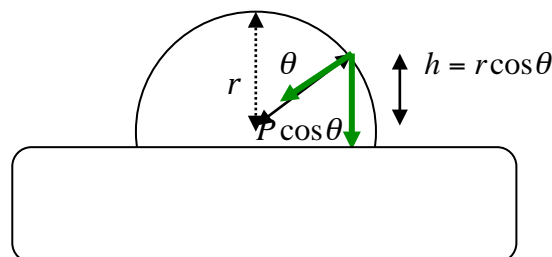


## Energia Potenziale e conservazione dell'Energia Meccanica

### Esercizi svolti

1. Un esquimese è seduto sulla sommità del proprio igloo ad un'altezza di 3 m da terra, quando decide di darsi una leggerissima spinta (si trascuri l'attrito con la superficie ghiacciata dell'igloo). Si trovi l'altezza da terra del punto in cui l'esquimese abbandona l'igloo

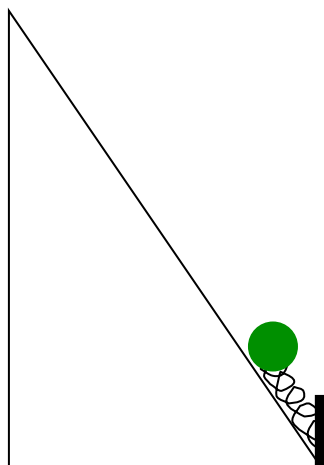


- Il principio di conservazione dell'energia meccanica porta all'equazione  $mgr = mgr \cos \theta + \frac{1}{2}mv^2$ , mentre la seconda legge della dinamica applicata nell'istante in cui

l'esquimese si distacca dalla superficie dell'igloo porta all'equazione  $\frac{mv^2}{r} = mg \cos \theta$ . La contemporanea validità delle due equazioni conduce alla

$$mgr = mgr \cos \theta + \frac{1}{2}mgr \cos \theta = \frac{3}{2}mgr \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow h = 2m.$$

2. Una massa di 500g comprime di 5cm una molla di costante elastica pari a 200N/m fissata all'estremità inferiore di un piano inclinato di  $60^\circ$ . Se il coefficiente di attrito cinetico tra il piano e la massa è 0,3, si determini la quota massima raggiunta dalla massa una volta lasciata libera.



- L'energia potenziale elastica iniziale della molla è  $\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = 0,25J$ . Questa energia potenziale si trasformerà in energia potenziale gravitazionale e calore disperso per effetto della forza d'attrito:  $\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = mgh + \mu mg \cos 60^\circ \cdot \left( \frac{h}{\sin 60^\circ} + \Delta x \right)$ , da cui segue

$$h = \frac{\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 - \mu mg \cos 60^\circ \Delta x}{(1 + \frac{\mu \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ})mg} = 0,04m = 4cm$$

3. Un corpo di massa  $M$ , inizialmente fermo, subisce un urto perfettamente elastico da parte di un corpo di massa  $m$  in moto con velocità  $v$ . Si determinino le velocità dei due corpi subito dopo l'urto. Cosa succede se la massa  $M$  è molto più grande della massa  $m$ ?

- L'urto è perfettamente elastico, quindi tra le velocità relative dei corpi sussiste la relazione  $v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i}) = -(0 - v) = v$ . Il principio di conservazione della quantità di moto durante l'urto permette di determinare le due velocità:

$$mv + M0 = mv_{1f} + Mv_{2f} \Rightarrow mv = mv_{1f} + M(v_{1f} + v) \Rightarrow$$

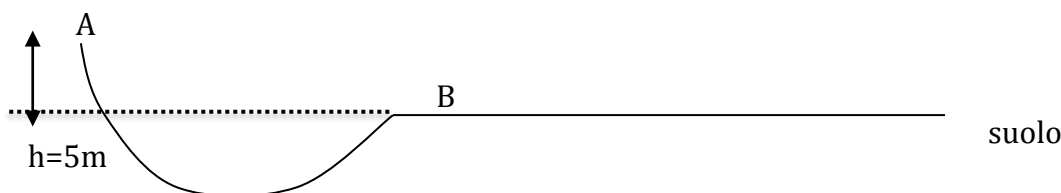
$$v_{1f} = \frac{m - M}{m + M}v, \quad v_{2f} = \frac{2m}{m + M}v$$

- Se la massa  $M$  è molto più grande della massa  $m$  risulta:

$$v_{1f} = \frac{M\left(\frac{m}{M} - 1\right)}{M\left(\frac{m}{M} + 1\right)}v \rightarrow -v, \quad v_{2f} = \frac{2m}{M\left(\frac{m}{M} + 1\right)}v \rightarrow 0.$$

“rimbalza” indietro con velocità  $-v$ , mentre la massa grande resta ferma.

4. Un corpo di massa  $m$  si trova nel punto A, a 5 metri da terra, vincolato ad una guida circolare come descritto in figura. Una volta giunto nel punto B, dopo aver percorso 3 ottavi di cerchio, abbandona la guida e, una volta in volo, si scompone in due parti, l'una il triplo dell'altra, che ricadono a terra nello stesso istante. Sapendo che la parte minore cade a terra ad una distanza di 4 metri dal punto B, si calcoli la distanza da B a cui arriva l'altra parte. *Suggerimento: in B la velocità del corpo forma un angolo di  $45^\circ$  con il suolo. Pensare al moto del centro di massa, ed al fatto che i due pezzi ricadono a terra contemporaneamente...*



- Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica tra i punti A e B:

$$mgh_A = \frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh_A}. \text{ In seguito all'esplosione, il centro di massa prosegue}$$

quello che sarebbe stato il moto del corpo se l'esplosione non fosse avvenuta, quindi, ricadendo a terra nello stesso istante dei due frammenti:  $(m_1 + m_2)x_{CM} = m_1x_1 + m_2x_2$ ,

con  $m_1 + m_2 = m$ ;  $m_2 = 3m_1 \Rightarrow m_1 = m/4$ ;  $m_2 = 3m/4$ . La formula della gittata

applicata al centro di massa ci fornisce il punto in cui questo tocca terra:

$$x_{\max} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{g} = x_{CM} = \frac{v_B^2}{g} = 2h_A = 10m; \text{ di conseguenza}$$

$$x_2 = \frac{mx_{CM} - \frac{mx_1}{4}}{\frac{3m}{4}} = \frac{10 - 1}{3/4} = 12m.$$

5. Nel dispositivo noto come “giro della morte”, un corpo di massa  $m$  percorre una traiettoria circolare di raggio  $r$ . Indicata con  $v$  la velocità del corpo nel punto più basso della traiettoria,

si calcoli il valore della forza normale quando il corpo ha descritto un angolo di  $60^\circ$  rispetto alla verticale, in senso antiorario, misurato dal punto più basso della sua traiettoria.

- Uguagliamo le espressioni dell'energia meccanica nel punto più basso della traiettoria (A), ed in quello in cui è richiesto il calcolo della forza normale (B):

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_B^2}{2} + mg(r - r \cos 60^\circ) \Rightarrow v_B^2 = v^2 - gr. \text{ La seconda legge della dinamica permette di}$$

$$\text{determinare la forza normale: } \frac{mv_B^2}{r} = F_N - mg \cos 60^\circ \Rightarrow F_N = \frac{mv^2}{r} - \frac{mg}{2}. \text{ Da calcoli}$$

precedenti è noto che la velocità nel punto più basso della traiettoria è  $v = \sqrt{5gr}$ , quindi

$$F_N = \frac{5mgr}{r} - \frac{mg}{2} = \frac{9mg}{2}.$$

6. Un pendolo lungo 1m, alla cui estremità inferiore è appesa una massa M, viene teso con un'ampiezza iniziale di  $45^\circ$  e lasciato andare. Dopo aver sotteso un arco di  $75^\circ$ , la massa appesa al filo colpisce elasticamente una pallina di massa m appoggiata su un sostegno. Si calcoli il modulo della velocità con cui la pallina abbandona il sostegno.

- Fissato al suolo lo "zero" dell'energia potenziale gravitazionale, possiamo uguagliare le espressioni dell'energia meccanica alla quota iniziale ed a quella in cui è appoggiata la pallina:  $Mg(1 - \cos 45^\circ) = Mg(1 - \cos 30^\circ) + \frac{Mv^2}{2}$  e determinare la velocità con cui la massa M

$$\text{urta la pallina. Dalle relazioni generali } v_{2f} = \frac{2Mv + (m - M)0}{M + m} = \frac{2M\sqrt{g(\sqrt{3} - \sqrt{2})}}{M + m}.$$

7. Un corpo di massa  $m = 5\text{kg}$  è appeso ad una molla di costante elastica  $k = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Si

calcoli la velocità del corpo, una volta lasciato cadere, quando questo passa per il punto a metà strada tra quello iniziale e quello d'equilibrio.

- Scegliamo come zero dell'energia potenziale totale il punto in cui si trova l'estremità libera della molla a riposo. L'energia meccanica in questo punto è chiaramente uguale a zero. Orientando l'asse verticale verso il basso, per il Principio di conservazione dell'energia meccanica otteniamo:

$$x_{eq} = \frac{mg}{k} \quad 0 = \frac{k(x_{eq}/2)^2}{2} - \frac{mgx_{eq}}{2} + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{mg^2}{k} - \frac{mg^2}{4k}} = \sqrt{\frac{3mg^2}{4k}} = 0,42\text{ms}^{-1}.$$

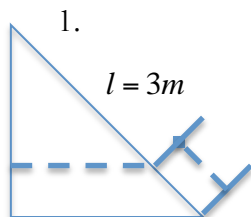
## Problemi

1. Un corpo di massa  $m = 0,5\text{kg}$  parte da fermo e scivola per una lunghezza pari a  $l = 3m$  su un piano liscio, inclinato di un angolo di  $45^\circ$  sull'orizzontale. Al termine della sua corsa, colpisce l'estremità libera di una molla, appoggiata sul piano, e fissata alla fine del piano stesso. Si calcoli la massima compressione della molla, sapendo che la costante elastica della molla è  $k = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ , e trascurando la variazione di energia potenziale gravitazionale durante la compressione della molla.
2. Un ragazzo di massa m è seduto su una calotta emisferica di ghiaccio. Se comincia a scivolare, partendo da fermo, in corrispondenza di quale angolo, misurato da terra verso la verticale, si stacca dalla calotta? (Suggerimento: al momento del distacco la forza normale è nulla...).
3. Una massa m tiene in compressione una molla di costante elastica k, per un tratto  $\Delta x$ , alla base di un piano inclinato di un angolo  $\theta$ . Rilasciata la massa, questa percorre il tratto  $\Delta x$  quando si stacca dalla molla. Trascurando l'attrito nel tratto  $\Delta x$ . Si calcoli la distanza l

percorsa lungo il piano inclinato, nell'ipotesi in cui tra questo e la massa sia presente attrito dinamico.

4. Nella situazione dell'esercizio 3, in assenza d'attrito tra la massa ed il piano inclinato, si calcoli la quota massima raggiunta, rispetto al vertice alto del piano inclinato, la cui altezza rispetto alla posizione iniziale della massa (durante la fase di compressione della molla) è  $h$ .
5. Un proiettile di massa nota  $m$  viene sparato con velocità  $v$  contro un bersaglio di massa nota  $M$ , appeso all'estremità libera di un filo fissato al soffitto, ed appoggiato senza attrito su un tavolo, a contatto con una molla a riposo di costante elastica  $k$ . Il proiettile penetra nel bersaglio e vi rimane conficcato. In seguito al colpo, il composto bersaglio-proiettile raggiunge una certa quota  $h$ , rispetto al piano del tavolo. Raggiunta la quota massima, il composto bersaglio-proiettile ritorna verso il tavolo e, appena tocca la molla, il filo si stacca dal soffitto. Si calcoli la compressione della molla.
6. Un pendolo lungo 1m viene teso con un'ampiezza iniziale di  $45^\circ$  e lasciato andare. Dopo aver sotteso un arco di  $75^\circ$ , la massa appesa al filo colpisce una pallina appoggiata su un sostegno. Si calcoli la distanza dal sostegno del punto in cui la pallina tocca terra.
7. Un pendolo semplice è un dispositivo costituito da una massa  $m$  attaccata ad un filo di lunghezza  $L$ . La massa viene lasciata andare dalla posizione iniziale in cui il filo forma un angolo di  $60^\circ$  con la verticale. Nell'istante in cui raggiunge la posizione verticale si calcoli: a) la velocità della massa  $m$ ; b) la tensione del filo.
8. Una massa  $m$  è in equilibrio appesa ad una molla verticale, fissata al soffitto, di costante elastica  $k$ , quando viene compressa, molto lentamente, di un tratto  $\Delta x < x_{eq}$ . Calcolare il lavoro compiuto durante la compressione della molla.
9. Due piani inclinati, uno di  $30^\circ$  sull'orizzontale, e l'altro di  $60^\circ$ , sempre sull'orizzontale, sono uniti per il cateto di altezza comune, uguale a  $h$ . Due molle di diversa costante elastica  $k_1, k_2$  sono poste alla base del piano inclinato, e compresse della lunghezza  $\Delta x_1, \Delta x_2$ . Due masse identiche  $m$  sono appoggiate sul piano inclinato, a contatto con l'estremità libera della molla.
  - Si esprima la velocità delle masse nel punto più alto del piano inclinato, in funzione dei dati del problema.
  - Stabilire delle condizioni affinché le velocità delle due masse siano uguali.
  - Quanto tempo impiegano a salire lungo il piano inclinato fino al punto più alto?
10. Due masse, una doppia dell'altra, si muovono lungo una direzione orizzontale, in verso opposto, con uguale velocità (in modulo). Si calcolino le velocità finali in seguito ad un urto perfettamente elastico.
11. Due masse identiche viaggiano nella stessa direzione e nello stesso verso. Quella più lenta si muove con una velocità  $\vec{v}$ , e precede l'altra massa. Quanto deve essere la velocità della massa inseguitrice affinché, dopo un urto perfettamente elastico, questa si fermi del tutto? In questo caso, quanto sarà la velocità finale della massa inizialmente più lenta?

## Soluzioni



Si applica il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$mgl \sin \theta = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2mgl \sin \theta}{k}} = 32 \text{ cm}.$$

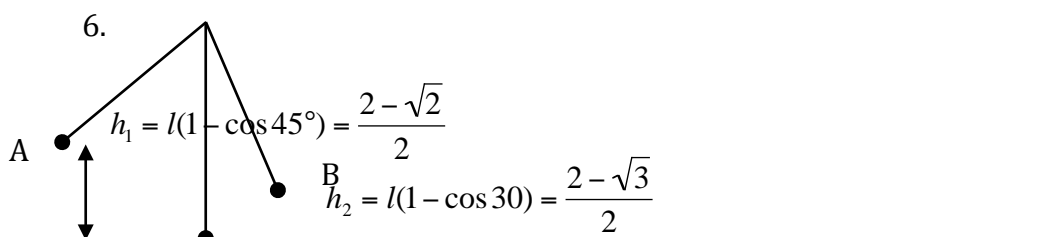
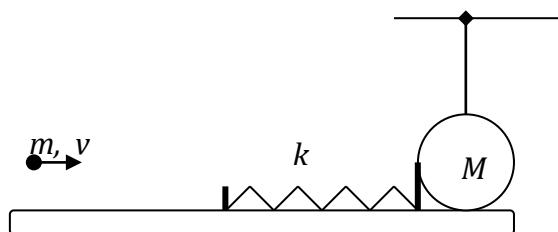


$$\begin{cases} mgr = mgr \sin \theta + \frac{mv^2}{2} \\ \frac{mv^2}{r} = mg \sin \theta - F_N \end{cases} \Rightarrow (F_N = 0) \Rightarrow mgr = \frac{3mgr \sin \theta}{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{2}{3}$$

3. a) L'energia cinetica con cui la massa viene rilasciata è uguale all'energia potenziale iniziale della molla:  $\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$ . L'energia cinetica iniziale viene in parte spesa per compiere lavoro contro la forza di gravità,  $L = -mg \sin \theta$ , ed in parte dissipata sotto forma di lavoro compiuto dalla forza d'attrito dinamico,  $L = -(K_d mg \cos \theta)l$ . Per il teorema dell'energia cinetica,  $0 - \frac{1}{2}mv^2 = -(K_d mg \cos \theta)l - (mg \sin \theta)l \Rightarrow l = \frac{k(\Delta x)^2}{(K_d mg \cos \theta) + (mg \sin \theta)}$ .

4. L'energia potenziale elastica viene trasformata in energia potenziale e cinetica nel vertice alto, e nel punto di quota massima:  $\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mg(h + \Delta h) + \frac{1}{2}m(v \cos \theta)^2$ . Il corpo abbandona il piano se  $\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \geq mgh$ , con  $\Delta h = \frac{(k\Delta x^2 - 2mgh)(1 - \cos^2 \theta)}{2mgh}$ .

5. Quando il pendolo torna nella posizione verticale, la sua energia meccanica sarà tutta di tipo cinetico. Per il Principio di conservazione dell'energia meccanica, questa verrà trasformata interamente (non essendoci attrito con la superficie del tavolo) in energia potenziale elastica di compressione della molla:  $(M + m)gh = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2gh(M + m)}{k}}$ .



↑

Si applica il principio di conservazione dell'energia e si ricava l'intensità della velocità iniziale:

$$E_A = E_B \Rightarrow mgh_1 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})g} = 1,8 \frac{m}{s}. \text{ Di conseguenza la legge oraria}$$

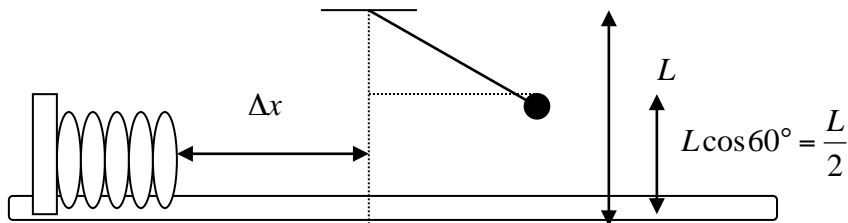
$$\text{lungo la direzione } x \text{ è } \begin{cases} a_x = 0 \frac{m}{s^2} \\ v_{0x} = v \cos 30^\circ = 1,6 \frac{m}{s}, \text{ e lungo la direzione } y \\ x = v_{0x}t = 1,6 \frac{m}{s}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_y = -g = -10 \frac{m}{s^2} \\ v_y = v_y - gt = v \sin 30^\circ + a_y t = 0,9 \frac{m}{s} - 10t \\ y = h_2 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}m + 0,9 \frac{m}{s}t - 5 \frac{m}{s^2}t^2 \end{cases}$$

La pallina tocca terra quando  $y = 0m$ ; di conseguenza  $0,1m + 0,9 \frac{m}{s}t - 5 \frac{m}{s^2}t^2 = 0$  e questo si verificherà al tempo  $t = \frac{+0,9 + \sqrt{2,81}}{10} = 0,3s$ . La distanza cercata è quindi

$$x = v_{0x}t = 1,6 \frac{m}{s} \cdot 0,3s = 0,5m.$$

7.

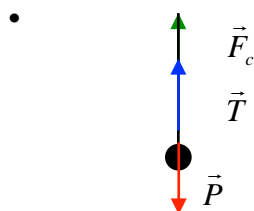


a) la velocità della massa  $m$ ;

- La velocità nel punto più basso si calcola applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale  $E_1 = mgL(1 - \cos \theta) = mg \frac{L}{2}$  e quello finale

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2, \text{ ottenendo } v = \sqrt{gL} = 3,2m/s.$$

b) la tensione del filo.



$$\text{Dalla seconda Legge della dinamica: } \vec{F}_c = \vec{T} - \vec{P} \Rightarrow T = \frac{mv^2}{L} + mg = 2mg = 10N.$$

8. Risolviamo il problema applicando il teorema dell'energia cinetica (la cui variazione è nulla, per effetto della compressione "molto lenta"). Nel sistema di riferimento scelto nell'esempio guida si ha:  $L_F - mg\Delta x + \frac{1}{2}k(x_{eq} - 0)^2 - \frac{1}{2}k((x_{eq} - \Delta x) - 0)^2 = 0$ .

9. Si applica il teorema di conservazione dell'energia meccanica. Per semplicità, possiamo considerare le masse appoggiate in corrispondenza del vertice basso del piano:

$$\frac{k_{1,2}(\Delta x_{1,2})^2}{2} = \frac{mv_{1,2}^2}{2} + mgh \Rightarrow v_{1,2} = \sqrt{\frac{k_{1,2}(\Delta x_{1,2})^2}{m} - 2gh}.$$

$$v_1 = v_2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{k_1(\Delta x_1)^2}{m} - 2gh} = \sqrt{\frac{k_2(\Delta x_2)^2}{m} - 2gh} \Leftrightarrow k_1(\Delta x_1)^2 = k_2(\Delta x_2)^2.$$

Dovendo lavorare con le leggi orarie, la mancata conoscenza di quella della massa che oscilla, attaccata ad una molla, lungo un piano orizzontale, dobbiamo limitare lo studio al tratto di lunghezza  $\frac{l}{\sin \theta} - \Delta x$ . In questo tratto la massa segue un moto rettilineo uniformemente decelerato, con velocità iniziale:

$$v_{01,2} = \sqrt{\frac{k_{1,2}(\Delta x_{1,2})^2}{m} - 2g \frac{\Delta x_{1,2}}{\sin \theta_{1,2}}}. \text{ La legge oraria della velocità nel moto rettilineo uniformemente}$$

accelerato fornisce il tempo impiegato dalla massa per coprire il tratto di lunghezza  $\frac{l_{1,2}}{\sin \theta_{1,2}} - \Delta x_{1,2}$ :

$$\Delta t_{1,2} = \frac{v_{1,2} - v_{01,2}}{-g \sin \theta_{1,2}} = \frac{\sqrt{\frac{k_{1,2}(\Delta x_{1,2})^2}{m} - 2gh} - \sqrt{\frac{k_{1,2}(\Delta x_{1,2})^2}{m} - 2g \frac{\Delta x_{1,2}}{\sin \theta_{1,2}}}}{-g \sin \theta_{1,2}}.$$

$$10. \begin{cases} v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i}) \\ m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i}}{m_1 + m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = \frac{mv - 2mv}{2m + m} = -\frac{1}{3}v \\ v_{2f} = \frac{4mv + (m - 2m_1)(-v)}{2m + m} = \frac{5}{3}v \end{cases}$$

11. Il problema ammette soluzione solo se la massa "lenta" è in realtà ferma. In seguito all'urto inizierà a muoversi con la velocità della massa urtante, che a sua volta si ferma:

$$\begin{cases} v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i}) \\ m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{2f} = -(v - v_{1i}) \\ v_{1i} + v = -(v - v_{1i}) \end{cases} \Rightarrow 0v_{1i} = 2v$$

12.

### SEZIONE OLIMPICA (gare 1° livello PROGETTO OLIMPIADI 2013)

1. Un disco di massa  $M$ , che si muove con velocità di modulo  $v$ , urta frontalmente un secondo disco di massa  $2M$  e velocità di modulo  $v/2$ ; i due dischi stanno scivolando su di un piano orizzontale con attrito trascurabile. Si calcoli il modulo della velocità dei due dischi che, dopo l'urto, rimangono attaccati.

2. Due blocchi, il primo di massa  $M$  e il secondo di massa  $2M$ , sono appoggiati su un piano orizzontale senza attrito e sono inizialmente fermi. A ciascun blocco viene applicata la stessa forza orizzontale, di modulo  $F$ , per lo stesso intervallo di tempo,  $\Delta t$ . Qual è il rapporto tra l'energia cinetica del secondo blocco e quella del primo, quando la forza ha cessato di agire?