CAPITOLO 6
GRAVITAZIONE

6.1 Breve sintesi storica

L'osservazione del cielo porterebbe alla conclusione che, a parte i sette oggetti *eccezionali*[1], gli altri corpi celesti sembrano muoversi come se fossero rigidamente attaccati ad una sfera rotante attorno alla Terra.
La *fisica aristotelica* (IV sec. a. C.) è imperniata sulla concezione *geocentrica*, e sulla base di questa assume che i corpi celesti debbano muoversi lungo orbite *circolari*, essendo il cerchio una curva *perfetta*. Tuttavia, anche a quel tempo, era possibile osservare una deviazione dall'orbita circolare, di cui evidentemente occorreva rendere conto. Per questo scopo furono introdotti modelli molto complessi, basati su opportune combinazioni di moti circolari uniformi. Una formulazione definitiva della teoria geocentrica avvenne ad opera di *Tolomeo* con il sistema che porta il suo nome, e che fu esposto nell'*Almagesto*. Il sistema tolemaico costituì il fondamento della *Cosmologia teologica*.
In realtà, *Aristarco di Samo* (310-230 a. C.) propose un modello *eliocentrico*, alternativo a quello geocentrico. Tale modello fu riproposto da *Copernico* (1473-1543) nell'opera *De revolutionibus orbium coelestium*. Per Copernico l'universo è *finito*, e l'immobilità del Sole è dovuta alla sua natura divina.
Le idee di Copernico furono diffuse principalmente da *Giordano Bruno* (1547-1600) il quale andava oltre la visione copernicana, teorizzando un universo *infinito* a "molti mondi".
La fisica di *Keplero* (1571-1630) risente ancora della concezione aristotelica, secondo cui lo *stato naturale* è la *quiete*, mentre il moto è ritenuto artificiale. Questa errata convinzione lo portò a cercare le "spinte" che i pianeti dovevano ricevere per poter descrivere le loro orbite. Va comunque detto che il fallimento del tentativo di spiegare la dinamica del moto dei corpi celesti, non oscura l'importanza delle *tre leggi* scoperte empiricamente da Keplero, con le quali si afferma l'ellitticità delle orbite dei pianeti intorno al Sole, la costanza della cosiddetta *velocità areolare*, e quella del rapporto tra il quadrato del periodo ed il cubo del semiasse maggiore dell'orbita.
Nella cosmologia Kepleriana le sfere dei cinque pianeti sono circoscritte ai *cinque solidi platonici*.
Galileo Galilei (1564-1642), supportato dalla *razionalità*, manifesta il suo sostegno alla teoria copernicana con l'opera *Sidereus Nuncius* (1609), dove sono riportati i risultati delle sue osservazioni, avvenute grazie all'impiego del *cannocchiale*, tra le quali spiccano la scoperta dei "satelliti medicei di Giove" e le fasi di Venere. Con questi risultati, si abbandona definitivamente il modello delle *stelle fisse* attaccate ad una sfera.
Galileo, per le sue idee, subì la condanna da parte del Tribunale della Santa Inquisizione, nel 1633. Questo episodio negativo ebbe conseguenze disastrose per lo sviluppo della scienza in Italia.
La costruzione della dinamica sul concetto di *accelerazione*, permise a *Newton* (1642-1727) di realizzare una *sintesi* delle tre leggi di Keplero, all'interno delle leggi della dinamica.
Dal tempo di Newton ad oggi, sono stati scoperti gli altri pianeti che costituiscono il sistema solare: Urano, Nettuno, Plutone. Inoltre, l'uomo è riuscito ad arrivare sulla Luna (1969), e a far atterrare un veicolo robot su Marte (2004). La cosmologia moderna ci parla quindi di un Universo formato da galassie e da ammassi di galassie, senza l'individuazione di alcun punto privilegiato (Universo *isotropo*), e con una distribuzione uniforme dei corpi celesti su larga scala (Universo *omogeneo*). La scoperta del fenomeno della *fuga delle galassie*, avvenuta grazie alle osservazioni di *Hubble* (1929) ha dato origine alla cosiddetta *cosmologia evolutiva*.

[1] Sole, Luna, Mercurio, Venere, Marte, Giove, Saturno

6.2 Le leggi di Keplero

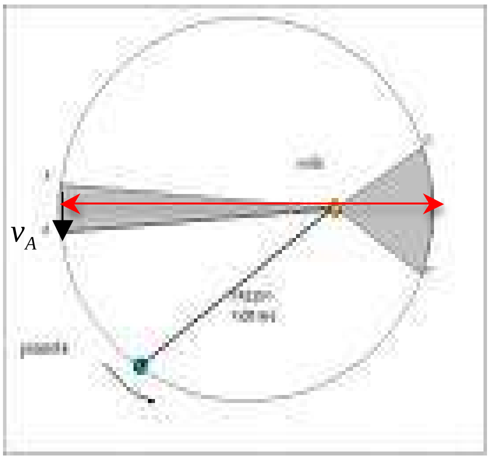
Il modello copernicano, tuttavia, non è in grado di spiegare tutte le osservazioni sperimentali. Si deve anche alle osservazioni dell'astronomo danese Tycho Brahe (1546-1601), se si è giunti alla formulazione delle leggi che governano il moto dei pianeti. Egli infatti rompe la consuetudine, secondo cui una scoperta deve passare necessariamente attraverso il setaccio della consistenza dei fatti con opportuni argomenti filosofici, mettendo a disposizione della comunità scientifica una grande mole di dati sperimentali relativi alle misure, molto accurate, delle posizioni dei pianeti. Nel 1618 l'astronomo Keplero (1571-1630) deduce dalle tabelle di Brahe le tre leggi che portano il suo nome.

La prima legge di Keplero

Analizzando i dati sperimentali di Brahe, Keplero nota che i pianeti descrivono un'orbita ellittica in cui il sole occupa uno dei fuochi.

La seconda legge di Keplero

La seconda scoperta fatta da Keplero riguarda la velocità con cui i pianeti percorrono la loro orbita intorno al sole. Egli nota che si muovono più velocemente quando sono vicini al Sole, e più lentamente quando sono lontani. In particolare osserva che è costante l'area spazzata dal raggio vettore (linea congiungente in ogni istante il sole con il pianeta) in intervalli di tempo uguali. Si tratta della cosiddetta "*legge delle aree*".



$$\Delta A = \frac{1}{2} r_p \cdot v_p \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r_p \cdot v_p = C$$

E' possibile esprimere i semiassi dell'ellisse, *a* e *b*, in funzione delle distanze del pianeta dal Sole al *perielio*, r_p, ed all'*afelio*, r_A: indicata con *2c* la distanza tra i fuochi, risulta

$$\begin{cases} 2a = r_p + r_A \\ 2c = r_A - r_p \end{cases} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{r_A - r_p}{r_A + r_p} \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{r_A r_p}\,.$$

Di conseguenza, l'area spazzata nel periodo *T* è $A = \pi ab = \pi \frac{r_A + r_p}{2} \sqrt{r_A r_p}$.

La terza legge di Keplero

Questa legge viene scoperta da Keplero molto più tardi rispetto alle prime due, e riguarda la proporzionalità tra il quadrato del periodo di rivoluzione del pianeta attorno al sole ed il cubo della distanza media (il semiasse maggiore) del pianeta dal sole: $\frac{d^3}{T^2} = K$, dove $K = 3{,}36 \cdot 10^{18} m^3 s^{-2}$ è detta *costante solare*.

6.3 La legge di gravitazione universale

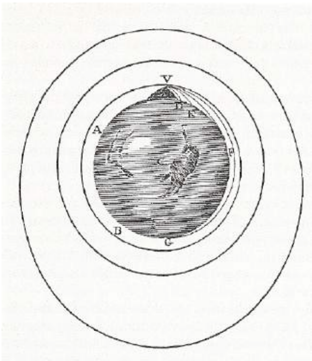
Esponiamo adesso il ragionamento che ha portato Newton, nel 1666, a formulare il modello che descrive l'interazione gravitazionale (cioè tra tutti, da qui l'aggettivo *universale*, i corpi dotati di massa), nel caso di orbite approssimativamente circolari.
Per la prima legge di Keplero possiamo considerare l'orbita della Terra approssimativamente circolare. Dalla seconda legge di Keplero si ricava che la velocità angolare della Terra è costante durante il moto, che quindi è circolare uniforme: $\frac{\Delta A}{\Delta t} = C \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d_{TS}^2 \Delta\theta}{\Delta t} = C$, quindi $\omega := \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ è costante; di conseguenza $v = \frac{2\pi d_{TS}}{T}$ è la velocità tangenziale della Terra, e la forza responsabile del moto è *centripeta*. Sfruttiamo la terza legge di Keplero per determinare l'accelerazione centripeta:

$$a = \frac{v^2}{d_{TS}} = \frac{4\pi^2 d_{TS}^2}{d_{TS}T^2} = \frac{4\pi^2}{d_{TS}^2}\left(\frac{d_{TS}^3}{T^2}\right) = \frac{4\pi^2 K}{d_{TS}^2}.$$

In conclusione, l'accelerazione centripeta dipende dalla costante K, che è la stessa per *tutti* i pianeti del sistema solare, ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza del pianeta dal Sole.
Il modello con cui Newton rappresenta la forza di gravità (legge di gravitazione universale) è costituito da una forza diretta dal pianeta *verso* il Sole, *proporzionale* alla massa del Sole. Nel caso della Terra, appunto, questa legge è:

$$\vec{F} = -\frac{GM_s m_T}{d_{TS}^2}\vec{r},$$

dove $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$ è la cosiddetta *costante di Newton*, $\vec{r}$ è il versore diretto dal Sole alla Terra, ed il segno "meno" testimonia la natura attrattiva di questa forza.
La costante di Newton sarà misurata in seguito da *Cavendish* (1731-1810) utilizzando la *bilancia di torsione.* Nella celebre immagine del *De mundi systemate liber*, opera di Newton pubblicata nel 1729, si illustra la relazione tra il moto di un satellite e quello di un proiettile.
Cadere significa quindi "*muoversi attratti dalla Terra*". Una delle conseguenze più evidenti dell'azione della forza di gravità, è la forma approssimativamente sferica dei corpi celesti: pensando alla Terra, per effetto della rotazione attorno al proprio asse, è più schiacciata ai poli e più rigonfia all'equatore.



6.4 Massa inerziale e massa gravitazionale

La massa presente nella legge della gravitazione universale è da intendersi come la capacità di un corpo di interagire con un altro, cioè come una *caratteristica* del corpo stesso, dovuta alla sua materialità; per questo motivo viene denominata *massa gravitazionale*. La seconda legge della dinamica invece, ci presenta la massa come misura dell'opposizione, da parte dei corpi soggetti a forze non equilibrate, al cambiamento di velocità. Per questo motivo prende il nome di *massa inerziale*. Esiste un legame tra queste due definizioni di massa? La risposta è affermativa, ed una prima giustificazione ci viene data dal fatto che, approssimativamente, *tutti* i corpi che si trovano in prossimità della superficie terrestre cadono con la stessa accelerazione:

$$\frac{GM_T m_{1g}}{R_T^2} = m_{1i} a_1 = m_{1i} g$$
$$\frac{GM_T m_{2g}}{R_T^2} = m_{2i} a_2 = m_{2i} g$$

Confrontando le due equazioni otteniamo che $\frac{m_{1i}}{m_{1g}} = \frac{m_{2i}}{m_{2g}}$ e quindi possiamo concludere che il rapporto tra la massa inerziale e la massa gravitazionale è costante. Esperimenti accurati, condotti nel 1890 dal fisico ungherese Eotvos mediante *bilance di torsione*, hanno provato che effettivamente i due valori sono uguali.

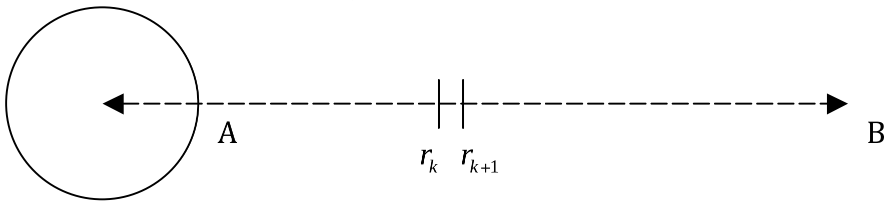
6.5 L'energia potenziale gravitazionale

La dipendenza della forza gravitazionale dalla distanza ci impone di rivedere le nostre idee circa la quantificazione dell'energia potenziale gravitazionale. Infatti, supporre la forza gravitazionale approssimativamente costante a distanze sufficientemente grandi rispetto al raggio terrestre, può portare a situazioni paradossali qualora volessimo, ad esempio, lanciare in orbita un satellite. Infatti, per il principio di conservazione dell'energia meccanica $mgh = \frac{1}{2}mv^2$, di conseguenza in corrispondenza di ogni velocità si raggiunge sempre una quota massima, dopodiché avverrà, inevitabilmente, la "ricaduta" verso Terra. Per giustificare il moto orbitale, senza ricaduta a Terra, di determinati oggetti, è opportuno calcolare il lavoro L_{BA} compiuto dalla forza gravitazionale per spostare un corpo dal punto *B*, distante r_B dal centro *O* della Terra, al punto *A*, distante r_A.

Per questo scopo suddividiamo il segmento congiungente il punto sulla superficie terrestre con quello a distanza *r* dal centro della Terra, in *n* intervalli "sufficientemente piccoli" (rappresentati dalla parte in tratteggio della figura sottostante), all'interno dei quali possiamo considerare una forza "media" costante:

$$F_k = \frac{GM_T m}{r_k r_{k+1}}.$$

$$L_{BA} = \sum_{k=1}^{n-1} GM_T m \frac{r_{k+1} - r_k}{r_k r_{k+1}} = GM_T m\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \ldots - \frac{1}{r_{n-1}} + \frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_A}\right) = GM_T m\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$



L'energia potenziale posseduta nel punto B è legata a quella posseduta nel punto A dalla nota relazione:

$$U(B) = L_{BO} = L_{BA} + L_{AO} = L_{BA} + U(A) \Rightarrow U(B) - U(A) = L_{BA} = GM_T m\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right).$$

Per convenzione si pone lo "zero" dell'energia potenziale in corrispondenza del punto B, quando questo si trova a distanza infinitamente grande dalla Terra: $0 - U(A) = GM_T m\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{\infty}\right)$. Da questo segue l'espressione dell'energia potenziale gravitazionale in un punto A distante *r* dal centro della Terra:

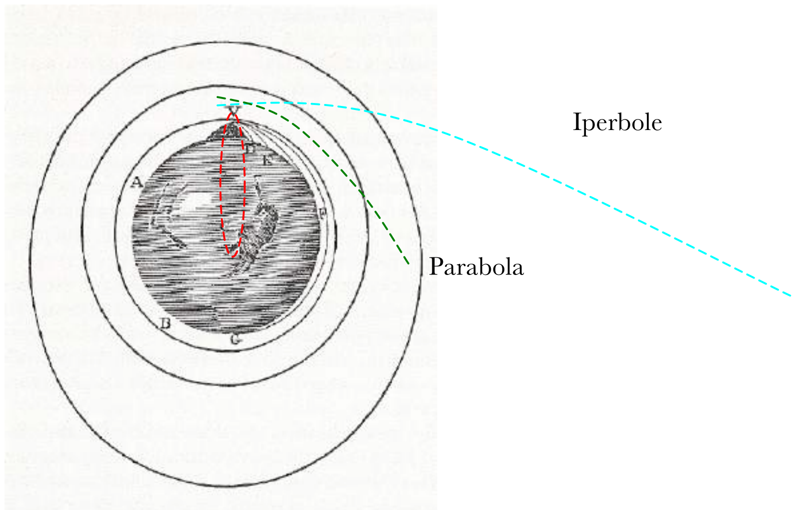
$$U(A) = -\frac{GM_T m}{r_A}.$$

6.6 La velocità di fuga

Con la nuova espressione dell'energia potenziale gravitazionale possiamo risolvere la questione del lancio in orbita di un satellite. E' possibile, infatti, calcolare la cosiddetta *velocità di fuga*, ovvero la *minima* velocità che dobbiamo imprimere ad un corpo affinché questo riesca a sottrarsi all'azione del campo gravitazionale terrestre, e giungere a distanza infinitamente grande dalla Terra con velocità nulla.
La velocità di fuga si calcola applicando il principio di conservazione dell'energia tra quando il corpo si trova sulla terra ($E = U + K = -\frac{GM_T m}{R_T} + \frac{1}{2}mv^2$) e quando questo è giunto a distanza "infinita" dalla terra, con velocità nulla ($E = U + K = -\frac{GM_T m}{\infty} + \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = 0$). Uguagliando queste due espressioni otteniamo:

$$v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T} \cong 11{,}2\,\frac{km}{s}$$

Per avere un'idea della grandezza del valore appena trovato basta riportarlo in Km/h ed osservare che a quella velocità percorreremmo l'equatore terrestre in circa un'ora!
Mettendo in relazione con la prima Legge di Keplero queste considerazioni sull'energia, notiamo che per mantenere un'orbita ellittica attorno alla Terra l'energia dovrà necessariamente essere *minore* di zero (con la convenzione scelta per l'energia potenziale gravitazionale). Anche un proiettile che viene lanciato e che ricade a Terra è soggetto a questa legge: se la terra fosse "perforabile" il proiettile orbiterebbe attorno al centro della terra lungo una traiettoria ellittica, di cui la parabola di caduta non sarebbe altro che una sua approssimazione dovuta al fatto di aver considerato la forza gravitazionale uniforme.



E' possibile dimostrare che l'orbita percorsa dal proiettile che giunge all'infinito con velocità nulla è una *parabola*, mentre quella in cui giunge all'infinito con velocità non nulla è un'*iperbole*.

Problemi

1. La Terra gira intorno al Sole su un'orbita quasi circolare di raggio $1{,}5\cdot10^{11}m$. Il suo periodo è un anno. Si usino questi dati per calcolare la massa del Sole.
2. Un segnale luminoso impiega circa 13 minuti per viaggiare, alla velocità della luce $c = 3\cdot10^{8} ms^{-1}$, dal Sole a Marte. Si calcoli il periodo di rivoluzione di Marte intorno al Sole.

3. Una particella viene lanciata dalla superficie della terra con una velocità pari al doppio della velocità di fuga. Qual è la sua velocità quando essa è molto lontana dalla terra?

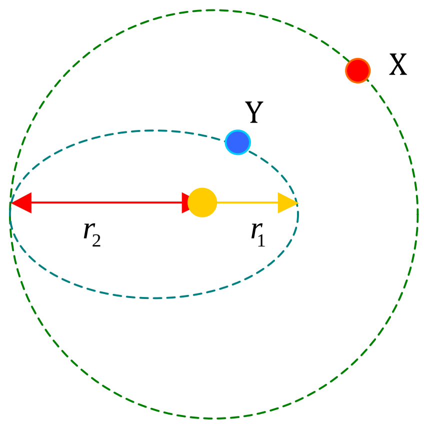
4. Si deve lanciare dalla terra una sonda spaziale in modo che abbia la velocità di $50\frac{km}{s}$ quando è molto lontana dalla terra. Che velocità deve avere la sonda sulla superficie della Terra?
5. Si dimostri che l'equazione $U = GM_T m\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{r}\right)$ può essere scritta nella forma $U = mgR_T\left(1-\frac{R_T}{r}\right)$, dove g è l'accelerazione di gravità alla superficie della Terra.

6. Un oggetto inizialmente fermo viene lasciato cadere da una quota $h = 4\cdot10^{6}m$ sopra la superficie terrestre. Se non ci fosse la resistenza dell'aria, quale sarebbe la sua velocità nel momento in cui colpisce la Terra.

7. Si calcoli l'energia necessaria per allontanare una massa di 1 kg dalla terra con la velocità di fuga. Si converta questa energia in kilowattora. Se si può produrre energia al costo di 100 lire/kilowattora, qual è il costo minimo per mandare un astronauta di 80 kg fuori dal campo gravitazionale della terra?

8. Sapendo che la massa di Marte è $0{,}642\cdot10^{24}Kg$ ed il raggio misura $3{,}38\cdot10^{6}m$, si calcoli l'accelerazione di gravità sulla superficie di Marte.

9. Si calcoli il rapporto tra la massima e la minima velocità di Urano, sapendo che la sua eccentricità vale 0,047.
10. Il pianeta X impiega due anni per ruotare attorno alla propria stella lungo un'orbita circolare, il cui raggio è uguale alla distanza all'afelio di un pianeta Y, che per ruotare attorno alla medesima stella impiega un anno. Sapendo che tale distanza è uguale a 200 Gm, si calcoli (a) la distanza del pianeta Y dalla stella al perielio; (b) le velocità del pianeta Y all'afelio ed al perielio.



Soluzioni

1. La legge della gravitazione universale e la seconda legge di Newton ci forniranno la soluzione del problema:
$$\frac{GM_SM_T}{d^2}=M_Ta=M_T\frac{v^2}{d}=M_T\frac{(2\pi d)^2}{T^2d}\Rightarrow M_S=\frac{4\pi^2d^3}{GT^2}=2{,}0\cdot 10^{30}kg.$$
2. Per la terza legge di Keplero, $\frac{d_{TS}^3}{T_T^2}=\frac{d_{MS}^3}{T_M^2}\Rightarrow T_M^2=\frac{(c\Delta t)^3}{d_{TS}^3}T_T^2\Rightarrow T_M\approx 1{,}97a$.

3. Si applica il principio di conservazione dell'energia meccanica con l'espressione dell'energia potenziale gravitazionale data da $U=GM_Tm\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{r}\right)$ (lavoro compiuto conto le forze del campo per portare la massa *m* dalla superficie della terra ad un punto distante *r* dal centro della terra stessa). Di conseguenza: $\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_f^2+GM_Tm\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{\infty}\right)$. Ora, $\frac{GM_T}{R_T^2}:=g$, allora $v_f=\sqrt{v_0^2-2gR_T}=19{,}4\frac{km}{s}$.
   - E' interessante la discussione del termine all'interno della radice, al fine di ricavare i valori della velocità iniziale corrispondenti alle traiettorie seguite dal corpo:
   $$v_0^2-2gR_T\begin{cases}<0 & ellisse\\ =0 & parabola\\ >0 & iperbole\end{cases}$$

4. E' una sorta di problema inverso del precedente: $\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_f^2+GM_Tm\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{\infty}\right)$ da cui segue $v_0=\sqrt{v_f^2+2gR_T}=51{,}2\frac{km}{s}$.

5. Dalla relazione $\frac{GM_T}{R_T^2}:=g$ segue $U=GM_Tm\frac{1}{R_T}\left(1-\frac{R_T}{r}\right)=\frac{GM_TmR_T}{R_T^2}\left(1-\frac{R_T}{r}\right)=mgR_T\left(1-\frac{R_T}{r}\right)$, come volevasi dimostrare.

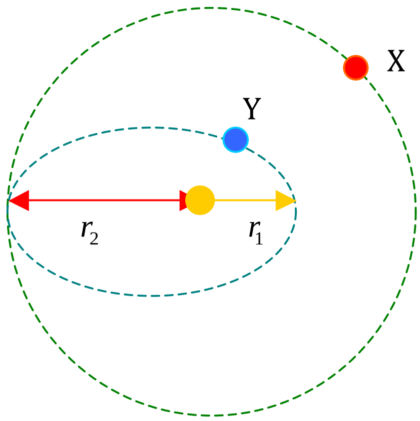
6. $mgR_T\left(1-\frac{R_T}{R_T+h}\right)=\frac{mv^2}{2}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2ghR_T}{R_T+h}}=6{,}95\frac{km}{s}$.

7.
   - La minima energia è quella che permette alla massa di arrivare a distanza infinita dalla terra con velocità prossima a zero. Si applica il principio di conservazione dell'energia meccanica: $mgR_T\left(1-\frac{R_T}{R_T}\right)+\frac{mv^2}{2}=mgR_T\left(1-\frac{R_T}{\infty}\right)+\frac{m0^2}{2}\Rightarrow E=E_{c,i}=mgR_T=6{,}3\cdot 10^7J$.
   - L'energia in kilowattora (potenza) è: $P=\frac{E}{t}=\frac{6{,}3\cdot 10^7J}{3600s}=17{,}5kW$.
   - Il costo minimo è dato dalla relazione $P=\frac{E}{t}=\frac{6{,}3\cdot 10^7.80J}{3600s}\cdot 100lire=140.000lire$.

8. Per la legge di gravitazione universale risulta, sulla superficie di Marte, $\frac{GM_M m}{R_M^2} = mg_M \Rightarrow g_M = \frac{GM_M}{R_M^2} = 3{,}75\frac{m}{s^2}$.

9. $0{,}047 = e = \frac{c}{a} = \frac{r_A - r_p}{r_A + r_p} = \frac{1 - r_P r_A^{-1}}{1 + r_P r_A^{-1}} \Rightarrow r_P r_A^{-1} = \frac{1-e}{1+e} = 0{,}91 \Rightarrow \frac{v_P}{v_A} = \frac{1}{r_P r_A^{-1}} = 1{,}10$

10.



- Indicate con r_1 e con r_2 rispettivamente le distanze del pianeta Y dalla propria stella al perielio e all'afelio, si ha che $d_{YS} = \frac{r_1 + r_2}{2}$ (semiasse maggiore) e $d_{XS} = r_2$. Per la III legge di Keplero risulta:

$$\frac{d_{XS}^3}{T_X^2} = \frac{d_{YS}^3}{T_Y^2} \Rightarrow \frac{r_2^3}{T_X^2} = \frac{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^3}{\left(\frac{T_X}{2}\right)^2} \Rightarrow r_2^3 = \frac{(r_1 + r_2)^3}{2} \Rightarrow r_1 = \left(\sqrt[3]{2} - 1\right) r_2 \approx 50Gm.$$

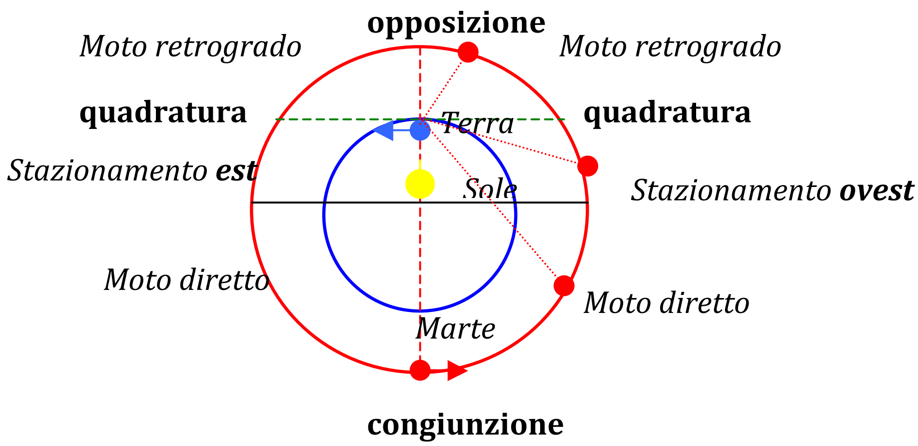
- Per calcolare la velocità del pianeta nei due punti dati ci serviamo della II legge di Keplero, riferita all'intero periodo e ad un intervallo di tempo "piccolo" intorno al passaggio del pianeta dai due punti dati:

$$\frac{A}{T_Y} = \frac{\pi \frac{r_1 + r_2}{2}\sqrt{r_1 r_2}}{T_Y} = \frac{r_i \cdot r_i \Delta\theta}{2\Delta t} = \frac{r_i v_i}{2} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{\pi(r_1 + r_2)\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 T_Y} \approx 5{,}0 \cdot 10^4 \frac{m}{s} \\ v_2 = \frac{\pi(r_1 + r_2)\sqrt{r_1 r_2}}{r_2 T_Y} \approx 1{,}3 \cdot 10^4 \frac{m}{s} \end{cases}.$$

Approfondimento I: Astronomia e Divina Commedia

" Da quel dì che fu detto "Ave"
al parto in che mia madre, ch'è or santa,
s'alleviò di me ond'era grave,
al suo Leon cinquecento cinquanta
e trenta fiate venne questo foco
a rinfiammarsi sotto la sua pianta.

Questi versi tratti dal canto XVI del Paradiso ci danno la possibilità di fare alcune considerazioni sul modello d'Universo al tempo di Dante Alighieri.
Se associamo a "questo foco" il pianeta Marte, ed a "quel dì che fu detto "Ave"" il giorno dell'Annunciazione (25 marzo), è possibile risalire alla data di nascita di Cacciaguida, trisavolo del poeta, attraverso il conteggio del numero di passaggi di Marte dalla costellazione del Leone ("cinquecento cinquanta e trenta fiate").
I calcoli da effettuare, sulla base della concezione moderna del modello d'Universo, sono molto semplici: per risalire all'anno di nascita di Cacciaguida è sufficiente moltiplicare il numero di passaggi di Marte dalla costellazione del Leone (580) per il suo periodo (686) giorni, e dividere per il numero di giorni equivalente all'anno terrestre (365). Di conseguenza, " da quel dì che fu detto "Ave" alla nascita di Cacciaguida sono trascorsi circa $\frac{580 \times 686}{365} = 1090$ anni.
Il modello Tolemaico d'Universo accettato al tempo di Dante rende i calcoli un po' più laboriosi, dovendo riferire tutto alla Terra, ritenuta il "centro" dell'Universo. Per questo scopo introduciamo il concetto di *periodo sinodico*, con il quale s'intende l'intervallo di tempo necessario affinché il pianeta assuma successivamente la stessa posizione rispetto alla Terra. Per quanto riguarda Marte, il periodo sinodico è di 780 giorni. Il *periodo siderale*, invece, è il tempo impiegato dal pianeta per compiere la propria rivoluzione intorno al Sole. Osservato dalla Terra, un pianeta assume quattro posizioni fondamentali: *congiunzione*, *opposizione*, e *quadratura* (2 volte, l'angolo tra Marte, Terra e Sole è retto), come si vede dal seguente schema.



Iniziamo la descrizione del moto di Marte a partire dalla *congiunzione* con il Sole. In questa posizione il Sole si frappone tra la Terra e Marte rendendo invisibile quest'ultimo. Successivamente si muove di moto diretto verso occidente, raggiungendo il punto di stazionamento: qui si ha l'*inversione del moto* e prosegue in moto retrogrado passando attraverso l'*opposizione*, dove la distanza angolare di Marte dal Sole raggiunge i 180° a partire dalla congiunzione ed ha il massimo splendore, fino al punto di stazionamento ad est, dove riprende il suo moto diretto fino al raggiungimento di nuovo della congiunzione. Calcoliamo il periodo siderale di Marte (*P*) in funzione dell'anno siderale (*A*) e del periodo sinodico di Marte (*S*), utilizzando la relazione tra le velocità angolari della Terra e di Marte, ricordando che quella della Terra è maggiore di quella di Marte essendo quest'ultimo un pianeta esterno.

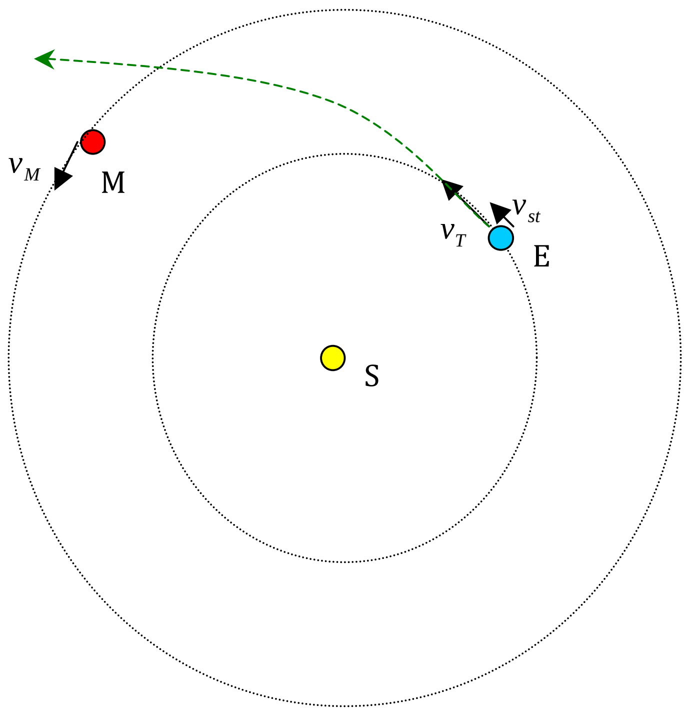
$$\frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{A} - \frac{2\pi}{S} \Rightarrow P = \frac{AS}{S-A} = \frac{365 \times 780}{780 - 365} = 686 \text{ giorni,}$$

da cui segue il semplice calcolo presentato in precedenza:

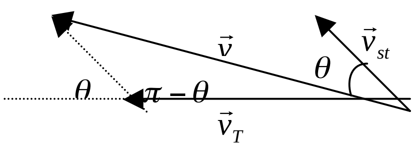
$$\frac{580 \times 686}{365} = 1090 \text{ anni.}$$

Approfondimento (II): l'effetto fionda(o flyby gravitazionale)

Riprendiamo un tema oggetto di un problema assegnato alle Olimpiadi internazionali di Fisica tenutesi a Portoroz, nell'allora Jugoslavia, nel 1985. Riassumendone il testo, il problema consiste nella discussione di uno schema di lancio in cui si vuol calcolare la velocità da imprimere ad una sonda per sfuggire all'attrazione del Sole, sfruttando il cosiddetto "effetto fionda" o flyby gravitazionale. Tale effetto consiste nello sfruttare il campo gravitazionale di un pianeta per una modifica della traiettoria al fine di creare le condizioni per uscire dal sistema solare.
Nel caso in cui il pianeta in questione è Marte, calcoliamo la minima velocità di lancio rispetto alla Terra che consenta alla sonda di uscire dal sistema solare.
La situazione è illustrata dalla seguente figura:



Iniziamo il nostro studio considerando il caso in cui si voglia uscire dal sistema solare senza sfruttare l'effetto fionda. In questa situazione la velocità della sonda rispetto alla terra, $\vec{v}_{st}$, dovrà essere tale che $\frac{1}{2}m(\vec{v}_T+\vec{v}_{st})^2-\frac{GM_S m}{d_{TS}}=E\geq 0$. Osserviamo come nell'espressione dell'energia cinetica compare la velocità della sonda rispetto al sole, $\vec{v}=\vec{v}_T+\vec{v}_{st}$. Applicando il teorema del coseno al triangolo delle velocità:



$$(\vec{v})^2=(\vec{v}_T+\vec{v}_{st})^2=v_T^2+v_{st}^2-2v_T v_{st}\cos(\pi-\theta)=v_T^2+v_{st}^2+2v_T v_{st}\cos\theta.$$

Sostituendo nell'espressione dell'energia uguagliata a zero, otteniamo, ricordando che dalla seconda legge della dinamica segue

$$M_T\frac{v_T^2}{d_{TS}}=\frac{GM_S M_T}{d_{TS}^2}\Rightarrow\frac{GM_S}{d_{TS}}=v_T^2,$$

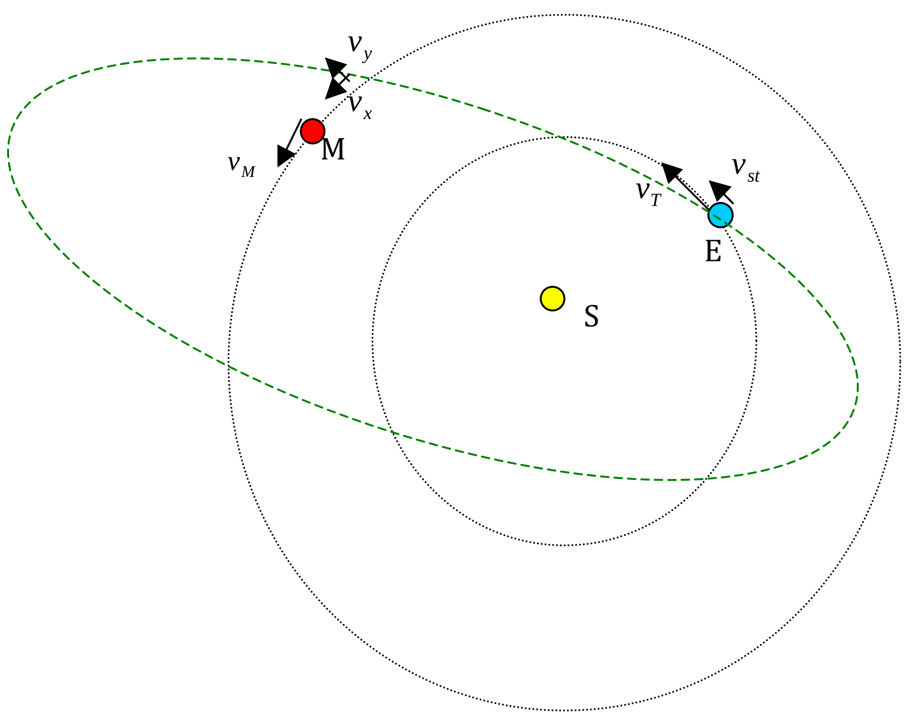
$$v_{st}^2+2v_{st}v_T\cos\theta-v_T^2=0,$$

$$v_{st} = -v_T \cos\theta \pm \sqrt{v_T^2 \cos^2\theta + v_T^2} = v_T\left(\sqrt{1+\cos^2\theta} - \cos\theta\right) = \frac{v_T}{\sqrt{1+\cos^2\theta} + \cos\theta}$$

Il valore minimo si otterrà quando il denominatore è massimo, e ciò si verifica quando il lancio avviene nella direzione del moto istantaneo della Terra attorno al Sole, ovvero per $\theta = 0$, quindi:

$$v_{st} = \frac{v_T}{\sqrt{2}+1} = v_T(\sqrt{2}-1).$$

Con la velocità trovata l'orbita di fuga dal sistema solare è una parabola. Adesso "abbassiamo" la velocità in modo tale che l'orbita ellittica della sonda intorno al sole intersechi l'orbita di Marte (se abbassiamo troppo la velocità, questo non succede).
Si determinano le componenti della velocità della sonda rispetto al sole quando questa incontra l'orbita di Marte applicando i Principi di conservazione dell'energia e del momento angolare. Per questo scopo siano v_x la componente tangente all'orbita di Marte e v_y la componente radiale. La situazione è rappresentata dalla figura sotto.



L'applicazione dei principi di conservazione porta ai seguenti risultati:

$$mv_x d_{MS} = m(v_T + v_{st})d_{TS} \Rightarrow v_x = \frac{v_T + v_{st}}{d_{MS}} d_{TS} = \frac{2}{3}(v_T + v_{st})$$

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) - \frac{GM_S m}{d_{MS}} = \frac{1}{2}m\left(v_T + v_{st}\right)^2 - \frac{GM_S m}{d_{TS}}$$

Ricordando che $\frac{GM_S}{d_{TS}} = v_T^2$ e che, quindi, $\frac{GM_S}{d_{MS}} = \frac{GM_S}{d_{TS}} \cdot \frac{d_{TS}}{d_{MS}} = \frac{2}{3}v_T^2$, allora

$$v_x = \frac{2}{3}\left(v_T + v_{st}\right)$$

$$v_y = \sqrt{2 \cdot (\frac{1}{2}(v_T + v_{st})^2 - v_T^2 + \frac{2}{3}v_T^2 - \frac{4}{9}(v_T + v_{st})^2)} = \sqrt{\frac{5}{9}(v_T + v_{st})^2 - \frac{2}{3}v_T^2}.$$

Queste sono le componenti della velocità della sonda rispetto al Sole, quando questa incontra l'orbita di Marte. Determiniamo quindi v_{st} sfruttando il campo gravitazionale di Marte. Poiché la massa della sonda è piccola (molto) rispetto a quella di Marte possiamo ragionevolmente trascurare la mutua interazione tra questi due corpi. Per il principio di conservazione dell'energia meccanica, la velocità della sonda rispetto a Marte quando entra nel suo campo gravitazionale, $\vec{v}_{sm}$, è uguale a quella quando esce. In componenti:

$$v_{smx} = v_x - v_M$$
$$v_{smy} = v_y$$

dove con $\vec{v}_M$ abbiamo indicato la velocità di Marte rispetto al Sole. Per scrivere l'espressione della velocità in uscita dal campo gravitazionale di Marte si ragiona esattamente come nel caso della determinazione della velocità v_{st} di uscita dal campo gravitazionale terrestre,

$v_{st} = \frac{v_T}{\sqrt{2}+1} = v_T(\sqrt{2}-1)$, che nel caso di velocità rispetto a Marte si scrive

$$\sqrt{v_{smx}^2 + v_{smy}^2} = v_M\left(\sqrt{2}-1\right),$$

essendo le componenti della velocità rispetto a Marte in uscita uguali a quelle in entrata.
Sostituendo le espressioni di quest'ultime

$$v_{smx} = v_x - v_M$$
$$v_{smy} = v_y$$

si ottiene

$$(v_x - v_M)^2 + v_y^2 = v_M^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2.$$

La velocità di lancio rispetto alla Terra cercata, v_{st}, risulta dalla sostituzione delle

$$v_x = \frac{2}{3}(v_T + v_{st})$$
$$v_y = \sqrt{\frac{5}{9}(v_T + v_{st})^2 - \frac{2}{3}v_T^2}$$

nella $(v_x - v_M)^2 + v_y^2 = v_M^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2$. Ricordando che $v_T = \frac{2\pi d_{TS}}{T_T}$ e $v_M = \frac{2\pi d_{MS}}{T_M}$, e che, per la terza legge di Keplero $\frac{d_{TS}^3}{T_T^2} = \frac{d_{MS}^3}{T_M^2} \Rightarrow \frac{v_T^2}{v_M^2} = \frac{d_{TS}^2}{T_T^2}\frac{T_M^2}{d_{MS}^2} = \frac{d_{MS}}{d_{TS}} \Rightarrow v_M = \sqrt{\frac{2}{3}}v_T$.

E' importante osservare che, nello schema raffigurato, quando la sonda interseca l'orbita di Marte, questo è già "passato". E' un caso? Cosa succederebbe se l'intersezione con l'orbita anticipasse il passaggio di Marte?

Approfondimento (III): campo, flusso e teorema di Gauss

Nella legge di gravitazione universale, è possibile isolare una parte che può essere considerata come una forza sull'unità di massa. Definiamo *campo* questa nuova grandezza fisica vettoriale. In fisica moderna i campi sostituiscono di fatto il concetto di azione a distanza, conciliando la finitezza della velocità della luce con la validità della terza legge di Newton non potendo considerare la reazione istantanea, proprio perché la velocità della luce costituisce un limite fisico insuperabile.
L'espressione del campo gravitazionale è dunque:

$$g = -\frac{GM}{r^2}.$$

La direzione ed il verso sono ovviamente quelli della forza esercitata sulla massa *m* quando questa si trova *nel campo* a distanza *r* dalla sorgente del campo:

$$F = -\frac{GMm}{r^2}.$$

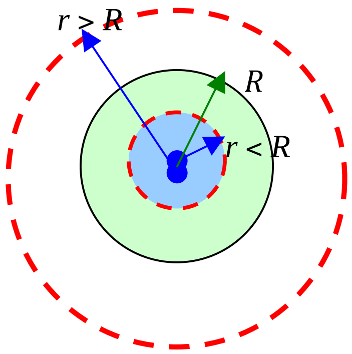
In prossimità della superficie terrestre il campo gravitazionale vale proprio

$$g = -\frac{GM_T}{R_T^2} = -9,8\frac{N}{kg} = -9,8ms^{-2}.$$

L'indipendenza dalla massa, rende il campo un concetto più generale di quello di forza. Proviamo a generalizzare ulteriormente il concetto di campo, prendendo spunto dal termine che esprime la dipendenza dall'inverso del quadrato della distanza. Se moltiplichiamo l'espressione del campo per l'area di una sfera di raggio uguale alla distanza stessa, si ottiene una nuova grandezza fisica che dipende solo dalla massa M: il *flusso* del campo gravitazionale

$$\Phi_g = -4\pi GM,$$

dove il meno rende conto della natura attrattiva del campo gravitazionale.
L'ultima equazione porta il nome di *Teorema di Gauss* e rappresenta un risultato formidabile nel calcolo di campi di forze di varia natura.
Con il teorema di Gauss è possibile calcolare il campo gravitazionale prodotto dalla Terra a varie distanze dal suo centro.

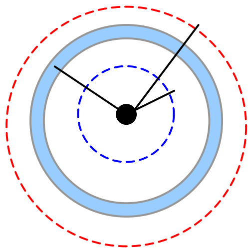


- Indicato con R il raggio della Terra e con $\rho = \frac{M}{\frac{4\pi R^3}{3}}$ la sua densità, in un punto interno a distanza r dal centro, l'intensità del campo si trova applicando il teorema di Gauss $\Phi_g = -4\pi Gm$ con superficie gaussiana la sfera interna di raggio r che racchiude la massa $m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$: $\Phi_g = g_r 4\pi r^2$. D'altro canto, per il teorema di Gauss, $\Phi_g = -4\pi G\frac{4}{3}\pi r^3\rho = -4\pi G\frac{4}{3}\pi r^3\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = -4\pi\frac{GMr^3}{R^3}$, per cui $g_r 4\pi r^2 = -4\pi\frac{GMr^3}{R^3} \Rightarrow g_r = -\frac{GM}{R^3}r$. In un punto esterno, presa come superficie gaussiana sempre la sfera di raggio $r > R$, considerazioni analoghe alle precedenti permettono di concludere che $g_r 4\pi r^2 = -4\pi G\frac{4}{3}\pi r^3\rho = -4\pi G\frac{4}{3}\pi R^3\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow g_r = -\frac{GM}{r^2}$. In definitiva il campo gravitazionale a distanza qualsiasi dal centro della terra è espresso dalle relazioni:

$$g_r = \begin{cases} -\frac{GM}{R^3}r & r < R \\ -\frac{GM}{r^2} & r > R \end{cases}.$$

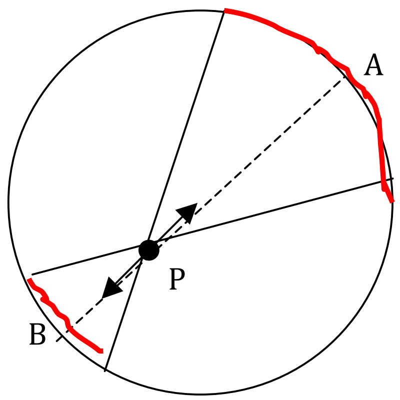
Il pianeta cavo

Si usi il teorema di Gauss per dedurre le equazioni per il campo gravitazionale all'interno ed all'esterno di uno strato sferico di raggio R di massa uniforme m (E' il caso del *pianeta cavo* di cui Newton parla nei *Principia*).



- Se $r < R$ allora $g_r 4\pi r^2 = 4\pi G \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 0 \Rightarrow g_r = 0$, poiché all'interno della sfera non c'è massa. Se $r > R$ allora $g_r 4\pi r^2 = -4\pi G m \Rightarrow g_r = -\frac{Gm}{r^2}$.

E' importante osservare che in un punto esterno alla superficie sferica il campo è equivalente a quello prodotto da una massa concentrata tutta nel centro della sfera.
Quando Newton, nei "Principia", afferma che *la forza gravitazionale agente su un corpo posto all'interno di un pianeta cavo è zero*, fornisce una dimostrazione di questo fatto con argomentazioni di natura geometrica.



Indichiamo con ρ la densità superficiale di massa del pianeta. Se poniamo una massa di prova *m* all'interno del pianeta, questa interagisce gravitazionalmente con la massa del pianeta disposta uniformemente sulle basi A e B del doppio cono come in figura. Siano $PB := d;\quad PA := nd$ le distanze della massa dalla superficie. Le forze con cui le basi interagiscono sono quindi: $F_A = \frac{G\rho Am}{n^2 d^2}$ e $F_B = \frac{G\rho Bm}{d^2}$. Per la similitudine dei coni si ha che $A = n^2 B$ e quindi $F_B = \frac{G\rho Bm}{d^2} = F_A$. Il verso opposto delle forze dimostra la tesi.

Problema

Si calcoli il valore del campo gravitazionale prodotto dalla sfera cava nel punto *P* distante *x* dal centro della sfera.