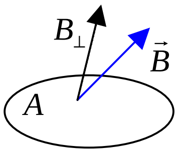
CAPITOLO 17
INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

17.1 Il flusso magnetico

Un filo percorso da corrente produce un campo magnetico. Faraday in Gran Bretagna (nel 1831), e Henry negli Stati Uniti, scoprirono che la variazione di un campo magnetico produce corrente. Questa scoperta ha reso possibile, tra l'altro, la produzione di *correnti alternate*. Cominciamo lo studio del campo magnetico variabile introducendo il concetto di **flusso magnetico**.



L'elemento di flusso magnetico è dato dal prodotto del componente del campo normale all'elemento di superficie, per l'area dell'elemento di superficie; in simboli:

$$\Phi_m = B_\perp A = BA\cos\theta, \quad [\Phi_m] = Wb \quad (Weber),$$

dove θ indica l'angolo tra il vettore campo magnetico e la normale all'elemento di superficie.
Il flusso magnetico attraverso una bobina di *N* spire è:

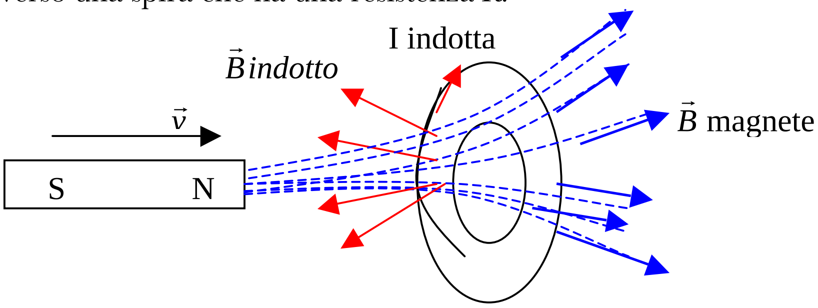
$$\Phi_m = NB_\perp A = NBA\cos\theta.$$

17.2 La legge di Faraday-Neumann-Lenz

Dagli esperimenti di Faraday e di Henry risulta che, se il flusso del campo magnetico varia nel tempo, s'induce nel circuito una *fem*

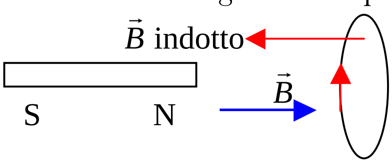
$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi_m}{\Delta t} \quad \text{(\textbf{legge di Faraday-Neumann-Lenz})}.$$

La formalizzazione di questa legge è opera di Neumann e avviene nel 1845. Il segno "-" che compare (*legge di Lenz*), rappresenta *l'opposizione* della *fem* indotta e della corrente indotta alla variazione del flusso magnetico che le produce. Consideriamo, ad esempio, un magnete in movimento attraverso una spira che ha una resistenza *R:*



Il moto del magnete verso destra aumenta il flusso del campo magnetico attraverso la spira, essendo attraversata da un numero di linee di forza concatenate sempre maggiore. Conseguenza di ciò è la produzione nella spira di una corrente indotta circolante in senso tale da produrre un campo magnetico indotto, il cui flusso si oppone (in questo caso va a decremento) a quello del magnete. Analogamente, se il moto del magnete fosse verso sinistra, il flusso del campo magnetico da questo prodotto diminuirebbe: la corrente indotta circolerebbe in senso opposto al caso precedente.

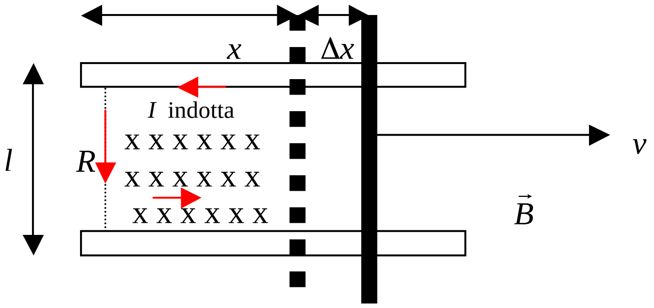
Significato della legge di Lenz (Russia, 1834)
La legge di Lenz è conseguenza del principio di conservazione dell'energia:



La spira si comporta come un (piccolo) magnete a sbarra, con il polo nord in opposizione al polo nord del magnete. Se, per assurdo, la corrente circolasse in verso opposto (polo sud in opposizione al polo nord del magnete), basterebbe una leggerissima spinta al magnete, posto inizialmente a grande distanza, per farlo accelerare verso la spira. In virtù di questa accelerazione si avrebbe un aumento del flusso del campo magnetico (e, quindi, del calore di Joule nella spira) e dell'energia cinetica del magnete stesso, senza la presenza di alcuna sorgente d'energia!

17.3 *fem* mozionale

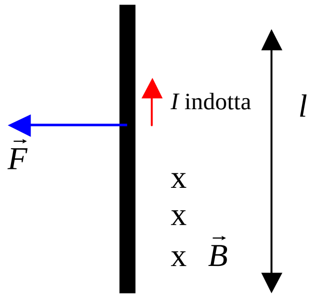
Consideriamo un circuito costituito da una sbarra conduttrice che slitta su rotaie conduttrici collegate a un resistore come in figura, in cui il flusso magnetico è
$\Phi_m = BA = Blx \Rightarrow \Delta\Phi_m = Bl\Delta x > 0$



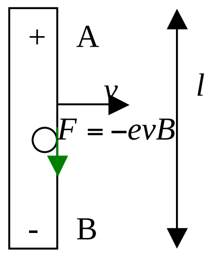
Il flusso aumenta per effetto del moto della sbarra verso destra (aumenta l'area del circuito), quindi la corrente indotta circola in senso antiorario, in modo tale da indurre un campo magnetico che si oppone all'aumento del flusso del campo uniforme $\vec{B}$; tale campo indotto avrà, quindi, verso uscente. Dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz si ottiene l'espressione della *fem* mozionale:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi_m}{\Delta t} = -\frac{Bl\Delta x}{\Delta t} = -Blv$$

A sua volta, la corrente indotta I nella sbarra sente una forza $F = IlB$, diretta verso sinistra, in opposizione al moto della sbarra.



In conclusione, se diamo alla sbarra una velocità $\vec{v}$ iniziale, la forza dovuta alla corrente indotta tenderà a fermarla; per mantenerla in moto occorrerà esercitare una forza esterna diretta verso destra.
Per quanto appena osservato, la *fem* mozionale può essere indotta anche a circuito aperto.



Sugli elettroni liberi della sbarra, in quanto cariche in moto in presenza di campo magnetico, agisce una forza $F = -evB$, diretta verso il basso. Si vengono quindi a creare degli accumuli di carica negativa in B e di carica positiva in A, con conseguente produzione di campo elettrico interno alla sbarra diretto da A verso B. Il moto degli elettroni liberi verso il basso avverrà finché la forza $F = -evB$ non risulterà equilibrata dalla forza dovuta al campo elettrico $F = -eE$. In quelle condizioni $-eE = -evB \Rightarrow E = vB$. Questa relazione ci permette di calcolare il valore della *fem* indotta come differenza di potenziale ai capi della sbarra:

$$V_A - V_B = El = vBl.$$

17.4 Induttanza

Consideriamo una bobina percorsa da una corrente *I*. Poiché il campo magnetico della bobina nelle sue vicinanze è proporzionale a *I*, lo sarà anche il flusso magnetico concatenato con la bobina:

$$\Phi_m = LI.$$

Il coefficiente di proporzionalità *L* è detto **induttanza propria** (o **autoinduttanza**).
Tale coefficiente dipende dalla forma geometrica della bobina, così come la capacità dipende dalla disposizione geometrica delle armature di un condensatore. L'unità di misura dell'induttanza è l'**Henry (H)** che equivale al $\dfrac{Wb}{A} = \dfrac{T \cdot m^2}{A}$.

Il calcolo dell'induttanza è, in generale, molto complesso. Tuttavia, nel caso di un lungo solenoide con spire ravvicinate, questo calcolo è piuttosto semplice. All'interno del solenoide il campo è dato da:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I.$$

Se *A* è l'area della sezione del solenoide, il flusso magnetico attraverso le *N* spire è:

$$\Phi_m = NAB = \mu_0 \frac{N^2}{l} AI,$$

di conseguenza l'induttanza è

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A.$$

La variazione della corrente in un circuito implica la variazione del flusso magnetico:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{1}{L}\frac{\Delta \Phi_m}{\Delta t} = -\frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow \varepsilon = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Circuiti RL

Consideriamo adesso un ***circuito RL***, in cui sono presenti, oltre al generatore (ε_0), una resistenza (R), e un solenoide (elemento induttivo, L). Le leggi di Kirchhoff e di Ohm applicate a questo circuito portano all'equazione

$$\varepsilon_0 - L\frac{dI}{dt} = IR.$$

Questo *modello matematico* della variazione della corrente nel tempo, è un esempio di *equazione differenziale*, in cui l'incognita è una *funzione*, ed è presente all'interno dell'equazione insieme alla sua derivata. Per determinare la legge di variazione della corrente nel tempo, occorre conoscere il metodo di risoluzione di un'equazione differenziale del tipo di quella che costituisce il nostro modello. Senza addentrarci nei particolari, per i quali si rimanda al corso di Matematica, possiamo fare il seguente ragionamento: scriviamo opportunamente l'equazione

$$\frac{I'}{\frac{\varepsilon_0}{R} - I} = \frac{R}{L}.$$

Cerchiamo due funzioni (nell'incognita *I* per il membro di sinistra, e nell'incognita *t* per quello di destra) le cui derivate siano uguali ai due membri dell'equazione riscritta,

$$-\ln\left(\frac{\varepsilon_0}{R} - I\right) = \frac{R}{L}t + k,$$

dove k è una costante che viene determinata assumendo che all'istante iniziale il valore della corrente sia zero. Otteniamo in questo modo la legge di variazione della corrente nel tempo, all'interno di un circuito LR:

$$I(t)=\frac{\varepsilon_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Nell'istante in cui, a regime, si scollega il generatore, la corrente circolante è $I=\frac{\varepsilon_0}{R}$. L'equazione che descrive la variazione della corrente dall'istante in cui viene scollegato il generatore è

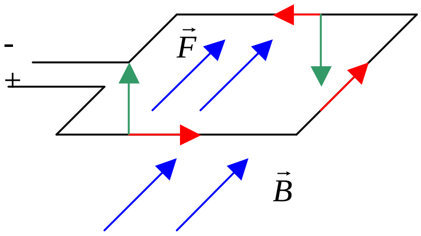
$$-L\frac{dI}{dt}=IR\Rightarrow I'=-\frac{R}{L}I\,.$$

Dal punto di vista analitico, la funzione che descrive la variazione di corrente nel (breve) periodo è ancora la funzione esponenziale:

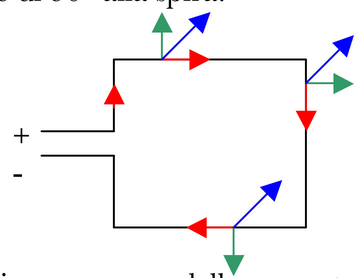
$$I(t)=\frac{\varepsilon_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\,.$$

17.5 Generatori elettrici in corrente alternata

Consideriamo una bobina (spira) percorsa da una corrente *I*, che ruota in un campo magnetico uniforme *B*, come rappresentato in figura (le frecce rosse rappresentano la corrente, quelle blu il campo magnetico, e quelle verdi la forza agente sulla spira).



Le forze dovute al campo magnetico imprimono una rotazione di 90° alla spira:



Se, a questo punto, invertiamo il verso di percorrenza della corrente, otteniamo come risultato una rotazione della spira. Invertendo il verso alla corrente ogni "180°" dopo i primi "90°", si ha una rotazione continua della spira.

Quanto appena visto, è causa di una variazione del flusso magnetico. Studiamo questa variazione. Se la spira ruota con frequenza *f* costante, il moto è circolare uniforme e l'angolo tra il campo magnetico e la normale alla spira è descritto dalla legge $\theta=\omega t=\frac{2\pi}{T}t=2\pi f t$. Il flusso magnetico è

$$\Phi_m=BAN\cos\theta,$$

dove *A* è la superficie della spira, *N* il numero di spire e *B* il campo magnetico. La variazione dell'angolo causa una variazione del flusso che, dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz, è

$$\varepsilon=-\frac{\Delta\Phi_m}{\Delta t}=-\frac{d}{dt}(BAN\cos\theta)=-\frac{d}{dt}(BAN\cos\omega t)=-(BAN(-\omega\sin\omega t))=BAN\omega\sin\omega t\,.$$

Il valore massimo della *fem* indotta si ha quando $\sin\omega t=1$, $\varepsilon_{\max}=BAN\omega$. Quindi,

$$\varepsilon=\varepsilon_{\max}\sin\omega t\,.$$

17.6 Trasformatori

Si tratta di dispositivi che, sfruttando la corrente alternata e il fenomeno della *mutua induzione*, possono far variare la tensione in modo da permettere il passaggio di corrente a bassa intensità, con il risultato di ridurre la dissipazione di potenza per effetto Joule. Un trasformatore è costituito, nella sua versione basilare, da un nucleo di materiale ferromagnetico attorno al quale sono disposti due avvolgimenti. Uno di questi, detto *primario*, è collegato con un generatore di *fem* alternata $\varepsilon_p(t)$, ed è costituito da N_p avvolgimenti. Dalla parte opposta del nucleo è disposto un altro avvolgimento, detto *secondario*, costituito da N_s avvolgimenti. Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, viene indotto un campo magnetico nel primario che viene "guidato" all'interno del nucleo, fino a concatenarsi con l'avvolgimento secondario. Il flusso del campo magnetico vale, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz: $\varepsilon_p = -N_p \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N_s \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \varepsilon_s$. Da questo segue la relazione che governa il funzionamento di un trasformatore: $\frac{\varepsilon_p}{N_p} = \frac{\varepsilon_s}{N_s}$. Ora, la potenza immessa nella rete elettrica è $P = I\varepsilon$, mentre quella dissipata per effetto Joule è $P_J = I^2R$; per limitare la dissipazione, quindi, occorre che $\varepsilon_s > \varepsilon_p$, ovvero che il trasformatore funzioni in *salita*. Questo è possibile se gli avvolgimenti sono tali che $N_s > N_p$.

17.7 Energia del campo elettrico e del campo magnetico

Se muoviamo una carica in un campo elettrico si compie un lavoro. Tutto o in parte, questo lavoro è immagazzinato sotto forma di energia potenziale elettrostatica. Un esempio di questo fenomeno è dato dal processo di carica di un condensatore, nel quale la carica positiva si trasferisce dall'armatura negativa a quella positiva. Poiché l'armatura caricata positivamente si trova a un potenziale maggiore, l'energia potenziale della carica viene aumentata: occorre compiere un lavoro per caricare un condensatore. Se la carica del condensatore avviene mediante collegamento con una pila, solo metà del lavoro compiuto (dalla pila) è utile per caricare le armature del condensatore, l'altra metà si dissipa sotto forma di energia termica. Il lavoro (*W*) necessario per caricare il condensatore dalla carica nulla alla carica Q è: $W = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$, $W_{pila} = QV$.

Definita la *densità di energia* $U_E = \frac{W}{Ad}$ come il lavoro sull'unità di volume (*A* è l'area delle armature, *d* è la distanza che le separa, *Ad* è il volume del condensatore) si ha

$W = \frac{CV^2}{2} = \frac{CE^2d^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot \frac{E^2d^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2 Ad}{2}$, da cui segue

$$U_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Occupiamoci adesso dell'energia associata al campo magnetico.

In un circuito si hanno due ostacoli alla circolazione della corrente: l'effetto Joule e la forza elettromotrice di autoinduzione. Dalla legge di Kirchhoff:

$$\varepsilon_0 = iR + L\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

$$\varepsilon_0 i\Delta t = i^2R\Delta t + Li\Delta i$$

$$\varepsilon_0 \Delta q = i^2R\Delta t + Li\Delta i$$

Nella seconda equazione sono stati moltiplicati ambo i membri per il fattore $i\Delta t$, mentre nella terza si è sfruttata la relazione $\Delta q = i\Delta t$.

Analizziamo l'ultima equazione: l'energia fornita dal generatore per spostare una carica ($\varepsilon_0\Delta q$) viene in parte spesa per effetto Joule ($i^2R\Delta t$), e in parte immagazzinata come energia del campo magnetico ($Li\Delta i$). Complessivamente quindi, l'energia immagazzinata nel campo magnetico è la *somma*[1] di tutti gli elementi $Li\Delta i$, ovvero $\frac{1}{2}Li^2$. Dall'espressione dell'induttanza propria di un solenoide ($L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A, B = \mu_0 \frac{N}{l} i \Rightarrow i = \frac{Bl}{\mu_0 N} \Rightarrow \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2}{l} A \frac{B^2l^2}{\mu_0^2 N^2}$), si ricava la *densità di energia magnetica* $U_B = \frac{Li^2}{2Al}$:

[1] $\int Li\, di = L\frac{i^2}{2}$

$$U_B = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Circuiti LC

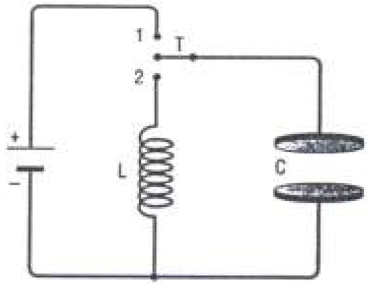


Immagine tratta dal sito "atuttascuola.it"

Questo tipo di circuito è di fondamentale importanza per trattare la propagazione delle *onde elettromagnetiche*. Nel dispositivo in figura sopra, l'interruttore viene inizialmente chiuso sulla posizione 1 al fine di caricare il condensatore, per un breve intervallo di tempo; successivamente viene chiuso sulla posizione 2. La tensione sulle armature del condensatore $\frac{Q(t)}{C}$ è responsabile di una corrente variabile (dovuta alla scarica del condensatore); alla variazione del flusso del campo magnetico da essa prodotto si oppone la *fem* indotta per la legge di Faraday-Neumann-Lenz: $-LI'(t)$. Per la legge di Kirchhoff si ha quindi: $\frac{Q(t)}{C} = -LI'(t) = -LQ''(t) \Rightarrow Q''(t) = -\frac{Q(t)}{LC}$. Stavolta la funzione che descrive l'andamento temporale della carica sulle armature del condensatore dovrà essere antiproporzionale alla sua derivata seconda, ovvero una funzione del tipo $y = \cos\alpha x$. Di conseguenza, imponendo la condizione che all'inizio del processo la carica $Q(0) = Q_0$:

$$Q(t) = Q_0 \cos\frac{t}{\sqrt{LC}}.$$

Questo circuito suggerisce un'interessante analogia "elettromeccanica" con l'oscillatore armonico semplice (massa attaccata a una molla oscillante senza attrito su un piano orizzontale):

$$mx'' = -kx; \quad LQ'' = -\frac{Q}{C}$$

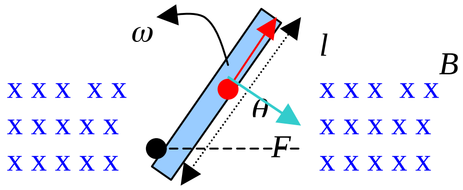
$$E = \frac{mx'^2}{2} + \frac{kx^2}{2}; \quad E = \frac{LQ'^2}{2} + \frac{Q^2}{2C}$$

Problemi

1. *Si trovino l'energia magnetica, l'energia elettrica e l'energia totale in un volume di spazio di 25 l contenente un campo magnetico di 2T ed un campo elettrico di* $10^4\, V/m$. *In un'onda elettromagnetica piana, come un'onda luminosa, il modulo del campo elettrico e quello del campo magnetico sono legati dalla relazione* $E = cB$, *dove* $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ *è la velocità della luce. Si dimostri che, in questo caso, la densità d'energia elettrica e quella magnetica sono uguali.*

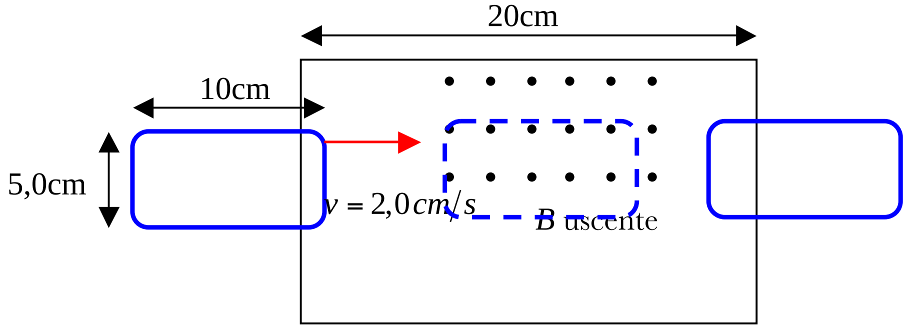
- $U_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \Rightarrow E_m = U_B \cdot vol = 39{,}8 \cdot 10^3 J$; $U_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \Rightarrow E_e = U_E \cdot vol = 11{,}1 \mu J$;
  $E_{tot} = E_m + E_e \approx E_m = 39{,}8 \cdot 10^3 J$.
- $\frac{U_B}{U_E} = \frac{B^2}{2\mu_0} \Big/ \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{\mu_0\varepsilon_0 E^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0 c^2} = \frac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu_0\varepsilon_0} = 1 \Rightarrow U_B = U_E$.

2. *Una sbarra conduttrice di lunghezza l ruota con velocità angolare costante ω attorno ad un suo estremo in un piano perpendicolare a un campo magnetico uniforme $\vec{B}$, come mostrato in figura. (a) Si trovi la forza magnetica che agisce su una carica posta a distanza r dal punto in cui la sbarra è imperniata e si dimostri che il campo elettrico in quel punto è dato dalla relazione $E = B\omega r$. (b) Si usi l'espressione $V = E_{medio} l$ per trovare la differenza di potenziale tra gli estremi della sbarra, dove E_{medio} è il campo elettrico medio nella sbarra. (Poiché il campo elettrico varia linearmente tra 0 e $B\omega l$, il valor medio è la metà del valor massimo.) (c) Si tracci una qualsiasi retta radiale nel piano, a partire dalla quale si misuri $\theta = \omega t$. Si calcoli il flusso magnetico attraverso l'area della regione a forma di fetta di torta tra la retta di riferimento e la sbarra, e si dimostri che l'espressione $\varepsilon = \dfrac{B\omega l^2}{2}$ segue dall'applicazione della legge di Faraday-Neumann-Lenz a quest'area.*



- (a) Durante la rotazione aumenta l'area racchiusa dalla sbarretta e dalla retta di riferimento (tratteggiata in figura), quindi la corrente indotta sarà tale da produrre un campo magnetico (*uscente*) in opposizione a quello presente nella regione piana (che per ipotesi è *entrante*). La carica dovrà quindi muoversi nella direzione della sbarra nel verso che la *allontana* dal perno. Una carica (positiva) posta a distanza *r* dal perno, sente una forza dovuta al campo magnetico diretta lungo la sbarra verso il perno, dal momento che la velocità della sbarra (su cui sta la carica) ruota in un piano che si mantiene perpendicolare al campo magnetico:
  $F = qvB = q\omega rB \Rightarrow E = \dfrac{F}{q} = B\omega r$.
- (b) $V = E_{medio} l = \dfrac{B\omega l^2}{2}$ è la differenza di potenziale tra gli estremi della sbarra.
- (c) Dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz segue
  $$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{Bl^2\theta}{2}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{Bl^2\omega t}{2}\right) = -\frac{Bl^2\omega}{2}.$$

3. *Una spira rettangolare coi lati di 10 cm e 5,0 cm avente la resistenza di 1,5 Ω viene tirata attraverso una regione di campo magnetico uniforme $B = 0{,}85T$ uscente, con una velocità costante $v = 2{,}0\,cm/s$. L'estremità anteriore della spira entra nella regione con campo magnetico all'istante $t = 0$. (a) Si trovi l'andamento del flusso magnetico attraverso la spira in funzione del tempo e se ne tracci un grafico. (b) Si trovino gli andamenti della fem indotta e della corrente nella spira in funzione del tempo e se ne traccino i grafici. Si trascuri l'induttanza propria della spira e si estendano i grafici da 0 a 18s.*



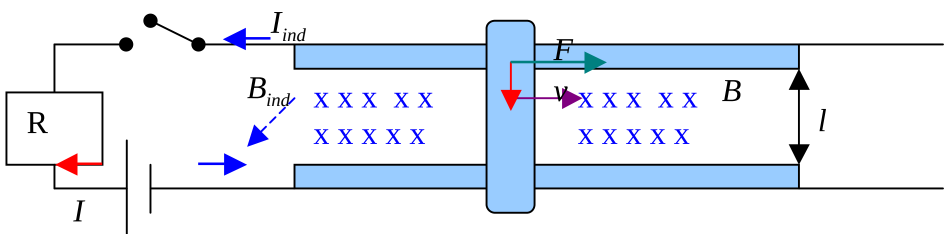
- (a) Il flusso del campo magnetico attraverso la spira è $\Phi_B = (5{,}0)vtB = 850(\mu Wb/s)t$.
- (b) La fem indotta è data dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz $\varepsilon_{ind} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt} = -8{,}5V$ nei primi $\dfrac{10cm}{2cm/s} = 5s$, poi è zero nei successivi 5*s*, infine $\varepsilon_{ind} = -\dfrac{d(-\Phi_B)}{dt} = +8{,}5V$ nei successivi 5*s*.

	0-5s	5-10s	10-15s	15-18s
$\varepsilon_{ind} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$	-850 μV	0J	+850 μV	0J
$I = \dfrac{\varepsilon_{ind}}{R}$	-567 μA	0A	+567 μA	0A

4. *Una certa bobina ha l'induttanza propria L e la resistenza R. Se la corrente che percorre la bobina è 5,0A e aumenta di 10,0 A/s, la differenza di potenziale ai capi della bobina è 140 V. Se la corrente è 5,0 A e diminuisce di 10,0 A/s, la differenza di potenziale è 60 V. Si trovino induttanza e resistenza.*

- $$\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = L\frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = L\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} + I_1 R \\ V_2 = L\dfrac{\Delta I_2}{\Delta t} + I_2 R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 140 = 10L + 5R \\ 60 = -10L + 5R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 20\Omega \\ L = 4H \end{cases}$$

5. *Una sbarra conduttrice di massa m è poggiata su due rotaie conduttrici perpendicolari ad un campo magnetico uniforme* $\vec{B}$. *La resistenza della sbarra e delle rotaie è trascurabile e non c'è attrito tra di esse. Con la sbarra ferma sulle rotaie si chiude l'interruttore all'istante* $t = 0$ *e la pila di fem* ε_0 *fornisce corrente al circuito. (a) Si trovi la corrente iniziale nel circuito e la forza magnetica iniziale che agisce sulla sbarra prima che essa cominci a muoversi. (b) se la sbarra si muove con la velocità v, c'è una fem indotta nel circuito che tende ad opporsi alla fem della pila. Si dimostri che la corrente I si ottiene dall'espressione* $\varepsilon_0 - Blv = IR$. *(c) Si trovi la forza che agisce sulla sbarra se essa si muove con la velocità v, e si scriva la seconda legge di Newton per la sbarra. (d) Ponendo* $\Delta v/\Delta t = 0$ *nell'equazione trovata in (c), si dimostri che alla fine la sbarra si muove con velocità data da* $v_f = \varepsilon_0/Bl$.

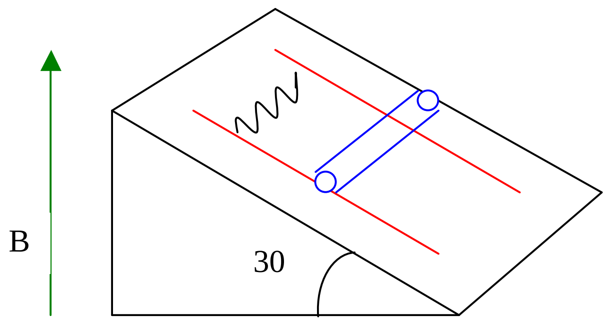


- (a) $I = \varepsilon_0/R$; $F = IlB = Bl\varepsilon_0/R$;
- (b) Se la sbarra si muove verso destra si ha un *aumento* del flusso magnetico. A questo aumento si oppone la corrente indotta circolando in verso opposto alla corrente continua, producendo un campo magnetico in verso *opposto* a quello uniforme. $\varepsilon_0 + \varepsilon_{ind} = IR \Rightarrow \varepsilon_0 - \dfrac{Blv\Delta t}{\Delta t} = IR \Rightarrow \varepsilon_0 - Blv = IR$. Osserviamo che se la sbarra si fosse mossa verso sinistra, allora avremmo avuto una diminuzione del flusso ed una conseguente circolazione della corrente indotta nel verso della corrente continua in modo da produrre un campo magnetico indotto rafforzante

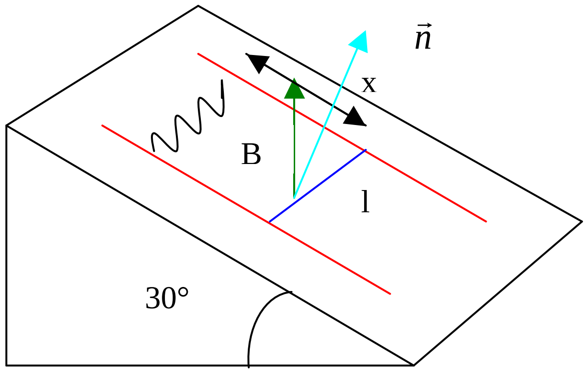
quello uniforme. In questo caso la legge di Kirchhoff avrebbe assunto la forma $\varepsilon_0 - \varepsilon_{ind} = IR \Rightarrow \varepsilon_0 + \frac{Blv\Delta t}{\Delta t} = IR \Rightarrow \varepsilon_0 + Blv = IR$.

- (c) Sostituendo nell'espressione della forza trovata al punto (a) la somma della fem della pila e della fem indotta otteniamo, dalla seconda legge di Newton: $m\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{Bl(\varepsilon_0 - Blv)}{R}$. Ponendo $\Delta v / \Delta t = 0$, condizione che esprime il moto a velocità costante, otteniamo che $\varepsilon_0 = Blv_f \Rightarrow v_f = \varepsilon_0 / Bl$.

6. *Una barretta metallica di massa 37 g, lunghezza 35 cm e resistenza trascurabile è in movimento a velocità costante su un piano inclinato di 30° sull'orizzontale, e scorre su due guide metalliche di resistenza e attrito trascurabili collegate con una resistenza da 12 Ω come in figura. Il tutto è immerso in un campo magnetico verticale di intensità 5 T. Calcolare la velocità a cui si muove la barretta.*

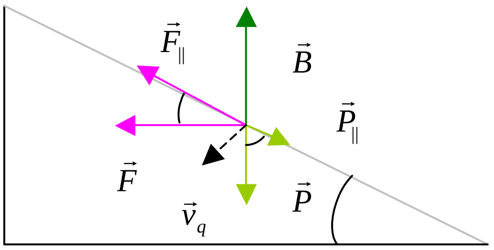


- La barretta forma un circuito con la resistenza e le guide metalliche. Determiniamo il flusso del campo magnetico:



la superficie attraversata dal campo magnetico è data dal rettangolo (sul piano inclinato) di area $A = x(t)l$. Il flusso è variabile, in quanto la lunghezza x varia con il tempo. In particolare si ha: $\Phi(t) = A\vec{B}\cdot\vec{n} = x(t)lB\cos(30°)$. Il potenziale, grandezza necessaria per l'applicazione della legge di Faraday-Neumann, viene determinato a partire dalla prima legge di Ohm: $V = iR$. Dunque, la legge di Faraday-Neumann $V = -\Phi'_B(t)$, nel nostro caso diventa:
$iR = V = -\Phi'_B(t) = -x'(t)lB\cos(30°) = -vlB\cos(30°)$. Prendendo il valore assoluto (ci interessa l'intensità della corrente), si trova il valore $i = \frac{vlB\cos(30°)}{R}$; su questa corrente agisce la forza di Lorentz.

Schema delle forze in gioco sulla singola carica q:



$\vec{F}, \vec{B}, \vec{P}$ rappresentano rispettivamente la forza di Lorentz, il campo magnetico ed il peso. La forza agente per tutta la barretta sarà: $F = ilB$. Considerando la componente parallela al piano inclinato, la seconda legge della dinamica applicata alla barretta diventa:

$m\vec{a} = \vec{P}_{\parallel} - \vec{F}_{\parallel}$. Poiché la velocità è costante, l'accelerazione è zero. Passando ai moduli si ottiene in definitiva:

$$\vec{F}_{\parallel} = F\cos(30°) = ilB\cos(30°)$$

$$\vec{P}_{\parallel} = mg\sin(30°)$$

$$0 = ma = \vec{P}_{\parallel} - \vec{F}_{\parallel}$$

quindi

$$P_{\parallel} = F_{\parallel}$$

$$mg\sin(30°) = ilB\cos(30°) = \frac{vlB\cos(30°)lb\cos(30°)}{R}$$

da cui

$$v = \frac{Rmg\sin(30°)}{(lB\cos(30°))^2}.$$

7. *Si calcoli la potenza dissipata in una spira quadrata di lato $l = 14{,}0cm$ costituita da un filo di rame di sezione $S = 1{,}00mm^2$, posta in un piano perpendicolare ad un campo magnetico uniforme di intensità che aumenta in modo costante di $1{,}00 \cdot 10^{-2}T$ al secondo (la resistività del rame è $\rho = 1{,}69 \cdot 10^{-8}\Omega \cdot m$, mentre la resistenza della spira è $R = \rho\frac{4l}{S}$).*
   - Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz la fem indotta, responsabile della corrente circolante, è data dalla velocità di variazione del flusso del campo magnetico:
     $$\varepsilon_{ind} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -l^2\frac{\Delta B}{\Delta T} = -0{,}196mV \Rightarrow P = \frac{\varepsilon_{ind}^2}{4l\rho/S} = 4{,}06\mu W.$$
8. *Un circuito ha un coefficiente di autoinduzione $L = 35mH$. L'intensità della corrente passa da $I_1 = 0{,}10A$ a $I_2 = 0{,}50A$ in un intervallo $\Delta t = 0{,}2s$. Calcolare il valore assoluto della f.e.m. media indotta nel circuito.*
   - $$\Phi_B = LI \Rightarrow L\Delta I = \Delta\Phi_B \Rightarrow \varepsilon_{media} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{L\Delta I}{\Delta t} = 0{,}07V.$$
9. *Un solenoide con 30 spire ha un diametro di 1,0 m; il suo asse è inizialmente in direzione del campo magnetico terrestre $B_T = 50\mu T$. L'asse viene quindi ruotato di 180° in 0,20s. Qual è la f.e.m. media indotta?*
   - $$\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{(B_T NA\cos 180° - B_T NA\cos 0°)T \cdot m^2}{0{,}20s} = -\frac{-2 \cdot 30 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot \pi(0{,}5)^2}{0{,}2} = 1{,}2 \cdot 10^{-2}V$$

10. *Un anello di diametro d, massa m, e resistenza R cade in un campo magnetico verticale mantenendo il suo piano orizzontale. Si calcoli la velocità limite dell'anello se il campo magnetico varia con l'altezza in base alla legge* $B = B_0(1+\alpha h)$.

   - Al raggiungimento della velocità limite la variazione di energia potenziale gravitazionale nell'unità di tempo viene dissipata sotto forma di potenza termica (effetto Joule) per effetto della corrente circolante indotta dalla variazione del flusso del campo
     magnetico:

$$\begin{cases} mg(-\Delta h)/\Delta t = \varepsilon_i I \\ I = \varepsilon_i / R \end{cases} \Rightarrow -mgv = \left(-\frac{B_0\alpha(-\Delta h)\left(\pi d^2/4\right)}{\Delta t}\right)^2 \Big/ R \Rightarrow v = \frac{16mgR}{\left(\pi B_0 \alpha\right)^2 d^4}$$

11. *Si calcoli l'induttanza di un solenoide di lunghezza l costituito da N spire di area S.*

   - $B = \mu_0 \frac{N}{l} I$, $\Phi_m = NSB = \mu_0 \frac{N^2}{l} SI$, di conseguenza $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$.