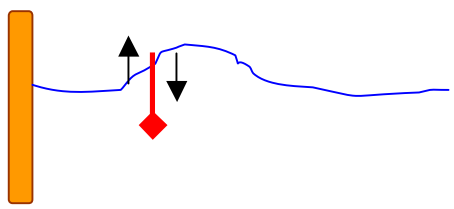
CAPITOLO 9
ONDE

9.1 Onde trasversali e onde longitudinali

Consideriamo una fune tesa, con un'estremità fissata ad una parete verticale. Se gli diamo una piccola scossa in corrispondenza dell'estremità libera, osserviamo che la sua forma si modifica in modo regolare nel tempo. Quella specie di "gobba" che vediamo viaggiare nel caso della corda fissata, o quei cerchi concentrici nell'acqua, che si propagano in seguito alla caduta di un oggetto, è chiamata *onda impulsiva*. La perturbazione del mezzo è quindi rappresentata dalla variazione di forma della corda, o della superficie di uno stagno, rispetto alla configurazione d'equilibrio.



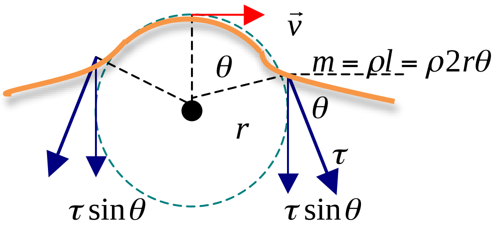
Più precisamente, si definisce *onda meccanica* la propagazione di una *perturbazione* in un mezzo soggetto a *forze di richiamo*, quelle forze cioè, che tendono a riportare in quiete una piccola porzione del mezzo che si comporta come un tutt'uno durante il moto (*elemento del mezzo*).
E' importante precisare che, insieme alla perturbazione del mezzo, si propaga *energia*, e non, come si potrebbe pensare, *materia*. Per capire meglio quest'affermazione può essere d'aiuto pensare al moto di un comune galleggiante da pesca (l'elemento del mezzo), in presenza di moto ondoso: oscilla in acqua senza sostanziali cambiamenti della sua posizione.
Quando si parla di energia si intende *energia cinetica* dovuta alla velocità degli elementi del mezzo, ed *energia potenziale*, legata alla presenza di forze di richiamo.
Le onde si propagano lungo una retta (modello della corda tesa), su un piano (modello dei cerchi concentrici nell'acqua), o nello spazio (modello delle sfere concentriche in aria).

In base al modo con cui si propaga la perturbazione, le onde si classificano in due grandi categorie:
- *Onde trasversali*: sono quelle in cui la perturbazione è *perpendicolare* alla direzione di propagazione dell'onda (sono esempi di questo tipo le onde prodotte agitando una corda come nell'esempio precedente, oppure gettando un sasso in un recipiente contenente un liquido a riposo…);
- *Onde longitudinali*: in questo caso la perturbazione è *parallela* alla direzione di propagazione dell'onda. Le onde *sonore* sono forse l'esempio più rilevante di onde longitudinali; la vibrazione di un corpo (corda di uno strumento musicale, diapason…) produce una perturbazione della densità e della pressione dell'aria che si propaga mediante gli urti tra le molecole di questa, le quali si limitano ad oscillare avanti e indietro rispetto alla posizione di equilibrio, mediante compressione e rarefazione degli strati d'aria contigui.

9.2 La velocità di propagazione di un'onda

Siccome un'onda trasporta energia, è importante valutarne la velocità di propagazione. Per questo scopo utilizzeremo un metodo non molto preciso, ma sicuramente efficace: l'*analisi dimensionale*. Si tratta di stabilire innanzitutto quali grandezze fisiche possono *ragionevolmente* condizionare quella che vogliamo stimare, nel nostro caso la velocità. Poi, attraverso il prodotto di opportune potenze di queste, si determina una grandezza che ha le stesse *dimensioni* di quella cercata, nel nostro caso un rapporto tra una lunghezza ed un tempo. Ora, poiché le costanti non condizionano i calcoli basati sulle dimensioni, il risultato ottenuto sarà *proporzionale* alla relazione "vera" tra le grandezze.

E' opportuno precisare ancora una volta che l'analisi dimensionale è un metodo utile per la *stima* di una grandezza fisica, il cui valore vero deve essere ottenuto dall'applicazione di opportune leggi della Fisica (cosa non sempre agevole…).
Nel caso di una corda tesa, la velocità di propagazione dipende dalla *densità lineare della corda* $[\rho] = ml^{-1}$ (le cui dimensioni sono date dal rapporto tra una massa ed una lunghezza) e dalla *tensione* $[\tau] = mls^{-2}$ (le cui dimensioni sono date dal rapporto tra il prodotto di una massa per una lunghezza, ed un tempo al quadrato). Una combinazione "utile può essere $[\tau\rho^{-1}] = l^2 s^{-2} \Rightarrow v \propto \sqrt{\tau\rho^{-1}}$. Utilizzando le leggi della dinamica, si può dimostrare che, effettivamente, la velocità di propagazione di un'onda in una corda tesa è data proprio dalla relazione $v = \sqrt{\tau\rho^{-1}}$.
Per questo scopo, possiamo considerare l'elemento di corda attraversato dalla perturbazione come una massa in moto circolare uniforme, la cui accelerazione centripeta è fornita dalla tensione della corda.



Dalla figura risulta che la forza responsabile dell'accelerazione centripeta è la risultante dei componenti verticali della tensione:

$$m\frac{v^2}{r} = 2\tau\sin\theta \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\tau r\sin\theta}{m}} \approx \sqrt{\frac{2\tau r\theta}{m}} = \sqrt{\frac{2\tau r\theta}{2\rho r\theta}} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

Nel caso delle onde longitudinali, come le *onde sonore* che si propagano nell'aria, la ricerca della velocità di propagazione con il metodo dell'analisi dimensionale suggerisce di considerare quali grandezze fisiche concorrenti, la *pressione* $[P] = mls^{-2}l^{-2}$, e la *densità volumica* dell'aria $[\delta] = ml^{-3}$. In questo caso $v \propto \sqrt{P\delta^{-1}}$. E' interessante osservare che, nel caso di onde che si propagano nei *gas perfetti* (gas estremamente rarefatti, come, approssimativamente, l'aria), l'equazione di stato $PV = NkT$ permette di concludere che $v \propto \sqrt{T}$.

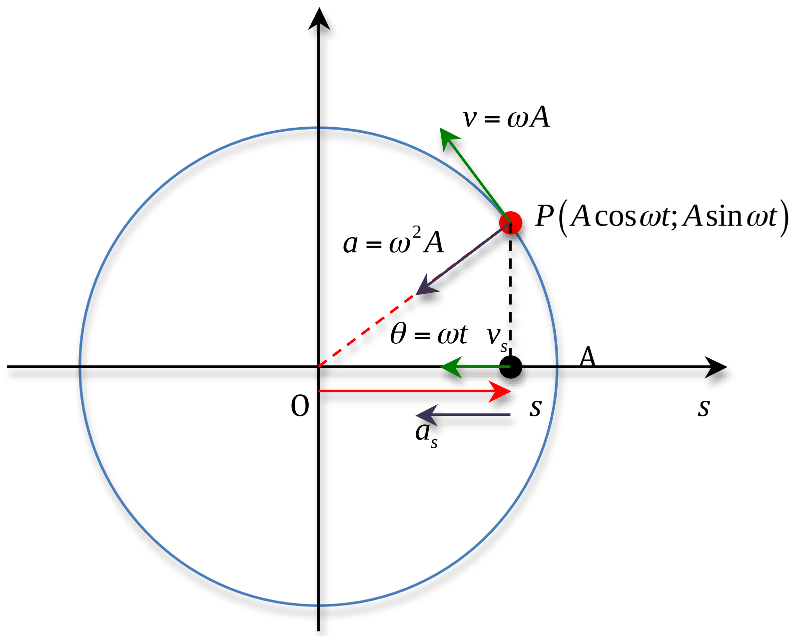
9.3 Le perturbazioni armoniche

Ritorniamo allo studio della perturbazione. In base alla sua durata nel tempo, può essere *impulsiva* (quando è limitata nel tempo, come nel caso di una corda che viene strattonata, o dello stagno in cui viene lasciato cadere un oggetto), oppure *periodica* (quando è illimitata nel tempo, e si ripete ciclicamente con scansione temporale costante, detta *periodo*).
E' chiaro che le perturbazioni periodiche sono un'idealizzazione, in quanto impossibili da realizzarsi così come sono state definite. Tuttavia, è possibile ritrovarne comunque le caratteristiche in opportuni intervalli temporali.
Tra le perturbazioni periodiche assumono un ruolo d'importanza fondamentale le cosiddette *perturbazioni armoniche*, cioè quelle che si propagano in mezzi soggetti a forze di richiamo *proporzionali* alla direzione di spostamento dell'onda, e in verso *opposto* a questa.
Utilizziamo come modello quello della corda tesa, *molto lunga*, fissata a una parete verticale. L'estremità libera è collegata ad un meccanismo in grado di produrre oscillazioni con una legge oraria del tipo di quella che caratterizza, ad esempio, il moto di una massa attaccata ad una molla, oscillante su un piano orizzontale privo d'attrito. Un moto di questo tipo si dice *armonico*, e l'estremità collegata al meccanismo è detta *sorgente puntiforme di onde trasversali*. Di conseguenza, se il moto del meccanismo è armonico, lo sarà anche quello degli elementi del mezzo, in seguito al passaggio della perturbazione.
A questo punto occorre caratterizzare nel dettaglio il moto armonico.

Il moto armonico

Consideriamo una massa attaccata all'estremità di una molla fissata su un piano orizzontale, privo d'attrito, e allunghiamo la molla di una quantità iniziale A. Consideriamo, oltre alla massa attaccata alla molla, un punto che si muove di moto circolare uniforme lungo una circonferenza, con centro nel punto in cui si trova l'estremità della molla quando questa è a riposo, raggio A, e velocità angolare ω.

Facciamo coincidere il punto sulla circonferenza con la massa attaccata alla molla allungata. Se, dopo essere partiti contemporaneamente, ritorneranno nel punto di partenza nello stesso istante di tempo, sarà possibile considerare il moto della massa come *proiezione* del moto circolare del punto su un diametro (la traiettoria della massa oscillante). In particolare, si definisce *moto armonico* di *pulsazione* ω ed ampiezza A, la proiezione di un *moto circolare uniforme* di velocità angolare ω e raggio A su un diametro qualsiasi della circonferenza.



Dalla definizione di moto armonico seguono, per proiezione sul diametro, le leggi orarie della massa oscillante

$$\begin{aligned} s &= A\cos\omega t \\ v_s &= -\omega A\sin\omega t \\ a_s &= -\omega^2 A\cos\omega t = -\omega^2 s \end{aligned}.$$

L'argomento della funzione si chiama *fase*, e potrebbe, in partenza, non coincidere con l'angolo corrispondente al punto sulla circonferenza. In tal caso, indicato con φ lo *sfasamento*, la fase si scrive nella forma generale $\omega t + \varphi$ e le leggi orarie assumono la forma

$$\begin{aligned} s &= A\cos(\omega t + \varphi) \\ v_s &= -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \\ a_s &= -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 s \end{aligned}.$$

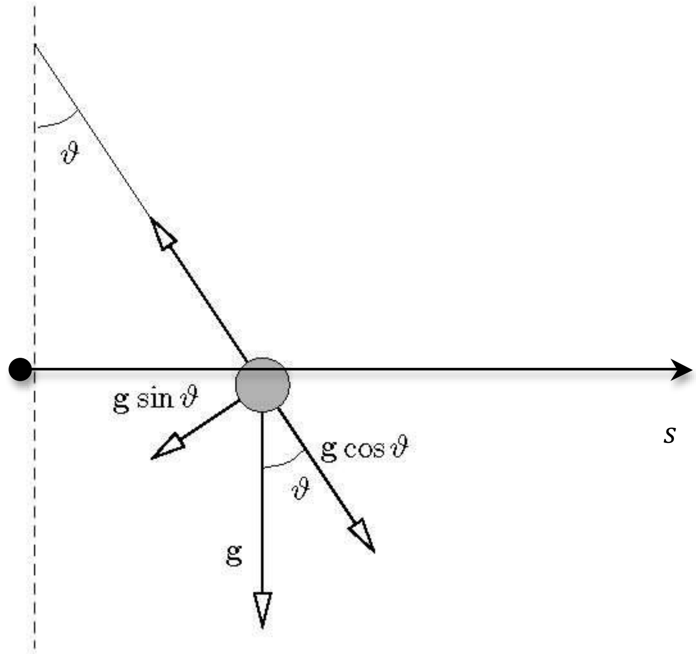
Dall'espressione dell'accelerazione della massa, e dalla *legge di Hooke* $F = -ks$ che rappresenta bene il modello di mezzo elastico soggetto a forze di richiamo, segue per la seconda legge della dinamica $F = -ma_s$:

$$ma_s = -ks \Rightarrow -m\omega^2 A\cos\omega t = -kA\cos\omega t \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

L'ultima relazione trovata permette di calcolare il periodo di oscillazione della massa:
$\omega = 2\pi T^{-1} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Il periodo delle "piccole oscillazioni" di un pendolo semplice

Nel dispositivo noto come pendolo, se la massa oscillante appesa all'estremità libera del filo viene posta in oscillazione con un'ampiezza iniziale piccola (<10°, per capirci), il suo moto può essere considerato *approssimativamente* armonico.



Scelto il sistema di riferimento come in figura, per la seconda legge della dinamica, tenuto conto delle approssimazioni introdotte, si ha $ma = -mg\sin\theta \approx -mg\theta \approx -mgsl^{-1}$. Il carattere di richiamo (proporzionalità allo spostamento) della componente approssimata del peso, permette di sostituire all'espressione dell'accelerazione quella determinata precedentemente: $a = -\omega^2 s$, per cui $\omega^2 = gl^{-1}$.

Di conseguenza $\omega = 2\pi T^{-1} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Il periodo del pendolo ed il calcolo dell'accelerazione di gravità

Concludiamo osservando che, noto il valore della lunghezza del pendolo, attraverso la misura del periodo è possibile stimare il valore dell'accelerazione di gravità:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

9.4 La legge oraria del generico punto del mezzo

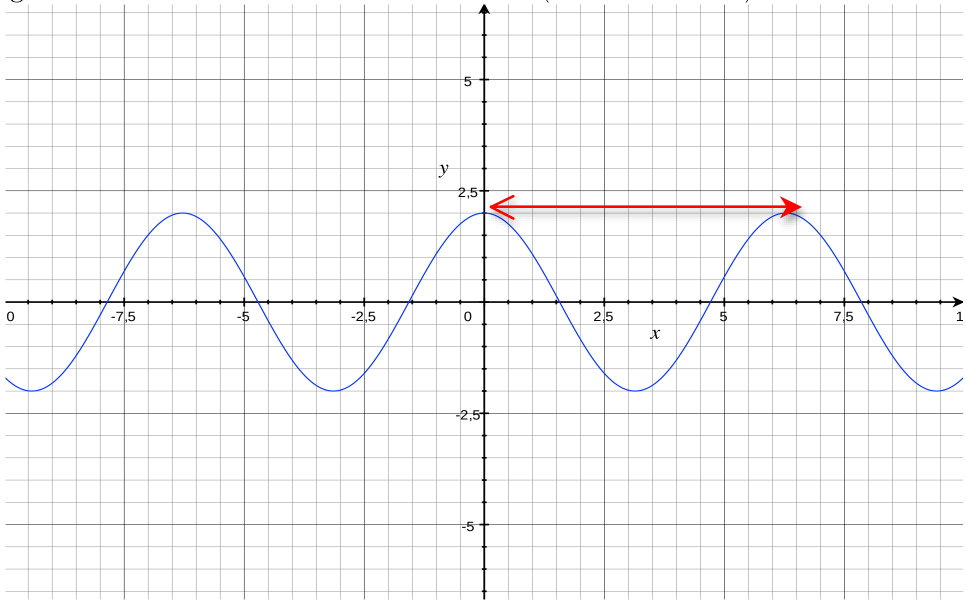
Nelle perturbazioni armoniche, la legge oraria degli elementi del mezzo è la stessa della sorgente: si dice che non c'è **dispersione**.

Un parametro molto importante nello studio delle onde è la cosiddetta *velocità di fase* v_f. Per definire questa grandezza, osserviamo che il valore della fase che si ha nella sorgente al generico istante di tempo *t*, si ritrova nel mezzo (ad esempio la corda lunga fissata a un'estremità) al tempo $t + \frac{r}{v_f}$, dove *r* indica la distanza del punto considerato dalla sorgente. Il significato fisico della velocità di fase può essere espresso così: è la velocità che non permette, percorrendo il mezzo, di osservare alcuna oscillazione. Un po' come i surfisti che cavalcano la "cresta dell'onda".

Indicata con $s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi)$ la legge oraria della sorgente, la corrispondente legge oraria di un generico punto del mezzo attraversato dall'onda è $y(t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{v_f}\right) + \varphi\right)$. D'ora in poi, considereremo sempre lo sfasamento $\varphi = 0$.

La legge oraria del generico punto del mezzo è quindi una funzione in due variabili: una *spaziale*, *r*, che indica la distanza del punto dalla sorgente (assunta come origine del sistema di riferimento), e una *temporale*, *t*, rappresentativa del generico istante di tempo.
E' quindi possibile studiare il moto "disaccoppiando" le due variabili. Fissare il tempo, equivale a scattare un'istantanea del profilo dell'onda, come nella figura sottostante, dal quale emergono chiaramente i seguenti tratti caratterizzanti:

- Le *valli* e le *creste* sono punti in cui l'oscillazione è, rispettivamente, minima e massima;
- La *lunghezza d'onda* λ è la distanza tra due valli (o tra due creste) successive.



Si ha una cresta all'istante *t* in un punto distante *r* dall'origine se $\cos\omega\left(t - \frac{r}{v_f}\right) = 1$. Di conseguenza, in virtù della periodicità della funzione coseno, anche $\cos\omega\left(t - \frac{r+\lambda}{v_f}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\omega\lambda}{v_f} = 2\pi$. Ora, essendo $\omega = \frac{2\pi}{T}$, si ha che $\lambda = v_f T$. In termini di *frequenza*, la grandezza fisica che esprime il numero di "giri" completi compiuti nell'unità di tempo, e che è legata al *periodo* dalla relazione $f = T^{-1}$, l'ultima espressione può essere scritta nella forma $\lambda = v_f f^{-1}$. La frequenza dipende solo dalla sorgente, mentre la lunghezza d'onda e la velocità di fase dipendono dal mezzo.
Fissare la distanza *r* invece, equivale a scegliere il punto e ad osservarne lo scostamento nel tempo dalla posizione di equilibrio. Rende bene l'idea il classico galleggiante da pesca che oscilla in su e in giù quando il mare è leggermente mosso.

Di conseguenza, l'espressione $y(t) = A\cos\omega\left(t - \frac{r}{v_f}\right)$ può essere scritta nella forma

$y(t) = A\cos\omega\left(t - \frac{r}{v_f}\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi\omega r}{\omega\lambda}\right) = A\cos(\omega t - kr) = A\cos(kr - \omega t)$, dove con $k := \frac{2\pi}{\lambda}$ si indica una nuova grandezza fisica, il cosiddetto *numero d'onda*, il cui significato fisico è quello di "contare" il numero di lunghezze d'onda contenute nell'unità di spazio.

9.5 Energia trasportata da un'onda sinusoidale

Nel caso della massa attaccata alla molla, oscillante su un piano orizzontale senza attrito, l'energia del moto (armonico) è $E := \frac{1}{2}kA^2$. E' evidente la proporzionalità diretta dell'energia col quadrato dell'ampiezza. La massa dell'elemento del mezzo che oscilla è $m = \rho V$, dove ρ è la densità volumica e V il volume dell'elemento del mezzo. La relazione $k = m\omega^2$ permette di definire la *densità d'energia* come $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\rho V\omega^2 A^2 \Rightarrow \frac{E}{V} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$. Un'altra grandezza collegata all'energia trasportata da un'onda meccanica è il cosiddetto *flusso di energia*. Si tratta dell'energia che attraversa un elemento di superficie unitario, perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda, nell'unità di tempo: $\Phi = \frac{E}{S\Delta t} = \frac{E\Delta x}{V\Delta t} = \frac{E}{V}v_f = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v_f$, dove l'elemento di volume deve essere pensato come un cilindro di altezza infinitesima Δx e superficie S, per cui $V = S\Delta x$.
Il flusso di energia si dice *intensità dell'onda* ed ha le dimensioni di una potenza su una superficie: $[\Phi] = Wm^{-2}$.
Nel caso del suono, il concetto d'intensità dell'onda ha importanti implicazioni a livello fisiologico. Com'è noto, l'organo dell'udito trasforma le onde di pressione longitudinali che si propagano nell'aria, in segnali nervosi per il cervello. Siamo in grado di percepire frequenze che vanno da 20 a 12000 Hz, che corrispondono, per una velocità del suono $v = 340ms^{-1}$, ad un intervallo di lunghezze d'onda che va da 3cm a 20m.

9.6 Il livello d'intensità sonora

L'intensità di un'onda sonora è data dal rapporto tra la potenza emessa e la superficie attraversata dal passaggio dell'onda, e si misura in Wm^{-2}. L'orecchio umano percepisce suoni con un'intensità variabile da $I_0 = 10^{-12}Wm^{-2}$, a $I = 1Wm^{-2}$, sufficiente per provocare lesioni serie all'apparato uditivo. L'estensione dell'intensità per parecchi ordini di grandezza, suggerisce l'adozione di una scala logaritmica. Per questo si definisce *livello d'intensità sonora*, e si misura in *bel*, la quantità

$$I_{bel} = \log_{10}\frac{I}{I_0}.$$

Esempio. Ogni componente di un coro di 30 persone può cantare con un livello di intensità sonora di $70dB$, dove $1dB = 0{,}1bel$. Si determini il livello d'intensità del coro.

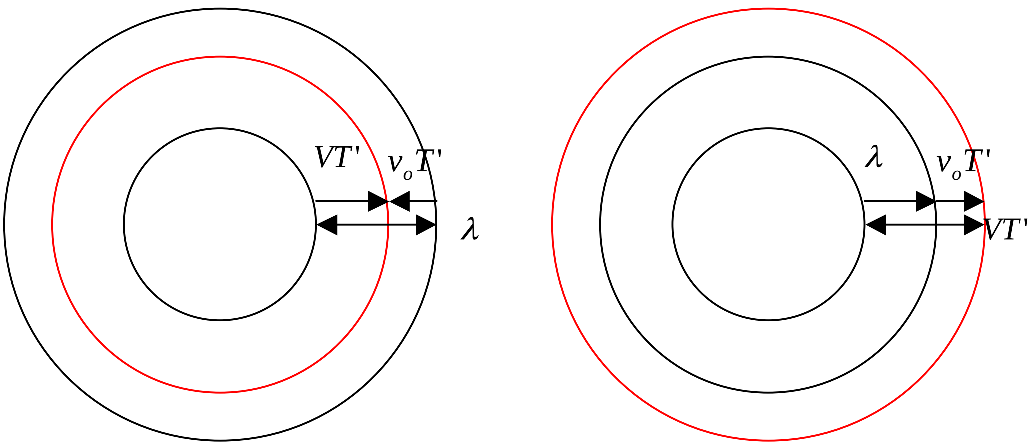
- Ragionando sul concetto di potenza, possiamo affermare che l'intensità totale è la somma delle singole intensità (non dei livelli di intensità!). Quindi, il livello d'intensità del coro è
  $I_{coro} = \log_{10}\left(30\frac{I}{I_0}\right) = \log_{10}30 + \log_{10}\frac{I}{I_0} = \log_{10}30 + 7 = 8{,}47bel = 85dB$.

Un fenomeno che riguarda la propagazione delle onde, e che viene percepito comunemente nel caso delle onde sonore, è il cosiddetto *effetto Doppler*.

9.7 L'effetto Doppler

Si tratta di un fenomeno fisico che spiega la variazione della frequenza di un'onda quando la sorgente e l'osservatore sono in moto relativo. Indichiamo con V la velocità di propagazione dell'onda, con v_o la velocità dell'osservatore, e con v_s quella della sorgente. Analizziamo le possibili situazioni.

1. Sorgente in movimento verso l'osservatore in quiete rispetto alla Terra, posto ad una distanza pari alla lunghezza d'onda λ dalla posizione iniziale della sorgente. Se la sorgente si mette in moto nell'istante in cui emette un'onda, questa raggiunge l'osservatore dopo un tempo uguale al periodo T. Nello stesso intervallo di tempo la sorgente copre una distanza $v_s T$, di conseguenza l'onda successiva deve coprire una distanza inferiore a quella coperta dal primo per giungere all'osservatore, ovvero $\lambda - v_s T$, in un tempo $(\lambda - v_s T)/V$. Il periodo misurato dall'osservatore è l'intervallo di tempo che intercorre tra gli istanti in cui percepisce le due onde: $T' = (\lambda - v_s T)/V = (VT - v_s T)/V \Rightarrow T' = T(1 - v_s/V)$. Di conseguenza la frequenza percepita dall'osservatore è:
$$f' = \frac{f}{1 - \frac{v_s}{V}}.$$
2. Sorgente in moto di allontanamento dall'osservatore. Per determinare la frequenza percepita dall'osservatore è sufficiente sostituire alla velocità della sorgente l'espressione $-v_s$, ottenendo così:
$$f' = \frac{f}{1 + \frac{v_s}{V}}.$$
3. Osservatore in moto di avvicinamento verso una sorgente in quiete rispetto alla Terra. Sia T' l'intervallo di tempo intercorso tra gli istanti in cui l'osservatore in moto verso la sorgente percepisce due onde consecutive. Come risulta evidente dallo schema in figura risulta $VT' + v_o T' = \lambda = VT \Rightarrow VT'(1 + v_o/V) = VT \Rightarrow T' = T\frac{1}{(1 + v_o/V)}$. La frequenza percepita è quindi
$$f' = f(1 + v_o/V).$$



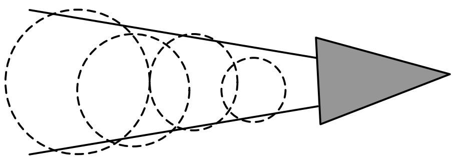
4. Osservatore in moto di allontanamento da una sorgente in quiete rispetto alla Terra. Sia T' l'intervallo di tempo intercorso tra gli istanti in cui l'osservatore in moto verso la sorgente percepisce due onde consecutive. In questo caso risulta $VT' = \lambda + v_o T' = VT + v_o T' \Rightarrow T'(1 - v_o/V) = T$ e la frequenza percepita dall'osservatore è

$$f' = f(1 - v_o/V).$$

5. Sorgente in moto verso l'osservatore, e osservatore in moto verso la sorgente. In questa situazione la legge di composizione dei moti è cruciale per la determinazione della frequenza percepita dall'osservatore. Infatti, la frequenza che percepisce per effetto del moto di avvicinamento della sorgente è $f' = \dfrac{f}{1 - v_s/V}$; a sua volta, questa frequenza viene percepita diversamente per effetto del moto dell'osservatore verso la sorgente come $f'' = f'(1 + v_o/V) = f\dfrac{1 + v_o/V}{1 - v_s/V}$. Da questa relazione si deducono tutti gli altri casi in cui sia l'osservatore che la sorgente si muovono (ovviamente, rispetto alla Terra).

6. Sorgente in moto verso l'osservatore che si allontana dalla sorgente. Si sfruttano le conclusioni di cui al punto precedente cambiando il segno della velocità dell'osservatore:
$$f'' = f\frac{1 - v_o/V}{1 - v_s/V}.$$
7. Osservatore in moto verso la sorgente che si allontana dall'osservatore:
$$f'' = f\frac{1 + v_o/V}{1 + v_s/V}.$$
8. Osservatore che si allontana dalla sorgente che si allontana dall'osservatore:
$$f'' = f\frac{1 - v_o/V}{1 + v_s/V}.$$

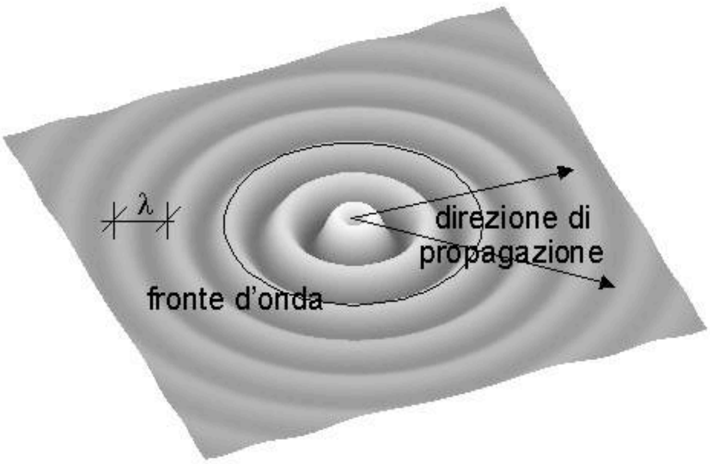
Concludiamo l'analisi dei vari casi che si possono presentare con due osservazioni. La prima è suggerita dall'esame dei casi "misti" 6 e 7: se le velocità sono uguali in modulo, allora la frequenza percepita dall'osservatore coincide con quella di emissione da parte della sorgente. La seconda riguarda la situazione 1 nel caso particolare in cui $v_s > V$. Una condizione del genere si ha quando un aereo viaggia ad una velocità superiore a quella del suono nell'aria: se l'osservatore non si trova lungo la traiettoria dell'aereo, sente un fastidioso boato, meglio noto come "bang supersonico". Per comprendere meglio questo caso, osserviamo un'imbarcazione che si muove velocemente sull'acqua: questa si lascia dietro una scia, che a ben vedere è di forma conica, data dall'inviluppo dei vari fronti d'onda sferici generati dalla barca con il suo moto sull'acqua.

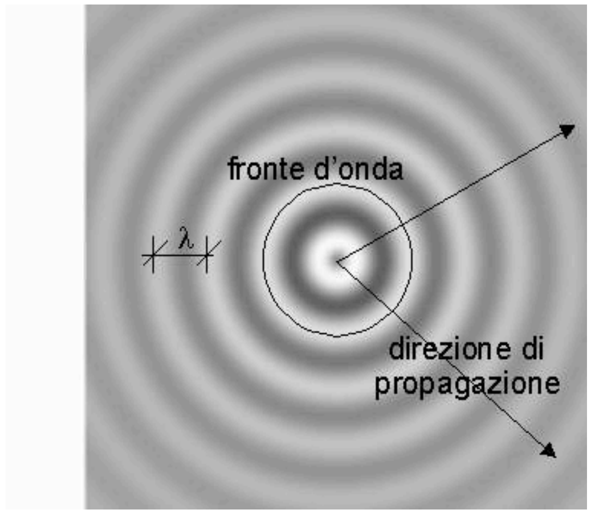


9.8 Fronti d'onda e principio di Huygens

In una forma d'onda sinusoidale del tipo $y(r,t) = A\cos(kr - \omega t)$, si definisce *fase* l'argomento $\Phi := kr - \omega t$ e *fronte d'onda* la superficie i cui punti hanno tutti la stessa fase. Si parla di *onde piane* se i fronti d'onda sono piani perpendicolari alla direzione di propagazione, e di *onde sferiche* se i fronti d'onda sono sfere concentriche con la sorgente (puntiforme) dell'onda. Il *raggio* è una linea che in ogni punto è ortogonale al fronte d'onda; nel caso delle onde piane coincide con la direzione di propagazione dell'onda.

I concetti appena introdotti ci permettono di stabilire, nel caso di onde che si propagano in un mezzo omogeneo ed isotropo (le cui proprietà non dipendono né dal punto né dalla direzione di propagazione dell'onda), una relazione circa il tempo impiegato da un'onda per passare da un punto ad un altro.





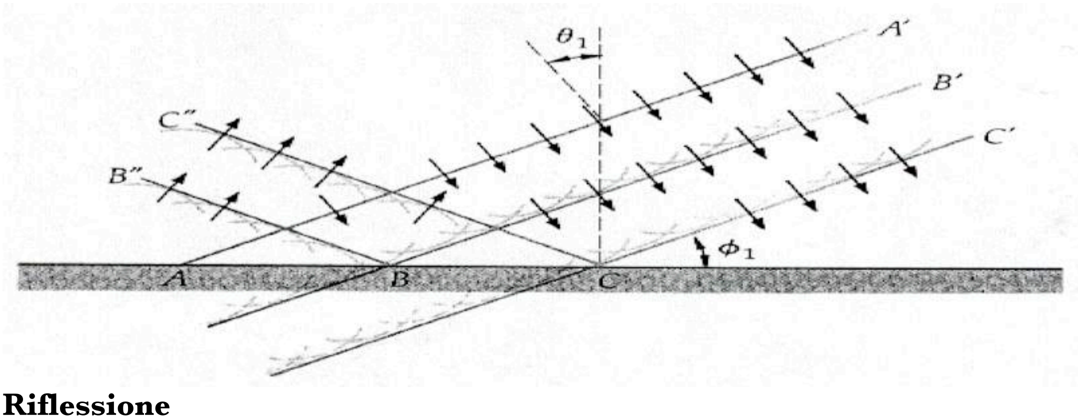
Nel caso di un'onda piana, siano $\Phi_1 := kr_1 - \omega t$ e $\Phi_2 := kr_2 - \omega t$ le fasi corrispondenti a due fronti d'onda. La distanza tra questi è $r_2 - r_1$ e viene percorsa dall'onda nell'intervallo di tempo $\Delta t = \frac{r_2 - r_1}{v_f} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{kv_f} = \frac{\Delta\Phi}{2\pi f} = \frac{\Delta\Phi}{\omega}$. Questa relazione è nota come

Teorema di Malus: il tempo impiegato da un'onda per passare da un punto ad un altro dipende solo dalla frequenza e dai fronti d'onda a cui appartengono i punti.

Il teorema di Malus viene considerato equivalente al *Principio di Fermat*, secondo cui il percorso compiuto da un'onda per passare da un punto ad un altro è quello che *minimizza* il tempo di transito.

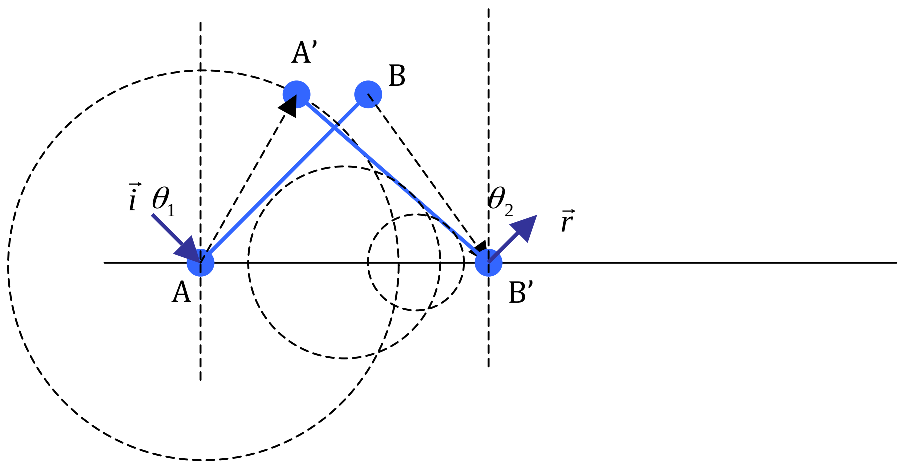
9.9 Interpretazione ondulatoria di particolari fenomeni: Il principio di Huygens

Prima di iniziare l'analisi dei fenomeni della riflessione e della rifrazione s'introduce il *Principio di Huygens*, per il quale ogni punto di un fronte d'onda può essere considerato come sorgente secondaria di onde sferiche.



Riflessione

Nella figura seguente siano A e B gli estremi del fronte d'onda nell'istante in cui A incide su una superficie di separazione perfettamente riflettente, e $\vec{i}$ il vettore rappresentativo della direzione di propagazione perpendicolare al fronte d'onda.



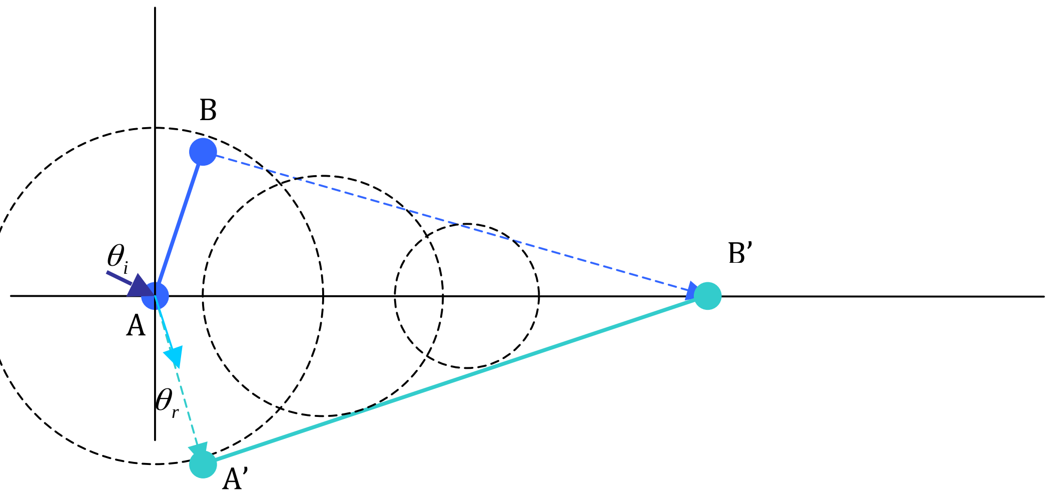
Nel tempo impiegato dall’estremo B per arrivare in B’, dall’estremo A si è propagata un’onda sferica di raggio uguale alla distanza BB’ (perché si propaga sempre nello stesso mezzo); il punto A’ sarà quindi il punto sulla superficie sferica tale che AA’ rappresenti il raggio relativo al fronte d’onda riflesso di estremi A’B’. Di conseguenza i triangoli rettangoli AA’B’ e ABB’ sono uguali (avendo in comune il lato AB’ ed i lati AA’ e BB’ congruenti), da questo segue che l’angolo formato dal raggio incidente $\vec{i}$ con la direzione normale alla superficie nel punto A’ è *uguale* all’angolo formato dal raggio riflesso $\vec{r}$ con la direzione normale alla superficie nel punto B’. Abbiamo dedotto così la

Legge della riflessione: l’angolo d’incidenza è uguale all’angolo di riflessione

$$\theta_1 = \theta_2 .$$

Rifrazione

Le superfici perfettamente riflettenti di cui abbiamo parlato nell’analisi del fenomeno della riflessione, sono solo un’approssimazione di quanto accade nella realtà. Quando un’onda incide una superficie viene in parte riflessa ed in parte *attraversa* la superficie: si tratta del fenomeno della *rifrazione*.



Quando l’estremo A incide la superficie di separazione dei mezzi 1 e 2, si propaga un’onda sferica di raggio AA’ nello stesso intervallo di tempo Δt impiegato dall’estremo B per giungere in B’. Se la velocità di propagazione dell’onda nel mezzo 2 è inferiore a quella nel mezzo 1, il tratto percorso dall'estremo A è inferiore a quello percorso dall'estremo B nel mezzo 1. Il fronte d'onda rifratto A'B' è determinato, grazie al teorema di Malus, come nel caso della riflessione. I triangoli rettangoli ABB' e AA'B hanno l'ipotenusa AB' in comune, per cui:

$$\begin{cases} v_1 \Delta t = BB' = AB' \sin\theta_i \\ v_2 \Delta t = AA' = AB' \sin\theta_r \end{cases} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}.$$

Si è così giunti alla

Legge della rifrazione: l'angolo formato dal fronte d'onda incidente e la normale, θ_i*, e l'angolo formato dal fronte d'onda rifratto,* θ_r*, sono legati tra loro dalla relazione*

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r},$$

dove v_1 *e* v_2 *sono le velocità di propagazione dell'onda rispettivamente nel mezzo 1 e nel mezzo 2.*

Interferenza e diffrazione

Concludiamo questa breve esposizione, esaminando il cosiddetto fenomeno dell'*interferenza*, che si manifesta quando due o più onde attraversano simultaneamente un mezzo.
In fisica questo fenomeno è regolato dal cosiddetto *Principio di sovrapposizione*, il quale stabilisce che quando due o più onde passano per un qualsiasi punto del mezzo, lo spostamento risultante di tale punto è la somma dei singoli spostamenti dovuti ad ogni singola onda.

Consideriamo quindi due onde aventi la stessa lunghezza d'onda, sfasate di una quantità costante φ (*onde coerenti*). Supponiamo inoltre che abbiano la stessa ampiezza:
$y_1 = A\cos(\omega t - kr)$ e $y_2 = A\cos(\omega t - kr - \varphi)$. L'onda risultante si determina per sovrapposizione delle onde componenti, sfruttando le *formule di prostaferesi* $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

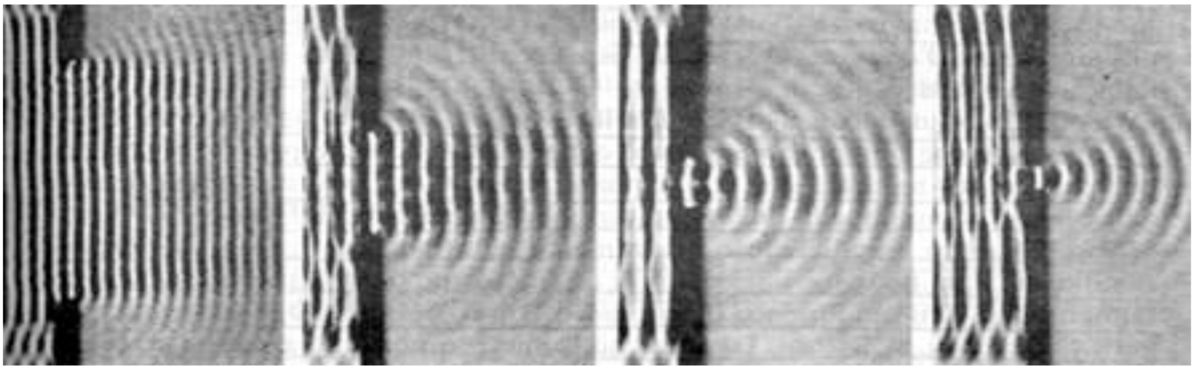
Si ha quindi $y = y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(\omega t - kr - \frac{\varphi}{2}\right)$. L'onda risultante ottenuta ha la stessa lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ e la stessa pulsazione delle onde componenti, mentre l'ampiezza dipende dallo sfasamento: $A' = 2A\cos\frac{\varphi}{2}$. Si hanno i seguenti due casi interessanti:

- *Interferenza costruttiva*: $\frac{\varphi}{2} = k\pi \Rightarrow A' = 2A$,
- *Interferenza distruttiva*: $\frac{\varphi}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{2} \Rightarrow A' = 0$.

La dipendenza dell'intensità di un'onda dal quadrato dell'ampiezza determina la seguente espressione per l'onda risultante: $\Phi_{RISULTANTE} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\left(2A\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2 v_f = 4\Phi\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

Osservazione. Il fatto che l'intensità dell'onda risultante sia maggiore della somma di quelle delle onde componenti, parrebbe violare il principio di conservazione dell'energia. Le cose non stanno così: tralasciando i dettagli della dimostrazione, ci limitiamo ad osservare che, durante la propagazione delle onde, si ha una generale compensazione tra gli aumenti di densità di energia in alcune regioni, e le diminuzioni della stessa in altre regioni. Il principio di conservazione dell'energia continua quindi a valere.
Abbiamo esaminato l'interferenza prodotta da *due* diverse sorgenti; tuttavia può essere prodotta anche da punti diversi appartenenti allo *stesso* fronte d'onda. Questo fenomeno accade quando i

fronti d'onda incontrano un ostacolo, ad esempio una fenditura, ed è conosciuto con il nome di **diffrazione**.

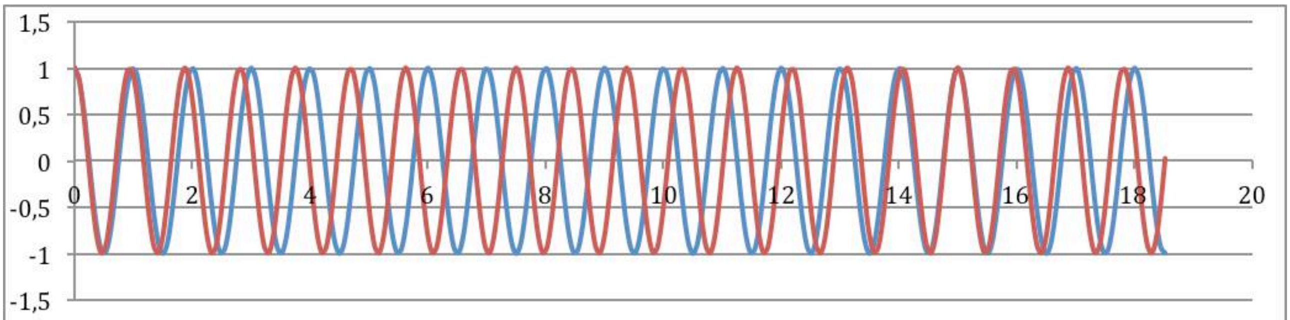


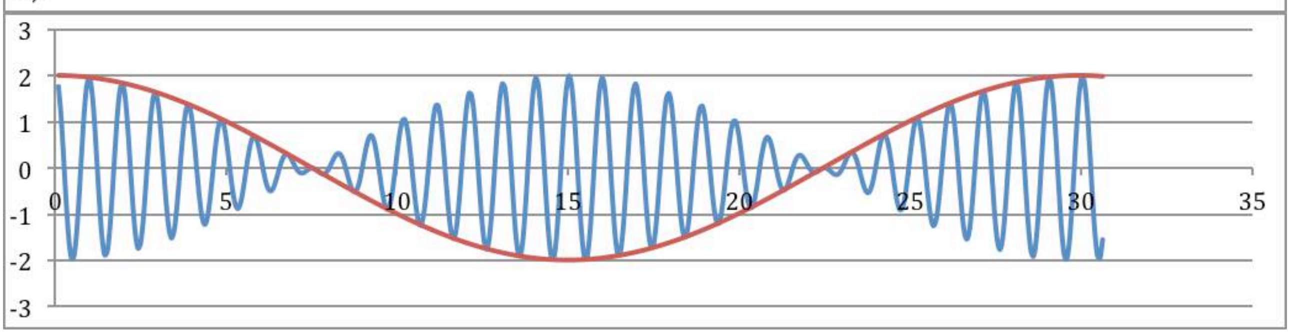
Battimenti

Si tratta di un fenomeno interferenziale, che si verifica quando le due sorgenti hanno pulsazione e lunghezza d'onda che differiscono di poco, ad esempio $\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\cong 10^{-2}$. Siano quindi $y_1=A\cos(\omega_1 t-k_1 r)$ e $y_2=A\cos(\omega_2 t-k_2 r)$. Per il principio di sovrapposizione risulta $y=y_1+y_2=2A\cos\left[\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t-\frac{k_1-k_2}{2}r\right]\cos(\omega t-kr):=B(r,t)\cos(\omega t-kr)$. Il ruolo giocato dal termine $B(x,t)$ è fondamentale. Si tratta dell'*ampiezza modulata* che, a sua volta, è un'onda con pulsazione $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ e numero d'onda $\frac{k_1-k_2}{2}$ piccoli, da cui seguono una lunghezza d'onda grande ed una frequenza piccola rispetto a quella delle onde componenti.

La velocità con cui si propaga l'onda, relativa all'ampiezza modulata, $B(x,t)$ è $v_B=\frac{\lambda_B}{T_B}=\frac{2\pi}{k_B}\frac{\omega_B}{2\pi}=\frac{(\omega_1-\omega_2)/2}{(k_1-k_2)/2}$. Ora, poiché $\frac{\omega_1}{k_1}=\frac{\omega_2}{k_2}=v_f$, allora $v_B=\frac{(k_1-k_2)v_f}{(k_1-k_2)}=v_f$.

Nel primo grafico sono rappresentate le ampiezze al variare del tempo, interessate dal passaggio delle due onde. Nel secondo grafico sono riportati il battimento (celeste) e l'ampiezza modulata $B(x,t)$.





9.10 Onde stazionarie

Esaminiamo adesso la situazione in cui si ha sovrapposizione di onde aventi la stessa frequenza, la stessa lunghezza d'onda, e la stessa ampiezza, ma che si propagano in direzioni *opposte*. Nella realtà, onde con queste caratteristiche si realizzano mediante la sovrapposizione di un'onda incidente con la sua onda riflessa contro qualche ostacolo, o vincolo.

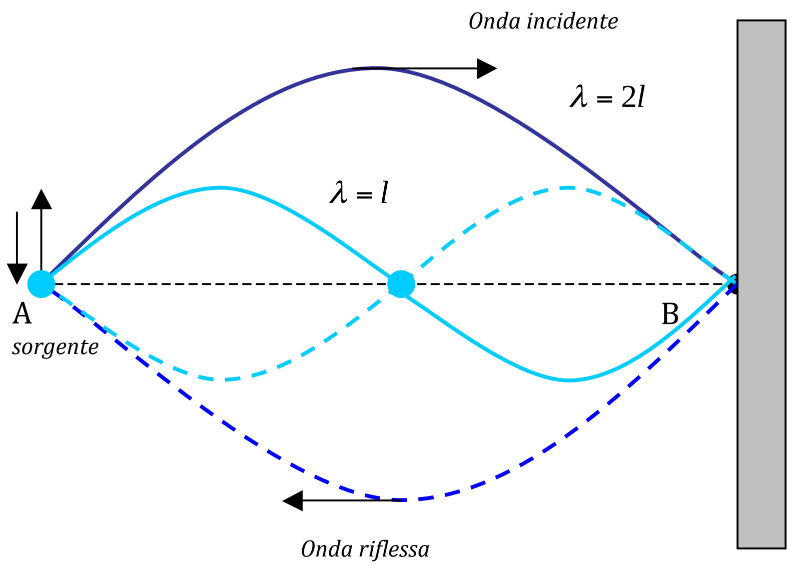
Consideriamo ad esempio onde in fase con le seguenti forme: $y_1 = A\cos(\omega t - kr)$ e $y_2 = A\cos(\omega t + kr)$. L'onda risultante ha quindi forma $y = y_1 + y_2 = 2A\cos\omega t \cos kr$. Osserviamo innanzitutto che, perdendosi la dipendenza da un fattore del tipo $\omega t \pm kr$, l'equazione trovata *non* è più rappresentativa di un'onda che si propaga. Il risultato ottenuto può essere interpretato come il moto armonico di un punto di coordinata *r* che oscilla con pulsazione ω e ampiezza $2A\cos kr$. Poiché l'ampiezza non dipende dal tempo ma solo dalla posizione, l'onda risultante si dice *stazionaria.*

In un'onda stazionaria si possono quindi osservare dei punti fermi, che oscillano cioè con un'ampiezza pari a zero: sono quelli per cui $2A\cos kr = 0 \Rightarrow kr = \frac{(2n+1)\pi}{2} \Rightarrow r = (2n+1)\frac{\pi}{2k} = \frac{(2n+1)}{2}\frac{\lambda}{2}$. Questi punti si dicono *nodi*, e distano tra loro mezza lunghezza d'onda, a partire dal punto a distanza $\frac{\lambda}{4}$ dalla sorgente.

Oltre ai nodi si possono osservare punti che, al contrario, oscillano con ampiezza massima. Sono quelli per cui $2A\cos kr = 2A \Rightarrow kr = n\pi \Rightarrow r = \frac{n\pi}{k} = n\frac{\lambda}{2}$. Questi punti si dicono *ventri*, e distano tra loro un multiplo intero di mezza lunghezza d'onda, a partire dalla sorgente.

In generale, ogni punto dell'onda stazionaria oscilla con la stessa pulsazione, ω, delle onde componenti, legata alla lunghezza d'onda dalla relazione $\omega = 2\pi f = kv_f \Rightarrow kv_f = 2\pi f \Rightarrow \frac{v_f}{\lambda} = f$.

Consideriamo una corda tesa orizzontalmente di lunghezza *l*, fissata ad una estremità (B) ad una parete, e facciamo coincidere l'estremità libera (A) con una sorgente di onde trasversali. Analizziamo il caso in cui le onde prodotte hanno lunghezza d'onda $\lambda = 2l$; se la velocità di propagazione è v_f, allora la frequenza è $f = \frac{v_f}{2l}$.



La particolare scelta della lunghezza d'onda fa in modo che quando l'onda riflessa torna in corrispondenza della sorgente posta in A, l'ampiezza si somma a quella della nuova onda generata nello stesso istante (*interferenza costruttiva*). Nella realtà si deve fare i conti con lo smorzamento dell'onda (e quindi della sua ampiezza) per effetto d'inevitabili dissipazioni di energia; supponendo che dopo ogni riflessione l'ampiezza si modifichi di un fattore $p < 1$, dopo *N* riflessioni l'ampiezza sarà $A_N = A + pA + p(pA) + p(p^2A) + \cdots + p(p^{N-1})A = A\frac{1-p^{N+1}}{1-p}$.

Se imponiamo che gli estremi della corda siano nodi, le lunghezze d'onda "permesse" scaturiscono dalla condizione secondo cui la lunghezza della corda, l, deve contenere un *numero intero* di mezze lunghezze d'onda: $l = n\frac{\lambda}{2}$.

In generale, la lunghezza d'onda $\lambda_n = \frac{2l}{n}$ si dice *condizione di risonanza* e l'ampiezza risulta, come dal calcolo precedente, *amplificata*. Le frequenze corrispondenti alle lunghezze d'onda nella condizione di risonanza $f_n = \frac{nv_f}{2l}$, si dicono *armoniche* e sono multiple della *frequenza fondamentale* $f = \frac{v_f}{2l}$. In figura sono rappresentate la frequenza fondamentale e la prima armonica.

Nella condizione di risonanza i massimi ed i minimi dell'oscillazione avvengono sempre negli stessi punti e l'onda non assume l'aspetto di qualcosa che si propaga da un punto ad un altro, bensì di un'oscillazione locale. Per questo motivo questo tipo di onde sono dette stazionarie.

Esercizi

1. Un punto di una perturbazione ondosa si sta spostando in direzione radiale da un osservatore fermo. All'istante $1s$ si trova a distanza $3,2m$ dall'osservatore, e all'istante $4s$ si trova a $7,9m$. Qual è la velocità di propagazione dell'onda? $\left[v = 1,57ms^{-1}\right]$
2. Un'onda si propaga in un liquido con una velocità di $0,82ms^{-1}$, per effetto di una pulsazione di $1,4rads^{-1}$. Se ne calcoli la lunghezza d'onda. $\left[\lambda = 0,59m\right]$
3. Un filo di massa $100g$ e lunghezza $3m$, è teso da una forza di $55N$ applicata ai suoi capi. Qual è la velocità di propagazione di un'onda trasversale nel filo? $\left[v = 40,6ms^{-1}\right]$
4. Si vuole misurare la profondità di un pozzo avendo a disposizione un cronometro. Viene lasciato cadere un sasso e si misura l'intervallo di tempo che intercorre tra l'istante di caduta e quello in cui si sente il rumore fatto dal sasso quando tocca il fondo. Sapendo che l'intervallo di tempo è pari a $t = 3,00s$, si calcoli la profondità del pozzo. $\left[h = 40,7m\right]$
5. Durante un temporale, tra l'osservazione di un lampo e l'ascolto del tuono passano $4,3s$. Si calcoli la distanza tra il lampo e l'osservatore. $\left[\Delta x = 1475m\right]$
6. Un'onda incide con un angolo di 30° sulla superficie di separazione di due mezzi. Sapendo che la velocità nei due mezzi sono rispettivamente $1800ms^{-1}$ e $2700ms^{-1}$, si calcoli l'angolo di rifrazione dell'onda. $\left[\sin\theta_r = 0,75 \Rightarrow \theta_r = 48,6°\right]$
7. Un'onda incide con un angolo di 45° sulla superficie di separazione di due mezzi, emergendo con un angolo di 18° e una velocità di 260 m/s. Determinare la velocità nel primo mezzo. $\left[v_1 = 595ms^{-1}\right]$

8. L'equazione delle onde stazionarie in una corda è $z = a\cos(br)\cos(ct)$, dove $a = -10cm, \quad b = 7{,}8m^{-1}, \quad c = 31 rad/s$. Si calcolino la lunghezza d'onda, l'ampiezza e la frequenza delle due onde componenti. $\left[A = \frac{a}{2} = 5cm; \lambda = \frac{2\pi}{b} = 0{,}81m; f = \frac{c}{2\pi} = 4{,}93s^{-1}\right]$
9. La corda di una chitarra misura $58cm$ ed ha una densità lineare di $0{,}12gcm^{-1}$. Si calcoli la frequenza fondamentale quando la corda viene sottoposta ad una tensione di 25 N. Si calcoli inoltre la tensione necessaria per raddoppiare la frequenza fondamentale. $\left[f = 39{,}3s^{-1}; \tau = 100N\right]$
10. Due onde di ampiezza $30cm$ interferiscono in una corda per dare origine a onde stazionarie di frequenza $4{,}8ms^{-1}$. Se le onde si propagano alla velocità di $2{,}5ms^{-1}$ 2,5 m/s e si formano 10 ventri, si determinino la lunghezza d'onda e la lunghezza della corda. $\left[n = 10 \Rightarrow l = 0{,}26m; \lambda_n = 5{,}2cm\right]$
11. Una persona su un molo sente la sirena di una nave ancorata nelle vicinanze. La frequenza del suono sulla nave è di $400s^{-1}$ la velocità del suono è $340ms^{-1}$, mentre la velocità del vento che soffia dal mare è $2{,}3ms^{-1}$. Qual è la frequenza del suono udito dalla persona? Qual è la frequenza del suono se il vento soffia in direzione opposta? $\left[f_1 = 402{,}7s^{-1}; f_2 = 397{,}3s^{-1}\right]$
12. Due persone A e B sono ferme lungo una strada rettilinea mentre osservano un'automobile in viaggio alla velocità di $80kmh^{-1}$ nel tratto AB. Quando l'autista preme il clacson, l'osservatore A sente un suono con la frequenza $490s^{-1}$, mentre B sente un suono di frequenza minore. In quale verso sta viaggiando l'automobile?
Qual è la frequenza del suono emesso dal clacson? Qual è la frequenza percepita da B? $\left[B \xrightarrow{automobile} A; f = 458s^{-1}; f_B = 430s^{-1}\right]$
13. Due automobili A, B, stanno procedendo su un tratto rettilineo di autostrada in verso opposto. L'automobile A si muove alla velocità di $100kmh^{-1}$, mentre B si muove nel verso opposto alla velocità di $120kmh^{-1}$. Poco prima del loro incontro, l'autista di B suona il clacson e l'autista di A percepisce un suono di frequenza $620s^{-1}$. Calcolare la frequenza dello stesso suono percepita dall'autista di B. Ripetere il calcolo nel caso in cui le due automobili viaggiano nello stesso verso e B sta per sorpassare A. $\left[f = 517s^{-1}; f = 609s^{-1}\right]$
14. Una banda sta marciando in una strada rettilinea, e un automobilista che segue la banda si avvicina a questa alla velocità di 18 km/h, mentre viene emesso un suono alla frequenza di 440 Hz. Il brano suonato dalla banda viene raccolto da un microfono piazzato sulla strada davanti alla banda, e viene trasmesso in diretta dalla radio. L'automobilista ascolta il brano contemporaneamente dalla radio e dalla banda. I due suoni formano 4 battimenti ogni 3 secondi. Si calcoli la velocità della banda sapendo che la velocità del suono è 330 m/s.
[*L'automobile si avvicina alla banda che, a sua volta, si avvicina al microfono fermo. Quindi il suono ascoltato alla radio è modificato per effetto Doppler dovuto a sorgente in moto verso osservatore fermo (microfono)* $f' = f\left(1 - \frac{x}{v}\right)^{-1}$ *, mentre quello ascoltato direttamente dalla banda rientra nel caso di osservatore che si avvicina alla sorgente (banda) in moto di allontanamento dall'osservatore* $f'' = f\left(1 + \frac{v_A}{v}\right)\left(1 + \frac{x}{v}\right)^{-1}$
Ricordando che la frequenza di battimento è $\frac{f'' - f'}{2} = \frac{4}{3}$ …].

15. Si trovi la variazione percentuale del periodo di oscillazione di un pendolo quando questo è portato sulla luna, dove l'accelerazione di gravità sulla superficie è circa un sesto di quella terrestre. $\left[T_{luna} = \sqrt{6}T_{terra} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = 1,45\%\right]$

16. Si determini il valore della massa *m* da attaccare all'estremità di una molla di costante elastica *k*, in modo tale che oscilli con la stessa ampiezza e lo stesso periodo di un pendolo di lunghezza *L*, nell'approssimazione delle piccole oscillazioni. $\left[\frac{k}{m} = \frac{g}{L} \Rightarrow m = \frac{kL}{g}\right]$

17. Una corda avente la densità di $4 \cdot 10^{-3}\, kg/m$ è tesa alle due estremità, e sottoposta alla tensione di $360N$. La differenza tra la sesta e la quinta frequenza di risonanza è $75Hz$. Si calcoli: a) la frequenza fondamentale; b) la lunghezza della corda.

$$\left[v = \sqrt{T/\rho} = 300\, m/s;\, f_5 = \frac{5v}{2L};\, f_6 = \frac{6v}{2L} \Rightarrow 75Hz = f_6 - f_5 = \frac{v}{2L} \Rightarrow L = 2m\right]$$

18. Un pallone viene calciato orizzontalmente contro un muro alla velocità di $108kmh^{-1}$, dalla distanza di $50m$. Si determini dopo quanto tempo, a partire da quando è stato calciato il pallone, si sente il rumore dovuto all'impatto di questo contro il muro. $\left[\Delta t = 1,82s\right]$

19. Sul timpano dell'orecchio giunge un suono di $50dB$. Si calcoli la potenza sonora che giunge sul timpano se la sua area è circa $1,0cm^2$. $\left[P = 10^{-11}W\right]$

20. Un ricevitore si avvicina ad una sorgente sonora in quiete, che vibra alla frequenza di $1000s^{-1}$, registrando una frequenza di $1200s^{-1}$. Si calcoli la velocità del ricevitore.

$\left[v_O = 68ms^{-1}\right]$

21. Un'onda periodica ha una lunghezza d'onda $\lambda = 12,0m$, e si propaga in un mezzo con la velocità di $4 \cdot 10^3 ms^{-1}$. Quali sono la sua frequenza ed il suo periodo? Se incide sulla superficie di separazione con un secondo mezzo con un angolo di 45° rispetto alla verticale, attraversandola con un angolo di 18°, qual è la velocità nel secondo mezzo?

$$\left[f = \frac{v}{\lambda} = 333HZ \Rightarrow T = 3 \cdot 10^{-3}s;\, v_2 = 1,7 \cdot 10^3 ms^{-1}\right]$$