Modello cinetico dei gas e Energia Interna

Problemi

1. Si dimostri che l'equazione di stato dei gas perfetti può essere scritta nella forma $P = \rho \frac{RT}{M}$ dove ρ è la densità del gas e M è la sua massa molecolare. Si calcoli la densità dell'aria $M = 29{,}0\, g/mol$ alla pressione di un'atmosfera e la temperatura di 273K.
2. Un pneumatico di automobile viene gonfiato alla pressione relativa di 200 kPa quando la temperatura ambiente è 20°C. Dopo che l'automobile ha viaggiato ad alta velocità, la temperatura del pneumatico è salita a 50°C. (a) Supponendo che il volume del pneumatico non sia cambiato, si trovi la nuova pressione relativa dell'aria contenuta in esso, supponendo che l'aria sia un gas perfetto. (b) Si calcoli la pressione relativa se il pneumatico si espande in modo che il volume aumenti del 10%.
3. Un contenitore cilindrico con il raggio di 2,5cm e l'altezza di 20cm è aperto alla sommità; esso contiene aria alla pressione di 1 atm. Si inserisce un pistone a perfetta tenuta che ha la massa di 1,2kg e viene gradualmente abbassato finché l'aumentata pressione del contenitore non equilibra il peso del pistone. (a) Qual è la forza esercitata sulla sommità del pistone a causa della pressione atmosferica? (b) Qual è la forza che dev'essere esercitata dal gas nel contenitore al di sotto del pistone per tenerlo in equilibrio? Qual è la pressione nel contenitore? (c) Supponendo che la temperatura del gas nel contenitore resti costante, qual è l'altezza della posizione di equilibrio del pistone?

4. Si dimostri che la velocità quadratica media delle molecole di un gas è data da $v_{qm} = \sqrt{3p/\rho}$, dove ρ è la densità del gas e *p* è la pressione. Si trovi la velocità quadratica media delle molecole del gas se la densità del gas è $3{,}5\, g/l$ e la pressione è 300 kPa.
5. La velocità di fuga su Marte è $5{,}0\, km/s$, e la temperatura tipica alla sua superficie è 0°C. Si calcoli la velocità quadratica media per $H_2;O_2;CO_2$ a questa temperatura e si valuti la possibilità che questi gas esistano nell'atmosfera di Marte (si usi il criterio che tutte queste molecole sarebbero sfuggite se la velocità quadratica media fosse maggiore di 1/6 della velocità di fuga.
6. Una massa di gas ideale subisce una trasformazione a pressione costante, che fa passare la temperatura da 20 °C a 40 °C. Se il volume finale è $21 cm^3$, quant'era quello iniziale?
7. Si stimi il numero di molecole di un gas ideale contenute in un recipiente di $2 l$, alla temperatura ambiente (20°C), ed alla pressione di $3 atm$.
8. Da un sommergibile che si trova ad una certa profondità, esce una bolla d'aria che, una volta prossima alla superficie, ha un volume 11 volte maggiore di quello all'atto della fuoriuscita. Qual è la profondità a cui si trova il sommergibile?
9. La massa di 135*g* di gas ideale è contenuta in un recipiente da 20*l*, ad una pressione pari a 80 volte quella atmosferica, ed alla temperatura di 16°C. Di quale gas si tratta?

Soluzioni

1. L'equazione di stato dei gas perfetti è $p = \frac{nRT}{V} = \frac{\rho}{m} nRT = \rho \frac{nRT}{nM} = \rho \frac{RT}{M}$. Si sfrutta l'equazione trovata al punto precedente: $\rho = \frac{MP}{RT} = 1{,}295\, kg/m^3$.
2. (a) Un pneumatico sgonfio si trova alla pressione atmosferica. Quando viene gonfiato il manometro segna la pressione *relativa* (quando si collega la pompa alla valvola la lancetta del manometro è ferma sullo zero, pur essendoci nel pneumatico la pressione di una atmosfera, ovvero 100 kPa). Per risolvere il problema occorre quindi riferirci alla somma della pressione atmosferica e di quella relativa, che prende il nome di pressione *assoluta*. Dall'equazione di

stato dei gas perfetti, supponendo il volume costante ed il pneumatico privo di perdite risulta
$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_1}{T_2}\Rightarrow P_2=P_{rel2}+P_{atm}=\frac{T_2}{T_1}\left(P_{rel1}+P_{atm}\right)\Rightarrow P_{rel2}=\frac{T_2}{T_1}\left(P_{rel1}+P_{atm}\right)-P_{atm}=231kPa.$$

- (b) In questo caso l'aumento percentuale del volume porta ad una modifica dell'equazione precedente del tipo:

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2(1,1)V_1}{T_2}\Rightarrow P_2=P_{rel2}+P_{atm}=\frac{T_2}{(1,1)T_1}\left(P_{rel1}+P_{atm}\right)\Rightarrow$$
$$P_{rel2}=\frac{T_2}{(1,1)T_1}\left(P_{rel1}+P_{atm}\right)-P_{atm}=201kPa.$$

3.

(a) $F=P_{atm}\cdot\pi r^2=199N$.

(b) $$F_{gas}=F_{atm}+mg=199N+12N=211N$$
$$P_{gas}=F_{gas}/\pi r^2=1{,}06atm.$$

(c) Si ha equilibrio, nel caso in cui la temperatura è costante, quando $P_1V_1=P_2V_2\Rightarrow P_{atm}\pi r^2h=P_{gas}\pi r^2h_2\Rightarrow h_2=18{,}9cm$.

4. L'interpretazione della temperatura in termini di energia cinetica $E_c=\frac{Nm\bar{v}^2}{2}\Rightarrow E_c=\frac{3}{2}NkT$ permette di determinare la velocità quadratica media delle molecole: $(v^2)_{media}=\frac{3}{m}kT=\frac{3N_AkT}{N_Am}=\frac{3RT}{M}$, dove M è la massa molecolare (la massa di una mole di gas). Si giunge quindi alla relazione $\bar{v}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$ da cui, ricordando che $P=\rho\frac{RT}{M}$, segue la relazione cercata $v_{qm}=\sqrt{3p/\rho}$. $v_{qm}=\sqrt{3p/\rho}=\sqrt{\frac{3\cdot 3\cdot 10^5Pa}{3{,}5kg/m^3}}=507m/s$.

5.
$$\bar{v}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}=\quad H_2:\quad 1{,}8\frac{km}{s}>0{,}8\frac{km}{s}\quad ;O_2:0{,}5\frac{km}{s}<0{,}8\frac{km}{s}$$
$$CO_2:\quad 0{,}4\frac{km}{s}<0{,}8\frac{km}{s}.$$

6. Si scrivono le equazioni di stato all'inizio ed alla fine della trasformazione:
$$\begin{cases}P_iV_i=nRT_i\\P_fV_f=nRT_f\end{cases}\Rightarrow V_i=\frac{T_i}{T_f}V_f=\frac{293}{313}21cm^3=20cm^3.$$

7. $n=N_An=N_A\frac{PV}{RT}=1{,}48\cdot 10^{23}$.

8. Trattando l'aria come un gas perfetto, ed assumendo per l'acqua la densità di $10^3kg\cdot m^{-3}$, dall'equazione di stato dei gas perfetti, e dalla legge di Stevino, segue:
$$\left(P_{atm}+\rho_{H_2O}gh\right)V_h=P_{atm}V_0=P_{atm}11V_h\Rightarrow h=\frac{(11-1)P_{atm}}{\rho_{H_2O}g}=100m.$$

9. Si calcola la massa molare del gas: $M=\frac{m}{n}=\frac{mRT}{PV}=2{,}0g$. E' idrogeno.