# CAPITOLO 5
# ENERGIA POTENZIALE E CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

## 5.1 Energia potenziale

I concetti di lavoro e di energia cinetica, oltre a fornire uno strumento alternativo alle leggi di Newton per lo studio dei fenomeni fisici, pongono la questione dell'esistenza di altre forme d'energia. Ad esempio, in virtù della sua posizione rispetto al suolo, un corpo lasciato cadere liberamente è in grado di compiere un lavoro, così come un corpo appoggiato all'estremità di una molla compressa che oscilla su un piano orizzontale.
Chiamiamo *energia potenziale* questa capacità di compiere lavoro in virtù della posizione. Nel caso del corpo lasciato cadere liberamente si parla di *energia potenziale gravitazionale*, mentre nel caso del corpo appoggiato alla molla compressa (o attaccato ad una molla allungata) si parla di *energia potenziale elastica*.
In generale, un corpo possiede energia potenziale *quando, spostandosi da un punto ad un altro dello spazio, la sua energia cinetica aumenta per effetto del lavoro compiuto su di esso dalle forze che gli sono applicate*.
In particolare l'energia potenziale, calcolata rispetto ad un punto O, relativa ad una forza conservativa $\vec{F}$ che agisce su un corpo che si trova inizialmente in un punto P, è uguale al lavoro che la forza $\vec{F}$ compie sul corpo mentre questo si sposta dal punto P al punto O:

$$U_{\vec{F}}(P) = L_{PO}.$$

E' importante precisare che questa definizione ha senso solo per forze conservative, in quanto richiede l'indipendenza dal cammino seguito per andare da P ad O.
La dipendenza del concetto di energia potenziale dalla posizione di un corpo nello spazio, porta a considerare il luogo dei punti nei quali l'energia potenziale assume lo stesso valore: questi luoghi si dicono *superfici equipotenziali*.
Ad esempio, nel caso dell'energia potenziale gravitazionale (vicino alla superficie terrestre) le superfici equipotenziali sono *piani paralleli* al suolo.

*Esempio.* Un punto che si trova nel punto P a quota *h* sopra il punto O che si trova al suolo, in virtù della sua posizione possiede un'energia potenziale pari al lavoro fatto dalla forza di gravità durante la caduta libera del corpo:

$$U_{\vec{P}}(P) = L_{PO} = mgh.$$

*Esempio.* Una massa *m* viene appoggiata all'estremità libera (punto P) di una molla compressa di un tratto *x* rispetto alla posizione di riposo (punto O). L'energia potenziale elastica posseduta inizialmente dalla massa è data dalla relazione

$$U_{\vec{P}}(P) = L_{PO} = \frac{1}{2}kx^2.$$

La somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica si dice *energia meccanica*.

## 5.2 Teorema di conservazione dell'energia meccanica

L'arbitrarietà di scelta del punto verso cui il corpo si sposta sotto l'azione delle forze, fa assumere una particolare importanza alla *differenza di energia potenziale*. Quest'importanza è alla base del *Teorema di conservazione dell'energia meccanica*: per un corpo soggetto all'azione di sole forze conservative, la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale si mantiene costante.
Dimostriamo questa fondamentale legge della fisica.
Un corpo si sposta dal punto P al punto Q sotto l'azione di una forza conservativa $\vec{F}$. Per l'additività del lavoro, e la definizione di energia potenziale si ha che il lavoro compiuto dalla forza durante lo spostamento tra i due punti è uguale alla variazione della sua energia potenziale:

$$L_{PQ} = L_{PO} + L_{OQ} = L_{PO} - L_{QO} = U_{\vec{F}}(P) - U_{\vec{F}}(Q) := -\Delta U.$$

Tuttavia, per il teorema dell'energia cinetica questo lavoro è anche uguale alla variazione di energia cinetica:

$$L_{PQ} = K(Q) - K(P) = \Delta K = -\Delta U \Rightarrow \Delta K + \Delta U = \Delta\left(K + U\right) = 0.$$

L'ultima espressione dimostra la tesi, che può essere espressa anche così:

$$U_{\vec{F}}(P)-U_{\vec{F}}(Q)=K(Q)-K(P)\Rightarrow U_{\vec{F}}(P)+K(P)=U_{\vec{F}}(Q)+K(Q).$$

Cerchiamo di capire meglio il significato del principio di conservazione dell'energia meccanica. Durante la caduta libera di un corpo, la diminuzione della quota comporta una perdita di energia potenziale gravitazionale. Questa energia potenziale in realtà, non viene persa, bensì *trasformata* in energia cinetica.
Nel caso di una molla tenuta compressa su un piano orizzontale in assenza di attrito, l'energia potenziale elastica inizia a diminuire non appena rilasciamo la molla. Anche in questo caso, l'energia potenziale viene trasformata in energia cinetica della massa attaccata alla molla.

**Il "pendolo balistico"**

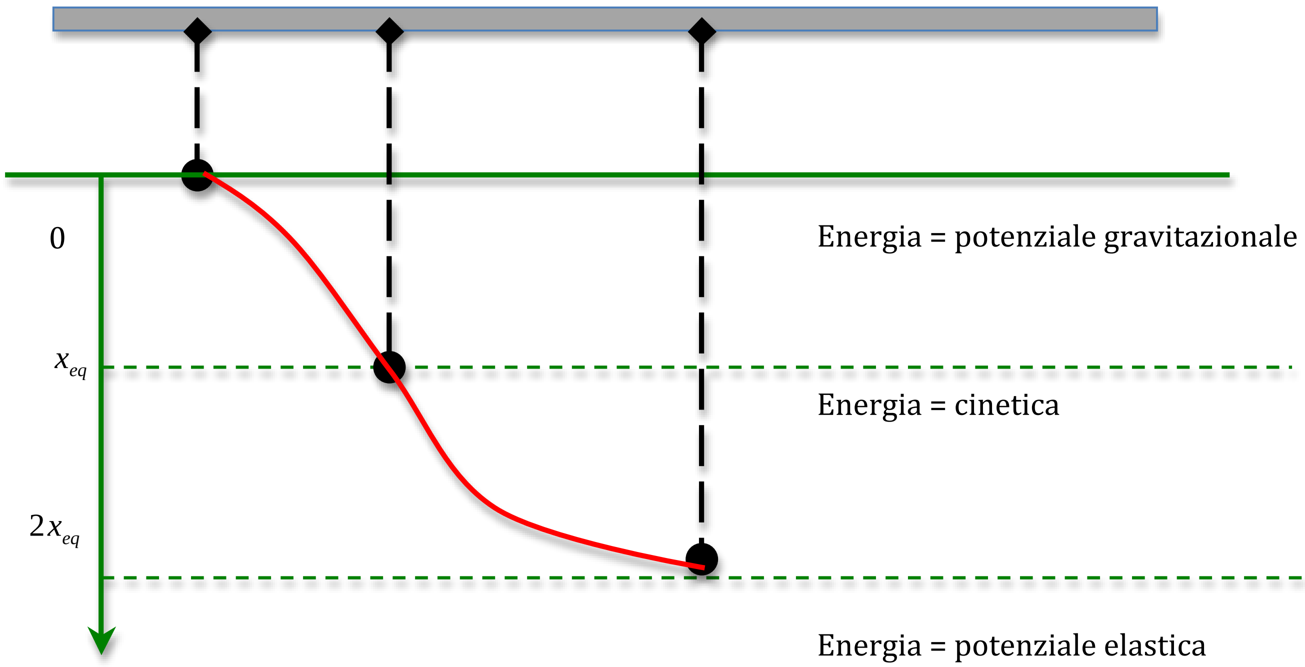
Un proiettile di massa nota *m* viene sparato con velocità *v* contro un bersaglio di massa nota *M*, appeso all'estremità libera di un filo fissato al soffitto, ed appoggiato senza attrito su un tavolo, a contatto con una molla a risposo di costante elastica *k*. Il proiettile penetra nel bersaglio e vi rimane conficcato. In seguito al colpo, il composto bersaglio-proiettile raggiunge una certa quota *h*, rispetto al piano del tavolo. Questo dispositivo permette il calcolo della velocità iniziale del proiettile.
Applichiamo il Principio di conservazione della quantità di moto e dell'energia meccanica:

$$\begin{cases} mv=(M+m)V \\ \frac{1}{2}(m+M)V^2=(M+m)gh \end{cases}\Rightarrow v=\frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}.$$

Fin qui, abbiamo considerato separatamente l'energia potenziale gravitazionale e quella elastica.

**La molla verticale**

Consideriamo adesso una molla fissata al soffitto, con una massa attaccata all'estremità libera. Vogliamo studiare il moto oscillatorio in verticale della massa, trascurando l'attrito con l'aria, utilizzando il principio di conservazione dell'energia meccanica e le leggi della dinamica.




Dopo un certo numero di oscillazioni, il moto si smorza completamente, e il sistema massa-molla raggiunge una configurazione di equilibrio con la molla allungata di un tratto $x_{eq}$, ottenuto uguagliando a zero la risultante delle forze:

$$kx_{eq}=mg\Rightarrow x_{eq}=\frac{mg}{k}.$$

La seconda legge della dinamica, nel sistema di riferimento scelto, assume la forma:

$$ma=-kx+mg.$$

L'energia meccanica della massa oscillante, per effetto della scelta di porre uguale a zero l'energia potenziale totale al "livello zero" in figura, e per lo stato di quiete iniziale, è uguale a zero. Questa scelta porta a scrivere l'energia potenziale nella forma

$$U(x)=\frac{1}{2}kx^2-mgx\,,$$

dove la parte gravitazionale è chiaramente negativa, <u>avendo posto uguale a zero l'energia potenziale nel punto più alto dell'oscillazione</u>.
L'energia meccanica è quindi

$$0=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2-mgx\,.$$

Per il teorema di conservazione dell'energia meccanica risulta che nel punto in cui l'energia potenziale è minima, quella cinetica è massima. Il minimo dell'energia potenziale si trova in corrispondenza dell'ascissa del vertice della parabola $y=\frac{1}{2}kx^2-mgx$ che la rappresenta:

$$x_{\min}=\frac{mg}{k}=x_{eq}\,.$$

In corrispondenza di tale punto l'energia cinetica è massima e la velocità di passaggio della massa è:

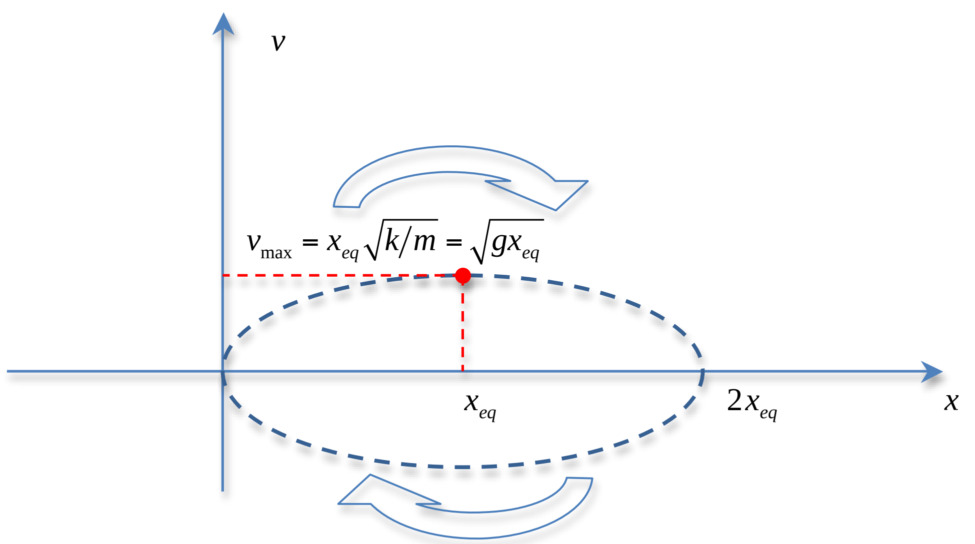
$$v=g\sqrt{m/k}\,;$$

infine, nel punto a distanza $2x_{eq}$, la velocità è istantaneamente uguale a zero (punto di *inversione del moto*) e l'energia potenziale è, di conseguenza, uguale a zero: $U(2x_{eq})=\frac{1}{2}k\left(\frac{2mg}{k}\right)^2-mg\frac{2mg}{k}=0$;

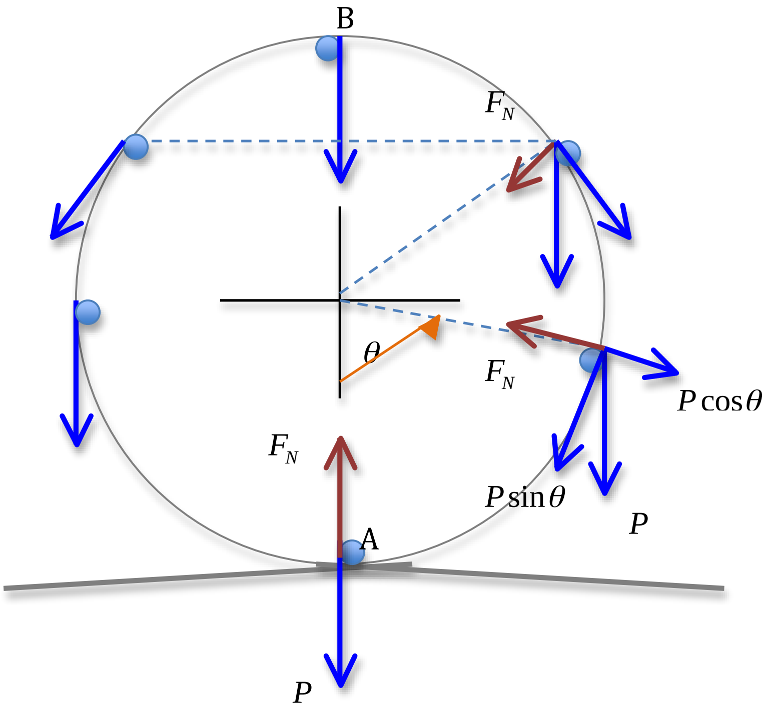
l'accelerazione è $ma=-kx+mg\Rightarrow a=-k\frac{2mg}{mk}+mg=-g$: occorre vincere il peso per risalire!
Vogliamo rappresentare su un diagramma posizione-velocità l'equazione dell'energia meccanica

$$0=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2-mgx\,.$$

Facciamo qualche "adattamento": $0=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2-mgx=x^2-2xx_{eq}+\frac{mv^2}{k}$. Aggiungiamo e togliamo il termine $x_{eq}^2$; otteniamo così l'equazione $\left(x-x_{eq}\right)^2+\frac{mv^2}{k}=x_{eq}^2$ rappresentativa di un'ellisse di centro $\left(x_{eq};0\right)$ e semiassi $a=x_{eq}$ e $b=x_{eq}\sqrt{k/m}$.



**Il "giro della morte"**




Lo schema sopra può essere riferito, ad esempio, ad una motocicletta che compie un'acrobazia su una pista circolare verticale. Scriviamo le espressioni dell'energia meccanica e della seconda legge della dinamica:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgr(1-\cos\theta)$$

$$m\frac{v^2}{r} = F_N - mg\cos\theta$$

Durante la salita dalla posizione al livello del suolo, A, a quella più alta, B, la reazione vincolare, centripeta, perde progressivamente intensità fino ad annullarsi nell'istante in cui la massa raggiunge il punto più alto, per poi acquistare nuovamente intensità fino al valore massimo, che verrà raggiunto in corrispondenza del livello del suolo. Osserviamo che il moto lungo la guida *non* è circolare uniforme, in quanto viene rallentato durante la salita dalla componente tangenziale della forza peso, ed accelerato dalla medesima componente durante la discesa. La velocità nel punto più alto è $m\frac{v^2}{r} = 0 - mg\cos\pi \Rightarrow v = \sqrt{rg}$, di conseguenza l'energia meccanica in questo punto è $E_B = \frac{1}{2}mgr + mg2r = \frac{5}{2}mgr$. Il principio di conservazione dell'energia meccanica ci permette di calcolare la minima velocità in ingresso nel "giro della morte":

$E_A = E_B \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{5}{2}mgr \Rightarrow v_A = \sqrt{5gr}$.

**5.3 Trasformazioni energetiche durante gli urti**

Un lavoro è compiuto attraverso trasformazioni di energia potenziale e cinetica. Nella realtà, inevitabilmente, una parte di energia *utilizzabile* viene dissipata.

Si parla di *urto* come di un'interazione di breve durata, durante la quale possono essere trascurate forze esterne agenti sui corpi urtanti. Durante un urto vale sempre il Principio di conservazione della quantità di moto. Esaminiamo l'energia cinetica definendo le grandezze *velocità del centro di massa* $\vec{v}_{cm} = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$, e *velocità relativa* $\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. E' possibile esprimere le velocità dei corpi in funzione di queste due velocità $\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}_{cm} + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_r \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_{cm} - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_r \end{cases}$, e l'energia cinetica assume quindi la forma $K = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2 + \dfrac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}v_r^2 := K_{cm} + K_r$, intesa come somma dell'*energia cinetica del centro di massa*, $K_{cm}$, e dell'*energia cinetica del moto relativo*, $K_r$. Il sistema delle due masse è isolato, quindi si ha conservazione della quantità di moto e, di conseguenza, della velocità e dell'energia cinetica del centro di massa. L'energia cinetica riferita al moto relativo invece, fornisce l'energia necessaria per le deformazioni dei corpi durante l'urto. Se, al termine del breve intervallo di tempo, i corpi ritornano alla loro forma originaria, l'urto si dice *elastico*: si conserva l'energia cinetica del moto relativo e, quindi, l'energia cinetica complessiva (anche se quella dei singoli corpi, in generale, subisce variazioni). Il mancato ritorno alla forma originaria suddivide gli urti in *anelastici* e *completamente anelastici* (quando i corpi restano attaccati).

*Problema*

Due corpi si urtano in modo perfettamente elastico. Si determini la relazione tra la velocità relativa prima e dopo l'urto.

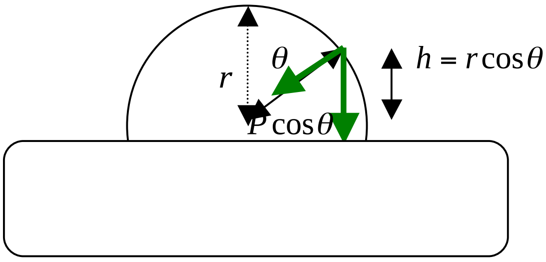
- In questo caso si applica il Principio di conservazione della quantità di moto e dell'energia meccanica: $\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \dfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \dfrac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \dfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \dfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$. Risolvendo questo sistema nelle incognite $v_{2f} - v_{1f}$ (velocità relativa finale) e $v_{2i} - v_{1i}$ (velocità relativa iniziale) otteniamo la relazione cercata: $v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i})$. L'ultima relazione, con l'equazione che esprime la conservazione della quantità di moto, permette di impostare il sistema per la determinazione delle velocità finali dei due corpi:

$$\begin{cases} v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i}) \\ m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = \dfrac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ v_{2f} = \dfrac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Quanto appena visto ci permette di introdurre una nuova grandezza fisica: il *coefficiente di restituzione* . Si tratta di una grandezza fisica adimensionale che misura la perdita di energia meccanica in seguito all'urto tra corpi. La sua definizione si basa sulle velocità relative di due corpi, prima e dopo la collisione: $v_{2f} - v_{1f} = -e(v_{2i} - v_{1i})$. I valori assunti dal coefficiente di restituzione vanno da zero, nel caso di urti perfettamente anelastici, a uno, nel caso di urti perfettamente elastici.

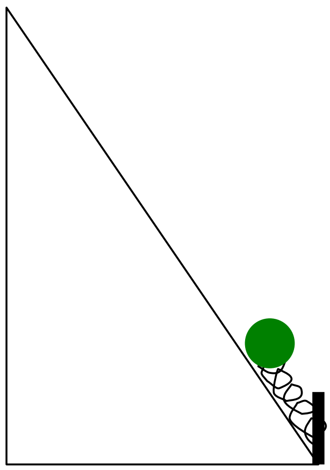
**Esercizi svolti**

1. Un esquimese è seduto sulla sommità del proprio igloo ad un'altezza di 3 m da terra, quando decide di darsi una leggerissima spinta (si trascuri l'attrito con la superficie ghiacciata dell'igloo). Si trovi l'altezza da terra del punto in cui l'esquimese abbandona l'igloo




- Il principio di conservazione dell'energia meccanica porta all'equazione $mgr = mgr\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$, mentre la seconda legge della dinamica applicata nell'istante in cui l'esquimese si distacca dalla superficie dell'igloo porta all'equazione $\frac{mv^2}{r} = mg\cos\theta$. La contemporanea validità delle due equazioni conduce alla $mgr = mgr\cos\theta + \frac{1}{2}mgr\cos\theta = \frac{3}{2}mgr\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow h = 2m$.

2. Una massa di 500g comprime di 5cm una molla di costante elastica pari a 200N/m fissata all'estremità inferiore di un piano inclinato di 60°. Se il coefficiente di attrito cinetico tra il piano e la massa è 0,3, si determini la quota massima raggiunta dalla massa una volta lasciata libera.



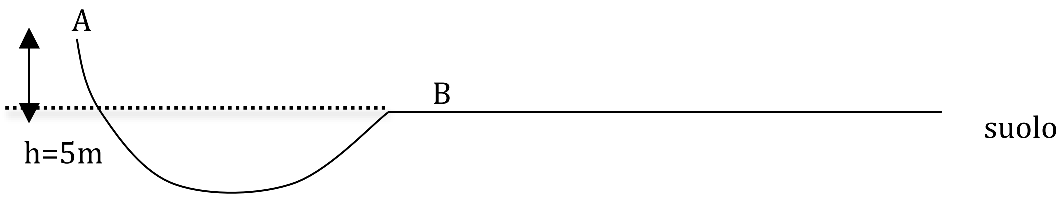
- L'energia potenziale elastica iniziale della molla è $\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = 0{,}25J$. Questa energia potenziale si trasformerà in energia potenziale gravitazionale e calore disperso per effetto della forza d'attrito: $\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = mgh + \mu mg\cos 60° \cdot \left(\frac{h}{\sin 60°} + \Delta x\right)$, da cui segue

$$h = \frac{\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 - \mu mg\cos 60°\Delta x}{(1 + \frac{\mu\cos 60°}{\sin 60°})mg} = 0{,}04m = 4cm$$

3. Un corpo di massa *M*, inizialmente fermo, subisce un urto perfettamente elastico da parte di un corpo di massa *m* in moto con velocità *v*. Si determinino le velocità dei due corpi subito dopo l'urto. Cosa succede se la massa *M* è molto più grande della massa *m*?

- L'urto è perfettamente elastico, quindi tra le velocità relative dei corpi sussiste la relazione $v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i}) = -(0 - v) = v$. Il principio di conservazione della quantità di moto durante l'urto permette di determinare le due velocità:
  $mv + M0 = mv_{1f} + Mv_{2f} \Rightarrow mv = mv_{1f} + M(v_{1f} + v) \Rightarrow$
  $v_{1f} = \dfrac{m - M}{m + M} v, \quad v_{2f} = \dfrac{2m}{m + M} v$
- Se la massa *M* è molto più grande della massa *m* risulta:
  $v_{1f} = \dfrac{M\left(\dfrac{m}{M} - 1\right)}{M\left(\dfrac{m}{M} + 1\right)} v \to -v \quad , \quad v_{2f} = \dfrac{2m}{M\left(\dfrac{m}{M} + 1\right)} v \to 0$. In altre parole, la massa piccola "rimbalza" indietro con velocità –*v*, mentre la massa grande resta ferma.

4. Un corpo di massa *m* si trova nel punto A, a 5 metri da terra, vincolato ad una guida circolare come descritto in figura. Una volta giunto nel punto B, dopo aver percorso 3 ottavi di cerchio, abbandona la guida e, una volta in volo, si scompone in due parti, l'una il triplo dell'altra, che ricadono a terra nello stesso istante. Sapendo che la parte minore cade a terra ad una distanza di 4 metri dal punto B, si calcoli la distanza da B a cui arriva l'altra parte.
*Suggerimento: in B la velocità del corpo forma un angolo di 45° con il suolo. Pensare al moto del centro di massa, ed al fatto che i due pezzi ricadono a terra contemporaneamente…*




- Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica tra i punti A e B:
  $mgh_A = \dfrac{mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh_A}$. In seguito all'esplosione, il centro di massa prosegue quello che sarebbe stato il moto del corpo se l'esplosione non fosse avvenuta, quindi, ricadendo a terra nello stesso istante dei due frammenti: $(m_1 + m_2)x_{CM} = m_1x_1 + m_2x_2$,
  con $m_1 + m_2 = m; \quad m_2 = 3m_1 \quad \Rightarrow m_1 = m/4; m_2 = 3m/4$. La formula della gittata applicata al centro di massa ci fornisce il punto in cui questo tocca terra:
  $x_{\max} = \dfrac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \dfrac{2v_0^2 \cos\alpha \cdot sen\alpha}{g} = x_{CM} = \dfrac{v_B^2}{g} = 2h_A = 10m$; di conseguenza
  $x_2 = \dfrac{mx_{CM} - \dfrac{mx_1}{4}}{\dfrac{3m}{4}} = \dfrac{10 - 1}{3/4} = 12m$.

5. Nel dispositivo noto come "giro della morte", un corpo di massa *m* percorre una traiettoria circolare di raggio *r*. Indicata con *v* la velocità del corpo nel punto più basso della traiettoria, si calcoli il valore della forza normale quando il corpo ha descritto un angolo di 60° rispetto alla verticale, in senso antiorario, misurato dal punto più basso della sua traiettoria.

- Uguagliamo le espressioni dell'energia meccanica nel punto più basso della traiettoria (A), ed in quello in cui è richiesto il calcolo della forza normale (B): $\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_B^2}{2}+mg\left(r-r\cos 60°\right)\Rightarrow v_B^2=v^2-gr$. La seconda legge della dinamica permette di determinare la forza normale: $\frac{mv_B^2}{r}=F_N-mg\cos 60°\Rightarrow F_N=\frac{mv^2}{r}-\frac{mg}{2}$. Da calcoli precedenti è noto che la velocità nel punto più basso della traiettoria è $v=\sqrt{5gr}$, quindi $F_N=\frac{5mgr}{r}-\frac{mg}{2}=\frac{9mg}{2}$.

6. Un pendolo lungo 1m, alla cui estremità inferiore è appesa una massa M, viene teso con un'ampiezza iniziale di 45° e lasciato andare. Dopo aver sotteso un arco di 75°, la massa appesa al filo colpisce elasticamente una pallina di massa *m* appoggiata su un sostegno. Si calcoli il modulo della velocità con cui la pallina abbandona il sostegno.

- Fissato al suolo lo "zero" dell'energia potenziale gravitazionale, possiamo uguagliare le espressioni dell'energia meccanica alla quota iniziale ed a quella in cui è appoggiata la pallina: $Mg(1-\cos 45°)=Mg(1-\cos 30°)+\frac{Mv^2}{2}$ e determinare la velocità con cui la massa M urta la pallina. Dalle relazioni generali $v_{2f}=\frac{2Mv+(m-M)0}{M+m}=\frac{2M\sqrt{g\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}}{M+m}$.

7. Un corpo di massa $m=5kg$ è appeso ad una molla di costante elastica $k=2\cdot 10^3\frac{N}{m}$. Si calcoli la velocità del corpo, una volta lasciato cadere, quando questo passa per il punto a metà strada tra quello iniziale e quello d'equilibrio.

- Scegliamo come zero dell'energia potenziale totale il punto in cui si trova l'estremità libera della molla a riposo. L'energia meccanica in questo punto è chiaramente uguale a zero. Orientando l'asse verticale verso il basso, per il Principio di conservazione dell'energia meccanica otteniamo:

$$x_{eq}=\frac{mg}{k}\quad 0=\frac{k\left(x_{eq}/2\right)^2}{2}-\frac{mgx_{eq}}{2}+\frac{mv^2}{2}\quad\Rightarrow v=\sqrt{\frac{mg^2}{k}-\frac{mg^2}{4k}}=\sqrt{\frac{3mg^2}{4k}}=0,42ms^{-1}.$$

**Problemi**

1. Un corpo di massa $m=0,5kg$ parte da fermo e scivola per una lunghezza pari a $l=3m$ su un piano liscio, inclinato di un angolo di 45° sull'orizzontale. Al termine della sua corsa, colpisce l'estremità libera di una molla, appoggiata sul piano, e fissata alla fine del piano stesso. Si calcoli la massima compressione della molla, sapendo che la costante elastica della molla è $k=400\frac{N}{m}$, e trascurando la variazione di energia potenziale gravitazionale durante la compressione della molla.
2. Un ragazzo di massa m è seduto su una calotta emisferica di ghiaccio. Se comincia a scivolare, partendo da fermo, in corrispondenza di quale angolo, misurato da terra verso la verticale, si stacca dalla calotta? (Suggerimento: al momento del distacco la forza normale è nulla…).
3. Una massa *m* tiene in compressione una molla di costante elastica *k*, per un tratto $\Delta x$, alla base di un piano inclinato di un angolo $\theta$. Rilasciata la massa, questa percorre il tratto $\Delta x$ quando si stacca dalla molla. Trascurando l'attrito nel tratto $\Delta x$. Si calcoli la distanza *l* percorsa lungo il piano inclinato, nell'ipotesi in cui tra questo e la massa sia presente attrito dinamico.

4. Nella situazione dell'esercizio 3, in assenza d'attrito tra la massa ed il piano inclinato, si calcoli la quota massima raggiunta, rispetto al vertice alto del piano inclinato, la cui altezza rispetto alla posizione iniziale della massa (durante la fase di compressione della molla) è *h*.

5. Un proiettile di massa nota *m* viene sparato con velocità *v* contro un bersaglio di massa nota *M*, appeso all'estremità libera di un filo fissato al soffitto, ed appoggiato senza attrito su un tavolo, a contatto con una molla a risposo di costante elastica *k*. Il proiettile penetra nel bersaglio e vi rimane conficcato. In seguito al colpo, il composto bersaglio-proiettile raggiunge una certa quota *h*, rispetto al piano del tavolo. Raggiunta la quota massima, il composto bersaglio-proiettile ritorna verso il tavolo e, appena tocca la molla, il filo si stacca dal soffitto. Si calcoli la compressione della molla.
6. Un pendolo lungo 1m viene teso con un'ampiezza iniziale di 45° e lasciato andare. Dopo aver sotteso un arco di 75°, la massa appesa al filo colpisce una pallina appoggiata su un sostegno. Si calcoli la distanza dal sostegno del punto in cui la pallina tocca terra.
7. Un pendolo semplice è un dispositivo costituito da una massa *m* attaccata ad un filo di lunghezza *L*. La massa viene lasciata andare dalla posizione iniziale in cui il filo forma un angolo di 60° con la verticale. Nell'istante in cui raggiunge la posizione verticale si calcoli: a) la velocità della massa *m*; b) la tensione del filo.
8. Una massa $m$ è in equilibrio appesa ad una molla verticale, fissata al soffitto, di costante elastica $k$, quando viene compressa, molto lentamente, di un tratto $\Delta x < x_{eq}$. Calcolare il lavoro compiuto durante la compressione della molla.
9. Due piani inclinati, uno di 30° sull'orizzontale, e l'altro di 60°, sempre sull'orizzontale, sono uniti per il cateto di altezza comune, uguale a *h*. Due molle di diversa costante elastica $k_1, k_2$ sono poste alla base del piano inclinato, e compresse della lunghezza $\Delta x_1, \Delta x_2$. Due masse identiche *m* sono appoggiate sul piano inclinato, a contatto con l'estremità libera della molla.

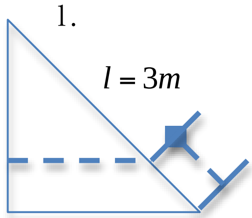
- Si esprima la velocità delle masse nel punto più alto del piano inclinato, in funzione dei dati del problema.
- Stabilire delle condizioni affinché le velocità delle due masse siano uguali.
- Quanto tempo impiegano a salire lungo il piano inclinato fino al punto più alto?

10. Due masse, una doppia dell'altra, si muovono lungo una direzione orizzontale, in verso opposto, con uguale velocità (in modulo). Si calcolino le velocità finali in seguito ad un urto perfettamente elastico.

11. Due masse identiche viaggiano nella stessa direzione e nello stesso verso. Quella più lenta si muove con una velocità $\vec{v}$, e precede l'altra massa. Quanto deve essere la velocità della massa inseguitrice affinché, dopo un urto perfettamente elastico, questa si fermi del tutto? In questo caso, quanto sarà la velocità finale della massa inizialmente più lenta?

**Soluzioni**

1.




Si applica il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$mgl\sin\theta = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2mgl\sin\theta}{k}} = 32cm$.

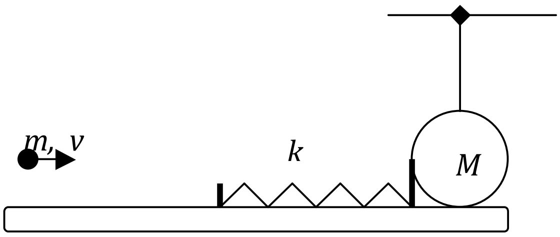
2.


$$\begin{cases} mgr = mgr\sin\theta + \frac{mv^2}{2} \\ \frac{mv^2}{r} = mg\sin\theta - F_N \end{cases} \Rightarrow (F_N = 0) \Rightarrow mgr = \frac{3mgr\sin\theta}{2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{2}{3}$$

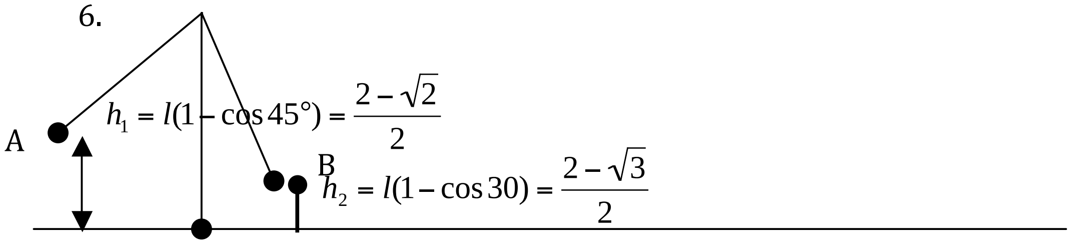
3. a) L'energia cinetica con cui la massa viene rilasciata è uguale all'energia potenziale iniziale della molla: $\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$. L'energia cinetica iniziale viene in parte spesa per compiere lavoro contro la forza di gravità, $L = -mg\sin\theta$, ed in parte dissipata sotto forma di lavoro compiuto dalla forza d'attrito dinamico, $L = -(K_d mg\cos\theta)l$. Per il teorema dell'energia cinetica, $0 - \frac{1}{2}mv^2 = -(K_d mg\cos\theta)l - (mg\sin\theta)l \Rightarrow l = \frac{k(\Delta x)^2}{(K_d mg\cos\theta) + (mg\sin\theta)}$.

4. L'energia potenziale elastica viene trasformata in energia potenziale e cinetica nel vertice alto, e nel punto di quota massima: $\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mg(h + \Delta h) + \frac{1}{2}m(v\cos\theta)^2$. Il corpo abbandona il piano se $\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \geq mgh$, con $\Delta h = \frac{(k\Delta x^2 - 2mgh)(1 - \cos^2\theta)}{2mgh}$.

5. Quando il pendolo torna nella posizione verticale, la sua energia meccanica sarà tutta di tipo cinetico. Per il Principio di conservazione dell'energia meccanica, questa verrà trasformata interamente (non essendoci attrito con la superficie del tavolo) in energia potenziale elastica di compressione della molla: $(M + m)gh = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2gh(M + m)}{k}}$.




6.

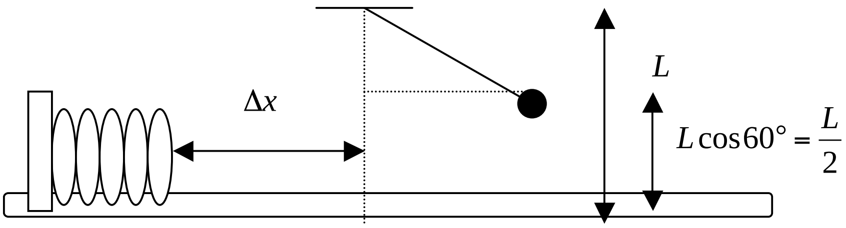


Si applica il principio di conservazione dell'energia e si ricava l'intensità della velocità iniziale: $E_A = E_B \Rightarrow mgh_1 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})g} = 1{,}8\frac{m}{s}$. Di conseguenza la legge oraria lungo la direzione *x* è $\begin{cases} a_x = 0\frac{m}{s^2} \\ v_{0x} = v\cos 30° = 1{,}6\frac{m}{s} \\ x = v_{0x}t = 1{,}6\frac{m}{s}t \end{cases}$, e lungo la direzione y

$$\begin{cases} a_y = -g = -10\frac{m}{s^2} \\ v_y = v_y - gt = v\sin 30° + a_y t = 0{,}9\frac{m}{s} - 10t \\ y = h_2 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}m + 0{,}9\frac{m}{s}t - 5\frac{m}{s^2}t^2 \end{cases}$$

La pallina tocca terra quando $y = 0m$; di conseguenza $0{,}1m + 0{,}9\frac{m}{s}t - 5\frac{m}{s^2}t^2 = 0$ e questo si verificherà al tempo $t = \frac{+0{,}9+\sqrt{2{,}81}}{10} = 0{,}3s$. La distanza cercata è quindi $x = v_{0x}t = 1{,}6\frac{m}{s}\cdot 0{,}3s = 0{,}5m$.

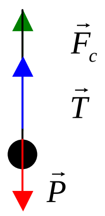
7.




a) la velocità della massa *m*;

- La velocità nel punto più basso si calcola applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale $E_1 = mgL(1-\cos\theta) = mg\frac{L}{2}$ e quello finale $E_2 = \frac{1}{2}mv^2$, ottenendo $v = \sqrt{gL} = 3{,}2m/s$.

b) la tensione del filo.

- 


Dalla seconda Legge della dinamica: $\vec{F}_c = \vec{T} - \vec{P} \Rightarrow T = \frac{mv^2}{L} + mg = 2mg = 10N$.

8. Risolviamo il problema applicando il teorema dell'energia cinetica (la cui variazione è nulla, per effetto della compressione "molto lenta"). Nel sistema di riferimento scelto nell'esempio guida si ha: $L_F - mg\Delta x + \frac{1}{2}k\left(x_{eq}-0\right)^2 - \frac{1}{2}k\left((x_{eq}-\Delta x)-0\right)^2 = 0$.

9. *Si applica il teorema di conservazione dell'energia meccanica. Per semplicità, possiamo considerare le masse appoggiate in corrispondenza del vertice basso del piano*:
$$\frac{k_{1,2}\left(\Delta x_{1,2}\right)^2}{2}=\frac{mv_{1,2}^2}{2}+mgh \Rightarrow v_{1,2}=\sqrt{\frac{k_{1,2}\left(\Delta x_{1,2}\right)^2}{m}-2gh}\,.$$
$$v_1=v_2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{k_1\left(\Delta x_1\right)^2}{m}-2gh}=\sqrt{\frac{k_2\left(\Delta x_2\right)^2}{m}-2gh} \Leftrightarrow k_1\left(\Delta x_1\right)^2=k_2\left(\Delta x_2\right)^2.$$
*Dovendo lavorare con le leggi orarie, la mancata conoscenza di quella della massa che oscilla, attaccata ad una molla, lungo un piano orizzontale, dobbiamo limitare lo studio al tratto di lunghezza* $\frac{l}{\sin\theta}-\Delta x$. In questo tratto la massa segue un moto rettilineo uniformemente decelerato, con velocità iniziale:
$v_{01,2}=\sqrt{\frac{k_{1,2}\left(\Delta x_{1,2}\right)^2}{m}-2g\frac{\Delta x_{1,2}}{\sin\theta_{1,2}}}$. *La legge oraria della velocità nel moto rettilineo uniformemente accelerato fornisce il tempo impiegato dalla massa per coprire il tratto di lunghezza* $\frac{l_{1,2}}{\sin\theta_{1,2}}-\Delta x_{1,2}$:
$$\Delta t_{1,2}=\frac{v_{1,2}-v_{01,2}}{-g\sin\theta_{1,2}}=\frac{\sqrt{\frac{k_{1,2}\left(\Delta x_{1,2}\right)^2}{m}-2gh}-\sqrt{\frac{k_{1,2}\left(\Delta x_{1,2}\right)^2}{m}-2g\frac{\Delta x_{1,2}}{\sin\theta_{1,2}}}}{-g\sin\theta_{1,2}}\,.$$

10. $$\begin{cases} v_{2f}-v_{1f}=-(v_{2i}-v_{1i}) \\ m_1v_{1i}+m_2v_{2i}=m_1v_{1f}+m_2v_{2f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1f}=\dfrac{(m_1-m_2)v_{1i}+2m_2v_{2i}}{m_1+m_2} \\ v_{2f}=\dfrac{2m_1v_{1i}+(m_2-m_1)v_{2i}}{m_1+m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1f}=\dfrac{mv-2mv}{2m+m}=-\dfrac{1}{3}v \\ v_{2f}=\dfrac{4mv+(m-2m_1)(-v)}{2m+m}=\dfrac{5}{3}v \end{cases}$$

11. *Il problema ammette soluzione solo se la massa "lenta" è in realtà ferma. In seguito all'urto inizierà a muoversi con la velocità della massa urtante, che a sua volta si ferma:*
$$\begin{cases} v_{2f}-v_{1f}=-(v_{2i}-v_{1i}) \\ m_1v_{1i}+m_2v_{2i}=m_1v_{1f}+m_2v_{2f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{2f}=-(v-v_{1i}) \\ v_{1i}+v=-(v-v_{1i}) \end{cases} \Rightarrow 0v_{1i}=2v$$

12.

## SEZIONE OLIMPICA (gare 1° livello PROGETTO OLIMPIADI 2013)

1. Un disco di massa M, che si muove con velocità di modulo *v*, urta frontalmente un secondo disco di massa 2M e velocità di modulo *v/2*; i due dischi stanno scivolando su di un piano orizzontale con attrito trascurabile. Si calcoli il modulo della velocità dei due dischi che, dopo l'urto, rimangono attaccati.

2. Due blocchi, il primo di massa M e il secondo di massa 2M, sono appoggiati su un piano orizzontale senza attrito e sono inizialmente fermi. A ciascun blocco viene applicata la stessa forza orizzontale, di modulo F, per lo stesso intervallo di tempo, $\Delta t$. Qual è il rapporto tra l'energia cinetica del secondo blocco e quella del primo, quando la forza ha cessato di agire?