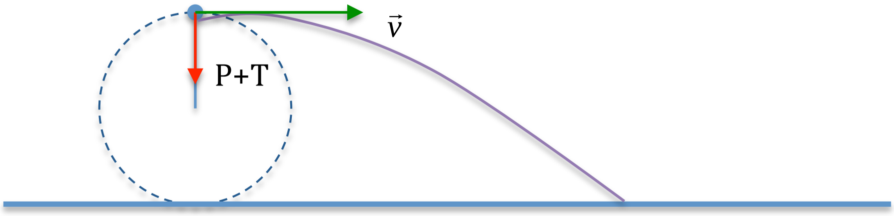
Impulso e quantità di moto

Esercizi

1. Un corpo, appeso all'estremità di un filo inestendibile e di massa trascurabile, viene fatto ruotare in un piano verticale. Il centro della traiettoria circolare ha una distanza dal suolo pari al raggio.
   - Si calcoli la velocità minima che permette la rotazione.
   - Ad un certo punto, quando il corpo passa per il punto più alto della traiettoria con una velocità $v = \sqrt{gr}$, il filo si spezza. Si determini la distanza del punto d'impatto del corpo con il suolo, misurata a partire dal punto di tangenza della traiettoria circolare con il suolo, nell'ipotesi in cui il raggio della circonferenza misura 1m.
2. Una persona della massa di 100 kg inizia a camminare su un lungo tronco di legno, di massa 500 kg e galleggiante sulla superficie di un laghetto, alla velocità di $0,5 m/s$ *rispetto al tronco*. Si determini la velocità del tronco rispetto alla riva. (*Suggerimento:* $v_{PR} = v_{PT} + v_{TR} \ldots$).
3. Due dischi di massa $m_1 = 2kg$ e $m_2 = 6kg$, sono appoggiati senza attrito su un piano orizzontale, trattenuti da una forza di intensità pari a 10N. Successivamente i due corpi vengono rilasciati in un tempo $\Delta t = 2 \cdot 10^{-2} s$. Si utilizzino le leggi della dinamica per descrivere lo stato dei due dischi prima, durante, e dopo la fase di rilascio.
4. Tre masse uguali *m* del valore di 2 kg *si* muovono nel piano con le seguenti velocità: $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v}_3 = 2\vec{i} - 2\vec{j}$. Si calcoli la quantità di moto e la velocità del centro di massa del sistema.
5. Un fucile della massa di 4,25 kg spara un proiettile da 25 g con una velocità di rinculo di $2 m/s$. Si calcoli la velocità con cui il proiettile viene sparato.
6. Un proiettile di massa $2m$ esplode rompendosi in due parti uguali, ciascuna di massa *m*, quando si trova nel punto più alto della sua traiettoria. Dopo l'esplosione uno dei due pezzi cade, partendo con velocità nulla, mentre l'altro continua a muoversi orizzontalmente; i due pezzi toccano terra simultaneamente. Dove cade il secondo proiettile?
7. Una persona della massa di 100 kg inizia a camminare su un lungo tronco di legno, di massa 500 kg e galleggiante sulla superficie di un laghetto, alla velocità di $0,5 m/s$ *rispetto al tronco*. Si determini la velocità del tronco rispetto alla riva. (*Suggerimento:* $v_{PR} = v_{PT} + v_{TR} \ldots$).
8. Un'automobile di massa m_1 viaggia su una strada orizzontale con velocità $\vec{v}_{1i}$ quando tampona un'automobile di massa m_2, in moto nella stessa direzione e verso, con velocità $\vec{v}_{2i}$. Se le due automobili costituiscono approssimativamente un sistema isolato, si determini la velocità dopo l'urto dell'automobile tamponata, sapendo che l'altra, in seguito all'urto, procede con velocità $\vec{v}_{1f}$ in una direzione che forma un angolo θ, in senso antiorario, con la direzione della velocità iniziale.
9. Un'auto di massa 1000 kg viaggia alla velocità di $108 km/h$ quando urta frontalmente un'auto della massa di 800 kg che viaggia alla velocità di $72 km/h$. Dopo l'impatto, il groviglio di auto percorre un tratto di strada della lunghezza di 10 m. Calcolare la velocità iniziale del groviglio, e si stimi il valore delle forze d'attrito.

Soluzioni

1. Un corpo, appeso all'estremità di un filo inestendibile e di massa trascurabile, viene fatto ruotare in un piano verticale. Il centro della traiettoria circolare ha una distanza dal suolo pari al raggio.



- Si calcoli la velocità minima che permette la rotazione.

- $\begin{cases} P+T = m\dfrac{v^2}{r} \\ T \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m\dfrac{v^2}{r} - P = T \geq 0 \Rightarrow v \geq \sqrt{gr}$

- Ad un certo punto, quando il corpo passa per il punto più alto della traiettoria con una velocità $v = \sqrt{gr}$, il filo si spezza. Si determini la distanza del punto d'impatto del corpo con il suolo, misurata a partire dal punto di tangenza della traiettoria circolare con il suolo, nell'ipotesi in cui il raggio della circonferenza misura 1m.

- $\begin{cases} y = 2r - \dfrac{gt^2}{2} \\ x = vt \end{cases} \Rightarrow 0 = 2r - \dfrac{\cancel{g}x^2}{2\cancel{g}r} \Rightarrow x = 2r = 2m$.

2. Si applica il Principio di conservazione della quantità di moto, riferendo il moto al sistema di riferimento inerziale costituito dalla Terra (rappresentata, ovviamente, dalla "riva"). L'equilibrio delle forze in gioco porta a scrivere
$$0 = mv_{PR} + Mv_{TR} \Rightarrow 0 = mv_{PT} + mv_{TR} + Mv_{TR} \Rightarrow v_{TR} = -\frac{mv_{PT}}{m+M} = -0,08\,m/s$$

3. Prima della fase di rilascio i due dischi sono fermi, quindi la quantità totale del sistema è nulla. Durante la fase di rilascio agiscono, oltre al peso ed alla reazione vincolare che si equilibrano sempre, anche forze interne vettorialmente opposte per la terza legge della dinamica. La seconda legge della dinamica, ed il principio di conservazione della quantità di moto, ci forniranno le velocità con cui si muoveranno i dischi nella fase successiva al rilascio:
$$\vec{0} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$
$$F = m_1 a_1 = m_2 a_2$$
$$v_1 = a_1\Delta t = \frac{F\Delta t}{m_1} = 0,1\frac{m}{s}; \quad v_2 = a_2\Delta t = \frac{F\Delta t}{m_2} = 0,03\,m/s$$

4. La quantità di moto del sistema è data dalla somma delle singole quantità di moto: $\vec{Q} = \sum m_i\vec{v}_i = 2(2-1+2)\vec{i} + 2(2+2-2)\vec{j} = (6\vec{i} + 4\vec{j})(kg\cdot m)/s$. La velocità del centro di massa del sistema è data dalla relazione $\left(\sum m_i\right)\vec{v}_{CM} = \vec{Q} \Rightarrow \vec{v}_{CM} = (\vec{i} + 0,67\vec{j})\,m/s$.

5. Per il teorema della quantità di moto $\vec{0} = M\vec{v}_f + m\vec{v}_p \Rightarrow v_p = \dfrac{Mv_f}{m} = 3,4\cdot 10^2\,m/s$.

6. Le forze disgreganti durante l'esplosione del proiettile rendono trascurabile il peso di questo, al loro confronto. E' quindi possibile applicare il principio di conservazione della quantità di moto: $2mv_{0x} = m\cdot 0 + mv_x \Rightarrow v_x = 2v_{0x}$. Ora, il centro di massa dopo l'esplosione continua a muoversi come se questa non si fosse verificata (in quanto questione "interna" al proiettile), e

prosegue il suo moto parabolico, cadendo a terra ad una distanza pari alla gittata $x_{\max}$. Di conseguenza, essendo uguali le due masse, il secondo frammento, che parte con velocità iniziale v_x, cadrà a terra ad una distanza dal centro di massa pari a quella a cui ricade il frammento partito con velocità nulla.

7. Si applica il Principio di conservazione della quantità di moto, riferendo il moto al sistema di riferimento inerziale costituito dalla Terra (rappresentata, ovviamente, dalla "riva"). L'equilibrio delle forze in gioco porta a scrivere
$$0 = mv_{PR} + Mv_{TR} \Rightarrow 0 = mv_{PT} + mv_{TR} + Mv_{TR} \Rightarrow v_{TR} = -\frac{mv_{PT}}{m+M} = -0,08\,m/s.$$

8. Il sistema è isolato, quindi si conserva la quantità di moto totale: $m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = (m_1+m_2)\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$; poiché il centro di massa continua a muoversi lungo la direzione delle velocità iniziali, si ha
$$\begin{cases} (m_1+m_2)v_{CM} = m_1v_{1f}\cos\theta + m_2v_{2fx} \Rightarrow v_{2fx} = \dfrac{(m_1+m_2)v_{CM} - m_1v_{1f}\cos\theta}{m_2} \\ 0 = m_1v_{1f}\sin\theta + m_2v_{2fy} \Rightarrow v_{2fy} = \dfrac{-m_1v_{1f}\sin\theta}{m_2} \end{cases}.$$

9. Il teorema della quantità di moto, applicato tra gli istanti iniziale e finale dell'urto (la risultante delle forze esterne è uguale a zero), consente di calcolare la velocità iniziale del groviglio di auto: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{V} = M\vec{V} \Rightarrow V = 7,8\,m/s$, nel verso della prima auto. Il teorema dell'energia cinetica permette di calcolare il lavoro delle forze d'attrito, e di stimarne quindi l'intensità: $0 - \frac{1}{2}MV^2 = -F_{at}\Delta x \Rightarrow F_{at} = \frac{MV^2}{2\Delta x} = 5,5\cdot 10^3\,N$.