CAPITOLO 14
IL CAMPO ELETTRICO

14.1 La carica elettrica

Gli antichi greci scoprirono che l'ambra (*electron*), se strofinata con un pezzo di stoffa, poteva attrarre oggetti come pezzetti di paglia o piccoli semi, purché sufficientemente vicini. Fenomeni di questo tipo si dicono *elettrici*, e in base alle loro caratteristiche possono essere suddivisi in quattro gruppi:

a) Alcuni materiali acquistano proprietà elettriche per strofinio, altri, come i metalli, non sembrano elettrizzarsi.
b) Due oggetti dello stesso materiale, strofinati con lo stesso tipo di tessuto, si respingono (vetro-vetro).
c) Oggetti di materiali diversi, se elettrizzati, in alcuni casi si attraggono.
d) Oggetti inizialmente non elettrizzati, se strofinati l'uno con l'altro si attraggono (vetro-seta).

Per spiegare questi fenomeni viene introdotta una grandezza fisica: la **carica elettrica**. Tale grandezza non è osservabile direttamente; per giustificare l'esistenza di attrazioni e repulsioni si suppone l'esistenza di due tipi di carica tali che:

- oggetti con lo stesso tipo di carica si respingono,
- oggetti con cariche di tipo opposto si attraggono.

Poiché non è stato osservato alcun comportamento diverso dall'attrazione e dalla repulsione, si ritiene quindi che la carica possa essere solo di due tipi.
Nel '700 Franklin immaginava i corpi neutri dotati di una quantità ben determinata di "fluido elettrico": un eccesso di questo si manifestava come "carica positiva", un difetto come "carica negativa". Dalla seconda metà dell'800 si sa che non esiste nessun fluido: la carica è una proprietà delle particelle che compongono la materia. Sono gli **elettroni** (cariche negative) che si spostano nei fenomeni elettrici, in virtù della loro leggerezza rispetto ai **protoni** (cariche positive). La teoria di Franklin era basata sulla seguente legge fondamentale della fisica: il *principio di conservazione della carica elettrica*. In base alla velocità con cui la carica elettrica abbandona la superficie dei corpi, le sostanze possono essere divise in due gruppi: **isolanti** (o **dielettrici**) e **conduttori**.
Negli isolanti le cariche sono fisse o si muovono con difficoltà, nei conduttori invece, si muovono molto velocemente. Un corpo metallico può essere caricato se munito, per esempio, di un manico isolante. I gas sono in genere isolanti, perché le cariche elettriche sono bloccate all'interno delle molecole e non possono passare dall'una all'altra. Tuttavia, se un numero rilevante di molecole si spezza, le particelle si caricano. Tali particelle prendono il nome di **ioni**, ed il gas diventa conduttore (ionizzato). Lo spazio vuoto, in cui non sono presenti cariche, è considerato un isolante.
Il modello basato sull'esistenza di due tipi di cariche diverse ha altresì permesso la costruzione di uno strumento, l'*elettroscopio*, che indica la presenza di carica su un corpo, ma non la sua grandezza.

La forza tra due cariche

La forza tra due cariche dipende dalla loro *quantità*, e dalla *distanza* tra di esse. Franklin (1775) osservò che un pezzo di sughero posto nelle vicinanze di un cilindro cavo, caricato elettricamente, veniva attratto, mentre all'interno di esso non subiva l'azione di alcuna forza. La spiegazione di questo fatto fu brillantemente intuita da Priestley che con un'audace analogia prese in considerazione la situazione prevista da Newton nei "Principia": *la forza gravitazionale agente su un corpo posto all'interno di un pianeta cavo è zero.*
Tale ragionamento ha portato Priestley a congetturare una proporzionalità inversa della forza elettrica dal quadrato della distanza tra i corpi carichi interagenti.
Coulomb è riuscito dimostrare quanto previsto da Priestley utilizzando una *bilancia di torsione*. Con i suoi esperimenti, Coulomb ha ottenuto anche la verifica della proporzionalità diretta della forza elettrica con il prodotto delle cariche, riassumendo il tutto con l'espressione della *legge di Coulomb*

$$F = k\frac{q_A q_B}{R^2},\ k = 9\times10^9\frac{Nm^2}{C^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2},$$

dove C indica l'unità di carica, il Coulomb.

L'unità di misura della carica elettrica

La definizione del coulomb fa uso della nozione di *corrente* (quantità di carica che passa nell'unità di tempo attraverso una sezione di un conduttore) che richiama il modello a un fluido di Franklin.
1 C *è la quantità di carica che fluisce dalla sezione di un conduttore in un secondo quando l'intensità di corrente è* 1 A (dove A indica l'unità di misura della corrente, l'Ampère).
Per capirci, una lampada da 200W assorbe 1 A di corrente; questo significa che ogni secondo il filamento della lampada è percorso da 1 C di cariche negative, mentre quelle positive sono pressoché ferme. Ovviamente, la carica totale del filamento è nulla in ogni istante.
Dalla grandezza della costante *k*, segue che due oggetti posti alla distanza di un metro e caricati con 1 C di carica, esercitano l'uno sull'altro una forza di 9 miliardi di Newton!
Sperimentalmente è impossibile concentrare la carica di un Coulomb su oggetti puntiformi. Nei normali esperimenti di elettrizzazione per strofinio, la carica coinvolta è molto minore del milionesimo di Coulomb. Grandi quantità di carica, dell'ordine di qualche centinaio di Coulomb, possono accumularsi in una nube: quando ciò accade, possono verificarsi i fulmini.
Oggetti elettricamente neutri possiedono un ugual numero di cariche positive e negative. Posti nelle vicinanze di un corpo carico, vedono ridistribuirsi le cariche all'interno o sulla superficie: è il fenomeno dell'*induzione elettrostatica.*

14.2 Forze e campi

Abbiamo già incontrato il concetto di **campo** quando abbiamo introdotto la legge di gravitazione universale:

$$F = G\frac{mM}{R^2}.$$

Nel linguaggio della fisica moderna, il concetto di campo supera quello di *azione a distanza*. L'idea di base su cui si fonda il ragionamento può essere la seguente: l'attrazione gravitazionale con cui un corpo di massa *m* interagisce con uno di massa *M* (che per semplicità di ragionamento supponiamo essere molto maggiore di *m*), si manifesta per effetto della sua presenza in quel punto dello spazio a distanza *R* dal corpo di massa *M*. In assenza di masse, è comunque presente una grandezza vettoriale diretta verso la massa *M*, la cui intensità è

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

e tale che se poniamo in quel punto una massa *m*, questa interagisce con *M* mediante una forza

$$F = m\frac{GM}{R^2} = mg.$$

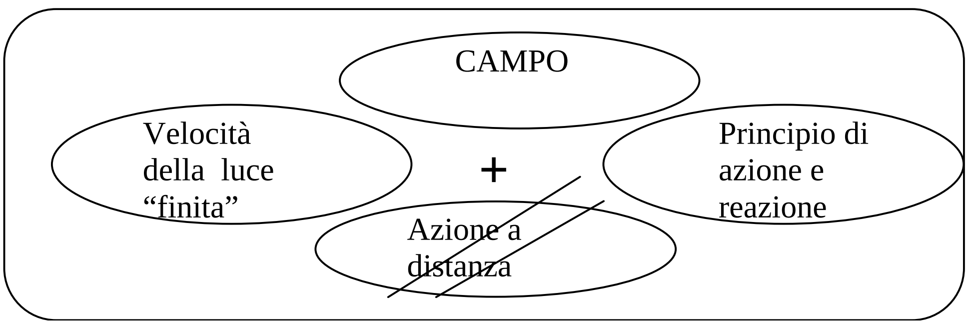
Nelle vicinanze della terra il campo gravitazionale, in virtù della seconda legge di Newton, è *l'accelerazione di gravità*.
Un ragionamento analogo può essere fatto per la legge di Coulomb: una carica *Q* è origine in ogni punto dello spazio di un **campo elettrico**

$$E = \frac{kQ}{R^2},$$

che si manifesta su una carica di prova *q* posta in un punto a distanza *R* da Q, mediante una forza

$$F = q\frac{kQ}{R^2} = Eq.$$

A differenza del campo gravitazionale che è sempre attrattivo, nel caso del campo elettrico si adotta la seguente convenzione: la direzione è quella della forza che agisce su una carica di prova *positiva*.



Rappresentazione del campo elettrico. Linee di campo

Un campo di forze è rappresentato da linee tangenti in ogni punto alla direzione del campo. Linee di campo distinte non possono "incrociarsi", perché vorrebbe dire che in quel punto il campo assume due direzioni, e ciò non può accadere. E' opportuno osservare che le linee di campo non esistono in natura, sono un utile espediente ideato da Faraday per "visualizzare" il campo.

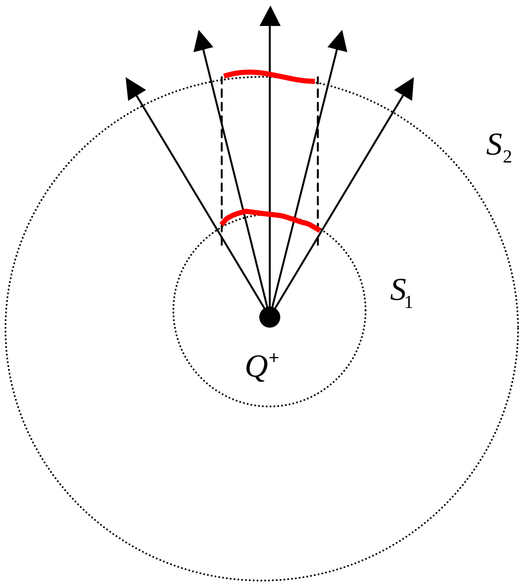
Le caratteristiche delle linee di forza del campo elettrico sono le seguenti:

a) le linee partono o finiscono sempre sulle cariche, e per ogni punto passa solo una linea di forza;

b) il numero delle linee di forza è proporzionale alla grandezza della carica (*teorema di Gauss)*;

c) non esistono linee di campo chiuse su se stesse.

Convenzionalmente, le linee sono tracciate in numero tale che *la loro densità sia proporzionale all'intensità del campo*. Cerchiamo di capire con un esempio il senso della convenzione adottata.

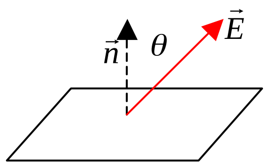


Si osserva dalla figura che il numero di linee di forza uscenti dalla superficie S_1 è maggiore di quello delle linee uscenti dalla superficie S_2, avente la stessa estensione della superficie S_1, posta più lontano rispetto alla carica Q^+.

Il numero di linee di forza (o di campo, o di flusso, sono tutti sinonimi che si possono incontrare in letteratura) che attraversano la superficie si dice *flusso del campo* e si indica con la lettera maiuscola dell'alfabeto greco Φ. Per quanto appena visto, se indichiamo con $\vec{n}$ la direzione normale uscente dall'*elemento di superficie* ΔS (una porzione di superficie piccola in modo tale da potersi considerare piana), l'*elemento di flusso* è dato dalla relazione:

$$\Delta\Phi = E \cdot \Delta S \cos\theta,$$

dove l'angolo θ è compreso tra la direzione normale e la direzione del campo elettrico.



14.3 Il teorema di Gauss per il campo elettrico

Un risultato di fondamentale importanza in elettrostatica mette in relazione il flusso del campo elettrico con la carica che lo produce: si tratta del **Teorema di Gauss** per il campo elettrico.

Il flusso del campo elettrico è direttamente proporzionale alla carica che lo produce:

$$\Phi = 4k\pi Q = \frac{Q}{\varepsilon}.$$

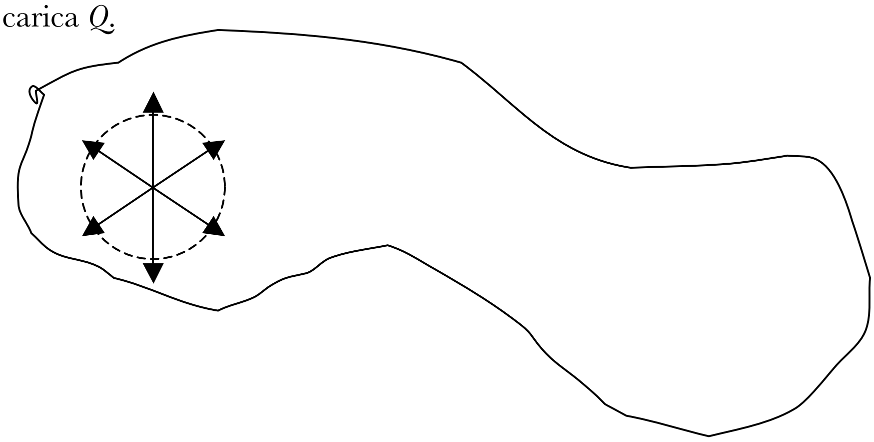
Dimostrazione. Consideriamo una superficie sferica di raggio r che racchiude la carica Q. La geometria della sfera è tale che il campo è perpendicolare in ogni punto della superficie alla superficie stessa, di conseguenza gli elementi di flusso possono essere scritti come

$$\Delta\Phi = E \cdot \Delta S = k\frac{Q}{r^2} \cdot \Delta S.$$

Il flusso totale si ottiene sommando i contributi dei singoli elementi di flusso:

$$\Phi = \sum E \cdot \Delta S = \sum k\frac{Q}{r^2} \cdot \Delta S = k\frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow \Phi = 4\pi kQ.$$

A questo punto occorre generalizzare la dimostrazione al caso di una superficie chiusa *qualsiasi* che racchiude la carica Q.



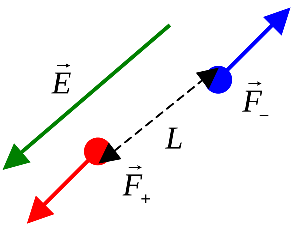
Il numero di linee di forza uscenti dalla superficie generica è uguale al numero di linee che escono dalla superficie sferica in essa contenuta, e che racchiude la carica Q. Pertanto il risultato

$$\Phi = 4k\pi Q = \frac{Q}{\varepsilon}$$

è da considerarsi dimostrato a tutti gli effetti. E' semplice osservare che il flusso è zero se la carica è esterna alla superficie; infatti, tante linee entrano e tante escono dalla superficie.

14.4 Dipoli elettrici in presenza di campi elettrici

E' possibile considerare un atomo come costituito da un piccolissimo nucleo carico positivamente circondato da una nube di elettroni carichi negativamente. Il diametro del nucleo è mediamente cinque ordini di grandezza inferiore a quello della nube di elettroni; di conseguenza può essere considerato puntiforme. Quando il centro della carica negativa coincide con quello della carica positiva (nucleo), l'atomo si dice *non polare*. In presenza di campo elettrico esterno il centro della carica negativa si sposta, come rappresentato schematicamente dalla seguente figura.



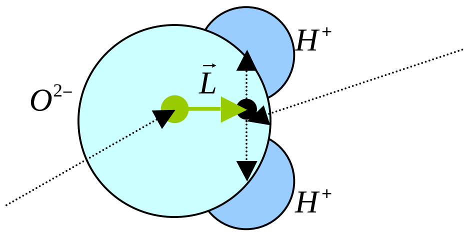
Abbiamo indicato con $\vec{F}_+$ la forza dovuta al campo elettrico esterno $\vec{E}$ sul centro di carica positiva, e con $\vec{F}_-$ quella agente sul centro di carica negativa. L'allontanamento delle cariche cesserà quando $\vec{E}q = \vec{F}_- - \vec{F}_+$, essendo q il valore assoluto della carica.

La distribuzione di carica così configurata (cariche uguali separate da una distanza L) prende il nome di *dipolo elettrico*. La rotazione con cui il dipolo tende ad *allinearsi* con il campo elettrico esterno è rappresentata da una grandezza fisica vettoriale, il *momento di dipolo*, che s'indica con

$$\vec{p} = q\vec{L},$$

dove q è il valore della carica e $\vec{L}$ è il vettore che ha la direzione della congiungente i centri di carica, nel verso che va dal centro di carica negativa a quello di carica positiva, ed intensità pari alla distanza tra i due centri.

Esistono in natura delle molecole in cui i centri di carica positivi e negativi *non* coincidono. Tali molecole si dicono *polari* e sono caratterizzate dal fatto di possedere un momento di dipolo *permanente*. Una molecola di questo tipo è quella dell'acqua.



Centro di carica positiva

Centro di carica negativa

Problemi

1. Una monetina di rame ha la massa di 3 g. Ogni atomo di rame contiene 29 elettroni, e vi sono $6{,}02\cdot 10^{23}$ atomi in 64 g di rame.

a) Si trovi il numero di atomi, il numero di elettroni e la carica negativa in coulomb contenuti in una monetina di rame puro.

Il numero di atomi in 3 g di rame è $6{,}02\cdot 10^{23}\cdot\frac{3}{64}=2{,}8\cdot 10^{22}$. Il numero di elettroni è $2{,}8\cdot 10^{22}\cdot 29=8{,}1\cdot 10^{23}$. La carica negativa in coulomb è quindi $8{,}1\cdot 10^{23}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}=1{,}3\cdot 10^{5}C$.

b) Quanto tempo impiegherebbe questa carica per percorrere un filo conduttore a una rapidità (intensità di corrente) di 1 A = 1 C/s ?

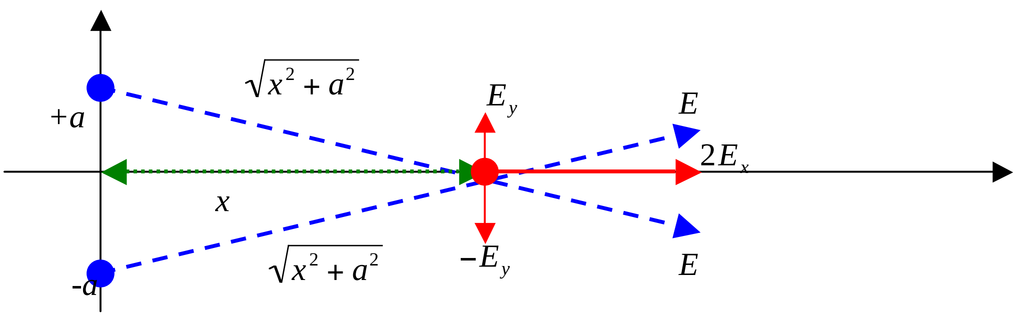
Impiegherebbe un tempo pari a $t=\dfrac{1{,}3\cdot 10^{5}C}{1\frac{C}{s}}=1{,}3\cdot 10^{5}s$.

c) Se si potesse trasferire l'1% della carica negativa da una monetina ad un'altra, si calcoli la forza esercitata da una monetina sull'altra quando esse sono distanti 60 cm, supponendo che entrambe le monetine siano cariche puntiformi.

Dopo il trasferimento di carica la monetina cedente risulta caricata positivamente per $1{,}3\cdot 10^{5}C\frac{1}{100}=1{,}3\cdot 10^{3}C$, mentre quella ricevente risulta caricata negativamente per la stessa quantità. Dalla legge di Coulomb la forza che si esercita tra le monetine è

$$F=k\frac{q_1q_2}{r^2}=9\cdot 10^{9}\,\frac{(1{,}3\cdot 10^{5})(1{,}3\cdot 10^{5})}{0{,}6^2}=4{,}2\cdot 10^{20}N.$$

2. Due cariche positive uguali sono poste sull'asse *y* nei punti $y=+a$ e $y=-a$. Si trovi l'espressione del campo elettrico E_x in un punto sull'asse *x* a distanza *x* dall'origine.

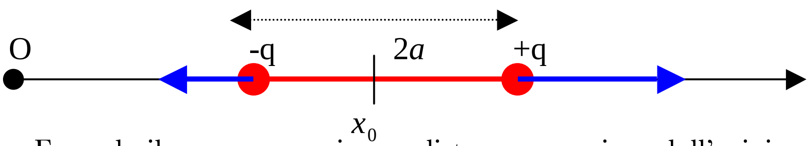


- Il campo elettrico nel punto a distanza *x* dall'origine si ottiene per sovrapposizione dei campi prodotti dalle singole cariche. La simmetria del problema permette di determinare il campo come somma delle componenti del campo lungo la direzione orizzontale, che per similitudine è:

$$\frac{\frac{E_x}{2}}{E} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \Rightarrow E_x = \frac{2xE}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{2xk\frac{q}{(x^2+a^2)}}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{2kqx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

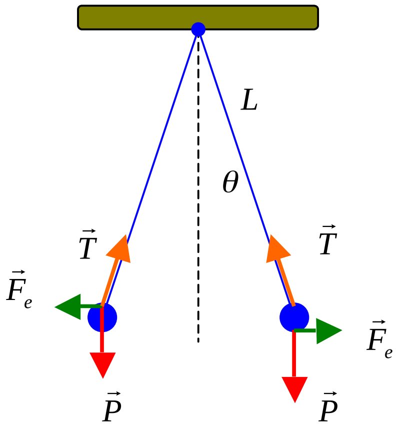
. Se la distanza x fosse molto maggiore di a, sarebbe come se una carica "doppia" fosse fissata nell'origine ed il campo sarebbe $E_x = \frac{2kq}{x^2}$.

3. Un dipolo elettrico è costituito da due cariche +q e −q, separate da una distanza 2a. Esso è disposto lungo l'asse x con il suo centro in x_0. C'è un campo elettrico non uniforme nella direzione x, $E_x = Ax$, dove A è una costante. Si dimostri che la forza agente sul dipolo è nella direzione x ed è data da $F_x = Ap$, dove p è il modulo del momento di dipolo.



- Essendo il campo maggiore a distanza maggiore dall'origine, risulta $F_x = +qA(x_0+a) - qA(x_0-a) = Aq2a = Ap \Rightarrow \vec{F}_x = A\vec{p} = Aq\vec{L}$.

4. Due sferette di massa m sono appese a un punto comune mediante fili lunghi L. Se su ogni sfera c'è una carica q, e ciascun filo forma un angolo θ con la verticale, si determini la carica q. In particolare, si trovi il valore della carica se $L = 50cm$ e $\theta = 10°$.

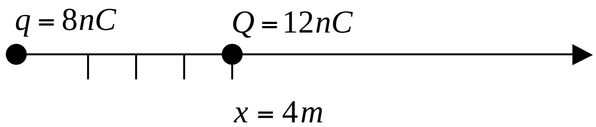


- Il sistema è equilibrato dall'azione della forza elettrica, del peso, e della tensione. Le equazioni della statica scomposte nelle direzioni verticale (del peso) ed orizzontale (della forza elettrostatica) portano alle seguenti conclusioni:

$$\begin{cases} T_x = F_e \\ T_y = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T\sin\theta = k\frac{q^2}{(2L\sin\theta)^2} \\ T\cos\theta = mg \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = k\frac{q^2}{mg(2L\sin\theta)^2} \Rightarrow q = 2L\sin\theta\sqrt{\frac{mg\tan\theta}{k}}$$

- Con i dati $L = 50cm$ e $\theta = 10°$ il valore della carica è $q = 2{,}4\cdot10^{-7}C = 240nC$.

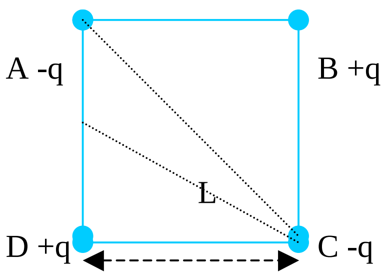
5. Una carica di 8nC è disposta nell'origine e una di 12nC è disposta nel punto $x = 4$m. Si trovi il punto sull'asse x in cui il campo elettrico è nullo.



- Nel punto in questione la somma vettoriale dei campi sorgenti dalle cariche fisse è nulla. Poiché la direzione del campo risultante è quella dell'asse x, denotata con x la distanza del punto incognito dall'origine l'equazione che ne fornisce il valore è
$$\frac{kq}{x^2} - \frac{kQ}{(4-x)^2} = 0 \Rightarrow q(4-x)^2 - Qx^2 = 0$$
$$(q-Q)x^2 - 8xq + 16q = 0 \Rightarrow x = \frac{4q \pm \sqrt{16q^2 - 16q^2 + 16qQ}}{q-Q}$$
$$x = \frac{4q - 4\sqrt{qQ}}{q-Q} = 1{,}8m.$$
- La soluzione negativa è stata scartata perché il punto deve necessariamente stare tra le due cariche, in quanto nei punti esterni i campi prodotti dalle due cariche hanno lo stesso verso.

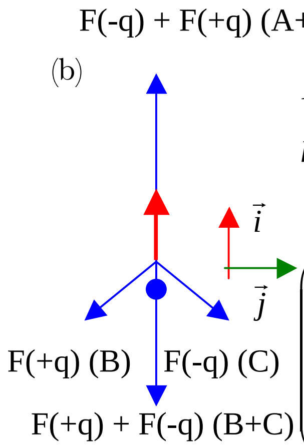
6. Se si mettono insieme due cariche, q_1, q_2, si ha una carica totale di $6\mu C$. Se le due cariche sono distanti 3m, la forza che ognuna esercita sull'altra ha il modulo di 8mN. Si trovino q_1, q_2: (a) se le due cariche sono entrambe positive; (b) se sono una positiva e l'altra negativa.
- (a) Le ipotesi danno origine alle equazioni:
$$\begin{cases} q_1 + q_2 = Q = 6\mu C \\ k\dfrac{q_1 q_2}{9} = F = 8mN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = Q - q_2 \\ k\dfrac{(Q-q_2)q_2}{9} = F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = Q - q_2 \\ kq_2^2 - kQq_2 + 9F = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{kQ \mp \sqrt{(kQ)^2 - 36Fk}}{2k} = \dfrac{5{,}4\cdot 10^4 \mp 1{,}8\cdot 10^4}{1{,}8\cdot 10^{10}} = 2\mu C; \quad 4\mu C \\ q_2 = \dfrac{kQ \pm \sqrt{(kQ)^2 - 36Fk}}{2k} = \dfrac{5{,}4\cdot 10^4 \pm 1{,}8\cdot 10^4}{1{,}8\cdot 10^{10}} = 4\mu C; \quad 2\mu C \end{cases}$$
- (b) ...

7. Quattro cariche di ugual valore assoluto sono disposte nei vertici di un quadrato di lato L. (a) Si trovino il modulo e la direzione orientata della forza esercitata dalle altre cariche sulla carica posta nel vertice inferiore sinistro. (b) Si dimostri che il campo elettrico nel punto medi di uno dei lati del quadrato è diretto lungo il lato, orientato verso la carica negativa, e ha modulo $E = k\dfrac{8q}{L^2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{5}}{25}\right)$.



- La forza esercitata dalle cariche sulla carica posta nel vertice inferiore sinistro è data dalla somma vettoriale dei singoli contributi (la risultante si trova nella direzione della diagonale): $k\dfrac{(-q)(-q)}{2L^2}+2k\dfrac{(+q)(-q)}{L^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=k\dfrac{q^2}{L^2}\left(-\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\right)$.

- (b)

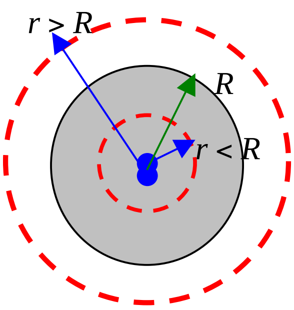


$$\vec{E}(A)+\vec{E}(D)+\vec{E}(C)+\vec{E}(B)=$$

$$k\frac{q}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}\vec{i}+k\frac{q}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}\vec{i}+k\frac{q}{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}L\right)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-\vec{i})+\frac{2}{\sqrt{5}}(\vec{j})\right)+k\frac{q}{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}L\right)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-\vec{i})-\frac{2}{\sqrt{5}}(\vec{j})\right)$$

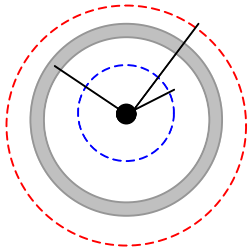
$$\left(2k\frac{q}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}-\frac{2}{\sqrt{5}}k\frac{q}{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}L\right)^2}\right)\vec{i}=\left(k\frac{8q}{L^2}\left(1-\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)\right)\vec{i}$$

8. In un modello del nucleo atomico si considera quest'ultimo come una sfera carica uniformemente con una densità di carica $\rho\dfrac{C}{m^3}$. Sia R il raggio della sfera. Si usi il teorema di Gauss per dimostrare che il campo elettrico ad una distanza r è dato da: $E_r=\begin{cases}\dfrac{kQ}{R^3}r & r<R\\ \dfrac{kQ}{r^2} & r>R\end{cases}$, dove $Q=\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho$ è la carica totale nella sfera.



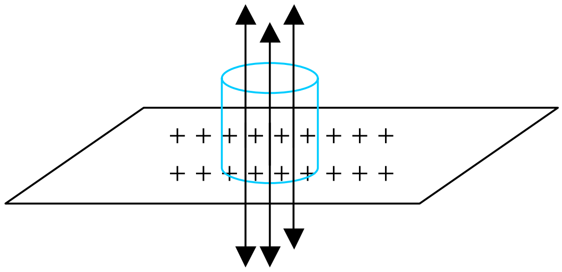
  - In un punto interno a distanza r dal nucleo, l'intensità del campo si trova applicando il teorema di Gauss, scegliendo come superficie gaussiana la sfera interna di raggio r: $E_r 4\pi r^2=4k\pi\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3\rho=4k\pi\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3\dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\Rightarrow E_r=\dfrac{kQ}{R^3}r$. In un punto esterno, presa come superficie gaussiana sempre la sfera di raggio $r>R$, grazie al teorema di Gauss si ha che $E_r 4\pi r^2=4k\pi\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3\rho=4k\pi\cdot\dfrac{4}{3}\pi R^3\dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\Rightarrow E_r=\dfrac{kQ}{r^2}$.

9. Si usi il teorema di Gauss per dedurre le equazioni per il campo elettrico all'interno ed all'esterno di uno strato sferico di raggio R carico uniformemente.



- Se $r < R$ allora $E_r 4\pi r^2 = 4k\pi \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 0 \Rightarrow E_r = 0$, poiché all'interno della sfera non c'è carica. Se $r > R$ allora $E_r 4\pi r^2 = 4k\pi \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = 4k\pi Q \Rightarrow E_r = \frac{kQ}{r^2}$.

10. Si usi il teorema di Gauss per dedurre l'equazione del campo elettrico in prossimità di una distribuzione piana uniforme di carica.
    - Lontano dai bordi il campo è uniforme diretto perpendicolarmente alla lamina. Detta σ la densità superficiale di carica, risulta dal teorema di Gauss: $E_n 2\pi r^2 = 4k\pi \cdot (\pi r^2 \sigma) \Rightarrow E_n = 2\pi k\sigma$, dove *n* è la direzione perpendicolare alla lamina.



14.5 la differenza di potenziale

Oltre lo strofinio manuale: le prime macchine elettriche

Dopo il 1750 inizia la costruzione di macchine elettriche allo scopo di caricare oggetti, dove sfere e cilindri di dimensioni considerevoli vengono posti in rotazione strisciando su cuscinetti di pelle, e trasferendo poi la *carica accumulata* ad un grande oggetto metallico posto nelle vicinanze. I dispositivi atti all'accumulo di cariche si chiamano **condensatori**, il primo dei quali fu scoperto in modo assolutamente casuale nel 1746 a Leyda. La scoperta avvenne durante un tentativo di confinamento di elettricità dentro *una bottiglia d'acqua collegata ad un corpo cilindrico carico da un filo d'ottone*. Quando lo sperimentatore toccò il filo d'ottone ricevette una scossa fortissima. L'oggetto utilizzato nell'esperimento è noto ancora oggi come *bottiglia di Leyda*.

Quando una bottiglia di Leyda si scarica, viene emessa energia sotto varie forme. Tale energia presente nei fenomeni elettrici viene descritta attraverso una nuova grandezza fisica: la **differenza di potenziale elettrico** (più brevemente **DDP**). E' stato osservato che una particella lanciata con velocità *v* in una regione dove è presente un campo elettrico uniforme, in direzione opposta alla forza, si comporta come un sasso lanciato verso l'alto in prossimità della superficie terrestre. La proporzionalità tra la forza e la carica induce la definizione di una grandezza che *non* dipende dalla carica stessa, ma solo dall'intensità del campo e dalle posizioni iniziali e finali:

$$\frac{\Delta W_{AB}}{q} := V_B - V_A = \Delta V,$$

dove ΔW_{AB} *è il lavoro compiuto dalle forze del campo quando la carica si sposta dal punto A al punto B*, e $\Delta V = V_B - V_A$ è la **differenza di potenziale elettrico**, che si misura in *Volt*: $V = \frac{J}{C}$.

La differenza di potenziale rappresenta l'*energia per unità di carica* acquistata dalla carica in moto, *a spese del lavoro compiuto dalle forze del campo*, *indipendentemente dal cammino percorso*: contano solo le posizioni iniziali e finali, esattamente come nel caso dell'energia nel caso gravitazionale.

In buona sostanza, una batteria da 12V mette a disposizione un'energia di 12J per ogni Coulomb che passa da un polo all'altro. Il lavoro compiuto dalle forze del campo è dato dal prodotto della forza per lo spostamento nella *direzione della forza* (e non del campo come nel caso gravitazionale, essendo l'interazione tra le masse solo di tipo attrattivo). Se il campo elettrico è *uniforme*, il lavoro è:

$$W = F\Delta s_{\parallel} = qE\Delta s_{\parallel} = q\Delta V \Rightarrow E = \frac{\Delta V}{\Delta s_{\parallel}},$$

dove con $\Delta s_{\parallel}$ abbiamo indicato la distanza tra due punti A e B. L'ultima uguaglianza è utile per eseguire *misure d'intensità di campi elettrici uniformi*, dal momento che la DDP è una grandezza fisica spesso nota. Ad esempio, una DDP di 4,5V (tipica di una normale "pila") tra due punti distanti 1cm corrisponde ad un campo elettrico $E = 450\frac{V}{m}$.

Calcoli di differenza di potenziale in casi particolari

Occupiamoci adesso di determinare la differenza di potenziale in un campo elettrico prodotto da una carica *puntiforme Q* positiva (campo *non* uniforme).

Siano P_a, P_b due punti a distanza rispettivamente $r_a, r_b, r_a < r_b$, e sia q_0 la carica di prova positiva che viene spostata da P_b a P_a a velocità costante. Poiché la forza elettrostatica dipende dalla distanza, l'intensità del campo elettrico (e, di conseguenza, quella della forza che dobbiamo esercitare per vincere la repulsione elettrostatica) non è costante. Il lavoro necessario per effettuare lo spostamento viene quindi calcolato sommando i contributi infinitesimi

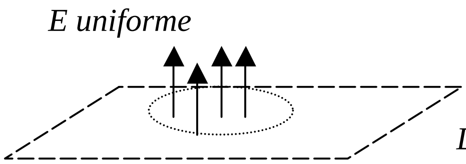
$$\Delta L = F\Delta r$$

dove $\Delta r = \frac{r_b - r_a}{n}$ e F è la forza media calcolata sul trattino infinitesimo $[r_k, r_{k+1})$: $F = \frac{kQq_0}{r_k r_{k+1}}$, $\Delta r = r_{k+1} - r_k$, $r_0 = b, r_n = a$. Di conseguenza:

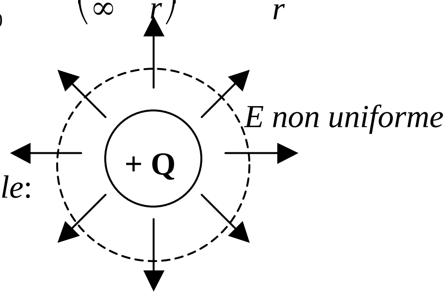
$$L = \sum_{k=0}^{n-1}\Delta L = \sum_{k=0}^{n-1}F\Delta r = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{kQq_o}{r_k r_{k+1}}(r_{k+1} - r_k) = kQq_0\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_{k+1}}\right) = kQq_0\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_n}\right) = kQq_0\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right).$$

Sulla base di questi calcoli è quindi possibile definire il *potenziale* in un punto a distanza *r* dalla carica *Q*, come il lavoro necessario per portare in quel punto una carica positiva *dall'infinito* dove, per convenzione,

$$r_b = \infty, V_b = 0, \quad r_a = r, V_a = V: \qquad V_a - V_b = \Delta V = \frac{L}{q_0} = kQ\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right)V = -\frac{kQ}{r}.$$



Differenza di potenziale: $V = Ed$.
Campo elettrico: $E = 2\pi k\sigma$



Differenza di potenziale: $V = -\frac{kQ}{r}$.
Campo elettrico: $E = 4\pi kQ$

14.6 Condensatori

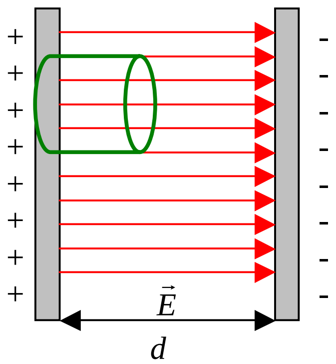
Durante il tentativo di accumulo della carica su un conduttore si hanno due tipi d'inconvenienti:

- il campo elettrico che si fa sempre più intenso all'aumentare della carica accumulata, così come la differenza di potenziale tra le pareti del conduttore e gli oggetti (e le persone!) ad esso vicini;
- la ionizzazione delle molecole d'aria per effetto delle forze elettriche che rende l'aria stessa conduttrice, provocando scosse più o meno intense.

Capacità

Per poter quindi immagazzinare un certo quantitativo di carica su un conduttore, evitando la formazione d'intensi campi elettrici e grandi differenze di potenziale, sono stati ideati dei dispositivi, detti *condensatori*, mediante opportune combinazioni di conduttori. Per capire i principi fisici che

stanno alla base del funzionamento dei condensatori, si ragiona sul seguente modello ideale (semplificato).
Si hanno due lastre metalliche (*armature del condensatore*) piane e parallele, con un'estensione superficiale grande rispetto alla distanza *d* che le separa, e tra cui è interposto un mezzo isolante (l'ideale sarebbe il vuoto) con costante dielettrica ε. La carica che si accumula sulle armature origina un campo elettrico $\vec{E}$ ed una differenza di potenziale ΔV. Vogliamo capire quale relazione intercorre tra la carica *Q* accumulatasi sul condensatore e la differenza di potenziale ΔV.
Per questo scopo ricordiamo che, se il campo elettrico è uniforme (e quello originato dalle cariche accumulatesi sulle armature del condensatore lo è), questo è legato alla differenza di potenziale dalla relazione $E = \frac{\Delta V}{d}$. La definizione di flusso del campo elettrico $\Phi_E = E \cdot S$ e il teorema di Gauss $\Phi = 4k\pi Q = \frac{Q}{\varepsilon}$ permettono di determinare la relazione cercata. Si tratta di calcolare l'intensità del campo elettrico tra le armature del condensatore. Applichiamo il teorema di Gauss al dispositivo in figura, scegliendo come superficie matematica chiusa il cilindro con una base interna al conduttore, e l'altra tra le due armature. Se non intervengono campi elettrici esterni le cariche si disporranno uniformemente sulle superfici delle armature. Indicato con *A* la superficie delle armature, *S* la superficie di base del cilindro, e con σ la densità di carica superficiale accumulata sulle armature, risulta: $E \cdot S = \Phi_E = \frac{q}{\varepsilon} = \frac{\sigma S}{\varepsilon} = \frac{QS}{A\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{Q}{A\varepsilon}$. Di conseguenza $E = \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow \Delta V = Ed = \frac{Qd}{A\varepsilon} := \frac{Q}{C}$. La quantità $C = \frac{A\varepsilon}{d}$ è detta *capacità* del condensatore e si misura in *farad* (F). La capacità dei normali condensatori è dell'ordine di $10^{-11} F < C < 10^{-4} F$.

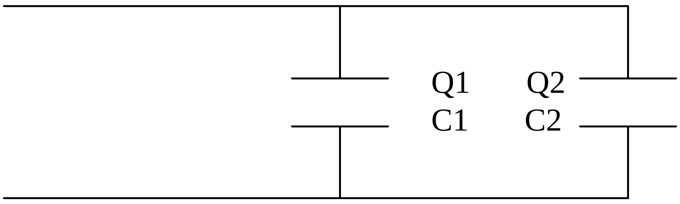


14.7 Dielettrici
Sono sostanze non conduttrici (vetro, carta, legno, plastica, etc.). Se interponiamo un dielettrico tra le armature di un condensatore, la capacità aumenta di un fattore $\varepsilon_r > 1$, detto *costante dielettrica relativa*. Questo avviene perché il dielettrico indebolisce il campo elettrico tra le armature, perché quest'ultimo polarizza le molecole del dielettrico creando accumuli di carica sulla superficie del dielettrico vicina alle armature. Questo squilibrio di carica origina a sua volta un campo elettrico, $\vec{E}$, in opposizione a quello originario, $\vec{E}_0$. Si forma un campo netto $\vec{E}' = \vec{E}_0 - \vec{E}$ d'intensità minore di quella del campo originario $\vec{E}_0$: $E' = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$. Di conseguenza la differenza di potenziale si riduce a $V' = E'd = \frac{E_0}{\varepsilon_r} d = \frac{V_0}{\varepsilon_r}$. La nuova capacità del condensatore con il dielettrico interposto tra le armature è dunque: $C' = \frac{Q}{V'} = \frac{Q}{V_0}\varepsilon_r = C\varepsilon_r > C$. In definitiva, le tre funzioni del dielettrico sono:

1. Aumenta la capacità del condensatore.
2. Fornisce un mezzo meccanico per la separazione delle cariche.
3. Aumenta la rigidità dielettrica con conseguente aumento della carica (e quindi del potenziale) ritardando la perforazione del dielettrico.

14.8 Collegamento di condensatori

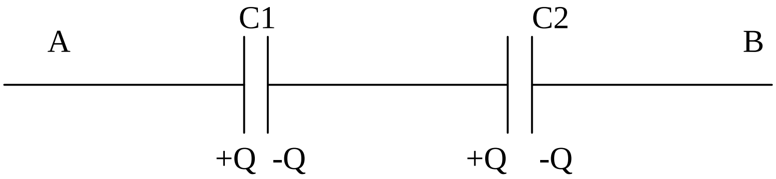
Collegamento in parallelo



Le armature superiori sono allo stesso potenziale. Fisicamente, l'aggiunta di un condensatore in parallelo aumenta l'area destinata ad ospitare la carica. Di conseguenza aumenta la capacità. Calcoliamo la cosiddetta *capacità equivalente*, cioè la capacità di un condensatore "sostitutivo" di quelli collegati in parallelo. Risulta:

$$Q_1 = C_1 V, \quad Q_2 = C_2 V \Rightarrow \left(Q = Q_1 + Q_2\right) \Rightarrow C_{eq} V = Q = C_1 V + C_2 V \Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2.$$

Collegamento in serie



Consideriamo due condensatori scarichi collegati come in figura (in serie). Per caricare la serie si preleva una carica Q dall'ultima armatura a destra (che avrà quindi carica –Q) e si porta sulla prima a sinistra (che avrà quindi carica +Q). La coppia costituita dalle armature interne forma un unico conduttore sul quale sono indotte le cariche –Q su quella interna di sinistra e +Q su quella interna di destra. La differenza di potenziale tra i punti A e B è data dalla somma delle differenze di potenziale tra le armature dei due condensatori. La *capacità equivalente* è quindi data da:

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

14.9 Conduttori in equilibrio e superfici equipotenziali

In condizioni di equilibrio le cariche libere di muoversi sono in quiete: nessuna forza netta agisce su di esse e, in tali condizioni, il campo elettrico è nullo all'interno di un conduttore in equilibrio (e, per il teorema di Gauss, non c'è "carica netta" all'*interno* del conduttore).

1. *All'interno di un conduttore in equilibrio il campo elettrico è nullo.*
   Se così non fosse, sulle cariche libere agirebbe una forza proporzionale al campo e queste non sarebbero più in condizioni di equilibrio. Quando si porta un conduttore in un campo elettrico, viene esercitata una forza su ciascuna carica presente. Gli elettroni liberi si mettono in movimento in direzione opposta al campo. In questo modo si creano accumuli di carica che producono un campo elettrico nella direzione contraria al campo esterno, in modo che il campo totale si annulli.

2. *Un conduttore in equilibrio è una superficie equipotenziale.*
   Se così non fosse, tra due punti del conduttore a diverso potenziale avremmo produzione di campo elettrico che accelererebbe le cariche sulla superficie (perché all'interno il campo elettrico è nullo) contro l'equilibrio ipotizzato.

3. *All'interno di un conduttore in equilibrio la densità di carica è nulla.*

Segue applicando il Teorema di Gauss ad una qualsiasi superficie interna, essendo il campo elettrico nullo all'interno del conduttore. Notiamo che ciò non significa che non c'è carica all'interno (il conduttore è "pieno" di elettroni e di nuclei) ma che non c'è carica netta.

4. *Il campo elettrico immediatamente fuori della superficie di un conduttore in equilibrio è perpendicolare alla superficie e vale* $E = E_n = 4\pi k\sigma$.

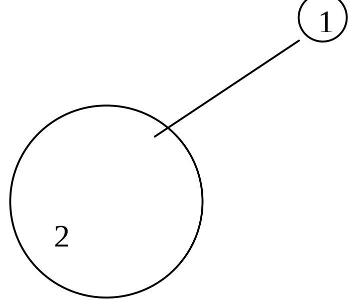
Anche questo risultato segue dall'applicazione del Teorema di Gauss ricordando che il campo elettrico all'interno è nullo, e quindi sarà nulla in particolare la sua componente tangenziale alla superficie. Poiché nell'attraversare la superficie carica tale componente varia con continuità, dovrà essere nulla immediatamente fuori dalla superficie. Ecco perché nelle immediate vicinanze della superficie, il campo elettrico è perpendicolare alla stessa.

La proprietà delle "punte"

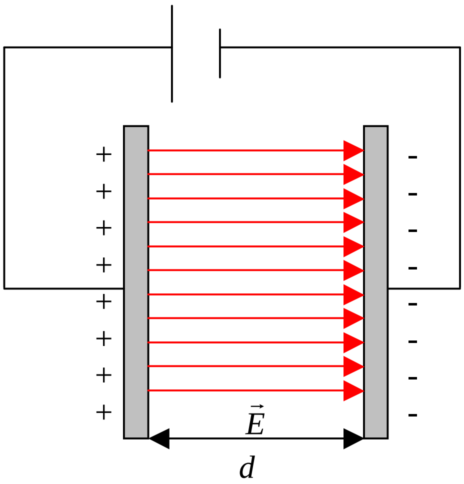
Il campo elettrico varia molto rapidamente all'interno del materiale se, ad esempio, ci spostiamo dall'interno di una molecola, dove è molto intenso, all'esterno, dove è molto piccolo. Dato che elettroni e nuclei sono in continuo movimento, il campo elettrico varierà molto rapidamente nel tempo. E' questo il vero campo elettrico a livello microscopico.
Chiameremo campo elettrico *macroscopico* la media del campo elettrico microscopico su di un volume "fisicamente infinitesimo" attorno al punto considerato e su di un intervallo di tempo infinitesimo attorno all'istante considerato.

Su una superficie equipotenziale tuttavia, densità di carica e campo appena fuori del conduttore variano da punto a punto. Per *densità di carica* σ intendiamo una media su volumi "fisicamente infinitesimi" (cioè molto piccoli rispetto alle dimensioni macroscopiche, ma grandi rispetto alle dimensioni delle molecole).

Detta σ la densità superficiale di carica, essendo $V = \frac{kq}{r}$ il potenziale su una sfera di raggio r, risulta $V = \frac{kq}{r} = \frac{k\sigma 4\pi r^2}{r} \Rightarrow \sigma = \frac{V}{4\pi k r}$. Di conseguenza, due regioni sferiche di raggio $r_1, \quad r_2$ dello stesso conduttore in equilibrio elettrostatico (e quindi allo stesso potenziale) hanno densità di carica superficiale legate tra loro dalla relazione $\sigma_1 4\pi k r_1 = \sigma_2 4\pi k r_2 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}$. Abbiamo dedotto la cosiddetta *proprietà delle punte*: nelle parti "appuntite" la densità superficiale di carica è maggiore.
Questa grande concentrazione di cariche sulle punte è talvolta capace di produrre campi elettrici in grado di spezzare le molecole d'aria presenti, attirando verso di sé gli ioni carichi così formati.
Questo fenomeno ha portato alla realizzazione del parafulmine, che sottrae carica alla nuvola ad esso più vicina prima che questa ne accumuli una quantità sufficiente a ionizzare l'aria e produrre la cosiddetta *scarica a corona*.
In generale, un conduttore posto in una regione in cui è presente un campo elettrico esterno vede le proprie cariche ridistribuirsi in modo da indurre un campo che, all'interno del conduttore, tenda ad equilibrare quello esterno. Questo fenomeno è noto come *induzione elettrostatica*.



14.10 Energia elettrica immagazzinata in un condensatore



Nella carica di un condensatore, le cariche positive vengono portate dall'armatura negativa a quella positiva. Quest'ultima, trovandosi ad un potenziale maggiore di quella negativa, e crescente per via dell'accumulo di cariche positive su di essa, richiede che venga compiuto un lavoro sempre più grande per il trasferimento su di essa delle cariche positive dall'armatura negativa.

Se la carica del condensatore avviene mediante collegamento con una pila, solo metà del lavoro compiuto (dalla pila) è immagazzinato sotto forma di campo elettrostatico, l'altra metà viene dissipata sotto forma di energia termica. Il lavoro necessario per caricare il condensatore dalla carica nulla alla carica Q è: $L = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$, $L_{pila} = QV$.

La *densità di energia* è il lavoro sull'unità di volume:

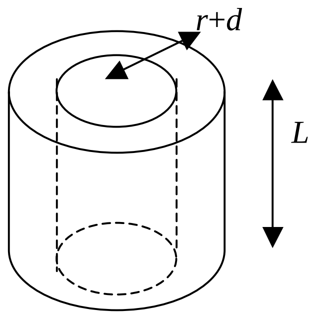
$$L = \frac{CV^2}{2} = \frac{CE^2d^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot \frac{E^2d^2}{2} \Rightarrow \eta = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Problemi

1. Protoni, inizialmente fermi, vengono lasciati liberi di muoversi a un potenziale elettrico di 5 MV ottenuto con un acceleratore di Van de Graaff e si muovono nel vuoto fino ad una regione a potenziale nullo. (a) Se questa variazione di potenziale si ha in un tratto di 2,0m, si trovi il campo elettrico, supponendo che sia uniforme. (b) Si trovi la velocità dei protoni di 5 MV. (La massa del protone è $1{,}67 \cdot 10^{-27} kg$.)
   - Dalla relazione $E = \frac{\Delta V}{d}$ segue $E = \frac{5 \cdot 10^6 V}{2{,}0m} = 2{,}5\frac{MV}{m}$.
   - Per il principio di conservazione dell'energia risulta $\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = 3{,}1 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$.

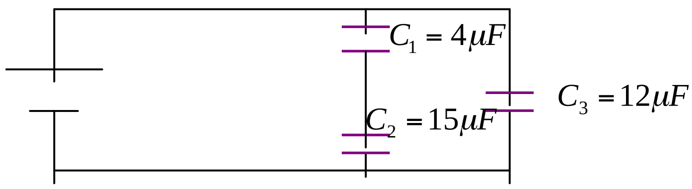
2. Il potenziale dovuto a una carica Q distribuita uniformemente su un conduttore sferico di raggio R è $\frac{kQ}{r}$ per $r \geq R$. (a) Qual è il potenziale nella regione $r \leq R$?
   - Per il teorema di Gauss il campo elettrico all'interno della sfera ($r \leq R$) è dato dalla relazione: $\Phi_E = 4\pi r^2 E = 4\pi k\rho \frac{4}{3}\pi r^3$, $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, di conseguenza $E = \frac{kQr}{R^3}$. Dalla relazione $E = \frac{V}{r} \Rightarrow V = Er = \frac{kQr^2}{R^3}$.

3. La membrana di un assone di un neurone è una sottile guaina cilindrica avente il raggio $r = 10^{-5}m$, la lunghezza $L = 0{,}1m$ e lo spessore $d = 10^{-8}m$. La membrana ha una carica positiva da un lato ed una negativa dall'altro e si comporta come un condensatore piano di area $A = 2\pi rL$ e distanza tra le armature *d*. La sua costante dielettrica relativa è all'incirca $\varepsilon_r = 3$. (a) Si trovi la capacità della membrana. Se la differenza di potenziale applicata alla membrana è $\Delta V = 70mV$, si trovino (b) la carica su ciascun lato della membrana e (c) il campo elettrico tra le due superfici.



- (a) $C = 3\varepsilon_0 \dfrac{A}{d} = 3\varepsilon_0 \dfrac{2\pi rL}{d} = \dfrac{3 \cdot 2\pi \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{9} \cdot 10^{-8}} = 1{,}67 \cdot 10^{-8} F = 16{,}7 nF$.
- (b) $C = \dfrac{Q}{\Delta V} \Rightarrow Q = C\Delta V = 16{,}7 \cdot 10^{-9} \cdot 70 \cdot 10^{-3} = 1{,}17 \cdot 10^{-9} C = 1{,}17 nC$.
- (c) $E = \dfrac{\Delta V}{d} = \dfrac{70 \cdot 10^{-3} V}{10^{-8} m} = 7 \cdot 10^{6} \dfrac{V}{m} = 70 \dfrac{MV}{m}$.

4. Per la disposizione mostrata in figura si trovino (a) la capacità equivalente, (b)la carica immagazzinata in ciascun condensatore, (c) l'energia totale immagazzinata.



- (a) Si calcola la capacità equivalente dei due condensatori in serie: $C_{12} = \dfrac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{60}{19} = 3{,}16\mu F$, successivamente la capacità equivalente del parallelo $C_{12} - C_3$: $C_{123} = C_{12} + C_3 = 15{,}16\mu F$.
- (b) La carica immagazzinata in ciascun condensatore è:
$$\begin{cases} V_1 + V_2 = V = 200V \\ Q_1 = V_1C_1 = Q_2 = V_2C_2 = Q \Rightarrow \dfrac{Q}{4\mu F} + \dfrac{Q}{15\mu F} = 630\mu C. \\ Q_3 = VC_3 = 2400\mu C \end{cases}$$
- (c) $E = \sum_{i=1}^{3} \dfrac{Q_i^2}{2C_i} = 0{,}303J$.

5. Si dispongano tre condensatori identici in modo da ottenere la massima e la minima capacità equivalente.
   - (Massima capacità equivalente) E' noto che se disponiamo due condensatori in serie di capacità C_1 e C_2, la capacità equivalente è $C_{12} = \dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$. Nel caso particolare in cui questi condensatori hanno la stessa capacità, la capacità equivalente è $C_{12} = \dfrac{C}{2}$, mentre se li colleghiamo in parallelo risulta essere $C_{12} = 2C$. La massima capacità equivalente si otterrà quindi collegando in parallelo i tre condensatori, per un valore $C_{123} = 3C$.

- (Minima capacità equivalente) Colleghiamo in serie tre condensatori. Otteniamo
$$C_{123} = \frac{C_{12}C_3}{C_{12} + C_3} = \frac{\dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}C_3}{\dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2} + C_3} = \frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} = \frac{C}{3}.$$

6. Quando l'uranio ^{235}U cattura un neutrone, esso si spacca in due nuclei, in un processo chiamato fissione nucleare. Si supponga che i due nuclei prodotti nella fissione siano ugualmente carichi con una carica $+46e$ e che questi nuclei siano fermi subito dopo la fissione, con una distanza tra loro $r = 1,3 \cdot 10^{-14}\,m$. (a) Si calcoli l'energia potenziale in elettronvolt. (b) Quante fissioni al secondo sono necessarie per produrre 1 MW di potenza in un reattore?
   - (a) L'energia potenziale si calcola mediante la relazione
   $$U = k\frac{qQ}{r} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (46 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19})^2}{1,3 \cdot 10^{-14}} = 3,74 \cdot 10^{-11}\,J =$$
   $$\frac{3,74 \cdot 10^{-11}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,34 \cdot 10^8\,eV = 234\,MeV$$
   - (b) Se consideriamo l'energia calcolata al punto precedente come relativa ad ogni fissione, il numero di fissioni che devono essere fatte al secondo per ottenere una potenza di 1 MW è pari a
   $$\Delta t = \frac{U}{P} = \frac{3,74 \cdot 10^{-11}}{1 \cdot 10^6} = 3,74 \cdot 10^{-5}\,s \Rightarrow N = \frac{1s}{3,74 \cdot 10^{-5}\,s} = 2,67 \cdot 10^4 \text{ fissioni.}$$