

## CAPITOLO 20

### FENOMENI QUANTISTICI

#### 20.1 Le lacune della Fisica classica

Attraverso le leggi della meccanica di Newton e quelle dell'elettromagnetismo di Maxwell, si riteneva, fino alla fine dell'800, di poter interpretare ogni fenomeno, macroscopico o microscopico, e di predirne con certezza l'evoluzione nel tempo. In questo quadro, tuttavia, l'impianto della fisica classica non riusciva a spiegare alcuni fenomeni, quali ad esempio la radiazione di corpo nero e l'effetto fotoelettrico.

#### 20.2 La radiazione di corpo nero

Se scaldiamo un corpo alla temperatura iniziale di 300 K, questo emette radiazione elettromagnetica nella regione dell'infrarosso. Un ulteriore aumento della temperatura può arrivare a fargli cambiare colore: ciò significa che sta emettendo radiazione elettromagnetica nella regione della luce visibile.

In generale, l'osservazione dello spettro di emissione suggerisce che la radiazione avvenga su un *continuo* di frequenze. La legge fisica che esprime la velocità di variazione del calore irradiato, per unità di superficie, da un corpo che si trova alla temperatura superficiale  $T$  è la *legge di Stefan*:

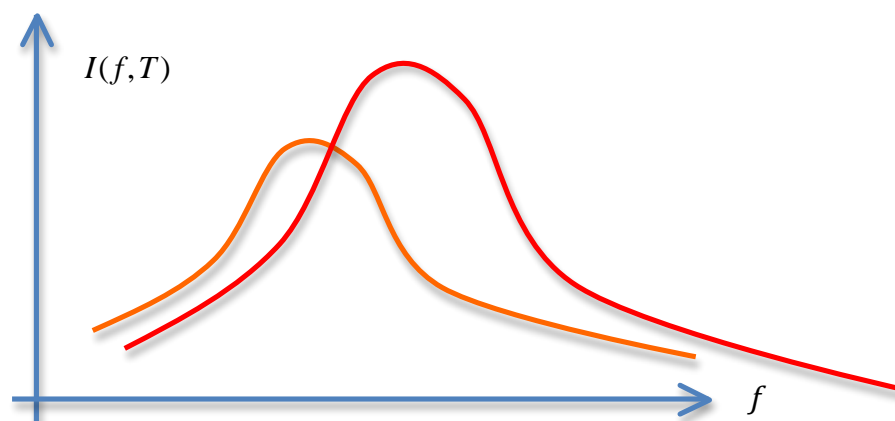
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \Delta A \varepsilon \sigma T^4,$$

dove la *costante di Stefan* è  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^4$ , e l'*emissività* è  $0 < \varepsilon < 1$ .

Radiatori efficienti hanno emissività prossima a uno, mentre radiatori inefficienti, come le superfici perfettamente levigate, hanno emissività prossima a zero.

I *corpi neri* sono emettitori e assorbitori efficienti: per questo si dicono neri, perché appaiono tali (se non sono troppo caldi) rispetto alla luce visibile. La radiazione emessa da questi corpi dipende quindi solo dalla loro temperatura. Il Sole, la cui temperatura superficiale è di circa  $6 \cdot 10^3 \text{ K}$ , è un corpo nero rispetto alla radiazione di frequenza superiore a quella della luce, mentre la Terra, con una temperatura superficiale di un ordine di grandezza inferiore, lo è rispetto a frequenze maggiori di quelle dell'infrarosso.

Un modello di corpo nero è rappresentato da una cavità con una piccola apertura, in modo tale che la radiazione entrante possa essere assorbita dalla cavità, dopo un certo numero di riflessioni, e che ciò accada per tutte le frequenze della radiazione elettromagnetica. Un discorso analogo vale nel caso in cui la cavità, riscaldata, comincia a emettere radiazione elettromagnetica, la cui intensità dipende dalla frequenza e dalla temperatura secondo lo schema in figura, rappresentativo dello *spettro di emissione* di un corpo nero.



Tra il 1899 e il 1905 furono formulati due tentativi d'interpretazione della curva rappresentativa della densità dell'energia di radiazione di un corpo nero (**radianza spettrale**). Ambedue si basano sull'idea che il meccanismo responsabile dello scambio di energia tra materia e campo sia quello dell'*oscillatore*: una carica oscillante con frequenza  $f$ , emette un'onda elettromagnetica con frequenza  $f$ . Lunghezza d'onda e frequenza sono legate tra loro dalla relazione  $c = \lambda f$ .

Lo studio della radiazione elettromagnetica si fonda sull'applicazione del modello dell'oscillatore agli atomi costituenti le pareti della cavità, in equilibrio termico alla temperatura  $T$ .

Secondo il modello di *Rayleigh-Jeans*, l'energia emessa per intervallo di frequenze, per unità di tempo e di superficie, è

$$I(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^2} kT.$$

Il termine  $\bar{E} = kT$  rappresenta l'energia media dell'oscillatore, ed è dovuto all'utilizzo del modello del gas perfetto per la rappresentazione della radiazione termica da parte degli oscillatori.

Il modello di Rayleigh-Jeans si adatta bene alla curva di distribuzione rappresentata in figura soltanto per *basse* frequenze; infatti, poiché l'emissione secondo la teoria classica deve avvenire sul *continuo* delle frequenze, l'energia totale, secondo questo modello, dovrebbe essere infinita: si tratta della cosiddetta *catastrofe dell'ultravioletto*

$$E = \int_0^{+\infty} \frac{8\pi f^2}{c^2} kT df = +\infty.$$

E' in questo quadro che s'inseriscono le idee di *Planck*, che porteranno alla formulazione del modello che descrive la radianza spettrale del corpo nero. Planck considera un corpo nero come costituito da infiniti oscillatori, in numero diverso per ciascuna frequenza, ognuno in grado di emettere energia secondo *multipli interi* di una quantità fondamentale  $hf$ , detta *quanto di energia*, dove

$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  è la cosiddetta *costante di Planck*. L'ipotesi di Planck consiste quindi nella *quantizzazione* dell'energia che, in corrispondenza dei vari livelli in cui questa si può trovare, è data dall'espressione:

$$E_n = nhf.$$

E' storicamente rilevante precisare che lo stesso Planck non era convinto del fatto che la natura potesse avere questo comportamento. Nelle sue intenzioni vi era, infatti, un ritorno all'ipotesi di emissione continua, facendo tendere a zero il valore della costante da lui introdotta.

Ripercorriamo i passi fondamentali che conducono al modello di Planck. Osserviamo innanzitutto che, sulla base di considerazioni statistiche indotte dall'adozione del modello dei gas, il *numero di*

*oscillatori* che emettono energia  $E_n = nhf$  è rappresentato da  $N_n = N_0 e^{-\frac{E_n}{kT}}$ , dove  $N_0$  è il numero di oscillatori che *non* emettono.

L'energia totale è quindi data dalla somma<sup>1</sup>:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} N_n E_n = \sum_{n=0}^{\infty} N_0 e^{-\frac{nhf}{kT}} nhf = N_0 hf \sum_{n=0}^{\infty} n \left( e^{-\frac{hf}{kT}} \right)^n = \frac{N_0 h f e^{-\frac{hf}{kT}}}{\left( 1 - e^{-\frac{hf}{kT}} \right)^2}$$

mentre il numero totale degli oscillatori è:

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} N_0 e^{-\frac{nhf}{kT}} = \frac{N_0}{1 - e^{-\frac{hf}{kT}}}.$$

<sup>1</sup> Ricordiamo che  $S_n = \sum_{k=0}^n kq^k = \frac{1 - q^{n+1} - (1 + nq^{n+1})(1 - q)}{(1 - q)^2}$ , risultato ottenuto dalla valutazione della differenza delle somme  $S_n - qS_n$ , e facendo tendere successivamente  $n$  a infinito.

Di conseguenza, l'energia media di ogni oscillatore è data dalla semplice relazione:

$$\bar{E} = \frac{E}{N} = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}.$$

Il modello di Planck per la radianza spettrale è quindi:

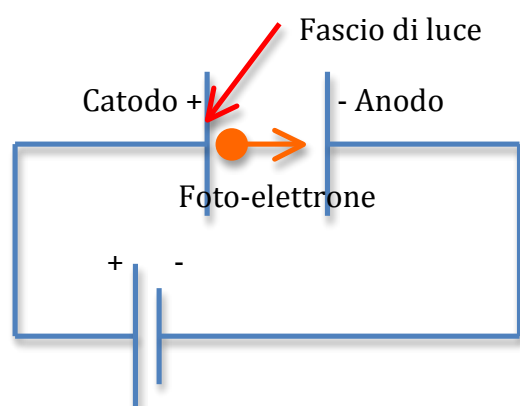
$$I(f, T) = \frac{8\pi hf^3}{c^2 \left( e^{\frac{hf}{kT}} - 1 \right)}.$$

Osserviamo che, per basse frequenze, il termine  $hf/kT$  è molto piccolo, di conseguenza è possibile approssimare al primo ordine il termine  $e^{\frac{hf}{kT}}$  con  $1 + \frac{hf}{kT}$ .

In questo modo l'espressione dell'energia media dell'oscillatore coincide con quella del modello di Rayleigh-Jeans  $I(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^2} kT$ .

### 20.3 L'effetto fotoelettrico

Un fascio di luce monocromatica che colpisce una lastra metallica è in grado di strappare elettroni dalla superficie di questa, vincendo l'energia di legame  $\varphi$ . È possibile studiare il fenomeno in termini di energia attraverso la realizzazione di un semplice dispositivo:



Attraverso l'applicazione di una differenza di potenziale variabile tra catodo e anodo, è possibile decelerare i foto-elettroni emessi dalla superficie della lastra (catodo) finché nessuno di questi sarà più in grado di raggiungere l'anodo. In altre parole, un elettrone può viaggiare dal catodo all'anodo

se la sua energia cinetica  $K = \frac{mv^2}{2}$  è maggiore dell'energia potenziale all'anodo  $U$ . La misura della massima energia potenziale all'anodo  $U_0$  che permette il fenomeno della fotoemissione, consente quindi di stabilire il minimo valore dell'energia cinetica dell'elettrone emesso:  $K = \frac{mv^2}{2} \geq U_0$ . Che

cosa si osserva effettivamente durante la verifica di questo fenomeno?

1. Fissato il valore della frequenza  $f$  della luce incidente,  $U_0$  è indipendente dall'intensità della luce,  $I$ . Maggiore è questa, maggiore è il numero dei fotoelettroni emessi, ma *non* la loro energia cinetica.

2.  $U_0 \propto f$ , ed esiste un valore minimo, detto *frequenza di taglio*  $f_c$ , sotto il quale nessun elettrone viene emesso, *qualunque* sia l'intensità della luce incidente.
3. I fotoelettroni sono emessi *istantaneamente* quando il fascio di luce colpisce il catodo, anche quando l'intensità è molto bassa.

Vediamo adesso come la fisica classica tentava di spiegare il meccanismo della fotoemissione, evidenziando le contraddizioni con l'esperienza.

Se l'energia della luce incidente,  $E_w$ , è maggiore dell'energia di legame  $\varphi$ , si ha l'emissione del fotoelettrone con un'energia cinetica  $K = E_w - \varphi$ . Di conseguenza:

- Se l'*intensità* della luce fosse sufficiente, dovrebbe avvenire l'emissione *indipendentemente* dalla frequenza, mentre si è visto che se  $f < f_c$  questo non avviene.
- La fotoemissione dovrebbe richiedere un certo "tempo di estrazione" dovuto alla natura ondulatoria della radiazione luminosa, in virtù della quale l'energia da questa trasportata è distribuita uniformemente nello spazio, mentre si è visto che l'emissione è istantanea.

La spiegazione di questi fatti, inconciliabili con la teoria classica, è dovuta a Einstein e gli varrà in seguito l'assegnazione del premio Nobel per la Fisica.

Egli ipotizza che l'energia della radiazione luminosa non sia distribuita uniformemente nello spazio, bensì contenuta in *pacchetti*, in seguito denominati *fotoni*, di energia  $E = hf$ , riprendendo così l'ipotesi di Planck con la quale è stato spiegato il fenomeno della radiazione del corpo nero. In questo modo Einstein riesce a spiegare quanto osservato nei tre punti di cui sopra in termini di *urti* fotoni-elettroni, aprendo la strada allo studio del cosiddetto *dualismo onda-particella* circa la natura della radiazione elettromagnetica in generale.

L'ipotesi dei *pacchetti di energia*, conduce alla relazione  $hf = \varphi + K$ , dalla quale segue il valore della

frequenza di taglio ponendo uguale a zero il valore dell'energia cinetica:  $hf - \varphi = K \geq 0 \Rightarrow f_c = \frac{\varphi}{h}$ .

## 20.4 L'effetto Compton

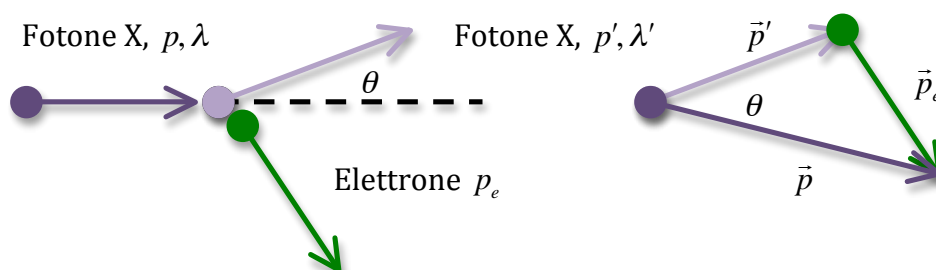
Un altro fenomeno che può essere interpretato alla luce del dualismo onda-particella è il cosiddetto *effetto Compton*, per lo studio del quale occorre fare alcune considerazioni preliminari sui fotoni.

Sappiamo che questi si muovono alla velocità della luce, costituendo essi la radiazione elettromagnetica. Di conseguenza, la loro massa dovrà necessariamente essere uguale a zero,

proprio per il concetto di *massa relativistica*. L'*energia relativistica* del fotone  $\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = E$  è quindi

$$hf = E = pc, \text{ da cui segue l'espressione della quantità di moto } p = \frac{hf}{c} = \frac{hf}{\lambda f} = \frac{h}{\lambda}.$$

Cosa osservò Compton nel 1923? Egli osservò che un fascio di raggi X incidente un bersaglio di grafite, veniva deviato in seguito all'urto di un certo angolo  $\theta$  rispetto alla direzione incidente e che, inaspettatamente, la sua lunghezza d'onda diminuiva. Lo schema sotto rappresenta la situazione.



L'elettrone può essere considerato libero, dal momento che l'energia cinetica del fotone X è molto grande rispetto all'energia di legame dell'elettrone che, prima dell'urto, ha solo energia a riposo  $m_e c^2$ .

Si applicano i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e \\ m_e c^2 + hf = \sqrt{m_e^2 c^4 + p'^2 c^2} + hf' \end{array} \right. .$$

Abbiamo visto che  $hf = pc$  e che  $p = h/\lambda$ , inoltre per il teorema di Carnot applicato al triangolo formato dai vettori quantità di moto, risulta  $p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta$ ; sostituendo nelle equazioni di cui sopra otteniamo la *differenza di lunghezza d'onda Compton*  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$ .

## 20.5 L'ipotesi di De Broglie e l'interpretazione del dualismo onda-particella

La spiegazione fornita da Einstein dell'effetto fotoelettrico, basata sul modello del fotone, ci ha rivelato la natura corpuscolare della radiazione elettromagnetica. L'apparente mancanza di simmetria, cioè di un comportamento ondulatorio della materia, ha suggerito a De Broglie (1892-1987) la sua celebre ipotesi: *il moto di una particella è governato da un'"onda materiale" associata, la cui frequenza e lunghezza d'onda sono date dalle relazioni  $\lambda = h/p$  e  $f = E/h$ , dove con  $p$  ed  $E$  abbiamo indicato rispettivamente la quantità di moto e l'energia della particella.*

Le relazioni di De Broglie possono essere espresse in termini di numero d'onda  $k = 2\pi/\lambda \Rightarrow p = \hbar k$ , e di pulsazione  $\omega = 2\pi f \Rightarrow E = \hbar\omega$ , dove  $\hbar = h/2\pi$ .

Sulla base di queste ipotesi, le particelle mostrano caratteristiche corpuscolari e ondulatorie. Questo fenomeno è noto come *dualismo onda-particella*.

Cerchiamo con un esempio di capire come stanno le cose a livello macroscopico. Per questo scopo, consideriamo una massa di  $10\text{ kg}$  che si muove alla velocità di  $10\text{ m/s}$ . Alla quantità di moto

$$p = 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ è quindi associata una lunghezza d'onda di De Broglie } \lambda = \frac{h}{p} = 6,63 \cdot 10^{-36} \text{ m} .$$

Ora, il carattere ondulatorio è mostrato dal verificarsi di fenomeni d'interferenza o diffrazione; poiché tali fenomeni si manifestano quando s'incontrano ostacoli di lunghezza d'onda confrontabile, si capisce perché, nel caso macroscopico, la natura ondulatoria della materia non viene palesata: nel caso precedente, la massa avrebbe dovuto interferire con ostacoli aventi dimensioni più piccole del diametro del nucleo atomico di ben 22 ordini di grandezza!

Abbiamo visto che un'onda può esibire proprietà comunemente attribuite alle particelle. Attraverso l'osservazione del fenomeno della *diffrazione degli elettroni*, è stato possibile affermare anche il contrario: una particella può avere un comportamento tipico della natura ondulatoria. Il nodo da sciogliere resta quello legato ai meccanismi di trasmissione dell'energia che, com'è noto dalla fisica classica, sono diversi per le onde e le particelle.

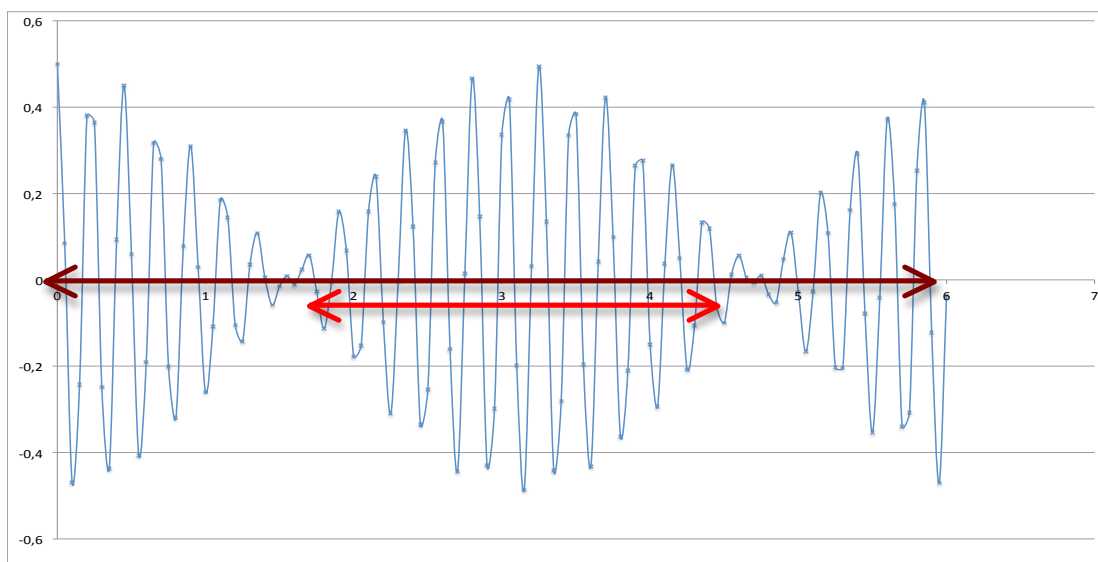
Abbiamo visto che un'onda elettromagnetica può essere ottenuta come *somma* di perturbazioni di diversa frequenza. E' opportuno riprendere un concetto fondamentale della teoria ondulatoria, il *principio di sovrapposizione*, il quale stabilisce che quando due o più onde passano per un qualsiasi punto del mezzo, lo spostamento risultante di tale punto è la somma dei singoli spostamenti dovuti a ogni singola onda.

Le relazioni  $y_1 = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$ ,  $y_2 = A \sin((k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t + \varphi)$  siano le rappresentazioni matematiche delle ampiezze di due onde.

*Principio di sovrapposizione:* la perturbazione risultante è la somma algebrica delle singole perturbazioni.

Con la formula di prostaferesi  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ , l'onda risultante ha una forma descritta dalla seguente equazione:  $y = 2A \cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right] \sin(kx - \omega t + \varphi)$ . L'ampiezza della forma

d'onda risultante è essa stessa interpretabile come un'onda viaggiante di pulsazione  $\omega = \frac{\Delta\omega}{2}$  e numero d'onda  $k = \frac{\Delta k}{2}$ . Si chiama *battimento* la regione dello spazio in cui l'ampiezza risultante  $A' = 2A \cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right]$  è grande. *L'energia dell'onda non è più distribuita nello spazio, bensì localizzata all'interno del battimento.*

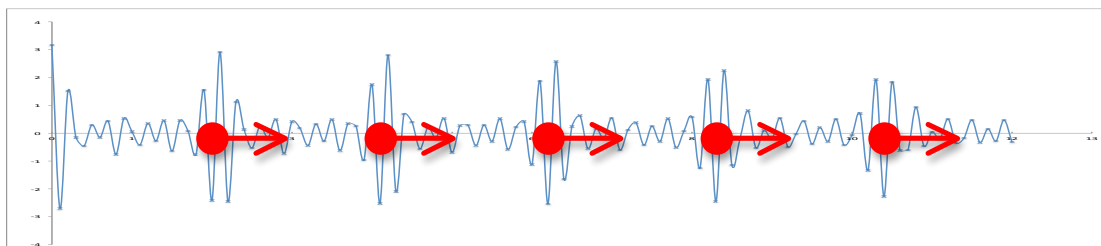


La lunghezza d'onda del battimento è  $\lambda_b = \frac{2\pi}{k_b} = \frac{4\pi}{\Delta k}$ , ed è rappresentata dalla linea lunga in colore, mentre il *pacchetto d'onda (battimento)* è indicato dalla linea in colore più corta. La nostra attenzione si sposta quindi sulla disposizione spaziale  $\Delta x$  del pacchetto d'onda, e sulla sua velocità, detta *velocità di gruppo*, che coincide con la *velocità del battimento*:  $v_g = \frac{\lambda_b}{T_b} = \frac{2\pi}{k_b} \cdot \frac{\omega_b}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ . Ora, la disposizione

spaziale del pacchetto è legata a quella del battimento dalla relazione  $\Delta x = \frac{\lambda_b}{2} = \frac{2\pi}{\Delta k}$ ; da questa

segue quindi che  $\Delta k \cdot \Delta x = 2\pi$ . Il termine  $\Delta k$ , che rappresenta in generale la variazione dei numeri d'onda delle varie componenti il pacchetto, alla luce della relazione appena trovata, gioca un ruolo fondamentale: più è grande, più piccolo è il termine  $\Delta x$  e, di conseguenza, più limitata è la regione del battimento. La figura di seguito riportata è stata ottenuta sovrapponendo 7 onde aventi ampiezze e numero d'onda riassunti nella tabella:

$k$	27	30	33	36	39	42	45
$A_k$	0,25	0,33	0,5	1	0,5	0,33	0,25



I vettori in rosso rappresentano il pacchetto di fotoni attraverso il quale si manifesta la natura materiale dell'onda; l'energia di questa può quindi essere pensata come concentrata nei pacchetti, e non più (solo) distribuita uniformemente nello spazio. Così si raccordano la natura ondulatoria e quella particellare: attraverso il concetto di energia!

Di particolare interesse è il concetto d'*intensità* di un'onda in un punto, cioè la *potenza* che questa trasmette attraverso l'unità di superficie perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda in quel punto. La potenza può essere intesa come *l'energia di una lunghezza d'onda, per il numero di lunghezze d'onda che passano per un punto in un secondo, ovvero per la frequenza*. Vogliamo quantificare questa definizione. Per questo scopo ci serviamo della forma d'onda  $y = A \sin(kx - 2\pi ft)$ , facendo riferimento al caso di una corda che, fissata un'estremità, oscilla per effetto di una perturbazione esercitata sull'estremità libera.

L'onda si propaga con la velocità  $v = \frac{dy}{dt} = -2\pi fA \cos(kx - 2\pi ft)$ , di conseguenza *l'energia cinetica*

*massima* del tratto di corda di massa  $dm$  è  $K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}dm4\pi^2 f^2 A^2$ . Ora, indicata con  $\mu$  la

*densità lineare* della corda, la massa complessivamente interessata dal fenomeno della trasmissione dell'onda, in una lunghezza d'onda, è  $m = \lambda\mu$ . L'energia dell'onda, che coincide con l'energia cinetica massima per il principio di conservazione dell'energia (si pensi al caso della molla inizialmente compressa, dove l'energia è tutta di tipo potenziale), è data dall'espressione

$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}\lambda\mu4\pi^2 f^2 A^2$ . Sfruttando la nota relazione  $v = \lambda f$ , la potenza come sopra definita è

$P = E_{\text{tot}}f = \left(\frac{1}{2}\mu\frac{v}{f}4\pi^2 f^2 A^2\right)f \propto vA^2$ . Per i nostri scopi è fondamentale la proporzionalità

evidenziata nell'ultimo passaggio,  $P \propto vA^2$ . Nel caso di un'onda elettromagnetica l'intensità  $I \propto cA^2$ . Per esprimere l'intensità della radiazione elettromagnetica (monocromatica) dell'onda, occorre considerare la sua natura corpuscolare. Sia  $N = n(dV) = nS(dx)$  il numero di fotoni contenuti nell'elemento di volume  $dV$ ; di conseguenza  $n$  rappresenta la *densità* dei fotoni. Dalla definizione d'intensità come *potenza riferita all'unità di superficie* otteniamo,

$I = \frac{P}{S} = \frac{E}{dt \cdot S} = \frac{Nhf}{dt \cdot S} = \frac{dx}{dt} \frac{nShf}{S} = cn(hf)$ . Un confronto tra le espressioni dell'intensità, permette di

affermare che un aumento di  $A^2$  nel modello ondulatorio corrisponde a un aumento di  $n$  nel modello corpuscolare. **Possiamo quindi attribuire al termine  $A^2$  il significato di misura del numero di fotoni per unità di volume, ovvero della probabilità che ci sia un fotone nell'unità di volume.** Per le onde materiali possiamo quindi interpretare *il quadrato dell'ampiezza dell'onda come una quantità rappresentativa della probabilità di trovare una particella nell'unità di volume.*

Facciamo alcune considerazioni sulla velocità dell'onda materiale, vista prima come particella e poi come onda.

Differenziamo l'espressione relativistica  $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ :  $2EdE = 2pdpc^2 \Rightarrow \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E}$ .

Ritroviamo in questo modo l'espressione relativistica della velocità della particella.

D'altra parte, la teoria ondulatoria ci dice che la velocità di gruppo di un pacchetto d'onde è definita dalla relazione  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)}$ . Dalle relazioni di De Broglie segue  $v_g = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}$ .

Comparando questa espressione con la  $\frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E}$  possiamo interpretare la *velocità di gruppo del pacchetto d'onda come la velocità relativistica della particella associata*.

Sempre dalle relazioni di De Broglie segue che la *velocità di fase* dell'onda  $v = \lambda f$  può essere scritta in

termini di energia e quantità di moto  $v = \lambda f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$ . Notiamo che il prodotto

$(v_g)(v) = \frac{pc^2}{E} \cdot \frac{E}{p} = c^2$ , quindi per una *particella priva di massa*, come il fotone,  $m = 0$ , dalla relazione

$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$  segue  $E = pc$ . Di conseguenza  $v = v_g = c$ , quindi possiamo concludere che ogni particella priva di massa viaggia alla velocità della luce. Per le particelle dotate di massa, invece,

possiamo scrivere  $v_g = \frac{pc^2}{E} = \frac{pc}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}} = \frac{c}{\sqrt{(mc/p)^2 + 1}} < c$ . Da questo segue che la velocità alla

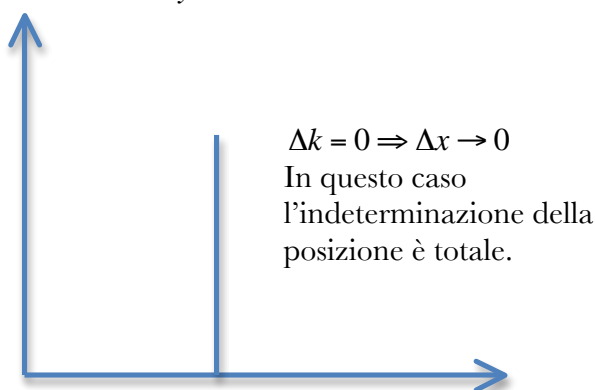
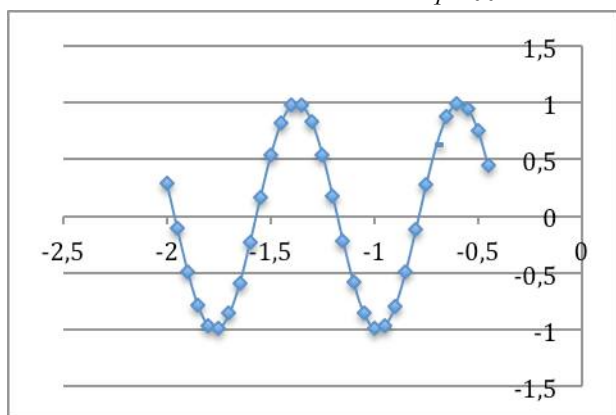
quale l'energia viene trasmessa, che corrisponde alla velocità di gruppo, non può mai superare la velocità della luce.

## 20.6 Il principio d'indeterminazione di Heisenberg

Abbiamo visto che il quadrato dell'ampiezza di un'onda materiale in una certa posizione, può essere interpretato come una misura della probabilità di trovare una particella per unità di volume in quella posizione. In altre parole, la particella può trovarsi in qualsiasi posizione in cui l'ampiezza dell'onda materiale è diversa da zero, cioè ovunque all'interno del pacchetto.

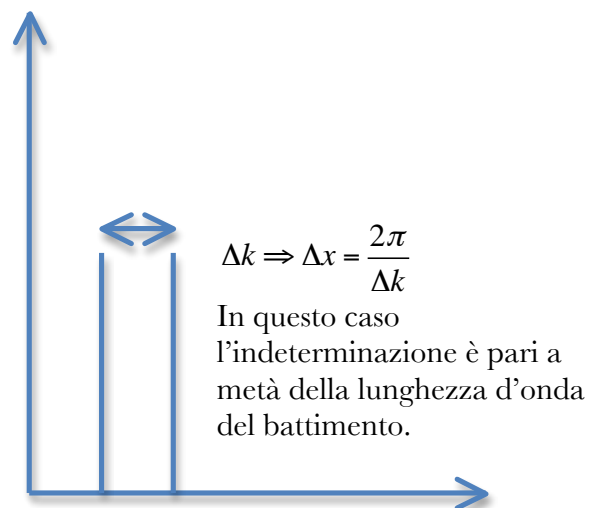
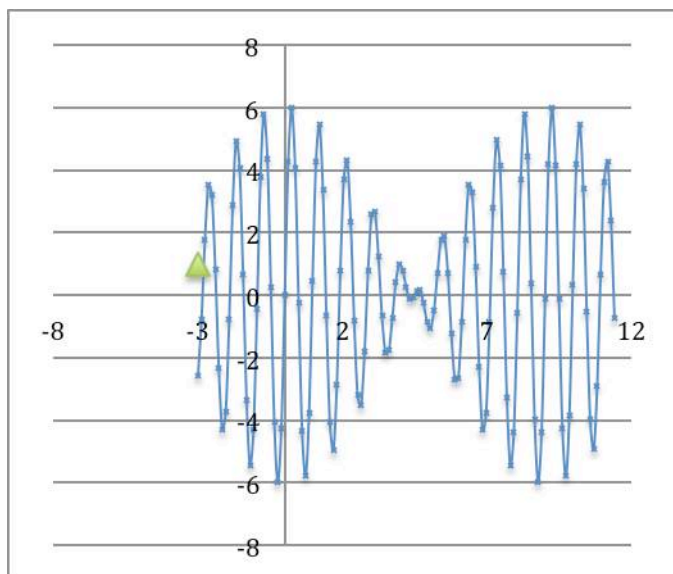
La caratterizzazione di una particella come un'onda materiale introduce un elemento d'incertezza  $\Delta x$ , rappresentato dalla lunghezza del pacchetto d'onda. Cerchiamo di chiarire questo concetto con alcuni esempi.

1. Un'onda monocromatica di ampiezza  $A = 1$  e numero d'onda  $k = 8$   $y = \cos 8x$ .



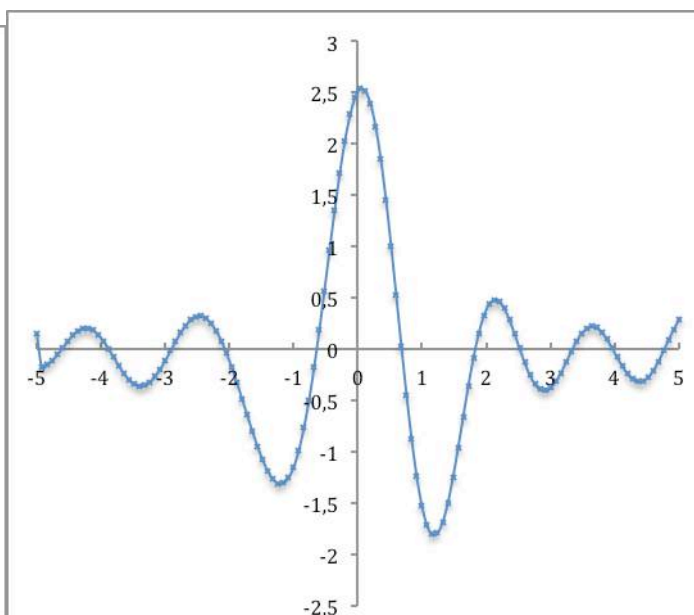
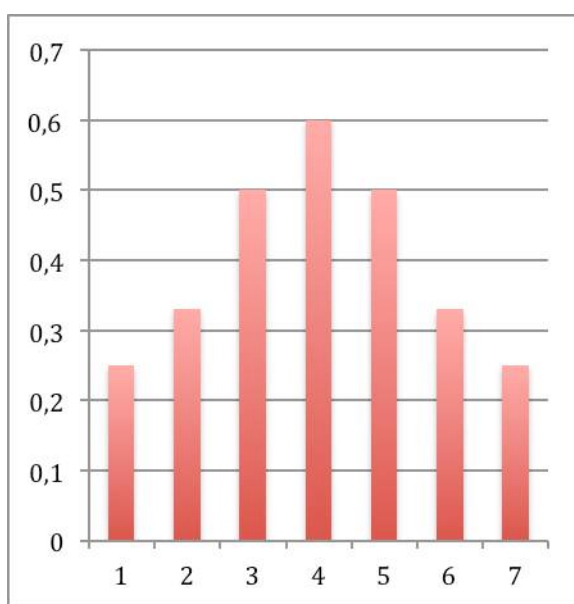
2. Due onde che formano un battimento:  $k \ll \Delta k$





3. 7 onde con le seguenti ampiezze e numeri d'onda  $y = \sum_{k=0}^7 A_k \cos kx$ .

$k$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$A_k$	0,25	0,33	0,5	1	0,5	0,33	0,25

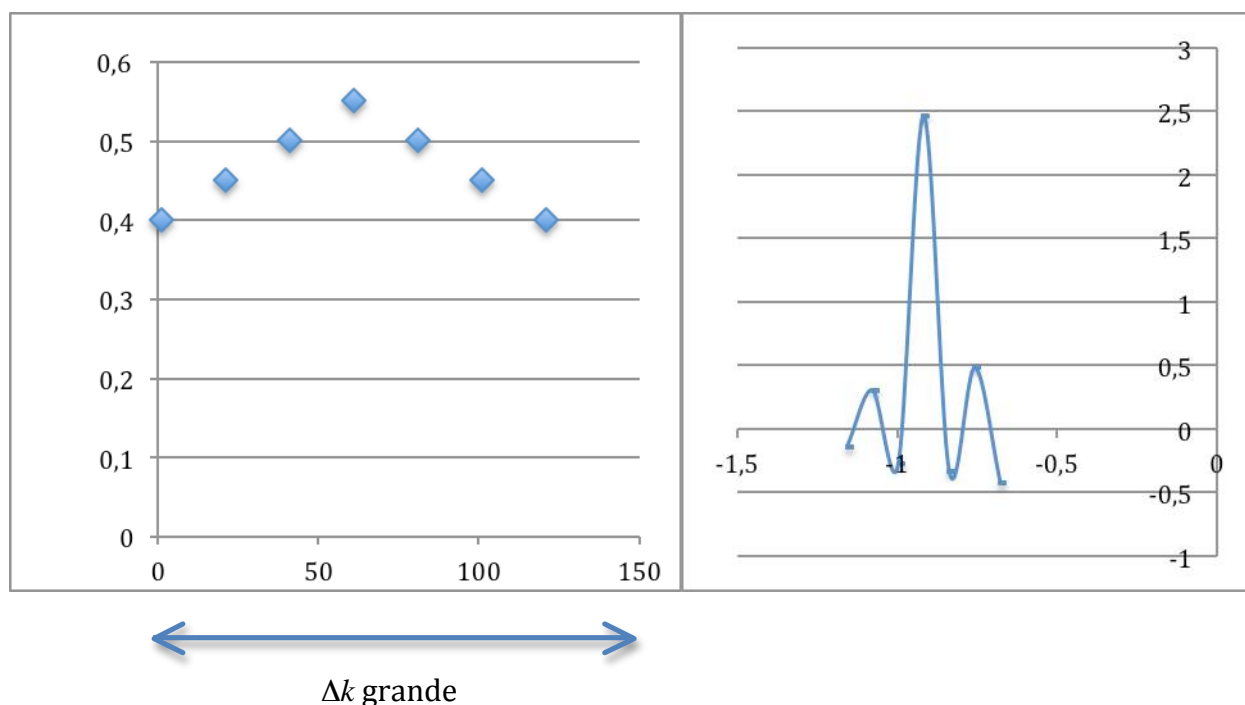


$\Delta k$  piccolo

In questo caso, se  $\Delta k$  è piccolo,  $\Delta x$  è grande: il pacchetto è “largo” e la probabilità di trovare la particella in una determinata posizione è bassa.

4. 7 onde con le seguenti ampiezze e numeri d'onda  $y = \sum_{k=0}^7 A_k \cos kx$ .

$k$	1	21	41	61	81	101	121
$A_k$	0,4	0,45	0,5	0,55	0,5	0,45	0,4



Al contrario del caso precedente, se  $\Delta k$  è grande,  $\Delta x$  è piccolo: il pacchetto è “stretto” e la probabilità di trovare la particella in una determinata posizione è alta.

Questi risultati ci dicono che all’aumentare dell’incertezza sul numero d’onda (e quindi sulla quantità di moto) di un’onda materiale, quella sulla posizione diventa sempre più piccola e viceversa. Queste incertezze sono correlate da un’equazione, nota come *principio d’indeterminazione di Heisenberg*:

$$(\Delta p_x)(\Delta x) \geq \frac{\hbar}{2}.$$

E’ opportuno osservare che questo principio non stabilisce un limite alle capacità sperimentali. Si tratta di una vera e propria legge della fisica, con la quale ci dobbiamo confrontare anche nel caso in cui riuscissimo ad eseguire la misura perfetta.

Applichiamo questo principio al caso di un elettrone in moto all’interno di un atomo alla velocità di  $2,2 \text{ ms}^{-1}$ . In questo caso risulta  $\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} \approx 10^{-10} \text{ m}$ : l’incertezza è comparabile con le dimensioni

atomiche, quindi è *difficile* localizzare con certezza la posizione dell’elettrone all’interno dell’atomo. Vogliamo esprimere il principio d’indeterminazione in termini di *Energia e tempo*. Da quanto visto

circa i battimenti,  $\Delta t = \frac{T_b}{2} = \frac{1}{2f_b} = \frac{\pi}{\omega_b} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ ; dalle equazioni di De Broglie  $\Delta E = \hbar\Delta\omega$ , quindi

$(\Delta E)(\Delta t) = \hbar 2\pi = h$ . La situazione generalizzata ad un *spettro* continuo di numeri d’onda conduce alla formulazione del principio di indeterminazione in termini di energia e tempo:

$$(\Delta E)(\Delta t) \geq \frac{\hbar}{2}.$$

In sostanza, possiamo conoscere con certezza l’energia di una particella (onda materiale), solo se la osserviamo per un tempo infinito nello stato in cui si trova!

Ricapitolando: il pacchetto d’onda ha permesso di collegare i concetti di energia di un’onda e di una particella, introducendo, però, delle incertezze di base sulla posizione e la quantità di moto (o sull’energia e sul tempo) di una particella.

E’ opportuno, d’ora in poi, esprimere i fenomeni microscopici in termini di *probabilità* e di *valori medi*.