconda legge della dinamica (rotazionale) alle due ruote dentate:

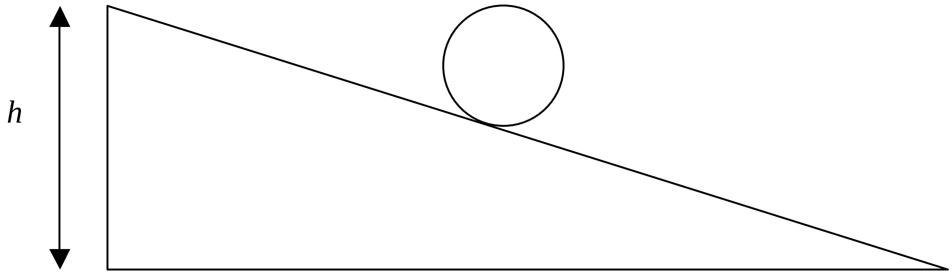
$$\begin{cases} \tau - Tr = \frac{1}{2} mr^2 \alpha \\ TR = \frac{1}{2} MR^2 \mathrm{A} \\ r\alpha = R\mathrm{A} \end{cases} \Rightarrow \tau - Tr = \frac{1}{2} mr^2 \left(\frac{2T}{Mr} \right) \Rightarrow T = \frac{\tau m}{r(m+M)}.$$

Problemi

1. Su una ruota montata su un asse orizzontale è dipinto un segmento radiale che viene usato per determinare la sua posizione angolare rispetto alla verticale. La ruota ha un'accelerazione angolare costante. All'istante $t = 0$, il segmento è orientato verticalmente verso l'alto. All'istante $t = 1s$, il segmento è di nuovo verticale avendo compiuto un giro. All'istante $t = 2s$, il segmento è diretto verticalmente verso il basso, avendo compiuto un giro e mezzo a partire da $t = 1s$. (a) Qual è l'accelerazione angolare della ruota? (b) Qual era la sua velocità angolare all'istante $t = 0$?

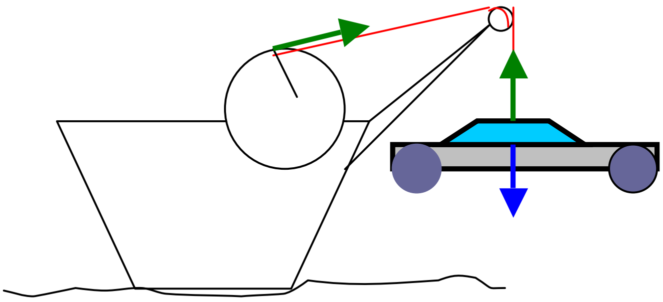


2. Un cerchio parte dalla quota *h* e rotola senza strisciare scendendo su un piano inclinato. Si trovi la velocità del cerchio quando giunge in fondo alla discesa. Si confronti il tempo che impiega a scendere con quello che impiegherebbero un cilindro uniforme ed una sfera uniforme.

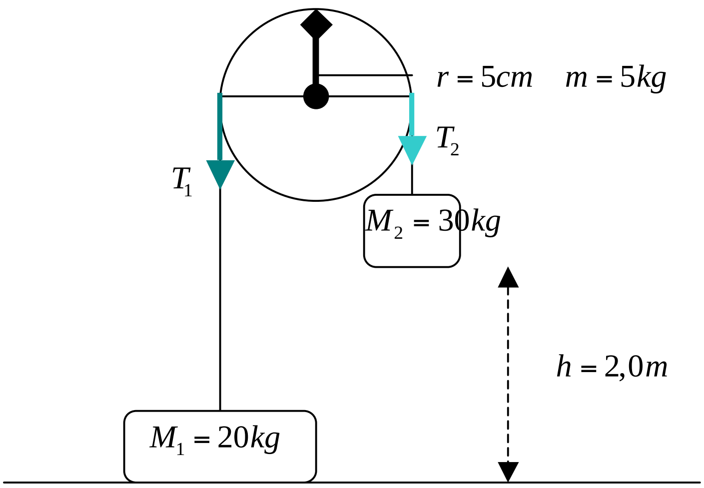


3. Un volano è costituito da un disco uniforme avente la massa di 100 Kg e il raggio di 0,3 m. Esso ruota con la velocità angolare di 1200 giri/min. (a) al volano si applica una forza tangenziale costante. Quanto lavoro si deve compiere per fermarlo? (b) Se il volano viene fermato in due minuti, qual è il momento prodotto dalla forza? (c) Qual è il modulo della forza? (d) Quanti giri compie il volano in questi due minuti?

4. Un'automobile di 1,2 Mg viene scaricata da una nave mediante un argano, come mostrato in figura. All'improvviso si rompe il ruotismo dell'argano e l'automobile, inizialmente ferma a 5,0 m dall'acqua, cade. Il momento d'inerzia del tamburo dell'argano è $310 kg \cdot m^2$ ed il suo raggio è 0,8 m. Si trovi la velocità dell'automobile quando tocca l'acqua.

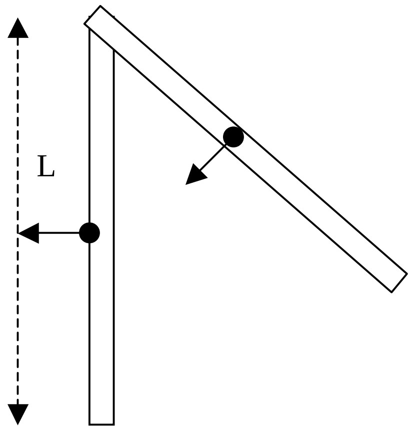


5. Il sistema in figura, inizialmente fermo, viene lasciato libero di muoversi. Il corpo di 30 kg è a 2 m dal suolo. La carrucola è un disco uniforme di raggio 10 cm e la massa di 5 kg. Si trovi la velocità del corpo di 30 kg subito prima che tocchi il suolo.



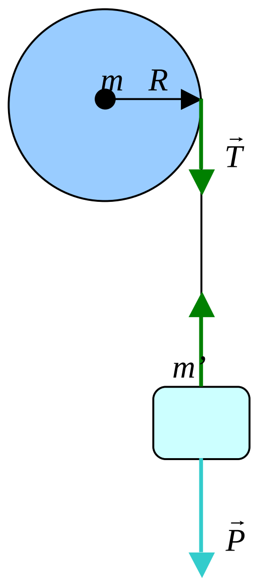
6. Una piattaforma circolare è montata su un asse verticale privo d'attrito; il suo raggio è $r = 3m$ ed il suo momento d'inerzia è $I = 200kg \cdot m^2$; essa è inizialmente ferma. Un uomo di 80kg sta in piedi sul bordo della piattaforma e comincia a camminare lungo il bordo con la velocità di $1{,}0\frac{m}{s}$ *rispetto al suolo*. (a) Qual è la velocità angolare della piattaforma? (b) Quando l'uomo ha compiuto 1 giro sulla piattaforma in modo da trovarsi su di essa nella posizione di partenza, qual è il suo spostamento angolare rispetto al suolo?

7. Un'asta lunga 1m è imperniata ad un'estremità in modo da poter oscillare liberamente in un piano verticale. Essa è inizialmente ferma in posizione orizzontale e viene lasciata libera di muoversi. Qual è la sua velocità angolare quando è in posizione verticale?

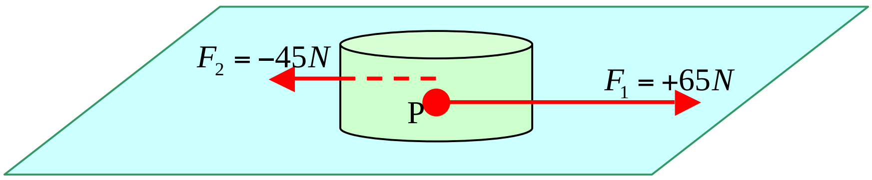


8. Una ruota, montata su un asse che non è privo d'attrito, è inizialmente ferma. A essa si applica un momento di forza esterno costante di $50N \cdot m$ per 20 s. Al termine dei 20 s la ruota ha la velocità angolare di 600 giri/min. A questo punto si elimina il momento di forza esterno e la ruota si ferma dopo altri 120 s. (a) Qual è il momento d'inerzia della ruota? (b) Qual è il momento dovuto alla forza d'attrito, supponendo che sia costante?

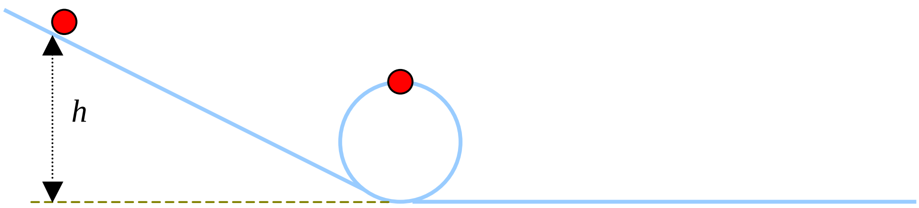
9. Una sfera uniforme di massa *m* e raggio *R* è libera di ruotare attorno a un asse orizzontale passante per il suo centro. Attorno alla sfera è avvolta una corda la cui estremità è attaccata a un corpo di massa *m'*. Si trovi l'accelerazione del corpo e la tensione della corda.



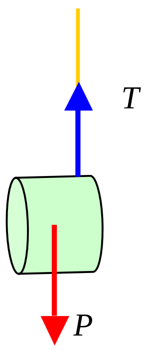
10. Un cilindro uniforme di 120 kg, avente il raggio di 0,5 m, è poggiato con una base su una superficie levigata di ghiaccio. Due pattinatori avvolgono corde attorno al disco nello stesso senso. All'istante $t = 0$, i pattinatori si allontanano tirando le loro corde, esercitando forze costanti, rispettivamente di 45 N e 65 N. Si descriva il moto del cilindro, dandone l'accelerazione, la velocità e la posizione del centro di massa in funzione del tempo e l'accelerazione angolare e la velocità angolare, anch'esse in funzione del tempo.



11. Una palla uniforme di raggio r rotola senza strisciare lungo la pista del "cerchio della morte" di raggio R. Essa è inizialmente ferma alla quota h. Se si vuole che la palla non si scosti dalla pista nel punto più alto del cerchio, qual è il minimo valore che deve avere h?



12. Una corda è avvolta attorno ad un cilindro uniforme di massa m e raggio R. La corda è tenuta fissa e il cilindro cade verticalmente. (a) Si dimostri che l'accelerazione del cilindro è diretta verso il basso ed ha come modulo $a = \frac{2}{3}g$. (b) Si trovi la tensione T nella corda.



13. Nel problema precedente si sostituisca il cilindro con una sfera di raggio R.

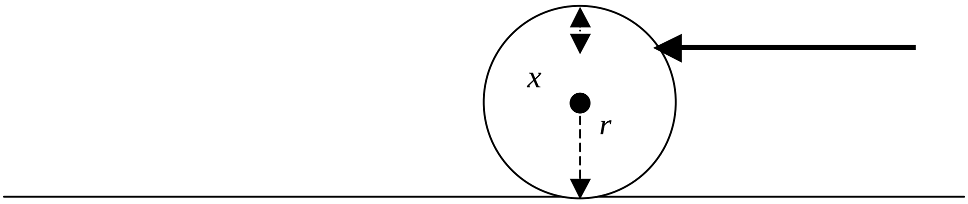
14. Un cilindro di raggio R si trova in quiete nel punto più alto di un piano inclinato, alla cui estremità è fissato un filo inestendibile avvolto intorno al cilindro. Il cilindro inizia a rotolare senza strisciare sul piano inclinato. a) Si calcoli la velocità con cui arriva alla base del piano inclinato. b) Si calcoli la quota a cui arriva il cilindro, rispetto al tavolo.

15. Un cilindro di massa 10 kg è fissato ad una parete verticale nel proprio centro ed è libero di ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il centro. Attorno al cilindro è avvolto un filo alla cui estremità libera è fissata una massa di 2 kg. Dopo che questa è scesa di 50 cm, si

calcoli: a) La velocità lineare della massa; b) L'accelerazione lineare della massa; c) La tensione del filo.

16. Una sfera di massa *m* e raggio *r* rotola senza strisciare su un piano inclinato, partendo da una quota *h*. Una volta arrivata alla base del piano, la massa prosegue nel suo moto roto-traslatorio fermandosi in un tempo *t*. Si supponga la forza d'attrito *volvente* costante e se ne calcoli il momento.

17. Una palla da biliardo, di massa *m* e raggio *r*, viene colpita in un punto, la cui altezza dal tavolo è maggiore del raggio della pallina, con una forza diretta orizzontalmente al tavolo, da destra verso sinistra. Si descriva qualitativamente il moto della pallina in seguito al colpo, e si dica a quale altezza dal centro si deve colpire la palla affinché inizi a muoversi di moto di rotolamento puro. (*suggerimento: si ricordi la relazione tra velocità del centro di massa e velocità angolare nel moto di rotolamento puro e la si esprima in termini di accelerazione angolare e lineare...)*



Soluzioni

1.

- Dalle formule del moto circolare uniformemente accelerato risulta:

$$\Delta\theta = \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 \Rightarrow 2\pi = \omega_0 \cdot 1 + \frac{1}{2}\alpha \cdot 1^2$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha \cdot 1$$

$$\Delta\theta = \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 \Rightarrow 3\pi = \omega_1 \cdot 1 + \frac{1}{2}\alpha \cdot 1^2 = (\omega_0 + \alpha \cdot 1) \cdot 1 + \frac{1}{2}\alpha$$

Mettiamo a sistema la prima e la terza equazione:

$$\begin{cases} 2\pi = \omega_0 + \dfrac{\alpha}{2} \\ 3\pi = \omega_0 + \dfrac{3\alpha}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pi \dfrac{rad}{s^2} = 3{,}14 \dfrac{rad}{s^2} \\ \omega_0 = \dfrac{3}{2}\pi \dfrac{rad}{s} = 4{,}71 \dfrac{rad}{s} \end{cases}.$$

2.

- Si applica il principio di conservazione dell'energia meccanica per corpi in moto di rotolamento puro:

(a) $mgh = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{gh}$ (velocità del cerchio).

(b) $mgh = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$ (velocità del cilindro).

(b) $mgh = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{7}{4}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{7}gh}$ (velocità della sfera).

3.

- (a) Il lavoro necessario per fermare il volano è uguale alla variazione dell'energia cinetica: $L = \Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}I\omega^2 = -\frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\omega^2 = -\frac{100 \cdot 0{,}3^2 \cdot (40\pi)^2}{4} = -3{,}55 \cdot 10^4\, J$.

- (b) Il momento è dato dalla relazione
$$M = I\alpha = I\left(\frac{0-\omega}{t}\right) = -\frac{mR^2\omega}{2t} = \frac{100\cdot 0{,}3^2\cdot 40\pi}{240} = -4{,}7N\cdot m.$$
- (c) La forza si ottiene dalla $M = FR \Rightarrow F = \frac{M}{R} = \frac{4{,}7}{0{,}3} = 15{,}7N$.
- (d) Il numero di giri si ottiene dallo spostamento angolare totale, diviso l'angolo giro:
$$W = M\Delta\theta \Rightarrow giri = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{W}{2\pi M} = 1200giri.$$

4.

- La rottura del ruotismo comporta un movimento rotatorio dell'argano attorno al proprio asse, tipo quello di una carrucola. L'energia potenziale dell'automobile al momento della rottura del ruotismo viene trasformata in energia cinetica traslazionale della macchina ed energia cinetica rotazionale dell'argano:
$$mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}I\frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgh}{m+\frac{I}{r^2}}} = 8\frac{m}{s}.$$

5.

- La costanza delle forze impone ai corpi sospesi un moto rettilineo uniformemente accelerato, ed alla carrucola un moto circolare uniformemente accelerato. Si applica il principio di conservazione dell'energia:
$$M_2gh = \frac{1}{2}M_2v^2 + M_1gh + \frac{1}{2}M_1v^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(M_2-M_1)gh}{M_2+M_1+\frac{m}{2}}} = 2{,}73\frac{m}{s}.$$
- Si poteva risolvere il problema anche utilizzando la leggi della dinamica riferite alle masse ed alla carrucola:
$$\begin{aligned} M_1 &: \quad M_1a = T_1 - M_1g \\ M_2 &: \quad M_2a = M_2g - T_2 \\ m &: \quad (-T_1+T_2)r = \frac{mr^2}{2}\frac{a}{r} \end{aligned} \Rightarrow (M_1+M_2)a = (T_1-T_2)+(M_2-M_1)g.$$ Di conseguenza, $a = \frac{M_2-M_1}{M_1+M_2+\frac{m}{2}}g$. Dalla relazione propria del moto rettilineo uniformemente accelerato $v^2 - v_0^2 = 2ah \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(M_2-M_1)gh}{M_1+M_2+\frac{m}{2}}} = 2{,}73\frac{m}{s}$.

6.

$$0 = I\omega - mv_{up} \Rightarrow I\omega = mv_{up} = m(v_{us}-v_{ps})r;$$

- (a) $\omega = \frac{v_{ps}}{r}$;
$$\left(\frac{I}{r}+mr\right)v_{ps} = +mv_{us}r \Rightarrow \omega = \frac{mv_{us}}{\frac{I}{r}+mr} = 0{,}26\frac{rad}{s}$$
- (b) Sia Δt il tempo impiegato per tornare alla posizione di partenza (misurato da un osservatore a terra). Allora l'arco descritto dall'uomo, per un osservatore a terra, è $r\Delta\theta = v_{us}\Delta t$, dove $\Delta\theta$ è lo spostamento angolare richiesto. Tuttavia, nello stesso intervallo di tempo, l'uomo torna al punto di partenza sulla piattaforma (o meglio, incontra il punto di partenza per la prima volta); il "punto di partenza" ha quindi

percorso, nel medesimo intervallo di tempo, un arco $(2\pi-\Delta\theta)=\omega\Delta t$. Di conseguenza,

$$\begin{cases} r\Delta\theta = v_{us}\Delta t \\ (2\pi-\Delta\theta)=\omega\Delta t \end{cases} \Rightarrow (2\pi-\Delta\theta)=\omega\frac{r\Delta\theta}{v_{us}} \Rightarrow \Delta\theta=\frac{2\pi}{1+\frac{\omega r}{v_{us}}}=3,53rad$$

7.

- Si applica il principio di conservazione dell'energia meccanica osservando che il centro di massa ruota attorno all'estremità fissa, e quindi, per il teorema di Huygens-Steiner, risulta:
- $mgL = mg\frac{L}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{12}\right)\omega^2+\frac{1}{2}m\left(\omega\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{mg\frac{L}{2}}{\frac{mL^2}{24}+\frac{mL^2}{8}}}=5,42rad/s$, oppure

  sfruttando i valori "da tabella" del momento d'inerzia:
- $mgL = mg\frac{L}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega^2 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{mg\frac{L}{2}}{m\frac{L^2}{6}}}=5,42rad/s$.

8.

- $\begin{cases} M-M_{att}=I\alpha \\ \omega=\alpha\Delta t_1 \\ M_{att}\Delta\theta=\Delta E_c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M-M_{att}=I\frac{\omega}{\Delta t_1} \\ M_{att}(\omega\Delta t_2+\frac{1}{2}\left(-\frac{\omega}{\Delta t_2}\right)(\Delta t_2)^2)=\frac{1}{2}I\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M-\frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{\omega\Delta t_2}{2}}=I\frac{\omega}{\Delta t_1} \\ M_{att}=\frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{\omega\Delta t_2}{2}} \end{cases}$. Di

conseguenza: $\begin{cases} I=\frac{M}{\frac{\omega}{\Delta t_1}+\frac{\omega}{\Delta t_2}}=\frac{50}{\frac{63}{20}+\frac{63}{120}}=13,6kg\cdot m^2 \\ M_{att}=\frac{I\omega}{\Delta t_2}=\frac{13,6\cdot 63}{120}=7,1N\cdot m \end{cases}$.

9.

- Si utilizza la seconda legge della dinamica per la sfera e per il corpo:

$$\begin{cases} m'a=m'g-T \\ I\alpha=TR \\ a=\alpha R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{m'g}{m'+\frac{2}{5}m}=\frac{5m'g}{5m'+2m} \\ T=\frac{2mR^2}{5R}\frac{a}{R} \\ a=\alpha R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{5m'g}{5m'+2m} \\ T=\frac{2mm'}{5m'+2m}g \end{cases}$$

10.

- Se le forze avessero la stessa intensità formerebbero una *coppia*, ed il moto del cilindro sarebbe rotatorio attorno ad un asse passante per il centro di massa e perpendicolare alla superficie. Nel nostro caso, invece, il moto sarà di tipo roto-traslatorio uniformemente accelerato verso destra, essendo la forza F_1 di intensità maggiore della forza F_2. La seconda legge della dinamica (formulazione rotazionale) permette di determinare l'accelerazione angolare:

  $(F_1 - F_2)r = \frac{mr^2}{2}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2(F_1 - F_2)}{mr} = \frac{2(65-(-45))}{120 \cdot 0,5} = 3,7 rad/s^2$. Da questa si passa all'accelerazione lineare grazie alla relazione $a = \alpha r = 1,9 m/s^2$. La velocità angolare e la velocità lineare sono legate dalla relazione $v = \omega r = (\alpha t)r \Rightarrow v = \alpha rt = 1,9t$. Il centro di massa durante il moto è sempre alla stessa distanza dal punto di "stacco" della fune dal cilindro, indicato con P in figura. Di conseguenza il moto del centro di massa è rettilineo uniformemente accelerato verso destra con accelerazione $a = \alpha r = 1,9 m/s^2$, e la posizione in funzione del tempo è $s = \frac{1}{2}at^2 = 1t^2$.

11.

- Si applica il principio di conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale e quello in cui la palla si trova nel punto più alto internamente al cerchio della morte. Si applica il teorema di Huygens-Steiner per calcolare l'energia cinetica della palla, il cui asse istantaneo di rotazione è parallelo all'asse passante per il centro e parallelo al suolo: $mg(h+r) = mg(2R-r) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2 + mr^2\right)\omega^2$. Affinché la palla descriva la traiettoria circolare, la velocità (lineare del centro di massa) deve essere tale da conferire alla palla un'accelerazione centripeta sufficiente a bilanciare, nel punto più alto della traiettoria, l'accelerazione di gravità: $\begin{array}{l} m\frac{v^2}{R-r} = mg \Rightarrow \frac{\omega^2 r^2}{R-r} = g \Rightarrow \frac{10}{7}(h+2r-2R)g = g(R-r) \Rightarrow \\ \frac{10}{7}h = \frac{27}{7}(R-r) \Rightarrow h = 2,7(R-r) \end{array}$.

12.

- L'equazione della dinamica rotazionale e la relazione tra accelerazione angolare e lineare permettono di risolvere il problema:

  $\begin{cases} ma = mg - T \\ TR = I\alpha \\ a = \alpha R \end{cases}$. Di conseguenza $\begin{cases} ma = mg - \frac{I\alpha}{R} = mg - \frac{mR^2}{2R}\alpha = mg - \frac{ma}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{3}g \\ TR = I\alpha \Rightarrow T = \frac{I\alpha}{R} = \frac{mR^2}{2R}\cdot\frac{a}{R} = \frac{mg}{3} \\ a = \alpha R \end{cases}$.

13.

$\begin{cases} ma = mg - T \\ TR = I\alpha \\ a = \alpha R \end{cases}$, quindi $\begin{cases} ma = mg - \frac{I\alpha}{R} = mg - \frac{2mR^2}{5R}\alpha = mg - \frac{2ma}{5} \Rightarrow a = \frac{5}{7}g \\ TR = I\alpha \Rightarrow T = \frac{I\alpha}{R} = \frac{2mR^2}{5R}\cdot\frac{5g}{7R} = \frac{2mg}{7} \\ a = \alpha R \end{cases}$

14.

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{v_{CM}^2}{2}(m + \frac{I}{R^2})$$ (conservazione dell'energia)

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2mgh}{m+\frac{I}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2mgh}{m+\frac{mR^2}{2R^2}}} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

Un istante prima del raggiungimento della quota più bassa risulta:

$$\frac{v_{CM}^2}{2}(m + \frac{I}{R^2}) = -mg\Delta x + \frac{1}{2}mv_{CM}'^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_{CM}'^2}{R^2}$$

$$\frac{3v_{CM}^2}{4} = -g\Delta x + \frac{3}{4}v_{CM}'^2 \Rightarrow v_{CM}'^2 = v_{CM}^2 + \frac{4}{3}g\Delta x$$

$$0 = v_{CM}^2 + \frac{4}{3}g\Delta x \Rightarrow \frac{4}{3}gh + \frac{4}{3}g\Delta x = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta x = h.$$

Indicata con x la distanza dalla posizione iniziale, e con θ l'inclinazione del piano, per il principio di conservazione dell'energia meccanica risulta:

$mgx\sin\theta = \frac{kx^2}{2} + \frac{I_G v_G^2}{2R^2} + \frac{mv_G^2}{2}$, da cui segue, dopo opportuni "accorgimenti" la relazione $\frac{\left(x - \frac{mg\sin\theta}{k}\right)^2}{\left(\frac{mg\sin\theta}{k}\right)^2} + \frac{\left(v_G - 0\right)^2}{\left(\frac{mg\sin\theta}{\sqrt{k\left(m + I_G/R^2\right)}}\right)^2} = 1$.

15.

a) $$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{M}{4}v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}} = 1{,}7\frac{m}{s}$$

- *b*) $$\begin{cases} TR = I\alpha \\ \alpha = \frac{a}{R} \\ ma = mg - T \end{cases} \Rightarrow m(g-a)R = \frac{MR^2}{2}\frac{a}{R} \Rightarrow a = \frac{2mg}{M+2m} = 2{,}8\frac{m}{s^2}$$

c) $$T = m(g-a) = \frac{Mm}{M+2m}g = 14N$$

16.

- Si applica il principio di conservazione dell'energia meccanica nel tratto in cui la sfera rotola senza strisciare, e si ricava così la velocità all'ingresso del tratto orizzontale:

  $mgh = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$.

  Quando la palla arriva sul piano, si arresta per l'azione della coppia d'attrito volvente: $-M_V = \left(\frac{2}{5}mr^2 + mr^2\right)\alpha$, dove il momento d'inerzia è calcolato rispetto al punto di contatto della palla col piano orizzontale. Conoscendo la velocità angolare iniziale ed il tempo d'arresto, è possibile calcolare il valore della decelerazione angolare $\alpha = -\frac{\omega}{t} = -\left(\sqrt{\frac{10}{7}gh}\right)\frac{1}{tr}$, da cui segue

$M_V = \sqrt{\frac{14}{5}gh}\,\frac{mr}{t}$.

17.

- In riferimento alla figura, per effetto del colpo la pallina si muoverà verso sinistra con un moto roto-traslatorio, ruotando in senso antiorario. La condizione per avere un moto di rotolamento puro è data dalla relazione tra accelerazione lineare ed accelerazione angolare: $a = \alpha r$. Il momento della forza con cui viene colpita la pallina è $Fx = I\alpha = \frac{Ia}{r}$. Dalla seconda legge della dinamica segue $ma \cdot x = \frac{Ia}{r} \Rightarrow x = \frac{I}{mr}$.

QUESITI

1. Si spieghi il concetto di momento di una forza, e si dica quali convenzioni possono essere adottate per il calcolo.
2. Si spieghi com'è possibile passare dalla seconda legge della dinamica traslazionale a quella rotazionale, per il punto materiale.
3. Quale grandezza fisica rappresenta l'analogo rotazionale della quantità di moto.
4. Si deduca l'espressione del momento d'inerzia dalla seconda legge della dinamica rotazionale.
5. Qual è il significato fisico del momento d'inerzia?
6. Enunciare il teorema di Huygens-Steiner, e si faccia un esempio in cui viene applicato.
7. Un corpo ruota attorno ad un asse. Quale configurazione minimizza il momento d'inerzia?
8. Si deduca la formulazione rotazionale del teorema dell'energia cinetica.
9. Cosa si intende per moto di rotolamento "puro"? Da quale condizione è rappresentato?
10. Qual è la funzione della forza d'attrito radente nel moto di rotolamento puro?
11. Descrivere il moto di un corpo che rotola senza strisciare lungo un piano inclinato, in assenza di attrito volvente.
12. Descrivere il moto di un corpo che rotola senza strisciare su un piano orizzontale, soggetto alla forza d'attrito volvente costante.