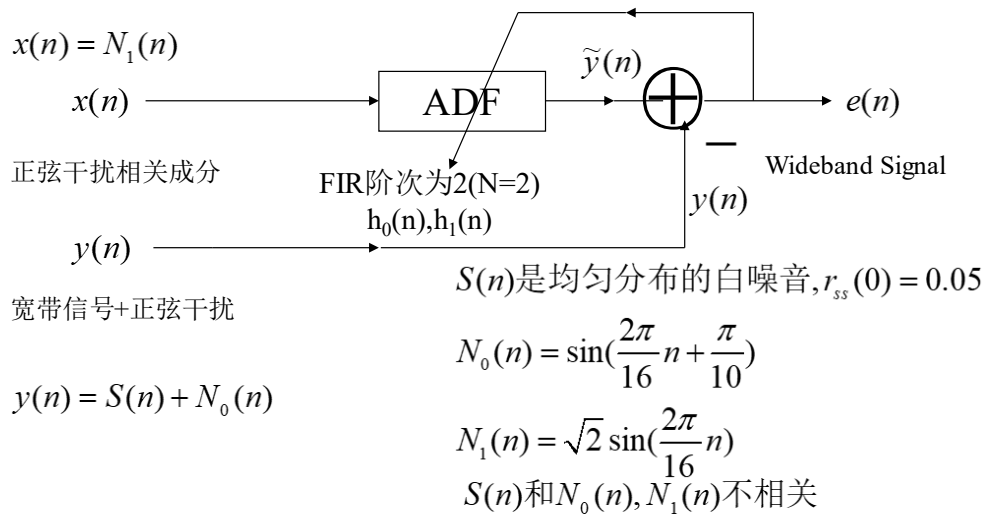


LMS 计算机作业

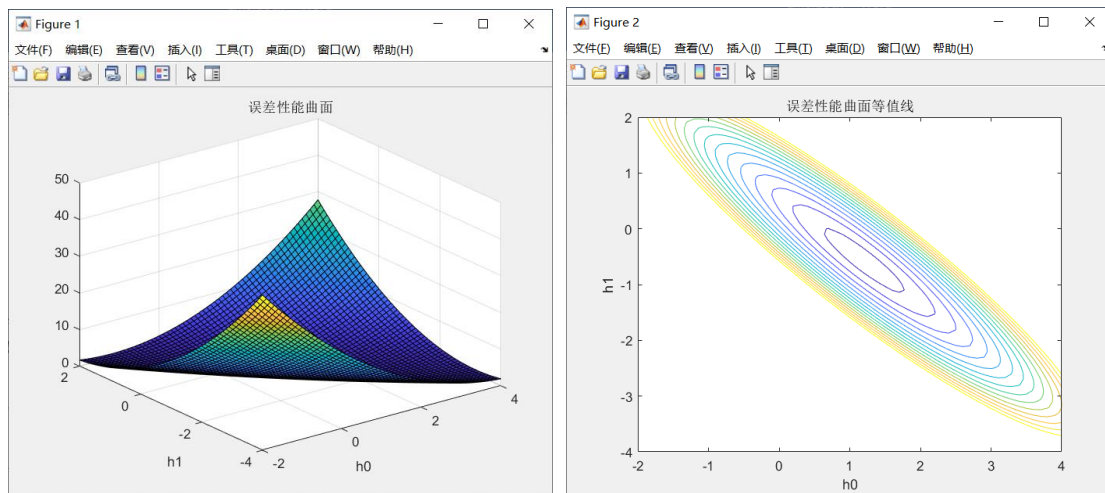
姓名：汤宁标 学号：SC22219139

传统的宽带信号中抑制正弦干扰的方法是采用陷波器(notch filter)，为此我们需要精确知道干扰正弦的频率。然而当干扰正弦频率是缓慢变化时，且选频率特性要求十分尖锐时，则最好采用自适应噪声抵消的方法。下图是用一个二阶 FIR 的 LMS 自适应滤波器消除正弦干扰的一个方案。



注：在实验中 $n=1,2,\dots,N$ 的取值根据实验情况确定，一般选取足够大以使算法达到基本收敛，本题选择 $N=1000$ ，试验结果表明算法可以收敛满足实验要求。

(1) 借助 MATLAB 画出误差性能曲面和误差性能曲面的等值线；



(2) 写出最陡下降法，LMS 算法的计算公式 ($\delta = 0.4$)；

解：由题意得

$$N_0(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{16}n + \frac{\pi}{10}\right) \quad N_1(n) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi}{16}n\right)$$

$$x(n) = N_1(n) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi}{16}n\right)$$

$$y(n) = S(n) + N_0(n) = S(n) + \sin\left(\frac{2\pi}{16}n + \frac{\pi}{10}\right)$$

(a) 求相关系数（正弦信号的相关可对其一个周期取平均来获得）

$$r_{xx}(k) = \frac{1}{16} \sum_{i=0}^{15} \left(\sqrt{2}\sin\frac{2\pi i}{16} \right) \left(\sqrt{2}\sin\frac{2\pi(i-k)}{16} \right) = \cos\frac{2\pi k}{16}$$

$$r_{yx}(k) = \frac{1}{16} \sum_{i=0}^{15} \left[\sin\left(\frac{2\pi i}{16} + \frac{\pi}{10}\right) \right] \left(\sqrt{2}\sin\frac{2\pi(i-k)}{16} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{2\pi k}{16} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$r_{yy}(0) = r_{ss}(0) + r_{N_0N_0}(0) = 0.05 + 0.5 = 0.55$$

(b) 计算误差性能曲面

$$H(n) = [h_0(n) \quad h_1(n)]^T \quad H(0) = [3 \quad -4]^T$$

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \quad R_{yx} = [r_{yx}(0) \quad r_{yx}(1)]^T$$

$$J(n) = E[y^2(n)] - 2R_{yx}^T H + H^T R_{xx} H$$

$$= 0.55 + h_0^2 + h_1^2 + 2h_0h_1\cos\frac{\pi}{8} - \sqrt{2}h_0\cos\frac{\pi}{10} - \sqrt{2}h_1\cos\frac{9\pi}{40}$$

(c) 最陡下降法

$$H(n+1) = H(n) - \frac{1}{2}\delta V_G(n)$$

$$V_G(n) = 2R_{xx}H(n) - 2R_{yx}$$

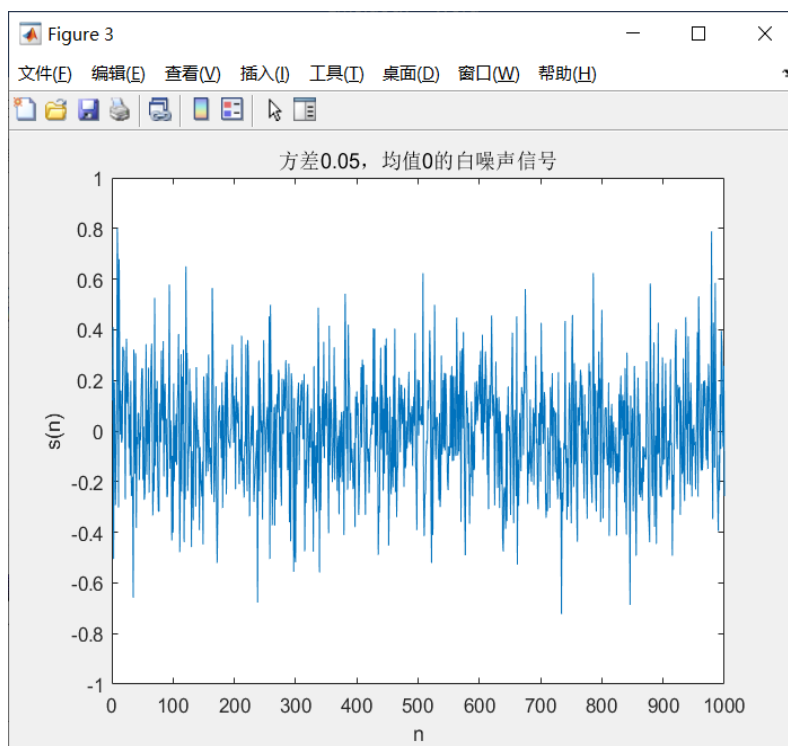
(d) LMS 算法

$$e(n+1) = y(n+1) - H^T(n)X(n+1)$$

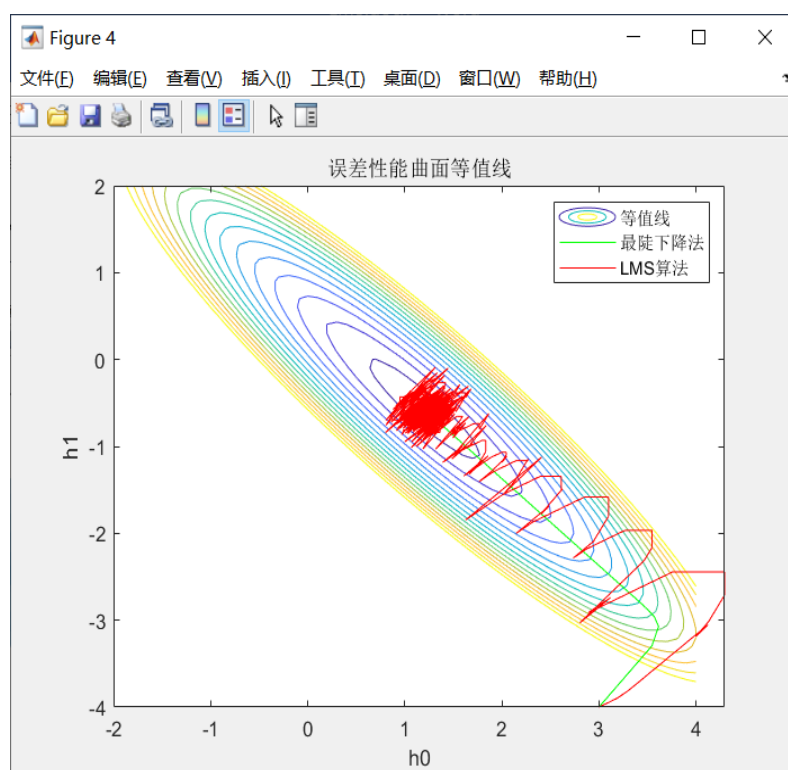
$$H(n+1) = H(n) + \delta e(n+1)X(n+1)$$

$$X(n+1) = [x(n+1), x(n), \dots, x(n)]^T$$

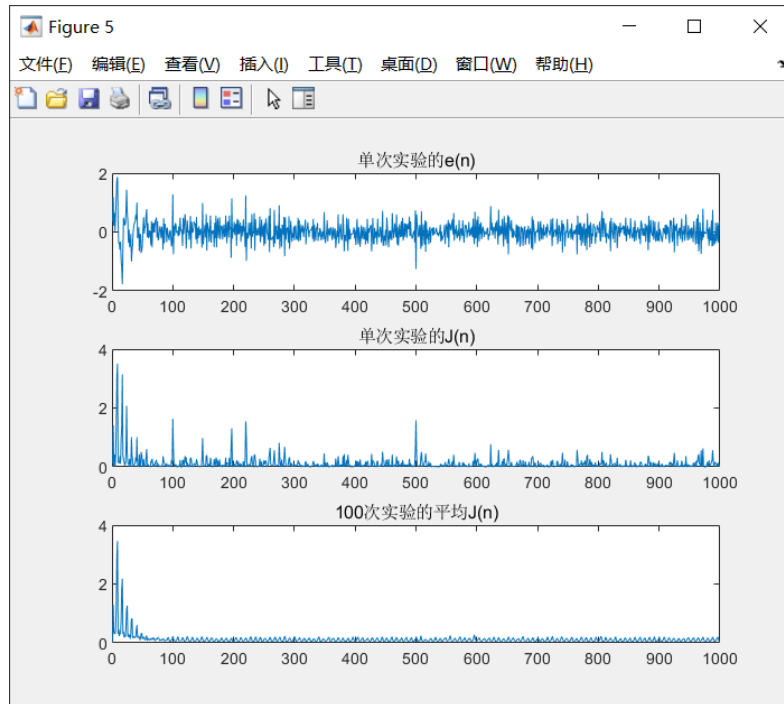
(3) 用 MATLAB 产生方差为 0.05,均值为 0 白噪音 $S(n)$, 并画出其中一次实现的波形图;



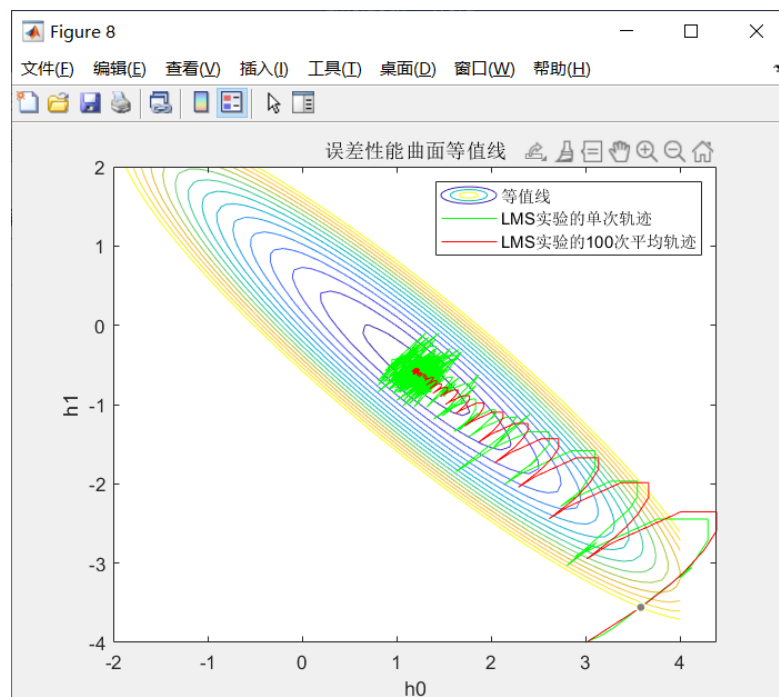
(4) 根据 (2) 中的公式, 并利用 (3) 中产生的 $S(n)$, 在 (1) 中的误差性能曲面的等值线上叠加画出采用最陡下降法, LMS 法时 $H(n)$ 的在叠代过程中的轨迹曲线。



(5) 用 MATLAB 计算并画出 LMS 法时 $J(n) = e^2(n)$ 随时间 n 的变化曲线（对应 $S(n)$ 的某一次的一次实现）和 $e(n)$ 波形；某一次实现的结果并不能从统计的角度反映实验的结果的正确性，为得到具有统计特性的实验结果，可用足够多次的实验结果的平均值作为实验的结果。用 MATLAB 计算并画出 LMS 法时 $J(n)$ 的 100 次实验结果的平均值随时间 n 的变化曲线。



(6) 用 MATLAB 计算并在 (1) 中的误差性能曲面的等值线上叠加画出 LMS 法时 100 次实验中的 $H(n)$ 的平均值的轨迹曲线；



(7) 对以上实验结果给出一些你认为有价值的讨论。

答：(a) 使用最陡下降法实现维纳滤波问题的迭代求解由初值 $H(0)$ ，梯度矢量 $V_G(n)$ ，步长 δ 三个量决定，迭代过程是确定的，当迭代步长足够小时收敛于维纳最优解。LMS 算法是一种重要的梯度自适应算法，使用瞬时值代替估计值，需要给定初值 $H(0)$ ，然后进行迭代求解。

(b) 从图 (1) 的误差性能曲面和等值曲线可以看出误差性能曲面的确存在最小值，而等高线的中间就是取最小值的地方，采用不同的算法通过多次迭代最终应使参数收敛至此，图 (4) 实验证明最陡下降法和 LMS 算法均能实现收敛。

(c) 从图 (4) 可以看出，最陡下降法能够很好地接近最终的结果，但是 LMS 算法在最终结果附近来回波动。在迭代搜索的过程中，最陡下降法波动范围较小，LMS 算法的波动范围较大。同时通过图 (6) 发现可以通过增加实验次数获得具有统计特性的结果，减小 LMS 算法迭代收敛的波动，逐渐向最终结果收敛。

代码附录

```
1 — clc;
2 — close all;
3 — clear all;
4
5 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% 误差性能曲面和误差性能曲面等值曲线 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
6 — [h0,h1]=meshgrid(-2:0.1:4,-4:0.1:2);
7 — v=0:0.1:1.5;%设置等高线的固定值
8 — J=0.55+h0.*h0+h1.*h1+2*cos(pi/8)*h0.*h1-sqrt(2)*h0*cos(pi/10)-sqrt(2)*h1*cos(9*pi/40);
9 — figure;surf(h0,h1,J);xlabel('h0');ylabel('h1');title('误差性能曲面');
10 — figure;contour(h0,h1,J,v);xlabel('h0');ylabel('h1');title('误差性能曲面等值线');
11
12 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% 产生方差0.05,均值为0的白噪声信号 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
13 — N=1000;s=sqrt(0.05)*randn(1,N);
14 — figure;plot(s);axis([0 N -1 1]);xlabel('n');ylabel('s(n)');title('方差0.05,均值0的白噪声信号');
15
16 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% 最陡下降法、LMS算法在等值曲线上迭代轨迹 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
17 — n=1:N;
18 — q=0.4;%步长
19 — y=s+sin(2*pi*n/16+pi/10);%叠加白噪声的参考信号
20 — x=sqrt(2)*sin(2*pi*n/16);%输入信号
21
22 %最陡下降法  $H(n+1)=H(n)-0.5*q*V_g(n)$ 
23 — H1=zeros(2,N);%存放最陡下降法的H(n)迭代数据
24 — H1(:,1)=[3;-4];%赋初值
25 — Rxx=[cos(2*pi*0/16),cos(2*pi*1/16);cos(2*pi*1/16),cos(2*pi*0/16)];
26 — Ryx=[cos(2*pi*0/16+pi/10)/sqrt(2);cos(2*pi*1/16+pi/10)/sqrt(2)];
27 — Vg=2*Rxx*H1(:,1)-2*Ryx;
28 — for i=1:N-1
29 —     Vg=2*Rxx*H1(:,i)-2*Ryx;
30 —     H1(:,i+1)=H1(:,i)-0.5*q*Vg;
31 — end
32 — figure;contour(h0,h1,J,v);xlabel('h0');ylabel('h1');title('误差性能曲面等值线');
33 — hold on;plot(H1(1,:),H1(2,:), 'g');
34
35 %LMS算法  $e(n+1)=y(n+1)-H'(n)X(n+1)$   $H(n+1)=H(n)+q e(n+1)X(n+1)$ 
36 % $X(n+1)=[x(n+1),x(n),\dots,x(n-N+2)]'$   $N=2$ 
37 — H2=zeros(2,N);%存放LMS法的H(n)迭代数据
38 — H2(:,1)=[3;-4];%赋初值
39 — for i=1:N-1
40 —     e=y(i+1)-H2(:,i)'*x(i+1:-1:i)';
41 —     H2(:,i+1)=H2(:,i)+q*e*x(i+1:-1:i)';
42 — end
43 — hold on;plot(H2(1,:),H2(2,:), 'r');
44 — legend('等值线','最陡下降法','LMS算法');
```

```

46 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% LMS算法中e(n)、J(n)、H(n)变化曲线 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
47 en=zeros(1,N-1);%单次实验的e(n)
48 Jn=zeros(1,N-1);%单次实验的J(n)
49 Jn_all=zeros(1,N-1,100);%100次实验的J(n)
50 Jn_average=zeros(1,N-1);%100次实验结果J(n)的平均值
51 H_all=zeros(2,N-1,100);%100次实验的H(n)
52 H_average=zeros(2,N-1);%100次实验结果H(n)的平均值
53 for i=1:100 %100次实验
54     s0=sqrt(0.05)*randn(1,N);%随机信号每次实验随机生成
55     n=1:N;
56     y0=s0+sin(2*pi*n/16+pi/10);%叠加白噪声的参考信号
57     x0=sqrt(2)*sin(2*pi*n/16);%输入信号
58     H0=[3;-4];%赋初值
59     for j=1:N-1
60         en(j)=y0(j+1)-H0'*x0(j+1:-1:j)';%保留最后一次实验的e(n)
61         H0=H0+q*en(j)*x0(j+1:-1:j)';%实验更新收敛H(n)
62         Jn(j)=en(j)^2;%保留最后一次实验的J(n)
63         Jn_all(:,j,i)=en(j)^2;%保留100次实验的J(n)
64         H_all(:,j,i)=H0;%保留100次实验的H(n)
65     end
66 end
67 for i=1:N-1%求和算实验均值
68     Jn_average(i)=sum(Jn_all(1,i,:))/100;
69     H_average(1,i)=sum(H_all(1,i,:))/100;
70     H_average(2,i)=sum(H_all(2,i,:))/100;
71 end
72 figure;
73 subplot(3,1,1);plot(en);title(' 单次实验的e(n)');
74 subplot(3,1,2);plot(Jn);title(' 单次实验的J(n)');
75 subplot(3,1,3);plot(Jn_average);title(' 100次实验的平均J(n)');
76
77 figure;contour(h0,h1,J,v);xlabel(' h0');ylabel(' h1');title(' 误差性能曲面等值线');
78 hold on;plot(H2(1,:),H2(2,:), 'g');
79 hold on;plot(H_average(1,:),H_average(2,:), 'r');
80 legend(' 等值线', 'LMS实验的单次轨迹', 'LMS实验的100次平均轨迹')

```