CAPITOLO 8
MECCANICA DEI FLUIDI

8.1 Corpi estesi

Lo studio della dinamica dei corpi estesi favorisce il passaggio dalla meccanica alla termodinamica. Un corpo, non assimilabile ad un punto materiale, può essere classificato, in prima approssimazione, come **solido** (possiede volume e forma propri), **liquido** (possiede volume proprio, e assume la forma del recipiente che lo contiene) oppure **aeriforme** (non possiede né volume né forma propri).

Come accennato, questa classificazione è piuttosto approssimativa: i corpi di gomma, per esempio, possono essere considerati solidi finché le forze deformanti agenti su di essi non sono significative, dopodiché si collocano al di fuori delle tre categorie di cui sopra.

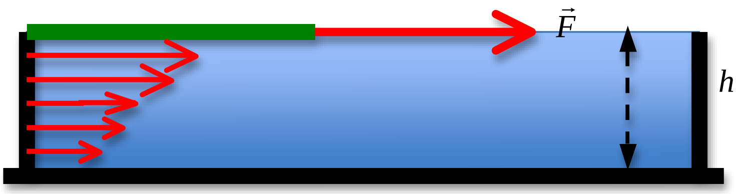
8.2 La compressibilità e la viscosità

Una caratteristica dei corpi è la cosiddetta **compressibilità**, una grandezza fisica legata in modo naturale al volume. Consideriamo ad esempio un cilindro contenente acqua, munito di un pistone a tenuta stagna, su cui si esercita una forza. Si trova sperimentalmente che la variazione di volume relativa è proporzionale alla forza che l'ha causata: $\frac{\Delta V}{V} \propto \Delta F$. Da questa evidenza sperimentale segue la relazione:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \frac{\Delta F}{S},$$

dove κ è il *coefficiente di compressibilità*, e S la superficie del pistone.

Sempre osservando i liquidi, ne esistono alcuni, come l'olio e il miele, che si differenziano tra loro e dall'acqua per una proprietà connessa alla loro consistenza: la **viscosità**. Immaginiamo un dispositivo come quello in figura, in cui una lastra scorre sulla superficie di un liquido, contenuto in un recipiente profondo h, per effetto dell'azione di una forza $\vec{F}$.



Per effetto dell'azione della forza, dopo un po' la lastra inizia a muoversi sulla superficie del liquido con una velocità uniforme. Immaginando il liquido come sovrapposizione di strati, questi scorrono gli uni sugli altri, con velocità che vanno da quella della lastra, a quella paria a zero per lo strato a contatto con il fondo del recipiente.

Sperimentalmente la relazione che lega le grandezze in gioco è la seguente:

$$F = \eta \frac{Sv}{h},$$

dove con η abbiamo indicato il cosiddetto *coefficiente di viscosità*, con S la superficie della lastra, e con v la velocità uniforme da questa raggiunta.

Quanto al **lavoro** fatto dalla forza, questo non muta l'energia cinetica della lastra, poiché questa si muove a velocità costante, bensì andrà a modificare le *proprietà interne*, e quindi la *forma*, del liquido. Ad esempio, la maggiore viscosità del miele rispetto all'acqua richiede, a parità di lastra e di profondità del liquido, una forza maggiore per il raggiungimento della stessa velocità.

La possibilità o meno di compiere lavoro, da parte di forze esterne, contro le forze interne del corpo accomuna due modelli con cui possiamo rappresentare i corpi: quello del **corpo rigido**, indeformabile ed incompressibile, e quello del **liquido ideale**, anch'esso incompressibile e di volume invariabile.

I corpi non rigidi si dicono **corpi elastici** se, al cessare di un'eventuale azione deformante, riassumono la forma originaria, e restituiscono il lavoro fatto dall'agente deformante.

8.3 L'omogeneità e la densità dei corpi

Un'altra proprietà dei corpi è l'**omogeneità**, una proprietà per cui tutti i campioni di un corpo presentano le stesse caratteristiche fisiche. Un esempio semplice di corpo omogeneo è rappresentato da quello costituito da una sostanza pura, come nel caso di un blocco di ferro.
Una grandezza fisica che caratterizza i corpi omogenei è la **densità**, che fornisce un'indicazione di quanto la materia costituente sia concentrata all'interno del corpo, e dipende dalle condizioni termiche in cui il corpo stesso si trova. La densità è definita come il rapporto tra la massa ed il volume del corpo:

$$\rho := \frac{m}{V}.$$

8.4 La pressione

Finora ci siamo occupati di forze applicate in un punto. Nel caso di corpi estesi è possibile che vengano sottoposti all'azione di **forze distribuite**, come ad esempio il *peso*, che si intende distribuito su tutto il *volume* del corpo, inteso quest'ultimo come costituito da tanti "elementi di volume", $V = \sum \delta V_i$, su ognuno dei quali agisce una forza peso $\delta \vec{P}_i = \delta m_i \vec{g} = \rho \delta V_i \vec{g}$. Se le forze sono uniformemente distribuite sulla *superficie* del corpo, acquista una notevole importanza il concetto di **pressione**, una grandezza fisica *scalare* definita dal rapporto tra la componente della forza perpendicolare alla superficie su cui preme, e la superficie stessa:

$$p = \frac{F}{S}.$$

L'unità di misura della pressione è il *Pascal*: $1Pa := 1N \cdot m^{-2}$.
Uno strumento per la misura della pressione è la cosiddetta *capsula dinamometrica*, costituita da un cilindro graduato, ad esempio in centimetri, munito di pistone a tenuta collegato alla base del cilindro da una molla. Tra il pistone e la base è stato praticato il vuoto, in modo tale che la molla possa allungarsi e comprimersi senza attrito: la conoscenza della costante elastica della molla e la lettura della compressione sul cilindro graduato, permettono di calcolare la pressione sul pistone attraverso la *legge di Hooke*: $p = \frac{k\Delta x}{S}$, dove *S* è la superficie del cilindro.
La pressione sperimentata da ogni elemento di superficie di un corpo su cui agisce una forza distribuita uniformemente, è $\Delta p = \frac{\Delta F_i}{S_i}$.
Sempre sperimentalmente,

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \frac{\Delta F_i}{S_i} := -\kappa \Delta p.$$

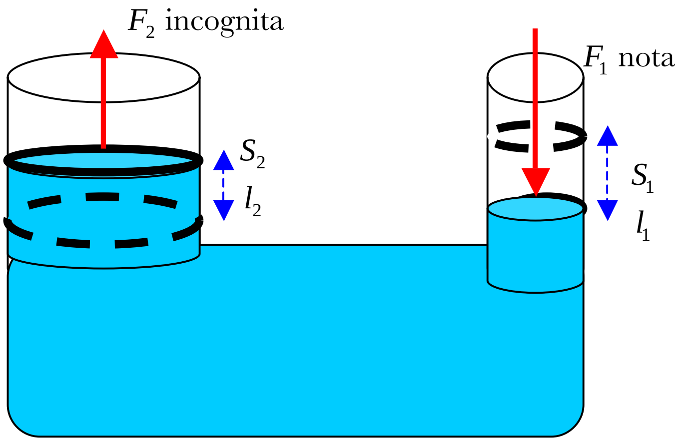
L'ultima relazione può essere considerata come la *generalizzazione* della $\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \frac{\Delta F}{S}$ a corpi di forma qualsiasi. Grazie al concetto di pressione, possiamo affermare che il coefficiente di compressibilità è, a tutti gli effetti, una proprietà del materiale, indipendentemente dalla sua superficie.

8.5 La statica dei liquidi

Queste brevi note fanno uso di due modelli: quello di *cilindro di fluido* per la giustificazione delle leggi della statica dei liquidi, e quello di *tubo di flusso* per lo studio del moto dei liquidi a bassa velocità. Questa precisazione è quanto mai opportuna vista l'importanza del concetto di modello per la descrizione di fenomeni fisici complessi, come ad esempio il moto dei liquidi.

La legge di Pascal

La *pressa idraulica* è una macchina contenente un liquido *a riposo* (per esempio acqua) che può essere schematizzata come segue:



La quantità d'acqua premuta dal primo pistone è uguale alla quantità d'acqua che si solleva sotto il secondo:

$$S_1 l_1 = S_2 l_2 .$$

Ora, forze che si equilibrano compiono un lavoro nullo; durante lo spostamento dei pistoni i lavori compiuti dalle singole forze dovranno essere uguali e di segno contrario:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2 .$$

Se adesso dividiamo i membri della seconda relazione per i rispettivi della prima otteniamo:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} .$$

La quantità $\frac{F}{S}$, la *pressione*, è uguale su entrambi i pistoni; inoltre la forza agente sul secondo pistone è *inversamente proporzionale* alla superficie.

In generale, la pressione in un liquido è *uguale* in tutti i punti ed in tutte le direzioni: questo fatto verificabile sperimentalmente è noto come *legge di Pascal*.

In un fluido a riposo ogni porzione di esso è mantenuta in equilibrio dalle forze esercitate dal fluido adiacente alla porzione considerata. Tali forze possono essere solo perpendicolari alla superficie: in presenza di sforzi tangenziali infatti, il fluido non potrebbe stare in equilibrio.

Vogliamo caratterizzare la pressione in un liquido che si trova in un campo gravitazionale uniforme (ad esempio l'acqua del mare).

La pressione che agisce sulle basi di un cilindro di liquido (acqua) disposto orizzontalmente è costante, altrimenti il fluido non potrebbe stare in equilibrio:

$$F_1 = F_2 \Rightarrow P_1 = P_2$$

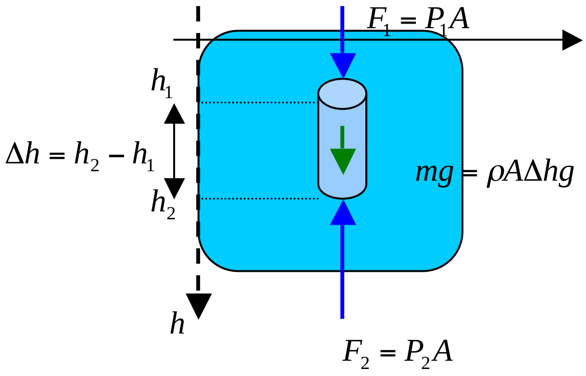
Da quanto appena visto segue che la superficie di un fluido in un campo gravitazionale uniforme deve necessariamente essere orizzontale.

La legge di Stevino

La legge di Pascal tuttavia, non tiene conto del fatto che tutti i corpi hanno un *peso*, e quindi che la pressione ad una certa profondità (quota) *deve* dipendere dalla quantità di liquido sovrastante.

Consideriamo un cilindro di fluido all'interno di un recipiente contenente tutto il fluido, a riposo. Le forze di pressione agenti (perpendicolarmente) sulla superficie laterale si equilibrano, così come quelle che agiscono sulle basi superiore ed inferiore. Considerando anche il suo peso, il cilindro è in equilibrio se:

$$F_1 + mg = F_2 \Rightarrow P_2 = P_1 + \rho g \Delta h \,.$$



La relazione che ci dice come cambia (aumenta) la pressione di un liquido con la profondità,

$$P_2 = P_1 + \rho \Delta h g,$$

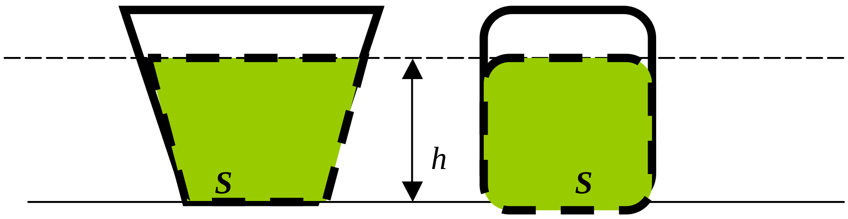
è la *legge di Stevino*.
Nel caso in cui la quota h_1 coincide con la superficie terrestre, la pressione P_1 coincide con la pressione atmosferica a livello del suolo, P_{atm}, e la legge di stevino si scrive quindi nella forma:

$$P(h) = P_{atm} + \rho \Delta h g,$$

e $P(h)$ rappresenta la cosiddetta *pressione idrostatica* alla profondità *h*.

Il paradosso idrostatico

Sempre dalla legge di Stevino si deduce il cosiddetto *paradosso idrostatico*: la forza che agisce sul fondo di due recipienti che hanno la stessa superficie di base è uguale se le superfici libere dei due recipienti si trovano alla stessa altezza, anche se le quantità di liquido sono significativamente diverse nei due recipienti.



La legge dei vasi comunicanti

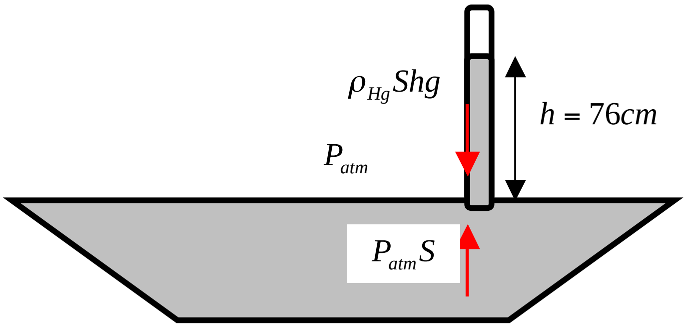
Se due recipienti contenenti lo stesso liquido, allo stesso livello, vengono uniti con un tubo, non ci sarà passaggio del liquido da un recipiente all'altro; se i livelli sono diversi, ci sarà passaggio di liquido dal recipiente in cui il liquido si trova al livello maggiore a quello in cui il livello è minore, finché non verrà raggiunto lo stesso livello. Questo fenomeno è noto come *legge dei vasi comunicanti*.

La pressione atmosferica

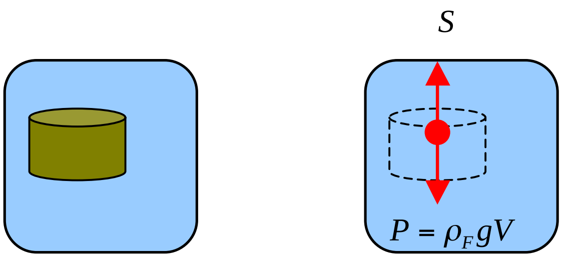
Si tratta della pressione esercitata dall'aria (fluido pesante). La misura della pressione atmosferica avviene per mezzo del *barometro*. L'esperienza classica con cui si misura la pressione atmosferica è quella di *Torricelli*, allievo di Galileo, eseguita per la prima volta nel 1643. Per l'esecuzione di questa misura si utilizza un tubo di vetro lungo almeno 76 cm e di sezione $1cm^2$. Si riempie il tubo di mercurio e lo si rovescia (tenendolo tappato con un dito) in una bacinella contenente anch'essa mercurio. Si osserva che, indipendentemente dalle dimensioni della bacinella, il mercurio nel tubo di vetro si abbassa fino a costituire una "colonna" alta 76 cm. Anche questo fatto si può giustificare con la legge di Stevino, in quanto la pressione atmosferica è uguale alla pressione con cui il mercurio della bacinella agisce sulla base dell'estremità libera del tubo:

$$P_{atm} S = \rho_{H_g} Shg \Rightarrow P_{atm} = \rho_{H_g} hg \,.$$

Conoscendo la densità del mercurio $\rho_{H_g} = 13{,}6\, g/cm^3$ ed il volume della colonna $76cm^3$, è possibile determinare la massa della colonna $1033{,}6g$; la pressione atmosferica è quindi all'incirca 1 kg su centimetro quadrato.



La legge di Archimede
Un corpo immerso in un fluido in equilibrio è soggetto alle forze di pressione agenti sulla sua superficie. Il corpo, trovandosi in equilibrio, è quindi soggetto, oltre al peso, ad una *spinta verticale* verso l'alto, della quale vogliamo determinare l'intensità ed il punto di applicazione, dal momento che l'equilibrio si ha anche rispetto alle rotazioni. Per questo scopo si consideri un *volume di fluido* uguale a quello del corpo, in sostituzione di questo. Poiché il fluido stesso è in equilibrio, la spinta che equilibra il volume di fluido deve essere applicata in un punto, detto *centro di spinta*, in modo da annullare il momento risultante.
Il centro di spinta coincide con il baricentro del corpo solo nel caso di corpi omogenei.



Possiamo quindi enunciare la legge o *Principio di Archimede: un corpo immerso in un fluido a riposo sperimenta una spinta verticale ascendente uguale al peso del fluido spostato, applicata nel centro di spinta, coincidente con il baricentro del fluido spostato.*
Se le dimensioni del corpo non sono molto grandi, il fluido in cui questo si trova immerso può essere considerato approssimativamente omogeneo. Indicati con S la spinta di Archimede e con P il peso del corpo, per la seconda legge della dinamica applicata al corpo risulta:

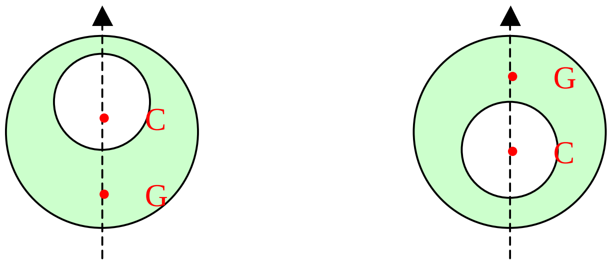
$$\rho_C Va = \rho_F Vg - \rho_C Vg \Rightarrow a = \frac{\rho_F - \rho_C}{\rho_C} g.$$

Di conseguenza, il corpo si muove verso l'alto se la densità del fluido è maggiore di quella del corpo, al contrario si muove verso il basso.
Il Principio di Archimede continua a valere anche nel caso di corpi parzialmente immersi nel fluido. Ad esempio, sia v la porzione di volume del corpo che sta *sotto* la superficie del fluido; si ottiene la cosiddetta *condizione di galleggiamento* quando:

$$\rho_C Vg = \rho_F vg \Rightarrow \frac{\rho_C}{\rho_F} = \frac{v}{V} < 1.$$

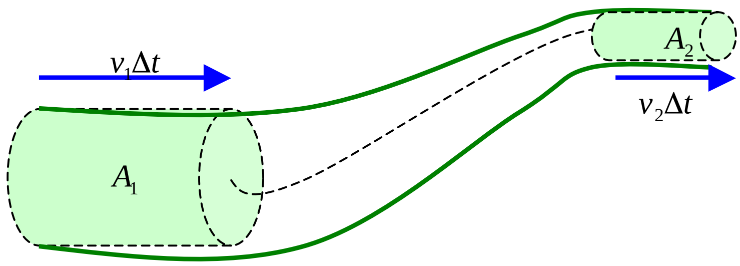
Sfera cava immersa in un fluido
Vogliamo determinare il raggio r della cavità sferica all'interno di una sfera di raggio R. S'immerge la sfera in un liquido in modo tale da farle raggiungere una configurazione di equilibrio. Per la precisione, non è detto che la cavità sia concentrica con la sfera in cui è contenuta. Per il Principio

di Archimede risulta: $\rho_F \frac{4\pi}{3} R^3 g = \rho_C \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3) g \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{\rho_C - \rho_F}{\rho_C}} R$. In particolare, l'equilibrio è stabile se il centro di spinta sta sopra il baricentro, instabile in caso contrario.



8.6 La dinamica dei liquidi

Se la velocità con cui il fluido scorre è abbastanza bassa, si dice che il fluido si muove in regime di *moto laminare*: tutte le particelle che lo compongono si muovono su cammini distinti (*linee di flusso*, tangenti in ogni punto del fluido alla direzione della velocità) che non si intersecano. Se la velocità aumenta si perdono queste peculiarità ed il fluido si muove in regime di *moto turbolento*, caratterizzato dalla formazione di tanti piccoli vortici in modo caotico, e che presentano velocità anche molto diverse in punti vicini tra loro.
Il moto laminare si rappresenta tramite il modello del *tubo di flusso*, rappresentato dall'insieme delle linee di flusso, come nella figura seguente.



L'equazione di continuità

Consideriamo i due volumi in colore nella figura che rappresenta il tubo di flusso.
Supponiamo che i cilindri che rappresentano i volumi occupino uno spazio tale da poter considerare costanti la velocità del fluido che passa all'interno di essi, e la densità.
L'ipotesi di moto laminare ci permette di affermare che la massa di fluido passante attraverso la sezione A_1 nell'intervallo di tempo Δt, è uguale a quella che passa attraverso la sezione A_2 nello stesso intervallo di tempo. Risulta

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \Rightarrow \rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t,$$

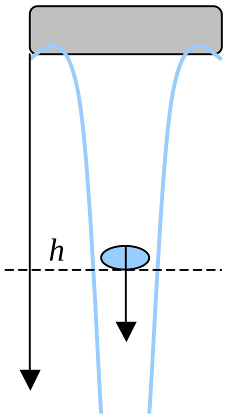
da cui segue la cosiddetta *equazione di continuità*:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2.$$

Nel caso in cui il fluido è *incomprimibile* (densità costante, è il caso dei liquidi) l'equazione si scrive nella forma che viene fatta risalire a *Leonardo da Vinci*:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

Un esempio interessante, che esprime i concetti visti fin qui, è rappresentato dalla misura del raggio r della sezione del getto d'acqua uscente da un rubinetto, aperto "con moderazione" al fine di poter studiare il flusso (prodotto della velocità per la sezione) di un moto laminare, in funzione della distanza dalla bocca del rubinetto.



Indichiamo con v_0 la velocità con cui l'acqua esce dal rubinetto, spinta dalla pressione. La velocità dell'acqua, quando avrà percorso una distanza *h* dalla bocca del rubinetto, trascurando la resistenza dell'aria e la viscosità dell'acqua, è data dalla relazione

$$v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

La forma circolare della bocca del rubinetto e la costanza del flusso (l'acqua che esce dalla bocca del rubinetto in un secondo e la stessa che passa per ogni sezione in un secondo) ci permettono di trovare la relazione cercata utilizzando l'equazione di continuità $A_1v_1 = A_2v_2$; inoltre, poiché man mano che l'acqua cade la sua velocità aumenta, si capisce che a maggiore distanza dalla bocca del rubinetto l'area della sezione sarà minore. In dettaglio, detto r_0 il raggio della bocca del rubinetto, risulta:

$$\pi r_0^2 v_0 = \pi r^2 v$$

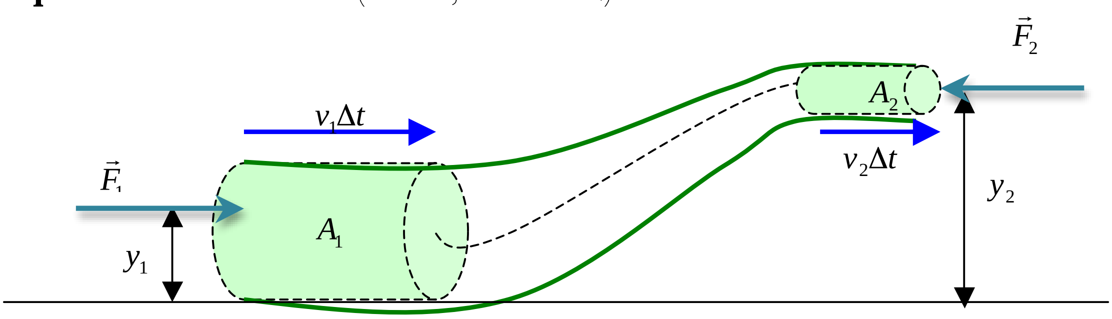
da cui, elevando al quadrato,

$$r_0^4 v_0^2 = r^4\left(v_0^2 + 2gh\right),$$

si perviene alla relazione cercata:

$$r = r_0 \sqrt[4]{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gh}}.$$

L'equazione di Bernoulli (Daniel, 1700-1782)



Il fluido si muove nel tubo in figura per effetto delle forze di pressione agenti a sinistra della sezione A_1, che risultano essere più forti di quelle agenti a destra della sezione A_2. Il lavoro meccanico, compiuto dalle forze di pressione del fluido in un tempo Δt, è dato dalla seguente espressione:

$$\Delta W = P_1 A_1 v_1 \Delta t - P_2 A_2 v_2 \Delta t.$$

A questo lavoro corrisponde una variazione dell'energia meccanica totale del sistema:

$$\Delta W = \Delta E = \Delta U_{pot} + \Delta K = \Delta m_2 g y_2 + \frac{1}{2}\Delta m_2 v_2^2 - \left(\Delta m_1 g y_1 + \frac{1}{2}\Delta m_1 v_1^2\right).$$

Per il principio di conservazione della massa risulta

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \Rightarrow \rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t,$$

di conseguenza

$$\Delta W = \Delta E$$

diventa

$$P_1 - P_2 = \rho_2 g y_2 - \rho_1 g y_1 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 - \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2.$$

Se riscriviamo l'ultima relazione nella forma seguente, otteniamo la cosiddetta *equazione di Bernoulli*:

$$P_1 + \rho_1 g y_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 g y_2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2.$$

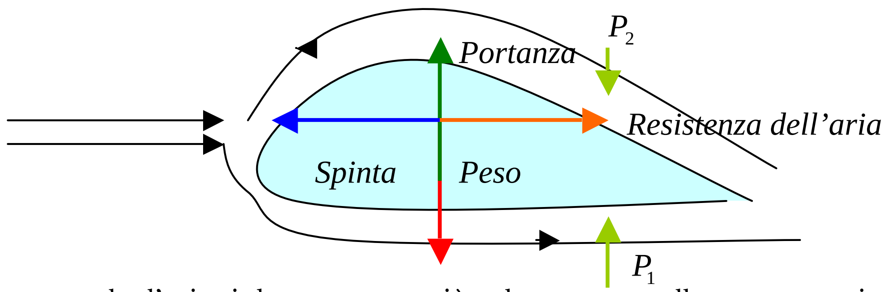
L'equazione di Bernoulli esprime quindi la costanza, durante il moto laminare di un fluido, del trinomio

$$P + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 := B.$$

Vediamo alcune applicazioni di questa equazione.

Portanza

Su un aereo in condizioni di volo rettilineo uniforme agiscono tre forze: il *peso*, la *spinta dei motori*, e la *resistenza aerodinamica*. Quest'ultima viene scomposta in due componenti, una parallela alla velocità dell'aereo, ed una perpendicolare (la cosiddetta *portanza*).



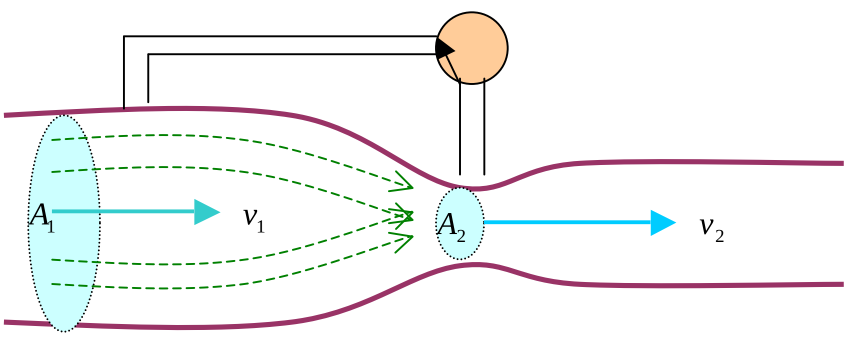
Dal momento che l'aria si deve spostare più velocemente nella parte superiore del profilo alare in figura (deve compiere un tragitto più lungo nello stesso tempo, rispetto all'aria che scorre nella parte inferiore dell'ala), la pressione sarà maggiore nella parte inferiore. Questo risultato si ottiene applicando l'equazione di Bernoulli nel caso di flusso orizzontale:

$$P_1 = P_2 + \rho_2 g y_2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 - \left(\rho_1 g y_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2\right) > P_2.$$

Questa differenza di pressione che "sostiene" in volo l'aereo spiega il particolare profilo con cui vengono sagomate le ali.

Effetto Venturi

Si basa essenzialmente sulle considerazioni fatte nel caso appena esaminato. In particolare, questo "effetto" viene sfruttato per costruire strumenti per la misura della *variazione di pressione* in un condotto orizzontale, al fine di calcolare la *velocità* del flusso e la grandezza fisica detta *portata*, intesa come il prodotto (costante per l'equazione di continuità) della sezione per la velocità di attraversamento da parte del fluido.

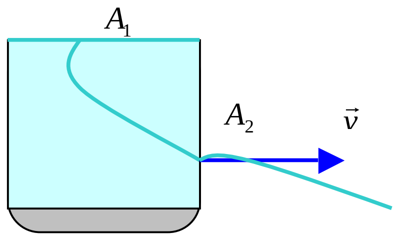


- $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$ (equazione di Bernoulli, flusso orizzontale, fluido incomprimibile);
- $A_1 v_1 = A_2 v_2$ (equazione di continuità, fluido incomprimibile).

Questi due risultati permettono di determinare la velocità v_2 una volta note le misure delle sezioni del condotto, e misurata con il manometro la *differenza di pressione* tra le due sezioni del condotto orizzontale:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}.$$

Teorema di Torricelli
Un grande recipiente contenente acqua è provvisto di un piccolo foro in basso rispetto alla superficie libera del liquido L'area del foro è molto piccola rispetto a quella della superficie, di conseguenza il liquido cala molto lentamente, rendendo possibile considerare il moto come laminare. Possiamo quindi applicare il teorema di Bernoulli per calcolare la velocità *di efflusso*:



$P_1 = P_2$: superficie libera e foro sono alla pressione atmosferica;
$v_1 = 0$: l'acqua cala di livello molto lentamente alla superficie;
$\rho_1 = \rho_2 = \rho_{H_2O}$: l'acqua è un liquido incomprimibile;
$y_1 - y_2 = \Delta y$: differenza di quota.

Con queste ipotesi l'equazione di Bernoulli si riduce a

$$\rho_{H_2O} g \Delta y = \frac{1}{2}\rho_{H_2O} v_2^2,$$

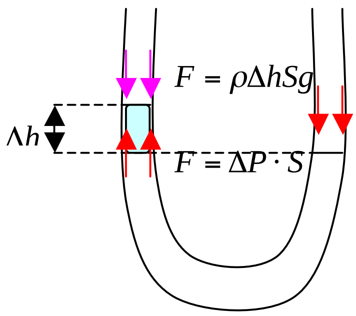
da cui è possibile ricavare l'espressione della velocità di efflusso del liquido

$$v_2 = \sqrt{2g\Delta y},$$

coincidente con la velocità di un grave dopo una caduta libera di un tratto Δy.

Esercizi

1. Un manometro è costituito da un tubo a forma di U che contiene il liquido ed è progettato per misurare piccole differenze di pressione tra i suoi due bracci. Se un manometro ad olio $(\rho = 900\, kg/m^3)$ può essere letto con la precisione di $\pm$0,05mm, qual è la minima variazione di pressione che si può apprezzare con quello strumento?



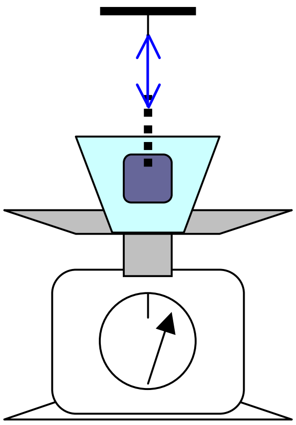
- In condizioni di equilibrio le forze agenti sull'elemento di fluido colorato si uguagliano, di conseguenza $\Delta P = \rho g \Delta h = 900\frac{kg}{m^3}\cdot 9{,}8\frac{m}{s^2}\cdot \pm 5\cdot 10^{-5} m = \pm 0{,}441 Pa$.

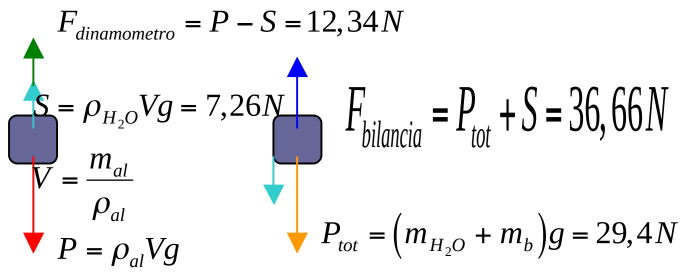
2. Una zattera di $3m \times 3m$ è spessa 10 cm ed è realizzata con legno avente densità relativa pari a 0,6. Quante persone di 70 kg possono stare sulla zattera senza bagnarsi i piedi se l'acqua è calma?

    - Sia $P = 70 \cdot 9{,}8 = 6{,}86 \cdot 10^2 N$ il peso di una persona. La spinta di Archimede si calcola supponendo che la superficie superiore della piattaforma si trovi in corrispondenza del pelo dell'acqua. Il volume della piattaforma è $V = A \cdot h = 9m^2 \cdot 0{,}1m = 0{,}9m^3$, la spinta di Archimede è quindi $S = \rho_{H_2O} Ahg$. Questa forza deve bilanciare il peso della zattera più quello delle persone: $F = nP + \rho_{H_2O} \cdot 0{,}6Ahg$. Di conseguenza
    $$\rho_{H_2O} Ahg = nP + \rho_{H_2O} \cdot 0{,}6Ahg \Rightarrow n = \frac{0{,}4 \cdot \rho_{H_2O} Ahg}{P} \approx 5 \text{ persone.}$$

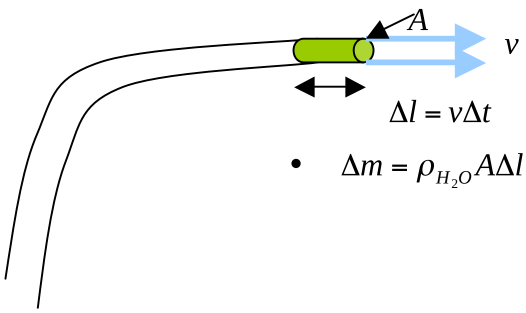
3. Un corpo ha una spinta nulla se la sua densità è uguale a quella del liquido in cui è immerso, e quindi non galleggia né affonda. Se la densità media di un sommozzatore di 75 kg è $0{,}96\, kg/l$, che massa di piombo bisognerebbe aggiungergli perché abbia spinta nulla?
    - La densità dell'acqua dovrà uguagliare quella del corpo costituito dal sommozzatore e dal piombo:
    $$\rho_{H_2O} = \frac{m_s + m_p}{V_s + V_p} = \frac{m_s + m_p}{\frac{m_s}{\rho_s} + \frac{m_p}{\rho_p}} \Rightarrow m_p = \frac{m_s\left(\frac{1}{\rho_s} - 1\right)}{\left(1 - \frac{1}{\rho_p}\right)} = \frac{75\left(\frac{1}{0{,}96} - 1\right)}{\left(1 - \frac{1}{11{,}34}\right)} = 3{,}42kg.$$

4. Un becher di 1 kg contiene 2kg di acqua ed è poggiato su una bilancia. Un blocco di alluminio di 2 kg (densità relativa 2,70) sospeso ad un dinamometro è immerso nell'acqua. Si trovino le indicazioni di entrambi gli strumenti.



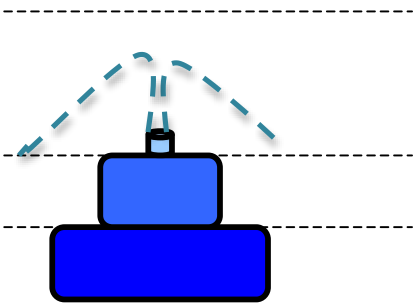


5. Un pompiere regge un tubo piegato, come mostrato in figura. Dal tubo viene emessa acqua con un getto di 1,5 cm di raggio, con la velocità di 30 m/s. (a) Qual è la massa d'acqua che esce dal tubo in 1 s?



- $\Delta m = \rho_{H_2O} A \Delta l = \rho_{H_2O} \pi r^2 v \Delta t = 21kg$ (litri)

6. Una fontana progettata per sprizzare un getto d'acqua alto 12m in aria ha una strozzatura di 1cm di diametro a livello del suolo. La pompa dell'acqua è posta a 3m sotto il suolo. Il tubo che collega la pompa alla fontana ha un diametro di 2cm. Si trovi la pressione della pompa (trascurando la viscosità dell'acqua).



Livello 2: $v_2 = 0\,m/s \quad h_2 = 15m$

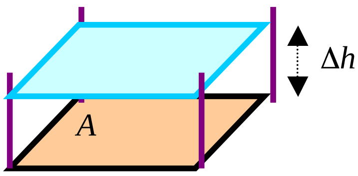
Livello 1: $P_1 \quad A_1 = \pi(1/2)^2 cm^2 \quad v_1 \quad h_1 = 3m$

Livello 0: $P_0 = ? \quad A_0 = \pi(2/2)^2 cm^2 \quad v_0 \quad h_0 = 0m$

- Si prendono in considerazione i tre livelli di riferimento come in figura. Tra il livello zero e il livello uno si sfrutta il modello del tubo di flusso nell'ipotesi di moto laminare. Tra il livello uno ed il livello due invece, si applica il modello del moto del proiettile ad ogni particella d'acqua uscente dalla fontana. Per la legge di Pascal, la pressione dell'acqua all'uscita dalla fontana è uguale alla pressione atmosferica.

$$\begin{cases} P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 \\ A_0 v_0 = A_1 v_1 \\ 0 - v_1^2 = -2g(h_2 - h_1) \end{cases} \Rightarrow P_0 = P_{atm} + \rho g h_2 - \frac{\rho g(h_2 - h_1)}{16} = 241kPa.$$

7. Una nave a vela passa da acqua di mare (densità relativa 1,03) ad acqua dolce e quindi affonda leggermente. Se essa si libera del carico di 600Mg, torna al suo livello iniziale. Supponendo che le fiancate della nave siano verticali vicino alla linea di galleggiamento, si trovi la massa della nave prima che fosse scaricata.

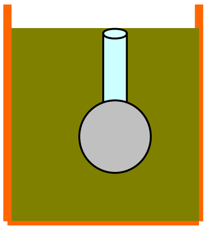


- Un corpo non affonda né galleggia in un liquido se la sua densità è uguale a quella del liquido. Il volume della nave non cambia quando viene liberata del carico, e può essere calcolato sulla base della considerazione appena fatta quando la nave si trova in mare: $\frac{M}{V} = 1{,}03 \Rightarrow V = \frac{M}{1{,}03}$, dove con M si è indicata la massa della nave prima che questa venga scaricata. Ripetiamo il ragionamento dopo che la nave è passata in acqua dolce:
$$\frac{M - m}{V} = 1{,}00 \Rightarrow M = m + 1{,}00V = m + \frac{1{,}00}{1{,}03}M \Rightarrow M = \frac{1{,}03}{0{,}03}m = 21 \cdot 10^6 kg.$$

8. Il densimetro è uno strumento che permette di misurare la densità dei liquidi. Il bulbo contiene pallini di piombo e la densità dei liquidi può essere letta direttamente dal livello del liquido sul tubicino, una volta che esso sia stato tarato. Il volume del bulbo è 20ml, il

tubicino è lungo 15cm con un diametro di 5,00mm, e la massa del vetro è 6,0g. (a) Che massa di pallini di piombo bisogna aggiungere perché la minima densità misurabile sia 0,9kg/l? (b) Qual è la densità massima di un liquido che si può misurare in quel caso?

- (a) In corrispondenza della minima densità il tubicino è immerso fino all'estremità superiore.

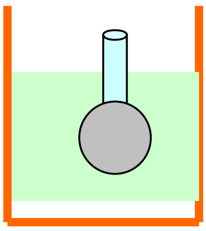


Indichiamo con V il volume del bulbo, con $\rho_{\min}$ la densità minima, con m la massa del vetro e con M la massa di piombo da aggiungere. Il volume del tubicino è $\pi r^2 h$; all'equilibrio la spinta di Archimede bilancia il peso del densimetro, per cui:

$$\rho\left(V + \pi\left(d/2\right)^2 h\right)g = \left(M + m\right)g \Rightarrow M = \rho\left(V + \pi\left(d/2\right)^2 h\right) - m = 14{,}65g$$

(olio d'oliva).

- (b) In corrispondenza della massima densità il tubicino sta tutto sopra la superficie del liquido.



In questo caso si impone che: $\rho V g = \left(M + m\right)g \Rightarrow \rho = \dfrac{M + m}{V} = 1{,}0325\,kg/l$

(acqua salata).

9. Quando spirano venti molto veloci, la pressione atmosferica all'interno di una casa può far esplodere il tetto a causa della riduzione di pressione esterna. Si calcoli la forza che si esercita su un tetto quadrato di lato 15m se la velocità del vento sul tetto è 30m/s.

- Dall'equazione di Bernoulli

$$P_{dentro} = P_{fuori} + \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow P_{dentro} - P_{fuori} = \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow$$

$$F = \left(P_{dentro} - P_{fuori}\right)A = \frac{1{,}293\,kg/m^3 \cdot 30^2\,m^2/s^2 \cdot 225m^2}{2} = 1{,}31 \cdot 10^5\,N$$