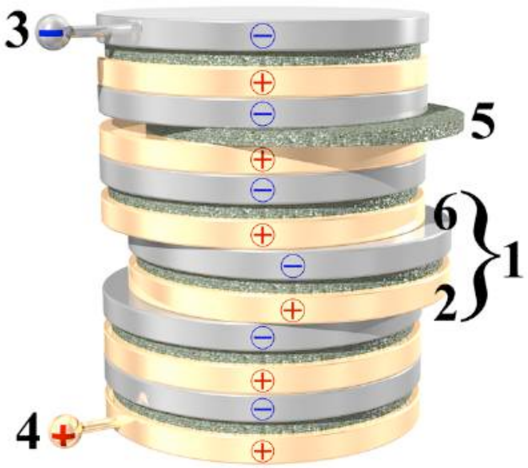
CAPITOLO 15
LA CORRENTE ELETTRICA

15.1 Cariche in moto

Il moto di cariche fu osservato in natura grazie a fenomeni come i fulmini, oppure artificialmente attraverso la scarica di un condensatore (bottiglia di Leyda). In ambedue i casi, le scintille costituiscono la prima prova evidente del moto di cariche (o *corrente elettrica*).
Nel 1800 Volta scoprì che due pezzi di metallo diversi, impugnati ciascuno con un manico isolante, se messi prima a contatto e poi separati, uno si caricava positivamente, l'altro negativamente. L'idea di Volta consisté nel sovrapporre in modo alternato dei dischi di metallo diversi (argento caricato positivamente e zinco caricato negativamente), la cosiddetta "*batteria di Volta*". Con questo dispositivo Volta riuscì a produrre una corrente elettrica *costante* per un lungo periodo di tempo, a differenza di quella che era possibile ottenere per strofinio, oppure scaricando una bottiglia di Leyda.
Riportiamo parte della lettera inviata da Volta alla *Royal Society* il 20 marzo 1800:
"*l'apparecchio di cui vi parlo e che vi meraviglierà senza dubbio, non è che l'accozzamento di buoni conduttori di differente specie, disposti in un certo modo, 30, 40, 60 pezzi o più, di rame, o meglio d'argento, applicati ciascuno a un pezzo di stagno, o, il che è molto meglio, di zinco e un numero uguale di strati d'acqua o di qualche altro umore che sia miglior conduttore dell'acqua semplice, come l'acqua salata, la lisciva, ecc, o dei pezzi di cartone, di pelle ecc., bene imbevuti di questi umori: questi strati interposti a ogni coppia o combinazione dei metalli differenti, una tale successione alternata, e sempre nel medesimo ordine, di queste tre specie di conduttori, ecco tutto ciò che costituisce il mio nuovo strumento; che imita[…] gli effetti delle bottiglie di Leyda o delle batterie elettriche, procurando le medesime commozioni di queste*".



La scoperta di Volta diede inizio allo studio quantitativo in laboratorio delle correnti.

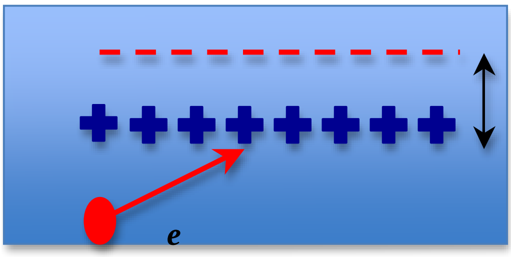
15.2 Corrente elettrica e generatori

Collegando una lampadina alle armature di un condensatore carico, si osserva che questa si accende e brilla per qualche istante, dopodiché si spenge in corrispondenza della scarica del condensatore. Nel breve intervallo di tempo in cui la lampadina è rimasta accesa, si dice che, insieme al filo conduttore, è stata percorsa da una **corrente elettrica**. Come si spiega questo fenomeno? All'atto del collegamento, le cariche dell'armatura negativa si sono messe in moto verso l'armatura positiva, andando a neutralizzarne le cariche (positive); l'accensione della lampadina è un effetto di questo passaggio di cariche attraverso il suo filamento. Quando il condensatore è scarico, è nulla la differenza di potenziale tra le sue armature e non si osservano gli effetti del passaggio di corrente. Infatti, *affinché un conduttore sia percorso da corrente elettrica, è necessaria una differenza di potenziale non nulla tra i suoi estremi*.
Si assume convenzionalmente che la corrente circoli nel verso opposto a quello degli elettroni, in modo da poter affermare che la corrente circola dai punti a potenziale maggiore a quelli a

potenziale minore (nel caso del condensatore, dall'armatura positiva, *polo positivo*, a quella negativa, *polo negativo*).
Per avere circolazione di corrente con una certa continuità sono necessari dei dispositivi in grado di mantenere nel tempo una differenza di potenziale non nulla tra gli estremi del conduttore, pompando continuamente cariche da un polo all'altro, ripristinando così la differenza di potenziale che altrimenti si annullerebbe, come nel caso del condensatore.
Tuttavia, la velocità degli elettroni liberi nei conduttori metallici, che si muovono per effetto dell'agitazione termica, è decisamente bassa, mentre gli effetti della corrente sono quasi *istantanei*. Perché? Perché, in realtà, a propagarsi a grandi velocità è il *campo elettrico*, che va ad agire sugli elettroni liberi a grande distanza dagli elementi conduttori, manifestando con il loro passaggio attraverso l'utilizzatore, gli effetti del passaggio della corrente elettrica (esempio del tubo di palline da tennis aperto alle due estremità: se colpisco una pallina che si trova ad un'estremità, osservo l'uscita di una pallina dall'altra estremità. Non è la stessa pallina, ma pur sempre di una pallina si tratta…).

15.3 Potenziale di estrazione ed effetto Volta

Possiamo schematizzare la superficie di contatto di un conduttore metallico con l'ambiente esterno come una sorta di *doppio strato*, dello spessore dell'ordine di quello del diametro atomico, $10^{-10}\,m$, come schematizzato nella figura seguente.



Quando un elettrone libero entra nella regione delimitata dal doppio strato, viene respinto verso l'interno del conduttore dalla barriera elettronica prossima alla superficie; tuttavia, se l'elettrone libero possiede *energia sufficiente* può vincere le forze repulsive del doppio strato e abbandonare il conduttore. Questa energia necessaria per portare una carica unitaria dall'interno all'esterno del metallo è detta **potenziale di estrazione** V_i, ed è legata al lavoro necessario per compiere quest'operazione dalla relazione:

$$L = eV_i\,.$$

Se mettiamo a contatto due sbarre di metallo uguali e alla stessa temperatura, i campi all'interno dei doppi strati si annullano tra loro, avendo stessa intensità e direzione, ma verso opposto. In questa situazione gli elettroni liberi possono muoversi da una sbarra all'altra, proprio come le molecole di un gas che si trova, alla stessa pressione, in due recipienti comunicanti.
Al contrario, il contatto tra metalli diversi, ovvero con un diverso potenziale di estrazione, origina campi elettrici non nulli in corrispondenza dei doppi strati, e quindi un flusso di elettroni dal metallo a potenziale di estrazione minore verso quello a potenziale di estrazione maggiore. Questo fenomeno è noto come **effetto Volta**, e fu scoperto verso la fine del XVIII secolo.

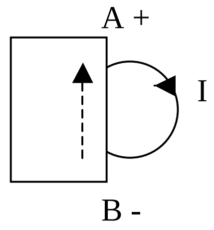
15.4 Gli studi sulla corrente: le leggi di Ohm

Formalizziamo quanto detto finora. Attraverso una sezione di un conduttore passa una carica *q* nel tempo *t*. L'*intensità* della corrente è data dal rapporto

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}\,.$$

Una corrente costante (nel tempo) viene detta *continua*.
Per produrre una corrente occorre stabilire una DDP tra due punti di un conduttore. Tuttavia, le cariche in moto tendono ad annullare il campo elettrico e, di conseguenza, la DDP. Quello che serve è quindi un *generatore elettrico* che mantenga continuamente la DDP e quindi le cariche in moto.

All'interno del generatore (che può essere una comune pila di Volta) il moto delle cariche è dovuto alle reazioni chimiche, mentre nel conduttore è dovuto al campo.



$$V(A) > V(B)$$

Per convenzione, viene assunto come verso della corrente quello del moto delle cariche positive. Ora, la corrente è dovuta al moto degli elettroni (che avviene, per la convenzione adottata, nel verso opposto a quello della corrente); esistono tuttavia dei casi particolari, come quello dell'*acceleratore di protoni*, in cui la corrente ha il verso del fascio di protoni emesso, e quello del fenomeno dell'*elettrolisi*, dove a muoversi sono sia gli elettroni che gli ioni positivi.
Nei *fili conduttori*, elementi fondamentali dei *circuiti elettrici*, il moto degli elettroni liberi è condizionato dalla presenza o meno di un campo elettrico. Infatti, in assenza del campo elettrico la velocità degli elettroni liberi è dovuta all'agitazione termica ed è assolutamente casuale in direzione e verso, rendendo impossibile osservare un *moto ordinato* di questi. La presenza del campo elettrico, invece, induce un'accelerazione dovuta alla forza elettrica che determina una componente della velocità nella direzione del campo, ordinando così il moto degli elettroni liberi. Questa velocità, detta *velocità di deriva*, è molto piccola: in un filo di rame è dell'ordine dei $10^{-4}\ m/s$.

Nel 1826, G. S. Ohm scopre che nella maggior parte dei conduttori, *la differenza di potenziale è proporzionale alla corrente*:

$$V = RI \text{ (I legge di Ohm).}$$

La costante di proporzionalità R è detta *resistenza* e si misura in Ohm ($1\Omega = \frac{V}{A}$). La resistenza è proporzionale alla lunghezza del filo, e inversamente proporzionale alla sua sezione:

$$R = \rho\frac{l}{S} \text{ (II legge di Ohm),}$$

dove ρ indica la resistività, e si misura in $\Omega\cdot m$.
La resistività dipende dalla temperatura secondo la legge

$$\rho = \rho_{20}(1+\alpha(t-20°C)),$$

dove α è una costante che dipende dal materiale.

Superconduttività

Sotto una certa *temperatura critica* esistono metalli con *resistività nulla*. Tali metalli si dicono *superconduttori*. Il fenomeno della superconduttività, scoperto dal fisico Kammerlingh-Onnes nel 1911, non si spiega con le leggi note della meccanica classica, bensì con quelle della meccanica quantistica. In un materiale superconduttore, di fatto, si può avere passaggio di corrente anche in assenza di campo elettrico.
La legge di Ohm non è una legge generale come quella di Coulomb; è una relazione empirica che vale per i cosiddetti *conduttori ohmici*, nei quali i valori tipici della resistività vanno da 10^{-8} a 10^{-7} $\Omega\cdot m$, mentre nei *semiconduttori* vanno da 10^{-1} a 10^{4} $\Omega\cdot m$, e negli *isolanti* vanno da 10^{11} a 10^{16} $\Omega\cdot m$.

15.5 Energia e corrente elettrica. L'effetto Joule

Il moto di cariche in un conduttore viene ostacolato dagli atomi che lo costituiscono: le cariche vi urtano contro e cedono parte della loro energia cinetica, dovuta al lavoro compiuto su di esse dalle forze del campo, sotto forma di calore.

Dalla relazione $L = Vq$ segue $P = \frac{L}{t} = \frac{Vq}{t} = IV$: la potenza assorbita e trasformata in calore all'interno di un conduttore nel quale circola una corrente I, ed ai cui estremi è applicata una DDP V, è quindi data dalla relazione:

$$P = IV.$$

Si può utilizzare la legge di Ohm per scrivere in una forma alternativa la potenza dissipata:

$$P = I^2R.$$

La dipendenza del calore dissipato nell'unità di tempo è una scoperta da attribuire a Joule ed è ancora oggi associata al nome del suo scopritore: *effetto Joule*.
Il generatore trasforma l'energia chimica (nel caso della pila) in energia potenziale elettrica. La DDP fornita dal generatore (nota con il nome di *forza elettromotrice*, abbreviato "*fem*") si misura *a circuito aperto*, e rappresenta l'energia fornita per unità di carica. Tale DDP, misurata come detto a circuito aperto, diminuisce quando il generatore è inserito in un circuito, dal momento che anche il generatore stesso si scalda e parte della sua energia viene dissipata per effetto Joule nella cosiddetta *resistenza interna*, r_i. In conclusione la *fem* è così impiegata:

$$fem = r_iI + RI \Rightarrow I = \frac{fem}{r_i + R},$$

dove il termine r_iI è quella parte di *fem* che fa muovere le cariche all'interno del generatore, mentre il termine RI è responsabile del campo elettrico necessario per far circolare la corrente elettrica. In conclusione, la DDP che può essere effettivamente utilizzata, la cosiddetta *tensione ai morsetti*, è data dalla relazione:

$$V_{effettiva} = RI = R\frac{fem}{r_i + R} = \frac{fem}{1 + \frac{r_i}{R}} < fem.$$

L'ultima relazione permette di misurare la *fem* di un generatore: basta interrompere il circuito tra i morsetti, che equivale a far tendere la resistenza esterna (o *carico*) all'infinito (circuito *aperto*). Così facendo $V_{effettiva} \to fem$. A circuito chiuso, la differenza di potenziale tra i morsetti, la $V_{effettiva}$, decresce, tanto più quanto più piccola è la resistenza di carico rispetto a quella interna. Ad esempio, "cortocircuitando" i morsetti di una batteria collegandoli ad una sbarretta di metallo (la cui resistenza, che corrisponde al carico, è molto piccola), si osserva che il liquido della batteria inizia a bollire. Questo perché tutta l'energia viene dissipata al suo interno, come risulta evidente facendo tendere a zero il rapporto tra la resistenza di carico e la resistenza interna nella relazione

$$\lim_{\frac{R}{r_i} \to 0} V_{effettiva} = \lim_{\frac{R}{r_i} \to 0} \frac{R}{r_i} \frac{fem}{1 + \frac{R}{r_i}} = 0.$$

Chiaramente, un generatore di *fem* ideale ha resistenza interna nulla.

15.6 Principi di kirchhoff

Si applicano a tutti i circuiti in corrente continua, supponendo che i fili di collegamento abbiano resistenza trascurabile rispetto a quella degli utilizzatori presenti nel circuito.

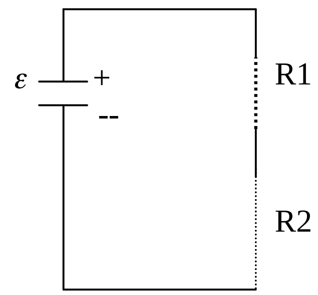
1. **Legge delle maglie**: *in una maglia la somma degli aumenti di potenziale deve essere uguale alla somma delle diminuzioni di potenziale* (Principio di conservazione dell'energia).

2. **Legge dei nodi**: *in un nodo la somma delle correnti che entrano è uguale alla somma delle correnti che escono* (Principio di conservazione della carica).

Analizziamo alcuni esempi di applicazione di questi principi.

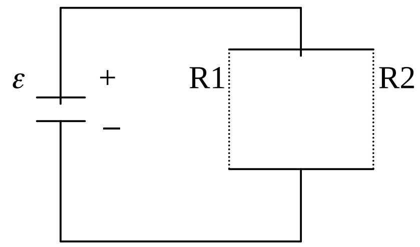
Resistori in serie e in parallelo

Resistori in serie



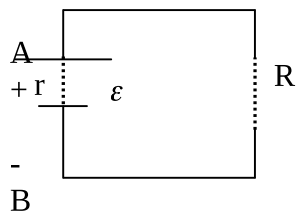
Percorrendo il circuito in senso orario, per la legge delle maglie e quella di Ohm risulta: $\varepsilon = IR_1 + IR_2$. La resistenza equivalente è quindi $\varepsilon = IR_{eq} = IR_1 + IR_2 \Rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2$.

Resistori in parallelo



Sempre percorrendo il circuito in senso orario, quando la corrente *I* giunge al nodo a, questa si divide nei due rami su cui si trovano gli utilizzatori; per la legge dei nodi risulterà $I = I_1 + I_2$. Tuttavia, i due utilizzatori si trovano alla stessa differenza di potenziale, quella della f.e.m., per cui $\frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Torniamo al circuito



Dalla legge delle maglie gli aumenti di potenziale ε sono uguali alle diminuzioni $Ir + IR$. La corrente circolante risulta quindi $I = \frac{\varepsilon}{r + R}$.

La *tensione ai morsetti* è $\Delta V = IR = \frac{\varepsilon R}{R + r} = \varepsilon - Ir$.

La *potenza fornita* dalla sorgente di f.e.m. è $P = \varepsilon I$.

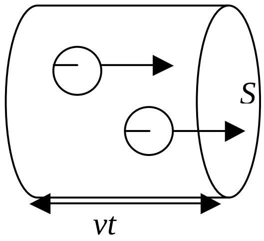
La *potenza dissipata nella resistenza interna* è $P = I^2 r$.

La *potenza dissipata nella resistenza esterna è* $P = I^2 R$.

Si osservi che $I^2 R + I^2 r = \frac{\varepsilon^2}{(R + r)^2}(R + r) = \frac{\varepsilon^2}{R + r} = \varepsilon \frac{\varepsilon}{R + r} = \varepsilon I$.

15.7 La conduzione elettrica dal punto di vista microscopico

Ci proponiamo lo scopo di giungere ad un modello che descriva il fenomeno della conduzione elettrica. Sappiamo che le cariche vengono messe in moto quando si applica una DDP tra due punti del conduttore. Per una corrente continua, $I = \frac{Q}{t}$, dove *Q* è la carica che attraversa una sezione *S* del conduttore in un tempo *t*. Se la carica è portata da *N* particelle di carica *q* che si muovono con velocità *v*, quelle che attraversano la sezione nel tempo *t* sono quelle che distano dalla sezione meno di vt:



$$\begin{cases} N = N_0 Svt \\ I = \dfrac{Q}{t} \end{cases}$$, dove N_0 è il numero di particelle per unità di volume.

La carica complessiva è $Q = Nq$, di conseguenza $I = \dfrac{N_0 Svtq}{t} \Rightarrow I = N_0 Svq$. Se le forze esterne sui portatori di carica si equilibrano, la velocità è costante. Di conseguenza, se N_0 non varia, la corrente è costante.
In base alle cause del moto i conduttori possono essere classificati in

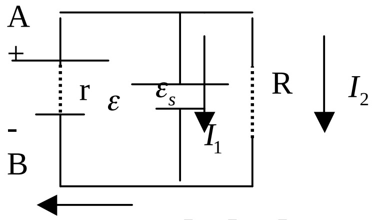
- *ideali*: una volta prodotta la corrente resta costante anche in assenza di campo elettrico (e quindi di generatore). Non accade mai in condizioni normali, bensì vicino allo zero assoluto per alcuni materiali, detti *superconduttori* ($R = 0 \Rightarrow V = IR = 0$ anche con $I \neq 0$).
- *Ohmici normali*: le cariche si muovono sotto l'azione del campo elettrico. Si muovono gli elettroni esterni che, per agitazione termica, acquistano energia sufficiente per liberarsi dal nucleo; sono per questo motivo detti *elettroni di conduzione*. Gli *ioni*, atomi non più neutri, che restano formano un *reticolo cristallino* tra le cui maglie si muovono gli elettroni di conduzione in modo disordinato non producendo alcuna corrente misurabile. In presenza di campo si muovono in *direzione opposta* a quella del campo con una velocità detta *di deriva* piccola ($10^{-3}\,\dfrac{m}{s}$ contro i $10^{6}\,\dfrac{m}{s}$ delle velocità termiche), sufficiente però a formare una corrente. Durante il moto gli elettroni di conduzione, urtando con gli ioni del reticolo, perdono l'energia acquistata dal campo elettrico; quest'ultimo dovrà quindi accelerarli per mantenerli in moto ordinato.
- *Non ohmici*: in presenza di campo elettrico esterno *varia* la densità dei portatori di carica, ad esempio nel caso di un filamento metallico che, riscaldato sufficientemente, emette elettroni, facendone così variare la densità.

Problemi

1. Un riscaldatore di 200 W è usato per riscaldare l'acqua in una tazza. Esso è costituito da un singolo resistore *R* collegato ad una differenza di potenziale di 110 V. (a) Si trovi *R*. (b) Si supponga che il 90% di energia sia usato per riscaldare l'acqua; quanto tempo è necessario per riscaldare 0,25 kg d'acqua da 15°C a 100°C? (c) Quanto tempo è necessario per evaporare tutta l'acqua dopo che ha raggiunto 100°C?
   - (a) Dalla $P = IV = \dfrac{V^2}{R} \Rightarrow R = \dfrac{V^2}{P} = 61\Omega$.
   - (b) Per scaldare il quantitativo d'acqua da 15°C a 100°C occorre una quantità di calore pari a $\Delta Q = mc\Delta T = 89 \cdot 10^3 J$. Il 90% della potenza erogata dal riscaldatore è effettivamente usato per scaldare l'acqua in un tempo $0{,}9P = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \dfrac{\Delta Q}{0{,}9P} = \dfrac{89 \cdot 10^3 J}{180W} = 8{,}24\,\mathrm{min}$.
   - (c) Il calore latente di ebollizione dell'acqua è $L_e = 2{,}26 MJ/kg = 540 Kcal/kg$; di conseguenza il calore necessario per l'ebollizione è $\Delta Q = mL_e = 0{,}57 MJ$. Con ragionamenti similari a quelli di cui al punto (b) segue $0{,}9P = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \dfrac{\Delta Q}{0{,}9P} = \dfrac{0{,}57 \cdot 10^6 J}{180W} = 52{,}8\,\mathrm{min}$.

2. Ai capi di una resistenza variabile R è applicata una differenza di potenziale V che resta costante. Quando R ha il valore R_1, la corrente è 6,0A. Quando R viene aumentata di 10Ω, la corrente scende a 2,0A. si trovino R_1 e V.
   - $$V = I_1 R_1 \Rightarrow V = 6{,}0 R_1$$ $$V = I_2 R_2 \Rightarrow V = 2{,}0(R_1 + 10) \Rightarrow 6{,}0 R_1 = 2{,}0(R_1 + 10) \Rightarrow R_1 = 5\Omega \Rightarrow V = 30V$$
3. Il rame ha la densità di $8{,}92\frac{g}{cm^3}$ e la massa molecolare di $63{,}5\frac{g}{mol}$.(a) Ricordando che ci sono $6{,}02 \cdot 10^{23}$ atomi in una mole, si usino questi dati per calcolare il numero di atomi in ogni centimetro cubo di rame. Questo è anche il numero di elettroni liberi in ogni centimetro cubo di rame, perché in media c'è solo un elettrone libero per ogni atomo. (b) Un filo di rame avente il raggio di $0{,}0814cm$ è percorso dalla corrente di 1 A. Si calcoli la velocità di deriva degli elettroni.
   - Il numero di moli in $1cm^3$ di rame è dato dalla relazione $n = \frac{8{,}92\frac{g}{cm^3}}{63{,}5\frac{g}{mol}} = 0{,}14\frac{mol}{cm^3}$, di conseguenza, il numero di atomi in un centimetro cubo di rame è $N = 0{,}14 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 8{,}46 \cdot 10^{22}$.
   - $I = N_0 Svq = \frac{N}{Sl} Sve \Rightarrow v = \frac{Il}{Ne}$
4. Una batteria di automobile fiacca, che ha la f.e.m. di 11,4 V e la resistenza interna di 0,01 Ω, è collegata ad un carico di 1,0 Ω. Per aiutare la batteria scarica si collega una seconda batteria di f.e.m. 12,6V e resistenza interna 0,01 Ω alla prima batteria, mediante cavi. Si disegni uno schema del circuito per questa situazione e si trovi la corrente in ciascun ramo del circuito. Si trovi la potenza erogata dalla seconda batteria e si valuti dove va questa potenza, supponendo che le f.e.m. e le resistenze interne siano trascurabili.

   - Si collegano i morsetti della batteria con quelli di una batteria carica, positivo con positivo: in questo modo, sempre per la legge delle maglie, quando una carica messa in circolo dalla batteria carica attraversa la batteria scarica, perde energia che viene acquistata da quest'ultima. L'accensione del motore potrà, a questo punto, avvenire regolarmente.



$$\varepsilon = I_2 R + Ir \qquad I = I_1 + I_2$$

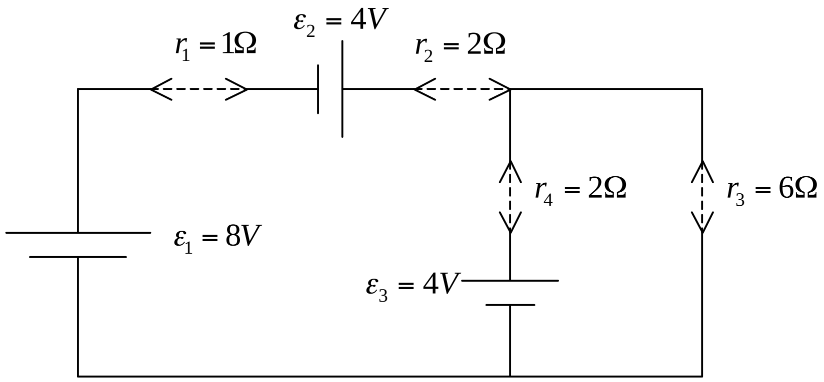
   - $$\varepsilon = \varepsilon_s + I_1 r_s + Ir \Rightarrow \begin{cases} I_1 r + I_2(R + r) = \varepsilon \\ I_1(r_s + r) + I_2 r = \varepsilon - \varepsilon_s \\ I = I_1 + I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} I_1 = \dfrac{\varepsilon r - (\varepsilon - \varepsilon_s)(R + r)}{r^2 - (R + r)(r_s + r)} = 54{,}03A \\ I_2 = \dfrac{(\varepsilon - \varepsilon_s)r - \varepsilon(r_s + r)}{r^2 - (R + r)(r_s + r)} = 11{,}94A \end{array} \Rightarrow$$

$$P = I\varepsilon = 66 \cdot 12{,}6 = 831{,}6W$$

   - La potenza erogata è quindi pari a 831,6W. Questa potenza viene dissipata nella resistenza interna della batteria "buona", $P = I^2 r = 43{,}56W$, nella resistenza di carico $P = I_2^2 R = 144W$, e nella resistenza interna della batteria fiacca,

$P = I_1^2 r_s = 29{,}16W$. Di conseguenza per caricare la batteria fiacca vengono utilizzati $P_{eff} = 831{,}6 - 43{,}56 - 144 - 29{,}16 = 614{,}88 \approx 615W$.

5. Nel circuito in figura si trovino (a) la corrente in ciascun resistore. (b) La potenza erogata da ciascuna sorgente di f.e.m. e (c) la potenza dissipata in ciascun resistore.



- (a) $\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ \varepsilon_1 = Ir_1 - \varepsilon_2 + Ir_2 + I_2 r_3 \\ \varepsilon_1 = Ir_1 - \varepsilon_2 + Ir_2 + I_1 r_4 + \varepsilon_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = (r_1 + r_2) I_1 + (r_1 + r_2 + r_3) I_2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = I_1 (r_1 + r_2 + r_4) + I_2 (r_1 + r_2) \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ 12 = 3I_1 + 9I_2 \\ 8 = 5I_1 + 3I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = 2A \\ I_1 = 1A \\ I_2 = 1A \end{cases}$.

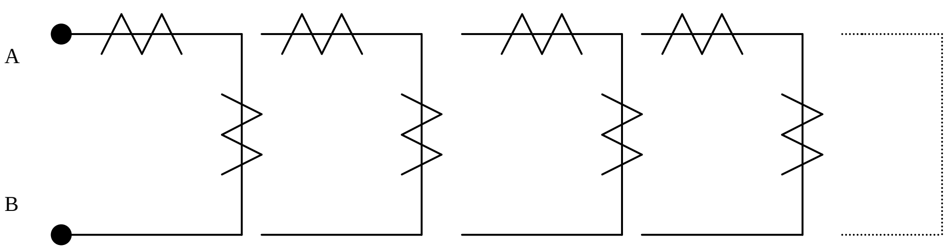
  Equivalentemente poteva essere scelta la maglia di destra e l'applicazione dei Principi di Kirchhoff avrebbe condotto ugualmente al risultato:

  $$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ \varepsilon_1 = Ir_1 - \varepsilon_2 + Ir_2 + I_2 r_3 \\ I_2 r_3 = I_1 r_4 + \varepsilon_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = (r_1 + r_2) I_1 + (r_1 + r_2 + r_3) I_2 \\ \varepsilon_3 = -I_1 r_4 + I_2 r_3 \end{cases} \Rightarrow$$

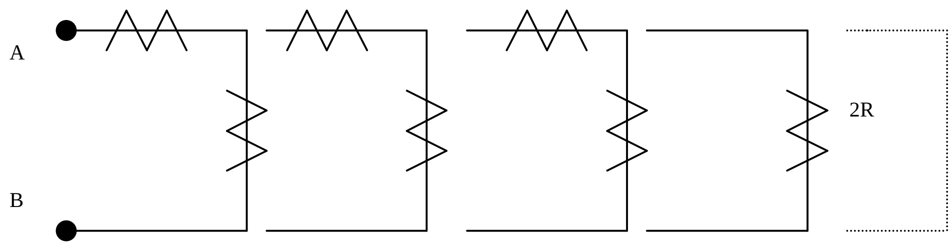
  $$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ 12 = 3I_1 + 9I_2 \\ 4 = -2I_1 + 6I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = 2A \\ I_1 = 1A \\ I_2 = 1A \end{cases}$$

- (b) $P_1 = \varepsilon_1 I = 16W$; $P_2 = \varepsilon_2 I = 8W$; $P_3 = \varepsilon_3 I_1 = -4W$.
- (c) $P_1 = r_1 I^2 = 4W$; $P_2 = r_2 I^2 = 8W$; $P_3 = r_3 I_2^2 = 6W$; $P_4 = r_4 I_1^2 = 2W$.

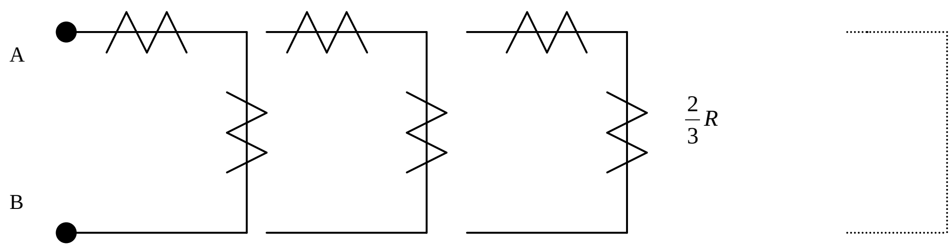
6. Calcolare la resistenza elettrica equivalente tra i punti A e B di una catena infinita di resistenze dello stesso valore R, collegate come nella figura.



Studio della situazione *fisica:*
studiamo la situazione proposta in figura (catena con 4 anelli). Si determina la resistenza equivalente alle due resistenze (in serie) nell'ultima maglia da destra:
$R_{eq} = R + R = 2R$.



A questo punto determiniamo la resistenza equivalente alle due resistenze (in parallelo) nell'ultima maglia, sempre da destra:
$R_{eq} = \frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2}{3}R$.



Procedendo sempre in questo modo, si arriva ad ottenere un valore per la resistenza equivalente alla catena da 4 anelli pari a $R_{eq} = \frac{34}{21}R$.

Riportiamo i valori delle resistenze equivalenti per numero di anelli costituenti la catena:

1	2	3	4	5
2R	$\frac{5}{3}R$	$\frac{13}{8}R$	$\frac{34}{21}R$	$\frac{89}{55}R$

A questo punto risulta naturale chiedersi se è possibile "prevedere" il valore (teorico) della resistenza equivalente ad una catena infinita di resistenze come chiede il problema.

Analisi del problema e soluzione *matematica:*
osserviamo innanzitutto che è possibile definire per ricorrenza la successione

$$\begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} = \dfrac{2}{1} \\ \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{2a_{n-1} + b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \end{cases}$$

Per cercare il limite di questa successione, scriviamo il termine n-esimo così:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{b_{n-1}(2\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + 1)}{b_{n-1}(\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + 1)} = f(\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}).$$

Se tale limite esiste, dovrà essere $f(L)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}=L$. Di conseguenza, tale limite andrà a ricercarsi tra le soluzioni dell' equazione $f(L)=L$, in particolare $L=\frac{2L+1}{L+1}$ che ha come soluzioni $L_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $L_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. La seconda soluzione viene scartata in quanto, essendo negativa, è priva di significato fisico. La soluzione accettabile è un numero noto non solo in ambito matematico e prende il nome di *Sezione aurea.*