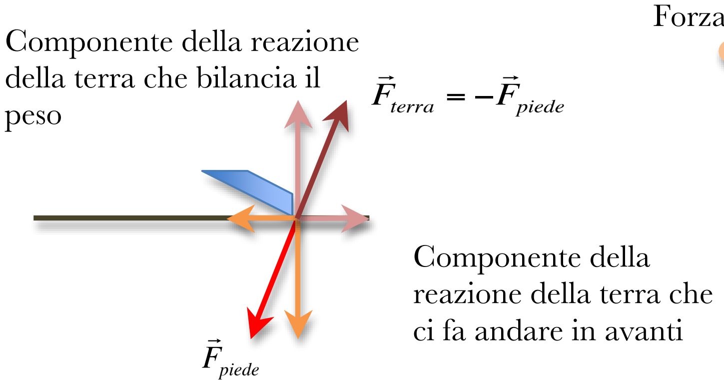
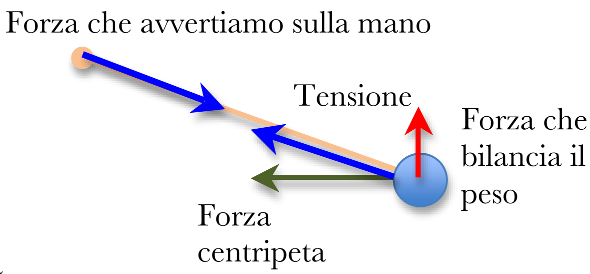
CAPITOLO 3
IMPULSO E QUANTITA' DI MOTO

3.1 La terza legge della dinamica: il principio di azione e reazione

Nell'esperienza quotidiana possiamo sperimentare una reazione, da parte di determinati corpi, a delle nostre azioni. Ne sono esempi la forza che una superficie esercita su di noi quando la colpiamo, ad esempio con un pugno, la forza con cui la Terra risponde al contatto con i nostri piedi nell'atto di camminare, ed altri ancora.
Quanto detto fu enunciato da Newton nella *terza legge della dinamica: Se un corpo A esercita una forza su un corpo B,* $\vec{F}_{AB}$*, allora il corpo B esercita sul corpo A una forza vettorialmente opposta.* In simboli: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$.
Si può spiegare in termini di *principio di azione e reazione* (formulazione alternativa della terza legge della dinamica) anche la sensazione che avvertiamo sulla mano quando facciamo ruotare, sopra la nostra testa, una massa appesa all'estremità libera di un filo. La forza di origine muscolare che imprimiamo ha una duplice funzione: vincere il peso della massa appesa, e fornire la necessaria accelerazione centripeta.
Il sasso "reagisce" alla forza che lo fa ruotare attraverso la fune, che funge da elemento di trasmissione della forza, detta **tensione**, che avvertiamo sulla mano durante la rotazione. Nei due schemi che seguono si interpretano "la camminata" e la rotazione della massa in termini di forze.

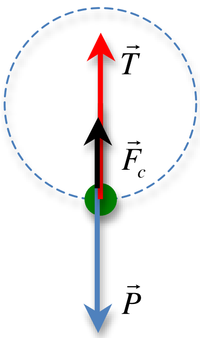




$$\begin{cases} T\cos\alpha = mg \\ T\sin\alpha = \dfrac{m\omega^2 l^2 \sin^2\alpha}{l\sin\alpha} \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}$$

, dove l'angolo viene misurato dalla verticale passante per la mano e la fune, l è la lunghezza della fune. Notiamo come, al crescere della velocità angolare, cresce l'angolo (perché diminuisce il suo coseno). Questo effetto è stato utilizzato per progettare dispositivi atti a limitare la velocità angolare, il più celebre dei quali è il cosiddetto *regolatore di Watt*.

Una massa appesa ad un filo viene fatta ruotare su un piano verticale. Si dica, motivando la risposta, in quale punto della traiettoria circolare la tensione del filo è massima.



Studiamo il moto in un sistema di riferimento inerziale, dove la rotazione avviene grazie alla forza centripeta, uguale alla risultante del peso e della tensione $\vec{F}_c = \vec{T} - \vec{P} \Rightarrow \vec{T} = \vec{F}_c + \vec{P}$. Nel punto più basso della traiettoria, la somma della forza centripeta e del peso è massima: in questa configurazione si ha quindi il valore più grande della tensione.
Nel sistema di riferimento della massa rotante, questa si trova in equilibrio. In questo sistema la forza centripeta è forza *centrifuga*.

3.2 Impulso e teorema della quantità di moto

Finora non abbiamo preso in considerazione la durata temporale dell'azione di una forza (costante). Sia $\vec{R}$ la risultante delle forze agenti su un corpo, e sia $\Delta t = t_f - t_i$. La seconda legge della dinamica può essere scritta così: $\vec{R} = m\vec{a} = m\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{m\vec{v}_f - m\vec{v}_i}{t_f - t_i} \Rightarrow \vec{R}\Delta t := \vec{q}_f - \vec{q}_i$. Si definisce **impulso** la grandezza $\vec{R}\Delta t$, e **quantità di moto** $\vec{q} := m\vec{v}$. Con queste due nuove grandezze, la seconda legge della dinamica scritta sopra permette di enunciare il **teorema della quantità di moto**: *l'impulso della forza costante agente su un corpo in un dato intervallo di tempo, è uguale alla variazione della quantità di moto nello stesso intervallo.*

3.3 Il principio di conservazione della quantità di moto

Consideriamo un sistema costituito da due punti materiali, sottoposti all'azione di forze esterne $\vec{F}_i^{ext}$, ed interagenti tra loro mediante forze interne, $\vec{F}_i^{\text{int}}$. Si applica la seconda legge della dinamica a ciascuno di essi, e si sommano membro a membro le espressioni così ottenute, tenendo conto della terza legge della dinamica:

$$\begin{aligned} m_1\frac{\Delta v_1}{\Delta t} &= \frac{\Delta m_1 v_1}{\Delta t} = \frac{\Delta q_1}{\Delta t} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_1^{\text{int}} \\ m_2\frac{\Delta v_2}{\Delta t} &= \frac{\Delta m_2 v_2}{\Delta t} = \frac{\Delta q_2}{\Delta t} = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_2^{\text{int}} \end{aligned} \qquad \frac{\Delta q_1}{\Delta t} + \frac{\Delta q_2}{\Delta t} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} \Rightarrow \frac{\Delta\vec{Q}_{tot}}{\Delta t} = \vec{R}^{ext}.$$

Il risultato ottenuto vale anche nel caso di N corpi qualsiasi interagenti, ed afferma in sintesi che la risultante delle forze esterne agenti *sul sistema* è uguale alla rapidità di variazione della quantità di moto *del sistema.*

Nel caso in cui tale risultante è nulla, si ha il cosiddetto **principio di conservazione della quantità di moto**: $\vec{R}^{ext} = \vec{0} \Rightarrow \dfrac{\Delta\vec{Q}_{tot}}{\Delta t} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q}_{tot} = \vec{K}$.

Nei *sistemi isolati*, in cui non agiscono forze esterne non equilibrate, si conserva la quantità di moto *totale*, ma non quella dei singoli corpi.

Esempio

Due dischi di massa $m_1 = 2kg$ e $m_2 = 6kg$, sono appoggiati senza attrito su un piano orizzontale, trattenuti da una forza di intensità pari a 10N. Successivamente i due corpi vengono rilasciati in un tempo $\Delta t = 2 \cdot 10^{-2} s$. Si utilizzino le leggi della dinamica per descrivere lo stato dei due dischi prima, durante, e dopo la fase di rilascio.

Prima della fase di rilascio i due dischi sono fermi, quindi la quantità totale del sistema è nulla. Durante la fase di rilascio agiscono, oltre al peso ed alla reazione vincolare che si equilibrano sempre, anche forze interne vettorialmente opposte per la terza legge della dinamica. La seconda legge della dinamica, ed il principio di conservazione della quantità di moto, ci forniscono le velocità con cui si muoveranno i dischi nella fase successiva al rilascio:

$$\begin{aligned} &\vec{0} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \\ &F = m_1 a_1 = m_2 a_2 \\ &v_1 = a_1\Delta t = \frac{F\Delta t}{m_1} = 0{,}1\frac{m}{s}; \quad v_2 = a_2\Delta t = \frac{F\Delta t}{m_2} = 0{,}03\,m/s \end{aligned}.$$

3.4 Il centro di massa di un sistema di N punti materiali

L'analogia tra le relazioni $\vec{R} = \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t}$ e $\vec{R} = \frac{\Delta \vec{Q}_{tot}}{\Delta t}$ suggeriscono che, nel caso di un sistema di N punti materiali, è possibile considerare le forze esterne come se fossero applicate ad un *solo* punto, in cui si immagina concentrata la massa totale del sistema. Per meglio comprendere quest'affermazione, esaminiamo il caso di un sistema isolato costituito da due punti materiali. Per il principio di conservazione della quantità di moto risulta:

$\vec{0} = \vec{Q}_{tot,f} - \vec{Q}_{tot,i} = (m_1\vec{v}_{1,f} + m_2\vec{v}_{2,f}) - (m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i}) \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{C} := (m_1 + m_2)\vec{v}_?$, dove nell'ultima espressione compare il termine $\vec{v}_?$ che rappresenta la velocità del punto in cui pensiamo concentrata la massa del sistema. Di conseguenza:

$(m_1 + m_2)\vec{v}_? = m_1\frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta t} + m_2\frac{\Delta \vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta m_1\vec{r}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta m_2\vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{\Delta t}$, dove la velocità è stata scritta in termini di *rapidità di variazione del vettore posizione*, riferito al singolo corpo. Se adesso isoliamo il termine $\vec{v}_?$, giungiamo all'espressione

$$\vec{v}_? = \frac{\Delta\left((m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/(m_1 + m_2)\right)}{\Delta t} := \frac{\Delta \vec{r}_{CM}}{\Delta t}.$$

Abbiamo introdotto la grandezza fisica *centro di massa*, così definita: $\vec{r}_{CM} := \frac{(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{m_1 + m_2}$, che rappresenta proprio il punto cercato. La quantità di moto del sistema è quindi:

$$\vec{Q}_{tot} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM}.$$

Il teorema della quantità di moto ci suggerisce di andare avanti nello studio delle proprietà del sistema attraverso il centro di massa:

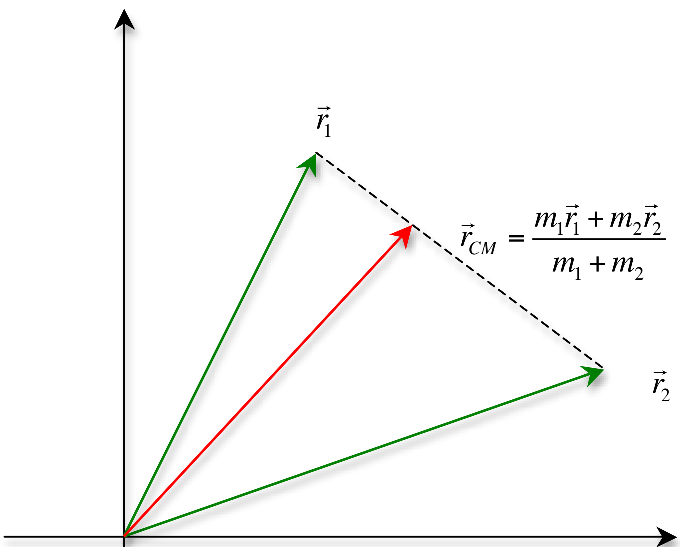
$$\vec{R}^{ext} = \frac{\Delta \vec{Q}_{tot}}{\Delta t} = (m_1 + m_2)\frac{\Delta \vec{v}_{CM}}{\Delta t} = (m_1 + m_2)\vec{a}_{CM}.$$

Quest'ultima relazione ci permette di trarre la seguente, importante conclusione: *il centro di massa può essere considerato come quel punto in cui si considera concentrata la massa del sistema, e dove si considerano applicate tutte le forze esterne al sistema.*

In generale quindi, per un sistema di N corpi, l'espressione del centro di massa si scrive in forma compatta:

$$\vec{r}_{CM} = \sum_{k=0}^{N}\frac{m_k\vec{r}_k}{M},$$

dove $M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_N := \sum_{k=0}^{N} m_k$.



3.5 Conseguenze della terza legge della dinamica

Tra le molteplici applicazioni della terza legge della dinamica, si segnalano le seguenti tre.

Proiettile che esplode in volo

Durante l'esplosione le forze interne, che si equilibrano per la terza legge della dinamica, sono grandi rispetto alla forza peso si ha la conservazione della quantità di moto e, di conseguenza, al termine del piccolo intervallo di tempo occorso per l'esplosione, il centro di massa continuerà a muoversi lungo una traiettoria parabolica per effetto della forza di gravità.

Spostamenti su un terreno ghiacciato

Trovandosi in una situazione in cui l'attrito è trascurabile, una persona su un lago ghiacciato può spostarsi solo se si "frammenta" come il proiettile nel caso precedente. Infatti, se questa lanciasse un oggetto in una certa direzione, non appena questo abbandona la mano la persona inizierebbe a muoversi nella stessa direzione, ma in verso opposto, con velocità inversamente proporzionale alla massa. Si basa su questo principio il cosiddetto *motore a reazione*.

Moto di un'astronave nello spazio

Un'astronave si muove prevalentemente in presenza di forze di intensità trascurabile, e per poterlo fare sfrutta il motore a reazione espellendo gas ad alta velocità: il centro di massa continua a muoversi come se niente fosse successo, e l'astronave acquista un'accelerazione nel verso opposto a quello in cui si muove il gas espulso.

Esercizi

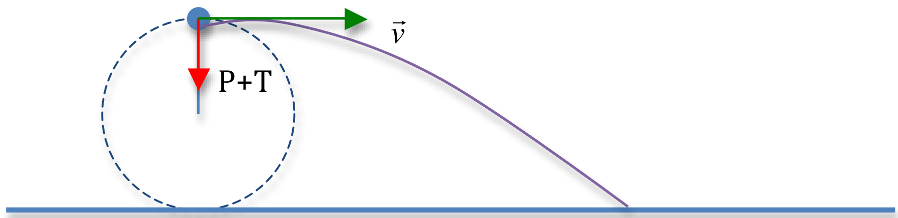
1. Un corpo, appeso all'estremità di un filo inestendibile e di massa trascurabile, viene fatto ruotare in un piano verticale. Il centro della traiettoria circolare ha una distanza dal suolo pari al raggio.
   - Si calcoli la velocità minima che permette la rotazione.
   - Ad un certo punto, quando il corpo passa per il punto più alto della traiettoria con una velocità $v = \sqrt{gr}$, il filo si spezza. Si determini la distanza del punto d'impatto del corpo con il suolo, misurata a partire dal punto di tangenza della traiettoria circolare con il suolo, nell'ipotesi in cui il raggio della circonferenza misura 1m.
2. Una persona della massa di 100 kg inizia a camminare su un lungo tronco di legno, di massa 500 kg e galleggiante sulla superficie di un laghetto, alla velocità di $0{,}5\,m/s$ *rispetto al tronco*. Si determini la velocità del tronco rispetto alla riva. (*Suggerimento:* $v_{PR} = v_{PT} + v_{TR} \ldots$).
3. Due dischi di massa $m_1 = 2kg$ e $m_2 = 6kg$, sono appoggiati senza attrito su un piano orizzontale, trattenuti da una forza di intensità pari a 10N. Successivamente i due corpi vengono rilasciati in un tempo $\Delta t = 2 \cdot 10^{-2} s$. Si utilizzino le leggi della dinamica per descrivere lo stato dei due dischi prima, durante, e dopo la fase di rilascio.
4. Tre masse uguali m del valore di 2 kg s*i* muovono nel piano con le seguenti velocità: $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v}_3 = 2\vec{i} - 2\vec{j}$. Si calcoli la quantità di moto e la velocità del centro di massa del sistema.
5. Un fucile della massa di 4,25 kg spara un proiettile da 25 g con una velocità di rinculo di $2\,m/s$. Si calcoli la velocità con cui il proiettile viene sparato.
6. Un proiettile di massa $2m$ esplode rompendosi in due parti uguali, ciascuna di massa *m*, quando si trova nel punto più alto della sua traiettoria. Dopo l'esplosione uno dei due pezzi cade, partendo con velocità nulla, mentre l'altro continua a muoversi orizzontalmente; i due pezzi toccano terra simultaneamente. Dove cade il secondo proiettile?
7. Una persona della massa di 100 kg inizia a camminare su un lungo tronco di legno, di massa 500 kg e galleggiante sulla superficie di un laghetto, alla velocità di $0{,}5\,m/s$ *rispetto al tronco*. Si determini la velocità del tronco rispetto alla riva. (*Suggerimento:* $v_{PR} = v_{PT} + v_{TR} \ldots$).
8. Un'automobile di massa m_1 viaggia su una strada orizzontale con velocità $\vec{v}_{1i}$ quando tampona un'automobile di massa m_2, in moto nella stessa direzione e verso, con velocità

$\vec{v}_{2i}$. Se le due automobili costituiscono approssimativamente un sistema isolato, si determini la velocità dopo l'urto dell'automobile tamponata, sapendo che l'altra, in seguito all'urto, procede con velocità $\vec{v}_{1f}$ in una direzione che forma un angolo θ, in senso antiorario, con la direzione della velocità iniziale.

9. Un'auto di massa 1000 kg viaggia alla velocità di $108\,km/h$ quando urta frontalmente un'auto della massa di 800 kg che viaggia alla velocità di $72\,km/h$. Dopo l'impatto, il groviglio di auto percorre un tratto di strada della lunghezza di 10 m. Calcolare la velocità iniziale del groviglio, e si stimi il valore delle forze d'attrito.

Soluzioni

1. Un corpo, appeso all'estremità di un filo inestendibile e di massa trascurabile, viene fatto ruotare in un piano verticale. Il centro della traiettoria circolare ha una distanza dal suolo pari al raggio.



- Si calcoli la velocità minima che permette la rotazione.
  - $\begin{cases} P+T=m\dfrac{v^2}{r} \\ T\geq 0 \end{cases} \Rightarrow m\dfrac{v^2}{r}-P=T\geq 0 \Rightarrow v\geq\sqrt{gr}$
- Ad un certo punto, quando il corpo passa per il punto più alto della traiettoria con una velocità $v=\sqrt{gr}$, il filo si spezza. Si determini la distanza del punto d'impatto del corpo con il suolo, misurata a partire dal punto di tangenza della traiettoria circolare con il suolo, nell'ipotesi in cui il raggio della circonferenza misura 1m.
  - $\begin{cases} y=2r-\dfrac{gt^2}{2} \\ x=vt \end{cases} \Rightarrow 0=2r-\dfrac{\cancel{g}x^2}{2\cancel{g}r} \Rightarrow x=2r=2m.$

2. Si applica il Principio di conservazione della quantità di moto, riferendo il moto al sistema di riferimento inerziale costituito dalla Terra (rappresentata, ovviamente, dalla "riva"). L'equilibrio delle forze in gioco porta a scrivere

$$0=mv_{PR}+Mv_{TR}\Rightarrow 0=mv_{PT}+mv_{TR}+Mv_{TR}\Rightarrow v_{TR}=-\frac{mv_{PT}}{m+M}=-0{,}08\,m/s$$

3. Prima della fase di rilascio i due dischi sono fermi, quindi la quantità totale del sistema è nulla. Durante la fase di rilascio agiscono, oltre al peso ed alla reazione vincolare che si equilibrano sempre, anche forze interne vettorialmente opposte per la terza legge della

dinamica. La seconda legge della dinamica, ed il principio di conservazione della quantità di moto, ci forniranno le velocità con cui si muoveranno i dischi nella fase successiva al rilascio:

$$\vec{0} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$F = m_1 a_1 = m_2 a_2$$

$$v_1 = a_1\Delta t = \frac{F\Delta t}{m_1} = 0{,}1\frac{m}{s}; \quad v_2 = a_2\Delta t = \frac{F\Delta t}{m_2} = 0{,}03\,m/s$$

4. La quantità di moto del sistema è data dalla somma delle singole quantità di moto: $\vec{Q} = \sum m_i\vec{v}_i = 2(2-1+2)\vec{i} + 2(2+2-2)\vec{j} = (6\vec{i} + 4\vec{j})(kg\cdot m)/s$. La velocità del centro di massa del sistema è data dalla relazione $\left(\sum m_i\right)\vec{v}_{CM} = \vec{Q} \Rightarrow \vec{v}_{CM} = (\vec{i} + 0{,}67\vec{j})\,m/s$.
5. Per il teorema della quantità di moto $\vec{0} = M\vec{v}_f + m\vec{v}_p \Rightarrow v_p = \dfrac{Mv_f}{m} = 3{,}4\cdot 10^2\,m/s$.
6. Le forze disgreganti durante l'esplosione del proiettile rendono trascurabile il peso di questo, al loro confronto. E' quindi possibile applicare il principio di conservazione della quantità di moto: $2mv_{0x} = m\cdot 0 + mv_x \Rightarrow v_x = 2v_{0x}$. Ora, il centro di massa dopo l'esplosione continua a muoversi come se questa non si fosse verificata (in quanto questione "interna" al proiettile), e prosegue il suo moto parabolico, cadendo a terra ad una distanza pari alla gittata $x_{\max}$. Di conseguenza, essendo uguali le due masse, il secondo frammento, che parte con velocità iniziale v_x, cadrà a terra ad una distanza dal centro di massa pari a quella a cui ricade il frammento partito con velocità nulla.

7. Si applica il Principio di conservazione della quantità di moto, riferendo il moto al sistema di riferimento inerziale costituito dalla Terra (rappresentata, ovviamente, dalla "riva"). L'equilibrio delle forze in gioco porta a scrivere

$$0 = mv_{PR} + Mv_{TR} \Rightarrow 0 = mv_{PT} + mv_{TR} + Mv_{TR} \Rightarrow v_{TR} = -\frac{mv_{PT}}{m+M} = -0{,}08\,m/s.$$

8. Il sistema è isolato, quindi si conserva la quantità di moto totale: $m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$; poiché il centro di massa continua a muoversi lungo la direzione delle velocità iniziali, si ha

$$\begin{cases} (m_1+m_2)v_{CM} = m_1 v_{1f}\cos\theta + m_2 v_{2fx} \Rightarrow v_{2fx} = \dfrac{(m_1+m_2)v_{CM} - m_1 v_{1f}\cos\theta}{m_2} \\ 0 = m_1 v_{1f}\sin\theta + m_2 v_{2fy} \Rightarrow v_{2fy} = \dfrac{-m_1 v_{1f}\sin\theta}{m_2} \end{cases}.$$

9. Il teorema della quantità di moto, applicato tra gli istanti iniziale e finale dell'urto (la risultante delle forze esterne è uguale a zero), consente di calcolare la velocità iniziale del groviglio di auto: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{V} = M\vec{V} \Rightarrow V = 7{,}8\,m/s$, nel verso della prima auto. Il teorema dell'energia cinetica permette di calcolare il lavoro delle forze d'attrito, e di stimarne quindi l'intensità: $0 - \dfrac{1}{2}MV^2 = -F_{at}\Delta x \Rightarrow F_{at} = \dfrac{MV^2}{2\Delta x} = 5{,}5\cdot 10^3\,N$.