CAPITOLO 4
LAVORO ED ENERGIA CINETICA

4.1 Lavoro di una forza costante

Un corpo su cui si esercita una forza costante è soggetto, per la seconda legge della dinamica, ad un'accelerazione costante, ed il moto che ne consegue è uniformemente accelerato. In particolare vale la relazione $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$, dove abbiamo definito con *x* la direzione in cui avviene lo spostamento del corpo. Combinando la relazione di cui sopra con l'espressione della seconda legge della dinamica $F = ma$, otteniamo: $\begin{cases} v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \\ F = ma \end{cases} \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2\left(\frac{F}{m}\right)\Delta x \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = F \cdot \Delta x$.

Si definisce **lavoro** *fatto dalla forza F lungo lo spostamento* Δx, la grandezza fisica scalare

$$L = F\Delta x .$$

Il lavoro si misura in *Joule*: $J = N \cdot m$, e se la forza non è diretta lungo lo spostamento, bensì forma un angolo α con la direzione di questo, l'espressione del lavoro tiene conto della *componente* della forza lungo lo spostamento. Si giunge così alla definizione generale di lavoro di una forza costante:

$$L = F\Delta x \cos\alpha .$$

Nell'espressione che ha portato alla definizione di lavoro è presente la relazione, $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$, dove sono presenti le velocità inziale e finale, ovvero all'istante in cui è iniziata l'azione della forza (v_0), e ad uno successivo (v). Si definisce **energia cinetica** di un corpo di massa *m* in moto a velocità *v*, la grandezza fisica scalare $K = \frac{mv^2}{2}$.

Quindi, il *lavoro della risultante delle forze* applicate ad un corpo che compie uno spostamento Δx, è uguale alla *variazione dell'energia cinetica* del corpo tra la posizione iniziale e quella finale.

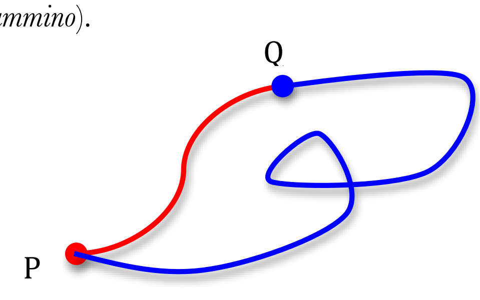
Si tratta del cosiddetto **teorema dell'energia cinetica** nel caso di forze costanti. L'energia può quindi essere considerata come la capacità di compiere lavoro; l'energia cinetica è quindi la capacità da parte di un corpo di compiere lavoro grazie al *movimento*.

Il lavoro può essere classificato in base al tipo di forza che lo compie: *forza motrice*, che compie un lavoro *attivo*, e *forza resistente*, che compie un lavoro *passivo* (ad esempio la forza d'attrito).

Il caso del lavoro compiuto da *forze variabili* può essere trattato solo se in possesso di opportuni requisiti matematici (occorre conoscere il *calcolo integrale*) e sarà oggetto di uno studio successivo. L'idea su cui si basa questo metodo, consiste nel suddividere lo spostamento in tanti piccoli "trattini" in cui la forza può essere considerata costante (nel senso che varia molto poco), e calcolare il lavoro compiuto su ognuno di questi. Il lavoro totale sarà la *somma* dei lavori compiuti sui singoli trattini.

4.2 Forze conservative

Le forze per le quali il lavoro *non* dipende dalla traiettoria seguita durante il moto, si dicono *forze conservative*. Sono un esempio le forze che non dipendono né dal tempo, né dalla velocità, cosiddette *posizionali*. Cerchiamo di intuire perché, il lavoro compiuto da forze posizionali, è indipendente dalla traiettoria (o *cammino*).



$L_{PQ} = -L_{QP}$. Immaginiamo un percorso chiuso con L_{PQ} diverso sui due cammini congiungenti P e Q: se ciò fosse possibile, potrei percorrere un giro ed ottenere così un lavoro netto diverso da zero, grazie al quale l'energia cinetica aumenterebbe *indefinitamente*, realizzando così il *moto perpetuo*, finora vietato in natura!

Il teorema dell'energia cinetica ci fornisce un'informazione molto preziosa: se l'energia cinetica aumenta, il lavoro fatto è *positivo*, mentre se diminuisce, il lavoro è *negativo*. Questa considerazione sul segno del lavoro è molto importante poiché lo spostamento dipende dal sistema di riferimento, e ciò può portare talvolta a risultati paradossali (in questo caso sbagliati!) in cui ad un lavoro negativo corrisponde un aumento dell'energia cinetica e viceversa.

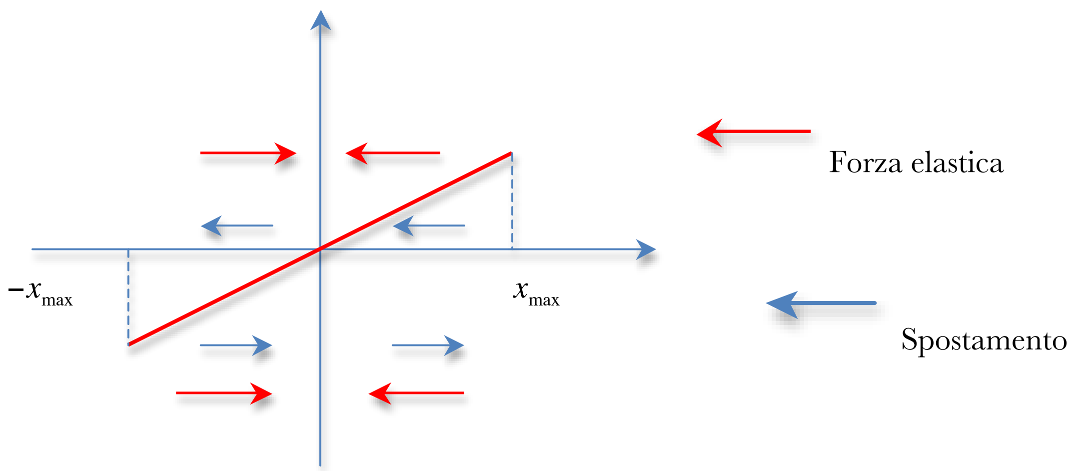
4.3 Il lavoro compiuto dal peso

Sappiamo che la velocità di un corpo in caduta libera *aumenta* man mano che si avvicina alla superficie terrestre. Partiamo da quest'osservazione per interpretare la caduta libera in termini di lavoro ed energia cinetica. Nel sistema di riferimento che vede l'asse verticale orientato "verso l'alto", la forza peso è orientata negativamente, così come lo spostamento, in quanto la differenza tra quota finale e quota iniziale è minore di zero. Il lavoro compiuto dal peso è, quindi, il prodotto di due quantità negative, come ci aspettavamo in virtù dell'aumento della velocità durante la caduta libera: $L = mg\Delta h$. Se l'asse verticale fosse orientato verso il basso, sia il peso che lo spostamento sarebbero orientati positivamente: il loro prodotto sarebbe ancora positivo.

4.4 Il lavoro compiuto dalla forza elastica

Com'è noto, entro certi limiti l'allungamento o la compressione di una molla sono regolati dalla *legge di Hooke*, che esprime la proporzionalità tra la variazione di lunghezza di un corpo elastico, e la forza responsabile: $\vec{F} = -k\vec{x}$. La costante di proporzionalità k prende il nome di *costante elastica*, e $\vec{x}$ rappresenta lo spostamento dalla configurazione di *riposo*, ovvero quella corrispondente al caso in cui sulla molla non viene esercitata alcuna forza. Il segno *meno* rappresenta il carattere di *richiamo* della forza elastica: quest'ultima è sempre orientata verso la configurazione di riposo. Studiamo il caso di una molla che oscilla senza attrito su un piano orizzontale, per effetto di un allungamento iniziale di x_{max} , rispetto alla configurazione di riposo, a cui è stato dato il valore $x = 0$. L'asse è orientato nel verso che va da $x = 0$ a x_{max} .

Nella fase 1, in seguito al rilascio della molla, da x_{max} a 0, la velocità aumenta, quindi il lavoro compiuto dalla molla sulla massa è positivo $F < 0, \Delta x < 0$, $L_1 = \sum(-kx)(-\Delta x) = \frac{kx^2}{2}$, nella fase 2, da 0 a $-x_{max}$, sempre il carattere di richiamo della forza elastica rallenta la massa, quindi il lavoro è negativo $F > 0, \Delta x < 0$, $L_2 = \sum(kx)(-\Delta x) = -\frac{kx^2}{2}$. Nella fase 3, dopo l'inversione del moto, da $-x_{max}$ a 0 il lavoro torna ad essere positivo $F > 0, \Delta x > 0$, $L_3 = \sum(kx)(\Delta x) = \frac{kx^2}{2}$, mentre nella fase 4 da 0 a x_{max} il lavoro è nuovamente negativo $F < 0, \Delta x > 0$, $L_4 = \sum(-kx)(\Delta x) = -\frac{kx^2}{2}$.



4.5 La potenza

Spesso è opportuno riferire il lavoro compiuto all'unità di tempo: si definisce la grandezza fisica *potenza* $W=\frac{L}{\Delta t}$. E' una grandezza scalare e si misura in *watt:* $W=\frac{J}{s}$.

Esercizi

1. Un'auto di massa 1000 kg viaggia alla velocità di $108\,km/h$ quando urta frontalmente un'auto della massa di 800 kg che viaggia alla velocità di $72\,km/h$. Dopo l'impatto, il groviglio di auto percorre un tratto di strada della lunghezza di 10 m. Calcolare la velocità iniziale del groviglio, e si stimi il valore delle forze d'attrito.
2. Un proiettile di massa $m=12g$, sparato alla velocità di $300ms^{-1}$, attraversa una parete fuoriuscendo alla velocità di $240ms^{-1}$. Si calcoli il lavoro compiuto dalla parete sul proiettile.
3. Un'automobile viaggia su una strada in piano alla velocità costante di $80kmh^{-1}$, con una potenza del motore pari a $50kW$. a) Stimare il modulo della forza dovuta agli attriti; b) se la massa dell'automobile è $m=1\cdot 10^3 kg$, e questa si muove in salita con una potenza del motore di $60kW$, si stimi la pendenza della salita; c) lungo la salita di cui al punto precedente, l'automobile accelera uniformemente da $80kmh^{-1}$ a $100kmh^{-1}$ in 90 secondi. Si calcoli la potenza fornita dal motore durante i 90 secondi.
4. Un ghepardo impiega 4,0s per accelerare da fermo a una velocità di 27m/s. Si calcoli la potenza media sviluppata da un esemplare di 45kg durante la fase di accelerazione.
5. Un ciclista della massa di 65 kg percorre un tratto in salita che gli fa compiere un dislivello di 100m in 1km, in sella ad una bicicletta della massa di 7kg. Sapendo che il coefficiente di attrito cinetico è 0,1 e che il ciclista sta pedalando alla velocità di 15km/h, si calcoli la potenza sviluppata dal ciclista.

Soluzioni

1. Il teorema della quantità di moto, applicato tra gli istanti iniziale e finale dell'urto (la risultante delle forze esterne è uguale a zero), consente di calcolare la velocità iniziale del groviglio di auto: $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{V}=M\vec{V}\Rightarrow V=7{,}8\,m/s$, nel verso della prima auto. Il teorema dell'energia cinetica permette di calcolare il lavoro delle forze d'attrito, e di stimarne quindi l'intensità: $0-\frac{1}{2}MV^2=-F_{at}\Delta x\Rightarrow F_{at}=\frac{MV^2}{2\Delta x}=5{,}5\cdot 10^3 N$.
2. Il lavoro compiuto dalla parete è responsabile della diminuzione dell'energia cinetica del proiettile: $L=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-1{,}94\cdot 10^5 J$.
3. a) La velocità costante è frutto dell'equilibrio tra le forze che possono essere erogate dal motore, e gli attriti di natura meccanica, la cui intensità può essere così stimata: $W=\frac{L_-}{\Delta t}=\frac{-F_{at}\Delta x}{\Delta t}=-F_{at}v\Rightarrow F_{at}=-\frac{W}{v}=2{,}25\cdot 10^3 N$.
   b) In salita, oltre agli attriti, c'è da bilanciare anche il lavoro passivo compiuto dal peso: $L_-=-(F_{at}+mg\sin\alpha)\Delta x$. L'incognita del problema è quindi il rapporto tra il dislivello Δh, ed il tratto di strada percorso per coprirlo, Δx: $\frac{\Delta h}{\Delta x}=\sin\alpha$. Quindi,
   $$W=\frac{L_-}{\Delta t}=\frac{-(F_{at}+mg(\Delta h/\Delta x))\Delta x}{\Delta t}=-(F_{at}+mg(\Delta h/\Delta x))v\Rightarrow\frac{\Delta h}{\Delta x}=\frac{(W/v)-F_{at}}{mg}=0{,}05=5\%.$$

c) La potenza fornita dal motore in questo caso è la somma di quella erogata per il moto in salita a velocità costante, e di quella necessaria a variare l'energia cinetica durante la fase di accelerazione: $W_{tot} = 60kW + \dfrac{\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}}{\Delta t} = 60kW + 1{,}5kW = 61{,}5kW$.

4. $W = \dfrac{L}{\Delta t} = \dfrac{ma\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{mv^2}{2t} = 4{,}1 \cdot 10^3 W$.
5. Il ciclista deve vincere attrito e forza di gravità:
$P = F \cdot v = (mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta)v =$
$= (65 + 7) \cdot 10 \cdot (\dfrac{100}{1000} + 0{,}1 \cdot \sqrt{1 - \left(\dfrac{100}{1000}\right)^2}) \cdot \dfrac{15}{3{,}6} = 598 \cong 600W$.