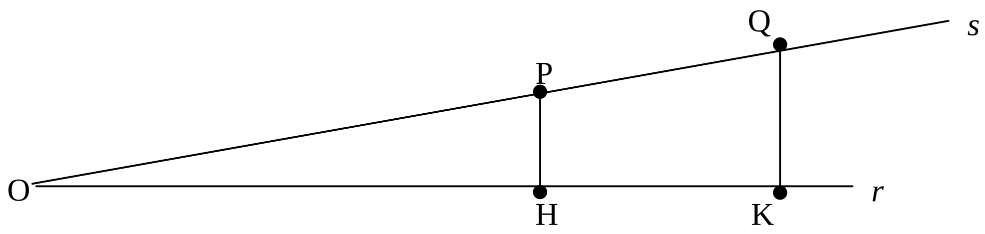
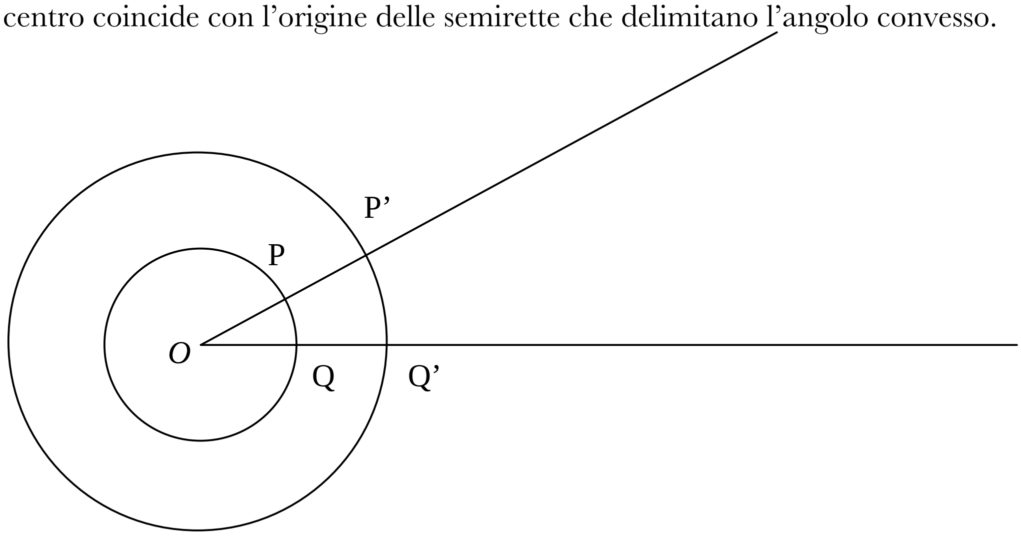
CAPITOLO 10
LA GONIOMETRIA
10.1 Seno e coseno di un angolo
E' dato l'angolo convesso formato dalle semirette *r* e *s* di origine O.



I triangoli OPH e OQK sono simili, di conseguenza risulta $\frac{PH}{OP}=\frac{QK}{OQ}=...$, e $\frac{OH}{OP}=\frac{OK}{OQ}=...$Detto α l'angolo convesso di cui sopra, si definiscono il seno ed il coseno dell'angolo α rispettivamente i rapporti:

$$\sin\alpha=\frac{PH}{OP}=\frac{QK}{OQ}=...;$$
$$\cos\alpha=\frac{OH}{OP}=\frac{OK}{OQ}=...$$

10.2 Il radiante: l'unità di misura naturale dell'angolo
La misura dell'angolo in *gradi* è basata sulla suddivisione dell'angolo giro in 360 parti. Potremmo definire allo stesso modo un'unità di misura suddividendo l'angolo giro in 100 parti, per esempio. In questi casi l'unità di misura dipende da una precisa *scelta*. E' possibile definire appropriatamente un'unità di misura *naturale*, ovvero basata *solo* su proprietà dell'angolo? La risposta a questa domanda è affermativa. Per definire questa unità di misura, consideriamo alcune circonferenze il cui centro coincide con l'origine delle semirette che delimitano l'angolo convesso.



L'omotetia tra le circonferenze mantiene costante il *rapporto tra l'arco ed il raggio*. Si dice che l'angolo α misura **un radiante** *se il rapporto tra l'arco ed il raggio è uguale a 1*. Da questa definizione segue immediatamente che l'angolo giro misura 2π radianti e che, in generale, sussiste la seguente relazione tra angolo α, arco *l* e raggio *r*:

$$l=r\alpha.$$

Molto importante è la regola di conversione della misura di un angolo da gradi a radianti mediante la seguente proporzione:

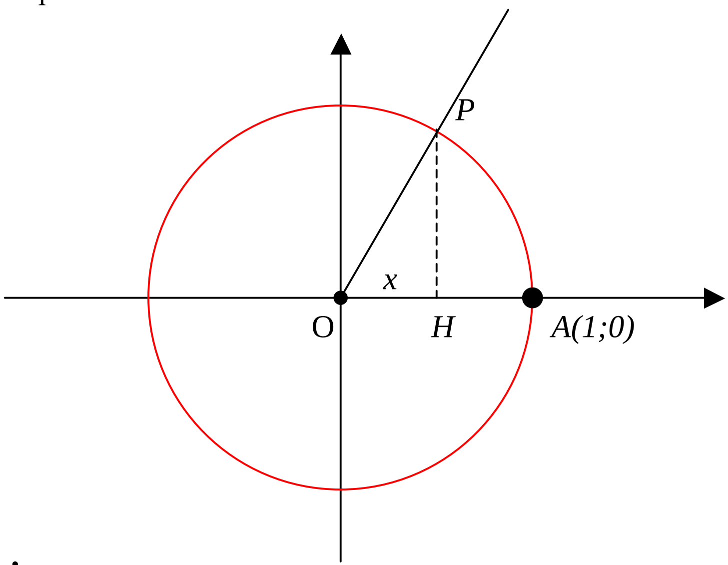
$$\alpha^\circ:\alpha^{rad}=360^\circ:2\pi,$$

da cui segue:

$$\alpha° = \frac{\alpha^{rad}}{2\pi} \cdot 360°$$
$$\alpha^{rad} = \frac{\alpha°}{360°} \cdot 2\pi$$

Per esempio, un angolo di 60°corrisponde a $\frac{\pi}{3}$ radianti, uno di 45° ad uno di $\frac{\pi}{4}$ radianti, uno di 270° ad uno di $\frac{3\pi}{2}$ radianti, e così via.

Vogliamo ora descrivere il seno ed il coseno come *funzioni reali di variabile reale:* l'angolo *x*. Cominciamo col definire la cosiddetta **circonferenza goniometrica**: una circonferenza di raggio 1 con centro nell'origine degli assi. Il punto di coordinate $A(1;0)$ è detto *origine degli archi*. L'angolo è delimitato dall'asse delle ascisse e dalla semiretta *OP*. Si assume come *positivo* il verso che va dall'origine degli archi al punto *P* in senso *antiorario*.



10.3 Angoli associati

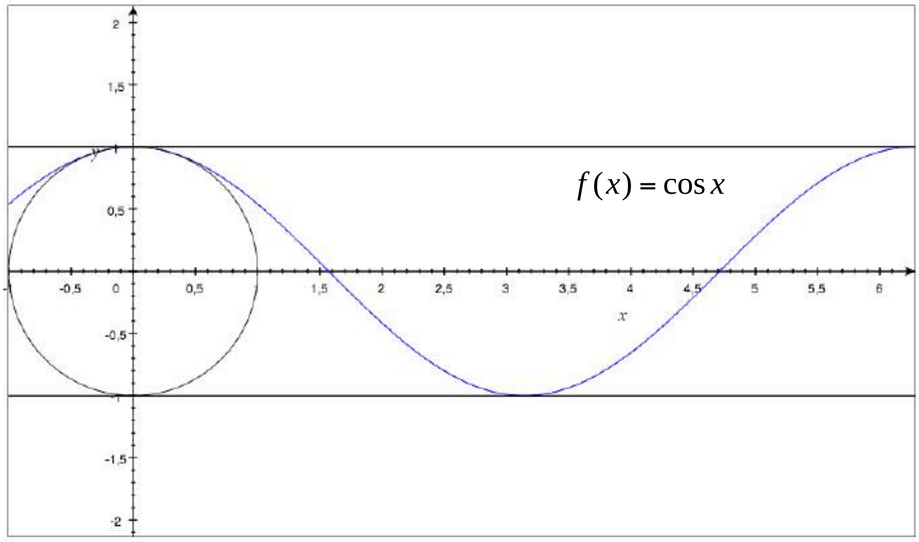
E' immediato verificare le seguenti proprietà:

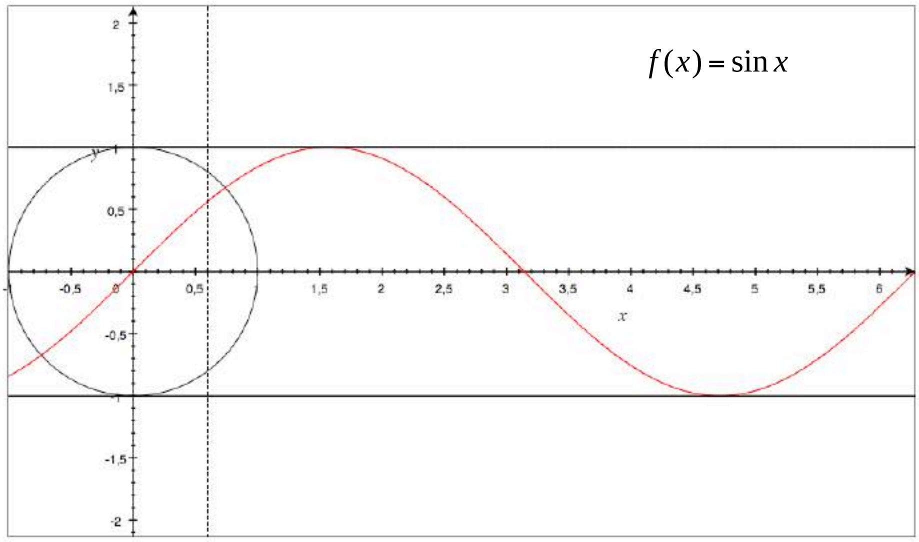
$$\sin x = -\sin(-x)$$
$$\cos x = \cos(-x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$$
$$\cos(\pi \pm x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = \pm \sin x$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = -\cos x$$

Sappiamo che $PH = OP \sin x = \sin x$ e che $OH = OP \cos x = \cos x$; è un'immediata conseguenza del teorema di Pitagora la cosiddetta **relazione fondamentale della goniometria**:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

La funzione $f(x) = \sin x$ rappresenta la proiezione sull'asse delle ordinate del raggio OP, mentre la funzione $f(x) = \cos x$ rappresenta la proiezione dello stesso sull'asse delle ascisse. Tali funzioni sono definite in modo naturale sull'intervallo $[0;2\pi]$; tuttavia, prendendo angoli negativi e/o considerando il punto P dopo aver percorso un numero imprecisato di volte la circonferenza goniometrica, è possibile estendere l'insieme di definizione delle funzioni goniometriche a tutto l'insieme dei numeri reali. Proviamo a costruire "per punti" i grafici delle funzioni seno e coseno.





10.4 Proprietà delle funzioni goniometriche seno e coseno
Periodicità
Una caratteristica che emerge dal grafico delle funzioni seno e coseno è la cosiddetta **periodicità.**
In generale, una funzione definita sull'insieme A, si dice *periodica* di periodo T, se esiste un numero reale T tale che $f(x) = f(x+T), \quad \forall x \in A$.
Evidentemente le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π.
Vediamo con un esempio un po' bizzarro di chiarire questo concetto.
Esempio.
Qual è il segno del $\sin 1000$? Ora, la provocazione è fondata sul fatto che 1000 è "abbastanza" lontano dai comuni intervalli di riferimento per la periodicità. Tuttavia, ricordando che l'argomento

della funzione è espresso in radianti, possiamo interpretare "1000" in relazione ai giri sulla circonferenza goniometrica:

$$\frac{1000}{2\pi} \cong 159{,}15.$$

Questo significa 159 giri più 0,15 "di giro". Ora, ricordando che i quadranti corrispondono alle seguenti frazioni di giro: I – (0-0,25), II – (0,25-0,5), III – (0,5-0,75), IV – (0,75,1), il "resto" 0,15 appartiene al primo quadrante, di conseguenza il segno è positivo. Un valore approssimato del $\sin 1000$ si ottiene quindi considerando che

$$0{,}25 : \frac{\pi}{2} = 0{,}15 : \alpha \Rightarrow \alpha = 0{,}15 \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 0{,}3\pi \cong \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin 1000 \cong \sin\frac{\pi}{3}.$$

Parità e disparità delle funzioni goniometriche. Simmetrie

La *parità* e la *disparità* di una funzione sono proprietà molto importanti, in quanto semplificano la rappresentazione grafica di una funzione riducendola a sottoinsiemi dell'insieme di definizione, per poi estenderla *per simmetria* alle restanti parti. Ricordiamo le seguenti definizioni.

Una funzione $f : A \to B$ si dice *pari* se $f(x) = f(-x), \quad \forall x \in A$.

Esempi di funzioni pari sono la funzione coseno, la funzione valore assoluto e la funzione quadratica il cui grafico è una parabola con asse coincidente con l'asse delle ordinate. Le funzioni pari sono *simmetriche rispetto all'asse y*. La verifica di questo fatto si basa sull'applicazione delle equazioni della simmetria rispetto all'asse *y* $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$, al punto di coordinate

$(-x, f(-x)) \to (x, f(-x)) = (x, f(x))$.

Una funzione $f : A \to B$ si dice *dispari* se $f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in A$.

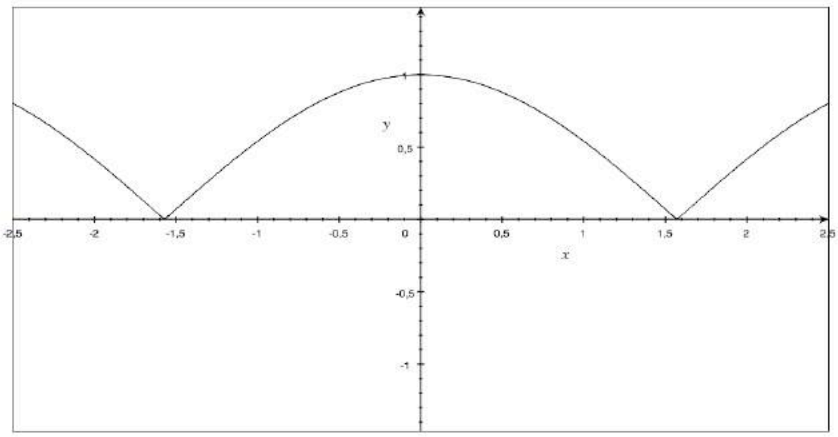
Esempi di funzioni dispari sono la funzione seno, la funzione lineare (la retta) e la funzione cubica senza termini di secondo grado e con termine noto uguale a zero. Le funzioni dispari sono *simmetriche rispetto all'origine*. La verifica di questo fatto si basa sull'applicazione delle equazioni della simmetria rispetto all'origine: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$, al punto di coordinate

$(-x, f(-x)) \to (x, -f(-x)) = (x, f(x))$.

Valore assoluto delle funzioni goniometriche

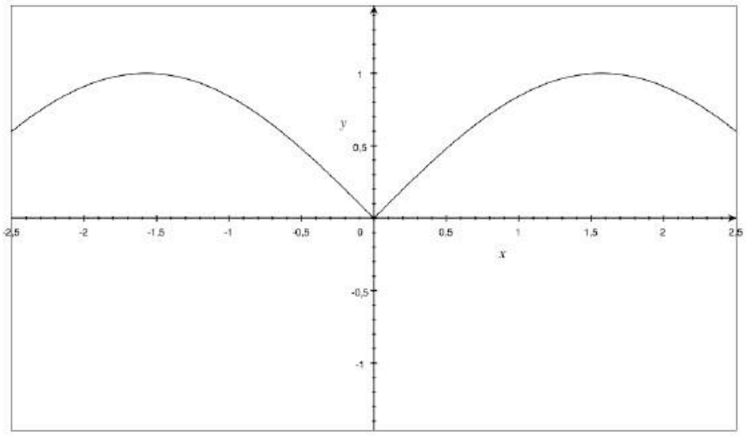
Consideriamo adesso la composizione delle principali funzioni goniometriche con la funzione valore assoluto. A titolo di esempio analizzeremo alcuni casi.

- $f(x) = |\cos x|$

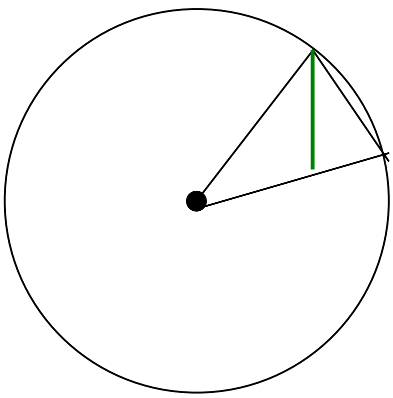


- $f(x) = |\sin x|$

36° B' A B



10.5 Il lato del decagono regolare ed il seno di 18°



Sia AB il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di centro O, di cui vogliamo determinare la lunghezza *x*. Indichiamo sul raggio OB il punto B' tale che AB' = AB. Risulta: $A\hat{B}'B = A\hat{B}B' = 72°$. Dalla similitudine dei triangoli OAB e ABB' segue che il triangolo OAB' è isoscele, e che $\frac{AB}{OB} = \frac{BB'}{AB} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{1-x}{x} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Da questo risultato segue l'espressione radicale del $\sin 18° = \sin\frac{\pi}{10} = PB = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

10.6 Equazioni e disequazioni goniometriche elementari

- $\sin x = k$

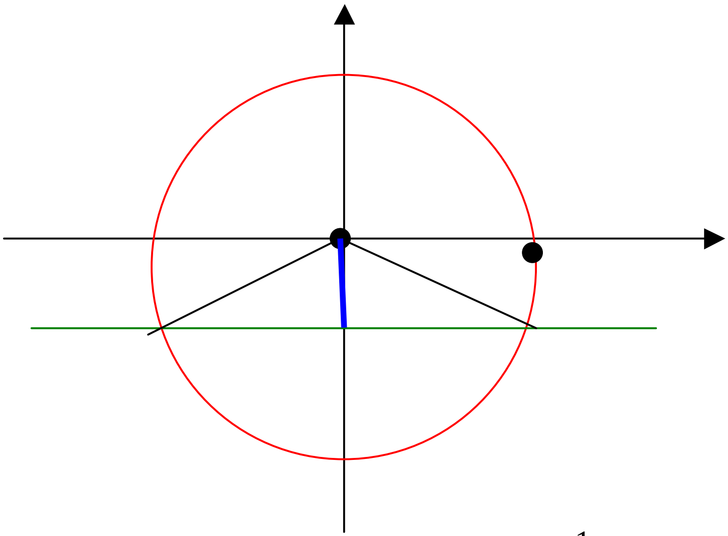
Il seno di un angolo ha la proprietà di avere valori $-1 \le \sin x \le 1$**,** quindi l'equazione di cui sopra è impossibile se $|k| > 1$.

Vogliamo risolvere l'equazione $\sin x = -\frac{1}{2}$. Questo significa cercare l'angolo (in realtà gli angoli) il cui seno è uguale a $-\frac{1}{2}$. Possiamo seguire due procedimenti: quello basato sulla circonferenza goniometrica e quello basato sul grafico della funzione.

Analizziamoli in dettaglio tutti e due.

B $-\frac{1}{2}$ $A(1;0)$

Metodo della circonferenza goniometrica



All'interno dell'intervallo $[0;2\pi]$, gli angoli il cui seno è uguale a $-\frac{1}{2}$ sono $\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$, e $2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$. In generale, se α è soluzione dell'equazione $\sin x = k$, lo sarà anche $\pi-\alpha$. Nel nostro caso, $\pi-\alpha=-\frac{\pi}{6}$. Essendo $\sin x=\sin(2\pi-x)$ è possibile riconoscere $\frac{11\pi}{6}$ come $2\pi-\frac{\pi}{6}$. La funzione $f(x)=\sin x$ è periodica di periodo 2π, di conseguenza <u>tutte</u> le soluzioni dell'equazione $\sin x=-\frac{1}{2}$, sono rappresentate da $\frac{7\pi}{6}+2k\pi \vee \frac{11\pi}{6}+2k\pi, \quad k\in Z$.

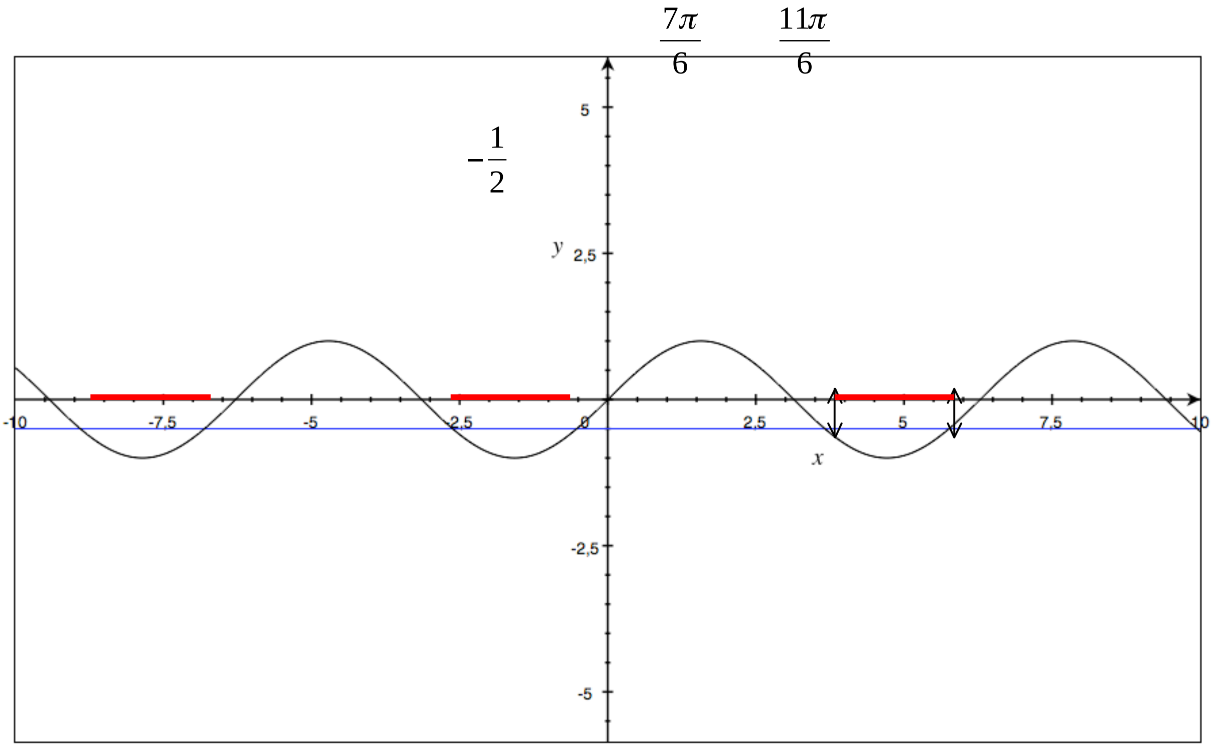
Le soluzioni della disequazione $\sin x>-\frac{1}{2}$ corrispondono agli angoli corrispondenti agli archi contenuti nel maggiore dei due archi $\widehat{BC}$. Sempre in riferimento all'intervallo $[0;2\pi]$, le soluzioni sono $0<x<\frac{7\pi}{6} \vee \frac{11\pi}{6}<x<2\pi$. Tuttavia, la funzione seno è una funzione periodica; di conseguenza le soluzioni sono: $-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2k\pi$.

Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni

1. $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $2\sin x+\sqrt{3}=0$
3. $(\sin x)^2-2\sin x+1=0$
4. $(\sin x)^2-\sin x+\frac{1}{4}=0$
5. Si dica per quali valori di k l'uguaglianza $3\sin x=2k$ in $[0,2\pi]$.
6. Tracciare il grafico della funzione $f(x)=1-\sin x$.
7. $\sqrt{3}|\sin x|=\frac{3}{2}$.

Metodo del grafico della funzione $f(x) = \sin x$



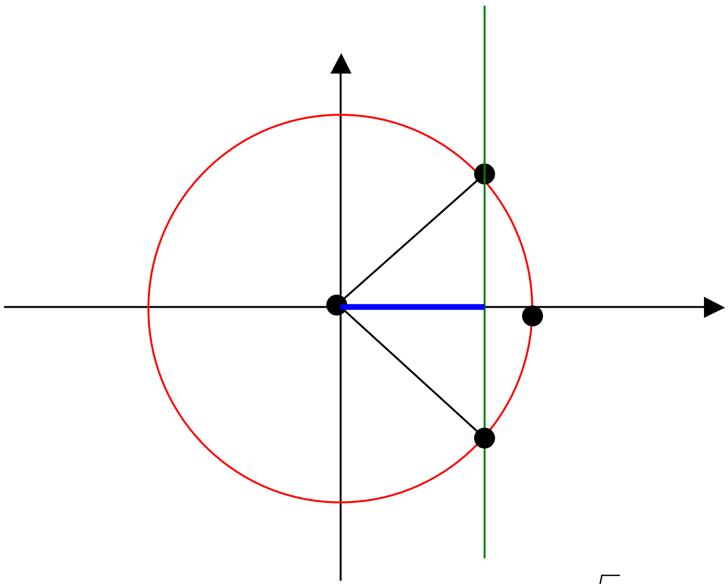
Questo metodo consiste nella lettura "diretta" delle soluzioni dell'equazione $\sin x = -\frac{1}{2}$ sul grafico della funzione stessa. Con questo metodo la risoluzione delle disequazioni elementari è immediata, in quanto permette di vedere subito gli intervalli rappresentativi delle soluzioni. La disequazione $\sin x < -\frac{1}{2}$ ha come soluzioni i punti contenuti nell'intervallo evidenziato in rosso nel grafico sopra: $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$.

- $\cos x = k$

Il coseno di un angolo ha la proprietà di avere valori $-1 \le \cos x \le 1$, quindi l'equazione di cui sopra è impossibile se $|k| > 1$.

Vogliamo risolvere l'equazione $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Questo significa cercare l'angolo (in realtà gli angoli) il cui coseno è uguale a $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Anche in questo caso, seguiamo i due procedimenti visti precedentemente.

Metodo della circonferenza goniometrica



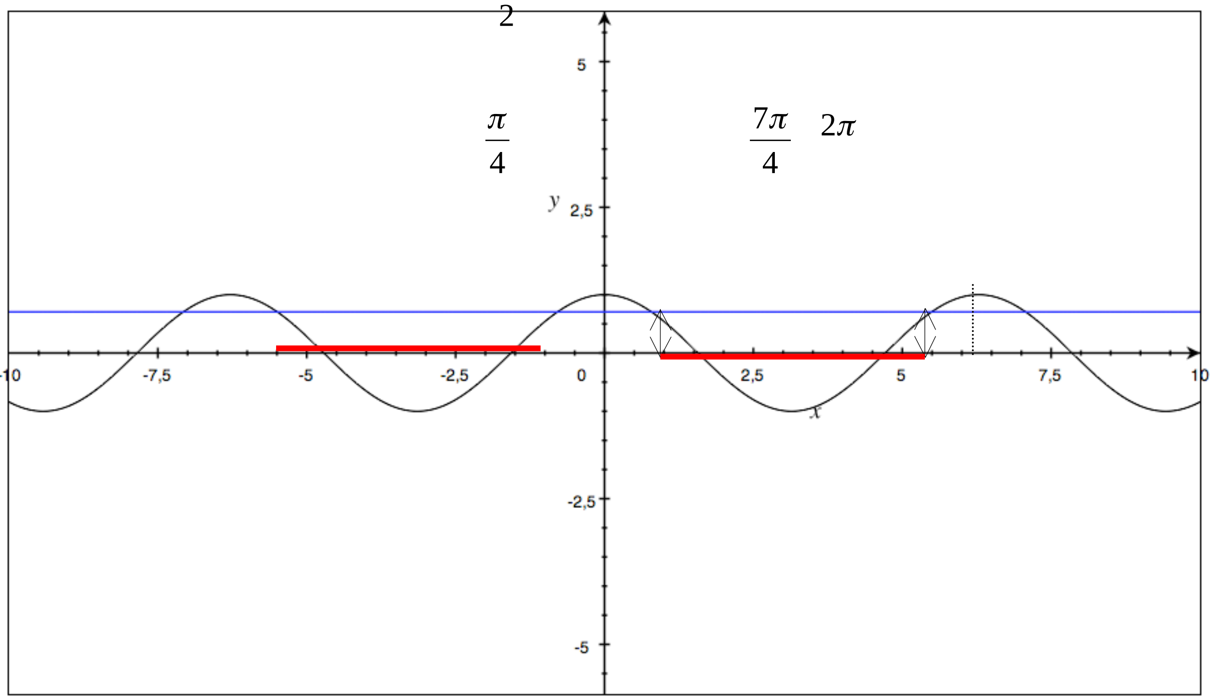
All'interno dell'intervallo $\left[0;2\pi\right]$, gli angoli il cui coseno è uguale a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sono $\frac{\pi}{4}$, e $\frac{7\pi}{4}$. In generale, se α è soluzione dell'equazione $\cos x = k$, lo sarà anche $-\alpha$. Nel caso preso in esame, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e $-\alpha = -\frac{\pi}{4}$. Essendo $\cos x = \cos(2\pi - x)$ è possibile riconoscere $\frac{7\pi}{4}$ come $2\pi - \frac{\pi}{4}$. La funzione $f(x) = \cos x$ è periodica di periodo 2π, di conseguenza <u>tutte</u> le soluzioni dell'equazione $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, sono rappresentate da $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in Z$.

Le soluzioni della disequazione $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ corrispondono agli angoli corrispondenti agli archi contenuti nel minore dei due archi $\widehat{BC}$. Sempre in riferimento all'intervallo $\left[0;2\pi\right]$, le soluzioni sono $0 < x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$. Tuttavia, la funzione coseno è periodica; di conseguenza le soluzioni sono così rappresentate: $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Esercizi

1. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $2\cos x + \sqrt{3} = 0$
3. $(\cos x)^2 - 2\cos x + 1 = 0$
4. $(\cos)^2 - \cos x + \frac{1}{4} = 0$
5. Si dica per quali valori di k l'uguaglianza $\cos x = 2k$ in $\left[0, 2\pi\right]$.
6. Tracciare il grafico della funzione $f(x) = 2 + \cos x$.
7. $\left|\cos x\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Metodo del grafico della funzione $f(x) = \cos x$



Come nel caso della funzione seno, questo metodo consiste nella lettura "diretta" delle soluzioni dell'equazione $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sul grafico della funzione stessa. Anche in questo caso, questo metodo risulta più chiaro per la risoluzione delle disequazioni elementari, in quanto permette di vedere subito gli intervalli rappresentativi delle soluzioni. Per esempio, la disequazione $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ha come soluzioni i punti contenuti nell'intervallo evidenziato in rosso nel grafico sopra: $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$.

Esercizi

1. $2(\sin x)^2 - 5\cos x - 4 = 0$
2. $(\cos x)^2 + \sin x = \frac{1}{4}$
3. $\sin x \cos x + \sin x + \cos x + 1 = 0$
4. $\cos x + 1 < \sin x \quad [-\pi, \pi]$
5. $|\sin x| > \cos x$
6. Rappresentare graficamente le seguenti funzioni:

   $f(x) = \left|-|\sin x| - |\cos x|\right|; \quad g(x) = \left|\sin x - |\cos x|\right|$

10.7 Le equazioni lineari

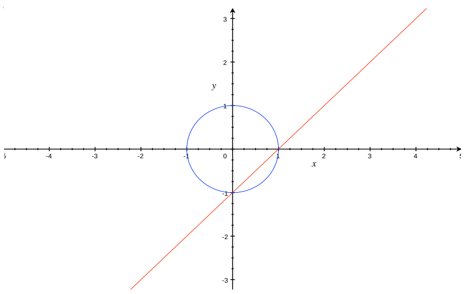
Sono equazioni del tipo $a\cos x + b\sin x = c$. Si opera la seguente sostituzione di variabili:
$\begin{cases} X = \cos x \\ Y = \sin x \end{cases}$. da cui segue, con la condizione $X^2 + Y^2 = 1$, che le soluzioni andranno a ricercarsi tra le soluzioni del sistema $\begin{cases} aX + bY = c \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$.

Esempio.
Risolvere la seguente equazione: $\cos x - \sin x = 1$.
Utilizzando il metodo precedentemente descritto risulta

$$\begin{cases} X - Y = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow X^2 + X^2 - 2X + 1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} X = 0 & Y = -1 \\ X = 1 & Y = 0 \end{cases}$$

, che corrispondono a

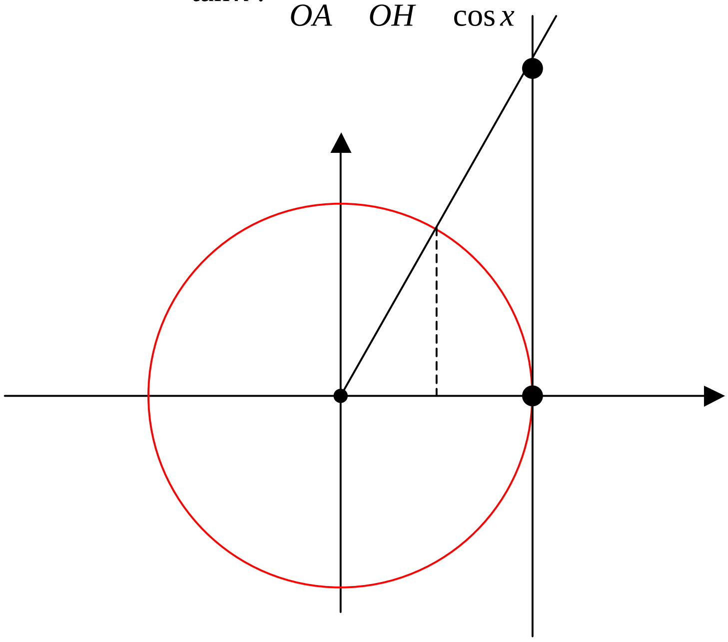
$$x = 0 + 2k\pi; \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad .$$



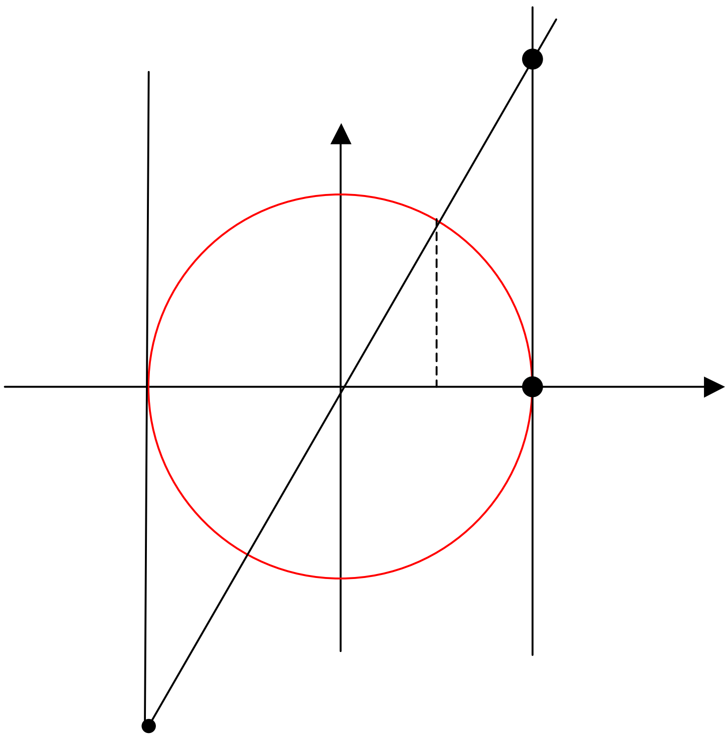
10.8 La tangente dell'angolo

Consideriamo la retta di equazione $x = 1$ e sia *T* il punto in cui questa incontra la semiretta per *P* uscente dall'origine degli assi. Si definisce **tangente** dell'angolo *x* il rapporto tra il segmento *AT* ed il segmento *OA*. Dalla similitudine dei triangoli *OAT* e *OPH* segue la seguente proprietà della tangente:

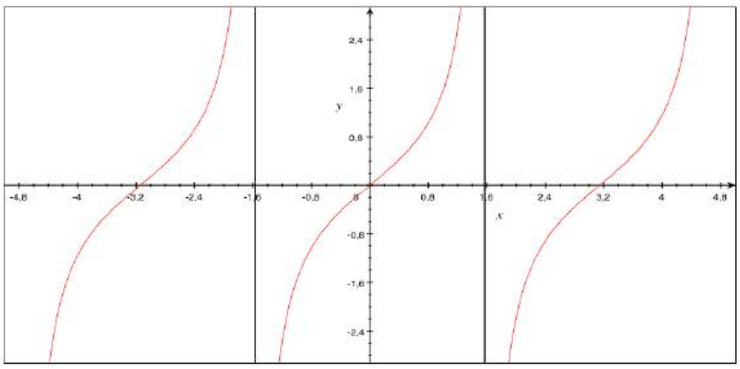
$$\tan x := \frac{AT}{OA} = \frac{PH}{OH} = \frac{\sin x}{\cos x}$$



L'insieme di definizione della tangente esclude tutti i punti in cui il coseno dell'angolo è zero. Le considerazioni fatte in precedenza riguardo le funzioni seno e coseno valgono, in forma modificata, anche per la funzione tangente. Intanto, un intervallo "naturale" in cui essa è definita può essere $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Inoltre, per questioni di simmetria, la tangente dell'angolo $\pi + x$ coincide con quella dell'angolo x:



Di conseguenza, il valore della tangente si ripete "ogni π":



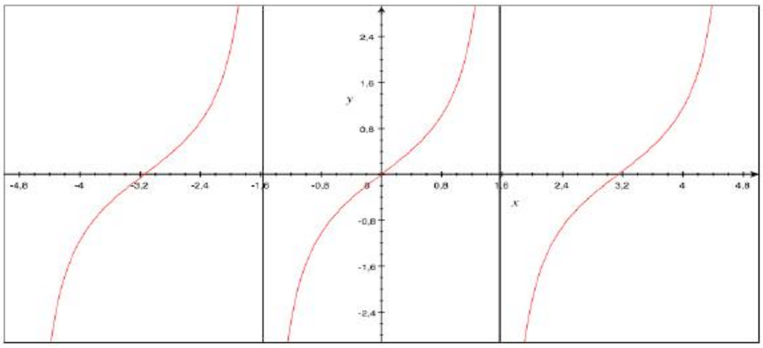
A differenza delle funzioni seno e coseno, la tangente è una funzione periodica di periodo π.

- $\tan x = k$

Nel caso di equazioni e disequazioni goniometriche elementari in cui è presente solo la tangente dell'angolo, il metodo grafico è decisamente più conveniente. Vogliamo ad esempio risolvere l'equazione $\tan x = -\sqrt{3}$. La soluzione si ottiene subito conoscendo l'angolo, in un qualsiasi intervallo di periodicità, la cui tangente è $-\sqrt{3}$: si tratta dell'angolo $-\frac{\pi}{3}$. Tutte le soluzioni si otterranno da questa aggiungendo la periodicità: $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Vogliamo adesso risolvere la disequazione $\tan x - \sqrt{3}\tan^2 x \le 0$.

$-\frac{\pi}{2} \qquad 0 \qquad \frac{\pi}{6} \qquad \frac{\pi}{2}$

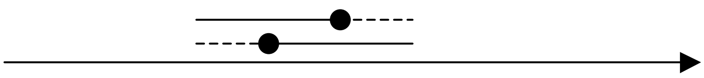


$\tan x(1-\sqrt{3}\tan x) \leq 0 \Rightarrow$

$\tan x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$,

$(1-\sqrt{3}\tan x) \geq 0 \Rightarrow \tan x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{6}$

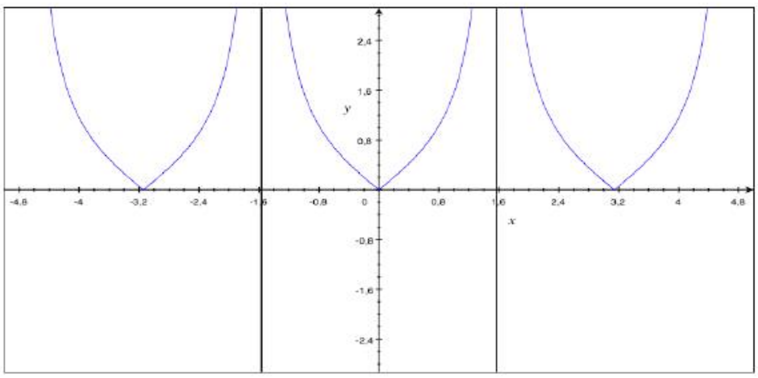
Il grafico riassuntivo seguente ci permette di studiare il segno del prodotto $\tan x - \sqrt{3}\tan^2 x$:



Le soluzioni sono quindi:

$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq k\pi \vee \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$.

- $f(x) = |\tan x|$



$$x = \frac{\pi}{3}$$

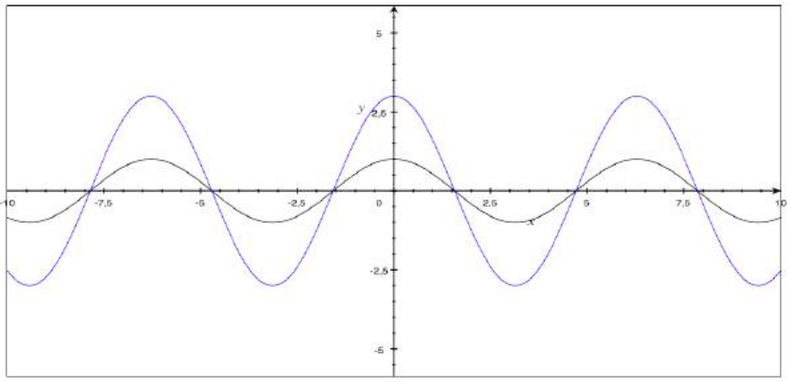
10.9 Trasformazioni del grafico di una funzione goniometrica

Dilatazione e contrazione

Vediamo adesso come la trasformazione $\begin{cases} x' = x \\ y' = ay \end{cases}$ modifica il grafico di una funzione goniometrica.

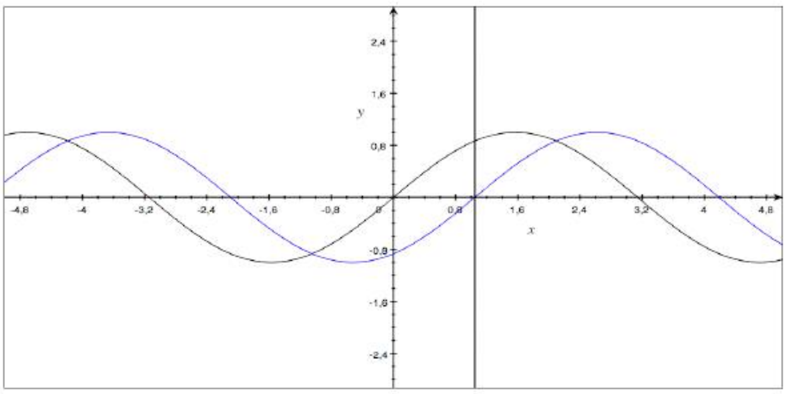
Ricordiamo che se $0 < a < 1$ la trasformazione è una *contrazione*, mentre se $a > 1$ la trasformazione è una *dilatazione*. A titolo di esempio supponiamo di voler tracciare il grafico della funzione $f(x) = 3\cos x$, che possiamo pensare ottenuta trasformando il grafico della funzione $f(x) = \cos x$ con la trasformazione $\begin{cases} x' = x \\ y' = 3y \end{cases}$.

Compariamo i grafici della funzione $f(x) = \cos x$ e della funzione $f(x) = 3\cos x$ (in colore).



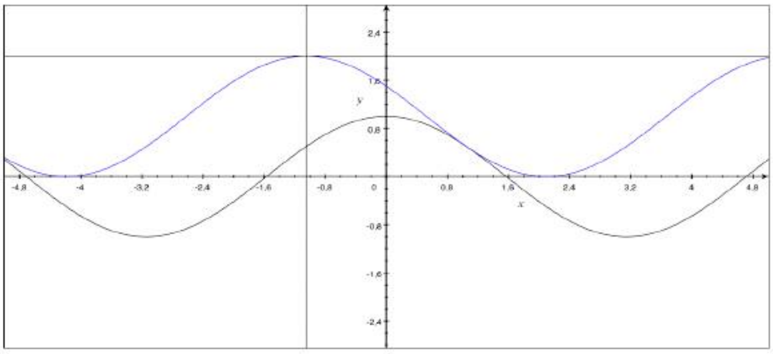
Traslazione

Consideriamo la traslazione di equazioni: $\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y \end{cases}$. La funzione $y = \sin x$ viene quindi trasformata nella funzione $y' = \sin(x' - \alpha)$. Adesso togliamo gli indici e rappresentiamo le due funzioni sullo stesso piano cartesiano. Per questo scopo attribuiamo al fattore di traslazione il valore $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Quello che otteniamo è rappresentato dal seguente grafico, dove in colore è rappresentata la funzione $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$:



$P(\cos\alpha;\sin\alpha)$ $Q(\cos\beta;\sin\beta)$

Vediamo un altro esempio: $y = 1 + \cos(x + \frac{\pi}{3})$. In questo caso si ha traslazione anche lungo l'asse delle ordinate $\begin{cases} x' = x - \frac{\pi}{3} \\ y' = y + 1 \end{cases}$. Anche in questo caso presentiamo i grafici comparati delle funzioni $y = \cos x$ e $y = 1 + \cos(x + \frac{\pi}{3})$, colorando quello relativo a quest'ultima:

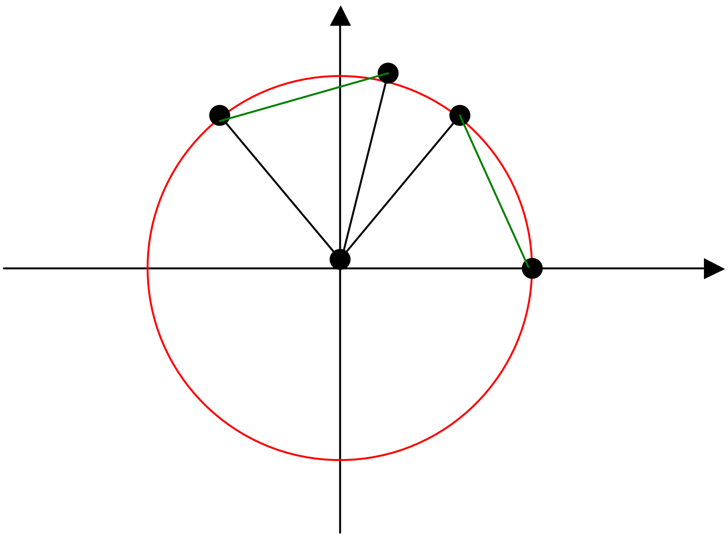


10.10 Principali formule goniometriche

Abbiamo già osservato la non linearità delle funzioni goniometriche. Vogliamo adesso esprimere, ad esempio, $\cos(\alpha - \beta)$ in funzione di $\cos\alpha, \cos\beta$ e $\sin\alpha, \sin\beta$.

Formula di sottrazione del coseno

Nella figura seguente, siano $A\hat{O}P = \alpha$, $A\hat{O}Q = \beta$. Di conseguenza, $Q\hat{O}P = \alpha - \beta$. Indichiamo il punto R sulla circonferenza goniometrica tale che $A\hat{O}R = Q\hat{O}P = \alpha - \beta$



Da questa costruzione risultano uguali i triangoli QOP e AOR, quindi $\overline{AR} = \overline{PQ}$. Scrivendo questa uguaglianza in forma estesa con le coordinate cartesiane otteniamo:

$\sqrt{(1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + \sin(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$.

Elevando al quadrato e ricordando che $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, giungiamo alla relazione cercata:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Formula di addizione del coseno

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Q P

$$A\hat{O}P = \alpha/2; \quad A\hat{O}Q = \alpha$$

$$\overline{QA} = 2\sin\alpha/2$$

$$\overline{QH} = \sin\alpha; \quad \overline{QA} = \sqrt{\overline{QH}^2 + \overline{AH}^2} \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$4\sin^2\alpha/2 = \sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)^2 \Rightarrow$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Formula di sottrazione del seno

$$\sin(\alpha-\beta) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\alpha-\beta)) = \cos((\frac{\pi}{2} - \alpha) + \beta) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)\cos\beta - \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Formula di addizione del seno

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)) = \cos((\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta)) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)\cos\beta + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Formula di addizione della tangente

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Formula di sottrazione della tangente

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Formule di duplicazione

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

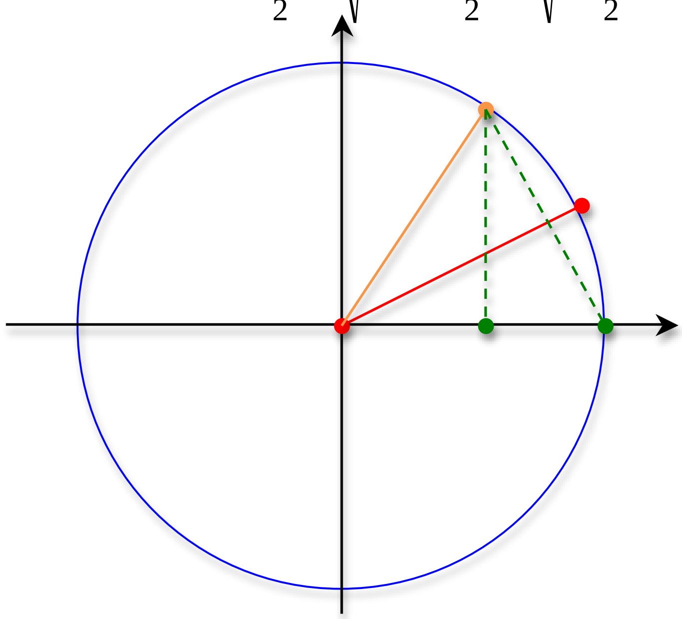
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Formule di bisezione

$$\cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \Rightarrow \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{1 - \cos^2\frac{x}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$



Vogliamo vedere adesso come alcune delle formule precedenti possono essere utilizzate per scrivere un'espressione del tipo $\sin\alpha + \sin\beta$, sotto forma di prodotto di opportune espressioni in seno e coseno. Un'operazione di questo tipo è utile, ad esempio, nello studio del fenomeno dell'*interferenza* di due o più onde che si propagano in un mezzo.

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Vediamo pure che:

$$\cos\alpha + \cos\beta = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Formule di questo tipo si dicono

Formule di prostaferesi

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Ad esempio, risolviamo la seguente equazione goniometrica:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x = 0$$

$$\cos 3x + (\cos 5x + \cos x) + (\cos 4x + \cos 2x) = 0$$

$$\cos 3x + 2\cos 3x \cos 2x + 2\cos 3x \cos x = 0$$

$$\cos 3x(1 + 2\cos 2x + 2\cos x) = 0$$

$$\cos 3x(1 + 4\cos^2 x - 2 + 2\cos x) = 0$$

$$\cos 3x(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$$

$$\cos 3x(\cos x + \frac{1+\sqrt{5}}{4})(\cos x - \frac{\sqrt{5}-1}{4}) = 0$$

e ci siamo così ricondotti ad equazioni elementari.

10.11 Alcune applicazioni

Il problema della determinazione della gittata.

La formula di duplicazione del seno può essere utile per dimostrare che un proiettile lanciato da terra, a parità di velocità iniziale, ricadrà più lontano (gittata) dal punto di partenza se viene lanciato con un angolo di 45° rispetto all'orizzontale. Vediamo perché.

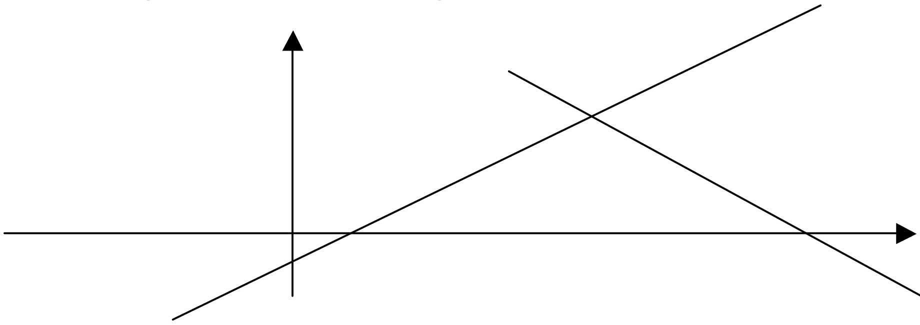
Dalla cinematica è noto che la gittata si determina sfruttando la relazione $x_{\max} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}$. Si riconosce immediatamente al numeratore il $\sin 2\alpha$: $x_{\max} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Ora, sapendo

$\pi - \alpha \qquad \alpha$

che il seno assume il valore massimo quando l'angolo è retto, è sufficiente porre $2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45°$, come volevasi dimostrare.

Determinazione dell'angolo formato da due rette.

Sono date le rette non parallele di equazione $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$. Sia P il loro punto di intersezione e γ l'angolo in P, indicato in figura,



dove valgono le relazioni $m = \tan\alpha$ e $m' = \tan\beta$, insieme alla $\pi - \alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \gamma = \alpha - \beta$. Di conseguenza, $\tan\gamma = \tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{m - m'}{1 + mm'}$; la tangente dell'angolo compreso è così espressa in funzione dei coefficienti angolari delle rette che lo delimitano.

Le funzioni goniometriche lineari in seno e coseno.

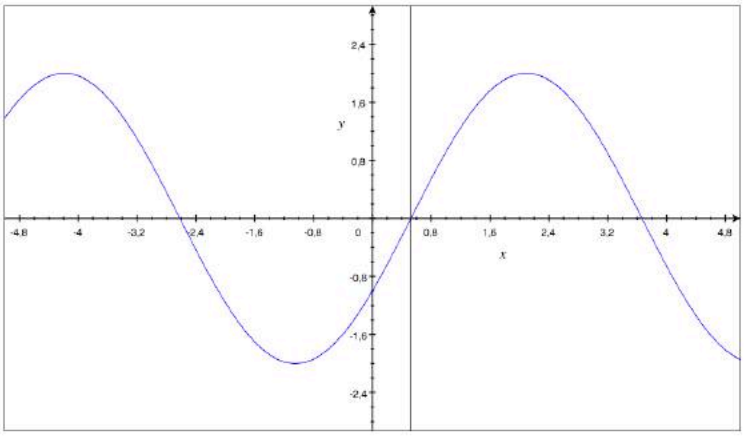
Vediamo adesso un'interessante applicazione della formula di sottrazione del seno: lo studio del grafico di una funzione goniometrica *lineare*.

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$. Vogliamo scriverla nella forma $g(x) = A\sin(x - \alpha)$. Una funzione di questo tipo ha il grafico "modellato" su quello della funzione seno, mediante una traslazione di fattore α lungo l'asse delle ascisse, ed una dilatazione (o contrazione) di un fattore *A*, lungo l'asse delle ordinate.

Sviluppiamo con la formula di sottrazione del seno la funzione $g(x)$:

$g(x) = A\sin(x - \alpha) = A\cos\alpha\sin x - A\sin\alpha\cos x$ ed uguagliamola termine a termine alla funzione di partenza $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$. Otteniamo così il sistema $\begin{cases} A\cos\alpha = \sqrt{3} \\ A\sin\alpha = 1 \end{cases}$. Le soluzioni si ottengono applicando la relazione $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ alla somma in quadratura delle due equazioni, e la definizione di tangente: $\begin{cases} A^2 = 4 \Rightarrow A = \pm 2 \\ \tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$. Per stabilire il segno di *A*, si valuta la funzione di partenza in un punto qualsiasi, per esempio $f(0) = \sqrt{3}\sin 0 - \cos 0 = -1$. Tale valore dovrà essere assunto anche dalla funzione trasformata nello stesso punto, dovendo coincidere su tutto l'insieme di definizione. Di conseguenza $g(0) = A\sin\left(0 - \dfrac{\pi}{6}\right) = A\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow A = +2$. La funzione cercata è quindi $g(x) = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ ed il suo grafico è il seguente:

x θ



Questo "metodo", detto *dell'angolo aggiunto* risulta essere molto utile anche nel caso della risoluzione di un'equazione goniometrica lineare:

$$a\sin x + b\cos x + c = 0.$$

Scriviamo l'equazione nella forma $A\sin(x-\alpha) + c = 0$ e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} A\cos\alpha = a \\ A\sin\alpha = -b \end{cases}$$

nelle incognite A, α:

$$\begin{cases} \tan\alpha = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(-\dfrac{b}{a}\right) \\ A^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow A = \pm\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}.$$

Esempio. Risolvere la seguente equazione: $\sin x + \cos x - \sqrt{2} = 0$.

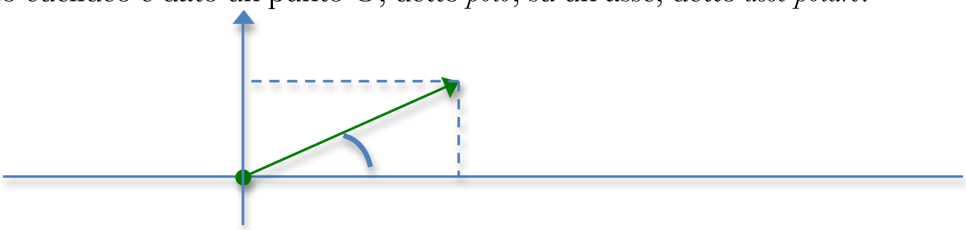
Si applicano le relazioni trovate: $\begin{cases} \tan\alpha = -\dfrac{1}{1} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(-\dfrac{1}{1}\right) = -\dfrac{\pi}{4} \\ A^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow A = \pm\sqrt{a^2+b^2} = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Poiché in 0 risulta $\sin 0 + \cos 0 = 1$, allora $A\sin\left(0 + \dfrac{\pi}{4}\right) = A\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Rightarrow A = +\sqrt{2}$. Di conseguenza l'equazione $\sin x + \cos x - \sqrt{2} = 0$ è equivalente all'equazione $\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0$, che si risolve con metodi "elementari":

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

10.12 Le coordinate polari (r, ϑ)

Nel piano euclideo è dato un punto O, detto *polo*, su un asse, detto *asse polare*.



Sussiste la seguente relazione tra coordinate polari e coordinate cartesiane: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.

La parabola in coordinate polari
Scelto il polo coincidente con il fuoco, e l'asse polare coincidente con l'asse della parabola, dalla definizione di questa come luogo geometrico risulta $r = 2p + r\cos\theta$, dove $2p$ indica la distanza tra il fuoco e la direttrice. L'equazione della parabola in coordinate polari, che esprime la distanza del punto dal fuoco, è:

$$r = \frac{2p}{1-\cos\theta}.$$

L'ellisse in coordinate polari
In questo caso, l'asse polare coincide con l'asse focale, ed il polo con uno dei due fuochi. Dalla definizione di ellisse come luogo geometrico, la distanza dai fuochi è data dalle relazioni

$\overline{PF_1} = r;\quad \overline{PF_2} = \sqrt{(2c + r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}$. Di conseguenza, $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ implica

$2a = r + \sqrt{r^2 + 4c^2 + 4cr\cos\theta}$, da cui segue:

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a + c\cos\theta} = a\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}.$$

L'iperbole in coordinate polari
Sia F_1 un fuoco dell'iperbole. Se $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a$, allora $2a + r = \sqrt{r^2 + 4c^2 + 4cr\cos\theta}$: di conseguenza

$$r = \frac{c^2 - a^2}{a - c\cos\theta} = a\frac{e^2-1}{1-e\cos\theta}.$$

10.13 Rappresentazione generale delle coniche in base all'eccentricità (I)

E' possibile dare una definizione generale delle curve di secondo grado esaminate in precedenza sfruttando il concetto di eccentricità come *rapporto tra le distanze dal fuoco e dalla direttrice*.
Teorema. Sono dati una retta *r* (direttrice), un punto $F \notin r$ (fuoco), ed un numero $e > 0$ (eccentricità).

Allora, il luogo geometrico dei punti *P* del piano tali che $\dfrac{d(P,F)}{d(P,r)} = e \Rightarrow \begin{array}{ll} e<1 & ellisse \\ e=1 & parabola \\ e>1 & iperbole \end{array}$.

Viceversa, ogni conica (non circonferenza), si ottiene in questo modo.
Dimostrazione. Se $e = 1$ non c'è niente di nuovo da dimostrare: siamo direttamente nel caso della parabola. Se $e \neq 1$, scelto un sistema di riferimento in cui $F(c,0)$ appartiene all'asse *x*, occorre distinguere due casi: quello in cui $0 < e < 1$, dove il fuoco sta tra la direttrice e l'asse *y* (parallelo alla direttrice), e quello in cui $e > 1$, dove la direttrice sta tra il fuoco e l'asse *y*. Indicata con *d* la distanza (fissa) del fuoco dalla direttrice, e con $x = l$ l'equazione di quest'ultima, si ha chiaramente $l = c + d$ se $0 < e < 1$, e $l = c - d$ se $e > 1$.

Fatte queste premesse, possiamo scrivere $\dfrac{d(P,F)}{d(P,r)} = e = \dfrac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x-l|}$. Elevando al quadrato ambo i membri dell'ultima uguaglianza, se scegliamo i parametri in modo tale che $c - e^2 l = 0$, giungiamo all'espressione (generale):

$$\frac{x^2}{l^2e^2} + \frac{y^2}{l^2e^2(1-e^2)} = 1 \quad \begin{array}{ll} e<1 & ellisse \\ e>1 & iperbole \end{array}.$$

Osservazione. La condizione $c - e^2 l = 0$ in realtà, dice qualcosa di geometricamente significativo: il parametro *c*, oltre che essere l'ascissa del fuoco nel sistema di riferimento scelto, è *anche* la semi-distanza focale relativa all'ellisse.

r_2 r_1 ϑ p

Dimostriamo adesso l'altra implicazione nel caso particolare dell'ellisse. Nelle ipotesi in cui l'abbiamo esaminata come luogo geometrico, è possibile scriverne l'equazione nella forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$, dove *a* rappresenta il semiasse maggiore, e *c* la semi-distanza focale. Si tratta quindi di determinare valori opportuni di *l* e di *e* in modo tale che risulti $\begin{cases} a^2 = l^2e^2 \\ a^2-c^2 = l^2e^2\left(1-e^2\right) \end{cases}$, e ciò accade se $e=\frac{c}{a}$. Ora, nel caso dell'ellisse, abbiamo visto che sussiste la relazione $l=c+d$. La relazione $a^2=l^2e^2$ diventa

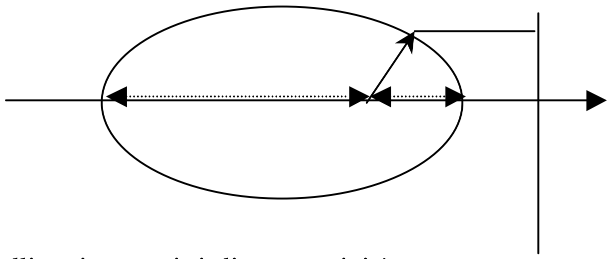
$\left(\frac{c}{e}\right)^2=\left(c+d\right)^2e^2 \Rightarrow \left(c+d\right)^2=\frac{c^2}{e^4} \Rightarrow c+d=\frac{c}{e^2} \Rightarrow d=c\frac{1-e^2}{e^2} \Rightarrow c=\frac{de^2}{1-e^2}$. In questo modo è possibile scrivere $l=c+d=\frac{d}{1-e^2}$, e l'equazione dell'ellisse diventa $\frac{x^2\left(1-e^2\right)^2}{d^2e^2}+\frac{y^2\left(1-e^2\right)}{d^2e^2}=1$. Da quanto visto sopra è possibile fornire anche l'equazione della direttrice: dalla $d=c\frac{1-e^2}{e^2}$ segue $x=l=c+d=\frac{c}{e^2}=\frac{a^2}{c}$, da cui l'equazione della direttrice $x=\frac{a^2}{c}$.

10.14 Un'applicazione delle coordinate polari all'astronomia

Vogliamo scrivere l'equazione di un'ellisse in coordinate polari; per questo scopo cerchiamo una relazione tra gli elementi fondamentali dell'orbita ellittica, quali i semiassi e l'eccentricità, ed i punti di *minima* e *massima* distanza da uno dei due fuochi, che viene scelto come polo, denominati rispettivamente *afelio* r_2, e *perielio* r_1. Se indichiamo con *a* e *b* rispettivamente i semiassi maggiori e minori dell'ellisse, e con *2c* la distanza tra i fuochi, risulta

$$\begin{cases} 2a = r_1 + r_2 \\ 2c = r_2 - r_1 \end{cases} \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1} \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{r_1r_2}.$$

Di conseguenza, l'area sarà $A=\pi ab=\pi\frac{r_1+r_2}{2}\sqrt{r_1r_2}$.



Dalla definizione dell'ellisse in termini di eccentricità

$$e=\frac{dist(P,S)}{dist(P,d)}=\frac{r}{p-r\cos\vartheta},$$

dove *p* è la distanza della stella (fuoco dell'ellisse) dalla direttrice. Quando l'angolo con l'asse focale è zero la distanza di P dal fuoco è proprio r_1. Di conseguenza

$$e=\frac{r_1}{p-r_1} \Rightarrow p=\frac{r_1(1+e)}{e}.$$

L'ellisse in coordinate polari è quindi espressa dalla relazione

$f(x)=\tan\frac{x}{2}$ $f(x)=\sin 2x$

$$e=\frac{r}{\frac{r_1(1+e)}{e}-r\cos\vartheta}\Rightarrow r_1\left(1+e\right)=r(1+e\cos\vartheta)\Rightarrow r=\frac{r_1(1+e)}{1+e\cos\vartheta}.$$

Da quanto osservato in precedenza, l'eccentricità può essere espressa in termini di distanza all'afelio ed al perielio dalla

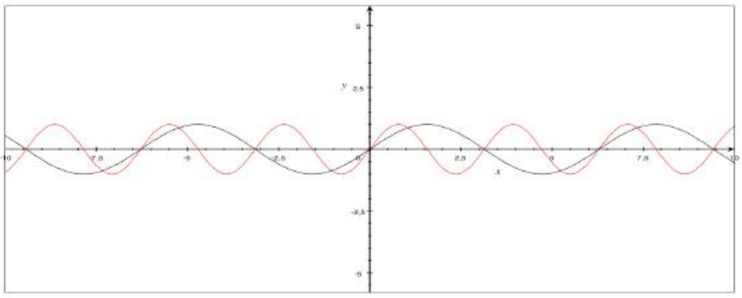
$$e=\frac{c}{a}=\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1},$$

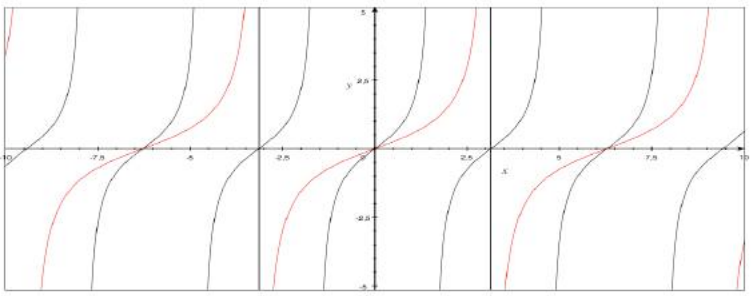
da cui segue

$$r=\frac{r_1\left(1+\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}\right)}{1+\left(\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}\right)\cos\vartheta}=\frac{2r_1r_2}{\left(r_2+r_1+\left(r_2-r_1\right)\cos\vartheta\right)}$$

10.15 Il periodo di particolari funzioni goniometriche

Ci interessa sapere se il periodo della funzione $f(x)=\sin 2x$ è ancora 2π. Ricordiamo che una funzione definita sull'insieme *A*, si dice *periodica* di periodo *T*, se esiste un numero reale *T* tale che $f(x)=f(x+T),\quad \forall x\in A$. Applichiamo questa definizione alla funzione $f(x)=\sin 2x$: $f(x)=f(x+T)\Rightarrow \sin 2x=\sin 2(x+T)=\sin(2x+2T)=\sin 2x\cos 2T+\cos 2x\sin 2T$. Uguagliando $\sin 2x=\sin 2x\cos 2T+\cos 2x\sin 2T$ dovrà necessariamente essere $\begin{cases}\cos 2T=1\\ \sin 2T=0\end{cases}$, da cui segue $2T=2\pi\Rightarrow T=\pi$: il periodo è dimezzato. In generale, con un procedimento del tutto identico a quello appena visto, si prova che $f(x)=\sin nx$ ha periodo $T=\frac{2\pi}{n}$. Queste considerazioni valgono anche per la funzione $f(x)=\cos nx$. Per la tangente vale invece la relazione $T=\frac{\pi}{n}$. Vediamo alcuni grafici di funzioni.





Esercizio. Dopo aver verificato che la curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x = \cos 2\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$ è la parabola di equazione $x = 1 - 2y^2$, dimostrare che le sue intersezioni con la circonferenza goniometrica sono i vertici di un triangolo equilatero.

- $\begin{cases} x = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2y^2 \\ y = \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow x = 1 - 2y^2$. Le intersezioni con la circonferenza goniometrica sono

  $$\begin{cases} x = 1 - 2y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow A = (1,0); \quad B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

  Risulta $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = \sqrt{3}$.

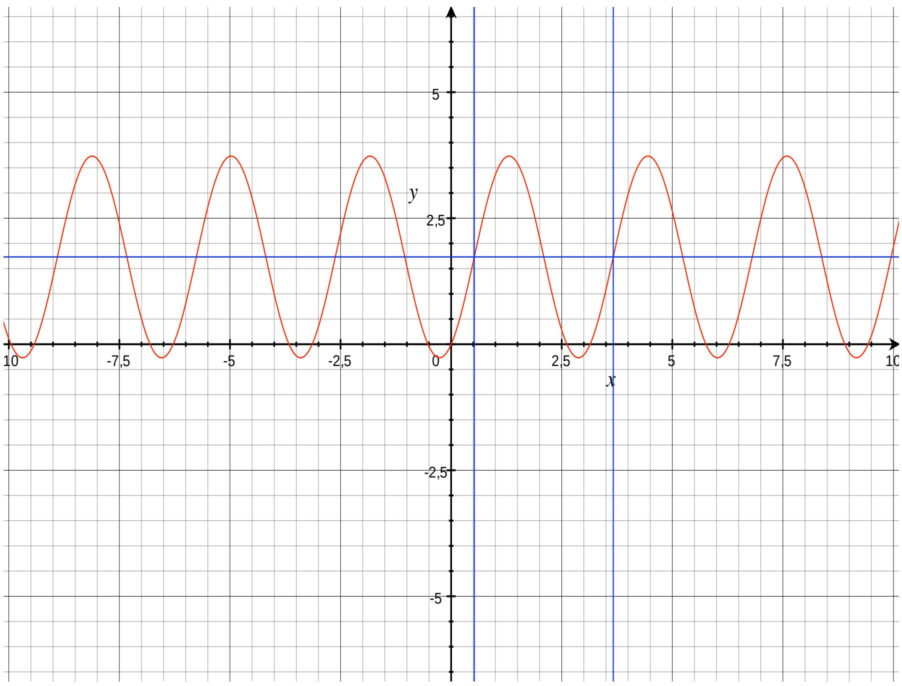
Esercizio. Dopo aver dimostrato che la funzione $f(x) = 2\sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x\cos x$ si può scrivere nella forma $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}$:

- $f(x) = 2\sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right) + \sin 2x = \sqrt{3} + \sin 2x - \sqrt{3}\cos x$, da cui segue $f(x) = \sqrt{3} + 2\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) = \sqrt{3} + 2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

a) Se ne determini il periodo;

- $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2(x+T) - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3} + 2T\right) \Rightarrow 2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi$.

b) Si tracci il grafico nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$;



y θ r P x

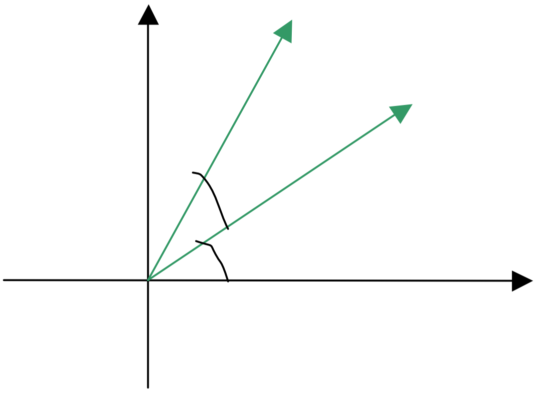
c) Si risolva la disequazione $f(x) \geq \sqrt{3}$.

- $f(x) \geq \sqrt{3} \Rightarrow 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \geq \sqrt{3} \Rightarrow 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \pi$, di

conseguenza $\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{\pi}{6} \\ 2x - \frac{\pi}{3} \leq \pi \Rightarrow x \leq \frac{4\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + k\pi$.

10.16 Rotazioni

L'unico prerequisito richiesto per lo studio di questa parte è la conoscenza dei metodi risolutivi delle equazioni goniometriche elementari.



Le coordinate del punto P nel SdR *xy* sono $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$, dove, al solito, *r* rappresenta la distanza del punto dall'origine e α l'angolo che il segmento OP forma con l'asse X con la convenzione usuale sul verso. Le coordinate del punto P', ottenuto ruotando il segmento OP di un angolo θ sono $\begin{cases} x' = r\cos(\alpha + \theta) \\ y' = r\sin(\alpha + \theta) \end{cases}$. Sviluppando questa espressione con le formule di addizione del seno e del coseno si arriva alla relazione $\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) = r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = r\sin(\alpha+\theta) = r(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$, che rappresenta le equazioni della *rotazione di centro l'origine e angolo* θ. In simboli:

$$\rho_{O,\theta} : \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}.$$

Poiché una trasformazione geometrica è una *corrispondenza biunivoca* tra punti del piano, esiste la trasformazione inversa che, nel caso delle rotazioni, si otterrà "scambiando" tra loro le coordinate dei due sistemi di riferimento e ruotando di un angolo $-\theta$. In simboli:

$$\rho^{-1}{}_{O,-\theta} : \begin{cases} x = x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}.$$

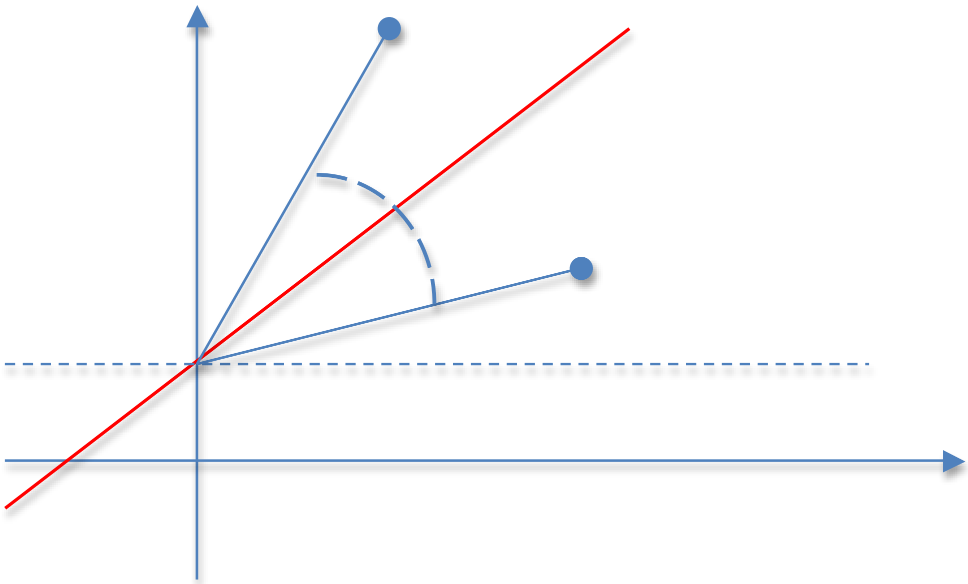
Nel caso in cui il centro di rotazione non coincide con l'origine, si ragiona come sopra in un sistema di riferimento traslato con l'origine nel centro di rotazione $C(x_C;y_C)$. Le equazioni cercate sono:

$$\rho_{C,\theta} : \begin{cases} x' = (x - x_C)\cos\theta - (y - y_C)\sin\theta + x_C \\ y' = (x - x_C)\sin\theta + (y - y_C)\cos\theta + y_C \end{cases}.$$

$\frac{\theta}{2}-\alpha$ $P(x;y)$

Rotazioni e simmetrie assiali

Vogliamo determinare le equazioni di una simmetria assiale rispetto ad una retta $r: y = mx + q$, dove $m = tg\frac{\theta}{2}$.



Il simmetrico di P può essere ottenuto ruotando quest'ultimo di un angolo $\theta - \alpha$ attorno al punto $A(0;q)$, dove α è l'angolo formato dalla retta $y = q$ con il segmento AP. Risulta quindi

$$\begin{cases} x' = \overline{AP'}\cos(\theta-\alpha) = \overline{AP}\cos\alpha\cos\theta + \overline{AP}\sin\alpha\sin\theta = x\cos\theta + (y-q)\sin\theta \\ y' = \overline{AP'}\sin(\theta-\alpha) + q = \overline{AP}\cos\alpha\sin\theta - \overline{AP}\sin\alpha\cos\theta + q = x\sin\theta - (y-q)\cos\theta + q \end{cases}.$$

Se ricordiamo che $\cos\theta = \frac{1-m^2}{1+m^2}$; $\sin\theta = \frac{2m}{1+m^2}$, otteniamo le relazioni generali:

$$s_r: \begin{cases} x' = \frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}y - \frac{2mq}{1+m^2} \\ y' = \frac{2m}{1+m^2}x - \frac{1-m^2}{1+m^2}y + \frac{2q}{1+m^2} \end{cases}.$$

Esempio. Scrivere le equazioni della simmetria rispetto alla retta $r: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$.

Si applicano le equazioni di cui sopra con $m = tg\frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ e $A(0;4)$ ed otteniamo

$$s_r: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 2\sqrt{3} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 6 \end{cases}$$

Proprietà fondamentale delle simmetrie assiali nel piano

Ogni isometria nel piano può essere ottenuta come prodotto di non più di tre simmetrie assiali.

10.17 Rappresentazione generale delle coniche (II)

Consideriamo il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante il rapporto tra la distanza da un punto $F(x_F, y_F)$ (*fuoco*), e da una retta $ax + by + c = 0$(*direttrice*). Chiamiamo tale rapporto *e*, *eccentricità* del luogo geometrico.

$$\frac{\sqrt{(x-x_F)^2+(y-y_F)^2}}{\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}} = e \Rightarrow$$

$$x^2 - 2xx_F + x_F^2 + y^2 - 2yy_F + y_F^2 = \frac{e^2}{a^2+b^2}(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2 + 2abxy + 2acx + 2bcy) \Rightarrow$$

$$\left(1-\frac{a^2e^2}{a^2+b^2}\right)x^2 + \left(1-\frac{e^2b^2}{a^2+b^2}\right)y^2 - \frac{2abe^2}{a^2+b^2}xy - 2\left(x_F + \frac{ace^2}{a^2+b^2}\right)x - 2\left(y_F + \frac{bce^2}{a^2+b^2}\right)y + x_F^2 + y_F^2 - \frac{c^2e^2}{a^2+b^2} = 0$$

Per esempio, se $a = 0,\quad x_F = 0,$ e $e = 1$ otteniamo $x^2 - 2(y_F + \frac{c}{b})y + y_F^2 - \frac{c^2}{b^2} = 0$ che, opportunamente "trattata" assume la forma $y = \frac{1}{2\left(y_F + \frac{c}{b}\right)}x^2 + \frac{y_F - \frac{c}{b}}{2}$. Nel caso "canonico" in cui $y_F = \frac{c}{b}$ l'equazione diventa quella di una parabola con vertice nell'origine:

$$y = \frac{x^2}{4y_F}.$$

Lavorando sui coefficienti si ritrovano le coniche già viste in "forma canonica" (con la condizione che la direttrice sia parallela ad uno degli assi coordinati, il che equivale a porre o $a = 0$ oppure $b = 0$.

In generale, un'equazione di secondo grado in due incognite

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

se ammette soluzioni, queste si rappresentano necessariamente nel piano cartesiano sotto forma di

- ellisse;
- parabola;
- iperbole;
- coppia di rette distinte;
- coppia di rette coincidenti.

Dai passaggi che hanno portato a scrivere l'equazione generale di una conica si osserva che il termine misto *xy* ed i termini di primo grado in *x* e *y* possono essere eliminati mediante opportune trasformazioni geometriche: *rotazioni* per eliminare il termine misto, *traslazioni* per eliminare i termini di primo grado.

Cerchiamo adesso di giungere ad una "regola" che ci permetta di stabilire, attraverso un'analisi dei coefficienti, da quale conica (non degenere) sono rappresentate le soluzioni di un'equazione del tipo $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$. Per questo scopo osserviamo che:

$$A = 1 - \frac{a^2e^2}{a^2+b^2}$$
$$B = 1 - \frac{b^2e^2}{a^2+b^2} \quad \Rightarrow A\cdot B - \frac{C^2}{4} = 1 - e^2.$$
$$C = -\frac{2abe^2}{a^2+b^2}$$

Ricordando la definizione di *eccentricità* di una conica, la regola cercata è adesso realtà: un'equazione del tipo $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ se ammette soluzioni *non degeneri*, queste possono essere rappresentate in base al segno della quantità $a\cdot b - \frac{c^2}{4}$ da una

- **ellisse**, se $a\cdot b - \frac{c^2}{4} > 0$;
- **parabola**, se $a\cdot b - \frac{c^2}{4} = 0$,
- **iperbole**, se $a\cdot b - \frac{c^2}{4} < 0$.

Esempio. Caratterizzare le soluzioni della seguente equazione:

$$x^2 - 6xy + y^2 + 6\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 10 = 0.$$

Soluzione

Valutiamo $a\cdot b - \frac{c^2}{4} = 1\cdot 1 - \frac{36}{4} = -8$. Se ammette soluzioni non degeneri, queste danno origine ad un'iperbole di eccentricità $1 - e^2 = -8 \Rightarrow e = 3$.

Eliminiamo il termine misto nell'equazione data mediante rotazione rispetto all'origine di un angolo θ, sfruttando le equazioni della rotazione $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$.

Sostituendo nell'equazione $x^2 - 6xy + y^2 + 6\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 10 = 0$ e ponendo uguale a zero il coefficiente del termine misto $x'y'$, otteniamo il valore $\theta = \frac{\pi}{4}$. L'equazione di partenza diventa:

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 6\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 6\sqrt{2}\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) - 2\sqrt{2}\left(-\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + 10 = 0$$

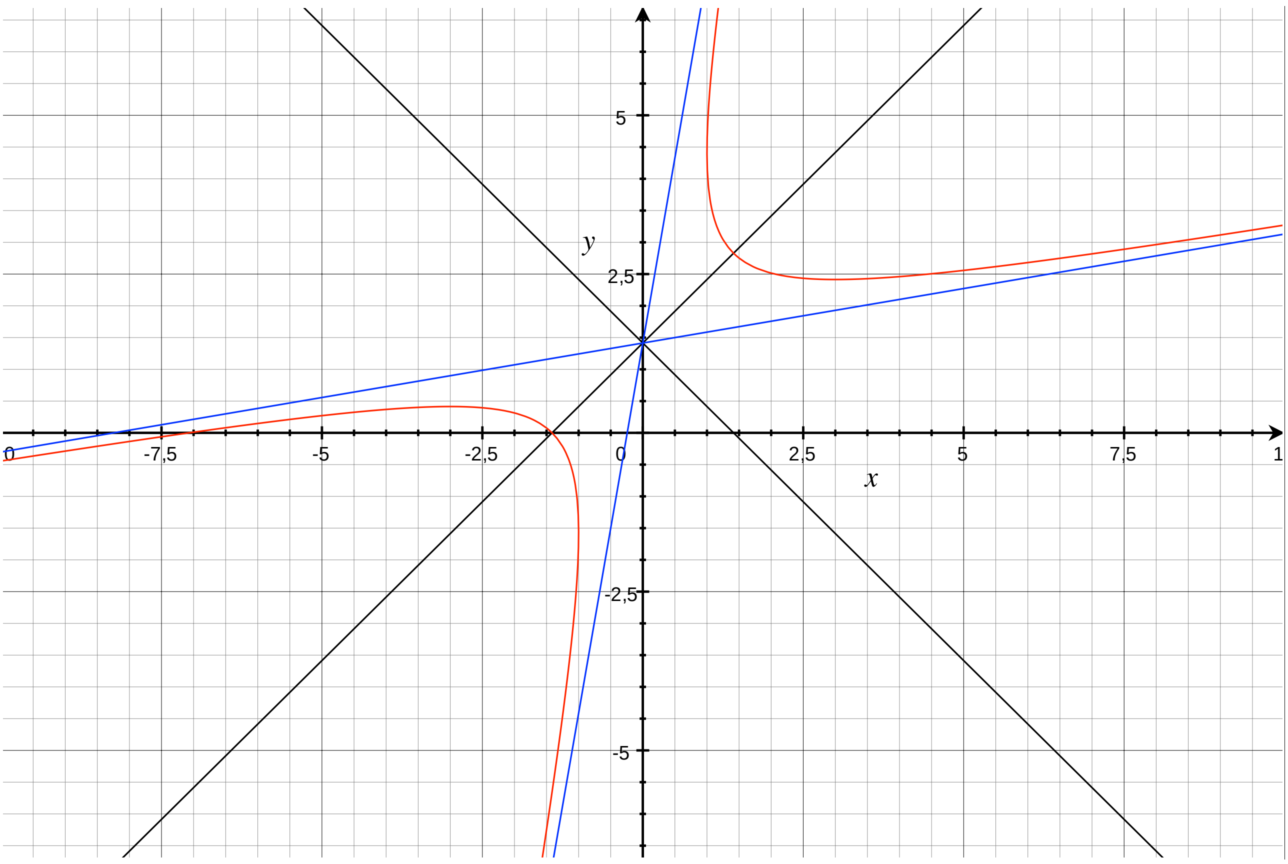
Svolgendo i calcoli otteniamo $2x'^2 - y'^2 + 4x' + 2y' + 5 = 0$; il centro dell'iperbole si ottiene con il metodo del completamento del quadrato: $\frac{(x'+1)^2}{2} - \frac{(y'-1)^2}{4} = -1$, di conseguenza le equazioni dell'asse focale e dell'asse trasverso sono, rispettivamente, $x' = -1$ e $y' = 1$, mentre gli asintoti hanno equazione $y' - 1 = \pm\sqrt{2}(x'+1)$. Per trovare i corrispondenti nella curva di partenza ricordiamo che

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{y}{\sqrt{2}} \\ y' = \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$, quindi $x' = -1 \Rightarrow x - y + \sqrt{2} = 0$, $y' = 1 \Rightarrow x + y - \sqrt{2} = 0$ e, infine,

$$y' - 1 = \pm\sqrt{2}\left(x' + 1\right) \Rightarrow x + y - \sqrt{2} = \pm\sqrt{2}\left(x - y + \sqrt{2}\right) \Rightarrow \begin{matrix} \left(1-\sqrt{2}\right)x + \left(1+\sqrt{2}\right)y - \sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right) = 0 \\ \left(1+\sqrt{2}\right)x + \left(1-\sqrt{2}\right)y - \sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right) = 0 \end{matrix}.$$

Restano da determinare soltanto i vertici dell'iperbole. Quest'operazione può essere condotta direttamente mettendo a sistema l'equazione dell'iperbole $x^2 - 6xy + y^2 + 6\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 10 = 0$ con quella dell'asse focale $x - y = -\sqrt{2}$:

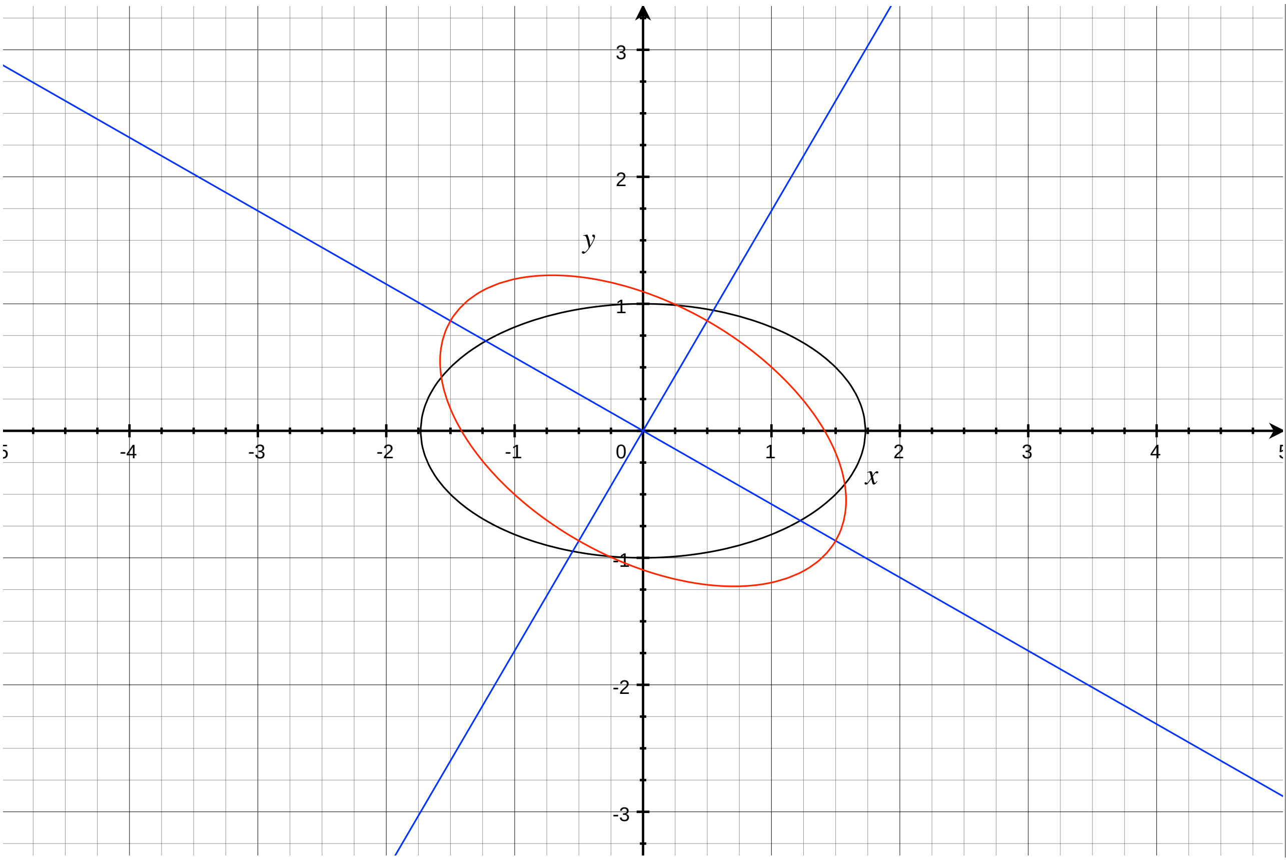
$$\begin{cases} x^2 - 6xy + y^2 + 6\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 10 = 0 \\ x - y = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x^2 + 8 = 0 \\ y = \sqrt{2} + x \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right) \quad \left(-\sqrt{2}, 0\right).$$



Esempio. Rappresentare graficamente, se esistono, le soluzioni dell'equazione
$3x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2-6=0$.

$$\begin{array}{r} a=3 \\ b=5 \\ c=2\sqrt{3} \end{array} \Rightarrow a\cdot b-\frac{c^2}{4}=15-3=12\Rightarrow ellisse$$. L'assenza dei termini di primo grado permette di ruotare la "candidata" ellisse rispetto all'origine: $\theta=\frac{\pi}{6}$, da cui segue $\rho_{O,\frac{\pi}{6}}:\begin{cases} x'=x\frac{\sqrt{3}}{2}-y\frac{1}{2} \\ y'=x\frac{1}{2}+y\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Di conseguenza l'equazione diventa $\frac{x'^2}{3}+y'^2=1$. Si ruotano l'asse focale e l'asse trasverso di un angolo $-\frac{\pi}{6}$ per ottenere i corrispondenti assi dell'ellisse di partenza: $y'=0\Rightarrow x+\sqrt{3}y=0$, e $x'=0\Rightarrow\sqrt{3}x-y=0$. I vertici si otterranno mettendo a sistema l'equazione di partenza con quelle degli assi focale e trasverso.



Un metodo alternativo
L'operazione di riconoscimento di una curva algebrica di secondo grado, e la sua rappresentazione in seguito a rotazione rispetto al centro, può essere condotta a partire dalle equazioni della *rotazione*

rispetto ad un centro diverso dall'origine: $\begin{cases} x' - x_C = (x - x_C)\cos\theta - (y - y_C)\sin\theta \\ y' - y_C = (x - x_C)\sin\theta + (y - y_C)\cos\theta \end{cases}$. Ricavate da queste equazioni l'espressione delle coordinate x, y, si sostituiscono all'interno dell'equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Successivamente si pongono uguale a zero i coefficienti del termine misto di secondo grado $x'y'$, e dei termini x' e y', e si risolve il sistema nelle incognite θ, x_C, y_C:

$$\begin{cases} (a-c)\sin 2\theta + b\cos 2\theta = 0 \\ A(b\sin\theta - 2a\cos\theta) + B(2c\sin\theta - b\cos\theta) = e\sin\theta - d\cos\theta \\ A(2a\sin\theta + b\cos\theta) + B(2c\cos\theta + b\sin\theta) = d\sin\theta + e\cos\theta \end{cases}$$

, dove abbiamo denotato con A e B le quantità $A = x_C(\cos\theta - 1) + y_C\sin\theta$ e $B = -x_C\sin\theta + y_C(\cos\theta - 1)$. Si ricavano così le soluzioni, dipendenti soltanto dai coefficienti dell'equazione algebrica di secondo grado,

$$\theta = \begin{cases} \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{b}{c-a}\right); & c \neq a \\ \frac{\pi}{4}; & c = a \end{cases}, \quad \begin{cases} A = \frac{eb - 2dc}{b^2 - 4ac} \\ B = \frac{bd - 2ae}{b^2 - 4ac} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = \frac{(eb - 2dc)(\cos\theta - 1) - (bd - 2ae)\sin\theta}{2(b^2 - 4ac)(1 - \cos\theta)} \\ y_C = \frac{(bd - 2ae)(\cos\theta - 1) + (eb - 2dc)\sin\theta}{2(b^2 - 4ac)(1 - \cos\theta)} \end{cases}.$$

Svolgendo calcoli alquanto laboriosi, si perviene all'equazione della curva nella forma $a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$, in cui i nuovi coefficienti valgono rispettivamente:

$$a' := a\cos^2\theta - b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta$$

$$c' := a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta$$

$$d' := (2a\cos\theta - b\sin\theta)A + (b\cos\theta - 2c\sin\theta)B + d\cos\theta - e\sin\theta$$

$$e' := (2a\sin\theta + b\cos\theta)A + (2c\cos\theta + b\sin\theta)B + d\sin\theta + e\cos\theta \ .$$

$$f' := aA^2 + bAB + cB^2 + dA + eB + f$$

$$A = \frac{eb - 2dc}{b^2 - 4ac}; \quad B = \frac{bd - 2ae}{b^2 - 4ac}$$

Esercizio
Trasformare in forma canonica le seguenti coniche:
a) $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3} = 0$;
b) $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 20$;

Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni goniometriche

1. $\sin x \tan\frac{x}{2} - \cos x = 0$ $\qquad x = \pm\frac{5}{3} + k\pi$

2. $4sen^2 x - \sqrt{3}senx\cos x + \cos^2 x = 1$ $\qquad x = k\pi; \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

3. $\frac{3}{\cos x + 1} - \frac{3}{\cos x - 1} = 8$ $\qquad x = \frac{\pi}{3} + k\pi; \quad x = \frac{2}{3}\pi + k\pi$

4. $\tan^2 x + 2\cos x - 2 = 0$ $\qquad x = 2k\pi; \quad x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \quad x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$

5. $\cos x + 4 - \frac{3}{\cos x + 2} = 0$ $\qquad x = (2k+1)\pi$

6. $tg^2 x + 3\cot g^2 x = 4$ $\qquad x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi; \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$

7. $3tg\frac{x}{2} = tg(180° + x)$ $\qquad x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi; \quad x = \frac{7}{3}\pi + 4k\pi$

8. $2\sqrt{2}senx\cos x + 1 = 0$ $\qquad x = \frac{5}{8}\pi + k\pi; \quad x = \frac{7}{8}\pi + k\pi$

9. $tg(\frac{\pi}{3} + x) = tg(\frac{\pi}{3} - x) + 4$ $\qquad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; \quad x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + k\pi$

10. $\cos 2x = \cos x - sen(180° - x)$ $\qquad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \quad x = 2(k+1)\pi$

11.
$a)$ $3\cot g^2 x + 1 = \frac{3\cos x}{\cos^2 x - 1}$ $\qquad x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \quad x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$

$b)$ $2\cos^2 2x - \sin 4x = 0$ $\qquad x = (2k+1)\frac{\pi}{4}; \quad x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$

12. $\frac{2\sin x + 1}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} = 1$ $\qquad \tan\frac{x}{2} = \sqrt{3} - 2...$

13. $tg^2(-x) - tg(5\pi + x) = 0$ $\qquad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

14. $2senx\cos x + 2\cos x = 1 + senx$ $\qquad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi; \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \quad x = \frac{7}{3}\pi + 2k\pi$.

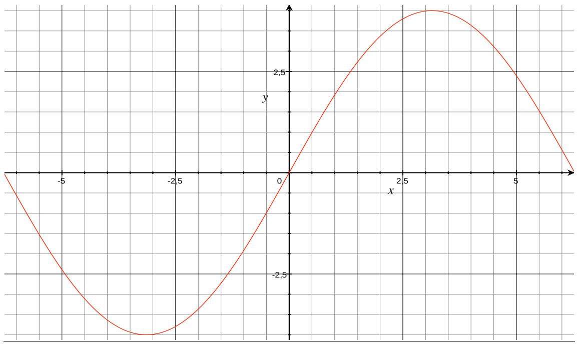
15. $tg(45° + \frac{x}{2}) = \cos(-x)$ $\qquad x = k\pi$

16. $tg(45° + x) = 2 + 3tgx$ $\qquad x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$

17. $\sqrt{3}\cos^2 x + senx\cos x = 0$ $\qquad x = (2k+1)\frac{\pi}{2}; \quad x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

18. $senx - tg\frac{x}{2} = \cos x$ $\qquad x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

19. Tracciare il grafico della funzione $y = 4\sin\frac{x}{2}$ nell'intervallo $[0,2\pi]$.



21. Calcolare il valore di $sen(arctg(\sqrt{5}))$ $\qquad \sqrt{\frac{5}{6}}$.

22. Determinare il dominio della funzione $y = arcsen\left(\frac{x}{x-1}\right)$ *(ricordare che la funzione arcoseno è definita se* ***l'argomento*** *è compreso tra -1 e 1…).* $D \equiv \left\{x \in R \middle| x \leq \frac{1}{2}\right\}$

23. Sapendo che $tg\alpha = 2 - \sqrt{3}$ e che $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ calcolare $\cos 2\alpha$ $\qquad \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12}$.

24. Sapendo che $tg2\alpha = \frac{1}{3}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{8}$ calcolare $\cos 4\alpha$ $\qquad \cos 4\alpha = \frac{1}{2}$.

25. Stabilire per quali valori di *x* è vera l'uguaglianza $\sqrt{tg^2 x} = -tgx$. Motivare la risposta.

- $|\tan x| = -\tan x \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x < 0$

26. Determinare i valori del parametro *k* che rendono vera l'uguaglianza $(k-1)tg\alpha = k^2 + 1$ nel caso in cui $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ $\qquad k < 1$.

27. Individuare il tipo di conica rappresentata dall'equazione $x^2 - \frac{xy}{2\sqrt{3}} + \frac{y^2}{2} - 2 = 0$, e ridurla in forma canonica mediante un'opportuna rotazione degli assi cartesiani.

- $\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \left(6+\sqrt{3}\right)x^2 + \left(6-\sqrt{3}\right)y^2 = 16$.

28. Individuare il tipo di conica rappresentato dalla curva di equazione $x^2 + y^2 + 2xy - 2y = 0$.

- parabola: $2y^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$

29. Operando un'opportuna rotazione degli assi cartesiani, ridurre in forma canonica la conica di equazione: $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 1 = 0$.

- $4x^2+4y+1=0$.

30. Dopo aver individuato il tipo di conica soluzione dell'equazione $\frac{\sqrt{3}-3}{3}x^2+xy-y^2-4=0$, ridurla in forma canonica mediante un'opportuna rotazione degli assi cartesiani.
    - $\left(3\sqrt{3}-6\right)x^2-\left(\sqrt{3}+6\right)y^2=-24$

31. S'individui e si rappresenti graficamente la curva luogo delle soluzioni dell'equazione $7x^2+13y^2-6\sqrt{3}xy-4=0$.
    - $x^2+4y^2=1$

32. Si determini l'equazione ottenuta ruotando di 30° un'iperbole equilatera di equazione $x^2-y^2=-1$, e si dica come si modifica per effetto di una successiva simmetria rispetto all'origine.
    - $x^2-y^2+2\sqrt{3}xy+2=0$

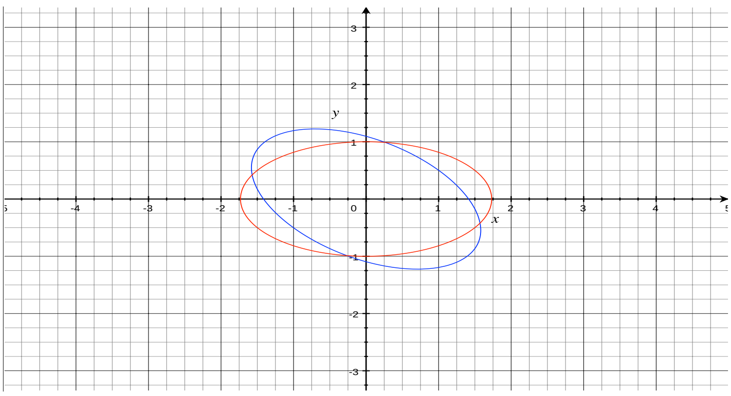
33. Risolvere la disequazione $\frac{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos^2 x-\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x}\le 0$ nell'intervallo $[0;\pi]$.
    - $\frac{\pi}{12}<x<\frac{\pi}{6}\vee\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{4}\pi$.

34. Risolvere la seguente disequazione goniometrica: $\frac{|\sin x|-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin x-\cos x}\le 0$.
    - $\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{3}\vee\frac{2\pi}{3}\le x<\frac{5\pi}{4}\vee\frac{4\pi}{3}\le x\le\frac{5\pi}{3}$

35. Si determini l'ipotenusa di un triangolo rettangolo conoscendone l'area A ed il perimetro P.
    - $ipotenusa=\frac{P^2-4A}{4P}$.

36. Risolvere la seguente equazione goniometrica: $2\sin^2 x+3\cos^2 x=3+\sqrt{3}\sin x\cos x$.
    - $x=k\pi;\quad x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$.

37. Rappresentare graficamente la conica di equazione $3x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2-6=0$.
    - $x^2+3y^2=3$



38. Risolvere la seguente disequazione goniometrica: $\dfrac{|2\cos x|}{\sin 2x - \cos x} > 1$.

- $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6}; \quad x \neq \dfrac{\pi}{2}$

39. E' data la parabola di equazione $8x^2 + 8y^2 - 16xy - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = 0$. Si verifichi che la rotazione di un angolo di 45° rispetto all'origine ed un'opportuna trasformazione geometrica trasformano la parabola data nella parabola di equazione $y = x^2$.

- $8x^2 + 8y^2 - 16xy - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = 0 \Rightarrow y' = 4x'^2$

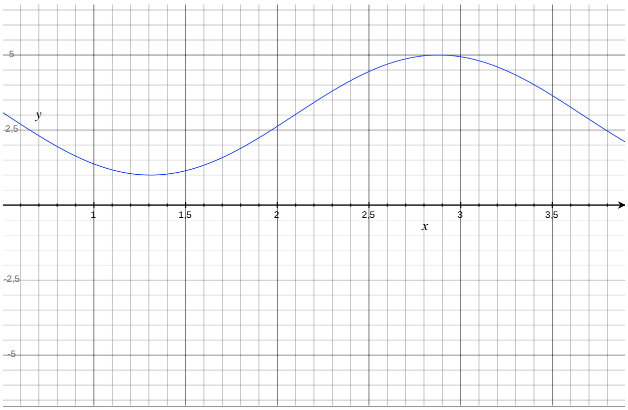
40. Risolvere la disequazione: $\dfrac{\frac{1}{2} - \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x} \geq 0$ nell'intervallo $[0;\pi]$.

- $0 \leq x < \dfrac{\pi}{12} \vee \dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{3\pi}{4}$

41. Si risolva la disequazione goniometrica $\cos 2x + 2\sin^2 x - 2\sin 2x - 2 \leq 0$ nell'intervallo $[0;\pi]$.

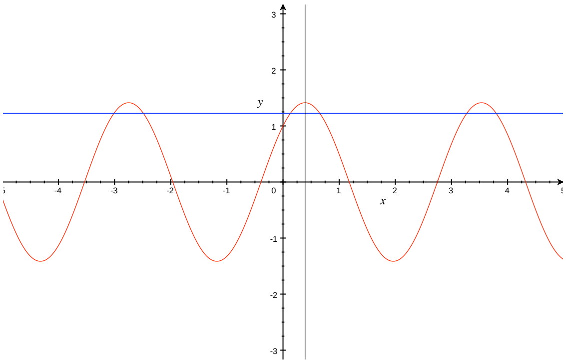
- $0 \leq x < \dfrac{7\pi}{12} \vee \dfrac{11\pi}{12} < x \leq \pi$

42. Si tracci il grafico della funzione $f(x) = 3 - 2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.



43. Dopo aver rappresentato graficamente la funzione $f(x) = \cos 2x + \sin 2x$, si dica per quali valori di *x* risulta $f(x) \geq \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

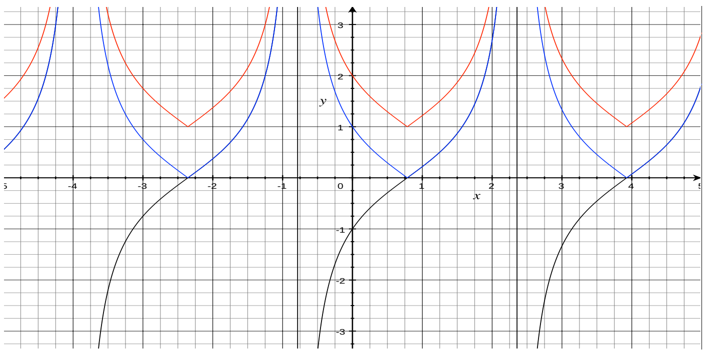
- $f(x) = \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos 2\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right)$.
- $f(x) \leq \sqrt{\dfrac{3}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{\dfrac{3}{2}} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{6} \leq 2x - \dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{11\pi}{6} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{8} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{24} \vee \dfrac{25\pi}{24} \leq x \leq \dfrac{9\pi}{8}$



44. E' data l'espressione $\cos x = 2m - 3;\quad \frac{\pi}{4} \le x < \frac{3\pi}{4}$. Si determini l'intervallo di variabilità del parametro *m*.

$$\left[\frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le m \le \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

45. Tracciare il grafico della seguente funzione: $y = \left|\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| + 1$.

- 

46. Sapendo che $x = \frac{\pi}{3}$ è una soluzione dell'equazione $4\sin^3 x - 2\left(\sqrt{3}+1\right)\sin^2 x + \left(\sqrt{3}-2\right)\sin x + \sqrt{3} = 0$, si determinino le altre soluzioni.

$$\left[\left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(t-1)\left(t + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right]$$

47. Risolvere la seguente disequazione: $2\cos^2 x - \cos x - 1 \le 0$.

$$\left[2k\pi \le x \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \le x \le 2(k+1)\pi\right]$$

48. E' data la parabola di equazione $8x^2 + 8y^2 - 16xy - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = 0$. Si verifichi che la rotazione di un angolo di 45° rispetto all'origine ed un'opportuna trasformazione geometrica, trasformano la parabola data nella parabola di equazione $y = x^2$.