CAPITOLO 19
LA TEORIA DELLA RELATIVITA' SPECIALE

19.1 Introduzione delle idee di Einstein

La velocità della luce $c = 299792458\, m/s$ è una costante della fisica ed è **invariante** per cambiamenti di sistema di riferimento. La scoperta di questa legge fondamentale è avvenuta in seguito all'esperimento, condotto da Michelson e Morley verso la fine dell'800, con il quale si voleva dimostrare l'esistenza di un sistema di riferimento *assoluto*, il cosiddetto *etere*.
L'esistenza dell'etere fu ipotizzata per rispondere all'esigenza di avere un *mezzo* per la propagazione delle onde elettromagnetiche. I vari tentativi sperimentali per dimostrarne l'esistenza, però, si rivelarono tutti infruttuosi. Tuttavia, le equazioni di Maxwell costituivano un modello corretto per la propagazione delle onde elettromagnetiche, indipendentemente dall'esistenza di un mezzo di propagazione. Maxwell, però, non era soddisfatto pienamente: non riusciva a concepire l'esistenza di un'onda in assenza di un mezzo di propagazione.
Conseguenza fondamentale dell'invarianza della velocità della luce è che quest'ultima non obbedisce alla composizione galileiana (*classica*) della velocità. Ora, poiché le onde elettromagnetiche si propagano a velocità prossime a quella della luce, sembra aprirsi un conflitto tra le leggi della meccanica classica (invarianti per trasformazioni di Galileo) e quelle dell'elettromagnetismo (che *non* sono invarianti per trasformazioni di Galileo).
Occorre ampliare il formalismo del moto relativo in modo da includere l'invarianza della velocità della luce per cambiamento di sistemi di riferimento in moto relativo rettilineo uniforme (i cosiddetti *sistemi di riferimento inerziali*).
Personalmente ritengo che il modo migliore per introdurre le idee di Einstein sia quello di leggerle direttamente da una descrizione del concetto di campo che il grande scienziato fece al fisico suo contemporaneo L. Infeld:

"Un nuovo concetto –l'invenzione più importante dal tempo di Newton in poi- s'introduce nella fisica e cioè il concetto di campo. Occorreva una potente immaginazione scientifica per discernere che nella descrizione dei fenomeni elettrici non sono né le cariche, né le particelle che costituiscono l'essenziale, bensì lo spazio interposto fra cariche e particelle. Il concetto di campo si dimostra fertilissimo e conduce alla formulazione delle equazioni di Maxwell, descriventi la struttura del campo elettromagnetico e governanti non soltanto i fenomeni elettrici ma anche quelli ottici.
La teoria della relatività scaturisce dai problemi del campo. Le contraddizioni e le incoerenze delle antiche teorie ci costringono ad attribuire nuove proprietà al continuo spazio-temporale, teatro di tutti gli avvenimenti del nostro mondo fisico.
La teoria della relatività prende corpo in due tempi. Il primo di questi conduce alla cosiddetta teoria della relatività speciale che si applica soltanto ai sistemi di coordinate inerziali, a sistemi cioè per i quali le leggi d'inerzia, formulate da Newton, sono valide. La teoria della relatività speciale si basa sopra due presupposti fondamentali e cioè:

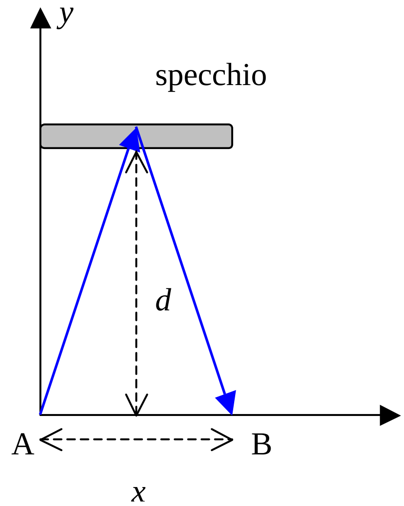
1) ***le leggi fisiche sono le stesse per tutti i sistemi di coordinate i cui moti relativi sono uniformi*** *(Principio di relatività),*
2) ***la velocità della luce conserva sempre lo stesso valore****.*

Partendo da queste supposizioni, confermate sperimentalmente oltre ogni dubbio, deduconsi le proprietà dei regoli di misura e degli orologi in movimento, nonché le modificazioni in lunghezza e rispettivamente in ritmo che essi subiscono con il variare della velocità.
La teoria della relatività modifica le leggi della meccanica. Le antiche leggi non sono più valevoli allorquando la velocità di una particella in moto si avvicina a quella della luce. Le nuove leggi per un corpo in movimento, formulate dalla teoria della relatività, sono pienamente confermate dall'esperimento. Una conseguenza ulteriore della teoria della relatività speciale è la rivelazione dell'intimo legame tra massa e energia. La massa è energia, e l'energia possiede massa. Le due leggi della conservazione della massa e dell'energia vengono fuse dalla teoria della relatività in una sola: la legge di conservazione della massa-energia.
La teoria della relatività generale fornisce un'analisi ancor più profonda del continuo spazio-temporale.
[…]La teoria della relatività accentua l'importanza che nel dominio della fisica spetta al concetto di campo. Finora però non siamo riusciti a formulare una fisica basata sul puro campo. Per il momento dobbiamo ancora ammettere la coesistenza del binomio campo e materia."

[Da A. Einstein e L. Infeld, *L'evoluzione della fisica,* Boringhieri, Torino 1960].

19.2 Il principio di relatività di Einstein: *Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*

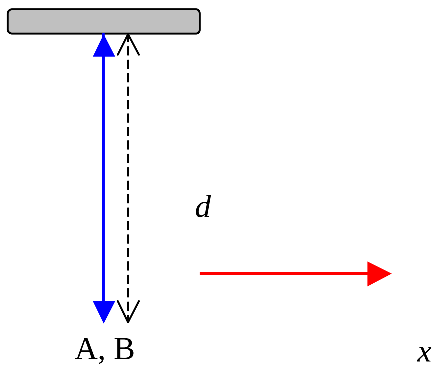
Relatività del concetto di tempo. Un nuovo invariante



Sistema di riferimento del LABORATORIO
Coordinate spazio-temporali (x,y,z,t).
Coordinate EVENTO A: $(0,0,0,0)$ (emissione raggio di luce)
Coordinate EVENTO B: $(x,0,0,t)$ (ricezione raggio di luce);

Distanza percorsa alla velocità *c*: $2\sqrt{d^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$.

Tempo impiegato: $t=\frac{2}{c}\sqrt{d^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$



Sistema di riferimento del RAZZO
Coordinate spazio-temporali (x',y',z',t').
Coordinate EVENTO A: $(0,0,0,0)$ (emissione raggio di luce)
Coordinate EVENTO B: $(0,0,0,t')$ (ricezione raggio di luce)
Distanza percorsa alla velocità *c*: $2d$.
Tempo impiegato: $t'=\frac{2d}{c}$

v velocità del razzo rispetto al laboratorio

La prima osservazione da fare è la seguente: poiché nel sistema di riferimento del laboratorio il raggio percorre un cammino più lungo rispetto a quello percorso nel sistema di riferimento del razzo, a parità di velocità (*c* è costante) il tempo misurato in laboratorio è *maggiore* di quello misurato sul razzo:

$$t=\frac{2}{c}\sqrt{d^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}>\frac{2d}{c}=t'.$$

L'intervallo di tempo non è quindi lo stesso nei due sistemi di riferimento.

A differenza di quanto previsto dalle leggi del moto relativo della meccanica classica, il tempo non è un concetto *assoluto*.
Cerchiamo adesso una quantità che ha lo stesso valore nei due sistemi di riferimento, ragionando sul tempo impiegato nei due casi.

In laboratorio: $t^2=\frac{4}{c^2}\left(d^2+\frac{x^2}{4}\right)\Rightarrow\frac{4d^2}{c^2}=t^2-\frac{x^2}{c^2}$.

Sul razzo: $t'^2=\frac{4d^2}{c^2}\Rightarrow\frac{4d^2}{c^2}=t'^2$.

Abbiamo trovato una quantità invariante: $t^2 - \frac{x^2}{c^2}$. In tre dimensioni questa quantità s'indica così:

$$\tau^2 := t^2 - \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

19.3 Relazione tra le misure di tempo in due sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme

La legge oraria dello spostamento rettilineo del razzo scritta nelle coordinate del laboratorio è

$$x = vt.$$

Può essere considerata la legge oraria con cui si sposta l'origine del sistema di riferimento del razzo, assumendo la sua coincidenza con l'origine del sistema di riferimento del laboratorio all'istante iniziale $t = 0$.

Sostituendo l'espressione $x = vt$ nella $t'^2 = t^2 - \frac{x^2}{c^2}$ otteniamo $t'^2 = t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$, da cui la relazione tra le misure di tempo cercata:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Il significato di questa relazione è che *l'intervallo di tempo misurato da un osservatore solidale con il laboratorio è maggiore di quello misurato da un osservatore solidale con il razzo.*

Ad esempio, se il raggio viaggiasse a una velocità $v = 0,3c$ la relazione tra le misure di tempo sarebbe $t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{0,09c^2}{c^2}}} = 1,05t'$: un secondo sul razzo equivale a 1,05 secondi in laboratorio, oppure un anno in laboratorio equivale a 0,95 anni sul razzo.

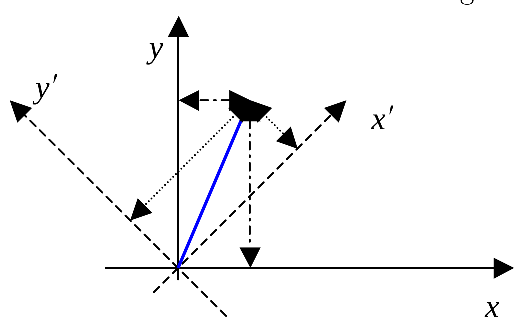
Osservazione. Se la velocità è una velocità *classica*, ovvero piccola rispetto a quella della luce, il termine $\frac{v^2}{c^2} \cong 0$ e le misure di tempo rilevate nei due sistemi di riferimento sono praticamente uguali.

19.4 Comparazione tra invarianti classici e relativistici

Nel classico sistema di coordinate spaziali, un invariante è costituito dall'intervallo di spazio:

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

come si può facilmente verificare con il Teorema di Pitagora.



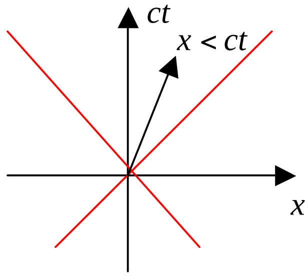
In generale l'invariante $\tau^2 := t^2 - \frac{x^2}{c^2}$ si dice *intervallo tipo-spazio* se $\frac{x}{t} > c$, *intervallo tipo-luce* se $\frac{x}{t} = c$, *intervallo tipo-tempo* se $\frac{x}{t} < c$. L'intervallo tipo-tempo è chiamato *tempo proprio*, perché coincide con l'intervallo di tempo misurato dall'osservatore in moto:

$$\tau = \sqrt{t^2 - x^2/c^2}.$$

In tutti gli altri sistemi di riferimento l'intervallo di tempo è più lungo perché

$$t = \sqrt{\tau^2 + x^2/c^2} > \tau$$

Dall'espressione $0 \le \tau^2 := t^2 - \frac{x^2}{c^2}$ si ricava la porzione dello spazio-tempo dove può trovarsi un evento: $|x| < ct$.



Da quanto visto finora, spazio e tempo in relatività non sono concetti assoluti e separati: si parla di **spazio-tempo**.

Problema 1

Due eventi avvengono nello stesso posto nel sistema di riferimento del laboratorio a distanza di 2s. L'intervallo di tempo tra questi due eventi misurato da un razzo in movimento è 4s. (a) Si calcoli la distanza tra i due eventi nel sistema di riferimento del razzo. (b) Si calcoli la velocità del razzo rispetto al laboratorio.

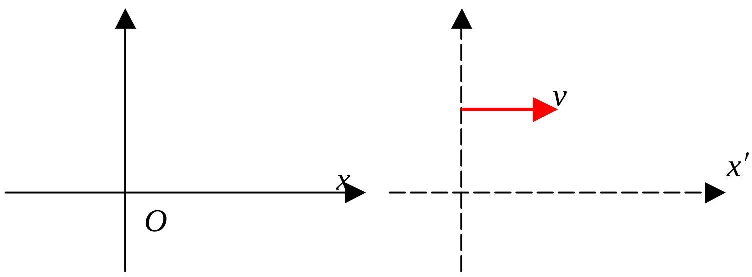
- (a) In questo caso il tempo proprio è quello del laboratorio: $\tau = \sqrt{t^2 - x^2/c^2} \Rightarrow 4 = 16 - x^2/c^2 \Rightarrow x = 1{,}04 \cdot 10^9 m$.
- (b) Dalla relazione $t = \frac{t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow 4\sqrt{1 - v^2/c^2} = 2 \Rightarrow v = 0{,}866c$.

19.5 Le trasformazioni di Lorentz

Vogliamo mettere in relazione tra loro le coordinate spazio-temporali del sistema di riferimento *a riposo* (il laboratorio) e del sistema di riferimento *in moto a velocità v costante* (il razzo). Indichiamo le coordinate del sistema di riferimento a riposo con la quaterna (x, y, z, t) e quelle del sistema di riferimento in moto con la quaterna (x', y', z', t'). Poiché le trasformazioni devono dare un risultato univoco e coincidere con quelle di Galileo nel caso in cui il sistema si muove con velocità piccole rispetto a quella della luce, cercheremo relazioni della forma

$$\begin{cases} x = Ax' + Bt' \\ t = Cx' + Dt' \end{cases} \quad (1),$$

dove abbiamo convenuto che il sistema in moto si muove nella direzione dell'asse *x* del sistema di riferimento a riposo, e che $x' = x$ (gli assi delle ascisse coincidono).



Per determinare i coefficienti della trasformazione facciamo le seguenti ipotesi:

1. All'istante iniziale $t = t' = 0$ le origini dei due SdR coincidono. Di conseguenza l'origine del SdR in moto ha in quel sistema legge oraria $x' = 0$, mentre nel sistema a riposo la legge oraria è $x = vt$.

2. Si definisce la quantità $\gamma := \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ da cui risulta $\gamma^2 - \dfrac{\gamma^2 v^2}{c^2} = 1$;
3. Vale la relazione $t = \dfrac{t'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow t = \gamma t'$;
4. L'intervallo invariante $t^2 - \dfrac{x^2}{c^2} = t'^2 - \dfrac{x'^2}{c^2}$.

Con queste posizioni il sistema in (1) diventa, per la 1 e per la 3:

$$\begin{cases} x = Bt' \\ t = Dt' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{t} = v = \dfrac{B}{D} \\ \dfrac{t}{t'} = \gamma = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = \gamma \\ B = \gamma v \end{cases}.$$

Il sistema (1) si scrive così:

$$\begin{cases} x = Ax' + \gamma v t' \\ t = Cx' + \gamma t' \end{cases} \quad (2).$$

Se adesso sostituiamo le espressioni di *x* e *t* contenute nella (2) all'interno dell'espressione dell'intervallo invariante (4) otteniamo:

$C^2x'^2 + \gamma^2 t'^2 + 2C\gamma x't' - \dfrac{A^2x'^2 + \gamma^2 v^2 t'^2 + 2A\gamma v x't'}{c^2} = t'^2 - \dfrac{x'^2}{c^2}$. Raccogliamo le coordinate

$\left(C^2 - \dfrac{A^2}{c^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)x'^2 + \left(\gamma^2 - 1 - \dfrac{\gamma^2 v^2}{c^2}\right)t'^2 + 2\gamma x't'\left(C - \dfrac{Av}{c^2}\right) = 0$, ed uguagliamo a zero i coefficienti moltiplicatori di queste, dovendo valere per *tutti* gli eventi:

$$\begin{cases} C = \dfrac{Av}{c^2} \\ \dfrac{A^2v^2}{c^4} - \dfrac{A^2}{c^2} = -\dfrac{1}{c^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \dfrac{Av}{c^2} \\ A^2 = \dfrac{c^2}{c^2 - v^2} = \gamma^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \gamma \\ C = \dfrac{\gamma v}{c^2} \end{cases}$$

. Si giunge così all'espressione completa delle cosiddette **trasformazioni di Lorentz**:

$$\begin{cases} x = \gamma x' + \gamma v t' \\ t = \dfrac{\gamma v}{c^2} x' + \gamma t' \end{cases} \quad (3).$$

Osserviamo come, nel limite delle velocità "classiche" (piccole rispetto a quelle della luce), il fattore $\gamma \to 1$ e le trasformazioni di Lorentz si riducono alle **trasformazioni di Galileo**:

$$\begin{cases} x = x' + vt' \\ t = t' \end{cases} \left(v/c^2 \to 0\right) \quad .$$

Le trasformazioni di Lorentz possono essere invertite ed esprimere così il "punto di vista" dell'osservatore in moto, il quale può considerarsi a riposo e vedere muoversi l'altro SdR con velocità $-v$. Le equazioni diventano quindi:

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \gamma v t \\ t' = -\dfrac{\gamma v}{c^2} x + \gamma t \end{cases} \quad (4).$$

Problema 2

Un razzo si muove con velocità costante pari a 0,6*c* lungo la direzione *x* del sistema di riferimento del laboratorio. Le origini del laboratorio e del razzo coincidono all'istante iniziale. Determinare le coordinate dell'evento $x = 5 \cdot 10^7 m; \quad t = 1s$ nel sistema di riferimento del razzo.

- Si utilizzano le trasformazioni di Lorentz inverse (4) con
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{0,36c^2}{c^2}}} = 1,25 \Rightarrow \begin{cases} x' = 1,25\cdot 5\cdot 10^7 - 2,25\cdot 10^8\cdot 1 = -1,625\cdot 10^8 m \\ t' = -0,125 + 1,25 = 1,125 s \end{cases}.$$

La contrazione di Lorentz-Fitzgerald

Un regolo è fissato su un razzo che si muove con velocità *v* rispetto al laboratorio, nella direzione dell'asse *x* in comune con il laboratorio. Siano

$l = x_2 - x_1$ la lunghezza del regolo misurata dal laboratorio, e

$l' = x_2' - x_1'$ la lunghezza del regolo misurata nel razzo (lunghezza *propria*).

Le due lunghezze sono correlate dalle trasformazioni di Lorentz:
$$l' = \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1) = \gamma(x_2 - x_1) - \gamma v(t_2 - t_1) = \gamma l - \gamma v(t_2 - t_1).$$
Se assumiamo che le misure in laboratorio sono state prese nello stesso istante (orologi sincronizzati) allora $t_1 = t_2$ e, di conseguenza:
$$l' = \gamma l.$$
Da quanto appena visto segue che la lunghezza di un regolo, misurata in laboratorio, risulta $\frac{1}{\gamma}$ volte quella propria, e quindi più corto.

Problema 3

Una riga lunga 1m e larga 2cm è disposta nella direzione nord-sud. In quale direzione ed a quale velocità dovrebbe viaggiare la riga, rispetto al laboratorio, affinché la sua lunghezza (misurata dal laboratorio) risulti uguale alla sua larghezza?

- Dovrebbe viaggiare nella direzione nord-sud, in modo tale che dal laboratorio non si registri alcuna contrazione in larghezza. La velocità dovrà essere tale che
$$2\cdot 10^{-2} m = l = \frac{l'}{\gamma} = 1m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow v = 0,9998c.$$

La dilatazione dei tempi

Dall'origine del sistema di riferimento del razzo vengono emessi due segnali in due istanti di tempo diversi, corrispondenti agli istanti t_1 e t_2 misurati da un orologio solidale con il sistema di riferimento del laboratorio. Nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ lo spostamento del razzo, sempre misurato dal laboratorio, risulta essere $x_2 - x_1$. Attraverso le trasformazioni di Lorentz è possibile esprimere $t_2 - t_1$ in funzione di $t_2' - t_1'$, osservando che $x_2' = x_1' = 0$:
$$t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1').$$
L'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ è dunque *maggiore* dell'intervallo di tempo $t_2' - t_1'$. Questo fenomeno è noto come *dilatazione dei tempi*. Ad esempio, se il razzo si muove alla velocità $v = 0,6c$, allora $t_2' - t_1' = 1s$ sul razzo equivale a $t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1') = 1,25s$ in laboratorio.

Con il fenomeno della dilatazione dei tempi è possibile giustificare l'osservazione a terra dei *muoni*, particelle fondamentali presenti negli alti strati dell'atmosfera, simili a elettroni, ma instabili, che decadono molto rapidamente in altre particelle elementari. Si è osservato sperimentalmente che ogni $1,5\cdot 10^{-6}s$ il 50% di un gruppo di muoni decade (è il cosiddetto *tempo di dimezzamento*). Ora, sapendo che la velocità con cui viaggiano i muoni è circa $v = 0,9995c$, trascurando gli effetti relativistici, il tempo che un muone impiegherebbe per giungere a terra sarebbe all'incirca $t = \frac{x}{v} \approx \frac{10^4 m}{0,9995c\, m/s} \approx 33\cdot 10^{-6}s$: la durata di ben 22 tempi di dimezzamento, in contraddizione con il fatto che la quasi totalità del gruppo iniziale di muoni raggiunge la superficie terrestre. La spiegazione del perché quasi tutti i muoni vengono effettivamente osservati a terra risiede tutta nel fenomeno della dilatazione dei tempi: il tempo di dimezzamento è il tempo nel sistema di riferimento del muone, che viene considerato *a riposo*. Rispetto al laboratorio quindi, il tempo di dimezzamento è dato dalla relazione $t_{1/2} = \gamma t_{1/2}' = 45\cdot 10^{-6}s$, un tempo ben maggiore di quello stimato in precedenza ($t \approx 33\cdot 10^{-6}s$).

Problema 4

Il diametro della nostra galassia è circa $d = 6 \cdot 10^{20} m$. (a) Si calcoli la velocità di cui ha bisogno un'astronave per attraversare la nostra galassia in un tempo, misurato dall'astronave stessa, di 3000 anni. (b) Si calcoli il tempo di attraversamento misurato dalla terra.

- (a) Sono noti i seguenti dati: $x = d = 6 \cdot 10^{20} m$ misurato da terra e $t' = 3000$ anni, ovvero $t' = 9,46 \cdot 10^{10} s$ misurato dall'astronave. La relazione $t = \gamma t'$ e la legge oraria dell'astronave $v = x/t$ conducono al risultato:
  $$v = \frac{x}{t} = \frac{d}{\gamma t'} = \frac{d}{t'}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow v = \frac{d/t'}{\sqrt{1+d^2/c^2t'^2}} = 0,99888c = 2,997 \cdot 10^8 \frac{m}{s}.$$
- (b) Dalla $t = \gamma t'$ segue $t = \gamma t' = \dfrac{t'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{3000a}{0,047} = 63830a$.

Problema 5

Il mesone K decade mediamente dopo $1,2 \cdot 10^{-8} s$. Un fascio di mesoni K sta viaggiando alla velocità di $0,992c$. Si calcoli (a) la vita media di un mesone K rispetto al SdR del laboratorio, e (b) la distanza media percorsa dal mesone K prima del decadimento, sempre misurata rispetto al laboratorio.

- (a) la vita media viene calcolata mediante la $t = \gamma t' = \sqrt{1-0,992^2} \cdot 1,2 \cdot 10^{-8} s = 9,5 \cdot 10^{-8} s$.
- (b) Dalle trasformazioni di Lorentz $x = \gamma(x' + vt')$ con $x' = 0$ segue $x = \gamma v t' = 28,3m$.

Problema 6

La vita media di una particella prima del decadimento è *T* nel suo sistema di riferimento a riposo. Se la particella viaggia alla velocità $c/2$ nel laboratorio, si deduca un'espressione della distanza media percorsa nel laboratorio dalla particella, prima che questa decada.

- Si usa anche in questo caso la trasformazione di Lorentz dello spazio: $x = \gamma(x' + vt')$ con $x' = 0$ da cui segue $x = \gamma v T = \dfrac{cT}{2\sqrt{1-c^2/4c^2}} = \dfrac{cT}{\sqrt{3}}$.

La perdita della simultaneità e il paradosso dei gemelli

Gino e Bruno sono due gemelli di 20 anni quando il primo parte per un viaggio alla velocità $v = 0,90c$ della durata di 10 anni, 5 per l'andata e 5 per il ritorno, misurati nel suo sistema di riferimento. L'età di Gino al suo ritorno sulla Terra sarà quindi di 30 anni. Per Bruno tuttavia, la durata del viaggio viene calcolata con le trasformazioni di Lorentz, e risulta $t = \gamma\left(t' + vx'/c^2\right) = \gamma t' = 22,9a$; l'età di Gino è quindi di 42,9 anni. In conclusione, l'orologio biologico di Gino ha marciato più lentamente.

Supponiamo adesso che Gino si ponga la questione del calcolo dell'età di Bruno nel suo sistema di riferimento. L'istante di tempo in cui Gino ritorna sulla Terra, dove $x = 0$, è $t' = \gamma\left(t - vx/c^2\right) = \gamma t$, che corrisponde a $t = t'/\gamma = 4,4a$. Quindi per Gino, Bruno dovrebbe avere un'età di 24,4 anni, in contraddizione con i 42,9 calcolati in precedenza.

Questo apparente paradosso è dovuto in realtà ad una cattiva applicazione della teoria della relatività speciale. Infatti, quando Gino inverte il moto per fare ritorno a Terra, *non* si trova in un sistema di riferimento inerziale.

Per risolvere la questione del calcolo della durata della prima parte del viaggio, in coordinate "terrestri" nel sistema di riferimento di Gino, occorre fare alcune considerazioni, dettate dall'intima connessione tra spazio e tempo. Intanto, quando Gino inverte il moto, la Terra si trova indietro rispetto a lui di $0 = x = \gamma\left(x' + vt'\right) \Rightarrow x' = -vt'$. Quando Gino ha iniziato il viaggio, il suo orologio era sincronizzato con quello di Bruno; quando decide di far ritorno a Terra, quello che per lui è l'istante iniziale $t' = 0$, in coordinate terrestri è

$t=\gamma\left(t'+vx'/c^2\right)=\gamma\left(0+vx'/c^2\right)=-\gamma v^2 t'/c^2=-9{,}27a$, dove $t'=5a$: una perdita di sincronizzazione decisamente rilevante! Le coordinate dell'istante iniziale per Gino sono le seguenti $(x;t)=(0;-9{,}27a)$. Per calcolare la durata occorre trovare le coordinate della Terra nel sistema di riferimento di Gino quando questo decide di far ritorno sulla Terra: $(x;t)=(0;t'/\gamma)=(0;2{,}18a)$. La durata del viaggio è quindi $\Delta t=2{,}18-(-9{,}27)=11{,}45a$, in perfetto accordo con quanto calcolato da Bruno nel proprio sistema di riferimento.

19.6 Trasformazioni relativistiche della velocità

Un corpo viaggia con la velocità $\vec{u}=\left(u_x;u_y;u_z\right)$ rispetto a un sistema di riferimento fisso $Oxyz$. Vogliamo determinare l'espressione della velocità in un sistema di riferimento $O'x'y'z'$ in moto con velocità $\vec{v}=(v;0;0)$ rispetto al sistema $Oxyz$. Risulta, dalle trasformazioni di Lorentz,

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt}=\dfrac{d\left[\gamma(x-vt)\right]}{dt}=\gamma\left(\dfrac{dx}{dt}-v\right)=\gamma\left(u_x-v\right) \\ \dfrac{dt'}{dt}=\dfrac{d\left[\gamma\left(t-vx/c^2\right)\right]}{dt}=\gamma\left(1-\dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx}{dt}\right)=\gamma\left(1-u_x v/c^2\right) \end{cases} \Rightarrow u'_x=\frac{dx'}{dt'}=\frac{u_x-v}{\left(1-u_x v/c^2\right)}.$$

A differenza di quanto accade per le trasformazioni di Galileo, la velocità viene modificata anche lungo le altre direzioni:

$$\begin{cases} u'_y=\dfrac{dy'}{dt'}=\dfrac{dy}{dt'}=\dfrac{u_y}{\gamma\left(1-u_x v/c^2\right)} \\ u'_z=\dfrac{dz'}{dt'}=\dfrac{dz}{dt'}=\dfrac{u_z}{\gamma\left(1-u_x v/c^2\right)} \end{cases}.$$

Osservazione.

In caso di sistema di riferimento che viaggia con velocità *c*, la velocità di un raggio di luce che viaggia nel verso opposto è: $\dfrac{c-(-c)}{1-(-c)c/c^2}=\dfrac{2c}{2}=c$, a conferma del fatto che la velocità della luce non può essere superata.

Problema 7

Una particella si muove con velocità $u_x=c/2$ rispetto ad un osservatore A. Si determini la velocità della particella rispetto ad un osservatore B (a) se la velocità di B rispetto ad A è $v=c/3$ nella stessa direzione e nello stesso verso della velocità della particella, (b) se la velocità di B rispetto ad A è $v=c/2$ nella stessa direzione della velocità della particella, ma in verso opposto.

- Dalle formule di trasformazione relativistica della velocità risulta

$$\begin{aligned} &(a)\quad u'_x=\frac{u_x-v}{1-u_x v/c^2}=\frac{c/2-c/3}{1-1/6}=c/5; \\ &(b)\quad u'_x=\frac{u_x-v}{1-u_x v/c^2}=\frac{c/2+c/2}{1+1/4}=4c/5 \end{aligned}.$$

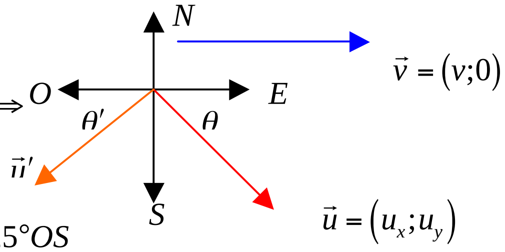
Problema 8

Una navicella spaziale lunga 20 m nel suo sistema di riferimento a riposo sta viaggiando alla velocità $v=0{,}5c$ rispetto ad un certo sistema di riferimento A. Una particella viaggia alla velocità $v=0{,}5c$ rispetto ad A, nella direzione opposta rispetto a quella della particella. Quanto tempo impiega la particella, nel sistema a riposo della navicella, a percorrerne l'intera lunghezza?

- $t'=\dfrac{l'}{u'_x}=\dfrac{l'}{\left(u_x-v\right)/\left(1-u_x v/c^2\right)}=\dfrac{20}{(0{,}5c+0{,}5c)/(1+0{,}25)}=8{,}3\cdot10^{-8}s.$

Problema 9
Una particella si muove in direzione 45° sud da est alla velocità $u = 0,7c$ relativa alla terra. Qual è la velocità misurata da un osservatore viaggiante in direzione est rispetto alla terra con velocità $v = 0,8c$?

- $$\begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} = \dfrac{0,7c \cdot \cos 45° - 0,8c}{1 - (0,7\cos 45°) \cdot 0,8} = -0,505c \\ u'_y = \dfrac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} = \dfrac{0,6 \cdot (-0,7c \cdot \sin 45°)}{1 - (0,7\cos 45°) \cdot 0,8} = -0,492c \end{cases} \Rightarrow$$



$$u' = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2} = 0,705c; \quad \theta' = \tan^{-1}(u'_y/u'_x) = 44,25°OS$$

19.7 Dinamica relativistica

La seconda legge della dinamica nella forma "classica" $\vec{F} = m\vec{a}$ non è compatibile con le idee della nuova cinematica che stiamo studiando, in quanto, in linea di principio, non c'è limite all'accelerazione e, di conseguenza, al raggiungimento di velocità superiori a quella della luce.

La massa relativistica
Occorre in primo luogo ripensare in modo "dinamico" il concetto di massa, cioè come una grandezza non più costante, ma che *aumenta al crescere della velocità*. Le conseguenze immediate sono un aumento dell'inerzia (e conseguente diminuzione dell'accelerazione), e un aumento dell'energia cinetica. Come vedremo tra breve, l'espressione corretta della *massa relativistica* di un corpo in movimento è

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

avendo indicato con m_0 la cosiddetta *massa a riposo*.

La quantità di moto relativistica
La velocità della luce finita, inoltre, fa cadere il concetto d'istantaneità di azione e reazione: il *Principio di conservazione della quantità di moto* costituisce la corretta formulazione in chiave relativistica della terza legge della dinamica. Iniziamo definendo opportunamente la *quantità di moto relativistica* come

$$p = m_0 \frac{\Delta x}{\Delta \tau},$$

in virtù dell'invarianza del tempo proprio $\Delta\tau$ per sistemi di riferimento in moto relativo rettilineo uniforme, dove m_0 è la massa dell'oggetto in moto (che, nel suo SdR è in quiete). In conseguenza di ciò, un SdR che vede muoversi con velocità v l'oggetto in questione misura una quantità di moto

$$p = m_0 \frac{\Delta x}{\Delta \tau} = m_0 \frac{\Delta x}{\frac{\Delta t}{\gamma}} = m_0 \gamma v = mv.$$

Dall'ultima uguaglianza segue la definizione di massa relativistica: $m_0 \gamma v = mv \Rightarrow m = \gamma m_0 = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Il principio di equivalenza massa-energia
Abbiamo già osservato che un aumento della massa (in funzione della velocità) provoca un aumento dell'energia cinetica; in particolare:

$$\Delta m = m - m_0 = \gamma m_0 - m_0 = m_0(\gamma - 1) = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Per velocità piccole rispetto alla velocità della luce, l'approssimazione polinomiale al secondo ordine della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in un intorno dell'origine, porta a scrivere la variazione di massa nella forma

$$\Delta m = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = m_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2}.$$

Si osserva che $\Delta m = \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \Delta m \propto E_c$: Einstein parte da questo risultato per ipotizzare il cosiddetto *Principio di equivalenza massa-energia*.
Dunque,

$$m = m_0 + \Delta m = m_0 + \frac{E_c}{c^2}.$$

A questo punto si fa strada l'ipotesi di Einstein: *anche alla massa a riposo corrisponde un'equivalente energia a riposo*. Questa ipotesi estende, di fatto, l'equivalenza massa-energia: detta E_0 l'energia associata alla massa a riposo (*Energia a riposo* $m_0 = \frac{E_0}{c^2}$), risulta

$$m = m_0 + \frac{E_c}{c^2} = \frac{E_0}{c^2} + \frac{E_c}{c^2} \Rightarrow mc^2 = E_0 + E_c$$

Abbiamo quindi un'espressione dell'*energia totale* per un punto materiale, data dall'espressione

$$E = mc^2 = E_0 + E_c$$

nel limite classico delle velocità.
Nel caso generale si giunge alla formulazione relativistica dell'energia partendo dall'invariante relativistico $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta\tau^2$, combinato con la nuova definizione di quantità di moto $p = m_0 \frac{\Delta x}{\Delta \tau}$ in questo modo:
$c^2 = c^2\frac{\Delta t^2}{\Delta\tau^2} - \frac{\Delta x^2}{\Delta\tau^2} = c^2\gamma^2 - \frac{p^2}{m_0^2} \Rightarrow m_0^2c^2 = m_0^2c^2\gamma^2 - p^2$. Moltiplicando ambo i membri per c^2 si ottiene $m_0^2c^4 = m_0^2c^4\gamma^2 - c^2p^2$ da cui segue $\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} = \gamma m_0 c^2 := E$ come espressione dell'energia totale. Questa è l'espressione corretta da utilizzare per valutare l'energia delle particelle negli acceleratori, dove, come è noto, si raggiungono velocità prossime a quella della luce.
Concludiamo queste brevi note con una precisazione sul Principio di equivalenza massa-energia: non è corretto parlare di trasformazione di massa in energia e viceversa, piuttosto di energia $E = mc^2$ posseduta da un corpo di massa *m*, oppure di massa $m = \frac{E}{c^2}$ posseduta da un corpo di energia totale *E*.