

CAPITOLO 16

IL CAMPO MAGNETICO

16.1 Fenomeni magnetici

I fenomeni magnetici erano noti ai greci 2000 anni fa.

Nel 1269 **Pierre de Maricourt** dispose un ago su un magnete naturale di forma sferica in varie posizioni e segnò le direzioni assunte dall'ago: le linee segnate circondavano il magnete passando per due punti diametralmente opposti; in analogia con i meridiani terrestri chiamò **poli** questi due punti. Ogni magnete ha due poli: nord e sud. Poli dello stesso nome si respingono, poli di nome diverso si attraggono.

Nel 1600 **Gilbert** scoprì il **magnetismo terrestre** osservando l'orientazione dell'ago di una bussola in direzioni definite. Il polo nord geografico è, quindi, un polo sud magnetico e il polo sud geografico è un polo nord magnetico.

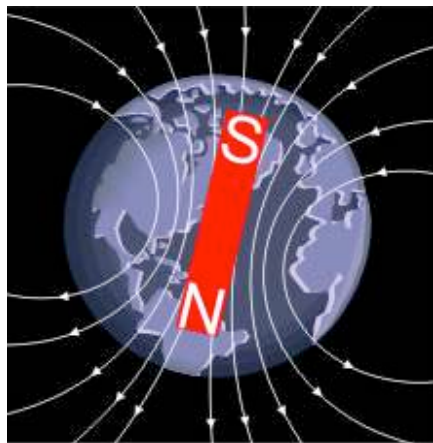


Immagine tratta dal sito "meteoweb.eu"

Intorno al 1750 **Mitchell** (e successivamente **Coulomb**) dimostrò che l'attrazione e la repulsione dei poli di due magneti sono inversamente proporzionali al quadrato della distanza dai poli. A differenza delle cariche elettriche, che si trovano anche isolate, i poli magnetici si presentano sempre a coppie.

16.2 Elettricità e magnetismo: l'esperimento di Oersted e gli studi di Ampère

Il collegamento tra elettricità e magnetismo fu scoperto solo nel XIX secolo, quando **Oersted** scoprì l'influenza della corrente sull'orientazione dell'ago di una bussola.

L'immagine è tratta dal sito www.fisicamente.net

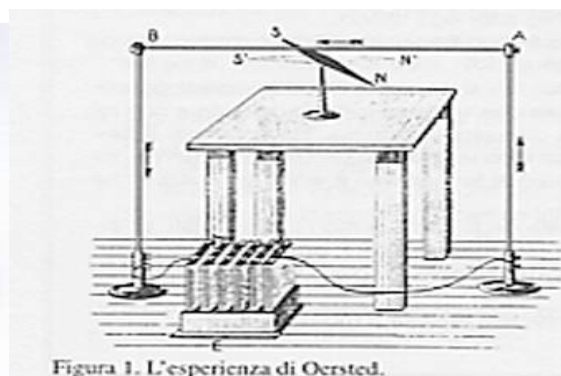


Figura 1. L'esperimento di Oersted.

In seguito alla sua scoperta Oersted cercò di supportare, con delle evidenze sperimentali, le idee della *Naturphilosophie* tedesca, per la quale l'attività della natura era da ricondursi alla tensione tra le opposte polarità di un'unica forza fondamentale, *Urkraft*. Purtroppo per Oersted, questo lavoro non dette i frutti sperati. Si limitò a stabilire che le cause della deviazione dell'ago nelle vicinanze del filo percorso da corrente, da lui denominate *conflitto elettrico*, non potevano avere un'origine newtoniana in quanto era assente una qualsiasi forma di interazione lungo la congiungente due corpi.

Queste conclusioni non furono tuttavia convincenti per la scuola di Fisica-Matematica francese, che aveva in Laplace uno dei suoi più autorevoli esponenti. Il programma scientifico di Laplace condusse all'idealizzazione del concetto di *fluido* come modello idoneo a spiegare fenomeni elettrici, magnetici, e termici, in termini matematici sulla base delle leggi della meccanica. In particolare, per Laplace i fluidi elettrici si muovevano negli spazi intermolecolari ed erano in grado di spostarsi da un corpo a un altro, mentre i fluidi magnetici restavano confinati all'interno della materia magnetica, determinandone, con il loro movimento, la polarizzazione. Lo studio dei fenomeni magnetici in connessione con quelli elettrici, si sviluppò in due direzioni distinte e contrapposte, la cui sintesi ci permette, oggi, di interpretare rigorosamente questi fenomeni. I risultati raggiunti riassumono le linee di ricerca di due grandi scienziati dell'800: *Faraday* e *Ampère*. Ad Ampère si devono i termini *tensione elettrica* (quando i poli di una batteria sono scollegati) e *corrente elettrica* (quando i poli di una batteria sono collegati a un conduttore). Il suo programma di ricerca mette ordine distinguendo tra fenomeni elettrostatici, riconducibili alla legge di Coulomb, e fenomeni elettrodinamici, dovuti al moto di fluidi all'interno di un circuito, con la convenzione di attribuire alla corrente il verso del fluido che si muove dal polo positivo a quello negativo all'esterno della batteria, e da quello negativo a quello positivo all'interno della batteria. Lo studio del fenomeno della deviazione dell'ago magnetico, portano Ampère alla conclusione che questo si dispone *perpendicolarmente al filo, e alla congiungente il filo con il centro dell'ago magnetico*.

L'esperimento di Ampère e le intuizioni di Faraday

Osservando la rotazione di un ago magnetico, posto su un piano orizzontale attraversato da un lungo filo verticale percorso da corrente, si nota, dopo un'iniziale oscillazione dell'ago, il raggiungimento di un equilibrio: il momento della forza agente sul polo nord è quindi opposto a quello agente sul polo sud,

$$F_N r_N = F_S r_S.$$

Questa relazione vale indipendentemente dalla posizione del piano orizzontale in cui viene disposto inizialmente l'ago magnetico, e dalle dimensioni dell'ago stesso. Indicata con r la distanza del polo magnetico (punta dell'ago) dal filo, e con I la corrente circolante nel filo, la forza agente è direttamente proporzionale alla corrente circolante (raddoppiare la corrente equivale ad aggiungere un secondo filo) e inversamente proporzionale a r :

$$F = k \frac{I}{r}.$$

La costante di proporzionalità, oltre che dal mezzo in cui è condotto l'esperimento, dipende anche dalla capacità del magnete di interagire con la corrente circolante nel filo, un po' come la carica e

la massa nel caso elettrostatico e in quello gravitazionale: questa capacità è denominata *carica magnetica* q_m .

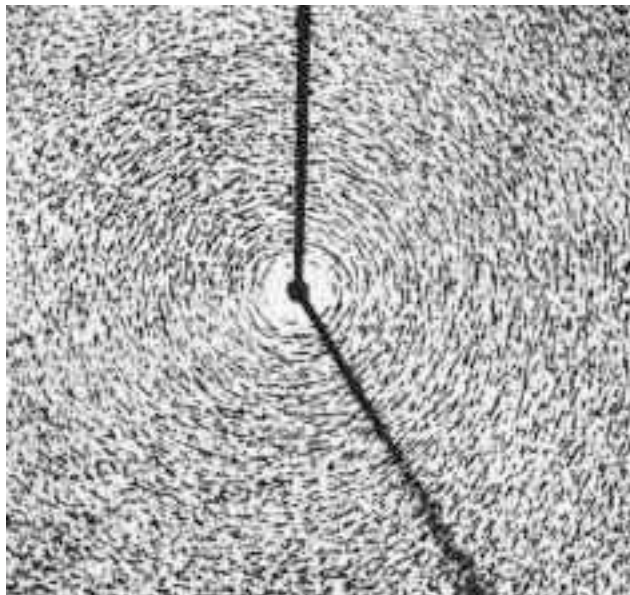
L'osservazione di come si dispone la limatura di ferro su un piano orizzontale per effetto della corrente circolante in un lungo filo verticale, ci permette di sintetizzare quanto appena visto, con le intuizioni dell'altro grande scienziato: *Faraday*. Quest'ultimo, non convinto della natura newtoniana della forza magnetica, sostiene l'esistenza di forze che *permeano* lo spazio intorno al filo percorso da corrente e all'ago magnetico. Com'è noto, queste idee hanno portato all'introduzione del concetto di *campo*.

In questo caso si ritiene responsabile dell'azione deviante il *campo magnetico*, le cui *linee di forza* sono rappresentate da circonferenze con centro nel punto in cui il filo attraversa il piano orizzontale, e lungo le quali si dispone la limatura di ferro. Tale disposizione è tanto più regolare, quanto più ci troviamo vicino al filo, coerentemente con l'espressione della forza trovata in precedenza. Il campo magnetico in un punto a distanza r dal filo è una grandezza fisica vettoriale, e si rappresenta con la notazione vettoriale \vec{B} , la cui direzione è perpendicolare al piano contenente il filo, e la congiungente il punto con il filo, ed il cui verso è dato dalla *regola della mano destra*, nel senso in cui questa si chiude, con il pollice concorde con il verso in cui circola la corrente nel filo.

L'intensità è diretta conseguenza della forza $F = k \frac{I}{r}$, è indipendente dalla carica magnetica (così come il campo elettrico è indipendente dalla carica di prova) e la sua espressione è

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Immagine tratta dal sito "mineman.eu"



16.3 Il teorema di Ampère

Calcoliamo adesso il lavoro compiuto per muovere un polo magnetico lungo una linea del campo ($\Delta \vec{l}$ è l'elemento di linea, l'arco infinitesimo $\Delta l = R \Delta \theta$):

$$W = \sum \vec{F} \cdot \Delta \vec{l} = \sum k \frac{I}{R} R \Delta \theta = 2\pi k I.$$

Ampère ripete questo calcolo facendo variare il cammino ogni volta, con la sola condizione che questo deve essere *chiuso*, e che i fili (anche più di uno!) percorsi da corrente devono essere *concatenati* con il cammino considerato. Ottiene così un risultato d'importanza fondamentale, una *legge della fisica*, nota come *teorema di Ampère*, e formulata non in termini di lavoro compiuto da una forza, bensì in quelli di *circuitazione di un campo lungo un cammino*.

$$\sum B_t \Delta l = \mu_0 I_{tot}.$$

Il calcolo dell'intensità del campo magnetico all'interno di un lungo solenoide percorso da corrente

Questo risultato permette di calcolare con facilità il campo magnetico in tutte le situazioni in cui questo presenta un elevato grado di simmetria. Nel caso del campo prodotto da un filo percorso da corrente, a distanza r dal filo stesso, il teorema di Ampère conduce al risultato noto:

$$\mu_0 I_{tot} = \sum B \Delta l = \sum B r \Delta \theta = B 2\pi r \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_{tot}}{2\pi r}.$$

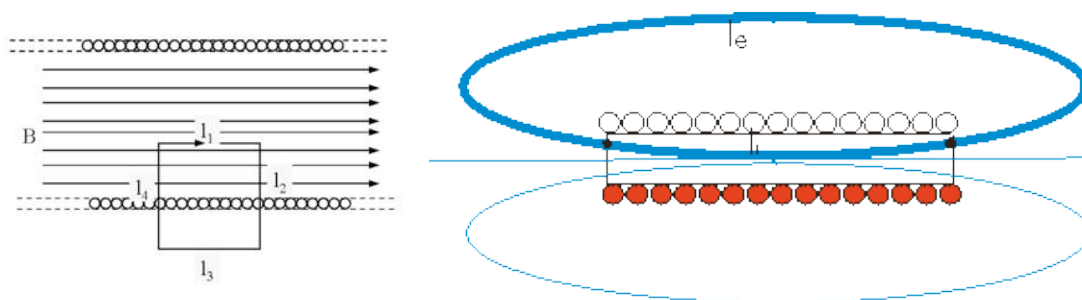
La costante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$ indica la cosiddetta *permeabilità magnetica del vuoto*.

Un'altra applicazione del teorema di Ampère consiste nel calcolo del campo magnetico prodotto all'interno di un **solenoid** (lungo filo avvolto a elica, percorso da corrente).

Immagine tratta dal sito “pegna.vialattea.net”



Osserviamo preliminarmente che le linee di campo sono identiche a quelle prodotte da un magnete a sbarra: se N è il numero di spire e se il quadrato di lato b è la curva scelta per l'applicazione del teorema di Ampère, L'immagine è tratta dal sito “it.wikibooks.org”.



nel tratto I_1 , risulta che $\sum B_t \Delta l = \mu_0 I_{tot} \Rightarrow bB = \frac{N}{l} b \mu_0 I \Rightarrow B = \mu_0 \left(\frac{N}{l} \right) I$. Nei tratti I_2, I_4 la componente del campo magnetico tangente alla curva è nulla, mentre nel tratto I_3 il campo

magnetico è di intensità trascurabile. Sopravvive solo il termine nel primo tratto considerato, quindi il campo all'interno del solenoide è

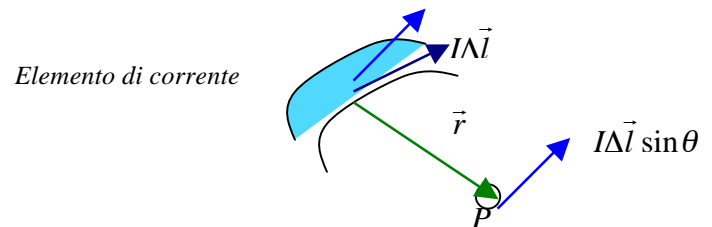
$$B = \mu_0 \left(\frac{N}{l} \right) I$$

Osserviamo come il campo magnetico all'interno del solenoide sia uniforme, in analogia con il campo elettrico tra le armature di un condensatore.

16.4 La legge di Biot-Savart

Nel caso di un filo di *forma* qualsiasi, le ricerche condotte al fine di valutare il campo magnetico a distanza r , hanno portato al risultato noto come *legge di Biot-Savart*, che esprime la proporzionalità diretta del campo con la componente perpendicolare del vettore elemento di corrente $I\Delta\vec{l}$, alla congiungente l'elemento con il punto P , e la proporzionalità inversa al quadrato della distanza r :

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta l \sin \theta}{r^2}.$$



Con la notazione vettoriale la legge di Biot-Savart si scrive:

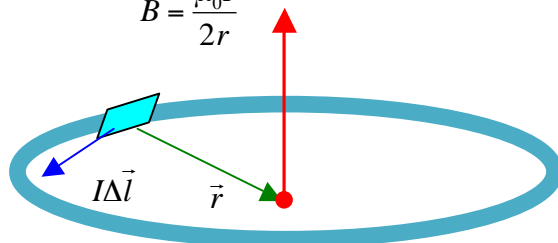
$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(\Delta \vec{l} \wedge \vec{r})}{r^3}.$$

Il calcolo del campo magnetico al centro di una spira percorsa da corrente

La relazione appena vista ci permette di calcolare il campo magnetico prodotto nel proprio centro da una spira circolare percorsa da corrente:

$$B = \sum \Delta B = \sum \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta l \sin 90^\circ}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sum \Delta l$$

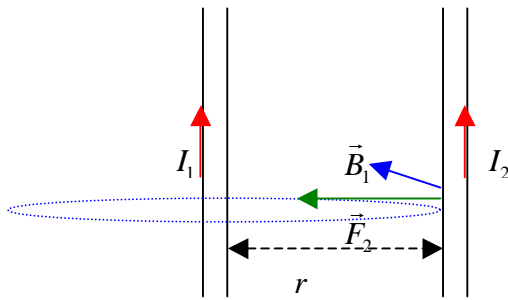
$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$



16.5 L'interazione tra due lunghi fili percorsi da corrente

Ampère riuscì a determinare l'azione tra due lunghi fili paralleli percorsi da corrente, in termini di

forza riferita all'unità di lunghezza del filo: $\frac{F_2}{\Delta l_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$.



La forza riferita all'unità di lunghezza $\frac{F_2}{\Delta l_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} = -\frac{F_1}{\Delta l_1}$ è attrattiva se le correnti sono equiverse, repulsiva altrimenti. Questo concetto è basilare per la definizione di **Ampère**: *nei fili posti alla distanza di 1 m circola la corrente di 1 A, se la forza riferita all'unità di lunghezza è $2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$.*

Nota l'espressione del campo magnetico a distanza r da un filo verticale percorso da corrente, la forza agente sul tratto di filo può essere espressa nei seguenti termini:

$$F_2 = \Delta l_2 \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} = B_1 I_2 \Delta l_2.$$

16.6 Dall'azione di un campo magnetico su un filo rettilineo percorso da corrente, a quella su una carica in moto

Se un campo magnetico uniforme forma un angolo θ con un filo verticale percorso da corrente, su un tratto di quest'ultimo agisce una forza

$$\Delta F = I(\Delta l)B \sin \theta.$$

Questo risultato può essere considerato come il modello per la determinazione della forza agente su una particella carica in moto in una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme. Sperimentalmente si è verificato che l'azione di un campo magnetico su una carica q in moto con velocità \vec{v} nello spazio fornisce i seguenti risultati per la forza magnetica:

- La forza è direttamente proporzionale al valore della carica q ;
- La forza è direttamente proporzionale al modulo della velocità v ;
- Modulo e direzione dipendono da \vec{B} e da \vec{v} . In particolare, se θ è l'angolo formato da \vec{B} e da \vec{v} , la forza è proporzionale a $\sin \theta$ ed ha, direzione perpendicolare al piano formato dai vettori campo magnetico e velocità e verso determinato dalla regola della mano destra, tenendo conto del segno della carica.

Questi risultati possono essere riassunti dalla relazione nota come **forza d Lorentz**

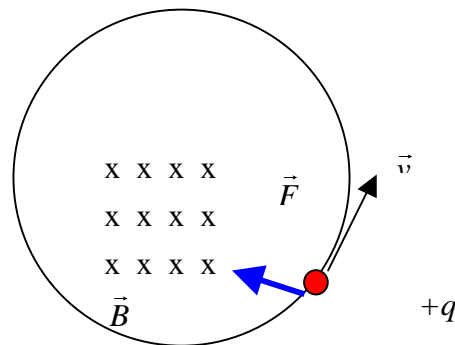
$$F = qvB \sin \theta.$$

L'unità del campo magnetico nel sistema internazionale è il **tesla (T)**: $1T = 1 \frac{N \cdot s}{C \cdot m} = 1 \frac{N}{A \cdot m}$.

Un'unità di misura più pratica, in virtù della sua minore grandezza, è il **gauss (G)**: $1T = 10^4 G$. Il campo magnetico terrestre, ad esempio, è dell'ordine di 1 G.

La forza magnetica agente su una particella in moto è sempre perpendicolare alla velocità, di conseguenza non compie lavoro: la forza magnetica cambia l'orientamento della velocità, ma non il suo modulo. Nel caso particolare in cui la velocità è perpendicolare ad un campo magnetico

uniforme, quest'ultimo fornisce la forza centripeta necessaria per conferire alla particella un moto circolare.



L'applicazione della seconda legge di Newton porta alle relazioni:

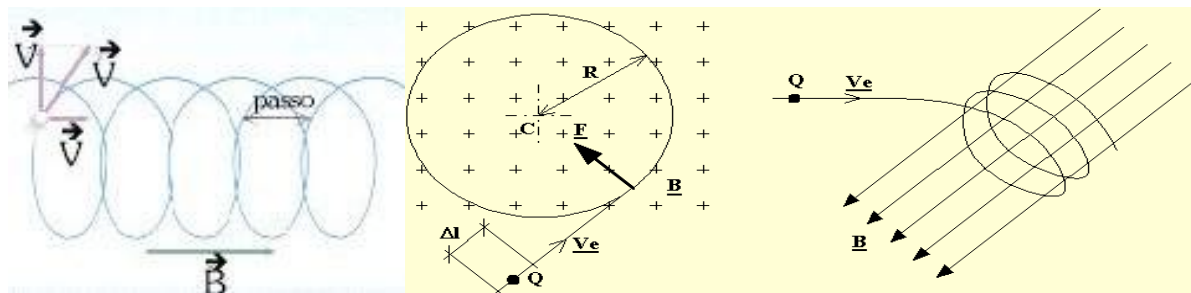
$$F = ma$$

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

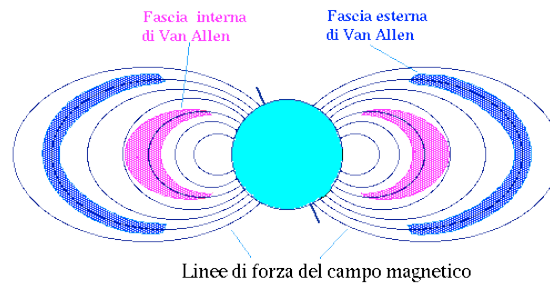
$$r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow v = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}.$$

Risulta evidente, dall'ultima relazione, che il periodo e la frequenza non dipendono né dal raggio dell'orbita, né dal modulo della velocità della particella. Il periodo è chiamato *periodo di ciclotrone*.

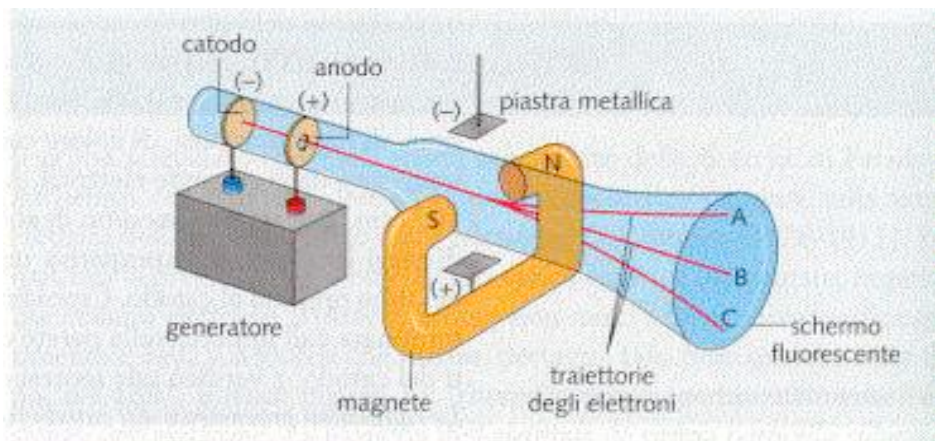
Se il campo magnetico e la velocità non sono perpendicolari, questa può essere scomposta in componenti parallela, v_{\parallel} , e perpendicolare, v_{\perp} a \vec{B} . La componente v_{\parallel} non è influenzata dal campo magnetico: la traiettoria della particella è, quindi, elicoidale (nell'immagine a destra si confrontano i casi esaminati).



Lo studio del moto di particelle cariche in campi magnetici non uniformi è, in generale, molto complicato. Una configurazione interessante è rappresentata dalla cosiddetta *bottiglia magnetica*, nella quale vengono confinate dense “nubi” di particelle cariche (*plasma*): tali particelle, per effetto della forma delle linee di campo magnetico, restano intrappolate e costrette a muoversi avanti e indietro (*effetto specchio*) in una limitata regione di spazio. Un esempio reale di questo tipo di configurazione è rappresentato dalle cosiddette *Fasce di Van Allen*, regioni ad alta densità di particelle cariche che circondano la terra; i protoni sono intrappolati nelle fasce interne, mentre gli elettroni in quelle esterne.

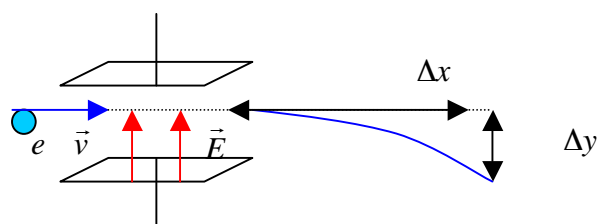


Campi elettrici e magnetici opportunamente orientati possono modellare la traiettoria di una particella carica e determinarne la velocità. Consideriamo il seguente dispositivo che funziona da *selettore di velocità*.



Un dispositivo simile a questo fu utilizzato da **Thomson** nel 1897 per dimostrare che i raggi catodici potevano essere deflessi da campi elettrici e magnetici, e quindi erano costituiti da particelle cariche. Gli elettroni emessi dal catodo (trovandosi questo ad un potenziale più basso rispetto all'anodo) giungono in prossimità di un condensatore con una velocità v , che vogliamo determinare, orizzontale. Il campo elettrico devierà la traiettoria degli elettroni nello stesso modo con cui il campo gravitazionale devia la traiettoria di un corpo lanciato da una certa altezza con una velocità iniziale orizzontale. Nella tabella che segue presentiamo un'interessante comparazione tra i due fenomeni.

Campo gravitazionale $\vec{F} = m\vec{g}$	Campo elettrico $\vec{F} = -e\vec{E}$
$\Delta x = vt$	$\Delta x = vt$
$\Delta y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}gt^2$	$\Delta y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{eE}{m}\right)t^2$
$\Delta y = \frac{1}{2}g\frac{\Delta x^2}{v^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g}{2\Delta y}} \cdot \Delta x$	$\Delta y = \frac{1}{2}\left(\frac{eE}{m}\right)\frac{\Delta x^2}{v^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{e}{m} \cdot \frac{E}{2\Delta y}} \cdot \Delta x$



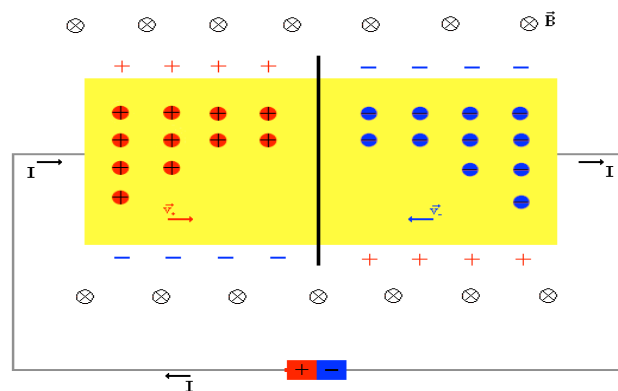
L'applicazione di un campo magnetico orientato nel verso uscente, e d'intensità opportuna, produce una forza magnetica che si oppone a quella elettrica; la carica seguirà, di conseguenza, una traiettoria rettilinea:

$$F_B = F_E \Rightarrow evB = eE \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

Da questa espressione della velocità è dunque possibile calcolare il rapporto $\frac{e}{m}$:

$$\frac{e}{m} = \frac{2\Delta y E}{\Delta x^2 B^2}.$$

L'effetto Hall



Nella figura sopra è riportato un dispositivo composto da una lastra metallica di forma rettangolare (il cosiddetto *elemento Hall*), di spessore trascurabile rispetto alla lunghezza degli altri due lati, collegata ad una batteria tramite un filo conduttore. Il dispositivo è posto in una regione permeata da un campo magnetico uniforme, diretto perpendicolarmente al piano contenente l'elemento Hall e il filo conduttore. Gli elettroni di conduzione della lastra metallica si muovono verso il polo positivo della batteria; durante il moto sentono l'azione della forza di Lorentz, dovuta alla presenza del campo magnetico, e deviano verso l'alto nell'elemento Hall (sempre in riferimento alla figura sopra). In questo modo si crea un addensamento di cariche negative in alto e, per la neutralità dell'elemento Hall, un conseguente addensamento di cariche positive in basso. Si genera così una tensione tra la parte alta e quella bassa dell'elemento Hall, detta *tensione di Hall*.

Le cariche in moto in moto e la loro velocità

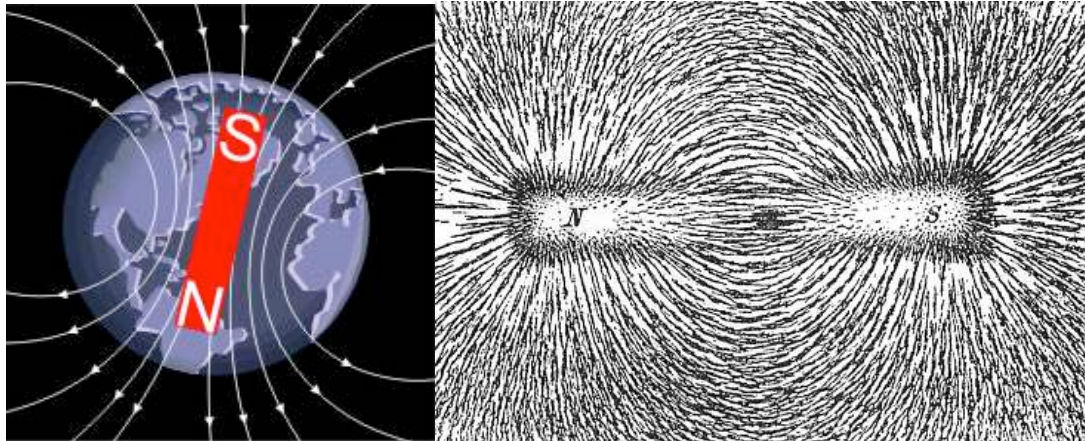
Tramite l'effetto Hall è possibile stabilire se a muoversi sono le cariche positive o quelle negative, e con quale velocità.

Cominciamo dicendo che la tensione Hall è conseguenza della creazione di un campo elettrico per effetto degli accumuli di carica, e che la forza di Lorentz agisce soltanto sulle cariche *in moto*. Sperimentalmente si osserva, dalla misura della tensione Hall, che a muoversi sono gli elettroni. Il campo elettrico E , responsabile della tensione Hall, ha la stessa direzione e verso opposto della forza di Lorentz. Sugli elettroni agiscono quindi due forze contrapposte: la forza di Lorentz evB e quella del campo elettrico eE . All'equilibrio, raggiunto dopo un tempo abbastanza lungo, si ha

$e\mathbf{v}B = eE$. Dalla misura della tensione Hall, V_{Hall} , e dalla relazione $V_{Hall} = Ed$, dove d è la lunghezza del lato la cui direzione coincide con quella del moto degli elettroni, si può calcolare la velocità degli elettroni: $v = \frac{V_{Hall}}{Bd}$.

16.7 Magnetismo terrestre e teorema di Gauss

La disposizione della limatura di ferro intorno ad una sbarretta magnetica ha permesso di formulare un modello interpretativo del magnetismo terrestre dovuto, si pensa, al movimento di materiale fuso contenuto nel nucleo del nostro pianeta, ed alla presenza di materiale magnetico nella crosta.



L'ago magnetico di una bussola è mosso dalla componente orizzontale del campo magnetico terrestre: ruota fino a disporsi nella direzione del cosiddetto *meridiano magnetico*. L'angolo locale tra il meridiano magnetico e quello geografico è detto *declinazione*.

Le linee del campo magnetico sono chiuse, poiché non esistono monopoli magnetici, di conseguenza il flusso del campo magnetico (statico) uscente da una superficie matematica arbitraria chiusa è zero. Questo risultato costituisce il cosiddetto **Teorema di Gauss per il campo magnetico statico**:

$$\Phi_B = 0.$$

Ampère e le ipotesi sulla natura del magnetismo

Lo scienziato francese fece un ragionamento, che oggi definiremmo “per simmetria”, che può essere riassunto in questi termini: se la deviazione dell'ago magnetico nelle vicinanze di un filo percorso da corrente, fosse stata scoperta prima della proprietà della bussola di orientarsi secondo il campo magnetico terrestre, avremmo pensato che i meridiani terrestri fossero percorsi da correnti elettriche, e la Terra fosse un'enorme batteria.

La conclusione a cui giunge Ampère, ipotizzando la Terra come un immenso magnete, è che i *fenomeni magnetici sono di natura elettrica, e la differenza tra i poli è dovuta alla loro posizione rispetto alle correnti che sono presenti nel materiale magnetico*.

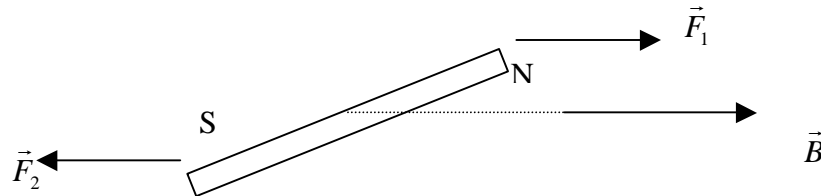
Quest'interpretazione del magnetismo supera quella coulombiana basata sull'esistenza di due fluidi, “australe e boreale”, e conduce al modello amperiano delle *correnti circolari microscopiche*, che lo riduce quindi a manifestazione di un fenomeno elettrodinamico.

In sostanza, in base al modello di Ampère, magnetizzare significa *orientare* le correnti microscopiche che costituiscono la materia. Le conoscenze moderne hanno permesso un

“aggiornamento” del modello delle correnti prodotte dalla duplice natura del moto degli elettroni: orbitale attorno al nucleo, responsabile del *momento magnetico orbitale*, e rotatorio attorno ad un asse, a cui si deve il cosiddetto *momento magnetico proprio*.

16.8 Momenti di forza agenti su magneti e su spire percorse da corrente

Un piccolo magnete permanente, posto in una regione in cui è presente un campo magnetico \vec{B} , tende a ruotare in modo che il suo polo nord si orienti nella direzione e nel verso di \vec{B} :



Analogamente al caso elettrostatico e a quello gravitazionale, definiamo opportunamente la forza agente sui poli della sbarretta magnetica; introduciamo il concetto di *carica (o massa) magnetica* q_m in modo che

$$\vec{F} = q_m \vec{B}.$$

Le forze \vec{F}_1 , \vec{F}_2 formano una coppia, quindi producono soltanto un momento responsabile della rotazione di un angolo θ della sbarretta magnetica, calcolato, per esempio, rispetto al polo sud:

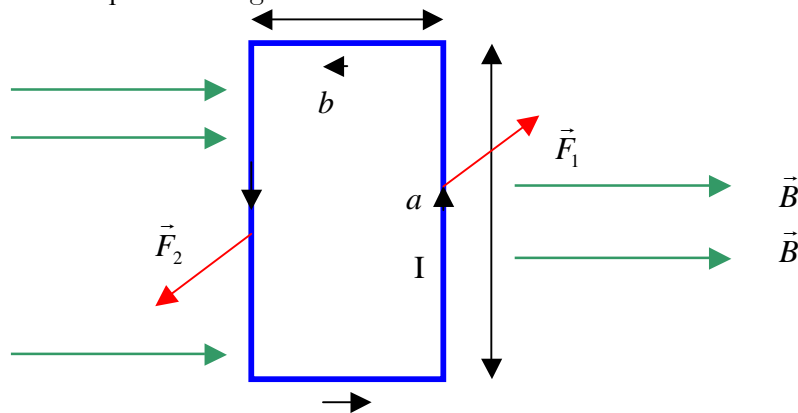
$$M = F_1 l \sin \theta = q_m B l \sin \theta.$$

Introducendo la grandezza *momento magnetico del magnete* $\vec{m} = q_m \vec{l}$, il momento della forza diventa

$$M = F_1 l \sin \theta = q_m B l \sin \theta = m B \sin \theta.$$

Il vettore \vec{l} va dal polo Sud al polo Nord della sbarretta magnetica. Il verso del momento della forza è tale da indurre l'allineamento del momento magnetico \vec{m} con il campo \vec{B} : in riferimento alla figura, il momento è nella direzione perpendicolare al piano contenente \vec{m} e \vec{B} nel verso entrante.

Una piccola spira percorsa da corrente posta in un campo magnetico esterno si comporta in modo molto simile ad un piccolo magnete a sbarra:



Sui lati corti non agiscono forze magnetiche, mentre sui lati lunghi le forze agenti, di modulo

$$F = IaB,$$

producono un momento (rispetto al centro della spira) pari a

$$M = F_1 \frac{b}{2} + F_2 \frac{b}{2} = Fb = IabB.$$

Il momento della forza è dunque proporzionale alla corrente circolante, al campo magnetico \vec{B} e all'area della spira, A . Definiamo la grandezza fisica *momento magnetico* della spira, la cui direzione è perpendicolare al piano della spira, il verso concorde con il pollice della mano destra quando questa si chiude nel senso di percorrenza della corrente circolante nella spira, e modulo uguale a

$$m = IA.$$

Se il circuito contiene più spire prende il nome di *bobina* ed il momento magnetico di una bobina di N spire è dato dall'espressione:

$$m = NIA.$$

Definita la grandezza momento magnetico, il momento agente sulla spira è, di conseguenza,

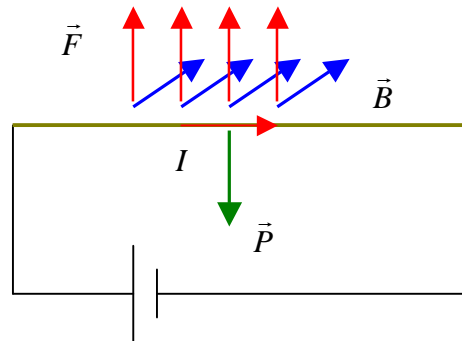
$$M = IAB \sin \theta = mB \sin \theta,$$

dove θ è l'angolo tra il vettore momento magnetico \vec{m} ed il vettore campo magnetico \vec{B} .

Come nel caso del magnete a sbarra, il momento di forza tende ad allineare il momento magnetico con la direzione del campo magnetico. Ciò non è casuale: l'origine del momento magnetico in un magnete a sbarra risiede nelle microscopiche spire di corrente dovute al moto degli elettroni negli atomi del magnete.

Problemi

1. Un pezzo di filo lungo 10,0cm ha la massa di 5,0g ed è collegato ad una sorgente di f.e.m. mediante conduttori leggeri e flessibili. Un campo magnetico \vec{B} di modulo 0,5T è orizzontale e perpendicolare al filo. Si trovi la corrente necessaria per mantenere il filo in sospensione, cioè la corrente per cui la forza magnetica è uguale al peso del filo.



Dalle relazioni $\begin{cases} F = IlB \\ P = mg \end{cases}$ segue $F = P \Rightarrow IlB = mg \Rightarrow I = \frac{mg}{lB} 0,98 A.$

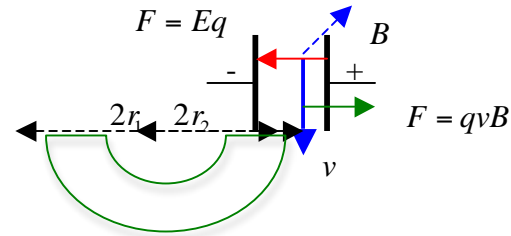
2. Particelle di carica q e massa m vengono accelerate da una differenza di potenziale ΔV ed entrano in una regione di campo magnetico \vec{B} perpendicolare alla loro velocità. Se r è il raggio della loro orbita circolare, si dimostri che

$$\frac{q}{m} = \frac{2\Delta V}{r^2 B^2}.$$

L'espressione dell'energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V$ e la seconda legge della dinamica

$$m \frac{v^2}{r} = qvB \Rightarrow v = \frac{q}{m} rB \text{ segue } \frac{1}{2} m \left(\frac{q}{m} rB \right)^2 = q\Delta V \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{2\Delta V}{r^2 B^2}.$$

3. Uno spettrografo di massa usa un selettore di velocità costituito da armature parallele distanti $2,0\text{mm}$, tra le quali è applicata una differenza di potenziale di 160V . Il campo magnetico tra le armature è $0,42\text{T}$. Il campo magnetico nello spettrografo di massa è $1,2\text{T}$. Si trovino (a) la velocità degli ioni che entrano nello spettrografo di massa e (b) la distanza che separa sulla lastra fotografica le tracce per gli atomi $^{238}\text{U}^+$ (massa $m_1 = 3,95 \cdot 10^{-25}\text{kg}$) e $^{235}\text{U}^+$ (massa $m_2 = 3,90 \cdot 10^{-25}\text{kg}$).



(a) la velocità è data imponendo la condizione di equilibrio tra la forza magnetica e quella elettrica tra le armature (effetto *raddrizzante* dei campi elettrico e magnetico):

$$\begin{cases} F = Eq = \frac{\Delta V}{d} q \Rightarrow \frac{\Delta V}{d} q = qvB_a \Rightarrow v = \frac{\Delta V}{dB_a} = 1,9 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \\ F = qvB_a \end{cases}$$

(b) Lo ione dell'atomo $^{238}\text{U}^+$ impatta la lastra a distanza $2r_1$ dalle armature da cui esce, mentre lo ione dell'atomo $^{235}\text{U}^+$ impatta a distanza $2r_2$. Il raggio delle semicirconferenze è $r_i = \frac{m_i v}{qB_s}$; quindi

$$\text{la distanza è data da } \Delta x = 2r_1 - 2r_2 = \frac{2v}{qB} (m_1 - m_2) = 9,9\text{mm}.$$

4. Un ciclotrone ha il campo magnetico di $2,0\text{T}$ ed è progettato per accelerare protoni fino a 20MeV . (a) Qual è la frequenza di ciclotrone? (b) Quale deve essere il minimo raggio del magnete affinché i protoni abbiano l'energia di 20MeV all'uscita? (c) Se la differenza di potenziale applicata alle D ha un valore massimo di 50kV , quante orbite devono compiere i protoni prima di uscire con l'energia di 20MeV ?

(a) La frequenza di ciclotrone è data dalla seconda legge di Newton

$$m \frac{v^2}{r} = qvB \Rightarrow v = \frac{q}{m} rB \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} = 1,92 \cdot 10^8 \text{ rad/s}.$$

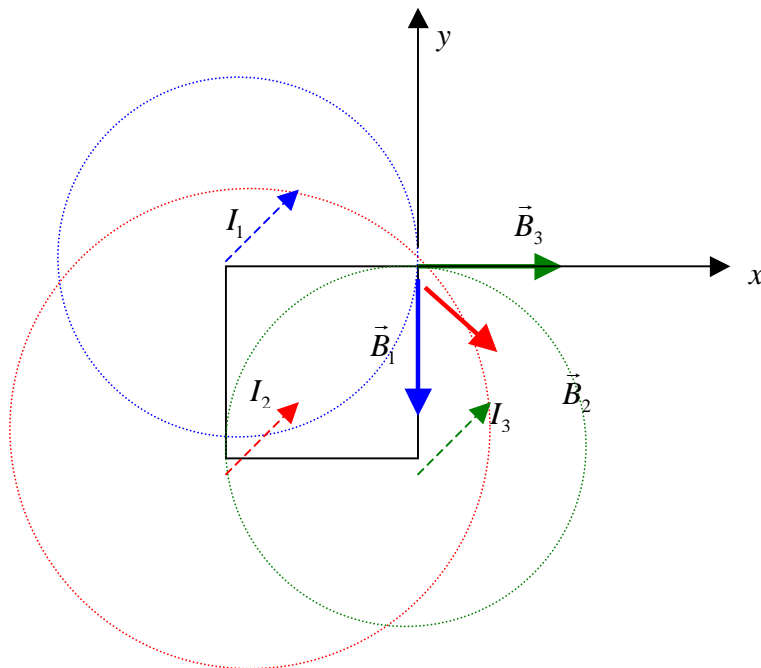
(b) Si calcola la velocità del protone sfruttando la sua energia cinetica:

$$\frac{mv^2}{2} = K = 20\text{MeV} = 20 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\text{J} = 3,2 \cdot 10^{-12}\text{J} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}} \text{ e si sostituisce nell'espressione}$$

$$r = \frac{mv}{qB} = \sqrt{\frac{2Km}{q^2 B^2}} = 3,23\text{m}.$$

Ogni *mezzo giro* l'energia cinetica aumenta della quantità $q\Delta V$. Il valore di 20MeV per l'energia cinetica viene raggiunto dopo $N = \frac{K}{q\Delta V} = 400$ mezzi giri pari a 200 giri.

5. Tre fili paralleli molto lunghi passano per i vertici di un quadrato di lato L come mostrato in figura. Si trovi il campo magnetico \vec{B} nel vertice libero del quadrato, nel caso in cui tutte le correnti entrano nella pagina.



Si scompone nei componenti lungo le direzioni x e y fissate il risultante dei tre campi magnetici prodotti dalle correnti circolanti nei lunghi fili, che si ottengono applicando la legge di Biot-Savart:

$$B_x = B_3 + B_{2x} = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi L} + \frac{\mu_0 I_2}{2\sqrt{2}\pi L} \cos 45^\circ = \frac{\mu_0 (2I_3 + I_2)}{4\pi L}$$

$$B_y = -B_1 - B_{2y} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi L} - \frac{\mu_0 I_2}{2\sqrt{2}\pi L} \cos 45^\circ = -\frac{\mu_0 (2I_1 + I_2)}{4\pi L}$$

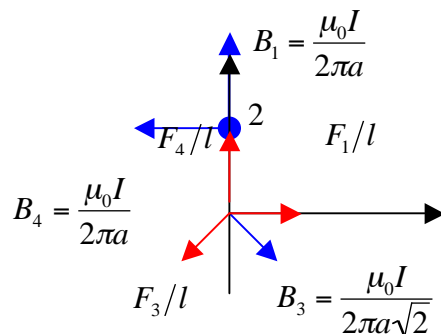
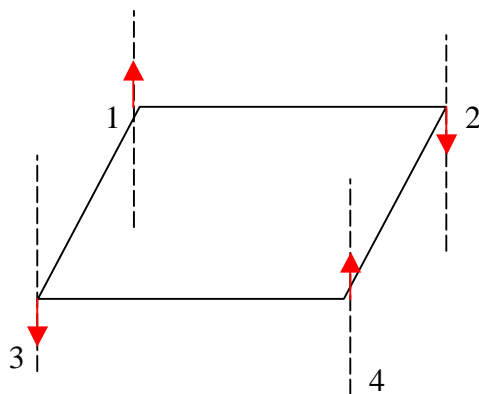
6. Si dimostri che il raggio dell'orbita di un ciclotrone è direttamente proporzionale alla radice quadrata del numero di orbite compiute.

Come sappiamo, ogni mezzo giro l'energia cinetica aumenta della quantità

$q\Delta V$, quindi dopo N giri l'energia cinetica è $2Nq\Delta V = \frac{1}{2}mv^2$. Dall'espressione della forza di

Lorentz segue $qvB = \frac{mv^2}{r}$; di conseguenza $r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{4Nq\Delta V}{m}} \propto \sqrt{N}$.

7. Quattro lunghi fili paralleli rettilinei sono percorsi da una corrente I . In un piano perpendicolare ai fili, essi passano per i vertici di un quadrato di lato a . Si trovi la forza riferita all'unità di lunghezza, agente su uno dei fili, nel caso in cui le correnti che passano per fili adiacenti hanno versi opposti.

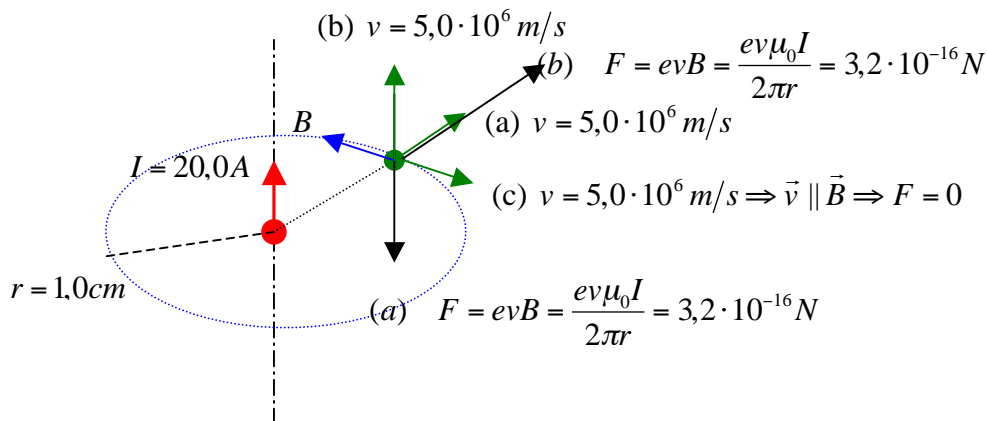


Nella figura di destra sono rappresentati i campi magnetici e le forze per unità di lunghezza in corrispondenza del filo 2, visti dall'alto. Calcoliamo l'intensità della risultante delle forze per unità

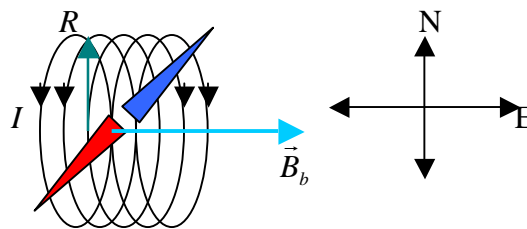
di lunghezza agenti sul filo (la direzione è quella della bisettrice del primo e terzo quadrante):

$$\frac{F}{l} = \sqrt{\left(\frac{F_1}{l}\right)^2 + \left(\frac{F_4}{l}\right)^2} - \frac{F_3}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \sqrt{2} - \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\mu_0 I^2}{2\sqrt{2}\pi a}.$$

8. Un lunghissimo filo rettilineo è percorso dalla corrente di 20,0 A. Un elettrone si trova a 1,0 cm dal centro del filo e si muove con la velocità di $5,0 \cdot 10^6$ m/s. Si trovi la forza che agisce sull'elettrone se esso si muove (a) allontanandosi perpendicolarmente dal filo, (b) parallelamente al filo nel verso della corrente e (c) perpendicolarmente al filo e tangenzialmente ad una circonferenza nel cui centro passa il filo.



9. Un amperometro relativamente economico, chiamato bussola delle tangenti, può essere realizzato usando il campo magnetico terrestre. Una bobina circolare piana di N spire e raggio R è orientata in modo tale che il campo magnetico B_b da essa prodotto nel suo centro sia orientato verso est o verso ovest. Nel centro della bobina si pone una bussola. Se nella bobina passa una corrente I , la bussola indica la direzione del campo magnetico risultante B che forma un angolo θ con il nord. Si dimostri che la corrente I è legata a θ e alla componente orizzontale del campo magnetico terrestre B_T dalla relazione $I = \frac{2RB_T}{\mu_0 N} \tan \theta$.



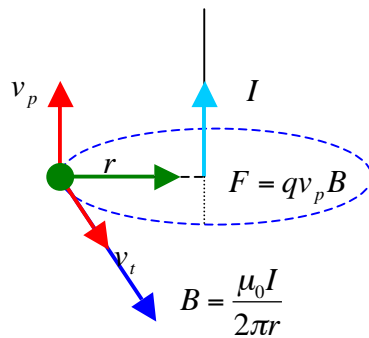
Il campo magnetico prodotto dalla bobina piana è dato dalla relazione $B_b = \frac{N\mu_0 I}{2R}$. La direzione del

campo risultante è data dalla relazione: $\frac{B_b}{B_T} = \tan \theta$. Si dimostra quanto richiesto eliminando

l'espressione del campo prodotto dalla bobina nelle relazioni appena trovate:

$$B_b = \frac{N\mu_0 I}{2R} = B_T \tan \theta \Rightarrow I = \frac{2RB_T}{\mu_0 N} \tan \theta.$$

10. Una particella di carica positiva q si muove lungo una traiettoria elicoidale attorno ad un lungo filo percorso dalla corrente I . La sua velocità ha le componenti v_p parallela alla corrente e v_t tangente ad una circonferenza nel cui centro passa la corrente. Si trovi la relazione tra le due componenti della velocità, ponendo la condizione che la forza magnetica fornisca la necessaria forza centripeta.



Si uguagliano le espressioni della forza magnetica $F = qv_p B = qv_p \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ e la seconda legge della dinamica $F = m \frac{v_t^2}{r}$, e si giunge alla relazione cercata: $v_p = \frac{2\pi m v_t^2}{q \mu_0 I}$.

