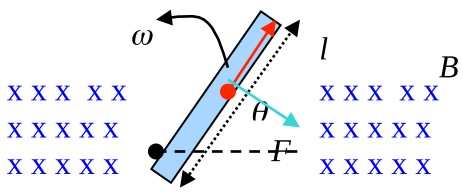
Induzione Elettromagnetica

Problemi

1. *Si trovino l'energia magnetica, l'energia elettrica e l'energia totale in un volume di spazio di 25 l contenente un campo magnetico di 2T ed un campo elettrico di* $10^4\ V/m$. *In un'onda elettromagnetica piana, come un'onda luminosa, il modulo del campo elettrico e quello del campo magnetico sono legati dalla relazione* $E = cB$, *dove* $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ *è la velocità della luce. Si dimostri che, in questo caso, la densità d'energia elettrica e quella magnetica sono uguali.*

- $U_B = \dfrac{B^2}{2\mu_0} \Rightarrow E_m = U_B \cdot vol = 39{,}8 \cdot 10^3 J$; $U_E = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} \Rightarrow E_e = U_E \cdot vol = 11{,}1 \mu J$;
  $E_{tot} = E_m + E_e \approx E_m = 39{,}8 \cdot 10^3 J$.
- $\dfrac{U_B}{U_E} = \dfrac{B^2}{2\mu_0} \Big/ \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \dfrac{B^2}{\mu_0\varepsilon_0 E^2} = \dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0 c^2} = \dfrac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu_0\varepsilon_0} = 1 \Rightarrow U_B = U_E$.

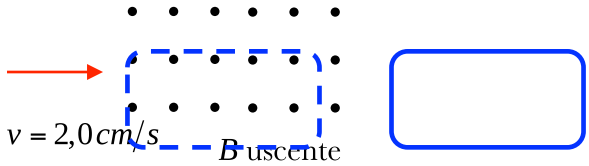
2. *Una sbarra conduttrice di lunghezza l ruota con velocità angolare costante* ω *attorno ad un suo estremo in un piano perpendicolare a un campo magnetico uniforme* $\vec{B}$, *come mostrato in figura. (a) Si trovi la forza magnetica che agisce su una carica posta a distanza r dal punto in cui la sbarra è imperniata e si dimostri che il campo elettrico in quel punto è dato dalla relazione* $E = B\omega r$. *(b) Si usi l'espressione* $V = E_{medio} l$ *per trovare la differenza di potenziale tra gli estremi della sbarra, dove* E_{medio} *è il campo elettrico medio nella sbarra. (Poiché il campo elettrico varia linearmente tra 0 e* $B\omega l$, *il valor medio è la metà del valor massimo.) (c) Si tracci una qualsiasi retta radiale nel piano, a partire dalla quale si misuri* $\theta = \omega t$. *Si calcoli il flusso magnetico attraverso l'area della regione a forma di fetta di torta tra la retta di riferimento e la sbarra, e si dimostri che l'espressione* $\varepsilon = \dfrac{B\omega l^2}{2}$ *segue dall'applicazione della legge di Faraday-Neumann-Lenz a quest'area.*



- (a) Durante la rotazione aumenta l'area racchiusa dalla sbarretta e dalla retta di riferimento (tratteggiata in figura), quindi la corrente indotta sarà tale da produrre un campo magnetico (*uscente*) in opposizione a quello presente nella regione piana (che per ipotesi è *entrante*). La carica dovrà quindi muoversi nella direzione della sbarra nel verso che la *allontana* dal perno. Una carica (positiva) posta a distanza *r* dal perno, sente una forza dovuta al campo magnetico diretta lungo la sbarra verso il perno, dal momento che la velocità della sbarra (su cui sta la carica) ruota in un piano che si mantiene perpendicolare al campo magnetico:
  $F = qvB = q\omega r B \Rightarrow E = \dfrac{F}{q} = B\omega r$.
- (b) $V = E_{medio} l = \dfrac{B\omega l^2}{2}$ è la differenza di potenziale tra gli estremi della sbarra.
- (c) Dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz segue
  $\varepsilon_{ind} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{Bl^2\theta}{2}\right) = -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{Bl^2\omega t}{2}\right) = -\dfrac{Bl^2\omega}{2}$.

3. *Una spira rettangolare coi lati di 10 cm e 5,0 cm avente la resistenza di 1,5* Ω *viene tirata attraverso una regione di campo magnetico uniforme* $B = 0{,}85T$ *uscente, con una velocità costante* $v = 2{,}0\,cm/s$.

L'estremità anteriore della spira entra nella regione con campo magnetico all'istante $t = 0$. *(a) Si trovi l'andamento del flusso magnetico attraverso la spira in funzione del tempo e se ne tracci un grafico. (b) Si trovino gli andamenti della fem indotta e della corrente nella spira in funzione del tempo e se ne traccino i grafici. Si trascuri l'induttanza propria della spira e si estendano i grafici da 0 a 18s.*



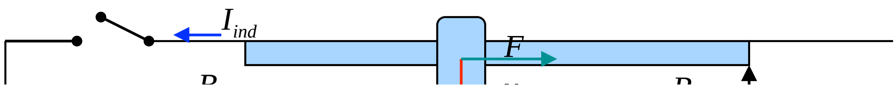
- (a) Il flusso del campo magnetico attraverso la spira è $\Phi_B = (5{,}0)vtB = 850(\mu Wb/s)t$.
- (b) La fem indotta è data dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz $\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -8{,}5V$ nei primi $\frac{10cm}{2cm/s} = 5s$, poi è zero nei successivi $5s$, infine $\varepsilon_{ind} = -\frac{d(-\Phi_B)}{dt} = +8{,}5V$ nei successivi $5s$.

	0-5s	5-10s	10-15s	15-18s
$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	-850 μV	0J	+850 μV	0J
$I = \frac{\varepsilon_{ind}}{R}$	-567 μA	0A	+567 μA	0A

4. *Una certa bobina ha l'induttanza propria L e la resistenza R. Se la corrente che percorre la bobina è 5,0A e aumenta di 10,0 A/s, la differenza di potenziale ai capi della bobina è 140 V. Se la corrente è 5,0 A e diminuisce di 10,0 A/s, la differenza di potenziale è 60 V. Si trovino induttanza e resistenza.*

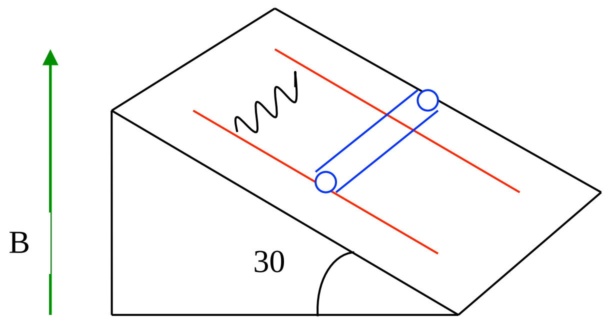
- $$\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = L\frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = L\frac{\Delta I_1}{\Delta t} + I_1 R \\ V_2 = L\frac{\Delta I_2}{\Delta t} + I_2 R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 140 = 10L + 5R \\ 60 = -10L + 5R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 20\Omega \\ L = 4H \end{cases}$$

5. *Una sbarra conduttrice di massa m è poggiata su due rotaie conduttrici perpendicolari ad un campo magnetico uniforme* $\vec{B}$. *La resistenza della sbarra e delle rotaie è trascurabile e non c'è attrito tra di esse. Con la sbarra ferma sulle rotaie si chiude l'interruttore all'istante* $t = 0$ *e la pila di fem* ε_0 *fornisce corrente al circuito. (a) Si trovi la corrente iniziale nel circuito e la forza magnetica iniziale che agisce sulla sbarra prima che essa cominci a muoversi. (b) se la sbarra si muove con la velocità v, c'è una fem indotta nel circuito che tende ad opporsi alla fem della pila. Si dimostri che la corrente I si ottiene dall'espressione* $\varepsilon_0 - Blv = IR$. *(c) Si trovi la forza che agisce sulla sbarra se essa si muove con la velocità v, e si scriva la seconda legge di Newton per la sbarra. (d) Ponendo* $\Delta v/\Delta t = 0$ *nell'equazione trovata in (c), si dimostri che alla fine la sbarra si muove con velocità data da* $v_f = \varepsilon_0/Bl$.

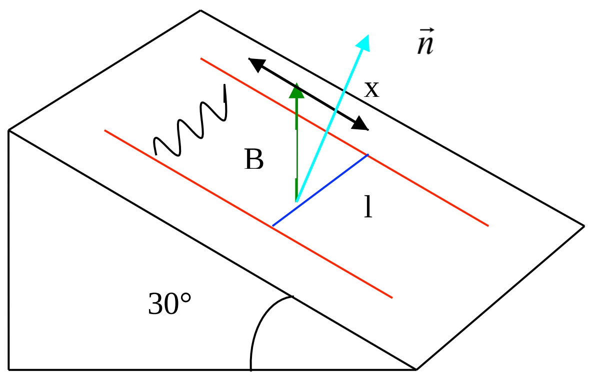


- (a) $I = \varepsilon_0 / R$; $F = IlB = Bl\varepsilon_0 / R$;
- (b) Se la sbarra si muove verso destra si ha un *aumento* del flusso magnetico. A questo aumento si oppone la corrente indotta circolando in verso opposto alla corrente continua, producendo un campo magnetico in verso *opposto* a quello uniforme. $\varepsilon_0 + \varepsilon_{ind} = IR \Rightarrow \varepsilon_0 - \frac{Blv\Delta t}{\Delta t} = IR \Rightarrow \varepsilon_0 - Blv = IR$. Osserviamo che se la sbarra si fosse mossa verso sinistra, allora avremmo avuto una diminuzione del flusso ed una conseguente circolazione della corrente indotta nel verso della corrente continua in modo da produrre un campo magnetico indotto rafforzante quello uniforme. In questo caso la legge di Kirchhoff avrebbe assunto la forma $\varepsilon_0 - \varepsilon_{ind} = IR \Rightarrow \varepsilon_0 + \frac{Blv\Delta t}{\Delta t} = IR \Rightarrow \varepsilon_0 + Blv = IR$.
- (c) Sostituendo nell'espressione della forza trovata al punto (a) la somma della fem della pila e della fem indotta otteniamo, dalla seconda legge di Newton: $m\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{Bl(\varepsilon_0 - Blv)}{R}$. Ponendo $\Delta v / \Delta t = 0$, condizione che esprime il moto a velocità costante, otteniamo che $\varepsilon_0 = Blv_f \Rightarrow v_f = \varepsilon_0 / Bl$.

6. *Una barretta metallica di massa 37 g, lunghezza 35 cm e resistenza trascurabile è in movimento a velocità costante su un piano inclinato di 30° sull'orizzontale, e scorre su due guide metalliche di resistenza e attrito trascurabili collegate con una resistenza da 12 Ω come in figura. Il tutto è immerso in un campo magnetico verticale di intensità 5 T. Calcolare la velocità a cui si muove la barretta.*

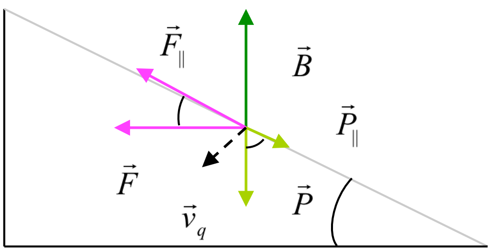


- La barretta forma un circuito con la resistenza e le guide metalliche. Determiniamo il flusso del campo magnetico:



la superficie attraversata dal campo magnetico è data dal rettangolo (sul piano inclinato) di area $A = x(t)l$. Il flusso è variabile, in quanto la lunghezza x varia con il tempo. In particolare si ha: $\Phi(t) = A\vec{B}\cdot\vec{n} = x(t)lB\cos(30°)$. Il potenziale, grandezza necessaria per l'applicazione della legge di Faraday-Neumann, viene determinato a partire dalla prima legge di Ohm: $V = iR$. Dunque, la legge di Faraday-Neumann $V = -\Phi'_B(t)$, nel nostro caso diventa:
$iR = V = -\Phi'_B(t) = -x'(t)lB\cos(30°) = -vlB\cos(30°)$. Prendendo il valore assoluto (ci interessa l'intensità della corrente), si trova il valore $i = \dfrac{vlB\cos(30°)}{R}$; su questa corrente agisce la forza di Lorentz.

Schema delle forze in gioco sulla singola carica q:



$\vec{F}, \vec{B}, \vec{P}$ rappresentano rispettivamente la forza di Lorentz, il campo magnetico ed il peso. La forza agente per tutta la barretta sarà: $F = ilB$. Considerando la componente parallela al piano inclinato, la seconda legge della dinamica applicata alla barretta diventa:
$m\vec{a} = \vec{P}_{\|} - \vec{F}_{\|}$. Poiché la velocità è costante, l'accelerazione è zero. Passando ai moduli si ottiene in definitiva:

$$\vec{F}_{\|} = F\cos(30°) = ilB\cos(30°)$$
$$\vec{P}_{\|} = mg\sin(30°)$$
$$0 = ma = \vec{P}_{\|} - \vec{F}_{\|}$$

quindi

$$P_{\|} = F_{\|}$$
$$mg\sin(30°) = ilB\cos(30°) = \frac{vlB\cos(30°)lb\cos(30°)}{R}$$

da cui

$$v = \frac{Rmg\sin(30°)}{(lB\cos(30°))^2}.$$

7. *Si calcoli la potenza dissipata in una spira quadrata di lato* $l = 14{,}0cm$ *costituita da un filo di rame di sezione* $S = 1{,}00mm^2$, *posta in un piano perpendicolare ad un campo magnetico uniforme di intensità che aumenta in modo costante di* $1{,}00\cdot 10^{-2}T$ *al secondo (la resistività del rame è* $\rho = 1{,}69\cdot 10^{-8}\Omega\cdot m$, *mentre la resistenza della spira è* $R = \rho\dfrac{4l}{S}$*).*

- Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz la fem indotta, responsabile della corrente circolante, è data dalla velocità di variazione del flusso del campo magnetico:
$$\varepsilon_{ind} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -l^2\frac{\Delta B}{\Delta T} = -0{,}196mV \Rightarrow P = \frac{\varepsilon_{ind}^2}{4l\rho/S} = 4{,}06\mu W.$$

8. *Un circuito ha un coefficiente di autoinduzione* $L = 35mH$. *L'intensità della corrente passa da* $I_1 = 0{,}10A$ *a* $I_2 = 0{,}50A$ *in un intervallo* $\Delta t = 0{,}2s$. *Calcolare il valore assoluto della f.e.m. media indotta nel circuito.*

   - $\Phi_B = LI \Rightarrow L\Delta I = \Delta\Phi_B \Rightarrow \varepsilon_{media} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{L\Delta I}{\Delta t} = 0{,}07V$.

9. *Un solenoide con 30 spire ha un diametro di 1,0 m; il suo asse è inizialmente in direzione del campo magnetico terrestre* $B_T = 50\mu T$. *L'asse viene quindi ruotato di 180° in 0,20s. Qual è la f.e.m. media indotta?*

   - $\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{(B_T NA\cos 180° - B_T NA\cos 0°)T\cdot m^2}{0{,}20s} = -\frac{-2\cdot 30\cdot 5\cdot 10^{-5}\cdot \pi(0{,}5)^2}{0{,}2} = 1{,}2\cdot 10^{-2}V$

10. *Un anello di diametro d, massa m, e resistenza R cade in un campo magnetico verticale mantenendo il suo piano orizzontale. Si calcoli la velocità limite dell'anello se il campo magnetico varia con l'altezza in base alla legge* $B = B_0(1+\alpha h)$.
    - Al raggiungimento della velocità limite la variazione di energia potenziale gravitazionale nell'unità di tempo viene dissipata sotto forma di potenza termica (effetto Joule) per effetto della corrente circolante indotta dalla variazione del flusso del campo magnetico:

      $$\begin{cases} mg(-\Delta h)/\Delta t = \varepsilon_i I \\ I = \varepsilon_i/R \end{cases} \Rightarrow -mgv = \left(-\frac{B_0\alpha(-\Delta h)\left(\pi d^2/4\right)}{\Delta t}\right)^2 \Big/ R \Rightarrow v = \frac{16mgR}{\left(\pi B_0\alpha\right)^2 d^4}$$

11. *Si calcoli l'induttanza di un solenoide di lunghezza l costituito da N spire di area S.*
    - $B = \mu_0 \frac{N}{l} I$, $\Phi_m = NSB = \mu_0 \frac{N^2}{l} SI$, di conseguenza $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$.