

QUESITI DI ELETTROMAGNETISMO

1. IL CAMPO ELETTRICO

1. **Da cosa è suggerita la suddivisione delle sostanze in conduttori e dielettrici?**

- In base alla velocità con cui viene lasciata sfuggire la carica elettrica le sostanze possono essere divise in due gruppi: DIELETTRICI e CONDUTTORI.

2. **Qual è l'intensità della forza con cui interagiscono tra loro due oggetti, posti alla distanza di un metro l'uno dall'altro, se acquistano 1C di carica?**

$$\bullet \quad F = k \frac{q_A q_B}{R^2}, \quad k = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \quad \text{Dalla grandezza}$$

della costante k , segue che due oggetti posti alla distanza di un metro e caricati con 1 C di carica, esercitano l'uno sull'altro una forza di 9 miliardi di Newton!

3. **Cosa significa che un corpo è “elettricamente neutro”? Come si comporta quando viene posto nelle vicinanze di un corpo carico?**

- Oggetti elettricamente neutri possiedono un ugual numero di cariche positive e negative. Posti nelle vicinanze di un corpo carico, vedono ridistribuirsi le cariche all'interno o sulla superficie: è il fenomeno dell'*induzione elettrostatica*.

4. **Com'è definito e come si rappresenta il campo elettrico?**

- Una carica Q è origine in ogni punto dello spazio di un **campo elettrico** $E = \frac{kQ}{R^2}$ che si manifesta su una carica di prova q posta in un punto a distanza R da Q , mediante una forza $F = q \frac{kQ}{R^2} = Eq$. La direzione è quella della forza che agisce su una carica di prova *positiva*. Un campo di forze viene rappresentato mediante delle linee tangenti in ogni punto alla direzione del campo. Linee di campo distinte non possono “incrociarsi”, perché vorrebbe dire che in quel punto il campo assume due direzioni, e ciò non può accadere.

5. **Con quale criterio si tracciano le linee di campo?**

- Le caratteristiche delle linee di forza del campo elettrico sono le seguenti:
 - a) le linee partono o finiscono sempre sulle cariche, e per ogni punto passa solo una linea di forza;
 - b) il numero delle linee di forza è proporzionale alla grandezza della carica (*teorema di Gauss*);
 - c) non esistono linee di campo chiuse su se stesse.
 Convenzionalmente, le linee vengono tracciate in numero tale che *la loro densità risulti proporzionale all'intensità del campo*.

6. **Cosa rappresenta il “flusso” del campo elettrico? Come si calcola?**

- Il numero di linee di forza (o di campo, o di flusso, sono tutti sinonimi che si possono incontrare in letteratura) che attraversano la superficie si dice *flusso del campo elettrico*. Indichiamo con \vec{n} la direzione normale uscente dall'*elemento di superficie* ΔS (una porzione di superficie piccola in modo tale da potersi considerare piana), l'*elemento di flusso* è dato dalla relazione: $\Delta\Phi = E \cdot \Delta S \cos\theta$, dove l'angolo θ è compreso tra la direzione normale e la direzione del campo elettrico.

7. **Si dimostri il teorema di Gauss per il campo elettrico, e si calcoli il flusso attraverso una superficie esterna alla carica.**

- **Teorema di Gauss.** *Il flusso del campo elettrico è direttamente proporzionale alla carica che lo produce* $\Phi = 4\pi kQ = \frac{Q}{\epsilon}$. *Dimostrazione.* Consideriamo una superficie sferica di raggio r

che racchiude la carica Q . La geometria della sfera è tale che il campo è perpendicolare in ogni punto della superficie alla superficie stessa, di conseguenza gli elementi di flusso possono essere scritti come $\Delta\Phi = E \cdot \Delta S = k \frac{Q}{r^2} \cdot \Delta S$. Il flusso totale si ottiene sommando i contributi dei singoli elementi di flusso:

$\Phi = \sum E \cdot \Delta S = \sum k \frac{Q}{r^2} \cdot \Delta S = k \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow \Phi = 4\pi kQ$. La dimostrazione si estende al caso di una superficie chiusa *qualsiasi* che racchiude la carica Q , osservando che il numero di linee di forza uscenti dalla superficie generica è uguale al numero di linee che escono dalla superficie sferica in essa contenuta, e che racchiude la carica Q . E' semplice osservare che il flusso è zero se la carica è esterna alla superficie; infatti, tante linee entrano e tante linee escono dalla superficie.

2. IL POTENZIALE ELETTRICO

8. Cos'è un condensatore?

- Dopo il 1750 inizia la costruzione di macchine elettriche allo scopo di caricare oggetti, dove sfere e cilindri di dimensioni considerevoli vengono posti in rotazione strisciando su cuscinetti di pelle, e trasferendo poi la *carica accumulata* ad un grande oggetto metallico posto nelle vicinanze. I dispositivi atti all'accumulo di cariche si chiamano **condensatori**.

9. Com'è definita, e cosa descrive, la "differenza di potenziale"?

- La differenza di potenziale rappresenta l'*energia per unità di carica* acquistata dalla carica in moto, *a spese del lavoro compiuto dalle forze del campo, indipendentemente dal cammino percorso*: $\frac{\Delta W_{AB}}{q} := V_B - V_A = \Delta V$, dove ΔW_{AB} è il lavoro compiuto dalle forze del campo quando la carica si sposta dal punto A al punto B, e $\Delta V = V_B - V_A$ è la **differenza di potenziale elettrico**, che si misura in Volt: $V = \frac{J}{C}$.

10. Si determini la DDP nel caso di un campo elettrico prodotto da una singola carica.

Siano P_a, P_b due punti a distanza rispettivamente $r_a, r_b, r_a < r_b$, e sia q_0 la carica di prova positiva che viene spostata da P_b a P_a a velocità costante. Poiché la forza elettrostatica dipende dalla distanza, l'intensità del campo elettrico (e, di conseguenza, quella della forza che dobbiamo esercitare per vincere la repulsione elettrostatica) non è costante. Il lavoro necessario per effettuare lo spostamento viene quindi calcolato sommando i contributi infinitesimi $\Delta L = F\Delta r$, dove

$$\Delta r = \frac{r_b - r_a}{n} \text{ e } F \text{ è la forza media calcolata sul trattino infinitesimo } [r_k, r_{k+1}): F = \frac{kQq_0}{r_k r_{k+1}}, \Delta r = r_{k+1} - r_k,$$

$r_0 = b, r_n = a$. Di conseguenza:

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta L = \sum_{k=0}^{n-1} F \Delta r = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{kQq_0}{r_k r_{k+1}} (r_{k+1} - r_k) = kQq_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_{k+1}} \right) = kQq_0 \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right).$$

$$r_b = \infty, V_b = 0, \quad r_a = r, V_a = V: \quad V_a - V_b = \Delta V = \frac{L}{q_0} = kQ \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r} \right) V = -\frac{kQ}{r}.$$

11. Quali inconvenienti si possono avere durante il tentativo di accumulo di carica?

- Durante il tentativo di accumulo della carica su un conduttore si formano in genere due tipi di inconvenienti:

- il campo elettrico che si fa sempre più intenso all'aumentare della carica accumulata, così come la differenza di potenziale tra le pareti del conduttore e gli oggetti (e le persone!) ad esso vicini;
- la ionizzazione delle molecole d'aria per effetto delle forze elettriche che rende l'aria stessa conduttrice, provocando scosse più o meno intense.

12. Si descriva il condensatore a facce piane e parallele.

- Si hanno due lastre metalliche (*armature del condensatore*) piane e parallele, con un'estensione superficiale grande rispetto alla distanza d che le separa, e tra cui è interposto un mezzo isolante (l'ideale sarebbe il vuoto) con costante dielettrica ϵ .

13. Si determini il campo elettrico all'interno di un condensatore a facce piane e parallele.

- Appliciamo il teorema di Gauss scegliendo come superficie matematica chiusa il cilindro con una base interna al conduttore, e l'altra tra le due armature. Se non intervengono campi elettrici esterni le cariche si disporranno uniformemente sulle superfici delle armature. Di conseguenza, detta A la superficie delle armature, S la superficie di base del cilindro, e σ la densità di carica superficiale accumulata sulle armature, risulta: $E \cdot S = \Phi_E = \frac{q}{\epsilon} = \frac{\sigma S}{\epsilon} = \frac{QS}{A\epsilon} \Rightarrow E = \frac{Q}{A\epsilon}$.

14. Com'è definita la "capacità" di un condensatore?

- La quantità $C = \frac{A\epsilon}{d}$ è la cosiddetta *capacità* del condensatore, e si misura in *farad* (F).

La capacità dei normali condensatori è dell'ordine di $10^{-11} F < C < 10^{-4} F$.

15. Quale relazione intercorre tra la carica accumulata sulle armature di un condensatore e la DDP che si stabilisce tra queste?

- $E = \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow \Delta V = Ed = \frac{Qd}{A\epsilon} := \frac{Q}{C}$

16. Cosa avviene in seguito all'interposizione di un dielettrico tra le armature di un condensatore? Quali funzioni svolge?

- Se interponiamo un dielettrico tra le armature di un condensatore, aumenta la capacità di un fattore $\epsilon_r > 1$ detto costante dielettrica relativa. Questo avviene perché il dielettrico indebolisce il campo elettrico tra le armature, dal momento che quest'ultimo polarizza le molecole del dielettrico creando accumuli di carica sulla superficie del dielettrico vicina alle armature. Questo squilibrio di carica origina a sua volta un campo elettrico, \vec{E} , in opposizione a quello originario, \vec{E}_0 . Si forma un campo netto $\vec{E}' = \vec{E}_0 - \vec{E}$ di intensità minore di quella del campo originario \vec{E}_0 :

$$E' = \frac{E_0}{\epsilon_r}. \text{ Di conseguenza la differenza di potenziale si riduce a } V' = E'd = \frac{E_0}{\epsilon_r} d = \frac{V_0}{\epsilon_r}.$$

La nuova capacità del condensatore con il dielettrico interposto tra le armature è

$$\text{dunque: } C' = \frac{Q}{V'} = \frac{Q}{V_0/\epsilon_r} = C\epsilon_r > C.$$

Riassumendo, le tre funzioni del dielettrico sono:

1. Aumenta la capacità del condensatore.
2. Fornisce un mezzo meccanico per la separazione delle cariche.
3. Aumenta la rigidità dielettrica con conseguente aumento della carica (e quindi del potenziale) ritardando la perforazione del dielettrico.

17. **Si calcoli la capacità equivalente di una coppia di condensatori in serie.**

18. **Si calcoli la capacità equivalente di una coppia di condensatori in parallelo.**

- Le armature superiori sono allo stesso potenziale. Fisicamente, l'aggiunta di un condensatore in parallelo aumenta l'area destinata ad ospitare la carica. Di conseguenza aumenta la capacità. Calcoliamo la cosiddetta *capacità equivalente*, cioè la capacità di un condensatore "sostitutivo" di quelli collegati in parallelo. Risulta:
 $Q_1 = C_1 V, \quad Q_2 = C_2 V \Rightarrow (Q = Q_1 + Q_2) \Rightarrow C_{eq} V = Q = C_1 V + C_2 V \Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2.$

19. **In che stato si trovano le cariche libere di un condensatore?**

20. Per caricare la serie si preleva una carica Q dall'ultima armatura a destra (che avrà quindi carica $-Q$) e la si porta sulla prima a sinistra (che avrà quindi carica $+Q$). La coppia costituita dalle armature interne forma un unico conduttore sul quale vengono indotte le cariche $-Q$ su quella interna di sinistra e $+Q$ su quella interna di destra. La differenza di potenziale tra i punti A e B è data dalla somma delle differenze di potenziale tra le armature dei due condensatori. La *capacità equivalente* è quindi data da:

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

21. **Com'è il campo elettrico all'interno di un conduttore in equilibrio?**

- All'interno di un conduttore in equilibrio il campo elettrico è nullo.

22. **Un conduttore in equilibrio è una "superficie equipotenziale"?**

- Un conduttore in equilibrio è una superficie equipotenziale.

23. **Com'è la densità di carica all'interno di un conduttore in equilibrio?**

- All'interno di un conduttore in equilibrio la densità di carica è nulla. Notiamo che ciò non significa che non c'è carica all'interno (il conduttore è "pieno" di elettroni e di nuclei) ma che non c'è carica netta.

24. **Com'è il campo elettrico immediatamente all'esterno di un conduttore in equilibrio?**

- Il campo elettrico immediatamente fuori della superficie di un conduttore in equilibrio è perpendicolare alla superficie e vale $E = E_n = 4\pi k\sigma$. Anche questo risultato segue dall'applicazione del Teorema di Gauss ricordando che il campo elettrico all'interno è nullo, e quindi sarà nulla in particolare la sua componente tangenziale alla superficie.

25. **Cos'è la "proprietà delle punte"?**

- Detta σ la densità superficiale di carica, essendo $V = \frac{kq}{r}$ il potenziale su una sfera di

raggio r , risulta $V = \frac{kq}{r} = \frac{k\sigma 4\pi r^2}{r} \Rightarrow \sigma = \frac{V}{4\pi k r}$. Di conseguenza, due regioni

sferiche di raggio r_1, r_2 dello stesso conduttore in equilibrio elettrostatico (e quindi allo stesso potenziale) hanno densità di carica superficiale legate tra loro dalla

relazione $\sigma_1 4\pi k r_1 = \sigma_2 4\pi k r_2 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}$. Abbiamo dedotto la cosiddetta *proprietà delle*

punte: nelle parti "appuntite" la densità superficiale di carica è maggiore.

26. **Si quantifichi il lavoro necessario per caricare un condensatore.**

- Se la carica del condensatore avviene mediante collegamento con una pila, solo metà del lavoro compiuto (dalla pila) è immagazzinato sotto forma di campo elettrostatico, l'altra metà viene dissipata sotto forma di energia termica. Il lavoro necessario per caricare il condensatore dalla carica nulla alla carica Q è:

$$L = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}, \quad L_{pila} = QV.$$

3. LA CORRENTE ELETTRICA

27. Come funziona, e cosa è in grado di produrre, la “pila di Volta”?

- Nel 1800 Volta scoprì che due pezzi di metallo diversi, impugnati ciascuno con un manico isolante, se messi prima a contatto e poi separati, uno si caricava positivamente, l'altro negativamente. L'idea di Volta fu quella di sovrapporre alternatamente dei dischi di metallo diversi (argento caricato positivamente e zinco caricato negativamente), la cosiddetta “*batteria di Volta*”. Con questo dispositivo Volta riuscì a produrre una corrente elettrica *costante* per un lungo periodo di tempo, a differenza di quella che era possibile ottenere per strofinio, oppure scaricando un condensatore.

28. Si definisca l'intensità di corrente, e si spieghi come può essere prodotta

- Attraverso una sezione di un conduttore passa una carica q nel tempo t . L'intensità della corrente è data dal rapporto $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$. Una corrente costante (nel tempo) viene detta *continua*. Per produrre una corrente occorre stabilire una DDP tra due punti di un conduttore. Tuttavia, le cariche in moto tendono ad annullare il campo elettrico e, di conseguenza, la DDP. Quello che serve è quindi un *generatore elettrico* che mantenga continuamente la DDP e quindi le cariche in moto. All'interno del generatore (che può essere una comune pila di Volta) il moto delle cariche è dovuto alle reazioni chimiche, mentre nel conduttore è dovuto al campo.

29. Si enuncino le “leggi di Ohm” e se ne discutano le possibili conseguenze

- Nel 1826, G. S. Ohm scoprì che nella maggior parte dei conduttori, *la differenza di potenziale è proporzionale alla corrente*: $V = RI$ (I legge di Ohm). La costante di proporzionalità R è detta *resistenza* e si misura in Ohm ($1\Omega = \frac{V}{A}$). La resistenza è *proporzionale alla lunghezza del filo ed inversamente proporzionale alla sezione*: $R = \rho \frac{l}{S}$, dove ρ indica la resistività, e si misura in $\Omega \cdot m$ (II legge di Ohm). La resistività dipende dalla temperatura secondo la legge $\rho = \rho_{20}(1 + \alpha(t - 20^\circ C))$, dove α è una costante che dipende dal materiale. Sotto una certa *temperatura critica* esistono metalli con *resistività nulla*. Tali metalli si dicono *superconduttori*. In un materiale superconduttore, di fatto, si può avere passaggio di corrente anche in assenza di campo elettrico. La legge di Ohm non è una legge generale come quella di Coulomb; è una relazione empirica che tale per i cosiddetti *conduttori ohmici*, nei quali i valori tipici della resistività vanno da 10^{-8} a $10^{-7} \Omega \cdot m$, mentre nei *semiconduttori* vanno da 10^{-1} a $10^4 \Omega \cdot m$, e negli *isolanti* vanno da 10^{11} a $10^{16} \Omega \cdot m$.

30. Quale relazione sussiste tra la corrente elettrica e il calore?

- Il moto di cariche in un conduttore viene ostacolato dagli atomi che lo costituiscono: le cariche vi urtano contro e cedono parte della loro energia cinetica, dovuta al lavoro compiuto su di esse dalle forze del campo, sotto forma di calore. Dalla relazione $L = Vq$ segue $P = \frac{L}{t} = \frac{Vq}{t} = IV$: la potenza assorbita e trasformata in calore all'interno di un conduttore nel quale circola una corrente I , ed ai cui estremi è applicata una DDP V è quindi data dalla relazione: $P = IV$. Si può utilizzare la legge di Ohm per scrivere in una forma alternativa la potenza dissipata: $P = I^2 R$. La dipendenza del calore dissipato nell'unità di tempo è una scoperta da attribuire a Joule ed è ancora oggi associata al nome del suo scopritore: *effetto Joule*.

31. In quale situazione può verificarsi un “corto circuito”?

- Si ha un *corto circuito* quando vengono collegati due punti di un circuito a resistenza nulla. Per la legge di Ohm la tensione ai suoi capi è trascurabile, e la corrente può crescere fino a valori talmente elevati da provocare la fusione dei conduttori per effetto Joule.

32. Si determinino le resistenze equivalenti di due resistori collegati in serie/parallelo.

- Percorrendo un circuito costituito da un generatore di fem e da due resistori in serie, per la legge delle maglie e quella di Ohm risulta: $\varepsilon = IR_1 + IR_2$. La resistenza equivalente è quindi $\varepsilon = IR_{eq} = IR_1 + IR_2 \Rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2$. Nel caso in cui i due resistori sono collegati in parallelo, quando la corrente I giunge al nodo, questa si divide nei due rami su cui si trovano gli utilizzatori; per la legge dei nodi risulterà $I = I_1 + I_2$. Tuttavia, i due utilizzatori si trovano alla stessa differenza di potenziale, quella della fem , per cui $\frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

33. Si classifichino i conduttori (ideali, ohmici normali, non ohmici)

- In base alle cause del moto i conduttori possono essere classificati in
 - *ideali*: una volta prodotta la corrente resta costante anche in assenza di campo elettrico (e quindi di generatore). Non accade mai in condizioni normali, bensì vicino allo zero assoluto per alcuni materiali, detti *superconduttori* ($R = 0 \Rightarrow V = IR = 0$ anche con $I \neq 0$).
 - *Ohmici normali*: le cariche si muovono sotto l'azione del campo elettrico. Si muovono gli elettroni esterni che, per agitazione termica, acquistano energia sufficiente per liberarsi dal nucleo; sono per questo motivo detti *elettroni di conduzione*. Gli ioni, atomi non più neutri, che restano formano un *reticolo cristallino* tra le cui maglie si muovono gli elettroni di conduzione in modo disordinato non producendo alcuna corrente misurabile. In presenza di campo si muovono in *direzione opposta* a quella del campo con una velocità detta *di deriva* piccola ($10^{-3} \frac{m}{s}$ contro i $10^6 \frac{m}{s}$ delle velocità termiche), sufficiente però a formare una corrente. Durante il moto gli elettroni di conduzione, urtando con gli ioni del reticolo, perdono l'energia acquistata dal campo elettrico; quest'ultimo dovrà quindi accelerarli per mantenerli in moto ordinato.
 - *Non ohmici*: in presenza di campo elettrico esterno *varia* la densità dei portatori di carica, ad esempio nel caso di un filamento metallico che, riscaldato sufficientemente, emette elettroni, facendone così variare la densità.

4. IL CAMPO MAGNETICO

34. Qual è la differenza fondamentale tra cariche elettriche e poli magnetici?

- A differenza delle cariche elettriche, che si trovano anche isolate, i poli magnetici si presentano sempre a coppie.

35. Come fu scoperto il collegamento tra elettricità e magnetismo?

- Il collegamento tra elettricità e magnetismo fu scoperto solo nel XIX secolo, quando **Oersted** scoprì l'influenza della corrente sull'orientazione dell'ago di una bussola.

36. Si quantifichi la forza agente su un ago magnetico, quando questo viene posto su un piano orizzontale bucato, attraversato da un lungo filo verticale percorso da corrente.

- Osservando la rotazione di un ago magnetico, posto su un piano orizzontale attraversato da un lungo filo verticale percorso da corrente, si nota, dopo un'iniziale oscillazione dell'ago, il raggiungimento di un equilibrio: il momento della forza agente sul polo nord è quindi opposto a quello agente sul polo sud, $F_N r_N = F_S r_S$. Questa relazione vale indipendentemente dalla posizione del piano orizzontale in cui viene disposto inizialmente l'ago magnetico, e dalle dimensioni dell'ago stesso. Indicata con r la distanza del polo magnetico (punta dell'ago) dal filo, e con I la corrente circolante nel filo, la forza agente è direttamente proporzionale alla corrente

circolante (raddoppiare la corrente equivale ad aggiungere un secondo filo) ed inversamente proporzionale a r : $F = k \frac{I}{r}$.

37. Si descriva l'andamento delle linee di campo magnetico prodotto da una sbarretta, e da un filo percorso da corrente.

- Nel caso della sbarretta, le linee sono chiuse e convenzionalmente partono dal polo nord e arrivano al polo sud; in quello del filo invece, le linee di forza sono circonferenze concentriche, disposte su un piano perpendicolare al filo, con centro coincidente con il punto d'intersezione del filo con il piano.

38. Si descriva il campo magnetico in un punto a distanza r da un lungo filo percorso da una corrente di intensità I .

- Il campo magnetico in un punto a distanza r dal filo è una grandezza fisica vettoriale, e viene usualmente rappresentato dal vettore \vec{B} , la cui direzione è perpendicolare al piano contenente il filo e la congiungente il punto con il filo, ed il cui verso è dato dalla *regola della mano destra*, nel senso in cui questa si chiude, con il pollice che rappresenta il verso della corrente nel filo. L'intensità è diretta conseguenza della forza $F = k \frac{I}{r}$, è indipendente dalla carica magnetica (così come il campo elettrico è indipendente dalla carica di prova) e la sua espressione è $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

39. Si enunci il teorema di Ampère.

- Calcoliamo adesso il lavoro compiuto per muovere un polo magnetico lungo una linea del campo ($\vec{\Delta l}$ è l'elemento di linea, l'arco infinitesimo $\Delta l = R\Delta\theta$):

$$W = \sum \vec{F} \cdot \vec{\Delta l} = \sum k \frac{I}{R} R\Delta\theta = 2\pi k I$$
 Ampère ripeté questo calcolo facendo variare il cammino ogni volta, con la sola condizione che questo doveva essere *chiuso* e che i fili (anche più di uno!) percorsi da corrente dovevano essere *concatenati* con il cammino considerato. Quello che ottenne fu un risultato di importanza fondamentale, una *legge della fisica*, nota come *teorema di Ampère*, e formulata non in termini di lavoro compiuto da una forza, bensì in quelli di *circuitazione di un campo lungo un cammino*: $\sum B_t \Delta l = \mu_0 I_{tot}$.

40. Si determini l'espressione del campo magnetico all'interno di un lungo solenoide percorso da corrente.

- Osserviamo preliminarmente che le linee di campo sono identiche a quelle prodotte da un magnete a sbarra: se N è il numero di spire e se il quadrato di lato b è la curva scelta per l'applicazione del teorema di Ampère, nel tratto I_1 , risulta che

$$\sum B_t \Delta l = \mu_0 I_{tot} \Rightarrow bB = \frac{N}{l} b \mu_0 I \Rightarrow B = \mu_0 \left(\frac{N}{l} \right) I$$
 Nei tratti I_2, I_4 la componente del campo magnetico tangente alla curva è nulla, mentre nel tratto I_3 il campo magnetico è di intensità trascurabile. Sopravvive solo il termine nel primo tratto considerato, quindi il campo all'interno del solenoide è: $B = \mu_0 \left(\frac{N}{l} \right) I$

41. Si enunci la legge di Biòt-Savart, e la si utilizzi per il calcolo del campo magnetico al centro di una spira circolare percorsa da corrente.

- Nel caso di un filo di *forma* qualsiasi, le ricerche condotte al fine di valutare il campo magnetico a distanza r , hanno portato al risultato noto come *legge di Biot-Savart*, che esprime la proporzionalità diretta del campo con la componente perpendicolare del vettore elemento di corrente $I\vec{\Delta l}$ alla congiungente l'elemento con il punto P , e la

proporzionalità inversa al quadrato della distanza r : $\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l \sin \theta}{r^2}$. Nel caso in

$$B = \sum \Delta B = \sum \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l \sin 90^\circ}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sum \Delta l$$

questione risulta

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

42. Si descriva l'interazione tra due lunghi fili paralleli percorsi da corrente.

- Ampère riuscì a determinare l'azione tra due lunghi fili paralleli percorsi da corrente, in termini di forza riferita all'unità di lunghezza del filo: $\frac{F_2}{\Delta l_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$. La forza riferita all'unità di lunghezza $\frac{F_2}{\Delta l_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} = -\frac{F_1}{\Delta l_1}$ è attrattiva se le correnti sono equiverse, repulsiva altrimenti. Questo concetto è basilare per la definizione di **Ampère**: *nei fili posti alla distanza di 1 m circola la corrente di 1 A se la forza riferita all'unità di lunghezza è $2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$.*

43. Qual è l'azione di un campo magnetico uniforme su una carica in moto a velocità in modulo costante?

- Sperimentalmente si è verificato che l'azione di un campo magnetico su una carica q in moto con velocità \vec{v} nello spazio fornisce i seguenti risultati per la forza magnetica:
 - La forza è direttamente proporzionale al valore della carica q ;
 - La forza è direttamente proporzionale al modulo della velocità v ;
 - Modulo e direzione dipendono da \vec{B} e da \vec{v} . In particolare, se θ è l'angolo formato da \vec{B} e da \vec{v} , la forza è proporzionale a $\sin \theta$ ed ha, direzione perpendicolare al piano formato dai vettori campo magnetico e velocità e verso determinato dalla regola della mano destra, tenendo conto del segno della carica. Questi risultati possono essere riassunti dalla relazione $F = qvB \sin \theta$.

44. Enunciare il teorema di Gauss per il magnetismo.

- L'ago magnetico di una bussola è mosso dalla componente orizzontale del campo magnetico terrestre: ruota fino a disporsi nella direzione del cosiddetto *meridiano magnetico*. L'angolo locale tra il meridiano magnetico e quello geografico è detto *declinazione*. Le linee del campo magnetico sono chiuse, poiché non esistono monopoli magnetici, di conseguenza il flusso del campo magnetico (statico) uscente da una superficie matematica arbitraria chiusa è zero. Questo risultato costituisce il cosiddetto **Teorema di Gauss per il campo magnetico statico**: $\Phi_B = 0$.

45. Si spieghi il significato fisico della grandezza momento magnetico nel caso di una sbarretta magnetica posta in una regione in cui è presente un campo \vec{B} .

- La grandezza *momento magnetico del magnete* è definita così: $\vec{m} = q_m \vec{l}$, dove il vettore \vec{l} va dal polo Sud al polo Nord della sbarretta magnetica, e q_m indica la *carica magnetica*. Il momento meccanico prodotto dalla coppia di forze agenti sui poli induce l'allineamento del momento magnetico \vec{m} con il campo \vec{B} .

46. Si spieghi il significato fisico della grandezza momento magnetico nel caso di una spira rettangolare percorsa da corrente, posta in una regione in cui è presente un campo \vec{B} .

- Una piccola spira percorsa da corrente posta in un campo magnetico esterno si comporta in modo molto simile ad un piccolo magnete a sbarra. Sui lati corti non agiscono forze magnetiche, mentre sui lati lunghi le forze agenti, di modulo $F = IaB$,

producono un momento (rispetto al centro della spira) pari

a $M = F_1 \frac{b}{2} + F_2 \frac{b}{2} = Fb = IabB$. Il momento della forza è dunque proporzionale alla

corrente circolante, al campo magnetico \vec{B} e all'area della spira, A . Definiamo la grandezza fisica *momento magnetico* della spira, la cui direzione è perpendicolare al piano della spira, il verso concorde con il pollice della mano destra quando questa si chiude nel senso di percorrenza della corrente circolante nella spira, ed il modulo uguale a $m = IA$. Definita la grandezza momento magnetico, il momento agente sulla spira è, di conseguenza, $M = IAB \sin \theta = mB \sin \theta$, dove θ è l'angolo tra il vettore momento magnetico \vec{m} ed il vettore campo magnetico \vec{B} . *Come nel caso del magnete a sbarra, il momento di forza tende ad allineare il momento magnetico con la direzione del campo magnetico.*

47. Si dimostri che il periodo dell'orbita di una particella carica in moto in una regione dove è presente un campo magnetico uniforme non dipende né dal raggio, né dalla velocità della particella.

- L'applicazione della seconda legge di Newton porta alle relazioni:

$$F = ma$$

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

Risulta evidente, dall'ultima relazione, che il

$$r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow v = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}.$$

periodo e la frequenza non dipendono né dal raggio dell'orbita, né dal modulo della velocità della particella. Il periodo è chiamato *periodo di ciclotrone*.

48. Cosa sono le “fasce di Van Allen”?

- Una configurazione interessante è rappresentata dalla cosiddetta *bottiglia magnetica*, nella quale vengono confinate dense “nubi” di particelle cariche (*plasma*): tali particelle, per effetto della forma delle linee di campo magnetico, restano intrappolate e costrette a muoversi avanti e indietro (*effetto specchio*) in una limitata regione di spazio. Un esempio reale di questo tipo di configurazione è rappresentato dalle cosiddette *Fasce di Van Allen*, regioni ad alta densità di particelle cariche che circondano la terra; i protoni sono intrappolati nelle fasce interne, mentre gli elettroni in quelle esterne.

49. Com'è possibile utilizzare i raggi catodici per il calcolo del rapporto $\frac{e}{m}$?

- Campi elettrici e magnetici opportunamente orientati possono modellare la traiettoria di una particella carica e determinarne la velocità. Gli elettroni emessi dal catodo (trovandosi questo ad un potenziale più basso rispetto all'anodo) giungono in prossimità di un condensatore con una velocità v , che vogliamo determinare, orizzontale. Il campo elettrico devierà la traiettoria degli elettroni nello stesso modo con cui il campo gravitazionale devia la traiettoria di un corpo lanciato da una certa altezza con una velocità iniziale orizzontale. L'applicazione di un campo magnetico orientato nel verso uscente, e di intensità opportuna, produce una forza magnetica che si oppone a quella elettrica; la carica seguirà, di conseguenza, una traiettoria

rettilenea: $F_B = F_E \Rightarrow evB = eE \Rightarrow v = \frac{E}{B}$. Da questa espressione della velocità è

dunque possibile calcolare il rapporto $\frac{e}{m} = \frac{2\Delta y E}{\Delta x^2 B^2}$, dove $\Delta y = \frac{1}{2} \left(\frac{eE}{m} \right) \frac{\Delta x^2}{v^2}$

5. L'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

50. **Dopo aver introdotto il concetto di “flusso magnetico”, si dica cosa comporta la sua variazione nel tempo.**

- L'elemento di flusso magnetico è dato dal prodotto del componente del campo normale all'elemento di superficie, per l'area dell'elemento di superficie; in simboli: $\Phi_m = B_{\perp} A = BA \cos \theta$, $[\Phi_m] = Wb$ (Weber), dove θ indica l'angolo tra il vettore campo magnetico e la normale all'elemento di superficie. Il flusso magnetico attraverso una bobina di N spire è: $\Phi_m = NB_{\perp} A = NBA \cos \theta$. Dagli esperimenti di Faraday e di Henry risulta che, se il flusso del campo magnetico varia nel tempo, si induce nel circuito una f.e.m. $\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi_m}{\Delta t}$ (**legge di Faraday-Neumann-Lenz**).

51. **Si spieghi il significato fisico della legge di Lenz.**

- Il segno “-” nell'espressione della legge di Faraday-Neumann-Lenz (*legge di Lenz*) rappresenta l'opposizione della f.e.m. indotta e della corrente indotta alla variazione del flusso magnetico che le produce.

52. **Cosa succede quando una spira ed un magnete si muovono relativamente?**

- Consideriamo, ad esempio, un magnete in movimento attraverso una spira che ha una resistenza R . Il moto del magnete aumenta il flusso del campo magnetico attraverso la spira (che risulta attraversata da un numero di linee di forza concatenate sempre maggiore). Conseguenza di ciò è la produzione nella spira di una corrente indotta circolante in senso tale da produrre un campo magnetico indotto, il cui flusso si oppone (in questo caso va a decremento) a quello del magnete.

53. **Quali osservazioni hanno portato all'introduzione della grandezza fisica nota come induttanza?**

- Consideriamo una bobina percorsa da una corrente I . Poiché il campo magnetico della bobina nelle sue vicinanze è proporzionale a I , lo sarà anche il flusso magnetico concatenato con la bobina: $\Phi_m = LI$, dove il coefficiente di proporzionalità L è detto **induttanza propria** (o **autoinduttanza**). Tale coefficiente dipende dalla forma geometrica della bobina, così come la capacità dipende dalla disposizione geometrica delle armature di un condensatore. L'unità di misura dell'induttanza è l'**Henry (H)** che equivale al $\frac{Wb}{A} = \frac{T \cdot m^2}{A}$.

54. **Si determini l'espressione dell'induttanza nel caso di un lungo solenoide.**

- All'interno del solenoide il campo è dato da: $B = \mu_0 \frac{N}{l} I$. Se A è l'area della sezione del solenoide, il flusso magnetico attraverso le N spire è: $\Phi_m = NAB = \mu_0 \frac{N^2}{l} AI$, di conseguenza l'induttanza è $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A$.

55. **Si deducano le equazioni della carica e della scarica di un circuito RL.**

- Consideriamo un **circuito RL**, in cui sono presenti, oltre al generatore, una resistenza ed un solenoide (elemento induttivo). Le leggi di Kirchhoff e di Ohm applicate a questo circuito portano all'equazione $\varepsilon_0 - L \frac{dI}{dt} = IR \Rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$.

Per quanto riguarda la scarica, si scollega il generatore e l'equazione diventa

$$-L \frac{dI}{dt} = IR \Rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

56. Si descriva il funzionamento di un semplice generatore elettrico in corrente alternata (spira percorsa da corrente ruotante in presenza di campo magnetico uniforme)

- Consideriamo una bobina (spira) percorsa da una corrente I , che ruota in un campo magnetico uniforme B . Le forze dovute al campo magnetico imprimono una rotazione di 90° alla spira. Se, a questo punto, invertiamo il verso di percorrenza della corrente, otteniamo come risultato una rotazione della spira. Invertendo il verso alla corrente ogni “ 180° ” dopo i primi “ 90° ”, la rotazione della spira viene mantenuta, causando una variazione continua del flusso del campo magnetico. Se la spira ruota con frequenza f costante, il moto è circolare uniforme e l'angolo tra il campo magnetico e la normale alla spira è descritto dalla legge $\theta = \omega t = \frac{2\pi}{T} t = 2\pi f t$.

Il flusso magnetico è $\Phi_m = BAN \cos \theta$, dove A è la superficie della spira, N il numero di spire e B il campo magnetico. La variazione dell'angolo causa una variazione del flusso che, dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz, è

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi_m}{\Delta t} = -\frac{d}{dt}(BAN \cos \theta) = -\frac{d}{dt}(BAN \cos \omega t) = -(BAN(-\omega \sin \omega t)) = BAN\omega \sin \omega t.$$

57. Si spieghi il principio di funzionamento del trasformatore.

- Si tratta di dispositivi che, sfruttando la corrente alternata ed il fenomeno della *mutua induzione*, possono far variare la tensione in modo da permettere il passaggio di corrente a bassa intensità, con il risultato di ridurre la dissipazione di potenza per effetto Joule. Un trasformatore è costituito, nella sua versione basilare, da un nucleo di materiale ferromagnetico attorno al quale sono disposti due avvolgimenti. Uno di questi, detto *primario*, è collegato con un generatore di f.e.m. alternata $\varepsilon_p(t)$, ed è costituito da N_p avvolgimenti. Dalla parte opposta del nucleo è disposto un altro avvolgimento, detto *secondario*, costituito da N_s avvolgimenti. Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz viene indotto un campo magnetico nel primario che viene “guidato” all'interno del nucleo, fino a concatenarsi con l'avvolgimento secondario. Il flusso del campo magnetico vale, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$\varepsilon_p = -N_p \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -N_s \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \varepsilon_s. \text{ Da questo segue la relazione che governa il}$$

funzionamento di un trasformatore: $\frac{\varepsilon_p}{N_p} = \frac{\varepsilon_s}{N_s}$. Ora, la potenza immessa nella rete

elettrica è $P = I\varepsilon$, mentre quella dissipata per effetto Joule è $P_j = I^2 R$; per limitare la dissipazione, quindi, occorre che $\varepsilon_s > \varepsilon_p$, ovvero che il trasformatore funzioni in *salita*. Questo è possibile se gli avvolgimenti sono tali che $N_s > N_p$.

58. Si spieghi come viene regolata la circolazione della corrente in un circuito LC.

- Questo tipo di circuito è di fondamentale importanza per trattare la propagazione delle *onde elettromagnetiche*. L'interruttore viene inizialmente chiuso sulla posizione 1 al fine di caricare il condensatore, per un breve intervallo di tempo; successivamente viene chiuso sulla posizione 2. La tensione sulle armature del condensatore $\frac{Q(t)}{C}$ è responsabile di una corrente variabile (dovuta alla scarica del condensatore); alla variazione del flusso del campo magnetico da essa prodotto si oppone la f.e.m. indotta per la legge di Faraday-Neumann-Lenz: $-LI'(t)$. Per la legge di Kirchhoff risulta di conseguenza: $\frac{Q(t)}{C} = -LI'(t) = -LQ''(t) \Rightarrow Q''(t) = -\frac{Q(t)}{LC}$. Stavolta la

funzione che descrive l'andamento temporale della carica sulle armature del condensatore dovrà essere antiproporzionale alla sua derivata seconda, ovvero una funzione del tipo $y = \cos \alpha x$. Di conseguenza, imponendo la condizione che all'inizio

del processo la carica $Q(0) = Q_0$: $Q(t) = Q_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}$.

6. LE EQUAZIONI DI MAXWELL

59. Quali principi possono essere considerati la base della “sintesi di Maxwell”?

- Fondamentale è il concetto di *campo*. 1) Il campo elettrico è generato dalle cariche elettriche, le linee di forza escono dalle cariche positive ed entrano nelle cariche negative. 2) Non esistono poli magnetici isolati (le linee di forza del campo magnetico sono chiuse). 3) Un campo magnetico variabile induce nei conduttori una forza elettromotrice. 4) Le correnti elettriche generano, nello spazio che le circonda, un campo magnetico le cui linee sono chiuse e si avvolgono attorno alla corrente che le produce.

60. Quale fu il grande elemento di novità introdotto da Maxwell?

- Approfondiamo il terzo principio (*legge di Faraday-Neumann-Lenz*). Si parla in realtà di variazione del flusso del campo magnetico, il che significa che se la spira è ferma ed è il campo magnetico a variare, sulle cariche ferme deve agire una forza di natura elettrica, le cui linee di forza “spingono” le cariche lungo la spira. Maxwell giunge così alla seguente generalizzazione: 3) *Un campo magnetico variabile genera un campo elettrico; le linee di questo campo sono chiuse attorno alle linee del campo magnetico che le ha prodotte*. Maxwell partì da questa generalizzazione per formulare un’ipotesi completamente nuova: se un campo magnetico variabile induce un campo elettrico, perché non si può verificare anche l’ipotesi simmetrica, ovvero che *un campo elettrico variabile produce un campo magnetico*? La risposta affermativa a questa domanda fu data da Maxwell introducendo il concetto di *corrente di spostamento*.

60. Cos’è la corrente di spostamento?

- La natura del concetto di corrente di spostamento può essere compresa se pensiamo a cosa succede tra le armature di un condensatore. Quando queste vengono caricate, si forma tra esse un campo elettrico che può essere immaginato come “responsabile” del flusso di cariche positive nell’unità di tempo (corrente) dall’armatura negativa a quella positiva. Ricordando l’espressione del campo elettrico tra le armature di un condensatore, $E = \frac{q}{S\epsilon_0} \Rightarrow q = \epsilon_0 ES \Rightarrow \frac{\Delta q}{\Delta t} = \epsilon_0 \frac{\Delta(ES)}{\Delta t} = \epsilon_0 \frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t}$, si definisce *corrente di spostamento* la grandezza $I_s = \epsilon_0 \frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t}$.

61. A quale conclusione giunse Maxwell in seguito all’introduzione della corrente di spostamento?

- Maxwell, come già detto, partì dalla seguente considerazione: se la variazione di campo magnetico produce campo elettrico (passaggio di corrente), perché non può accadere anche il contrario? Il modulo del campo elettrico \vec{E} tra le armature di un condensatore è dato dall’espressione $E = \frac{q}{S\epsilon_0}$. Quando si aggiunge una carica Δq sull’armatura positiva, il campo aumenta della quantità $\Delta E = \frac{\Delta q}{S\epsilon_0}$. A questa carica è associata una corrente $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$, anche se, fisicamente, le cariche non fluiscono tra le armature, poiché tra queste è, di solito, fatto il vuoto. Il flusso di corrente è garantito dalle cariche che abbandonano l’armatura negativa. C’è quindi una discontinuità

della corrente nell'attraversamento del condensatore. Per superare questa difficoltà Maxwell introdusse il concetto di *corrente di spostamento*, legato in modo naturale a

quello di campo elettrico: $I_s = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \epsilon_0 \frac{\Delta(ES)}{\Delta t} = \epsilon_0 \frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t}$. La relazione $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$

conferma il “raccordo” tra la corrente circolante e la corrente di spostamento.

Indicata con I_c la corrente ordinaria concatenata con le linee chiuse del campo magnetico, il Teorema di Ampere viene scritto nella

forma: $\Gamma_B = \sum B \Delta l \cos \theta = \mu_0 (I_c + I_s) = \mu_0 I_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t}$ (*Teorema di Ampère-Maxwell*) e

così si sancisce che un campo elettrico variabile produce campo magnetico.

62. Si chiarisca il legame tra la sintesi di Maxwell e le onde elettromagnetiche.

- Con la scoperta del fenomeno dell'induzione elettromagnetica inizia lo studio della mutua influenza dei campi elettrici e magnetici, e la conseguente introduzione del concetto di *campo elettromagnetico*. La teoria del campo elettromagnetico, sintetizzata da Maxwell, prevede che la mutua influenza dei campi elettrici e magnetici avvenga a *velocità finita* per mezzo di *onde elettromagnetiche* e non, come si credeva fino a quel momento, a velocità infinita per mezzo di una *azione a distanza*. Lontano da cariche e correnti, nel caso speciale in cui i campi elettrico e magnetico che si inducono a vicenda sono perpendicolari tra loro, ed il piano che li contiene in ogni istante è perpendicolare alla direzione di propagazione, le equazioni di Maxwell assumono la

forma $\Gamma_B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t}$ e $\Gamma_E = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$. Tralasciando i dettagli tecnici, il campo

elettrico e quello magnetico dipendono dalla posizione e dal tempo secondo equazioni del tipo di quella che descrive un'onda viaggiante in un mezzo:

$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$, e $\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$, e si propagano con una velocità nel vuoto pari a

$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$, che è proprio la *velocità della luce* nel vuoto.

63. Come fu possibile trovare una conferma delle previsioni di Maxwell sulla natura delle onde elettromagnetiche?

- Queste prove furono ottenute nel 1888 da *Heinrich Hertz* utilizzando un dispositivo noto come *rocchetto di Ruhmkorff*, consistente in una bobina a induzione tra i cui terminali, a volte, scoccano delle scintille. Queste scintille, in realtà, oscillano tra i terminali; Hertz scoprì che era possibile controllarne la frequenza di oscillazione, e che, se veniva posto un conduttore con due terminali vicino alla bobina, *si aveva produzione di una scintilla tra i terminali del conduttore nello stesso momento in cui scoccava la scintilla tra i terminali della bobina*. Hertz associò la frequenza di oscillazione della scintilla tra i terminali della bobina ad induzione, alla frequenza delle onde elettromagnetiche trasportatrici dei campi elettrici e magnetici indotti, e osservò fenomeni d'interferenza costruttiva e distruttiva, in perfetto accordo con i calcoli sviluppati assumendo come valore della velocità di propagazione quello previsto dalla teoria di Maxwell. La scoperta che un'onda elettromagnetica si propaga nel vuoto con la stessa velocità con cui si propaga la luce, permette ad Hertz di rafforzare l'idea che la luce è costituita da onde elettromagnetiche.

