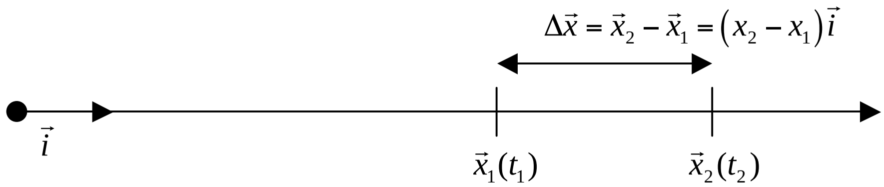
CAPITOLO 1
MOTI RETTILINEI E FORZE COSTANTI

1.1 Moto in una dimensione

La descrizione del moto dei corpi occupa una parte importante dello studio dell'universo fisico, si pensi per esempio al moto apparente del Sole ed al moto stagionale di stelle e pianeti. La branca della fisica che si occupa del moto dei corpi nel suo complesso, dalle cause agli effetti, è la **meccanica**. Questa consiste della **dinamica**, che studia le cause del moto dei corpi, e della **cinematica**, che si occupa sostanzialmente della *descrizione* del moto. Storicamente, uno degli scienziati più attivi nella descrizione del moto fu **Galileo Galilei** (1564-1642).
Mantenendo fede al carattere sintetico di queste note, addentriamoci nello studio della cinematica introducendo le nozioni di **punto materiale** (modello matematico di corpo del quale non interessano per lo studio del moto la forma, le dimensioni e l'eventuale moto rotatorio), e di **traiettoria** (modello matematico della curva descritta dal punto materiale durante il moto).
Quando la traiettoria è una porzione di retta, il moto si dice **rettilineo**. La descrizione della **posizione** di un punto sulla retta, grandezza fisica vettoriale, in un qualsiasi istante di tempo, richiede l'introduzione di un **sistema di riferimento**. Quest'operazione avviene fissando sulla retta un'**origine,** un'**unità di misura**, ed un **verso** di percorrenza (informazioni riassunte dal **versore** $\vec{i}$). Con questi elementi è possibile individuare la posizione di un punto sulla retta in un qualsiasi istante di tempo, mediante la grandezza $\vec{x}(t) = x(t)\vec{i}$:



Nell'illustrazione figura lo **spostamento** $\Delta\vec{x}$ rappresenta la distanza tra le posizioni occupate in due istanti successivi (l'istante di tempo t_1 **precede** l'istante t_2). Osserviamo che la distanza tra le posizioni occupate in due istanti successivi **non coincide necessariamente** con la distanza complessivamente percorsa, basti pensare ad un punto che fa per un po' "avanti e indietro". Lo spostamento $\Delta\vec{x}$ e l'intervallo di tempo Δt sono grandezze fisiche che si misurano nel Sistema Internazionale rispettivamente in metri ed in secondi. Queste due grandezze sono messe in relazione tra loro mediante il concetto di **velocità media**

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}.$$

La velocità media è una grandezza fisica derivata e si misura in $\frac{m}{s}$. Il concetto di **velocità istantanea** (per intenderci, quello fatto registrare dal tachimetro di un'automobile) è molto delicato e richiede, per essere formalizzato, la conoscenza di strumenti matematici avanzati. Tuttavia, possiamo farci un'idea di velocità istantanea considerando l'intervallo di tempo su cui viene calcolata la velocità media *molto piccolo*: anche lo spostamento sarà, di conseguenza, *molto piccolo*. Il rapporto tra queste due quantità, essendo (come dimostreremo con gli "strumenti matematici avanzati") un numero *finito*, rappresenterà la velocità istantanea del punto in moto rettilineo.

1.2 Il moto rettilineo uniforme

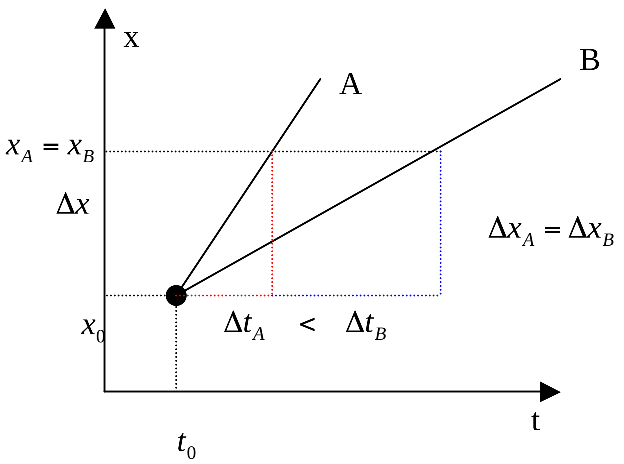
Si parla di **moto rettilineo uniforme** quando il punto percorre la porzione di retta a velocità costante (percorre, cioè, *spostamenti uguali in intervalli di tempo uguali)*. Lo spostamento in questo caso sarà dato dalla relazione

$$\Delta\vec{x} = \vec{v}\Delta t ,$$

dalla quale si evince che, nel moto a velocità costante, lo spostamento è **proporzionale all'intervallo di tempo**.
Se indichiamo con $\vec{x}_0$ il punto di partenza, e con t_0 l'istante iniziale, la posizione è legata al tempo dalla cosiddetta **legge oraria**:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}t .$$

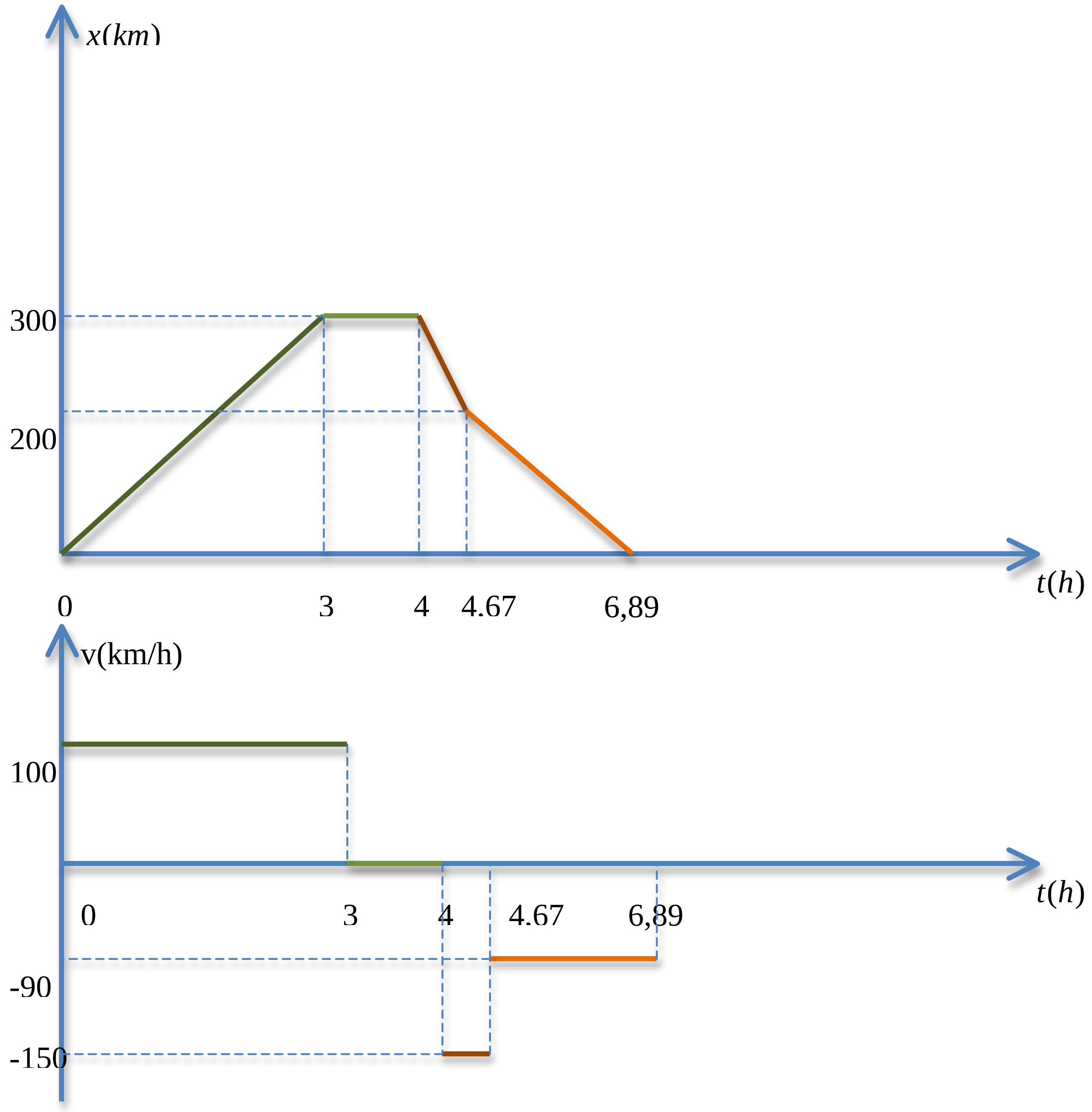
Legge oraria del moto rettilineo uniforme e sua rappresentazione grafica
Volendo rappresentare su un diagramma cartesiano la legge oraria, ci accorgiamo che questa descrive una semiretta con origine nel punto (x_0, t_0). Un diagramma cartesiano in cui viene rappresentata una legge oraria della posizione in funzione del tempo si dice un **diagramma spazio-tempo**, ed i punti si dicono **eventi**. Il significato geometrico della velocità è quello di **coefficiente angolare** della semiretta.
Nel diagramma spazio-tempo in figura sono rappresentate le leggi orarie di due punti che partono dalla stessa posizione iniziale, nello stesso istante di tempo. Possiamo concludere che la velocità del punto A è maggiore di quella del punto B? Perché?



Vogliamo adesso descrivere in termini cinematici un "viaggio andata e ritorno con sosta".
Supponiamo che un'automobile parta mantenendo una velocità di 100 km/h per le prime tre ore di viaggio, faccia una sosta di un'ora, e ritorni indietro alla velocità di 150 km/h nel primo terzo del viaggio di ritorno, ed alla velocità di 90 km/h nella restante parte.
Per descrivere in termini cinematici l'intero viaggio può essere utile organizzare i dati in nostro possesso in una tabella, contenente gli istanti e le posizioni iniziali e finali di ogni fase in cui viene suddiviso il viaggio, le relative velocità, gli spostamenti e gli intervalli di tempo; nell'ultima colonna si rappresenta la legge oraria della fase

	t_i (h)	x_i (km)	t_f (h)	x_f (km)	v (km/h)	Δx (km)	Δt (h)	$x = x_i + v(t - t_i)$
Fase 1	0	0	3	+300	+100	+300	3	$x = 100\dfrac{km}{h}t \quad 0 < t < 3$
Fase 2	3	+300	4	+300	0	0	1	$x = 300km \quad 3 < t < 4$
Fase 3	4	+300	4,67	+200	-150	-100	0,67	$x = 300 - 150(t-4) \quad 4 < t < 4h40\min$
Fase 4	4,67	+200	6,89	0	-90	-200	2,22	$x = 200 - 90(t - 4,67) \quad 4,67 < t < 6h53\min$

La tabella raccoglie tutte le informazioni relative al viaggio: la durata complessiva (6 ore e 53 minuti), il carattere di andata e ritorno (somma degli spostamenti uguale a zero), le leggi orarie relative alle posizioni occupate durante le varie fasi, i valori iniziali di posizione e tempo delle varie fasi. Il segno davanti ai valori della velocità ci permette di distinguere i tratti di andata da quelli di ritorno e, in generale, i tratti in cui ci allontaniamo da quelli in cui ci avviciniamo rispetto al punto di partenza.
Infine, la rappresentazione su diagramma cartesiano delle leggi orarie completa la descrizione del viaggio.



Esercizi svolti

1. *Due ciclisti transitano nello stesso istante davanti ad un riferimento segnaletico, viaggiando lungo la stessa direzione e nello stesso verso. Il primo ha una velocità di 29 km/h e il secondo di 31 km/h. Ciascuno mantiene costante la propria velocità. Calcolare il distacco tra loro dopo 5 minuti dal transito davanti al riferimento segnaletico.*
   - Indichiamo con $x_1 = v_1 t = 29t\, km/h$ la legge oraria del primo ciclista, e con $x_2 = v_2 t = 31t\, km/h$ quella del secondo, avendo scelto come punto di partenza quello da

cui transitano nello stesso istante, preso come tempo iniziale zero. Il distacco dopo 5 minuti dal transito sarà $\Delta x = (31-29)\frac{5}{60} = 0,167km = 167m$.

2. *Un'automobile parte mantenendo la velocità di 200 km/h per le prime due ore di viaggio, fa una sosta di un'ora, e torna indietro alla velocità di 160 km/h nel primo quarto del viaggio di ritorno, ed alla velocità di 100 km/h nella restante parte. Studiare il viaggio completando la tabella sotto.*

	t_i (h)	x_i (km)	t_f (h)	x_f (km)	v (km/h)	Δx (km)	Δt (h)	$x = x_i + v(t-t_i)$
Fase 1	0	0	2	400	200	400	2	$x = 200t$
Fase 2	2	400	3	400	0	0	1	$x = 400 + 0(t-2)$
Fase 3	3	400	3,625	300	-160	-100	0,625	$x = 400 - 160(t-3)$
Fase 4	3,625	300	6,625	0	-100	-300	3	$x = 300 - 100(t-3,625)$

Esercizi

1. Un pullman percorre un'autostrada in un primo tratto di 80 km alla velocità di 100 km/h, un secondo tratto di 60 km alla velocità di 125 km/h, e un terzo tratto di 95 km alla velocità di 90 km/h. Quale velocità media ha tenuto il pullman durante l'intero percorso?

2. Un'automobile, lunga 4 m, percorre una galleria lunga 321 m alla velocità di 72 km/h. Quanto tempo passa da quando l'auto comincia a entrare a quando è completamente uscita dalla galleria?

3. Sapendo che la velocità del suono nell'aria è circa la quarta parte di quella nell'acqua, e che per percorrere una distanza *d* nell'aria il suono impiega un tempo *t*, quale distanza percorre il suono nell'acqua in un tempo *3t*?

4. Un motociclista parte e si muove alla velocità costante di 10 m/s. Contemporaneamente, un'automobilista, che si trova 100 metri più avanti rispetto al motociclista, parte con velocità costante di 5 m/s nella stessa direzione e verso del motociclista. Dopo quanto tempo si troveranno nello stesso punto?

5. Due ciclisti transitano nello stesso istante di tempo da un incrocio, procedendo nella stessa direzione e nello stesso verso. Il primo ha una velocità di 29 km/h e il secondo di 31 km/h. Ciascuno mantiene costante la propria velocità. Dopo quanto tempo il loro distacco è di 750 m? (Scrivere le leggi orarie del moto dei due ciclisti, ed esprimere il risultato in minuti e secondi). Dopo quanto tempo il loro distacco è 1000 m, se viaggiano in verso opposto?
6. Due cani, A e B, partono nello stesso istante separati da una distanza di tre metri (A è "in vantaggio"), muovendosi alla velocità rispettivamente di $v_A = 0,5\frac{m}{s}$, $v_B = 1,25\frac{m}{s}$. Si scrivano le leggi orarie dei due cani, e si rappresentino sullo stesso diagramma spazio-tempo. Dopo quanto tempo B raggiunge A?

7. Durante una gara di nuoto (200 metri stile libero in vasca olimpica lunga 50 metri), dopo ogni virata un nuotatore perde il 5% della sua velocità. Sapendo che copre i primi 50 metri in 25 secondi, calcolare il tempo impiegato per coprire la distanza.

Soluzioni

1. $v_m = 98,5 kmh^{-1}$
2. $T = 16,25s$
3. $d_{H_2O} = 12 d_{aria}$
4. $t = 20s$
5. $t = 1350s = 22'30''$
6. $x_A = 3 + 0,5t \quad x_B = 1,25t \quad t = 4s$
7. $T = 108,2s$

1.3 Il moto rettilineo uniformemente accelerato

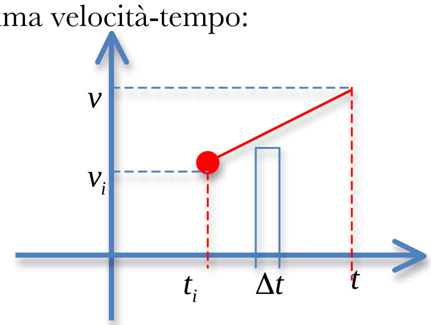
Consideriamo adesso il caso in cui un corpo si muove lungo una traiettoria rettilinea con una velocità *non* costante. In questo caso si definisce una grandezza fisica vettoriale, detta *accelerazione media*, che descrive le variazioni di velocità in relazione all'intervallo di tempo in cui queste avvengono:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Se il corpo è soggetto a *variazioni di velocità uguali in intervalli di tempo uguali*, allora si dice che si sta muovendo di moto rettilineo *uniformemente accelerato*. In un moto uniformemente accelerato quindi, l'*accelerazione è costante*, e coincide, ovviamente, con l'accelerazione media sopra definita.
Se manteniamo le stesse convenzioni e le stesse notazioni riguardo la scelta del sistema di riferimento, la legge oraria della velocità assume la seguente forma:

$$\vec{v} = \vec{v}_i + \vec{a}(t - t_i).$$

La velocità è rappresentata da una semiretta avente origine nel generico punto $(t_i; v_i)$ del diagramma velocità-tempo:



Legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato

Adesso vogliamo determinare la legge oraria della posizione nel caso di moto rettilineo uniformemente accelerato. Per questo scopo possiamo interpretare geometricamente, sul diagramma velocità-tempo, la legge oraria della posizione in un moto rettilineo uniforme: $x - x_i = v(t - t_i)$ suggerisce di pensare allo spostamento $x - x_i$ come all'*area* (con segno: se la velocità è negativa rispetto al sistema di riferimento scelto, vuol dire che stiamo tornando indietro e che, quindi, lo spostamento è negativo) racchiusa dal segmento che rappresenta la velocità, e l'asse dei tempi tra l'istante iniziale t_i, e quello generico *t*. E' possibile estendere questa considerazione al caso del moto rettilineo uniformemente accelerato? La risposta è affermativa, in prima approssimazione, se osserviamo che, per *intervalli di tempo piccoli*, la *variazione di velocità è piccola*: Δt "piccolo" allora $v = a\Delta t$ "piccolo". In base a questa osservazione possiamo immaginare di scomporre l'intervallo di tempo in cui viene valutata la velocità, in tanti piccoli intervalli di tempo in cui questa si può pensare approssimativamente costante, ed il moto rettilineo uniformemente accelerato quindi, può essere visto come la *somma* di *tanti* moti rettilinei uniformi. Lo spostamento è quindi rappresentato dall'area del *trapezio* di basi v_i e $v = v_i + a(t - t_i)$, ed altezza $t - t_i$.

Tradotto in formule: $x - x_i = \frac{1}{2}(v + v_i)(t - t_i) = \frac{1}{2}(2v_i + a(t - t_i))(t - t_i)$; la legge oraria della posizione, per un corpo in moto rettilineo uniformemente accelerato, è quindi;

$$x = x_i + v_i(t - t_i) + \frac{1}{2}a(t - t_i)^2.$$

Una relazione tra posizione, velocità e accelerazione

Le leggi orarie della posizione $x = x_i + v_i(t - t_i) + \frac{1}{2}a(t - t_i)^2$ e della velocità $v = v_i + a(t - t_i)$ possono essere combinate tra loro eliminando il parametro tempo tra le due equazioni, ottenendo così la relazione:

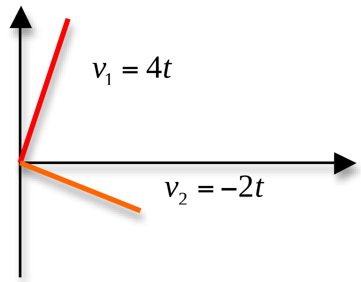
$$v^2 - v_i^2 = 2a\Delta x.$$

Questa relazione, ad esempio, è utile nelle situazioni in cui occorre stimare lo spazio di frenata di un veicolo.

Esercizi svolti

1. *Due automobili partono da fermo, nello stesso istante, da due punti distanti tra loro 2 km, venendosi incontro. Se le vetture hanno accelerazioni rispettivamente pari a* $4\,m/s^2$ *e* $2\,m/s^2$*, si calcoli l'istante di tempo in cui si incontrano, e la distanza del punto d'incontro da quello da cui è partita l'automobile con l'accelerazione maggiore. Si scrivano chiaramente le leggi orarie riferite alla posizione ed alla velocità delle due automobili, e si rappresentino queste ultime su un diagramma cartesiano.*

- Scriviamo le leggi orarie delle due automobili: $x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 = 2t^2$ e
  $x_2 = x_{02} + \frac{1}{2}a_2t^2 = 2 \cdot 10^3 - t^2$; si incontreranno quando
  $x_1 = x_2 \Rightarrow 2t^2 = 2 \cdot 10^3 - t^2 \Rightarrow t = 26s$, ad una distanza dal punto di partenza dell'automobile 1 di $x_1(26) = 1.3 \cdot 10^3 m$. Le leggi orarie delle velocità sono, rispettivamente, $v_1 = a_1t = 4t$ e $v_2 = -a_2t = -2t$.



2. *Mentre viaggiate con la vostra bicicletta alla velocità di 36 km/h, scatta l'arancione al semaforo. Sapendo che prima del rosso trascorrono 5 secondi e che vi trovate a 60 m dal semaforo, calcolate la minima accelerazione che vi permetterebbe di passare, e la velocità raggiunta.*

- $\Delta x = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2(\Delta x - v_0t)}{t^2} = 0{,}8\,m/s^2$; $v = v_0 + at = 14\,m/s = 50{,}4\,km/h$.

3. *La vostra automobile, mentre viaggia alla velocità di 120 km/h, ha uno spazio di arresto di 105 m. Calcolare la decelerazione, supponendola approssimativamente costante. Quale dovrebbe essere la massima velocità che dovreste tenere, per evitare l'impatto con un ostacolo che vi si presenta davanti ad una distanza di 80 m?*

- $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow a = \frac{-v_0^2}{2\Delta x} = 5{,}3 m/s^2$; sempre grazie alla $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v_0^2 = -2a\Delta x \Rightarrow v_0 = 29 m/s = 105 km/h$.

Esercizi

1. Due motociclisti su una strada rettilinea passano ad uno stesso incrocio a 5 s uno dall'altro. Il primo all'incrocio ha una velocità di 4 m/s, e un'accelerazione costante di $2m/s^2$, il secondo all'incrocio ha una velocità di 10 m/s e un'accelerazione costante di $3m/s^2$. Calcolare:
   a. dopo quanto tempo si incontrano; $\left[\; x_A = 45 + 14t + t^2 \quad x_B = 25t + 1{,}5t^2 \quad t = 3{,}5s \;\right]$
   b. a quale distanza dall'incrocio; $[x = 105{,}9m]$
   c. quanto valgono le loro velocità medie tra il passaggio per l'incrocio e il punto d'incontro? $\left[\; v_A = 12{,}5ms^{-1}; \quad v_B = 30{,}3ms^{-1} \;\right]$
2. Un furgone sospetto sta viaggiando in autostrada alla velocità di 200 km/h. Dieci secondi dopo essere passato di fianco ad una volante della polizia, gli agenti, che fino a quel momento stavano viaggiando alla velocità di 100 km/h, decidono di mettersi all'inseguimento del furgone, ed accelerano uniformemente raggiungendolo in due minuti.
   a. Scrivere le leggi orarie del furgone e della volante della polizia.
   - $x_F = 55{,}6t; \quad x_P = 27{,}8t + 0{,}7t^2$

   b. Calcolare l'accelerazione della volante della polizia. $a = 1{,}4ms^{-2}$
   c. Calcolare lo spazio percorso dalla volante da quando decide di inseguire il furgone a quando lo raggiunge. $\Delta x_P = 13{,}4 \cdot 10^3 m$
3. La volante della polizia del problema precedente, cinque secondi dopo aver affiancato il furgone decide di sbarrargli la strada mettendosi di traverso. Calcolare la minima decelerazione che deve imprimere il furgone in frenata, in modo da fermarsi senza urtare la fiancata della volante. Calcolare lo spazio percorso dal furgone da quando sfreccia di fianco alla volante a quando viene raggiunto da questa.
   - Il tempo d'arresto è $t = 5s$, in seguito ad una decelerazione di almeno $a = -11{,}1ms^{-2}$, e lo spazio percorso è $\Delta x = 13{,}5m$.
4. Un'automobile sta viaggiando in autostrada alla velocità di 100 km/h quando viene affiancata da una moto che viaggia alla velocità di 150 km/h. Istantaneamente l'auto accelera di $1ms^{-2}$.
   a. Scrivere le leggi orarie dell'automobile e della moto.
      $x_A = 27{,}8t + 0{,}5t^2 \quad x_M = 41{,}7t$
   b. Calcolare dopo quanto tempo l'automobile raggiunge la moto. $t = 27{,}8s$
   c. Calcolare la velocità dell'automobile nell'istante in cui raggiunge la moto. $v = 55{,}6ms^{-1}$.
   d. Calcolare l'accelerazione che deve sviluppare la moto, a partire dall'istante in cui viene raggiunta dall'automobile, per affiancarla nuovamente dopo 1 minuto. A questo punto la moto frena bruscamente fermandosi in 50 m. Calcolare la decelerazione. Scrivere la legge oraria della moto dall'istante iniziale a quello finale in cui si ferma.

- $a = 0{,}14ms^{-2} \quad a = -25ms^{-2} \quad x_M = \begin{cases} 41{,}7t & 0s < t < 27{,}8s \\ 1159 + 41{,}7(t - 27{,}8) + 0{,}07(t - 27{,}8)^2 & 27{,}8s < t < 60s \\ 2574 + 50{,}1(t - 60) - 12{,}5(t - 60)^2 & 60s < t < 62s \end{cases}$

5. Un furgone sta viaggiando alla velocità di 72 km/h, quando un gatto attraversa la strada a 22 m di distanza dalle ruote anteriori. L'autista, inchiodando, ottiene un moto uniformemente decelerato di 10 m/s^2; riuscirà ad evitare il gatto? $\Delta x = 20m < 22m$.
6. Un'automobile rallenta con un'accelerazione di -3,00 m/s^2 e si ferma in 200m. Calcolare:
   a) il tempo d'arresto dell'automobile, $\Delta t = 11{,}5s$
   b) la velocità iniziale dell'automobile. $v_0 = 34{,}6ms^{-1}$

7. Un automobilista fermo ad un semaforo riparte nell'istante in cui scatta il verde con accelerazione costante di $2{,}2\,m/s^2$. Contemporaneamente un pullman sulla corsia adiacente che viaggia alla velocità di 11 m/s sorpassa l'automobile.
   a) Dopo quanto tempo l'automobile raggiunge il pullman? $t = 10s$
   b) Con quale velocità l'automobile sorpassa il pullman? $v = 22ms^{-1}$

1.4 Dinamica: la prima e la seconda legge di Newton
La dinamica è quella branca della meccanica che studia le cause fisiche che determinano il moto dei corpi. Il suo studio si basa su tre principi enunciati da Newton (1642-1727) nel suo famoso trattato, i "Principia" (1687), anche se in realtà i primi due erano già noti a Galileo (1564-1642).

La prima legge della dinamica: il *principio d'inerzia*
Primo principio della dinamica: *un qualunque punto materiale che non sia sottoposto ad alcuna forza, o rimane in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme.*
Il primo principio è detto *Principio d'inerzia*, dove per inerzia del moto si intende la tendenza naturale a non cambiare lo stato del moto se non interagiscono cause specifiche. Il principio d'inerzia, in sostanza, afferma che la velocità di un corpo cambia solo se c'è qualche forza che la costringe a cambiare. La comprensione da parte di Galileo di questo principio ha permesso alla fisica di superare la visione aristotelica secondo cui *vi era una forza laddove vi era una velocità.*
La verifica sperimentale del primo principio della dinamica è tutt'altro che semplice. Il motivo è dovuto alla *quasi impossibilità di trovare un punto materiale non soggetto a forze:* basti pensare al peso, che è una forza sempre presente. Gli esperimenti condotti da Galileo avvennero quindi in una situazione di *risultante delle forze nulla:* si pensi per esempio al moto di un corpo su un piano orizzontale (in cui il peso è bilanciato dalla reazione vincolare) sul quale si possa ridurre progressivamente (ma non eliminare del tutto) l'attrito.
Tuttavia, una conoscenza sempre più approfondita delle caratteristiche dell'universo ha permesso di pensare ad un punto materiale non soggetto a forze come immerso negli spazi enormi, *praticamente vuoti*, che si possono trovare nelle regioni più remote dell'universo, dove è *praticamente nulla,* qualsiasi interazione del nostro punto materiale con altri corpi materiali.
Tutto ciò ha portato ad una riformulazione del principio d'inerzia in questi termini: *esiste un sistema di riferimento "inerziale" rispetto al quale un qualunque punto materiale che sia sufficientemente lontano da tutti gli altri corpi, o rimane in quiete, o si muove di moto rettilineo uniforme.*

La seconda legge della dinamica
Abbiamo visto che la grandezza cinematica correlata al concetto di forza non è la velocità. L'enunciato del secondo principio della dinamica ci dice come stanno realmente le cose.

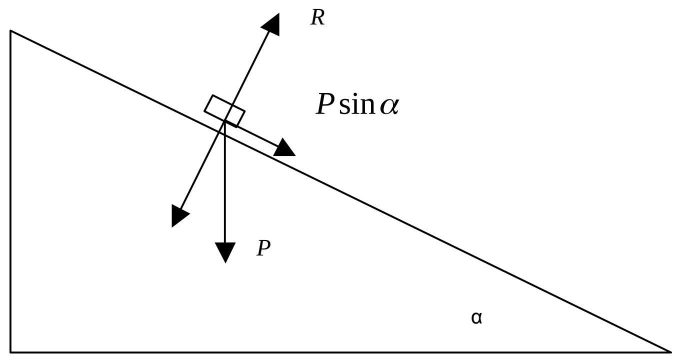
Secondo principio della dinamica: *un qualunque punto materiale soggetto a forze ha un'accelerazione vettorialmente proporzionale alla risultante di tali forze.*
La costante di proporzionalità si dice *massa inerziale*, e si può interpretare come una misura dell'opposizione del corpo ai cambiamenti di velocità.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Dunque, la grandezza cinematica conseguenza diretta dell'azione di una forza è l'*accelerazione.*
Il peso
Come vedremo più avanti, tutti i corpi dotati di massa interagiscono tra loro per effetto della *forza gravitazionale*, di cui il peso ne rappresenta un'approssimazione valida nelle vicinanze della superficie terrestre. Il peso è definito come la forza con cui la Terra attrae i corpi verso il proprio centro. La direzione e il verso sono quelli verticali (del *filo a piombo*), inoltre, la constatazione del fatto che tutti i corpi in prossimità della superficie terrestre cadono con la medesima accelerazione, permette di concludere che l'intensità della forza peso è costante.
Una prima verifica di questa relazione in laboratorio può essere fatta nel caso semplice di un corpo in caduta libera in un contenitore in cui sia stato fatto il vuoto. Il peso è approssimativamente costante per cadute "brevi" ed il moto risulta quindi uniformemente accelerato con accelerazione $g = 9{,}8 m/s^2$. Il secondo principio della dinamica nel caso dei corpi in caduta libera in prossimità della superficie terrestre assume quindi la forma:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

La verifica fu fatta da Galileo mediante l'utilizzo di un piano inclinato, il più liscio possibile in modo da limitare al minimo l'attrito. Una versione moderna di questo esperimento può essere realizzata con una rotaia ad aria. Lo schema delle forze in gioco è il seguente:



Al variare dell'inclinazione dell'angolo α cambia l'intensità della componente del peso lungo la direzione del piano inclinato, del moto del corpo. In questo caso il secondo principio della dinamica assume la forma:

$$P sen\alpha = ma$$

La mancanza del simbolo di vettore sopra le forze è dovuta alla scelta del sistema di riferimento lungo il quale avviene il moto: quello del piano inclinato. Poiché

$$P = mg$$

risulta

$$a = g\sin\alpha$$

che rappresenta l'accelerazione di un corpo in caduta "rallentata" su un piano inclinato privo d'attrito.

1.5 La misura dinamica delle forze

In generale il secondo principio della dinamica può essere utilizzato per la *misura dinamica della forza* purché si conosca la massa del punto materiale e si posseggano sufficienti informazioni sul moto (per esempio l'accelerazione). In caso di azione di più forze (tutte note tranne una) la forza incognita si determinerà per differenza (vettoriale!!) tra la somma delle forze note ed il prodotto della massa per l'accelerazione prodotta dall'azione di tutte le forze in gioco.

Queste considerazioni ci portano in modo naturale a considerare il *problema fondamentale della dinamica del punto materiale* che consiste nella *previsione del moto di un punto materiale soggetto all'azione di forze note, in un sistema di riferimento precedentemente fissato.*

Affronteremo questo problema analizzando singolarmente alcune situazioni di base, per salire poi "di livello" mediante la realizzazione di sistemi composti da più situazioni di base.

La forza d'attrito statico

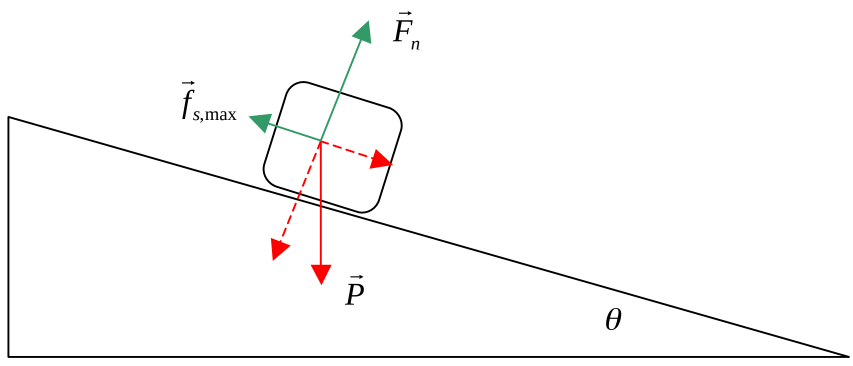
Si tratta di una forza di natura elettromagnetica dovuta ai legami tra le molecole delle superfici a contatto. La forza di attrito statico s'indica di solito con la notazione $\vec{f}_s$.

Questa forza si manifesta quando, ad esempio, proviamo a spostare un oggetto appoggiato su un tavolo: se non esercitiamo una forza sufficientemente intensa, l'oggetto non si muove. Se aumentiamo progressivamente la forza esercitata, ci accorgiamo che ad un certo punto l'oggetto inizia a muoversi: abbiamo "vinto" la cosiddetta *forza d'attrito massima*, che si indica con la notazione $\vec{f}_{s,\max}$. Vediamo quali sono le caratteristiche di questa forza.

1. Dipende dalla natura delle superfici a contatto, ma non dall'area di queste;
2. Si verifica che è *direttamente proporzionale* alla forza normale: la costante di proporzionalità si chiama *coefficiente di attrito statico* e si indica con il simbolo μ_s.

Riassumendo quanto appena detto, la forza di attrito massima ha la direzione del moto e verso ad esso opposto, ed intensità $f_{s,\max} = \mu_s F_n$.

L'attrito sul piano inclinato



Il coefficiente di attrito statico

Dall'osservazione della figura sopra risulta che le equazioni della statica, nel sistema di riferimento con un asse parallelo alla direzione del piano inclinato, possono essere scritte così:

$$x:\begin{cases} P_x - f_{s,\max} = 0 \\ F_n - P_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{s,\max} = P_x \\ F_n = P_y \end{cases} \Rightarrow \mu_s = \frac{f_{s,\max}}{F_n} = \frac{P_x}{P_y} = \frac{mg\sin\theta}{mg\cos\theta} := \tan\theta .$$

Esercizi

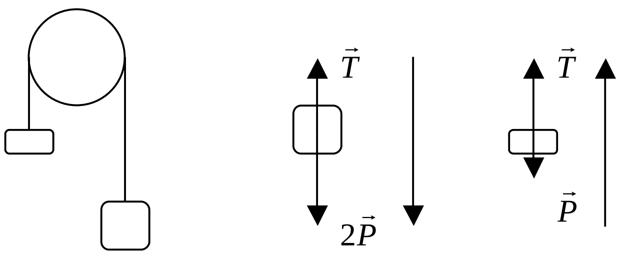
1. Un blocco del peso di 100N è in equilibrio su un piano inclinato di 30° sull'orizzontale per effetto della forza d'attrito statico e del contatto con una molla di costante elastica K=300 N/m , che risulta essere allungata di 10 cm nella configurazione di equilibrio.
   a) determinare il coefficiente di attrito statico;
   b) potrebbe esistere la situazione di equilibrio in cui la molla è allungata di 20 cm?

2. Una scatola del peso di 20N è in equilibrio su un piano inclinato di 30°. Si determinino la forza d'attrito massima e la reazione vincolare.

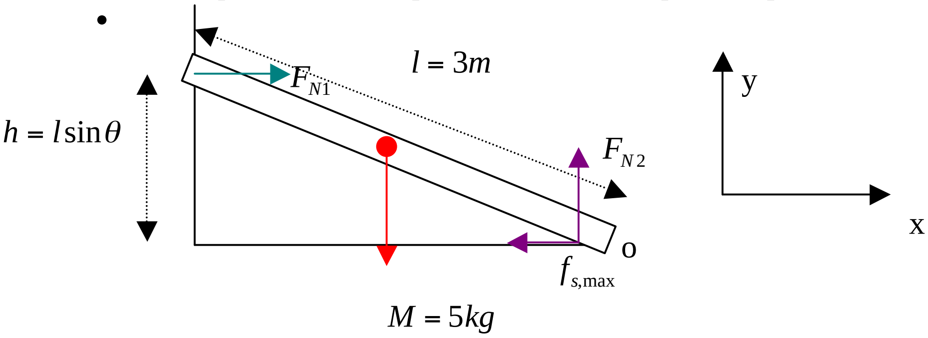
La forza d'attrito dinamico (radente)

E' una forza che si manifesta sulla superficie di contatto di due corpi in moto relativo di strisciamento, ed è indipendente dall'estensione della superficie di contatto e, per opportuni valori, dalla velocità relativa. La forza d'attrito radente ha un'intensità direttamente proporzionale a quella della forza normale $\vec{F}_n$, la direzione coincidente con quella del moto, ed il verso opposto. Il coefficiente di proporzionalità è detto *coefficiente di attrito dinamico*, e si indica con μ_d.

Esercizi svolti

1. Nel dispositivo noto come *macchina di Atwood* due masse, una il doppio dell'altra, vengono rilasciate da una condizione di equilibrio. Si determini la velocità raggiunta dalle due masse quando queste hanno percorso un tratto di 1 metro.
   - 

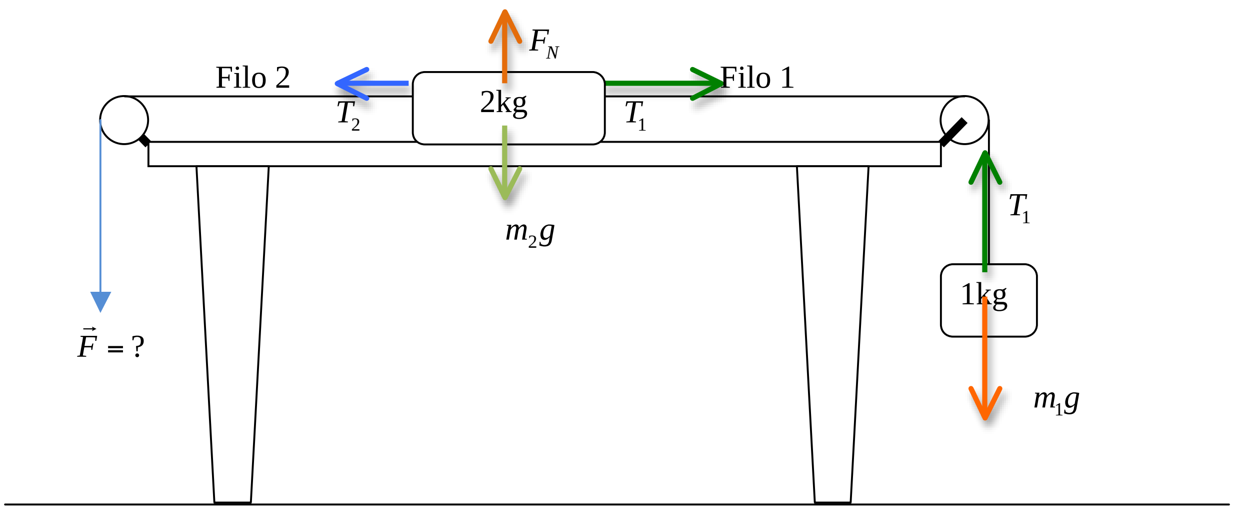
   - Le equazioni della dinamica per le due masse, scritte separatamente nel rispetto delle direzioni scelte , sono: $\begin{cases} 2ma = 2mg - T \\ ma = T - mg \end{cases} \Rightarrow a = \frac{g}{3}$. Dalla relazione $v^2 - v_0^2 = 2ah$ segue $v = \sqrt{\frac{2gh}{3}} = 2{,}6\frac{m}{s}$.

2. Una scala della massa di 5 kg e della lunghezza di 3 m è appoggiata ad una parete verticale senza attrito. Se il coefficiente di attrito statico tra la scala ed il pavimento è 0,5, si calcoli l'altezza da terra del punto sotto il quale la scala non è più in equilibrio.
   - 

Le equazioni della statica descrivono l'equilibrio: $\begin{array}{ll} (x) & F_{N1} = f_{s,\max} = \mu F_{N2} \\ (y) & Mg = F_{N2} \\ (o) & +Mg\dfrac{l}{2}\cos\theta - F_{N1}l\sin\theta = 0 \end{array}$.

Dall'ultima equazione segue che $\tan\theta = \dfrac{Mg}{2F_{N1}} = \dfrac{Mg}{2\mu F_{N2}} = \dfrac{Mg}{2\mu Mg} = 1 \Rightarrow \theta = 45° \Rightarrow h = l\sin\theta = 2{,}1m$.

3. Nel seguente dispositivo meccanico, la massa appoggiata sul tavolo (senza attrito) misura 2kg, mentre quella appesa al filo che scorre nella gola della carrucola misura 1kg. Il valore dell'accelerazione di gravità sia $10\dfrac{m}{s^2}$. Si calcoli:
   a) La forza che dobbiamo applicare al filo 2 affinché il sistema costituito dalle due masse risulti in equilibrio;
   b) Il valore della tensione nei due fili (supposti inestendibili e di massa trascurabile).



- Si ha una situazione di equilibrio se: $\begin{cases} m_1 g - T_1 = 0 \\ T_1 - T_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow F = T_2 = T_1 = m_1 g$. Il risultato non dovrebbe sorprendere: il mancato contributo al movimento da parte del peso della massa sul tavolo, è dovuto al fatto che questo viene equilibrato dalla forza normale alla superficie del tavolo.

4. *Due masse sono appese alle estremità di un filo, inestendibile e di massa trascurabile, avvolto nella gola di una carrucola, anch'essa di massa trascurabile. Sapendo che si muovono con un'accelerazione pari ad un terzo di quella di gravità, si calcoli il rapporto delle due masse.*

- Sia $m_1 > m_2 \Rightarrow \begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ T - m_2 g = m_2 a \end{cases} \Rightarrow \dfrac{g}{3} = a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \Rightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{m_1/m_2 - 1}{m_1/m_2 + 1} \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = 2$.

5. *Si calcoli la forza con la quale si spingono due pattinatori di massa* $m_1 = 50kg, m_2 = 60kg$, *inizialmente fermi a contatto tra loro, sapendo che la spinta ha avuto una durata di mezzo secondo, e che dopo il rilascio quello più leggero ha raggiunto una velocità* $v_1 = 5m/s$. *Quale sarà l'accelerazione del pattinatore più pesante?*

- Possiamo considerare costante l'azione della forza durante la spinta; il moto che ne consegue è quindi rettilineo uniformemente accelerato. Il pattinatore più leggero ha un'accelerazione di $a_1 = \frac{v_1 - 0}{t - 0} = 10\frac{m}{s^2}$ e, per la seconda legge della dinamica, la forza che agisce su di esso è $F_{21} = m_1 a_1 = 500N$. Per la terza legge della dinamica, sul pattinatore più pesante agisce una forza vettorialmente opposta a quella appena trovata:
  $F_{12} = -F_{21} = m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{-F_{21}}{m_2} = -8,3\frac{m}{s^2}$.

6. *Un corpo di massa un chilogrammo si trova inizialmente in quiete all'estremità superiore di un piano inclinato di 30° sull'orizzontale, quando inizia a scivolare verso il basso con attrito trascurabile. A metà strada incontra un corpo di massa 2 kg, inizialmente in quiete e, in seguito al contatto, scivolano attaccati. Se nella seconda parte del piano inclinato l'attrito non è più trascurabile, si calcoli l'accelerazione dei due corpi se il coefficiente di attrito dinamico è 0,5.*

Quando il primo corpo incontra il secondo si viene a formare un corpo unico di massa 3 kg. La seconda legge della dinamica applicata a questo corpo porta alla conclusione cercata:

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 + m_2)g\sin\theta - \mu(m_1 + m_2)g\cos\theta \Rightarrow a = g\left(\frac{1}{2} - 0,5\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0,66\frac{m}{s^2}$$

Esercizi

1. Su un blocco della massa di 20 kg viene esercitata, tramite una corda tesa a formare un angolo di 30° col pavimento orizzontale, una forza costante di intensità 10 N. In assenza d'attrito tra il blocco ed il pavimento, calcolare:
   a. L'accelerazione del blocco, $a = 0,43ms^{-2}$
   b. La velocità raggiunta dopo 10 s, lo spazio percorso in tale intervallo di tempo.
   $v = 4,3ms^{-1}; \quad \Delta x = 24,6m$
2. Due forze di intensità 10N e 20N agiscono su una massa di 5 kg nel piano formando un angolo di 60°. Si determini l'accelerazione della massa. $a = 5,3ms^{-2}$
3. Partendo da ferma, un'automobile di 1300 kg raggiunge i 100 km/h in 9,7s. Calcolare
   a) La forza media risultante che ha agito su di essa. $F = 3,7 \cdot 10^3 N$
   b) Lo spazio percorso in 9,7s. $\Delta x = 135m$
4. Un modellino di automobile di 2,4 kg ha un'accelerazione di 2,5 m/s^2 diretta verso sud-ovest. Determinare modulo e direzione della forza totale che agisce su di esso.
   $F = 6N$ verso sud ovest
5. Una persona su una canoa inizia a pagaiare ed accelera da zero a $0,60ms^{-1}$ in 0,41m. La massa totale della persona e della canoa è 73kg. Calcolare la forza che agisce sulla canoa.
   $F = 32N$
6. Un paracadutista di 75kg apre il paracadute e la sua velocità passa da 180 km/h a 15km/h in 2,5s. Calcolare la forza media che agisce sul paracadutista.
   $F = 1375N$ verso l'alto

7. Due scatole sono affiancate su un tavolo privo d'attrito e sono messe in moto da una forza applicata a una di esse. Calcola l'intensità della forza che la scatola di massa 3kg esercita su quella di 2kg se sulla prima agisce una forza di 10N.

$$F_{12} = 4N$$