

# Løsning av differensialligninger

Fjerde ordens Runge-Kutta metoden for enkel harmonisk pendel  
TFY4163 Bølgefysikk og fluidmekanikk - Prosjekt

## Innledning og teori

Bevegelsesligningen for en pendel med friksjon og drivkraft er

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta + q \frac{d\theta}{dt} = \frac{F_D}{ml} \sin(\omega_D t), \quad (1)$$

hvor  $\theta$  er pendelens utslagsvinkel,  $g$  er tyngdeakselerasjonen,  $l$  er lengden av snora pendelen er festet i,  $q$  er en friksjonsparameter,  $F_D/ml$  er drivkraften som pendelen utsettes for, og  $\omega_D$  er drivkraftens vinkelfrekvens. Vi definerer  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ , som er pendelens vinkelfrekvens.

Anta at  $\sin \theta \approx \theta$  i alle deloppgavene (dersom ikke annet blir oppgitt), slik at bevegelsesligningen du skal løse er gitt ved

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta + q \frac{d\theta}{dt} = \frac{F_D}{ml} \sin(\omega_D t), \quad (2)$$

Benytt parametrene under når du løser ligningen:

- Lengden av snora,  $l = 1.0 \text{ m}$
- Tyngdeakselerasjonen,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$
- Initiell vinkel med hensyn til vertikalen,  $\theta_0 = 0.2 \text{ rad}$
- Initiell vinkelhastighet,  $\omega_0 = 0.0 \text{ rad/s}$
- Friksjonsparameter,  $q = 1.0 \text{ s}^{-1}$
- Drivkraftens vinkelfrekvens,  $\omega_D = 3.13 \text{ s}^{-1}$
- Drivkraft,  $\frac{F_D}{ml} = 0.2 \text{ N}$

Når drivfrekvensen,  $\omega_D$  er nær pendelens vinkelfrekvens,  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ , får vi resonans, som vi skal undersøke i oppgavene under.

## Oppgaver

1. Bruk fjerdeordens Runge-Kutta metoden for å løse bevegelsesligningen. Plot vinkelutslaget som funksjon av tid, opp til  $t = 20$  s. Bruk tidssteg  $\Delta t = 0.01$  s.
2. Finn en passende steglengde,  $\Delta t$ , ved å utføre konvergenstest av løsningen, ved fjerde ordens Runge-Kutta metoden. Utfør også testen for Euler-Cromer metoden (som du må implementere i koden din). Plot de to konvergenstestene i hver sin figur. Vurder ut fra konvergenstesten om tidssteget brukt i oppgave 1 var tilstrekkelig.
3. Undersøk hvordan resonantamplituden avhenger av drivfrekvensen  $\Omega_D$ . Plot vinkelutslaget for minst fem ulike verdier av  $\Omega_D$ , som du mener viser denne sammenhengen.
4. Undersøk hvordan resonantamplituden avhenger av friksjonsparameteren,  $q$ . Plot vinkelutslaget for minst fem ulike verdier av  $q$ , som du mener viser denne sammenhengen.
5. For en dempet pendel *uten* drivkraft (sett  $F_D = 0$ ) skiller vi mellom overkritisk, underkritisk og kritisk dempning. Plot vinkelutslaget opp til  $t = 4$  s, og bestem for hvilke  $q$  vi finner disse regimene.
6. Ekstra oppgave:
  - a) Gå nå bort fra antakelsen at  $\sin \theta \approx \theta$ . Plot vinkelutslaget som funksjon av tid, i samme plot som vinkelutslaget for liten-vinkel tilærmelsen for  $\theta_0 = 60^\circ$  og  $\omega_0 = 0.0$ . Bruk tidssteg  $\Delta t = 0.01$ , og samme parametre som i oppgave 1. *Tips:* Konverter fra grader til radianer med 'np.radians'.
  - b) Prøv deg frem med initialverdiene og parametrene, og finn når *kaotisk* oppførsel begynner å oppstå. Plot vinkelutslaget som funksjon av tid for slik kaotisk oppførsel.

## Krav til godkjenning

Kravene under må være oppfylt for å få godkjent prosjektet.

1. Besvarelsen skal leveres i Jupyter Notebook.
2. Figurene fra alle oppgavene skal være i notebooken du leverer.
3. Alle figurer skal ha tittel på aksene, tittel på figuren, og legend (legend kreves kun dersom det er mer enn ett plot).