Campo Elettrico

Problemi

1. Una monetina di rame ha la massa di 3 g. Ogni atomo di rame contiene 29 elettroni, e vi sono $6{,}02\cdot10^{23}$ atomi in 64 g di rame.

a) Si trovi il numero di atomi, il numero di elettroni e la carica negativa in coulomb contenuti in una monetina di rame puro.

Il numero di atomi in 3 g di rame è $6{,}02\cdot10^{23}\cdot\dfrac{3}{64}=2{,}8\cdot10^{22}$. Il numero di elettroni è $2{,}8\cdot10^{22}\cdot29=8{,}1\cdot10^{23}$. La carica negativa in coulomb è quindi $8{,}1\cdot10^{23}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}=1{,}3\cdot10^{5}C$.

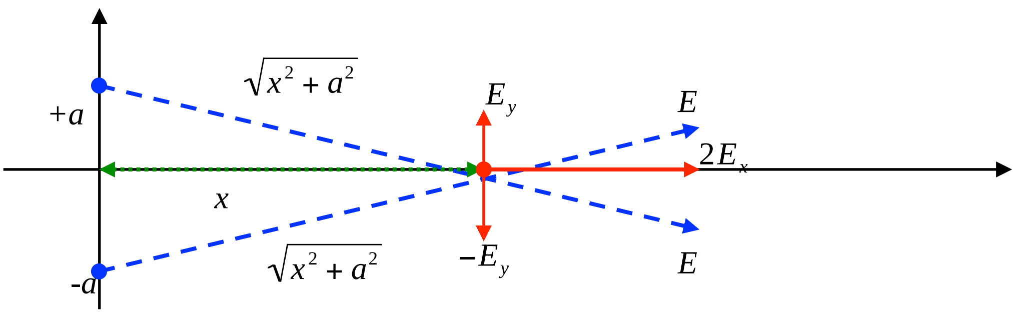
b) Quanto tempo impiegherebbe questa carica per percorrere un filo conduttore a una rapidità (intensità di corrente) di 1 A = 1 C/s ?

Impiegherebbe un tempo pari a $t=\dfrac{1{,}3\cdot10^{5}C}{1\frac{C}{s}}=1{,}3\cdot10^{5}s$.

c) Se si potesse trasferire l'1% della carica negativa da una monetina ad un'altra, si calcoli la forza esercitata da una monetina sull'altra quando esse sono distanti 60 cm, supponendo che entrambe le monetine siano cariche puntiformi.

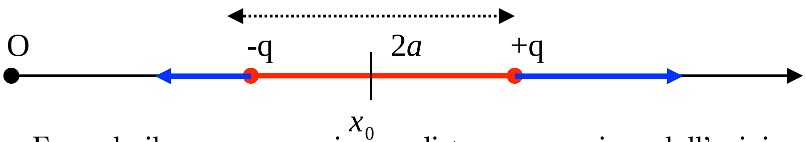
Dopo il trasferimento di carica la monetina cedente risulta caricata positivamente per $1{,}3\cdot10^{5}C\dfrac{1}{100}=1{,}3\cdot10^{3}C$, mentre quella ricevente risulta caricata negativamente per la stessa quantità. Dalla legge di Coulomb la forza che si esercita tra le monetine è $F=k\dfrac{q_1q_2}{r^2}=9\cdot10^{9}\dfrac{(1{,}3\cdot10^{5})(1{,}3\cdot10^{5})}{0{,}6^2}=4{,}2\cdot10^{20}N$.

2. Due cariche positive uguali sono poste sull'asse *y* nei punti $y=+a$ e $y=-a$. Si trovi l'espressione del campo elettrico E_x in un punto sull'asse *x* a distanza *x* dall'origine.



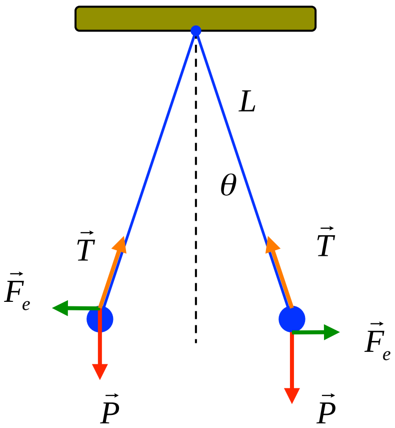
- Il campo elettrico nel punto a distanza *x* dall'origine si ottiene per sovrapposizione dei campi prodotti dalle singole cariche. La simmetria del problema permette di determinare il campo come somma delle componenti del campo lungo la direzione orizzontale, che per similitudine è: $\dfrac{\frac{E_x}{2}}{E}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\Rightarrow E_x=\dfrac{2xE}{\sqrt{x^2+a^2}}=\dfrac{2xk\frac{q}{(x^2+a^2)}}{\sqrt{x^2+a^2}}=\dfrac{2kqx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$. Se la distanza *x* fosse molto maggiore di a, sarebbe come se una carica “doppia” fosse fissata nell’origine ed il campo sarebbe $E_x = \frac{2kq}{x^2}$.

3. Un dipolo elettrico è costituito da due cariche +q e −q, separate da una distanza $2a$. Esso è disposto lungo l’asse x con il suo centro in x_0. C’è un campo elettrico non uniforme nella direzione x, $E_x = Ax$, dove A è una costante. Si dimostri che la forza agente sul dipolo è nella direzione x ed è data da $F_x = Ap$, dove p è il modulo del momento di dipolo.



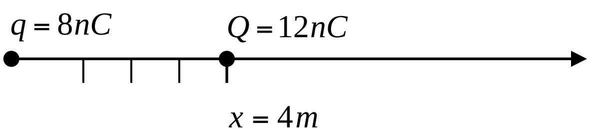
- Essendo il campo maggiore a distanza maggiore dall’origine, risulta $F_x = +qA(x_0 + a) - qA(x_0 - a) = Aq2a = Ap \Rightarrow \vec{F}_x = A\vec{p} = Aq\vec{L}$.

4. Due sferette di massa m sono appese a un punto comune mediante fili lunghi L. Se su ogni sfera c’è una carica q, e ciascun filo forma un angolo θ con la verticale, si determini la carica q. In particolare, si trovi il valore della carica se $L = 50cm$ e $\theta = 10°$.



- Il sistema è equilibrato dall’azione della forza elettrica, del peso, e della tensione. Le equazioni della statica scomposte nelle direzioni verticale (del peso) ed orizzontale (della forza elettrostatica) portano alle seguenti conclusioni:
$$\begin{cases} T_x = F_e \\ T_y = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T\sin\theta = k\dfrac{q^2}{(2L\sin\theta)^2} \\ T\cos\theta = mg \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = k\frac{q^2}{mg(2L\sin\theta)^2} \Rightarrow q = 2L\sin\theta\sqrt{\frac{mg\tan\theta}{k}}$$
- Con i dati $L = 50cm$ e $\theta = 10°$ il valore della carica è $q = 2{,}4 \cdot 10^{-7}C = 240nC$.

5. Una carica di 8nC è disposta nell’origine e una di 12nC è disposta nel punto $x = 4$m. Si trovi il punto sull’asse x in cui il campo elettrico è nullo.



- Nel punto in questione la somma vettoriale dei campi sorgenti dalle cariche fisse è nulla. Poiché la direzione del campo risultante è quella dell'asse *x*, denotata con *x* la distanza del punto incognito dall'origine l'equazione che ne fornisce il valore è

$$\frac{kq}{x^2} - \frac{kQ}{(4-x)^2} = 0 \Rightarrow q(4-x)^2 - Qx^2 = 0$$

$$(q-Q)x^2 - 8xq + 16q = 0 \Rightarrow x = \frac{4q \pm \sqrt{16q^2 - 16q^2 + 16qQ}}{q-Q}$$

$$x = \frac{4q - 4\sqrt{qQ}}{q-Q} = 1{,}8m.$$

- La soluzione negativa è stata scartata perché il punto deve necessariamente stare tra le due cariche, in quanto nei punti esterni i campi prodotti dalle due cariche hanno lo stesso verso.

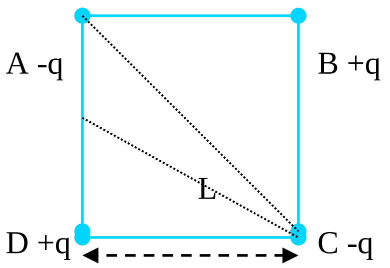
6. Se si mettono insieme due cariche, q_1, q_2, si ha una carica totale di $6\mu C$. Se le due cariche sono distanti 3m, la forza che ognuna esercita sull'altra ha il modulo di 8mN. Si trovino q_1, q_2: (a) se le due cariche sono entrambe positive; (b) se sono una positiva e l'altra negativa.
   - (a) Le ipotesi danno origine alle equazioni:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = Q = 6\mu C \\ k\dfrac{q_1 q_2}{9} = F = 8mN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = Q - q_2 \\ k\dfrac{(Q-q_2)q_2}{9} = F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = Q - q_2 \\ kq_2^2 - kQq_2 + 9F = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{kQ \mp \sqrt{(kQ)^2 - 36Fk}}{2k} = \dfrac{5{,}4 \cdot 10^4 \mp 1{,}8 \cdot 10^4}{1{,}8 \cdot 10^{10}} = 2\mu C; \quad 4\mu C \\ q_2 = \dfrac{kQ \pm \sqrt{(kQ)^2 - 36Fk}}{2k} = \dfrac{5{,}4 \cdot 10^4 \pm 1{,}8 \cdot 10^4}{1{,}8 \cdot 10^{10}} = 4\mu C; \quad 2\mu C \end{cases}$$

   - (b) ...

7. Quattro cariche di ugual valore assoluto sono disposte nei vertici di un quadrato di lato *L*. (a) Si trovino il modulo e la direzione orientata della forza esercitata dalle altre cariche sulla carica posta nel vertice inferiore sinistro. (b) Si dimostri che il campo elettrico nel punto medi di uno dei lati del quadrato è diretto lungo il lato, orientato verso la carica negativa, e ha modulo $E = k\frac{8q}{L^2}\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{25}\right)$.

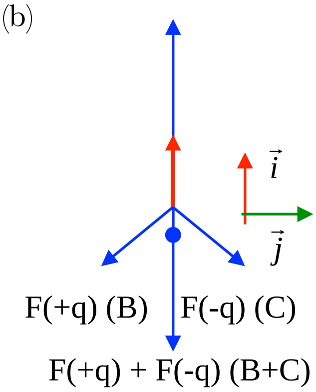


- La forza esercitata dalle cariche sulla carica posta nel vertice inferiore sinistro è data dalla somma vettoriale dei singoli contributi (la risultante si trova nella direzione della diagonale):

$$k\frac{(-q)(-q)}{2L^2} + 2k\frac{(+q)(-q)}{L^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = k\frac{q^2}{L^2}\left(-\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right).$$

F(-q) + F(+q) (A+D)

- (b)

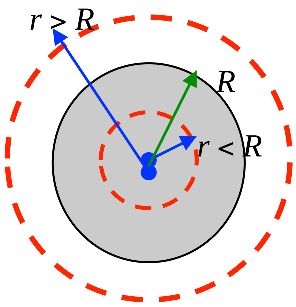


$$\vec{E}(A)+\vec{E}(D)+\vec{E}(C)+\vec{E}(B)=$$

$$k\frac{q}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}\vec{i}+k\frac{q}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}\vec{i}+k\frac{q}{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}L\right)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-\vec{i})+\frac{2}{\sqrt{5}}(\vec{j})\right)+k\frac{q}{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}L\right)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-\vec{i})-\frac{2}{\sqrt{5}}(\vec{j})\right)$$

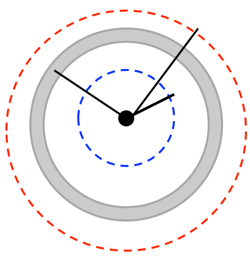
$$\left(2k\frac{q}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}-\frac{2}{\sqrt{5}}k\frac{q}{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}L\right)^2}\right)\vec{i}=\left(k\frac{8q}{L^2}\left(1-\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)\right)\vec{i}$$

8. In un modello del nucleo atomico si considera quest'ultimo come una sfera carica uniformemente con una densità di carica $\rho\frac{C}{m^3}$. Sia R il raggio della sfera. Si usi il teorema di Gauss per dimostrare che il campo elettrico ad una distanza r è dato da:
$E_r=\begin{cases}\frac{kQ}{R^3}r & r<R\\ \frac{kQ}{r^2} & r>R\end{cases}$, dove $Q=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$ è la carica totale nella sfera.



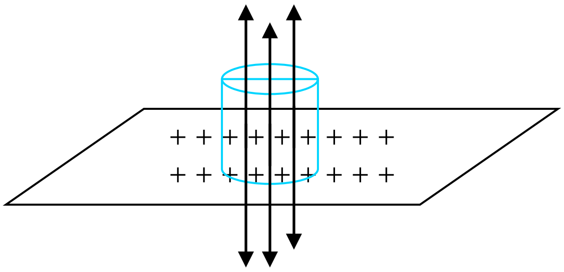
- In un punto interno a distanza r dal nucleo, l'intensità del campo si trova applicando il teorema di Gauss, scegliendo come superficie gaussiana la sfera interna di raggio r: $E_r 4\pi r^2=4k\pi\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho=4k\pi\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\Rightarrow E_r=\frac{kQ}{R^3}r$. In un punto esterno, presa come superficie gaussiana sempre la sfera di raggio $r>R$, grazie al teorema di Gauss si ha che $E_r 4\pi r^2=4k\pi\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho=4k\pi\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\Rightarrow E_r=\frac{kQ}{r^2}$.

9. Si usi il teorema di Gauss per dedurre le equazioni per il campo elettrico all'interno ed all'esterno di uno strato sferico di raggio R carico uniformemente.



- Se $r < R$ allora $E_r 4\pi r^2 = 4k\pi \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 0 \Rightarrow E_r = 0$, poiché all'interno della sfera non c'è carica. Se $r > R$ allora $E_r 4\pi r^2 = 4k\pi \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = 4k\pi Q \Rightarrow E_r = \frac{kQ}{r^2}$.

10. Si usi il teorema di Gauss per dedurre l'equazione del campo elettrico in prossimità di una distribuzione piana uniforme di carica.
    - Lontano dai bordi il campo è uniforme diretto perpendicolarmente alla lamina. Detta σ la densità superficiale di carica, risulta dal teorema di Gauss: $E_n 2\pi r^2 = 4k\pi \cdot (\pi r^2 \sigma) \Rightarrow E_n = 2\pi k\sigma$, dove *n* è la direzione perpendicolare alla lamina.



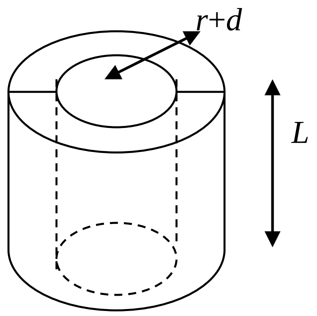
Problemi

1. Protoni, inizialmente fermi, vengono lasciati liberi di muoversi a un potenziale elettrico di 5 MV ottenuto con un acceleratore di Van de Graaff e si muovono nel vuoto fino ad una regione a potenziale nullo. (a) Se questa variazione di potenziale si ha in un tratto di 2,0m, si trovi il campo elettrico, supponendo che sia uniforme. (b) Si trovi la velocità dei protoni di 5 MV. (La massa del protone è $1{,}67 \cdot 10^{-27} kg$.)
   - Dalla relazione $E = \frac{\Delta V}{d}$ segue $E = \frac{5 \cdot 10^6 V}{2{,}0m} = 2{,}5\frac{MV}{m}$.
   - Per il principio di conservazione dell'energia risulta $\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = 3{,}1 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$.

2. Il potenziale dovuto a una carica Q distribuita uniformemente su un conduttore sferico di raggio *R* è $\frac{kQ}{r}$ per $r \geq R$. (a) Qual è il potenziale nella regione $r \leq R$?
   - Per il teorema di Gauss il campo elettrico all'interno della sfera ($r \leq R$) è dato dalla relazione: $\Phi_E = 4\pi r^2 E = 4\pi k\rho\frac{4}{3}\pi r^3$, $\quad \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, di conseguenza $E = \frac{kQr}{R^3}$. Dalla relazione $E = \frac{V}{r} \Rightarrow V = Er = \frac{kQr^2}{R^3}$.

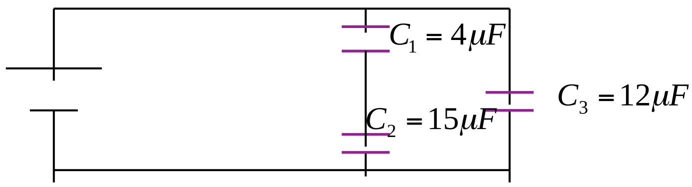
3. La membrana di un assone di un neurone è una sottile guaina cilindrica avente il raggio $r = 10^{-5} m$, la lunghezza $L = 0{,}1m$ e lo spessore $d = 10^{-8} m$. La membrana ha una carica positiva da un lato ed una negativa dall'altro e si comporta come un condensatore piano di area $A = 2\pi rL$ e distanza tra le armature *d*. La sua costante dielettrica relativa è all'incirca $\varepsilon_r = 3$. (a) Si trovi la capacità della membrana. Se la differenza di potenziale applicata alla

membrana è $\Delta V = 70mV$, si trovino (b) la carica su ciascun lato della membrana e (c) il campo elettrico tra le due superfici.



- (a) $C = 3\varepsilon_0 \dfrac{A}{d} = 3\varepsilon_0 \dfrac{2\pi rL}{d} = \dfrac{3 \cdot 2\pi \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{9} \cdot 10^{-8}} = 1{,}67 \cdot 10^{-8} F = 16{,}7 nF$.
- (b) $C = \dfrac{Q}{\Delta V} \Rightarrow Q = C\Delta V = 16{,}7 \cdot 10^{-9} \cdot 70 \cdot 10^{-3} = 1{,}17 \cdot 10^{-9} C = 1{,}17 nC$.
- (c) $E = \dfrac{\Delta V}{d} = \dfrac{70 \cdot 10^{-3} V}{10^{-8} m} = 7 \cdot 10^{6} \dfrac{V}{m} = 70 \dfrac{MV}{m}$.

4. Per la disposizione mostrata in figura si trovino (a) la capacità equivalente, (b)la carica immagazzinata in ciascun condensatore, (c) l'energia totale immagazzinata.



- (a) Si calcola la capacità equivalente dei due condensatori in serie: $C_{12} = \dfrac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{60}{19} = 3{,}16\mu F$, successivamente la capacità equivalente del parallelo $C_{12} - C_3$: $C_{123} = C_{12} + C_3 = 15{,}16\mu F$.
- (b) La carica immagazzinata in ciascun condensatore è:
$$\begin{cases} V_1 + V_2 = V = 200V \\ Q_1 = V_1 C_1 = Q_2 = V_2 C_2 = Q \Rightarrow \dfrac{Q}{4\mu F} + \dfrac{Q}{15\mu F} = 630\mu C. \\ Q_3 = VC_3 = 2400\mu C \end{cases}$$
- (c) $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{Q_i^2}{2C_i} = 0{,}303 J$.

5. Si dispongano tre condensatori identici in modo da ottenere la massima e la minima capacità equivalente.
    - (Massima capacità equivalente) E' noto che se disponiamo due condensatori in serie di capacità C_1 e C_2, la capacità equivalente è $C_{12} = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$. Nel caso particolare in cui questi condensatori hanno la stessa capacità, la capacità equivalente è $C_{12} = \dfrac{C}{2}$, mentre se li colleghiamo in parallelo risulta essere

$C_{12} = 2C$. La massima capacità equivalente si otterrà quindi collegando in parallelo i tre condensatori, per un valore $C_{123} = 3C$.

- (Minima capacità equivalente) Colleghiamo in serie tre condensatori. Otteniamo
$$C_{123} = \frac{C_{12}C_3}{C_{12} + C_3} = \frac{\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}C_3}{\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} + C_3} = \frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} = \frac{C}{3}.$$

6. Quando l'uranio ^{235}U cattura un neutrone, esso si spacca in due nuclei, in un processo chiamato fissione nucleare. Si supponga che i due nuclei prodotti nella fissione siano ugualmente carichi con una carica $+46e$ e che questi nuclei siano fermi subito dopo la fissione, con una distanza tra loro $r = 1{,}3 \cdot 10^{-14}\,m$. (a) Si calcoli l'energia potenziale in elettronvolt. (b) Quante fissioni al secondo sono necessarie per produrre 1 MW di potenza in un reattore?
   - (a) L'energia potenziale si calcola mediante la relazione
   $$U = k\frac{qQ}{r} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (46 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{1{,}3 \cdot 10^{-14}} = 3{,}74 \cdot 10^{-11}\,J =$$
   $$\frac{3{,}74 \cdot 10^{-11}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 2{,}34 \cdot 10^8\,eV = 234\,MeV$$
   - (b) Se consideriamo l'energia calcolata al punto precedente come relativa ad ogni fissione, il numero di fissioni che devono essere fatte al secondo per ottenere una potenza di 1 MW è pari a
   $$\Delta t = \frac{U}{P} = \frac{3{,}74 \cdot 10^{-11}}{1 \cdot 10^6} = 3{,}74 \cdot 10^{-5}\,s \Rightarrow N = \frac{1s}{3{,}74 \cdot 10^{-5}\,s} = 2{,}67 \cdot 10^4$$ fissioni.