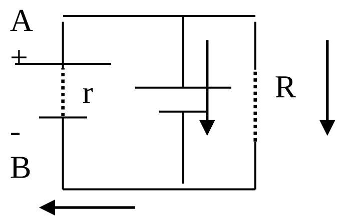
Corrente Elettrica

Problemi

1. Un riscaldatore di 200 W è usato per riscaldare l'acqua in una tazza. Esso è costituito da un singolo resistore *R* collegato ad una differenza di potenziale di 110 V. (a) Si trovi *R*. (b) Si supponga che il 90% di energia sia usato per riscaldare l'acqua; quanto tempo è necessario per riscaldare 0,25 kg d'acqua da 15°C a 100°C? (c) Quanto tempo è necessario per evaporare tutta l'acqua dopo che ha raggiunto 100°C?
   - (a) Dalla $P = IV = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{P} = 61\Omega$.
   - (b) Per scaldare il quantitativo d'acqua da 15°C a 100°C occorre una quantità di calore pari a $\Delta Q = mc\Delta T = 89 \cdot 10^3 J$. Il 90% della potenza erogata dal riscaldatore è effettivamente usato per scaldare l'acqua in un tempo $0{,}9P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta Q}{0{,}9P} = \frac{89 \cdot 10^3 J}{180W} = 8{,}24\,\text{min}$.
   - (c) Il calore latente di ebollizione dell'acqua è $L_e = 2{,}26MJ/kg = 540Kcal/kg$; di conseguenza il calore necessario per l'ebollizione è $\Delta Q = mL_e = 0{,}57MJ$. Con ragionamenti similari a quelli di cui al punto (b) segue $0{,}9P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta Q}{0{,}9P} = \frac{0{,}57 \cdot 10^6 J}{180W} = 52{,}8\,\text{min}$.
2. Ai capi di una resistenza variabile *R* è applicata una differenza di potenziale *V* che resta costante. Quando *R* ha il valore R_1, la corrente è 6,0A. Quando *R* viene aumentata di 10Ω, la corrente scende a 2,0A. si trovino R_1 e *V*.
   - $V = I_1R_1 \Rightarrow V = 6{,}0R_1$
     $V = I_2R_2 \Rightarrow V = 2{,}0(R_1 + 10) \Rightarrow 6{,}0R_1 = 2{,}0(R_1 + 10) \Rightarrow R_1 = 5\Omega \Rightarrow V = 30V$.
3. Il rame ha la densità di $8{,}92\frac{g}{cm^3}$ e la massa molecolare di $63{,}5\frac{g}{mol}$.(a) Ricordando che ci sono $6{,}02 \cdot 10^{23}$ atomi in una mole, si usino questi dati per calcolare il numero di atomi in ogni centimetro cubo di rame. Questo è anche il numero di elettroni liberi in ogni centimetro cubo di rame, perché in media c'è solo un elettrone libero per ogni atomo. (b) Un filo di rame avente il raggio di $0{,}0814cm$ è percorso dalla corrente di 1 *A*. Si calcoli la velocità di deriva degli elettroni.
   - Il numero di moli in $1cm^3$ di rame è dato dalla relazione $n = \frac{8{,}92\frac{g}{cm^3}}{63{,}5\frac{g}{mol}} = 0{,}14\frac{mol}{cm^3}$, di conseguenza, il numero di atomi in un centimetro cubo di rame è $N = 0{,}14 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 8{,}46 \cdot 10^{22}$.
   - $I = N_0Svq = \frac{N}{Sl}Sve \Rightarrow v = \frac{Il}{Ne}$
4. Una batteria di automobile fiacca, che ha la f.e.m. di 11,4 V e la resistenza interna di 0,01 Ω, è collegata ad un carico di 1,0 Ω. Per aiutare la batteria scarica si collega una seconda batteria di f.e.m. 12,6V e resistenza interna 0,01 Ω alla prima batteria, mediante cavi. Si disegni uno schema del circuito per questa situazione e si trovi la corrente in ciascun ramo del circuito. Si trovi la potenza erogata dalla seconda batteria e si valuti dove va questa potenza, supponendo che le f.e.m. e le resistenze interne siano trascurabili.

   - Si collegano i morsetti della batteria con quelli di una batteria carica, positivo con positivo: in questo modo, sempre per la legge delle maglie, quando una carica messa in circolo dalla batteria carica attraversa la batteria scarica, perde energia che viene acquistata da quest'ultima. L'accensione del motore potrà, a questo punto, avvenire regolarmente.



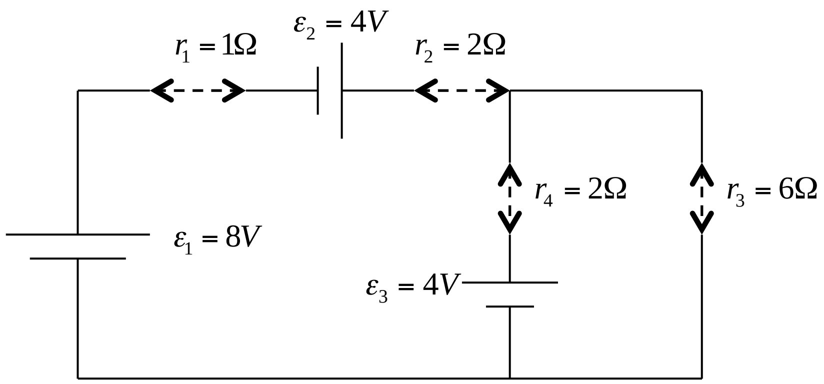
$\varepsilon = I_2 R + Ir$

- $\varepsilon = \varepsilon_s + I_1 r_s + Ir \Rightarrow \begin{cases} I_1 r + I_2 (R+r) = \varepsilon \\ I_1 (r_s + r) + I_2 r = \varepsilon - \varepsilon_s \\ I = I_1 + I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} I_1 = \dfrac{\varepsilon r - (\varepsilon - \varepsilon_s)(R+r)}{r^2 - (R+r)(r_s+r)} = 54{,}03A \\ I_2 = \dfrac{(\varepsilon - \varepsilon_s) r - \varepsilon (r_s + r)}{r^2 - (R+r)(r_s+r)} = 11{,}94A \end{matrix} \Rightarrow$

$P = I\varepsilon = 66 \cdot 12{,}6 = 831{,}6W$

- La potenza erogata è quindi pari a 831,6W. Questa potenza viene dissipata nella resistenza interna della batteria "buona", $P = I^2 r = 43{,}56W$, nella resistenza di carico $P = I_2^2 R = 144W$, e nella resistenza interna della batteria fiacca, $P = I_1^2 r_s = 29{,}16W$. Di conseguenza per caricare la batteria fiacca vengono utilizzati $P_{eff} = 831{,}6 - 43{,}56 - 144 - 29{,}16 = 614{,}88 \approx 615W$.

5. Nel circuito in figura si trovino (a) la corrente in ciascun resistore. (b) La potenza erogata da ciascuna sorgente di f.e.m. e (c) la potenza dissipata in ciascun resistore.



- (a) $\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ \varepsilon_1 = Ir_1 - \varepsilon_2 + Ir_2 + I_2 r_3 \\ \varepsilon_1 = Ir_1 - \varepsilon_2 + Ir_2 + I_1 r_4 + \varepsilon_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = (r_1 + r_2) I_1 + (r_1 + r_2 + r_3) I_2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = I_1 (r_1 + r_2 + r_4) + I_2 (r_1 + r_2) \end{cases} \Rightarrow$.

$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ 12 = 3I_1 + 9I_2 \\ 8 = 5I_1 + 3I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = 2A \\ I_1 = 1A \\ I_2 = 1A \end{cases}$

Equivalentemente poteva essere scelta la maglia di destra e l'applicazione dei

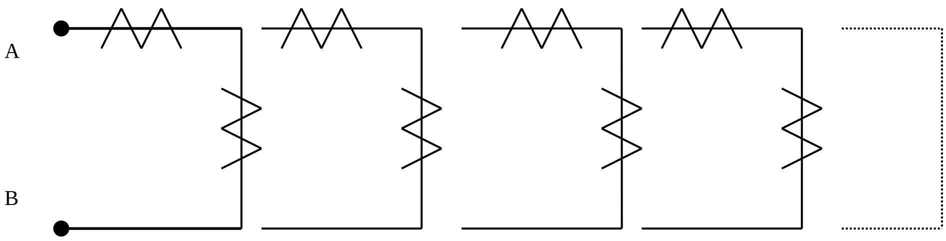
Principi di Kirchhoff avrebbe condotto ugualmente al risultato:

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ \varepsilon_1 = Ir_1 - \varepsilon_2 + Ir_2 + I_2 r_3 \\ I_2 r_3 = I_1 r_4 + \varepsilon_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = (r_1 + r_2) I_1 + (r_1 + r_2 + r_3) I_2 \\ \varepsilon_3 = -I_1 r_4 + I_2 r_3 \end{cases} \Rightarrow$$

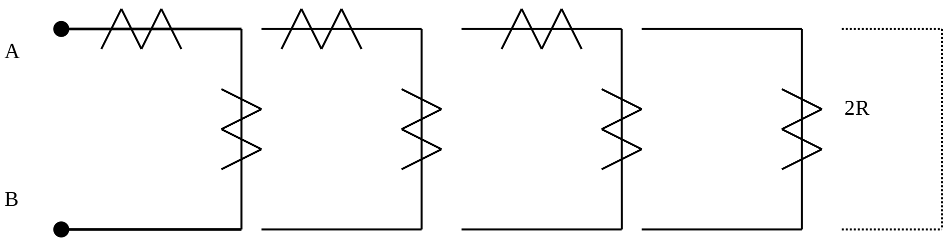
$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ 12 = 3I_1 + 9I_2 \\ 4 = -2I_1 + 6I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = 2A \\ I_1 = 1A \\ I_2 = 1A \end{cases}$$

- (b) $P_1 = \varepsilon_1 I = 16W$; $P_2 = \varepsilon_2 I = 8W$; $P_3 = \varepsilon_3 I_1 = -4W$.
- (c) $P_1 = r_1 I^2 = 4W$; $P_2 = r_2 I^2 = 8W$; $P_3 = r_3 I_2^2 = 6W$; $P_4 = r_4 I_1^2 = 2W$.

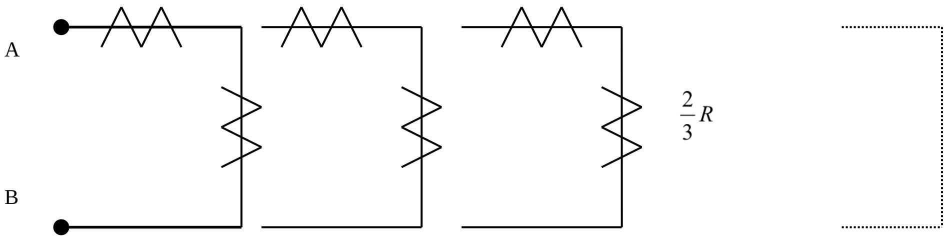
6. Calcolare la resistenza elettrica equivalente tra i punti A e B di una catena infinita di resistenze dello stesso valore R, collegate come nella figura.



Studio della situazione *fisica:*
studiamo la situazione proposta in figura (catena con 4 anelli). Si determina la resistenza equivalente alle due resistenze (in serie) nell'ultima maglia da destra:
$R_{eq} = R + R = 2R$.



A questo punto determiniamo la resistenza equivalente alle due resistenze (in parallelo) nell'ultima maglia, sempre da destra:
$R_{eq} = \frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2}{3} R$.



Procedendo sempre in questo modo, si arriva ad ottenere un valore per la resistenza equivalente alla catena da 4 anelli pari a $R_{eq} = \frac{34}{21}R$.

Riportiamo i valori delle resistenze equivalenti per numero di anelli costituenti la catena:

1	2	3	4	5
2R	$\frac{5}{3}R$	$\frac{13}{8}R$	$\frac{34}{21}R$	$\frac{89}{55}R$

A questo punto risulta naturale chiedersi se è possibile "prevedere" il valore (teorico) della resistenza equivalente ad una catena infinita di resistenze come chiede il problema.

Analisi del problema e soluzione *matematica:*
osserviamo innanzitutto che è possibile definire per ricorrenza la successione

$$\begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} = \dfrac{2}{1} \\ \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{2a_{n-1} + b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \end{cases}$$

Per cercare il limite di questa successione, scriviamo il termine n-esimo così:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{b_{n-1}(2\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + 1)}{b_{n-1}(\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + 1)} = f(\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}).$$

Se tale limite esiste, dovrà essere $f(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = L$. Di conseguenza, tale limite andrà a ricercarsi tra le soluzioni dell' equazione $f(L) = L$, in particolare $L = \frac{2L+1}{L+1}$ che ha come soluzioni $L_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad L_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. La seconda soluzione viene scartata in quanto, essendo negativa, è priva di significato fisico. La soluzione accettabile è un numero noto non solo in ambito matematico e prende il nome di *Sezione aurea.*