CAPITOLO 12
IL PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

12.1 Il primo principio della termodinamica

Abbiamo visto che, indipendentemente dalla trasformazione che regola il passaggio di un corpo dallo stato iniziale a quello finale, in condizioni d'isolamento termico la variazione dell'energia interna è data dalla relazione $\Delta U = L_{est} - L_{res}$.

In condizioni di contatto termico si definisce *calore* l'energia interna trasferita e, quindi, non ha senso parlare di "calore posseduto da un corpo", così come non ha senso parlare di "lavoro posseduto da un corpo". Compiere lavoro e trasferire calore sono quindi due modi con cui può variare l'energia interna di un corpo.

Consideriamo adesso il caso generale di un corpo può scambiare lavoro ed energia interna con l'ambiente esterno. Sappiamo al riguardo che il lavoro scambiato è $L = L_{est} - L_{res}$, e che il calore scambiato, Q è positivo se la parte in entrata è maggiore di quella in uscita.

Si giunge quindi alla formulazione generale del principio di conservazione dell'energia

$$\Delta U = Q + L,$$

che prende il nome di *primo principio della termodinamica*, e si fonda sul fatto che l'energia interna è una funzione di stato, e che questa può variare solo attraverso scambi di lavoro e calore, mentre l'energia totale del corpo e dell'ambiente esterno resta costante.

E' importante precisare che, a differenza dell'energia interna, il calore e il lavoro non sono funzioni di stato, perché dipendono dalla particolare trasformazione che ha portato il corpo dallo stato iniziale (I) a quello finale (F). Passiamo in rassegna le trasformazioni più significative.

12.2 Trasformazioni a volume costante (isocore)

Isolamento termico. In questo caso $Q = 0$, e per il primo principio della termodinamica $\Delta U = L$. Ora, poiché il volume non cambia, il corpo *non* restituisce lavoro verso l'esterno ($L_{res} = 0$), quindi $\Delta U = L_{est}$: il lavoro compiuto dalle forze esterne va tutto ad *aumentare* l'energia interna, proprio come nel caso del *mulinello di Joule*. Di solito è possibile misurare L_{est}, e l'esperienza mostra che $L_{est} = mc_V\Delta T$, dove con *m* abbiamo indicato la massa del corpo, con c_V il *calore specifico a volume costante*, e con ΔT il salto termico (ovvero la differenza tra la temperatura del corpo nello stato finale e quella nello stato iniziale).

Dall'ultima relazione segue, essendo l'energia interna una funzione di stato, $\Delta U = mc_V\Delta T$ per *qualsiasi* trasformazione.

Contatto termico. Nel caso particolare in cui $L_{est} = 0$ il passaggio dallo stato iniziale a quello finale è reso possibile dal contatto termico; per il primo principio della termodinamica risulta $\Delta U = Q$.

Di nuovo, poiché la variazione dell'energia interna non dipende dalla particolare trasformazione compiuta, $\Delta U = mc_V\Delta T \Rightarrow Q = mc_V\Delta T$. L'ultima equazione trovata, $Q = mc_V\Delta T$, è nota come *relazione fondamentale della calorimetria*.

12.3 Trasformazioni a pressione costante (isobare)

Isolamento termico. Di nuovo, $Q = 0$ implica $\Delta U = L_{est} - L_{res} = L_{est} - P\Delta V = mc_P\Delta T - P\Delta V$, dove abbiamo indicato con c_P il *calore specifico a pressione costante*, e con ΔV la variazione di volume a pressione costante, ad esempio $P = P_{atm}$.

Contatto termico. Anche in questo caso, se $L_{est} = 0$, allora $\Delta U = Q + L_{est} - L_{res} = Q - P\Delta V \Rightarrow Q = mc_P\Delta T$, sempre per l'indipendenza della variazione dell'energia interna dalla trasformazione.

Esempio (mulinello di Joule). In un recipiente termicamente isolato è contenuto un litro d'acqua alla temperatura di 300K, alla pressione atmosferica. Si dissipano 10J di lavoro. Calcolare la variazione di energia interna nei seguenti casi:

a) A volume costante: $\Delta U = L_{est} - L_{res} = L_{est} = 10J$;
b) A pressione costante: $\Delta U = L_{est} - L_{res} = L_{est} - P_{atm}\Delta V$. In questo caso occorre considerare la variazione di volume dell'acqua (anche se, essendo un liquido, sarà molto piccola), che per la legge della dilatazione volumica è $\Delta V = \alpha V_0 \Delta T$, essendo $\alpha = 3\cdot 10^{-4} K^{-1}$ il coefficiente di dilatazione volumica. Il salto termico viene valutato sfruttando la relazione propria delle trasformazioni a pressione costante in regime di isolamento termico: $L_{est} = mc_P \Delta T$. La variazione di volume è quindi $\Delta V = \frac{\alpha V_0 L_{est}}{mc_P} = \frac{\alpha V_0 L_{est}}{\rho_{H_2O} V_0 c_P} \approx 7\cdot 10^{-10} m^3$, a cui è associato un lavoro, compiuto dall'acqua, $P_{atm}\Delta V \approx 7\cdot 10^{-5} J$, decisamente trascurabile rispetto a quello dissipato dalle forze esterne $L_{est} = 10J$.

12.4 La capacità termica e il teorema di equipartizione dell'energia

La *capacità termica* di un corpo a *volume costante* mc_V, e a *pressione costante* mc_P, è una grandezza fisica che fornisce informazioni sulla sua energia interna. Applichiamo quanto visto sopra al caso dei gas perfetti monoatomici.

<u>Nel caso di una trasformazione isocora</u> in cui $L_{est} = 0$, per il primo principio della termodinamica $\Delta U = Q$, quindi $\Delta U = mc_V \Delta T = C_V \Delta T$, come nel caso di un corpo liquido o solido.

<u>Nel caso di una trasformazione isobara</u> in cui $L_{est} = 0$, per il primo principio della termodinamica $\Delta U = Q + L_{est} - L_{res} = Q - P\Delta V = C_P \Delta T - P\Delta V \Rightarrow C_V \Delta T = C_P \Delta T - P\Delta V$, sempre perché la variazione dell'energia interna è indipendente dalla trasformazione.

Dall'equazione di stato dei gas perfetti

$$PV = nRT \Rightarrow P\Delta V = nR\Delta T$$

si perviene alla relazione tra le capacità termiche a volume ed a pressione costante, uguagliando le variazioni dell'energia interna nei due casi $C_V \Delta T = C_P \Delta T - nR\Delta T$, da cui segue

$$C_P = C_V + nR.$$

Nell'ipotesi di gas perfetto monoatomico, secondo il modello cinetico l'energia interna è tutta di tipo cinetico traslazionale, per cui:

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR\Delta T.$$

Di conseguenza,

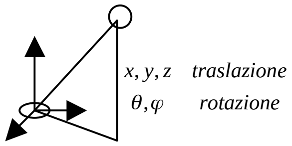
$$C_V = \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{3}{2} nR \Rightarrow C_P = \frac{5}{2} nR.$$

In conclusione, per i <u>gas monoatomici</u> (in cui approssimativamente l'energia interna è tutta di tipo cinetico) le capacità termiche sono:

- a volume costante: $C_V = \frac{3}{2} nR.$
- a pressione costante: $C_P = \frac{5}{2} nR.$

Nei gas costituiti da molecole biatomiche (o più complesse), l'energia interna è maggiore di $U = \frac{3}{2} nRT$ perché, oltre all'energia cinetica di traslazione, possono esserci altri tipi di energia, come l'energia cinetica di rotazione o di vibrazione.

Tornando al concetto di energia cinetica media traslazionale, questa è $\frac{1}{2} kT$ per ogni molecola ($\frac{1}{2} RT$ per ogni mole) in ogni direzione (x, y, z) nello spazio. Ciascuna coordinata (cartesiana, angolare) necessaria per la descrizione della posizione di una molecola si chiama grado di libertà. Una molecola che si muove di solo moto traslatorio ha 3 gradi di libertà (per descriverne il moto è sufficiente conoscere le tre coordinate posizionali), una molecola biatomica ha 5 gradi di libertà: 3 per il moto traslatorio (del centro di massa) e 2 per il moto rotatorio:



Nel caso particolare in cui la distanza tra gli atomi fosse sensibilmente variabile (per effetto di vibrazioni), dovremmo introdurre un ulteriore grado di libertà che ne rende conto.
Il teorema dell'equipartizione dell'energia afferma che "*all'equilibrio, ad ogni grado di libertà è associata un'energia cinetica media* $\frac{1}{2}kT$ *per ogni molecola (*$\frac{1}{2}RT$ *per ogni mole)*".

Ad esempio, azoto, ossigeno e idrogeno (gas biatomici) hanno $U = \frac{5}{2}nRT$.

12.5 Trasformazioni adiabatiche di un gas perfetto

Tralasciando i dettagli matematici della dimostrazione, la pressione ed il volume sono legati dalla relazione $PV^{\gamma} = const.\quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}$.

12.6 Variazione di energia interna nei passaggi di stato

Durante i passaggi di stato non variano né la pressione, né la temperatura, ma solo il volume totale e le masse nei due stati di aggregazione tra cui avviene il passaggio. Studiamo nel dettaglio il passaggio di una certa massa di acqua dallo stato liquido a quello di vapore.
Isolamento termico. In questo caso, la variazione di energia interna avviene a spese del lavoro scambiato

$$\Delta U = L = L_{est} - L_{res} = \lambda \Delta m - P\Delta V ,$$

dove con Δm abbiamo indicato la quantità di acqua evaporata, con $\lambda = 22,6 \cdot 10^5 \, J/kg$ il *calore latente di vaporizzazione*, e con ΔV la variazione di volume in seguito al passaggio di stato. Di conseguenza, in isolamento termico, $\Delta U = \lambda \Delta m - P\Delta V$.
Assenza di lavoro esterno. Mantenendo le stesse condizioni di pressione e temperatura, l'energia interna non varia, quindi la sua espressione $\Delta U = Q - L_{res} = Q - P\Delta V$, deve coincidere con quella trovata nel caso precedente, $\Delta U = \lambda \Delta m - P\Delta V$. Confrontando le due espressioni otteniamo la relazione che fornisce il calore necessario per il passaggio di stato di una massa Δm di acqua:

$$Q = \lambda \Delta m .$$

Esempio. Un grammo di acqua alla pressione atmosferica occupa un volume di un centimetro cubo, mentre la stessa quantità di vapore occupa un volume di circa $1,671 dm^3$. Si calcoli il lavoro compiuto verso l'esterno dalla vaporizzazione di un grammo d'acqua, e la conseguente variazione di energia interna in seguito alla vaporizzazione.

- $P_{atm}\Delta V = 1 \cdot 10^5 Nm^{-2}(1671-1)\cdot 10^{-6} m^3 = 0,167 \cdot 10^3 J$.
- $\Delta U = \lambda \Delta m - P\Delta V = 2,257 \cdot 10^6 J \cdot kg^{-1} \cdot 10^{-3} kg - 0,167 \cdot 10^3 J = 2,09 \cdot 10^3 J$.

Ebollizione ed evaporazione

L'*evaporazione* consiste in emissione di vapore a partire dalla superficie del liquido, ed avviene a qualsiasi temperatura. Si tratta di un processo *endotermico* che avviene sottraendo energia all'ambiente esterno. All'aperto termina con la completa evaporazione del liquido (panni stesi ad asciugare), mentre in un ambiente chiuso avviene finché il vapore che si forma non è in grado di

esercitare una pressione pari ad un valore fissato, detto *pressione di saturazione*, dopodiché condensa (processo *esotermico*).
L'*ebollizione* è un processo in cui la formazione del vapore avviene all'interno della massa. E' il processo (al pari della fusione) a cui ci riferiamo quando parliamo di calore latente di evaporazione.

12.7 L'esperimento di Joule e il primo principio della termodinamica

La celebre esperienza permette di giustificare pienamente il primo principio della termodinamica. Ricostruiamo sinteticamente i passaggi.
Se mettiamo ghiaccio fondente nell'intercapedine del calorimetro, l'acqua nel vaso si porta ad una temperatura prossima agli 0°C. Mostriamo che la caduta dei pesi comporta la fusione di una parte del ghiaccio contenuta nell'intercapedine. $L_{est}=2\left(mgh-\frac{mv^2}{2}\right)$ è il lavoro compiuto sull'acqua. Il volume dell'acqua non cambia, così come la temperatura (che viene mantenuta a 0°C dal ghiaccio contenuto nell'intercapedine). Di conseguenza, l'energia interna dell'acqua è invariata, e il primo principio della termodinamica ci dice che il lavoro fatto dalle forze esterne si trasforma in calore. La conferma sperimentale di quanto appena detto si ottiene misurando la variazione di volume ΔV del ghiaccio fuso, e confrontando il valore misurato con quello, ottenuto dalla relazione
$\Delta m=\frac{Q}{\lambda}=\frac{L_{est}}{\lambda}=\frac{2\left(mgh-mv^2/2\right)}{\lambda}$, ricordando che $\Delta m=\rho_{H_2O}\Delta V$.
Prima dell'esperimento di Joule, con cui si svela la vera natura del calore, ovvero un *flusso di energia interna* da un corpo ad un altro, si riteneva che la materia possedesse un *fluido calorico*, per il quale fu coniata l'unità di misura della *caloria*, come la *quantità di calore necessaria per innalzare di un grado, da 14,5°C a 15,5°C, la temperatura di un grammo d'acqua alla pressione atmosferica.*

$$1cal=4{,}18J.$$

12.8 La propagazione del calore

Conduzione

Se scaldiamo l'estremità di una sbarretta metallica, dopo un po' ci accorgiamo che anche l'altra estremità è più calda. Si dice che il calore si è propagato lungo la sbarretta.
La quantità di calore Q, che in un intervallo di tempo Δt attraversa la sezione S della sbarretta di lunghezza L, senza che avvengano perdite attraverso la superficie laterale della sbarretta, è quantificata dall'esperienza in

$$Q=k\frac{S\Delta t\left(T_1-T_2\right)}{L},$$

dove abbiamo indicato con T_1-T_2 la differenza di temperatura tra le estremità della sbarretta (*il gradiente termico*), e con *k* la *conducibilità termica*.

Convezione

E' il meccanismo di propagazione del calore nei fluidi per effetto del movimento spontaneo delle molecole. La convezione può essere di due tipi:

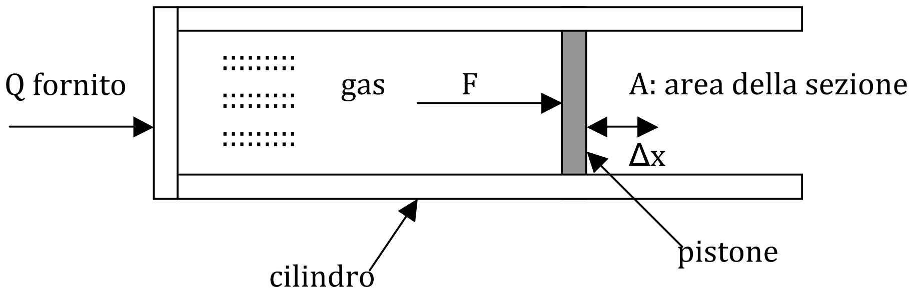
- *forzata*: quando, ad esempio, si soffia su un liquido caldo, le molecole d'aria urtano quelle del liquido e sottraggono loro parte dell'energia che possiedono, con l'effetto di raffreddare il liquido;
- *spontanea*: l'aria calda, per esempio quella vicino ad un calorifero, essendo meno densa tende a salire, ed il suo posto viene occupato da aria più fredda, che a sua volta si riscalda e tende a salire, innescando così un procedimento ciclico.

Irraggiamento

E' l'energia proveniente dal Sole, che non può arrivare né per conduzione, né per convezione, essendoci il vuoto tra il Sole e la Terra. L'irraggiamento si ha attraverso la propagazione delle onde elettromagnetiche.

12.9 Lavoro e diagramma pV per un gas perfetto

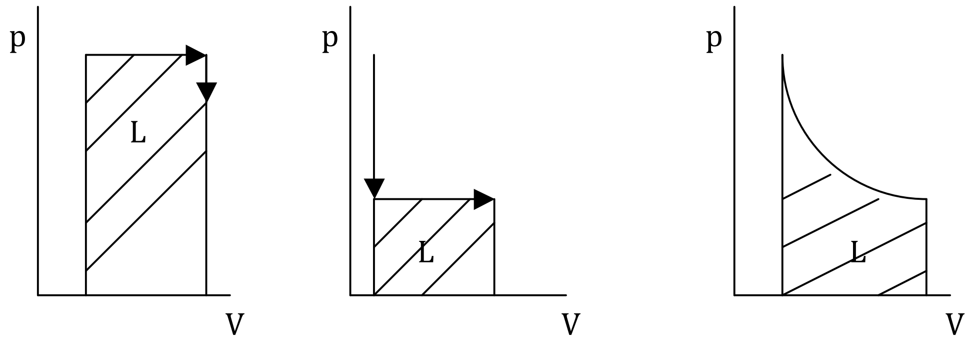
In figura è rappresentato un sistema costituito da un gas ideale racchiuso in un cilindro isolato termicamente e dotato di un pistone mobile.



La forza esercitata dal gas sul pistone per effetto del riscaldamento è $F = pA$, di conseguenza il lavoro compiuto dal gas sull'ambiente esterno è

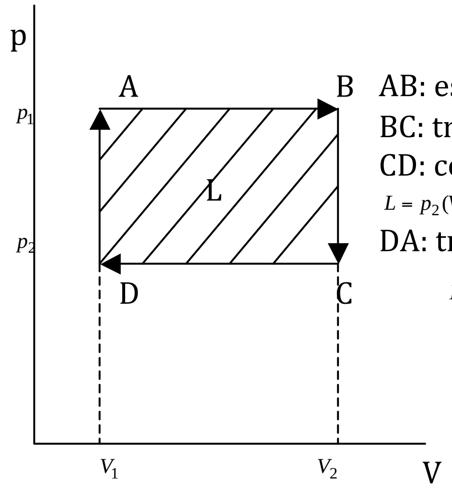
$$L_{res} = F\Delta x = pA\Delta x = p\Delta V\ .$$

Nei tre diagrammi che seguono, si rappresentano rispettivamente le trasformazioni *isobara-isocora*, *isocora-isobara*, e *isoterma*, con la quantificazione del lavoro scambiato in corrispondenza di ognuna di esse.



$L = p_1(V_2 - V_1)$ $\qquad$ $L = p_2(V_2 - V_1)$ $\qquad$ $L = \sum p\Delta V = nRT\frac{\Delta V}{V} = nRT\log\frac{V_2}{V_1}$

Particolarmente importante è il caso delle *trasformazioni cicliche*, in cui lo stato iniziale coincide con quello finale.



AB: espansione isobara $L = p_1(V_2 - V_1)$
BC: trasformazione isocora $L = 0$
CD: compressione isobara
$L = p_2(V_1 - V_2)$
DA: trasformazione isocora $L = 0$

$L = (p_1 - p_2)(V_2 - V_1) > 0$

Il lavoro nelle trasformazioni adiabatiche di un gas perfetto

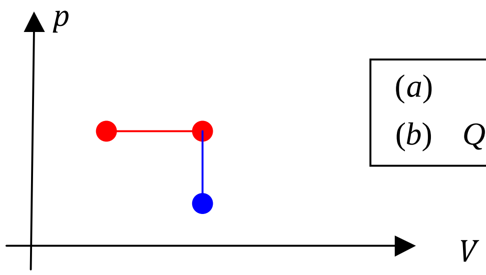
Il lavoro, in questo tipo di trasformazioni, è dato dalla relazione $L = \frac{P_1V_1 - P_2V_2}{\gamma - 1} = \frac{nR(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}$. Nel caso di gas perfetto monoatomico, $\gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow L = -\frac{3}{2}nR\Delta T = -\Delta U$.

Esercizi svolti

1. Un forno a microonde di 500W è usato per riscaldare 250ml d'acqua. Quanto tempo impiega per riscaldare l'acqua da 20°C a 90°C?
   - Il riscaldamento dell'acqua si compie in un intervallo di temperatura in cui non sono previsti cambi di stato. Di conseguenza il calore fornito è dato dalla relazione $Q = P\Delta t = mc_{H_2O}\Delta T$, da cui segue un tempo necessario per riscaldare la quantità d'acqua dato da
   $$\Delta t = \frac{250 \cdot 10^{-6} m^3 \cdot 10^3\, kg/m^3 \cdot 4{,}18 \cdot 10^3\, J/(kg \cdot K) \cdot (90 - 20)K}{5 \cdot 10^2\, J/s} = 146s = 2\min 46s .$$
2. Un barattolo isolato di alluminio di 200g contiene 50g di acqua a 20°C. Si riscaldano 300g di pallini di alluminio fino a 100°C e si mettono nel barattolo. Usando il valore del calore specifico dell'alluminio $c_{al} = 0{,}900\, kJ/(Kg \cdot K)$ e dell'acqua $c_{H_2O} = 4{,}18\, kJ/(Kg \cdot K)$, si trovi la temperatura finale del sistema, supponendo di non cedere calore all'ambiente esterno.
   - Il calore ceduto dai pallini di alluminio è $Q_c = m_p c_{al}(T - T_{i,al})$. Questo calore viene acquistato dal barattolo e dall'acqua in esso contenuta: $Q_a = (m_b c_{al} + m_{H_2O} c_{H_2O})(T - T_{i,b+H_2O})$. Siccome non viene ceduto calore all'ambiente esterno, si ha $Q_c + Q_a = 0$. Sostituendo nell'ultima espressione le quantità riferite al calore ceduto e a quello acquistato si ottiene
   $$(m_b c_{al} + m_{H_2O} c_{H_2O})(T - T_{i,b+H_2O}) + m_p c_{al}(T - T_{i,al}) = 0$$
   $$((m_b + m_p)c_{al} + m_{H_2O} c_{H_2O})T = (m_b c_{al} + m_{H_2O} c_{H_2O})T_{i,b+H_2O} + m_p c_{al} T_{i,al} .$$
   $$T = \frac{(m_b c_{al} + m_{H_2O} c_{H_2O})T_{i,b+H_2O} + m_p c_{al} T_{i,al}}{((m_b + m_p)c_{al} + m_{H_2O} c_{H_2O})} = 326K = 53°C$$

3. Una mole di gas perfetto è inizialmente nello stato caratterizzato da $p_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$, $V_1 = 1 \cdot 10^{-3} m^3$ e $U_1 = 450J$. Il gas viene fatto espandere a pressione costante fino al volume $V_2 = 3 \cdot 10^{-3} m^3$, infine viene raffreddato a volume costante fino al raggiungimento dello stato finale caratterizzato da $p_3 = 2 \cdot 10^5 Pa$, $V_3 = 3 \cdot 10^{-3} m^3$ e $U_3 = 900J$. (a) Si tracci questo processo su un diagramma *p*V e si calcoli il lavoro compiuto dal gas. (b) si trovi il calore fornito al gas durante il processo.

Stato 1	Trasformazione	Stato 2	Trasformazione	Stato 3
$pV = nRT$ $U = \frac{3}{2}nRT$	$Q = \Delta U + L$ $\Delta U = C_V \Delta T$ $L = p\Delta V$	$pV = nRT$ $U = \frac{3}{2}nRT$	$Q = \Delta U + L$ $\Delta U = C_V \Delta T$ $L = 0$	$pV = nRT$ $U = \frac{3}{2}nRT$
$p_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$	ISOBARA	$p_2 = 3 \cdot 10^5 Pa$	ISOCORA	$p_3 = 2 \cdot 10^5 Pa$
$V_1 = 1 \cdot 10^{-3} m^3$	$L = p\Delta V = 600J$	$V_2 = 3 \cdot 10^{-3} m^3$	$L = p\Delta V = 0J$	$V_3 = 3 \cdot 10^{-3} m^3$
$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = 36{,}1K$	$\Delta U = 900J$	$T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = 108{,}3K$	$\Delta U = -450J$	$T_3 = \frac{p_3 V_3}{nR} = 72{,}2K$
$U_1 = 450J$	$Q = 1500J$	$U_2 = 1350J$	$Q = -450J$	$U_3 = 900J$

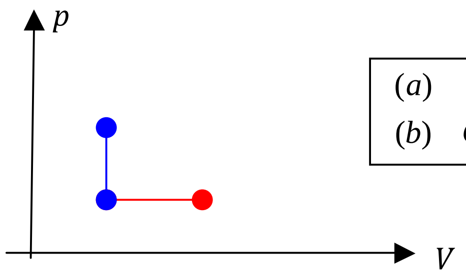


$(a) \quad L = L_{12} + L_{23} = 600J + 0J = 600J$

$(b) \quad Q = Q_{12} + Q_{23} = 1500J - 450J = 1050J$

4. Una mole di gas perfetto è inizialmente nello stato caratterizzato da $p_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$, $V_1 = 1 \cdot 10^{-3} m^3$ e $U_1 = 450J$. Il gas viene raffreddato a volume costante finché la pressione non raggiunge il valore $p_2 = 2 \cdot 10^5 Pa$, poi si espande a pressione costante fino al raggiungimento dello stato finale caratterizzato da $p_3 = 2 \cdot 10^5 Pa$, $V_3 = 3 \cdot 10^{-3} m^3$ e $U_3 = 900J$. (a) Si tracci questo processo su un diagramma *p*V e si calcoli il lavoro compiuto dal gas. (b) si trovi il calore fornito al gas durante il processo.

Stato 1	Trasformazione	Stato 2	Trasformazione	Stato 3
$pV = nRT$ $U = \frac{3}{2}nRT$	$Q = \Delta U + L$ $\Delta U = C_V \Delta T$ $L = p\Delta V$	$pV = nRT$ $U = \frac{3}{2}nRT$	$Q = \Delta U + L$ $\Delta U = C_V \Delta T$ $L = 0$	$pV = nRT$ $U = \frac{3}{2}nRT$
$p_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$	ISOCORA	$p_2 = 2 \cdot 10^5 Pa$	ISOBARA	$p_3 = 2 \cdot 10^5 Pa$
$V_1 = 1 \cdot 10^{-3} m^3$	$L = p\Delta V = 0J$	$V_2 = 1 \cdot 10^{-3} m^3$	$L = p\Delta V = 400J$	$V_3 = 3 \cdot 10^{-3} m^3$
$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = 36{,}1K$	$\Delta U = -150J$	$T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = 24{,}1K$	$\Delta U = 600J$	$T_3 = \frac{p_3 V_3}{nR} = 72{,}2K$
$U_1 = 450J$	$Q = -150J$	$U_2 = 300J$	$Q = 1000J$	$U_3 = 900J$

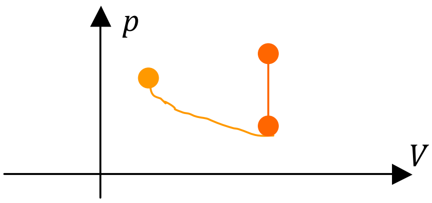


$(a) \quad L = L_{12} + L_{23} = 0J + 400J = 400J$

$(b) \quad Q = Q_{12} + Q_{23} = -150J + 1000J = 850J$

5. Una mole di gas perfetto è inizialmente nello stato caratterizzato da $p_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$, $V_1 = 1 \cdot 10^{-3} m^3$ e $U_1 = 450J$. Il gas si espande isotermicamente fino al raggiungimento dei valori di pressione $p_2 = 1 \cdot 10^5 Pa$ e volume $V_2 = 3 \cdot 10^{-3} m^3$, poi viene riscaldato a volume costante fino al raggiungimento dello stato finale caratterizzato da $p_3 = 2 \cdot 10^5 Pa$, $V_3 = 3 \cdot 10^{-3} m^3$ e $U_3 = 900J$. (a) Si tracci questo processo su un diagramma *p*V e si calcoli il lavoro compiuto dal gas. (b) si trovi il calore fornito al gas durante il processo.

Stato 1	Trasformazione	Stato 2	Trasformazione	Stato 3
$pV = nRT$ $U = \frac{3}{2}nRT$	$Q = \Delta U + L$ $\Delta U = C_V \Delta T$ $L = p\Delta V$	$pV = nRT$ $U = \frac{3}{2}nRT$	$Q = \Delta U + L$ $\Delta U = C_V \Delta T$ $L = 0$	$pV = nRT$ $U = \frac{3}{2}nRT$
$p_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$	ISOTERMA	$p_2 = 1 \cdot 10^5 Pa$	ISOCORA	$p_3 = 2 \cdot 10^5 Pa$
$V_1 = 1 \cdot 10^{-3} m^3$	$L = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = 330J$	$V_2 = 3 \cdot 10^{-3} m^3$	$L = p\Delta V = 0J$	$V_3 = 3 \cdot 10^{-3} m^3$
$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = 36{,}1K$	$\Delta U = 0J$	$T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = 36{,}1K$	$\Delta U = 450J$	$T_3 = \frac{p_3 V_3}{nR} = 72{,}2K$
$U_1 = 450J$	$Q = 330J$	$U_2 = 450J$	$Q = 450J$	$U_3 = 900J$

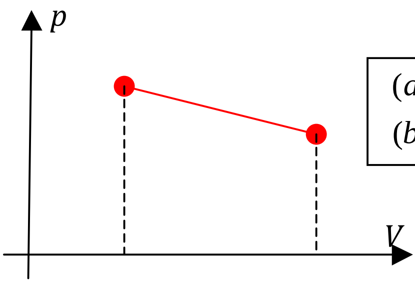


(a) $L = L_{12} + L_{23} = 330J + 0J = 330J$

(b) $Q = Q_{12} + Q_{23} = 330J + 450J = 780J$

6. Una mole di gas perfetto è inizialmente nello stato caratterizzato da $p_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$, $V_1 = 1 \cdot 10^{-3} m^3$ e $U_1 = 450J$. Il gas si espande e gli si fornisce calore, così che esso segua un percorso rettilineo su grafico *p*V fino al raggiungimento dello stato finale caratterizzato da $p_2 = 2 \cdot 10^5 Pa$, $V_2 = 3 \cdot 10^{-3} m^3$ e $U_2 = 900J$. (a) Si tracci questo processo su un diagramma *p*V e si calcoli il lavoro compiuto dal gas. (b) si trovi il calore fornito al gas durante il processo.

Stato 1	Trasformazione	Stato 2
$pV = nRT$ $U = \frac{3}{2}nRT$	$Q = \Delta U + L$ $\Delta U = C_V \Delta T$ $L = p\Delta V$	$pV = nRT$ $U = \frac{3}{2}nRT$
$p_1 = 3 \cdot 10^5 Pa$	RETTILINEA	$p_2 = 2 \cdot 10^5 Pa$
$V_1 = 1 \cdot 10^{-3} m^3$	$L = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)\Delta V = 500J$	$V_3 = 3 \cdot 10^{-3} m^3$
$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = 36{,}1K$	$\Delta U = 450J$	$T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = 72{,}2K$
$U_1 = 450J$	$Q = 950J$	$U_2 = 900J$



(a) $L = L_{12} = 500J$

(b) $Q = Q_{12} = 950J$

7. Una mole di un gas perfetto monoatomico è a 273 K e a 1 atm. Si trovino l'energia interna iniziale e finale, nonché il lavoro compiuto dal gas, se gli forniamo 500 J di calore (a) a pressione costante; (b) a volume costante.

- (a) $U_i = \frac{3}{2}nRT_i = 3400J; \quad V_i = \frac{nRT_i}{P_i} = 22,7l.$

$$\begin{cases} V_f = \frac{T_f V_i}{T_i} = \frac{T_f nR}{P_i} = \\ Q = \Delta U + L = \frac{3}{2}nR(T_f - T_i) + P_i(V_f - V_i) = \frac{3}{2}nR(T_f - T_i) + P_i\left(\frac{T_f nR}{P_i} - \frac{T_i nR}{P_i}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

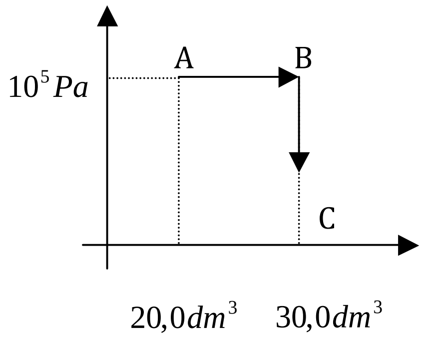
$$\begin{cases} V_f = \frac{T_f V_i}{T_i} = \frac{T_f nR}{P_i} = \\ Q = \frac{3}{2}nR(T_f - T_i) + P_i\left(\frac{T_f nR}{P_i} - \frac{T_i nR}{P_i}\right) = \frac{5}{2}nRT_f - \frac{5}{2}nRT_i = \frac{5}{3}\Delta U \Rightarrow \Delta U = 300J \Rightarrow U_f = 3700J \end{cases}$$

- (b) L'energia interna è una funzione di stato, quindi non dipende dalla particolare trasformazione eseguita: $U_i = \frac{3}{2}nRT_i = 3400J; \quad V_i = \frac{nRT_i}{P_i} = 22,7l$. La trasformazione a volume costante (isocora) non fa compiere lavoro al gas: $Q = \Delta U \Rightarrow U_f = Q + U_i = 500J + 3400J = 3900J$.

8. Un gas perfetto è sottoposto alle trasformazioni indicate nella seguente tabella:

Stato 1	Trasformazione	Stato 2	Trasformazione	Stato 3
$pV = nRT$ $U = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}pV$	$Q = \Delta U + L$ $\Delta U = C_V \Delta T$ $L = p\Delta V$	$pV = nRT$ $U = \frac{3}{2}nRT$	$Q = \Delta U + L$ $\Delta U = C_V \Delta T$ $L = 0$	$pV = nRT$ $U = \frac{3}{2}nRT$
$p_1 = 2 \cdot 10^5 Pa$	ISOBARA	$p_2 = 2 \cdot 10^5 Pa$	ISOCORA	$p_3 = 1 \cdot 10^5 Pa$
$V_1 = 1 \cdot 10^{-3} m^3$	$L = p\Delta V = +200J$	$V_2 = 2 \cdot 10^{-3} m^3$	$L = p\Delta V = 0J$	$V_3 = 2 \cdot 10^{-3} m^3$
$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR}$	$\Delta U = 300J$	$T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR}$	$\Delta U = -300J$	$T_3 = \frac{p_3 V_3}{nR}$
$U_1 = 300J$	$Q = 500J$	$U_2 = 600J$	$Q = -300J$	$U_3 = 300J$
	Trasformazione	Stato 4	Trasformazione	Stato 1
	$Q = \Delta U + L$ $\Delta U = C_V \Delta T$ $L = p\Delta V$	$pV = nRT$ $U = \frac{3}{2}nRT$	$Q = \Delta U + L$ $\Delta U = C_V \Delta T$ $L = 0$	$pV = nRT$ $U = \frac{3}{2}nRT$
	ISOBARA	$p_4 = 1 \cdot 10^5 Pa$	ISOCORA	$p_1 = 2 \cdot 10^5 Pa$
	$L = p\Delta V = -100J$	$V_4 = 1 \cdot 10^{-3} m^3$	$L = p\Delta V = 0J$	$V_1 = 1 \cdot 10^{-3} m^3$
	$\Delta U = -150J$	$T_4 = \frac{p_4 V_4}{nR}$	$\Delta U = 150J$	$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR}$
	$Q = -250J$	$U_4 = 150J$	$Q = 150J$	$U_1 = 300J$

9. Una mole di un gas perfetto compie il ciclo mostrato in figura: Riempire le tabelle con i dati forniti, ed illustrare il procedimento con il quale vengono calcolati quelli mancanti.



$PV = RT$	A	B	C
P (pa)	10^5	10^5	$0{,}7 \cdot 10^5$
V (m^3)	$20 \cdot 10^{-3}$	$30 \cdot 10^{-3}$	$30 \cdot 10^{-3}$
T (K)	241	361	241
$U = \frac{3}{2}RT$ (K)	3000	4500	3000

	AB isobara	BC isocora	CA isoterma	totali
W	$W_{AB} = P\Delta V = 1000$	$W_{AB} = P\Delta V = 0$	$W_{CA} = RT \ln \frac{V_A}{V_C} = -812$	188
ΔU	$U_B - U_A = 1500$	$U_C - U_B = -1500$	$U_A - U_C = 0$	0
ΔQ	2500	-1500	-812	188

10. Una mole di gas perfetto monoatomico viene riscaldata a volume costante da 300K a 600K. (a) Si trovi il calore fornito, il lavoro compiuto e la variazione di energia interna. (b) Si trovino queste grandezze nel caso in cui il gas è scaldato a pressione costante.
    - (a) A volume costante il lavoro è nullo: $L = 0$. La variazione di energia interna ed il calore fornito sono: $\Delta U = \frac{3}{2} nR\Delta T = 3780J \Rightarrow Q = \Delta U + 0 = 3780J$;
    - (b) A pressione costante $L = p\Delta V = nR\Delta T = 2493J$. La variazione di energia interna non dipende dalla trasformazione seguita, quindi $\Delta U = \frac{3}{2} nR\Delta T = 3780J \Rightarrow Q = \Delta U + L = 3780 + 2493J = 6273J$.

Problemi

1. Una massa d'acqua di 100g si trova alla temperatura di 50°C. Ad essa viene mescolata una massa d'acqua di 50g e viene raggiunto un equilibrio termico alla temperatura di 60°C, senza che il sistema scambi calore con l'esterno. Qual era la temperatura iniziale della massa di 50g?

2. Un gas perfetto si trova alla temperatura di 350K. Se la sua densità alla temperatura di 0°C ed alla pressione di 1 atm è pari a $1{,}25 kg/m^3$, determinare la velocità media delle sue particelle.

3. Due recipienti di volume V_1 e V_2 sono mantenuti a temperatura uguale e costante. Essi contengono lo stesso gas con le pressioni P_1 e P_2. Messi in comunicazione tra loro si stabilisce un'unica pressione P. Trovare P in funzione dei parametri di volume e pressione dati; determinare inoltre le condizioni affinché P risulti uguale alla semisomma delle pressioni iniziali.
4. Una pietra di 0,20 kg cade da ferma da un'altezza di 15 m e finisce in un secchio che contiene 0,35 kg di acqua. La pietra e l'acqua si trovano alla stessa temperatura iniziale. Il calore specifico della pietra è 1,84 $\frac{kJ}{kg \cdot °C}$, mentre quello dell'acqua è 4,18 $\frac{kJ}{kg \cdot °C}$.

Trascurando il calore assorbito dal secchio, si calcoli l'aumento di temperatura della pietra e dell'acqua.

5. Un iceberg è lungo 120 km, largo 35 km ed ha uno spessore di 230 m. Quanto calore è necessario per fondere questo iceberg (a temperatura iniziale di 0 °C) e trasformarlo in acqua a 0 °C? (il calore latente di fusione del ghiaccio è 333,5 $\frac{kJ}{kg}$, mentre la densità del ghiaccio è di 920 kg/m^3.

6. La lunghezza di una sbarra quando si trova alla temperatura di 20°C è 30 cm, mentre quando si trova alla temperatura di 100°C è 30,0264 cm. Si determini il coeficiente di dilatazione termica utilizzando il modello esponenziale che descrive la dilatazione lineare $L = L_0 e^{\alpha(T-T_0)}$.

7. Un gas perfetto monoatomico è inizialmente alla pressione di 4 atm e ha il volume di 1 l. Esso si espande isotermicamente finchè la sua pressione non è diventata 1 atm ed il suo volume non è diventato 4 l. Successivamente viene riportato allo stato iniziale mediante una trasformazione isobara con temperatura finale 250 K, ed una isocora. Si calcoli:
   a) La temperatura a cui avviene la trasformazione isoterma;
   b) Il lavoro compiuto durante il ciclo;
   c) La variazione di energia interna al termine dell'isocora ed al termine dell'isobara.

8. Un forno a microonde con una potenza di 500W fornisce energia per 2 minuti ad una quantità d'acqua pari a 250ml. Si calcoli la temperatura a cui giunge l'acqua, sapendo che la temperatura iniziale è di 20°C. (*Calore specifico dell'acqua:* $c_{H_2O} = 4{,}18\frac{kJ}{kg.K}$).
   - $$\begin{matrix} P = \dfrac{Q}{t} \\ Q = mc_{H_2O}\Delta T \end{matrix} \Rightarrow T - 20°C = \frac{Pt}{mc_{H_2O}} = 57{,}4°C \Rightarrow T = 77{,}4°C$$

9. Un pneumatico di automobile viene gonfiato alla pressione relativa di 200kPa quando la temperatura ambiente è 20°C. Dopo che l'automobile ha viaggiato ad alta velocità, la pressione relativa dell'aria è salita a 250kPa. Supponendo che il volume del pneumatico non sia cambiato, si trovi la temperatura dell'aria all'interno del pneumatico alla fine del viaggio. (*Ricordare che la pressione relativa è la differenza tra la pressione assoluta e quella dell'atmosfera...*).
   - Si tratta di una trasformazione isocora, di conseguenza
     $$\frac{nRT_i}{P_{ass,i}} = \frac{nRT_f}{P_{ass,f}} \Rightarrow T_f = \frac{P_{ass,f}}{P_{ass,i}}T_i = \frac{P_{rel,f} + P_{atm}}{P_{rel,i} + P_{atm}}T_i = \frac{250+100}{200+100}\cdot 293K = 342K = 69°C$$

10. Una barra di rame lunga 2m ha le estremità tenute alle temperature rispettivamente di 0° e 100°C. La superficie è isolata in modo da rendere trascurabile la dispersione di calore. Sapendo che la corrente termica è pari a 6,3W (*conduttività termica del rame* $k = 401\frac{W}{m\cdot K}$):Si calcoli: a) la sezione della sbarra, b) la temperatura a 50cm dall'estremità fredda.

11. Un recipiente isolato ha una superficie effettiva di $1800cm^2$, uno spessore di 2,0cm, ed una conduttività termica pari a $0{,}05\frac{W}{m\cdot K}$, e viene riempito con 3,0 kg di acqua e con una certa quantità di ghiaccio, entrambi a 0°C. Sapendo che la temperatura esterna (al recipiente) è

15°C e che il ghiaccio fonde in 27 ore e 26 minuti, si calcoli: a) il calore trasferito nel tempo occorso al ghiaccio per fondere; b) la quantità iniziale di ghiaccio.

12. Un proiettile di piombo (calore specifico $c = 128J(kg \cdot K)^{-1}$ che si muove alla velocità di $200ms^{-1}$, viene fermato in un blocco di legno. Supponendo che tutta la variazione di energia vada a riscaldare il proiettile, si trovi la temperatura finale del proiettile, se quella iniziale era di 20°C.

13. Due moli d gas perfetto sono soggetti alle seguenti trasformazioni termodinamiche tra i vari stati. La situazione è riassunta nella seguente tabella, che deve essere completata nelle parti mancanti. Che relazione sussiste tra le quantità di calore e lavoro scambiate?

Stato 1	isobara	Stato 2	isocora	Stato 3	isobara	Stato 4	isocora	Stato 4
$P_1 = 2atm$ $V_1 = 1l$ $T_1 =$	$\Delta U =$ $Q =$ $L =$	$P_2 =$ $V_2 = 2l$ $T_2 =$	$\Delta U =$ $Q =$ $L =$	$P_3 = 1atm$ $V_3 =$ $T_3 =$	$\Delta U =$ $Q =$ $L =$	$P_4 =$ $V_4 = 1l$ $T_4 =$	$\Delta U =$ $Q =$ $L =$	$P_1 = 2atm$ $V_1 = 1l$ $T_1 =$

Soluzioni

1. $100 \cdot c \cdot (60-50) = 50 \cdot c \cdot (T-60)$
   $T = 80°C$

2. $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}NkT \Rightarrow \frac{1}{2}\rho V_0 v^2 = \frac{3}{2}NkT \Rightarrow \frac{1}{2}\rho\frac{NkT}{P_0}v^2 = \frac{3}{2}NkT \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3TP_0}{\rho T_0}} = 558m/s.$

3. Il breve intervallo di tempo in cui si verifica la trasformazione è tale da poter considerare costante la temperatura. In questa ipotesi risulta:
   $\begin{array}{l} P_1V_1 = N_1kT \\ P_2V_2 = N_2kT \end{array} \Rightarrow P(V_1+V_2) = (N_1+N_2)kT = P_1V_1 + P_2V_2 \Rightarrow P = \frac{P_1V_1+P_2V_2}{V_1+V_2}$. La pressione è uguale alla semisomma delle pressioni iniziali nel caso in cui i volumi iniziali sono uguali.

4. L'energia meccanica della pietra all'impatto con l'acqua è tutta di tipo cinetico:
   $E = \frac{1}{2}mv^2 = mgh$. Questa energia andrà tutta a riscaldare l'acqua e la pietra, trasformandosi quindi in energia termica $mgh = mc_p\Delta T + m_{H_2O}c_{H_2O}\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{mgh}{mc_p + m_{H_2O}c_{H_2O}} = 0{,}016°C$.

5. Detto V il volume dell'iceberg, il calore necessario per la sua fusione è
   $Q = \rho V L_f = 2{,}96 \cdot 10^{20} J$.

6. Detta $L_0 = 30cm$ la lunghezza iniziale della sbarra, risulta
   $30{,}0264cm = 30cm e^{\alpha 80} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{70}\ln\frac{30{,}0264}{30} = 11 \cdot 10^{-6}K^{-1}$.

7.
   a) La temperatura a cui avviene la trasformazione isoterma;
      a. $\frac{P_2V_2}{T} = \frac{P_3V_3}{T_3} = \frac{P_1V_1}{T} \Rightarrow \frac{400}{T} = \frac{100}{T_3} \Rightarrow T = 4T_3 = 4 \cdot 250 = 1000K$ temperatura dell'isoterma.

b) Il lavoro compiuto durante il ciclo;

b. $W = W_{12} + W_{23} + W_{31} = 400\ln 4 + 1\cdot 10^5(1-4)\cdot 10^{-3} + 0 = 400\ln 4 - 300$. Ora, essendo la trasformazione ciclica, la variazione complessiva di energia interna è zero. Risulta:

$$\textit{isoterma} \quad Q_{12} = \Delta U_{12} + W_{12} = 400\ln 4$$

$$\textit{isobara} \quad Q_{23} = \Delta U_{23} + W_{23} = \frac{3}{2}nR(T_3 - T) - 300 = -\frac{9}{2}nRT_3 - 300 = -750J$$

$$\textit{isocora} \quad Q_{31} = \Delta U_{31} + W_{31} = \frac{3}{2}nR(T - T_3) = \frac{3}{2}nR3T_3 = \frac{9}{2}nRT_3 = 450J$$

c) La variazione di energia interna al termine dell'isocora ed al termine dell'isobara.

c. $\Delta U_{31} = 450J$ e $\Delta U_{23} = -450J$.

8. $$\begin{matrix} P = \dfrac{Q}{t} \\ Q = mc_{H_2O}\Delta T \end{matrix} \Rightarrow T - 20°C = \frac{Pt}{mc_{H_2O}} = 57{,}4°C \Rightarrow T = 77{,}4°C$$

9. Si tratta di una trasformazione isocora, di conseguenza

$$\frac{nRT_i}{P_{ass,i}} = \frac{nRT_f}{P_{ass,f}} \Rightarrow T_f = \frac{P_{ass,f}}{P_{ass,i}}T_i = \frac{P_{rel,f} + P_{atm}}{P_{rel,i} + P_{atm}}T_i = \frac{250+100}{200+100}\cdot 293K = 342K = 69°C$$

10.

- a) $\dfrac{Q}{t} = kA\dfrac{\Delta T}{\Delta x} \Rightarrow A = \dfrac{Q\Delta x}{tk\Delta T} = 3{,}14cm^2 = 3{,}14\cdot 10^{-4}m^2$
- b) $\dfrac{Q}{t} = kA\dfrac{\Delta T}{\Delta x} \Rightarrow \Delta T = \dfrac{Q\Delta x}{tkA} = \dfrac{6{,}3\cdot 0{,}50}{401\cdot 3{,}14\cdot 10^{-4}} = 25°C \Rightarrow T = 0°C + 25°C = 25°C$

11.

- a) $\dfrac{Q}{t} = kA\dfrac{\Delta T}{\Delta x} \Rightarrow Q = \dfrac{kA\Delta T}{\Delta x}t = 667kJ$
- b) $Q = mL_f \Rightarrow m = \dfrac{Q}{L_f} = \dfrac{667kJ}{333{,}5\dfrac{kJ}{kg}} = 2kg$.

12. $\Delta K = mc\Delta T \Rightarrow T_f = T_i + \dfrac{v^2}{2c} = 176°C$.

13.

Stato 1	isobara	Stato 2	isocora
$P_1 = 2atm$ $V_1 = 1l$ $T_1 = 12K$	$\Delta U = +300K$ $Q = +500K$ $L = +200K$	$P_2 = 2atm$ $V_2 = 2l$ $T_2 = 24K$	$\Delta U = -300K$ $Q = -300K$ $L = 0J$

Stato 3	isobara	Stato 4	isocora	Stato 4
$P_3 = 1atm$ $V_3 = 2l$ $T_3 = 12K$	$\Delta U = -150K$ $Q = -250J$ $L = -100J$	$P_4 = 1atm$ $V_4 = 1l$ $T_4 = 6K$	$\Delta U = +150K$ $Q = +150K$ $L = 0J$	$P_1 = 2atm$ $V_1 = 1l$ $T_1 = 12K$

Durante la trasformazione sono stati scambiati $L = 200 + 0 - 100 + 0 = 100J$ di lavoro (da intendersi *compiuto dal gas*) e $Q = 500 - 300 - 250 + 150 = 100J$ di calore. Essendo la trasformazione *ciclica*, la variazione totale di energia interna è zero.

SEZIONE OLIMPICA (gare di 1° livello PROGETTO OLIMPIADI 2013)

1. In un calorimetro di capacità termica $80JK^{-1}$ a 20°C, contenente $200cm^3$ d'acqua alla stessa temperatura, si versano $300g$ d'acqua a 70°C. Se non ci sono dispersioni di calore, qual è la temperatura raggiunta all'equilibrio?

2. Un gas perfetto alla temperatura T_1 e pressione p_1 si trova in una parte di un recipiente termicamente isolante, separato dall'altra parte del recipiente, inizialmente vuota, da un setto divisorio rigido. Il setto divisorio viene improvvisamente rimosso, ed il gas può espandersi liberamente, occupando l'intero recipiente. Siano T_2 e p_2 la temperatura e la pressione ad equilibrio raggiunto. In che relazione sono questi valori con quelli iniziali di temperatura e pressione?

3. Un corpo di massa $5kg$ assorbe calore ad un tasso costante di $49kJ$ al minuto, fondendo completamente in 5 minuti alla temperatura di fusione di 50°C. Successivamente, il corpo allo stato liquido si scalda fino alla temperatura di 125°C, sempre in 5 minuti. A quel punto inizia il processo di ebollizione che dura 15 minuti. Si calcoli la quantità di calore assorbita da $1kg$ del corpo tra l'istante in cui inizia la fusione e quello in cui termina l'ebollizione.

4. In uno scaldacqua a gas, l'acqua entra alla temperatura di 14°C ed esce alla temperatura di 33°C. In un certo intervallo di tempo circolano 9,8l d'acqua e vengono bruciati 27l di gas. L'azienda fornitrice del gas indica che il potere calorico del gas è di $37,44MJm^{-3}$. Si calcoli il rendimento dello scaldacqua.

5. Una persona è all'ombra in un'amaca in un giorno in cui la temperatura è di 37°C, uguale a quella del suo corpo. In queste condizioni, il processo migliore grazie al quale il suo corpo smaltisce il calore prodotto dal suo metabolismo (ad un tasso di 130W) è la traspirazione. Il calore di vaporizzazione dell'acqua alla temperatura di 37°C è $L = 2430kJkg^{-1}$. Si calcoli il volume di sudore che all'incirca evapora in un'ora.

6. In una stanza di dimensioni $8m \times 6m \times 4m$, è contenuta aria alla pressione di $1,013 \times 10^5 Pa$ e alla temperatura di 18°C. Si tenga presente che nell'aria, in prima approssimazione, l'80% delle molecole è d'azoto e il 20% d'ossigeno. Le masse molari dell'azoto e dell'ossigeno valgono rispettivamente $M_N = 28gmol^{-1}$ e $M_O = 32gmol^{-1}$. Si tratti l'aria come un gas perfetto. Determinare le masse d'azoto e d'ossigeno contenute nella stanza.